ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

An Introduction to Fluid Dynamics

By

G. K. Batchelor,

F.R.S.

Professor of Applied Mathematics

in the University of Cambridge

Cambridge at the University Press

1970

ДЖ. БЭТЧЕЛОР

ВВЕДЕНИЕ

В ДИНАМИКУ ЖИДКОСТИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

В. П. ВАХОМЧИКА И А. С. ПОПОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Г. Ю. СТЕПАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1973

УДК 533

Книга содержит систематическое и оригинальное изложение основ динамики жидкости. Автор, как правило, указывает способ упрощения основных уравнений и обсуждает результаты, привлекая эксперимент. Это позволяет шире охватить предмет и его приложения к геофизике, физической гидродинамике, метеорологии и океанологии.

Энциклопедичность содержания и методические достоинства книги Бэтчелора позволяют поставить ее в один ряд с такими известными трудами, как, например: Л. Прандтль «Гидроаэромеханика» (ИЛ, 1949, 1951) и Л. Милн-Томсон «Теоретическая гидродинамика» («Мир», 1964).

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров в области гидродинамики, а также для преподавателей, аспирантов и студентов университетов и физико-технических, авиационных и судостроительных институтов.

Редакция литературы по математическим наукам

© Перевод на русский язык, «Мир», 1973

Б $\frac{0243\text{-}034}{041(01)\text{-}73}$

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

«Введение в динамику жидкости» профессора Кембриджского университета Дж. К. Бэтчелора предназначено автором для студентов отделений прикладной математики; этой специальности довольно точно соответствуют отделения механики наших университетов.

Образование по механике вообще и в частности по гидромеханике следует в нашей стране традициям Н. Е. Жуковского, сочетавшего в своих курсах лекций математическую строгость и глубину изложения с наглядной геометрической и физической интерпретацией результатов при широком привлечении экспериментальных наблюдений, а также с практической, инженерной, направленностью обучения. На основе его лекций по гидродинамике и по теории крыла выросло первое поколение советских ученых и педагогов в области механики жидкости и газа. Уместно вспомнить еще сыгравший положительную роль курс А. А. Саткевича «Аэродинамика как теоретическая основа авиации» (1923 г.) того же направления, который содержит подробное изложение теории движения вязкой жидкости и теории вихрей.

В настоящее время советские студенты пользуются превосходными учебниками по гидромеханике Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе (6-е издание, 1963 г.), Л. Г. Лойцянского (3-е издание, 1970 г.), многотомным курсом теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (4-е издание, 1962 г.). Эти учебники содержат достаточно полное и уравновешенное изложение почти всех разделов современной механики жидкости и газа и в целом удовлетворяют потребностям преподавания гидромеханики. В 1970 г. вышел двухтомный учебник Л. И. Седова «Механика сплошной среды», представляющий новый этап развития учебной литературы в этой области на основе современных, наиболее широких и общих представлений и написанный по принципу получения максимума понимания при необходимом минимуме информации.

Иначе сложилась практика преподавания гидродинамики в Англии. Там в течение нескольких десятилетий основным учебником в университетах был классический курс «Гидродинамика» Г. Ламба (перевод 6-го издания 1932 г. был опубликован у нас в 1947 г.), и до последнего времени этот курс служил образцом

учебника по гидродинамике. Наряду с весьма конкретным изложением теории невязкой жидкости, главным образом на основе работ английской школы механиков XIX и начала XX веков, и в первую очередь работ самого Г. Ламба, в этом курсе непропорционально мало внимания уделялось физической стороне вопроса и многим важным разделам гидродинамики. Так, например, вопросы течения вязкой жидкости в курсе Г. Ламба рассматриваются только в 54 параграфах из 385, а течению сжимаемой жидкости (не считая главы по акустике) посвящен всего один параграф (как и теории пограничного слоя).

Дж. К. Бэтчелор решительно изменяет принятую в Англии традицию изложения гидродинамики и создает учебник типа классического руководства Л. Прандтля. Отличительные особенности учебника достаточно полно охарактеризованы автором в его предисловии; нет необходимости повторять их здесь. Книга Дж. К. Бэтчелора получила широкое распространение в Англии и в США в качестве учебника для университетов. Через три года после ее появления она вышла уже во втором издании.

Автор не претендует на полное изложение гидродинамики. Книга по существу состоит из трех частей. В первой из них (главы 1—3) рассматриваются физические свойства обычных жидкостей и газов, подробно выводятся и обсуждаются уравнения движения. Во второй части (главы 4 и 5) изучается нетурбулентное течение вязкой, в основном несжимаемой, жидкости. Вопрос изложен с необычайной ясностью и полнотой, причем автор привлекает для иллюстрации много прекрасно подобранных примеров реальных течений. Третья часть (главы 6 и 7) относится к *эффективно* невязкой и несжимаемой жидкости. Автор вкладывает в это определение вполне конкретное содержание, соответствующее и принятой им инверсии обычного изложения гидродинамики, постоянно напоминая читателю, что невязкую жидкость следует рассматривать как приближенную модель для вязкой жидкости, которая в свою очередь моделирует реальную жидкость. Такая точка зрения, конечно, не нова (и не может рассматриваться как универсальная), однако она постоянно используется автором при обсуждении постановок задач, приложений и ограничивающих условий применения теории невязкой жидкости.

По поводу книги Бэтчелора высказывалась точка зрения, что она пригодна в основном для лиц, уже знакомых с предметом. С такой точкой зрения нельзя согласиться; скорее можно сказать, что в отличие от многих других учебников, особенно написанных по ограниченным программам технических вузов, книгу Бэтчелора с интересом и пользой прочтут не только студенты, но и специалисты, особенно преподаватели и авторы учебных пособий. По многим вопросам эта книга может быть полезным дополнением к упомянутым выше отечественным учебникам.

Живой язык книги, во многих местах близкий речи лектора, резко контрастирует с обычно сухим изложением предмета. Кстати сказать, это обстоятельство неоднократно затрудняло переводчиков В. П. Вахомчика (гл. 1—4 и 6) и А. С. Попова (гл. 5 и 7), которые, однако, сумели вполне успешно справиться со своей нелегкой задачей.

Ссылки на литературу в книге ограничиваются указанием источников использованных материалов, а также справками для дальнейшего изучения отдельных вопросов. Вполне естественно, что автор отсылает читателей-студентов к доступным им книгам на английском языке. При переводе цитированные книги (особенно если они не были переведены) дополнялись по возможности их эквивалентами на русском языке. Что касается прочих ссылок, то, учитывая наличие фундаментального обзора «Механика в СССР за 50 лет», т. 2 («Наука», 1970 г.), было признано целесообразным сохранить их без специальных примечаний, ограничившись минимально необходимыми добавлениями, связанными только с самыми принципиальными случаями приоритета русских и советских ученых.

Несколько слов следует сказать о принятой в книге терминологии, которую переводчики и редактор стремились по возможности сохранить. Так, например, следуя автору, термины «двумерные» и «трехмерные» течения всюду применяются как синонимы более распространенных в нашей литературе названий плоских и пространственных течений. В некоторых случаях в тексте наряду с принятым в книге термином в скобках без специальных примечаний указан его эквивалент. Жидкие линию и поверхность Бэтчелор называет материальными линией и поверхностью; это название, действительно удачное для сплошной среды вообще, в книге было заменено на обычное. Точно так же широкий и ясный по существу термин «однородный» (однородная скорость, однородное давление) в случаях, не вызывающих сомнения, был изменен на термин «постоянный».

При переводе книги были учтены исправления и замечания автора, любезно предоставленные им вместе с предисловием к русскому изданию.

В заключение остается сказать, что книга Дж. К. Бэтчелора, как уже указывалось, представляет интерес для научных работников и инженеров в области гидродинамики, а также для преподавателей, аспирантов и студентов механико-математических факультетов университетов и физико-технических, авиационных, судостроительных и энергетических институтов.

Г. Ю. Степанов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я рассматриваю как большую честь издание моего учебника на русском языке и выражаю удовлетворение тем, что его перевод оказался в умелых руках профессора Г. Ю. Степанова.

Развитие моих взглядов в области преподавания механики жидкости происходило при воздействии многих прекрасных русских книг (в английском переводе), особенно замечательного курса Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, и я рад тому, что могу в какой-то мере возвратить свой долг, представив русскому читателю мою книгу. При ее написании я главным образом имел в виду английских студентов; вполне возможно, что в некоторых отношениях потребности советских и английских студентов несколько отличаются. Однако, хотя системы образования и, в частности, учебные программы могут быть разными, динамика жидкости универсальна, и я надеюсь, что общие идеи, на которых основана моя книга, в равной мере справедливы как в Англии, так и в Советском Союзе.

Мне интересно будет получить отклики советских читателей на эту книгу и со взаимной пользой обсудить связанные с ней методические проблемы.

Кембридж, сентябрь 1972 г.

Дж К. Бэтчелор

ПРЕДИСЛОВИЕ

При проведении занятий по динамике жидкости со студентами, специализирующимися в области прикладной математики в Кембридже, я испытывал затруднение в выборе учебного пособия. Имеется много книг, предназначенных для студентов, приступающих к изучению гидродинамики с последующим применением ее в различных областях техники, однако сравнительно мало книг пригодно для студентов, изучающих предмет с позиций прикладной математики, и, по моему мнению, вообще нет книги, которая полностью подходила бы для этой цели. Трудность состоит в том, что большие успехи, достигнутые примерно за последние 50 лет в нашем понимании многих вопросов механики жидкости, еще не нашли отражения в учебниках для студентов, специализирующихся по прикладной математике.

Поэтому преподаватель вынужден читать большую часть курса без книги или же приспосабливать его к существующим руководствам. Однако в них имеется тенденция к чрезмерному выделению классических аналитических аспектов предмета, и в особенности математической теории безвихревого течения, а это может привести к тому, что студенты не усвоят совершенно необходимые физические аспекты механики жидкости. Студенты (а также некоторые преподаватели) склонны делать выводы о содержании предмета, исходя из вопросов, которые излагаются в имеющихся книгах, а к великому сожалению, в очень многих книгах по механике жидкости для математиков-прикладников речь идет о задачах, разрешимых математически, но не имеющих отношения к тому, что происходит в реальных жидкостях.

Поэтому я попытался написать учебник, который может быть использован студентами, изучающими прикладную математику, и который содержит физические объяснения явлений, происходящих в жидкостях, и сведения о них, полученные в проведенных ранее исследованиях. Несмотря на большой объем, книга представляет собой именно *введение* в механику жидкости; иначе говоря, она не требует никаких предварительных знаний о предмете, а материал в ней подобран таким образом, чтобы подвести читателя к пониманию основных идей и приложений. Книга возникла из ряда курсов лекций, и в ней содержится очень мало материала, не опро-

бованного в аудитории. Некоторая часть материала давно и хорошо известна, часть же сравнительно нова; для всего содержания я попытался найти такой способ изложения, который кажется мне наилучшим с общей точки зрения. Книга подготовлена как связное целое и предназначена для изучения полностью или по крайней мере бо́льших разделов, а не для обращения за справками по частным задачам и методам.

Автор специально имел в виду потребности старшекурсников университетов, специализирующихся по прикладной математике, т. е. те потребности, с которыми он лучше всего знаком, хотя можно надеяться, что студенты инженерных специальностей также смогут использовать эту книгу. Истинные нужды специалистов по прикладной математике и инженеров в настоящее время не сильно отличаются. Как те, так и другие нуждаются прежде всего в ясном понимании основ механики жидкости, а этого можно добиться без использования сложных математических методов.

Читатель, знакомый с векторным анализом и тензорными обозначениями, не должен встретить затруднений с чисто математическим содержанием этой работы. Книга довольно сильно насыщена теорией, но не математическими выкладками.

Повсюду в книге обращается внимание на соответствие между наблюдением и различными схематическими и расчетными моделями течений. Помещенные в книге фотографии течений являются ее важной составной частью и, как я надеюсь, помогут читателю развить представление о реальных свойствах среды, которые скрыты за теоретическими рассуждениями и выводами. Это особенно важно для тех студентов, которые не имеют возможности в лабораторных условиях наблюдать явления, происходящие в потоке жидкости. Книги и лекции Л. Прандтля представляются мне замечательным примером изложения как теории, так и эксперимента, и я находился в значительной степени под их влиянием. Прандтль знал, в частности, ценность хорошей четкой фотографии течения и хорошо поставленного эксперимента; многие полученные им фотографии до сих пор представляют собой наилучшие из имеющихся иллюстраций пограничного слоя.

Несколько слов нужно сказать о выборе материала этой книги и о порядке его расположения. Первоначально я хотел дать в одной книге введение во все основные разделы динамики жидкости, но вскоре обнаружил, что это несовместимо с той степенью полноты изложения, которую я также имел в виду. Поэтому было решено рассмотреть только часть материала, во всяком случае в этом томе.

В первых трех главах подготавливается база для обсуждения всех разделов динамики жидкости и рассматриваются физические свойства жидкостей, кинематика поля течения и уравнения движения в общей форме. Цель этих трех вводных глав состоит

в том, чтобы показать, каким образом различные разделы динамики жидкости связаны с предметом в целом и опираются на определенные идеализации или предположения о природе жидкости или о характере ее движений. Преподаватель вряд ли захочет включить все эти предварительные сведения в курс лекций, однако они могут составить отдельный спецкурс и, как я надеюсь, будут полезны в качестве основы для дальнейшего изучения предмета. В остальных четырех главах жидкость предполагается несжимаемой и имеющей однородную (постоянную в пространстве) плотность и постоянный коэффициент вязкости. Я считаю течение несжимаемой вязкой жидкости центральным разделом динамики жидкости вследствие его фундаментального характера и практической важности. Жидкости с необычными свойствами сейчас очень модны, однако большинство основных динамических идей проясняется при изучении вихревых течений жидкости с внутренним трением; эти течения, несомненно, составляют ключевой раздел для применений в геофизике, химической технологии, гидравлике, инженерной механике и авиационной технике. К сожалению, много важных разделов, таких, как газовая динамика, поверхностные волны, движение под действием сил плавучести, турбулентность, тепло- и массообмен, магнитная гидродинамика, пришлось опустить, однако предмет в целом просто слишком обширен для надлежащего рассмотрения его в одном томе. Если настоящая книга будет принята так, что появится необходимость в выпуске второго тома, то будет можно сделать изложение более полным.

Что касается расположения материала, то в главах 4—7 описание движения вязкой жидкости и течения при больших числах Рейнольдса предшествует обсуждению безвихревого течения и движения невязкой жидкости при наличии завихренности (хотя многие чисто кинематические свойства распределения скоростей безвихревого потока, естественно, обсуждаются в гл. 2). Причина, побудившая меня принять это необычное расположение материала, отнюдь не связана с тем, что я считаю «классическую» теорию безвихревого течения менее важной. Действительная причина заключается в том, что результаты, касающиеся течения невязкой жидкости, можно уверенно применять только тогда, когда выяснены условия справедливости предположения о нулевой вязкости. Математическая теория безвихревого течения является мощным средством решения многих задач, но сама по себе она не дает никаких сведений о том, будет ли рассматриваемое поле течения при больших числах Рейнольдса в целом или частично приближенно безвихревым. Из-за этих весьма нужных сведений важно иметь некоторое предварительное представление об эффектах вязкости реальной жидкости и пограничного слоя, и если во время, когда Ламб писал свой классический

трактат «Гидродинамика», понимание этих эффектов было не полным, то в настоящее время такое понимание уже достигнуто. Я считаю, что первой книгой, по крайней мере на английском языке, которая показала, как с помощью понятий пограничного слоя, отрыва потока и распространения завихренности можно изучить много различных течений, была книга «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости» под редакцией Сиднея Гольдштейна. Эта первая книга подобного рода, опубликованная в 1938 г., предназначалась прежде всего для научных работников; я попытался сделать следующий шаг и изложить представления о течении реальных жидкостей так, чтобы они были понятны студентам на ранней стадии изучения динамики жидкости.

Учитывая, что для лучшего изучения течения вязких жидкостей может быть желательно сначала рассмотреть безвихревой поток невязкой жидкости, я понимаю, что тот или иной преподаватель может принять другой порядок изложения материала курса в зависимости от лекционного времени, которым он располагает. Студентам-математикам, которые должны прослушать только один курс по динамике жидкости, рассчитанный на 30 лекций, неразумно начинать с изучения течения вязкой жидкости и пограничных слоев, подготавливая базу для описания течений невязкой жидкости и их приложений, поскольку тогда для прохождения этой темы осталось бы очень мало времени, а преподаватель был бы вынужден, в нарушение логики, начав чтение лекций со 2-й и 3-й глав, сразу перейти к главе 6-й, включив в нее только некоторые вводные параграфы 5-й и 7-й глав. Трудность, присущая изложению динамики жидкости студентам-математикам последнего курса, состоит в том, что краткое введение в предмет приводит к тенденции сообщать аналитические методы и результаты, не давая представления о том, к чему они применяются. Кроме того, студенты должны иметь некоторое дополнительное время для усвоения принципов гидродинамики, и я полагаю, что для настоящего введения в предмет студентам-математикам необходимо от 40 до 50 лекций. Однако на книгу не накладываются такие ограничения, как на курс лекций. Надеюсь, преподаватели согласятся со мной в том, что студентам полезно иметь возможность просмотреть весь материал в логическом порядке и достичь более глубокого понимания предмета путем дополнительного чтения, даже если в курсе лекций многие важные разделы, такие, как отрыв пограничного слоя, были опущены.

Упражнения составляют важную часть учебного процесса при овладении таким аналитическим предметом, как динамика жидкости, поэтому чтение книги должно сопровождаться работой над приведенными в ней упражнениями. Я хотел бы привести больше подходящих задач и упражнений, но поиски их среди

уже опубликованных задач в других руководствах мало что дали в смысле подхода, принятого в этой книге. Более того, опубликованные упражнения сконцентрированы в небольшом числе разделов. Трудная задача составления и подбора соответствующих упражнений для всей современной динамики жидкости до сих пор еще не решалась. Поэтому в конце глав представлено только по нескольку упражнений. Упражнения должны быть подобраны в соответствии с планом книги и уровнем группы студентов, для которых они предназначены, и вполне возможно, что преподаватель может рассматривать как упражнения многие части книги, не включая их явно в курс лекций, как это делал и я при обучении студентов.

В равной степени важно, чтобы курс лекций, построенный по содержанию этой книги, сопровождался наглядными демонстрациями течения жидкости. При этом может потребоваться помощь коллег по специальным техническим дисциплинам. Кроме того, желательно использовать фильмы по динамике жидкости, особенно полезные для тех групп студентов, которые не выполняют лабораторных работ. Тем или иным способом преподаватель должен указать на связь между теорией и поведением реальных жидкостей; механика жидкости становится значительно менее интересной, если она рассматривается в основном как упражнение по математике.

Я обязан поблагодарить большое число лиц за помощь при подготовке этой работы. Многие коллеги любезно сделали ценные замечания по отдельным частям рукописи и помогли мне более правильно понять некоторые вопросы.

Дж. К. Бэтчелор

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Жирным шрифтом обозначены векторы.

$\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ — радиусы-векторы точек,

$|\mathbf{x}|$ — абсолютная величина (модуль) радиуса-вектора,

$|\mathbf{s}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ — радиус-вектор относительного положения точки,

$\mathbf{u}$ — вектор скорости в определенный момент времени и в определенной точке пространства; $|\mathbf{u}|=q$,

$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla$ — оператор субстанциональной (полной) производной, характеризующей скорость изменения в точке, движущейся вместе с жидкостью; применяется только к функции от $\mathbf{x}$ и t,

Система координат	Координаты	Компоненты скорости
Декартова	x, y, z или x_1, x_2, x_3	u, v, w или u_1, u_2, u_3
Полярная	r, θ	u, v или u_r, u_θ
Сферическая	r, θ, φ	u, v, w или u_r, u_θ, u_φ
Цилиндрическая	x, σ, φ $(\sigma^2=y^2+z^2)$	u, v, w или u_x, u_σ, u_φ

$\Delta=\nabla\cdot\mathbf{u}$ — дивергенция скорости (относительная скорость изменения объема элемента жидкости),

$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}$ — вектор вихря, завихренность (удвоенная величина локальной угловой скорости вращения жидкости),

$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ — тензор скоростей деформации,

φ — скалярный потенциал безвихревого распределения (поля) скорости ($\mathbf{u}=\nabla\varphi$),

$\mathbf{B}$ — векторный потенциал соленоидального распределения (поля) скорости ($\mathbf{u}=\nabla\times\mathbf{B}$),

ψ — функция тока в соленоидальном поле скоростей,

а) двумерное (плоское) течение:

$$\mathbf{B}=(0,\ 0,\ \psi),$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\qquad\text{или}\qquad u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

б) осесимметричное течение
в цилиндрической системе координат:

$$B_\varphi = \frac{\psi}{\sigma}, \quad u_x = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad u_\sigma = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

в сферической системе координат:

$$B_\varphi = \frac{\psi}{r\sin\theta}, \quad u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности, обычно внешняя нормаль, если поверхность замкнутая,

δV, $\mathbf{n}\delta A$, $\delta \mathbf{x}$ — элементы соответственно объема, поверхности и линии в определенной точке пространства,

$\delta\tau$, $\mathbf{n}\delta S$, $\delta \mathbf{l}$ — элементы соответственно жидкого объема, жидкой поверхности и линии (нити),

σ_{ij} — тензор напряжений,

$\sigma_{ij} n_j \delta A$ — i-я составляющая силы, действующей на элемент поверхности $\mathbf{n}\delta A$ с той стороны жидкости, в которую направлена нормаль $\mathbf{n}$,

$\mathbf{F} = -\nabla\Psi$ — консервативная массовая сила (на единицу массы).

Сила инерции (на единицу массы) есть локальное ускорение со знаком минус.

Вихревая линия есть линия, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору вихря $\boldsymbol{\omega}$.

Вихревая нить — особая линия в распределении завихренности, при обходе вокруг которой циркуляция скорости не равна нулю.

Книги, которые можно рекомендовать в качестве дополнительной литературы, подробно цитируются в тексте, чаще всего в примечаниях. Кроме того, делаются ссылки на сравнительно небольшое число оригинальных работ, иногда с чисто исторической точки зрения, иногда вследствие необходимости дать точную ссылку, а иногда, хотя и весьма редко, в качестве руководства для дальнейшего чтения по отдельным разделам. Такие работы обозначаются в тексте фамилией автора и годом издания (например, Смит (1950)); полный список всей цитированной литературы приведен в конце книги.

1

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

1.1. Твердые тела, жидкости и газы

Характерным свойством жидкостей, подразделяющихся на собственно жидкости и газы, является та легкость, с которой их можно деформировать. Любое твердое тело имеет определенную форму, и она может изменяться только при изменении внешних условий. В противоположность этому любая часть жидкости не имеет какой-либо предпочтительной формы, и различные элементы однородной жидкости без труда можно перемещать, не нарушая ее макроскопических свойств. Тот факт, что может легко возникать относительное движение различных частиц жидкости, а в общем случае оно действительно возникает, когда на жидкость действуют силы, лежит в основе научной дисциплины — динамики жидкости.

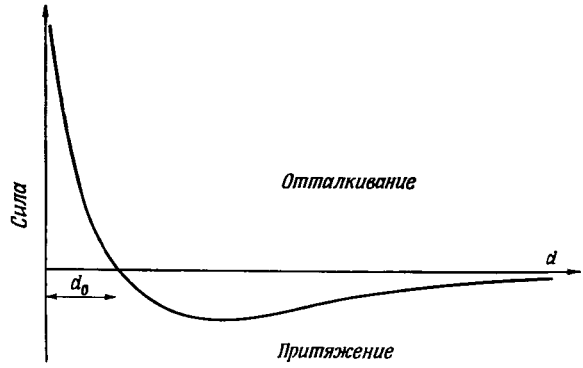
Между твердыми телами и жидкостями нельзя провести строгого разграничения, так как имеется много материалов, которые в некоторых отношениях ведут себя подобно твердому телу, а в других — подобно жидкости. «Обычное» твердое тело можно было бы рассматривать как материал, форма и относительные положения составных частей которого изменяются только на малую величину, когда происходят малые изменения в действующих на него силах. В соответствии с этим «обычная» жидкость (общепринятого термина нет) могла бы быть определена как такой материал, у которого относительные положения его элементов изменяются на значительную величину, когда к этому веществу приложены надлежащим образом подобранные силы, хотя бы и малые. Однако даже если эти два определения удалось бы сделать достаточно строгими, то тем не менее существуют некоторые материалы, которые в действительности обладают двойственными свойствами. Тиксотропные материалы, такие, например, как желе или краски, ведут себя подобно упругому твердому телу, если их на некоторое время оставить в состоянии покоя, но если эти материалы подвергнуть интенсивному возмущению путем перемешивания или встряхивания, то они теряют упругость и ведут себя как жидкости. Вар в обычных условиях ведет себя как твердое тело, но если на него в течение длительного времени действует сила, то деформация неограниченно увеличивается, как у обычной жидкости. Еще большее затруднение вызывает рассмотрение таких материалов, как концентрированные полимерные

растворы, в которых одновременно могут проявляться свойства твердого тела и жидкости.

К счастью, наиболее распространенные жидкости, и в частности воздух и вода, являются с большой степенью точности обычными в указанном выше смысле, и этим оправдывается наше особое внимание к таким жидкостям. В этой книге мы будем считать, что жидкость не может препятствовать произвольно малым приложенным силам деформировать ее таким образом, чтобы объем жидкости оставался неизменным. Смысл введения такого предположения выяснится позже, после того как мы изучим силы, которые стремятся вызвать деформацию элемента жидкости. В то же время следует отметить, что обычная жидкость может оказывать сопротивление попыткам ее деформировать; однако по определению сопротивление не может помешать появлению деформации, или, иначе говоря, сила сопротивления обращается в нуль вместе со скоростью деформации.

Так как мы будем заниматься только своего рода идеализированным материалом, названным здесь обычной жидкостью, то нет необходимости использовать этот термин, и в дальнейшем мы будем говорить просто о жидкостях.

Поскольку речь идет о динамических явлениях, различие между собственно жидкостями и газами менее существенно, чем между твердыми телами и жидкостями. По причинам, связанным с природой межмолекулярных сил, большинство веществ может существовать в одной из двух устойчивых фаз, в которых проявляется свойство текучести или легкой деформируемости. Плотность вещества в жидкой фазе в обычных условиях намного больше его плотности в газообразной фазе, но это различие само по себе несущественно, поскольку оно в основном приводит к различию в величинах сил, необходимых для получения данных величин ускорения, а не к различию типов движения. Наиболее важное различие между механическими свойствами жидкостей и газов связано с их объемной упругостью, т. е. сжимаемостью. Газы могут сжиматься значительно легче, чем жидкости, и вследствие этого любое движение с заметными изменениями давления будет сопровождаться значительно бо́льшими изменениями удельного объема в случае газа, чем в случае жидкости. Заметные изменения давления в жидкости нужно учитывать в метеорологии, где они возникают в результате действия силы тяжести на всю атмосферу, и при очень быстрых движениях, таких, какие наблюдаются в баллистике и аэронавтике в результате движения твердых тел в жидкости с большой скоростью. Позднее будет показано, что имеются общие условия, при которых движения жидкости сопровождаются лишь малыми изменениями давления, и в этом случае газы и жидкости ведут себя одинаково, поскольку в обоих случаях изменения удельного объема малы.



Р и с. 1.1.1. Зависимость силы взаимодействия простых (неионизированных) молекул от расстояния d между их центрами.

Основные свойства твердых тел, жидкостей и газов непосредственно связаны с их молекулярной структурой и с природой сил, действующих между молекулами. В этом можно убедиться, рассматривая в общем виде силу, действующую между двумя типичными изолированными молекулами в зависимости от расстояния между ними. При малых расстояниях d (порядка 10^{-8} см) между центрами простых молекул между ними действуют интенсивная сила квантовой природы, притяжение или отталкивание в соответствии с возможностью обмена электронными оболочками молекул. Если такой обмен возможен, то возникает сила притяжения, и она составляет основу химической связи; если обмен невозможен, то действует сила отталкивания, которая очень быстро уменьшается с увеличением расстояния между молекулами. При бóльших расстояниях между центрами молекул, например порядка 10^{-7} или 10^{-6} см, между ними действует слабая сила притяжения (предполагается, что молекулы неионизированы, как это и бывает при обычных температурах). Эта сила уменьшается сначала как d^{-7} и в конце концов как d^{-8}, когда величина расстояния d велика; грубо говоря, можно считать, что это происходит вследствие электрической поляризации одной молекулы под влиянием другой [1]). График силы взаимодействия двух молекул, между которыми нет химической связи, в зависимости от расстояния d имеет вид, изображенный на рис. 1.1.1. На расстоянии d_0, при котором сила взаимодействия изменяет знак, одна молекула по отношению к другой, очевидно, находится в положении

[1]) См., например, Moelwyn-Hughes E. A., States of Matter, Oliver and Boyd, 1961. [см. также: Волькенштейн М. В., Строение и физические свойства молекул, М., 1955.—*Ред.*].

устойчивого равновесия. Величина d_0 для большинства простых молекул имеет порядок $(3 \div 4) \cdot 10^{-8}$ см.

Зная массу молекул и плотность соответствующего вещества, можно рассчитать среднее расстояние между центрами соседних молекул. Для веществ, состоящих из простых молекул, расчет показывает, что среднее расстояние между ними в газообразной фазе при нормальных температуре и давлении имеет порядок $10d_0$, а для молекул в жидкой и твердой фазах — порядок d_0. Поэтому в газах при обычных условиях молекулы находятся на таком большом расстоянии друг от друга, что между ними действуют чрезвычайно слабые силы притяжения, за исключением редких случаев, когда две молекулы оказываются близкими; в кинетической теории газов обычно вводится понятие «совершенного газа», для которого потенциальная энергия молекулы, обусловленная ее соседями, мала по сравнению с ее кинетической энергией; это газ, в котором каждая молекула движется независимо от соседних, исключая тот случай, когда происходит их столкновение. Очевидно, что в жидкой и твердой фазах молекула, наоборот, находится все время под воздействием интенсивного поля сил нескольких соседних молекул.

Молекулы в этом случае настолько плотно упакованы, насколько позволяют силы отталкивания. В случае твердого тела расположение молекул в нем фактически не изменяется и может иметь простую периодическую структуру, как в кристалле; молекулы совершают колебания относительно своих устойчивых положений (кинетическая энергия такого колебательного движения составляет часть тепловой энергии твердого тела), однако молекулярная решетка сохраняется до тех пор, пока температура тела не достигнет точки плавления.

Плотность большинства веществ при плавлении понижается на несколько процентов (увеличение плотности при переходе льда в воду — аномальное явление), и поэтому кажется парадоксальным тот факт, что такое малое изменение расстояния между молекулами сопровождается таким резким изменением подвижности материала. Сведения о жидком состоянии остаются еще неполными, хотя, по-видимому, расположение молекул отчасти упорядочено, так как группы молекул, в целом обладающие подвижностью, иногда располагаются в правильный ряд с другими группами молекул, а иногда разделяются на меньшие группы. Расположение молекул непрерывно изменяется, и вследствие этого любая сила, приложенная к жидкости (кроме объемного сжатия), вызывает деформацию, которая растет до тех пор, пока действует сила. Сравнение некоторых молекулярных свойств жидкости и свойств твердого тела и газа представлено в таблице на стр. 21. Если вести сравнение по простейшему макроскопическому параметру, а именно по плотности, то жидкости значительно ближе

	Межмолекулярные силы	Отношение амплитуды случайного теплового движения молекул к d_0	Расположение молекул	Тип требуемой статистики
Твердое тело	Сильные	$\ll 1$	Упорядоченное	Квантовая
Жидкость	Средние	~ 1	Частично упорядоченное	Квантовая + классическая
Газ	Слабые	$\gg 1$	Неупорядоченное	Классическая

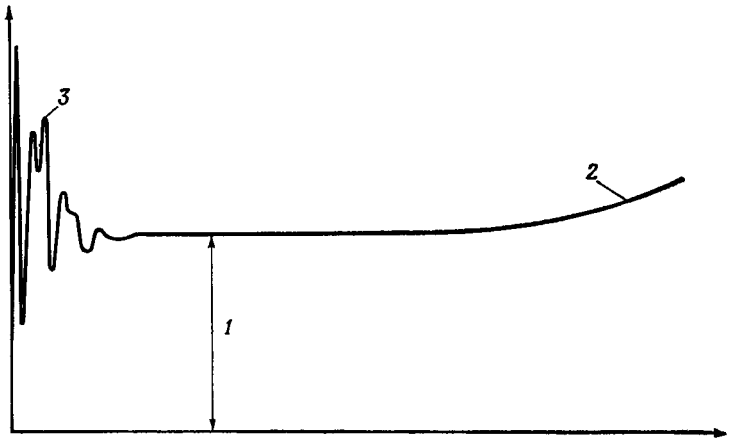
к твердым телам, а если сравнивать по текучести, то они ближе к газам.

Молекулярный механизм, посредством которого жидкость оказывает сопротивление деформации, не такой, как у газа, хотя, как мы увидим, дифференциальное уравнение, определяющее скорость изменения деформации, имеет одинаковую форму в обоих случаях.

1.2. Гипотеза сплошной среды

Молекулы газа разделены пустотами с линейными размерами, значительно бóльшими самих молекул. Даже в жидкости, в которой молекулы упакованы почти настолько плотно, насколько позволяют силы отталкивания, проявляющиеся на близких расстояниях между ними, масса сконцентрирована в ядре атомов, составляющих молекулу, и распределена по объему, занимаемому жидкостью, далеко не равномерно. Другие свойства жидкости, например состав или скорость, также имеют весьма неравномерное распределение, когда жидкость рассматривается в таком малом масштабе, что обнаруживаются отдельные молекулы. Однако в механике жидкости обычно изучается поведение вещества в целом в макроскопическом масштабе, большом по сравнению с расстоянием между молекулами, и — что редко бывает — нужно учитывать молекулярную структуру жидкости. Всюду в книге будем считать макроскопическое поведение жидкостей одинаковым, как если бы их структура была идеально непрерывной, а физические величины, например массу и количество движения, связанные с тем веществом, которое содержится внутри рассматриваемого объема, будем считать равномерно распределенными по этому объему, отвлекаясь от того, что в действительности они концентрируются в его малых частях.

Справедливость такого более простого представления, *гипотезы сплошной среды*, в условиях каждодневного опыта очевидна. В действительности структура и свойства воздуха и воды, оче-



Р и с. 1.2.1. Влияние величины объема на плотность, измеряемую прибором в этом объеме. По оси абсцисс: объем жидкости, к которому относится измерение; по оси ординат: измеряемая плотность.
1 —«локальное» значение плотности жидкости; *2* — изменение, связанное с пространственным распределением плотности; *3* — изменения, связанные с молекулярными флуктуациями.

видно, настолько непрерывно и плавно изменяются при наблюдении их с помощью любого обычного измерительного прибора, что никакая другая гипотеза не будет, по-видимому, естественной.

Когда измерительный прибор помещен в жидкость, он регистрирует некоторым образом ее параметр фактически внутри малого окружающего прибор объема, и измеренная величина представляет собой по существу среднее значение этого параметра по всему этому объему (и иногда также по аналогичному малому промежутку времени). Для того чтобы измерение было локальным, измерительный прибор выбирается обычно так, чтобы возмущаемый им объем был достаточно мал; это означает, что дальнейшее уменьшение прибора (конечно, в разумных пределах) не оказывает влияния на его показания. Ответ на вопрос, почему молекулярная структура жидкости обычно не влияет на такое измерение, состоит в том, что возмущенный объем, который достаточно мал, чтобы это измерение было локальным по отношению к макроскопическому масштабу, все-таки настолько велик, что содержит еще очень большое число молекул, и достаточно велик, чтобы флуктуации, возникающие из-за различных свойств молекул, не оказывали никакого влияния на наблюдаемое среднее состояние. Конечно, если возмущаемый объем сделать настолько малым, чтобы в нем содержалось только несколько молекул, то число и тип молекул в возмущаемом объеме в момент наблюдения будут изменяться от одного наблюдения к другому, и результат изме-

рения будет изменяться случайным образом с изменением размера этого объема. На рис. 1.2.1 представлен закон, по которому измерение плотности жидкости зависит от возмущаемого прибором объема. Жидкость можно рассматривать как сплошную среду в тех случаях, когда (как на приведенном графике) измеренный параметр постоянен для возмущаемых объемов, малых по сравнению с макроскопическим масштабом, но больших по сравнению с микроскопическим расстоянием между молекулами.

Большое различие между характерным масштабом для жидкости как целого и для структуры из отдельных частиц видно из числовых примеров. Для большинства лабораторных экспериментов с жидкостями линейные размеры области, занятой жидкостью, определяются величинами не менее 1 см, и на расстояниях порядка 10^{-3} см происходит очень малое изменение физических и динамических свойств жидкости (за исключением, однако, специальных областей, таких, как ударная волна). Следовательно, прибор, помещенный в возмущаемом объеме порядка 10^{-9} см^3, будет регистрировать локальное свойство среды. Хотя этот объем и мал, при нормальных температуре и давлении он содержит $3 \cdot 10^{10}$ молекул воздуха (и еще большее количество молекул воды) — число, заведомо достаточно большое, чтобы осреднение по молекулам не зависело от их числа. Только в исключительных условиях малой плотности газа, как при полете ракет или спутников на больших высотах над поверхностью Земли, или при очень резком изменении плотности в пространстве, как в ударной волне, появляется затруднение в выборе возмущаемого прибором объема, дающего возможность провести локальное измерение и содержащего достаточно большое число молекул.

Гипотеза сплошной среды дает возможность придать определенный смысл понятию «значение в точке», применяемому к различным параметрам жидкости, например плотности, скорости, температуре, и вообще считать эти величины непрерывными функциями координат и времени. На этом основании можно составить уравнения, описывающие движение жидкости, которые не зависят, когда речь идет об их форме, от структуры ее частиц,— так что газы и жидкости изучаются одинаково,— и в действительности уравнения не зависят от того, существует ли какая-либо структура частиц. Аналогичная гипотеза вводится в механике твердых деформируемых тел, и эти два предмета вместе часто называются механикой сплошных сред.

Несмотря на естественность гипотезы сплошной среды, определение свойств этой гипотетической непрерывной среды, которая движется таким же образом, как и реальная жидкость с данной структурой частиц, оказывается трудным делом. Для вывода уравнений, определяющих локальную скорость газа в указанном выше смысле, использовались методы кинетической теории газов,

и с помощью упрощающих предположений о столкновении молекул можно показать, что уравнения имеют такой же вид, как и в случае движения некоторой непрерывной жидкости, хотя значения коэффициентов молекулярного переноса (см. § 1.6) определяются не строго. Математическое обоснование для рассмотрения движения газов как движения сплошной среды выходит за рамки книги, и оно неполно для жидкостей, поэтому мы вынуждены ограничиться введением такой гипотезы. Обширные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что обычные реальные жидкости (газы и собственно жидкости) движутся так, как если бы они были непрерывны при нормальных условиях, а в действительности и при значительных отклонениях от них; однако некоторые свойства эквивалентной непрерывной среды необходимо определять эмпирически.

1.3. Объемные и поверхностные силы, действующие на жидкость

Можно различать два вида сил, которые действуют на вещество в целом. К первому относятся силы дальнего действия, подобные силе тяжести, которая очень медленно убывает с увеличением расстояния между взаимодействующими элементами и которая все еще значительна на расстояниях, характерных для естественных течений жидкости. Такие силы способны проникать внутрь жидкости и воздействовать на все ее элементы. Сила тяжести представляет собой очевидный и наиболее важный пример; два других вида сил дальнего действия, представляющие интерес в механике жидкости,— это электромагнитные силы в жидкости, несущей электрический заряд, или в жидкости, через которую пропущен электрический ток, и силы инерции (такие, как центробежная сила), которые действуют на все элементы массы, если их движение рассматривается в системе координат, движущейся с ускорением. Следствие медленного изменения любой из этих сил дальнего действия с изменением положения элемента жидкости, на который она действует, состоит в том, что сила действует в одинаковой мере на все вещество внутри малого элемента объема, а полная сила пропорциональна величине этого элемента объема. Поэтому силы дальнего действия можно также назвать *объемными*, или *массовыми*, силами.

Когда уравнения движения записываются в общем виде, сумма всех массовых сил, действующих в момент времени t на жидкость внутри элемента объема δV, окружающего точку с радиусом-вектором $\mathbf{x}$, обозначается

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,\rho\delta V. \tag{1.3.1}$$

Множитель ρ введен вследствие того, что два обычных типа массовых сил на единицу объема — сила тяжести и сила инерции, вводимая в движущейся с ускорением системе координат,— в действительности пропорциональны массе элемента объема, на который они действуют. Для гравитационного поля Земли сила на единицу массы есть

$$\mathbf{F} = \mathbf{g},$$

причем вектор $\mathbf{g}$ не зависит от времени и направлен вертикально вниз.

Ко второму виду относятся силы близкого действия, которые непосредственно связаны с молекулярным строением вещества, убывают крайне быстро с увеличением расстояния между взаимодействующими элементами и существенны только тогда, когда величина этого расстояния сравнима с величиной удаления молекул друг от друга в жидкости. Они пренебрежимо малы до тех пор, пока нет непосредственного механического контакта между взаимодействующими элементами, как в случае взаимодействия между двумя твердыми телами, поскольку без такого контакта никакие молекулы одного из элементов не подходят достаточно близко к молекулам другого элемента. Силы близкого действия, возникающие между двумя массами газа на их общей границе, вызваны в основном переносом количества движения через общую границу в результате прохождения через нее молекул. В случае жидкости этот процесс более сложен, так как имеются добавки к силам близкого действия, или контактным силам, за счет переноса молекулами количества движения поперек общей границы при их колебательном движении относительно некоторого квазистационарного положения и за счет сил взаимодействия между молекулами по обе стороны от общей границы; обе эти добавочные силы имеют большую величину, но они действуют приблизительно в противоположных направлениях и их результирующая обычно намного меньше каждой силы в отдельности. Однако, как уже отмечалось, законы механики сплошной среды не зависят от молекулярного происхождения этих контактных сил и на данной стадии нет необходимости вдаваться в детали их происхождения.

Если на элемент массы жидкости действуют силы близкого действия, возникающие при взаимодействии с веществом (твердым или жидким), расположенным вне элемента, то они могут действовать лишь на тонкий слой, который примыкает к границе элемента жидкости и толщина которого равна глубине «проникания» этих сил [1]). Поэтому полные силы близкого действия опре-

[1]) Если только не предполагается, что элемент имеет столь малые линейные размеры, что силы близкого действия, вызываемые внешней материальной средой, все еще значительны в центре элемента; однако тогда элемент будет содержать в лучшем случае только несколько молекул и представление о жидкости как о сплошной среде вряд ли будет возможным.

деляются площадью поверхности элемента, на который они действуют, и не зависят непосредственно от его объема. Различные части замкнутой поверхности, окружающей элемент жидкости, имеют различные ориентации, так что нет смысла определять силы близкого действия через величину их полного влияния на конечный элемент объема жидкости; вместо этого рассмотрим *плоский* элемент поверхности в жидкости и определим локальную силу близкого действия как полную силу, действующую на одну сторону элемента от жидкости с другой его стороны. При условии, что глубина проникания сил близкого действия мала по сравнению с линейными размерами плоского элемента поверхности, эта полная сила, действующая на элемент, должна быть пропорциональна его площади δA, и величину этой силы в момент времени t для элемента с радиусом-вектором $\mathbf{x}$ можно записать в виде вектора

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)\,\delta A. \qquad (1.3.2)$$

Сила $\boldsymbol{\Sigma}$, действующая на единицу площади, называется локальным *напряжением*. Ниже излагается способ определения зависимости от направления единичной нормали к элементу поверхности $\mathbf{n}$. Сила, действующая через элемент поверхности жидкости на жидкость с другой его стороны, равна, конечно, $-\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)\,\delta A$, а поскольку эту силу можно представить также в виде $\boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)\delta A$, то ясно, что функция $\boldsymbol{\Sigma}$ должна быть нечетной по $\mathbf{n}$. Соглашение о направлении нормали $\mathbf{n}$, которое должно быть принято здесь, состоит в том, что вектор $\boldsymbol{\Sigma}$ представляет собой напряжение, оказываемое жидкостью с той стороны элемента поверхности, в которую направлена нормаль $\mathbf{n}$, на жидкость с противоположной стороны элемента поверхности; это значит, что нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\Sigma}$, совпадающая с направлением нормали $\mathbf{n}$, представляет собой силу растяжения.

В гл. 3 будут выведены уравнения, описывающие движение жидкости, на которую действуют силы дальнего действия или массовые силы вида (1.3.1) и силы близкого действия или поверхностные силы вида (1.3.2). Силы этих двух видов действуют также и на твердые тела, и их существование, вероятно, непосредственно более очевидно по физическому смыслу для твердых тел, чем для жидких сред. В случае недеформируемого твердого тела единственно возможными силами близкого действия являются поверхностные (возникающие, например, в результате механического контакта с другим недеформируемым телом), и поэтому нетрудно определить движение тела, когда известны действующие на него полная массовая и полная поверхностная силы. В тех случаях, когда твердое тело деформируемо, а также в жидкости различные частицы способны совершать различные движения и нужно рассматривать распределение поверхностных и массовых сил по всей среде; более того, относительное движение

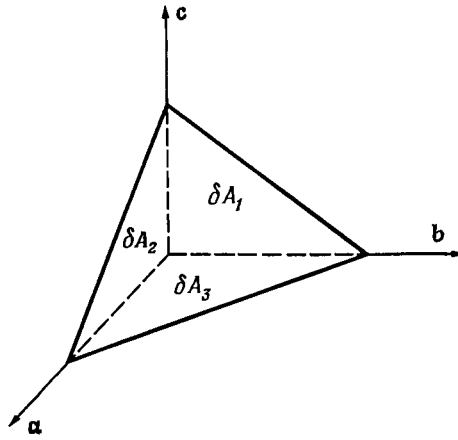


Рис. 1.3.1. Элемент объема в форме тетраэдра с тремя взаимноортогональными гранями.

частиц может оказывать влияние как на поверхностные, так и на массовые силы. Зависимость массовых сил от локальных свойств жидкости очевидна, по крайней мере в случаях силы тяжести и сил инерции, вводимых при ускоренном движении системы координат, однако зависимость поверхностных сил от локальных свойств и характера движения жидкости потребует внимательного изучения.

Представление поверхностных сил тензором напряжений

Некоторые сведения о напряжении $\boldsymbol{\Sigma}$ можно получить из его определения как силы, действующей на единицу площади, и закона движения элемента массы жидкости. Сначала найдем зависимость напряжения $\boldsymbol{\Sigma}$ от направления нормали к элементу поверхности, на который оно действует.

Рассмотрим все силы, действующие одновременно на жидкость внутри элемента объема δV в форме тетраэдра, как показано на рис. 1.3.1. Три его ортогональные грани имеют площади δA_1, δA_2, δA_3 и единичные внешние нормали $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$, а четвертая, наклонная грань имеет площадь δA и единичную нормаль $\mathbf{n}$. Поверхностные силы будут действовать на жидкость в тетраэдре через каждую из четырех граней, и их сумма равна

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})\,\delta A + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{a})\,\delta A_1 + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{b})\,\delta A_2 + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{c})\,\delta A_3.$$

Зависимость напряжения $\boldsymbol{\Sigma}$ от $\mathbf{x}$ и времени t здесь не указывается, так как радиус-вектор $\mathbf{x}$ для всех четырех слагаемых в данный

момент времени t приближенно один и тот же. Принимая во внимание ортогональность трех граней, получим три соотношения вида

$$\delta A_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \delta A,$$

i-ю компоненту суммы поверхностных сил можно поэтому записать в виде [1])

$$[\Sigma_i(\mathbf{n}) - \{a_j \Sigma_i(\mathbf{a}) + b_j \Sigma_i(\mathbf{b}) + c_j \Sigma_i(\mathbf{c})\} n_j] \delta A. \qquad (1.3.3)$$

Полная массовая сила, действующая на жидкость внутри тетраэдра, пропорциональна объему δV, который в линейных размерах тетраэдра представляет собой величину меньшего порядка, чем площадь δA. Масса жидкости в тетраэдре также есть величина порядка δV, и, следовательно, такой же порядок имеет произведение массы на ускорение жидкости в тетраэдре при условии, что локальная плотность и ускорение конечны. Таким образом, если линейные размеры тетраэдра сделать сколь угодно малыми, не изменяя его формы, то первые два члена уравнения

$$\text{Масса} \times \text{Ускорение} = (\text{Результирующая массовых сил}) + (\text{Результирующая поверхностных сил})$$

стремятся к нулю как δV, а третий член, очевидно, стремится к нулю как δA. При этих условиях уравнение может удовлетворяться только в том случае, если коэффициент при δA в (1.3.3) тождественно равен нулю (в предположении, что точные данные о результирующей поверхностной силе, действующей на элемент жидкости, требуют более высокой степени приближения, учитывающего различие между значениями Σ в различных точках на поверхности элемента жидкости), т. е.

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \{a_j \Sigma_i(\mathbf{a}) + b_j \Sigma_i(\mathbf{b}) + c_j \Sigma_i(\mathbf{c})\} n_j. \qquad (1.3.4)$$

Таким образом, компонента напряжения с индексом i, действующего в данном направлении на плоский элемент поверхности жидкости с произвольной ориентацией, определяемой единичной нормалью $\mathbf{n}$, связана с такой же компонентой напряжения на любом из трех ортогональных плоских элементов поверхности в одном и том же положении в жидкости таким образом, как если бы она представляла собой вектор с ортогональными компонентами $\Sigma_i(\mathbf{a})$, $\Sigma_i(\mathbf{b})$, $\Sigma_i(\mathbf{c})$.

Векторы $\mathbf{n}$ и Σ не зависят от выбора системы координат, и выражение в фигурных скобках в (1.3.4) должно представлять собой (i, j)-ю компоненту некоторой величины, которая также не зави-

1) Здесь используются нижние индексы для компонент вектора; в соответствии с известным правилом векторного и тензорного анализа члены, содержащие повторяющийся индекс, должны суммироваться по всем трем возможным значениям индекса. В книге для записи векторов используются как индексы, так и жирный шрифт без индексов, причем выбор формы записи связан лишь с наглядностью формул.

сит от системы координат. Другими словами, выражение в фигурных скобках представляет собой одну из компонент тензора второго порядка [1]), скажем σ_{ij}, и

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j. \tag{1.3.5}$$

Здесь σ_{ij} есть i-я компонента силы на единицу площади, действующая на плоский элемент поверхности, расположенный по нормали к направлению с индексом j, в точке жидкости $\mathbf{x}$ в момент времени t; тензор, имеющий своими компонентами σ_{ij}, называется *тензором напряжений*. Определение локального напряжения в жидкости связано теперь с величинами σ_{ij}, не зависящими от $\mathbf{n}$, а не с векторной величиной $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})$.

Аналогичным рассуждением можно показать, что не все девять компонент тензора напряжений независимы. На этот раз рассмотрим моменты различных сил, действующих на жидкость в объеме V произвольной формы; i-я компонента полного момента относительно точки O внутри этого объема, возникающего за счет действия поверхностных сил на границе объема, равна

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l \, dA,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента поверхности $\mathbf{n}\delta A$ относительно точки O. Этот интеграл по замкнутой поверхности можно преобразовать по теореме Остроградского — Гаусса в интеграл по объему

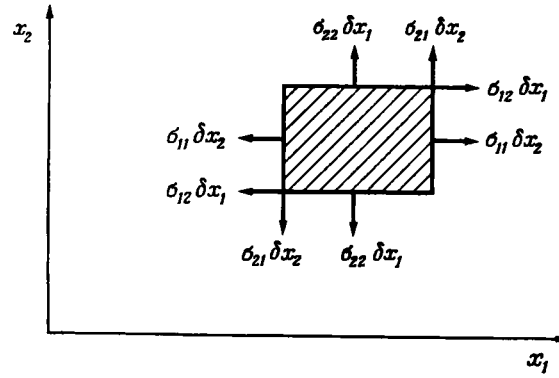
$$\int \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (r_j \sigma_{kl})}{\partial r_l} \, dV = \int \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{kj} + r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \right) dV. \tag{1.3.6}$$

Если теперь объем V устремить к нулю таким образом, чтобы конфигурация, создаваемая границей объема и неподвижной точкой O в нем, сохраняла ту же самую форму, то первый член в правой части равенства (1.3.6) будет стремиться к нулю как объем V, а второй член будет стремиться к нулю быстрее, а именно как $V^{4/3}$. Полный момент массовых сил относительно точки O, приложенный к элементу жидкости, составляет, очевидно, величину порядка $V^{4/3}$, когда V мало [2]), и поэтому в объеме V одновременно имеет место также скорость изменения момента количества движения жидкости. Следовательно, интеграл $\int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \, dV$,

---

[1]) Предполагается, что читатель знаком с общими свойствами тензоров. Будут использоваться только тензоры в декартовой системе координат (т. е. тензоры, у которых индексами обозначены их компоненты относительно прямоугольных координатных осей). Часто будут встречаться два специальных тензора: дельта-тензор δ_{ij} Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, когда $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, когда $i \neq j$) и тензор Леви-Чивиты ε_{ijk}, который принимает нулевое значение, если индексы i, j, k не все различны, и значения $+1$ или -1 в зависимости от того, в циклическом или не в циклическом порядке стоят индексы i, j, k.

[2]) Здесь предполагается, что в жидкости не возникает какой-либо пары сил порядка V, подобной паре сил, действующей в поляризованной диэлектрической среде под влиянием приложенного к ней электрического поля.



Р и с. 1.3.2. Поверхностные силы, действующие на прямоугольный элемент жидкости единичной толщины.

очевидно, представляет собой величину более высокого порядка по сравнению с другими членами уравнения момента для объема V, и вследствие этого он должен тождественно обращаться в нуль. Это возможно при любом выборе положения точки O и формы объема V, когда величина σ_{ij} представляет собой непрерывную функцию x, если только

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0 \qquad (1.3.7)$$

всюду внутри жидкости; это следует из того, что если бы произведение $\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}$ в некоторой области было отлично от нуля, то можно было бы выбрать малый объем V, для которого интеграл не равен нулю, что приводит к противоречию [1]). Из (1.3.7) следует, что тензор напряжений симметричен, т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, и имеет только шесть независимых компонент.

Три диагональные компоненты тензора σ_{ij} представляют собой *нормальные напряжения* в том смысле, что каждое из них дает нормальную составляющую поверхностной силы, действующей на плоский элемент поверхности, параллельный одной из координатных плоскостей. Шесть внедиагональных компонент тензора σ_{ij} называются *касательными напряжениями*; иногда их называют также и напряжениями сдвига, поскольку как в жидкостях, так и в твердых телах они возникают при сдвиговом движении или перемещении, в котором одни параллельные слои вещества скользят относительно других. На рис. 1.3.2 показаны в первом приближении различные поверхностные силы, действующие в плоскости (x_1, x_2) на малый элемент прямоугольной формы со сторонами δx_1 и δx_2 и единичной толщиной в направлении оси x_3; компоненты напряжения принимают неодинаковые значения на противоположных сторонах прямоугольника и при выводе уравнения

[1]) Этот вывод относительно подинтегрального выражения интеграла, который обращается в нуль при любом выборе области интегрирования, нам часто потребуется для объемных, поверхностных и криволинейных интегралов.

движения элемента жидкости необходимо учитывать их разности порядка δx_1 или δx_2.

Всегда можно выбрать направления осей прямоугольной системы координат так, чтобы все внедиагональные элементы симметричного тензора второго порядка были равны нулю. Если тензор напряжений σ_{ij} отнесен к таким *главным осям* в данной точке **x**, то диагональные элементы тензора напряжения превращаются в *главные напряжения*, например σ'_{11}, σ'_{22}, σ'_{33}; известное свойство тензоров второго порядка заключается в том, что при изменении направления осей прямоугольной системы координат сумма диагональных элементов остается неизменной, так что

$$\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}=\sigma_{ii}. \tag{1.3.8}$$

В этих новых осях компоненты силы, действующие на единицу площади элемента с нормалью (n'_1, n'_2, n'_3), равны

$$\sigma'_{11}n'_1,\ \sigma'_{22}n'_2,\ \sigma'_{33}n'_3.$$

Сила с компонентами $(\sigma'_{11}n'_1, 0, 0)$, действующая на единицу площади перпендикулярно этому элементу, соответствует растяжению (или сжатию, если σ'_{11} отрицательно) в направлении первой из новых осей координат; аналогичное заключение справедливо и для сил с компонентами $(0, \sigma'_{22}n'_2, 0)$ и $(0, 0, \sigma'_{33}n'_3)$. Таким образом, общее состояние жидкости вблизи какой-нибудь данной точки можно рассматривать как суперпозицию растяжений в трех взаимно ортогональных направлениях.

Тензор напряжений в покоящейся жидкости

Жидкость определена как среда, не способная оказывать сопротивление любому стремлению приложенных сил деформировать ее без изменения объема. Это определение имеет важное значение для выяснения формы тензора напряжений в покоящейся жидкости. Чтобы понять это, рассмотрим поверхностные силы, приложенные к жидкости внутри сферы, со стороны окружающей ее жидкости, причем радиус сферы считается настолько малым, что σ_{ij} почти постоянно на ее поверхности. Выберем оси координат, совпадающие (локально) с главными осями тензора σ_{ij}, и запишем тензор напряжений, у которого внедиагональные элементы равны нулю, в виде суммы двух тензоров

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}. \tag{1.3.9}$$

Первый из этих тензоров сферически симметричен, или изотропен, и соответствующий добавок к силе на единицу поверхности сферы в точке с нормалью $\mathbf{n}$ равен $^1/_3\sigma_{ii}\mathbf{n}$. Это равномерное сжатие жидкости в сфере (поскольку знак $^1/_3\sigma_{ii}$ обычно отрицателен) стремится изменить ее объем и может, конечно, выдерживаться жидкостью в сфере, хотя она находится в состоянии покоя.

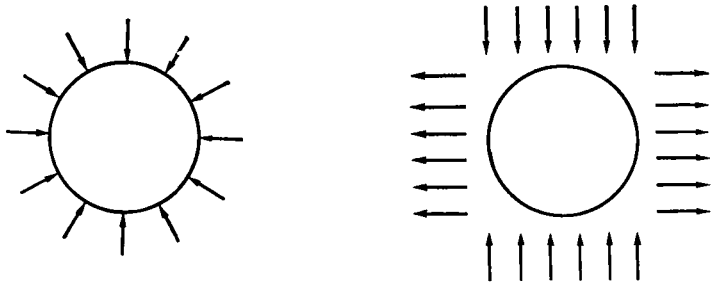
Второй из тензоров в (1.3.9) определяет отклонение тензора напряжений от его изотропной формы. Диагональные элементы этого тензора имеют нулевую сумму, согласно (1.3.8), и поэтому представляют собой нормальные напряжения, по крайней мере одно из которых является растяжением, а второе — сжатием. Соответствующая часть силы, действующей на единицу поверхности сферы в точке с нормалью (n_1', n_2', n_3'), имеет компоненты (в новой системе координат)

$$\left(\sigma_{11}' - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\right) n_1', \quad \left(\sigma_{22}' - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\right) n_2', \quad \left(\sigma_{33}' - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\right) n_3'. \quad (1.3.10)$$

Другими словами, сфера погружена в жидкость, которая находится в состоянии равномерного растяжения в направлении одной оси и одновременно равномерного сжатия в (ортогональном) направлении другой оси и равномерного растяжения или сжатия в третьем ортогональном направлении (алгебраическая сумма трех растяжений и сжатий равна нулю), как показано на рис. 1.3.3. Следовательно, этот второй добавок стремится путем деформации превратить сферический элемент жидкости в эллипсоидальный без какого-либо изменения объема; эту деформирующую поверхностную силу нельзя уравновесить никакой объемной силой, поскольку объемная сила имеет другой порядок величины в малом объеме сферического элемента. Сферический элемент жидкости не может оказать сопротивления такой его деформации под влиянием приложенных сил (т. е. сил, обусловленных воздействиями, внешними по отношению к элементу), так что состояние покоя несовместимо с существованием ненулевых значений каких-нибудь компонент силы (1.3.10). Следовательно, в жидкости в состоянии покоя все главные напряжения σ_{11}', σ_{22}', σ_{33}' одни и те же и равны $^1/_3\sigma_{ii}$ во всех точках жидкости, т. е. тензор напряжений в неподвижной жидкости всюду изотропен, любые ортогональные оси координат являются главными осями тензора напряжений и в жидкости действуют только *нормальные напряжения*.

Неподвижные жидкости обычно находятся в состоянии сжатия, и поэтому удобно написать тензор напряжения в неподвижной жидкости в виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.3.11)$$



а *б*

Р и с. 1.3.3. Два вида напряжений на поверхности сферического элемента жидкости: а) однородное всестороннее сжатие и б) однородное растяжение в направлении одной главной оси тензора напряжений наряду с однородным сжатием в направлении другой главной оси.

где $p = -{}^1/_3\sigma_{il}$ можно называть *статическим давлением* в жидкости [1]) и оно в общем случае зависит от x.

Из этого следует, что в неподвижной жидкости поверхностная сила на единицу плоского элемента поверхности жидкости с единичной нормалью n равна $-p\mathbf{n}$, и она является нормальной силой одной и той же величины при любых направлениях нормали n в данной точке. Это известное свойство статического давления в жидкости «действовать одинаково во всех направлениях» часто выводится как следствие предположения, что в неподвижной жидкости касательные напряжения равны нулю; вывод состоит в рассмотрении просто условия равновесия сил, действующих на элемент жидкости простой геометрической формы, такой, как, например, тетраэдр с тремя ортогональными гранями [2]) или часть цилиндра с одним плоским сечением, нормальным к его образующим, и другим, наклоненным к ним. Предположение о том, что касательные напряжения равны нулю в неподвижной жидкости, разумно, так как при отсутствии какого-либо движения внутри объема представляется маловероятным, чтобы случайная конфигурация молекул и их хаотическое движение могли привести к какому-либо предпочтительному со статистической точки зрения направленному движению, в котором результат действия, вызванного молекулярными силами и потоком количества движения через элемент поверхности, был бы направлен не по нормали к ней. Однако, по-видимому, указанное свойство тензора напряжения для неподвижной жидкости лучше выводить исходя из более простого предположения, что жидкости не могут оказывать сопротивления какой-либо попытке изменить их форму.

[1]) Для этой величины часто используется термин «гидростатическое давление», хотя подразумеваемая его связь с водой имеет только историческое оправдание и может привести к недоразумениям. Аналогично понятия «гидродинамика» и «аэродинамика» излишне ограничительны и вытесняются более общим понятием «динамика жидкости».

[2]) Для доказательства нужно положить в (1.3.4) $\Sigma_i(\mathbf{n}) = n_i\Sigma(\mathbf{n})$, $\Sigma_i(\mathbf{a}) = a_i\Sigma(\mathbf{a})$ и т. д. и затем обе его части поочередно умножить скалярно на векторы a, b и c.

1.4. Механическое равновесие жидкости

Твердое тело находится в равновесии, если результирующая сила и результирующая пара сил, приложенные к нему со стороны внешних тел, равны нулю. Условия равновесия жидкости менее просты, так как различные части жидкости могут находиться в относительном движении, и поэтому каждая из них должна быть в равновесии.

Силы, действующие на какую-либо данную часть жидкости, как отмечалось в предыдущем параграфе, представляют собой объемные силы, возникающие под воздействием внешних тел, и поверхностные силы, приложенные к границе жидкости со стороны окружающей ее среды. Эти объемные и поверхностные силы должны находиться в равновесии, если жидкость сохраняет состояние покоя. В обозначениях предыдущего параграфа полная массовая сила, действующая на жидкость, расположенную внутри некоторого объема V, определяется интегралом

$$\int \rho \mathbf{F}\, dV,$$

в котором как плотность ρ, так и сила $\mathbf{F}$ могут быть функциями координат.

Полная поверхностная сила, действующая со стороны окружающей жидкости на поверхность A, ограничивающую объем V (если жидкость неподвижна), равна

$$-\int p\mathbf{n}\, dA,$$

где p в общем случае зависит от радиуса-вектора $\mathbf{x}$ и вектора единичной внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности A. Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по объему V с помощью теоремы Остроградского — Гаусса и получить интеграл по объему $-\int \nabla p\, dV$. Следовательно, необходимое условие равновесия жидкости заключается в том, что

$$\int (\rho \mathbf{F} - \nabla p)\, dV = 0 \qquad (1.4.1)$$

для любого объема V, лежащего целиком в жидкости, а это возможно только в том случае, когда подинтегральное выражение (предполагаемое непрерывным по $\mathbf{x}$) равно нулю всюду внутри жидкости. Таким образом, необходимое условие равновесия состоит в том, что

$$\rho \mathbf{F} = \nabla p \qquad (1.4.2)$$

всюду внутри жидкости.

Если условие (1.4.1) справедливо при любом выборе объема V, то результирующая сила, действующая на каждый элемент жидкости, равна нулю. Кроме того, использование симметричного

тензора напряжений гарантирует, что пара сил, приложенная к каждой части элемента объема жидкости, равна нулю, так что если (1.4.2) удовлетворяется, то, как легко проверить непосредственно, результирующая пара сил, действующая на жидкость внутри объема V произвольной формы и величины, равна нулю (при отсутствии какой-либо пары массовых сил, действующих на жидкость). Поэтому (1.4.2) является необходимым и достаточным условием равновесия жидкости. В случае твердого тела, для которого касательные напряжения не обязательно равны нулю, соответствующее условие определяется уравнением типа (1.4.2), в котором i-я компонента его правой части имеет более общий вид — $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$.

Ограничение, накладываемое уравнением (1.4.2), состоит в том, что только для определенных распределений плотности ρ и силы $\mathbf{F}$, т. е. таких, для которых произведение $\rho\mathbf{F}$ (массовую силу *на единицу объема*) можно записать в виде градиента скалярной величины, существует распределение давления, удовлетворяющее уравнению (1.4.2). В том случае, когда распределение величины $\rho\mathbf{F}$ действительно имеет форму, требуемую для равновесия, давление p постоянно на любой поверхности, повсюду нормальной к массовой силе.

Ограничение, накладываемое на плотность ρ и силу $\mathbf{F}$, принимает более специальную форму в общем случае, в котором массовая сила на единицу массы ($\mathbf{F}$) консервативна и может быть записана в виде $-\nabla\Psi$, где Ψ — потенциальная энергия на единицу массы, связанная с этим полем. В этом случае условие равновесия сводится к уравнению

$$-\rho\nabla\Psi = \nabla p, \tag{1.4.3}$$

или—после применения оператора ротора к его обеим частям—

$$(\nabla\rho) \times (\nabla\Psi) = 0.$$

Таким образом, поверхности постоянного уровня величин ρ и Ψ должны совпадать, и когда это условие удовлетворяется, они представляют собой также поверхности постоянного уровня для давления p, и можно написать

$$dp/d\Psi = -\rho(\Psi). \tag{1.4.4}$$

Частный случай, при котором $\nabla\Psi$ всюду имеет одно и то же направление, так что Ψ, ρ и p постоянны на каждой из некоторого семейства параллельных плоскостей, имеет место при изучении земной атмосферы.

Плотность элемента жидкости может изменяться под влиянием приложенного давления, а также под влиянием других параметров, поэтому дальнейшее обсуждение применимости уравнения (1.4.3) требует дополнительных сведений о плотности ρ.

Однако в случае жидкости с *постоянной* плотностью решение уравнения (1.4.3) имеет простой вид

$$p = p_0 - \rho\Psi, \tag{1.4.5}$$

где p_0 — константа.

Тело, плавающее в покоящейся жидкости

Общее представление о плавании связано с твердым телом, частично погруженным в покоящуюся тяжелую жидкость со свободной горизонтальной поверхностью, хотя этот термин можно использовать и в более общем смысле. Говорят, что тело плавает, когда оно целиком погружено в жидкость (это может быть собственно жидкость или газ, обеспечивающие частичное погружение в обычной терминологии) и когда и тело, и жидкость находятся в состоянии покоя под действием объемных сил.

Основной результат для плавающего тела выражается законом Архимеда, который обычно формулируется и доказывается для случая тела, поддерживаемого в жидкости выталкивающей силой, создаваемой действием силы тяжести на однородную жидкость. Это наиболее важная область приложения закона Архимеда, однако представляет некоторый интерес и более общая его форма, устанавливаемая ниже. Предположим, что тело объема V, ограниченное поверхностью A, погружено в жидкость и что тело и жидкость находятся в покое. Результирующая сила, действующая на тело и обусловленная только наличием жидкости, равна

$$-\int p\mathbf{n}\,dA,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела. Давление p в жидкости определяется условием равновесия (1.4.2), и, используя обычную форму закона Архимеда, воспользуемся условием (1.4.2), чтобы выразить эту результирующую псверхностную силу через полную объемную силу, действующую на жидкость, если бы она заполнила пространство, занятое телом. Нам нужно узнать, каким образом жидкость может заменить тело, не нарушая равновесия и не изменяя условий в окружающей жидкости.

Определенный ответ можно дать в том случае, когда $\mathbf{F} = -\nabla\Psi$, где Ψ — заданная функция координат в пространстве. Поверхности постоянного уровня функции Ψ можно продолжить через область, занятую телом; постоянное значение, которое плотность ρ должна принимать на каждой поверхности уровня Ψ, чтобы жидкость в этой области находилась в состоянии равновесия, совпадает со значением плотности ρ на той же самой поверхности уровня вне этой области. Другими словами, мы получили поле плотности жидкости, которая может заполнить пространство, занятое телом.

т. е. величины α и Re_m, как и ожидалось, входят в решение в виде произведения $\alpha\,\mathrm{Re}$. Поскольку параметр $\alpha\,\mathrm{Re}$ есть мера отношения сил инерции и вязкости в течении с почти параллельными линиями тока (§ 4.8), то из (5.6.15) следует, что в случае чисто расходящегося течения относительная величина сил вязкости не может уменьшаться неограниченно по мере стремления числа Рейнольдса к бесконечности и ни при каких значениях Re нельзя пренебречь силами вязкости. В другом предельном случае при $\mathrm{Re}_m \to 0$ имеем

$$\alpha \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{df}{f^{1/2}(1-f)^{1/2}} = \frac{1}{2}\pi;$$

отсюда следует, что ни при каких условиях чисто расходящееся течение не может существовать при угле раствора стенок канала, превосходящем π.

На рис. 5.6.4 показано изменение профиля скорости в чисто расходящемся течении при изменении параметра $\alpha\,\mathrm{Re}$ от значений $\alpha\,\mathrm{Re} \ll 1$ (параболический профиль) до значений, близких к максимальному (5.6.14). Эти профили были рассчитаны прямым интегрированием уравнения (5.6.8) (Миллсапс и Польгаузен (1953)). Для сравнения на рис. 5.6.4 показаны профили чисто сходящегося течения при тех же значениях $|\,\alpha\,\mathrm{Re}\,|$. В то время как для чисто сходящегося течения увеличение числа Рейнольдса приводит к образованию плоского участка профиля в центре канала с большими градиентами у стенок, для чисто расходящегося течения это приводит к увеличению расхода на оси канала с меньшими градиентами у стенок. Предельный случай при $c = 0$ и $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_m$ соответствует нулевому напряжению на стенке. Полный расход для этих профилей скорости

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} F\,d\theta = \nu\,\mathrm{Re}\int_{-1}^{1} f\,d\eta.$$

Ясно, что величина $\alpha Q/\nu$ в интервале $-\infty < \alpha\mathrm{Re} < 10{,}31$ изменяется с $\alpha\mathrm{Re}$ приближенно по линейному закону (при этом вблизи верхнего предела $\alpha\mathrm{Re} = 10{,}31$ она возрастает быстрее, чем по линейному закону).

Решения для комбинированных вытекающих и втекающих течений

Проведенное выше рассмотрение распределения скоростей для чисто расходящегося (вытекающего) и чисто сходящегося (втекающего) течений позволяют заключить, что и при $\alpha\,\mathrm{Re} > 10{,}31$

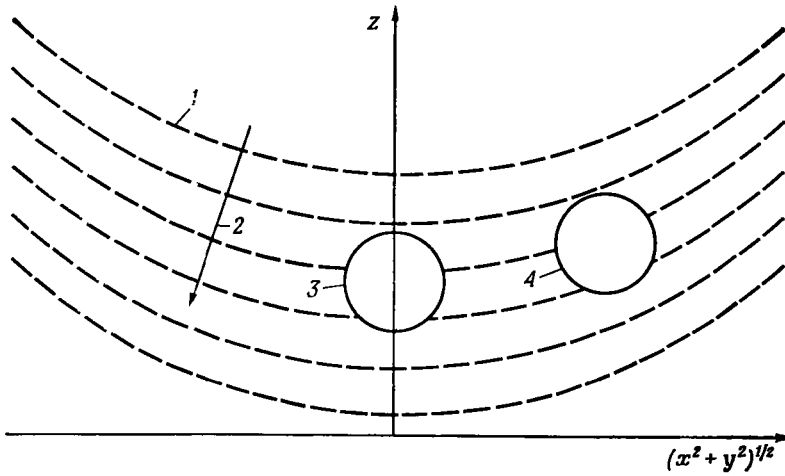


Рис. 1.4.1. Неоднородная жидкость в состоянии покоя под действием силы тяжести и центробежной силы.
1 — поверхности уровня Ψ, ρ и p; *2* — направление увеличения плотности ρ; *3* — равновесное положение однородного шара; *4* — положение шара, в котором он вытесняет равновеликую массу жидкости.

Если теперь твердое тело (например, шар постоянной плотности) погружено в жидкость в этом вращающемся сосуде и находится в нем в состоянии покоя относительно стенок, то жидкость будет оказывать выталкивающее действие на это тело. Возникает вопрос: может ли выталкивающая сила уравновешиваться такими же объемными силами (силой тяжести и центробежной силой), действующими на само тело? Другими словами, если тело помещено в определенном положении в жидкость, будет ли оно оставаться в этом положении? Нужно найти такое положение центра шара, чтобы он вытеснял равную своей массу жидкости, чему (приближенно) соответствует некоторое значение функции Ψ (рис. 1.4.1); кроме того, в указанном положении шара на вытесненную им жидкость и на шар должна действовать одна и та же центробежная сила. Очевидно, что такое положение невозможно на любом расстоянии от оси вращения, так как вследствие наклона поверхностей одинаковой плотности на вытесненную шаром жидкость, если она имеет такую же массу, как и шар, действует бо́льшая центробежная сила. Следовательно, однородный шар будет смещаться в направлении оси параболоида вращения (на котором он должен находиться, чтобы вытеснить равновеликую массу жидкости) и придет в состояние покоя только на оси параболоида. Такое же рассуждение справедливо и для шара на свободной поверхности вращающейся жидкости, как для частного случая распределения плотности в зависимости от Ψ.

С другой стороны, если плотность шара неодинакова, например, одна сторона шара тяжелее, то возможно, что полная центробежная сила, действующая на шар, будет больше силы, действующей на вытесненную им жидкость такой же массы; в этом случае шар будет двигаться в сторону от параболоида вращения, пока не достигнет стенки сосуда.

Покоящаяся жидкость под действием силы тяжести

Случай, когда на жидкость действует только сила тяжести, одновременно и важен, и прост. Можно различать два крайних состояния. В первом рассматриваемая масса жидкости велика и изолирована и силы гравитационного притяжения жидкости создают объемную силу, действующую на любой элемент жидкости, как в случае газообразной звезды. В другом крайнем состоянии рассматриваемая масса жидкости намного меньше массы окружающей ее среды и гравитационное поле в области, занятой жидкостью, приближенно однородно.

В случае самотяготеющей жидкости имеем $\mathbf{F} = -\nabla\Psi$, где гравитационный потенциал Ψ связан с распределением плотности уравнением

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho; \tag{1.4.6}$$

здесь G — гравитационная постоянная. Из уравнения (1.4.6) и условия (1.4.3) получаем уравнение для давления в покоящейся жидкости

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) = -4\pi G\rho. \tag{1.4.7}$$

Кроме того, необходимо, как установлено ранее, чтобы поверхности постоянного уровня функций Ψ, ρ и p совпадали. Записывая дифференциальный оператор в уравнении (1.4.7) в криволинейных координатах (не обязательно ортогональных), так чтобы поверхности уровня ρ совпадали с однопараметрическим семейством поверхностей, видим, что класс решений сильно ограничен. Строгое перечисление возможных решений затруднительно, но единственно возможными, по-видимому, будут решения, в которых плотность ρ и давление p зависят только от 1) одной координаты прямоугольной системы координат, или 2) радиальной координаты цилиндрической системы координат, или 3) радиальной координаты сферической системы координат, что соответствует симметричным «звездам» в одном, двух или трех измерениях.

В последнем случае, описывающем сферически симметричные распределения плотности и давления, уравнение (1.4.7) принимает вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G r^2\rho. \tag{1.4.8}$$

Для отыскания решения теперь нужны дополнительные данные о распределении плотности. В реальных звездах плотность в общем случае зависит не только от давления p, однако решения уравнения (1.4.8), соответствующие некоторому предполагаемому простому соотношению между ρ и p, иногда полезны для сравнения с более сложными моделями. Если предположить, например, что

$$p \sim \rho^{1+1/n}, \qquad n \geqslant 0,$$

то уравнение (1.4.8) можно проинтегрировать численно для любого значения n. Можно также получить два важных аналитических решения. Если взять $n = 0$, соответствующее жидкости постоянной плотности, например ρ_0, то

$$p = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 (a^2 - r^2),$$

где $r = a$ можно интерпретировать как внешнюю границу звезды. Если $n = 5$, то можно проверить, что

$$p = C\rho^{6/5} = \frac{27a^3C^{5/2}}{(2\pi G)^{3/2}(a^2 + r^2)^3};$$

в этом случае давление и плотность для любого r не обращаются в нуль и не существует никакой определенной внешней границы, хотя полная масса звезды конечна.

В случае постоянной массовой силы, создаваемой силой тяжести, имеем

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} = \text{const}, \quad \Psi = -\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}, \tag{1.4.9}$$

и для давления в покоящейся жидкости имеем уравнение

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}. \tag{1.4.10}$$

Три функции Ψ, ρ и p постоянны на каждой горизонтальной плоскости, нормальной к вектору $\mathbf{g}$, и, следовательно, они зависят только от произведения $\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$. Если ось z прямоугольной системы координат направить по вертикали вверх так, чтобы было $\mathbf{g}\cdot\mathbf{x} = -gz$, то уравнение (1.4.10) приводится к виду

$$dp/dz = -g\rho(z). \tag{1.4.11}$$

И в этом случае получается то же самое соотношение, которое можно вывести из одного только условия механического равновесия.

Когда плотность жидкости постоянна, из уравнения (1.4.11) получается линейное соотношение между давлением и высотой, хорошо известное в гидростатике

$$p = p_0 - \rho g z. \tag{1.4.12}$$

В случае земной атмосферы ее плотность ρ уменьшается при уменьшении давления вследствие сжимаемости воздуха; хотя

в действительности обычно имеются тепловые эффекты, однозначного функционального соотношения между плотностью ρ и давлением p не существует. В качестве первого приближения, согласно закону Бойля, для совершенного газа при постоянных температуре и составе (§ 1.7) можно положить

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} = gH.$$

Из уравнения (1.4.11) видно, что давление в атмосфере, для которой такое соотношение справедливо, выражается формулой

$$p = p_0 e^{-z/H},$$

где p_0 — давление на поверхности Земли при $z = 0$. Таким образом, как давление p, так и плотность ρ уменьшаются в e раз при подъеме на высоту H и постоянную H можно назвать «масштабом высоты» атмосферы. Для воздуха при температуре 0 °С величина H равна 8 км. Если температура не постоянна, отношение $p/\rho g$ можно рассматривать в качестве локального масштаба. Наблюдаемые средние значения давления, плотности и температуры на различных высотах в атмосфере приведены в приложении 1, *б*.

Упражнения

1. Замкнутый сосуд, наполненный водой, вращается с постоянной угловой скоростью Ω относительно горизонтальной оси. Покажите, что поверхности равного давления представляют собой круговые цилиндры, общая ось которых расположена на высоте g/Ω^2 над осью вращения.

2. Получите выражение для давления в центре сферической звезды, плотность которой на расстоянии r от центра равна

$$\rho = \rho_c (1 - \beta r^2).$$

Покажите, что если средняя плотность звезды в два раза больше плотности среды на ее поверхности, то давление в ее центре в 13/8 раз больше, чем если бы звезда имела постоянную плотность с такой же полной массой.

1.5. Классическая термодинамика

В нашем последующем изучении динамики жидкости нужно будет использовать некоторые понятия классической термодинамики и соотношения между различными термодинамическими величинами, такими, как температура и внутренняя энергия. В классической термодинамике, как правило, рассматриваются неподвижные однородные вещества в равновесных состояниях, т. е. в состояниях, в которых все их локальные механические, физические и тепловые параметры фактически не зависят ни от координат, ни от времени. Результаты термодинамических расчетов непосредственно можно применить к жидкостям только в состоянии покоя, когда их свойства однородны. О термодинамике неравновесных состояний известно сравнительно мало.

Однако наблюдения показывают, что обычно результаты исследований в прикладной гидродинамике равновесных состояний справедливы приближенно и в случае неравновесных неоднородных состояний; хотя в движущейся жидкости могут появиться большие отклонения от равновесия, они, по-видимому, оказывают малое влияние на термодинамические соотношения.

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы перечислить кратко законы и результаты термодинамики равновесного состояния и изложить исходные соотношения, которые потребуются позже. Для знакомства с основами предмета читателю следует обратиться к учебникам по термодинамике [1]).

Понятия термодинамики полезны изучающим гидродинамику еще и потому, что как в термодинамике, так и в гидродинамике получаются наиболее общие результаты, которые применимы к веществу независимо от различий в его молекулярном строении и его поведения в рассматриваемом процессе. Дополнительные сведения можно, конечно, получить, принимая во внимание известные молекулярные свойства жидкостей, как, например, с помощью кинетической теории для некоторых газов (см. § 1.7).

Примем как известный опытный факт, что в простейших возможных условиях состояние данной массы жидкости в равновесии (это слово используется здесь и далее для указания пространственной и временно́й однородности) определяется однозначно двумя параметрами, в качестве которых ради удобства можно взять удельный объем $v = 1/\rho$ (ρ — плотность) и давление p, определенное ранее. Таким образом, от этих двух *параметров состояния* зависят все другие величины, описывающие состояние жидкости. Одной из наиболее важных среди них является температура. Некоторая масса жидкости в состоянии равновесия имеет ту же самую температуру, что и другая эталонная масса жидкости (тоже в состоянии равновесия) в том случае, если две эти массы жидкости остаются в равновесии после приведения их в тепловой контакт друг с другом (т. е. когда они разделены только перегородкой, через которую тепло может переходить от одной массы к другой); второй закон термодинамики дает абсолютную меру для температуры жидкости, как будет отмечено позже. Соотношение между температурой T и двумя параметрами состояния, которое можно записать в форме

$$f(p, v, T) = 0, \tag{1.5.1}$$

показывающей произвольность выбора двух параметров состояния, называется *уравнением состояния*. Для любой другой величины (подобной температуре), характеризующей жидкость, за

---

1) См., например, Pippard A. B., Classical Thermodynamics, Cambridge University Press, 1957 [см. также Леонтович М. А., Введение в термодинамику, М., 1952.—*Ред.*].

исключением, конечно, параметров состояния, существует некоторое уравнение состояния.

Другая важная величина, описывающая состояние жидкости, называется *внутренней энергией* на единицу массы и обозначается E [1]). Работа и теплота рассматриваются как эквивалентные формы энергии, а изменение внутренней энергии покоящейся массы жидкости вследствие изменения ее состояния определяется первым законом термодинамики и происходит так, чтобы не нарушался закон сохранения энергии, когда учитываются и тепло, подводимое к жидкости, и работа, совершаемая над жидкостью. Таким образом, если состояние данной однородной массы жидкости изменяется за счет приобретения количества тепла Q на единицу массы и совершения жидкостью работы W также на единицу массы, то соответствующее увеличение внутренней энергии

$$\Delta E = Q + W. \tag{1.5.2}$$

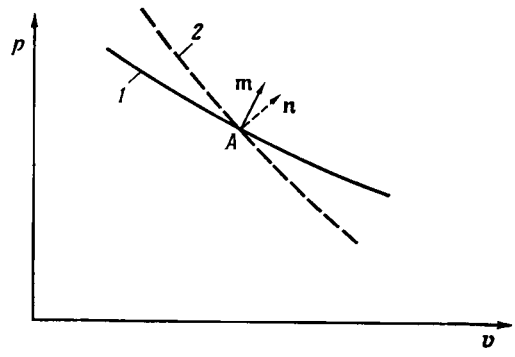
Внутренняя энергия E есть функция параметров состояния, а приращение энергии ΔE, которое может быть бесконечно малым или конечным, зависит только от начального и конечного состояний; однако количества Q и W характеризуют внешние эффекты и могут по отдельности (но не в сумме) зависеть также от способа, которым осуществляется переход из одного состояния в другое. Если масса жидкости теплоизолирована от окружающей ее среды, так что не может происходить никакого обмена теплом, т. е. $Q = 0$, то такое изменение состояния жидкости называется *адиабатическим*.

Работу над системой можно совершить многими способами, но особый интерес в механике жидкости представляет процесс сжатия путем направленного внутрь жидкости движения ограничивающих ее стенок. Аналитическое выражение для работы, совершаемой при сжатии, можно получить в важном случае, в котором изменение состояния *обратимо*. Это означает, что оно происходит так медленно, что жидкость проходит через последовательные равновесные состояния, и направление, в котором изменяется состояние, значения не имеет. На каждой стадии обратимого процесса давление в жидкости постоянно [2]) и равно, например, p, так что работа над единицей массы жидкости в результате сжатия, приводящего к малому уменьшению объема,

---

[1]) Обычно в литературе по термодинамике прописная буква используется для полной величины некоторой общей характеристики, такой, как внутренняя энергия в рассматриваемой системе, а малая буква—для обозначения величины на единицу массы. В гидродинамике достаточно введения только последней величины, для которой обычно применяется прописная буква.

[2]) Если на жидкость в состоянии покоя действует массовая сила, давление, как было показано, изменяется всюду в жидкости, но изменение давления может быть сделано сколь угодно малым при рассмотрении части жидкости малого объема. Если на жидкость действует массовая сила, то термодинамические переменные характеризуют только локальные свойства жидкости.



Р и с. 1.5.1. Диаграмма равновесных состояний жидкости.
1 — изотермическое изменение; *2* — адиабатическое изменение.

равна $-p\delta v$ [1]). Таким образом, при обратимом переходе из одного состояния в другое бесконечно близкое состояние

$$\delta E = \delta Q - p\delta v. \qquad (1.5.3)$$

Конечное обратимое изменение состояния может быть описано путем суммирования выражения (1.5.3) по ряду последовательных бесконечно малых изменений. В данном случае нужно выбрать определенный путь, которым соединены начальное и конечное равновесные состояния, так как давление p в общем случае зависит не только от удельного объема v.

Определенный практический интерес представляет *теплоемкость* жидкости, т. е. количество тепла, которое необходимо сообщить единице массы жидкости, чтобы увеличить ее температуру на один градус при обратимом изменении состояния. Полное обсуждение теплоемкости лучше всего проводить на основе второго закона термодинамики, но сначала можно вывести ее из первого закона. Удельную теплоемкость можно записать как отношение

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T}, \qquad (1.5.4)$$

которое не будет определено однозначно до тех пор, пока не указаны условия, при которых происходит обратимое изменение состояния. Равновесное состояние жидкости можно изобразить точкой в плоскости (p, v), а малое обратимое изменение величин δp, δv, начиная от точки A (см. рис. 1.5.1), может происходить в любом направлении. Если единственной работой, совершаемой над жидкостью, является работа сжатия, то тепло δQ, которое нужно подвести к единице массы жидкости, определяется из соот-

[1]) Отметим, что наше определение обычной жидкости, данное в § 1.1, означает, что во время обратимых изменений, если изменяется только форма, а не объем жидкости, никакой работы над ней не совершается.

ношения (1.5.3) и равно

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_v \delta p + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_p \delta v + p\delta v,$$

а изменение температуры

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \delta v.$$

Следовательно, удельная теплоемкость зависит от отношения $\delta p/\delta v$, т. е. от выбора направления, в котором происходит изменение состояния в точке A.

Два просто определяемых специальных направления соответствуют изменениям, происходящим параллельно осям диаграммы состояния, и определяют *главные* удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и при постоянном объеме

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_{\delta p=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p, \quad c_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_{\delta v=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v. \tag{1.5.5}$$

Далее, если точка, изображающая конечное состояние, движется по кругу малого радиуса с центром в A, то величина δT изменяется синусоидально; она обращается в нуль на изотерме, проходящей через эту точку, и достигает максимального значения в направлении нормали $\mathbf{m}$ к изотерме. Аналогично этому величина δQ также изменяется синусоидально, причем она обращается в нуль на адиабате, проходящей через точку A, и достигает максимума в направлении нормали $\mathbf{n}$ к ней. Таким образом, если (m_v, m_p), (n_v, n_p) — компоненты двух введенных единичных векторов, то

$$c_p = \frac{n_v\,(\delta Q)_{\max}}{m_v\,(\delta T)_{\max}}, \qquad c_v = \frac{n_p\,(\delta Q)_{\max}}{m_p\,(\delta T)_{\max}}$$

а так как величины $(-m_v/m_p)$ и $(-n_v/n_p)$ равны градиентам (производным $\partial p/\partial v$) вдоль изотерм и адиабат соответственно, то для отношения главных удельных теплоемкостей, обычно обозначаемого γ, получается часто используемое выражение:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{n_v/n_p}{m_v/m_p} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{адиабат}}}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{изотерм}}} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\text{изотерм}}}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\text{адиабат}}}. \tag{1.5.6}$$

Отношение $-v\delta p/\delta v$ приращения давления δp и относительного приращения объема $\delta v/v$ при малом обратимом изменении состояния жидкости называется *объемным модулем упругости* жидкости; связанная с ним и также полезная в динамике жидкости обратная величина $-\delta v/(v\delta p)$ или $\delta\rho/(\rho\delta p)$ называется *коэффициентом сжимаемости*. Так же как и удельная теплоемкость, объемный модуль

упругости принимает различные значения в каждом из направлений, в котором происходит изменение на диаграмме состояния. Адиабатическое и изотермическое изменения состояний соответствуют на ней двум частным направлениям, имеющим специальный физический смысл, и отчасти неожиданно то, что, согласно первому закону термодинамики, отношение двух соответствующих модулей упругости должно быть равно отношению двух главных удельных теплоемкостей.

Очевидно, что через каждую точку диаграммы состояния можно провести адиабату (определяющую направление малого обратимого изменения состояния без притока или отвода тепла) и считать эти адиабаты линиями одинакового значения некоторой новой функции состояния. Свойства этой функции даются вторым законом термодинамики. Этот закон можно сформулировать несколькими внешне различными, но эквивалентными друг другу способами, каждый из которых не так легко объяснить. Мы не будем использовать этот закон непосредственно, и нам не нужна какая-либо из обычных его формулировок. Фактически достаточно знать, что со вторым законом термодинамики связано существование другой общей характеристики жидкости (а также систем с числом независимых параметров, большим двух) в состоянии равновесия, называемой *энтропией*, и что при обратимом процессе перехода от одного равновесного состояния к другому возрастание энтропии пропорционально теплу, подводимому к жидкости; кроме того, что коэффициент пропорциональности сам является функцией состояния, он может быть отождествлен с величиной, обратной температуре. Итак, обозначая энтропию на единицу массы жидкости через S, имеем

$$T\delta S = \delta Q, \tag{1.5.7}$$

где δQ — бесконечно малое количество тепла, обратимо сообщенное единице массы жидкости. С помощью этого равенства и определяется термодинамическая, или абсолютная, шкала температуры (не связанная со свойствами какого-либо конкретного вещества). Энтропия постоянна при адиабатическом обратимом переходе из одного состояния в другое, который поэтому обычно называют *изэнтропическим*. Кроме того, согласно второму закону, при адиабатическом необратимом изменении состояния энтропия *не может уменьшаться* (предполагается, что температура положительна); любое изменение энтропии должно сводиться к ее возрастанию.

Поскольку и (1.5.3), и (1.5.7) применимы к обратимым изменениям состояния, то для малого обратимого изменения состояния, в котором над жидкостью совершается работа сжатия, можно написать

$$T\delta S = \delta E + p\delta v. \tag{1.5.8}$$

Начальное и конечное значения энтропии S и внутренней энергии E, как и всех других функций состояния, полностью определяются начальными и конечными состояниями, и, следовательно, соотношение (1.5.8), содержащее только функции состояния, должно быть справедливо для любого бесконечно малого перехода, в котором работа совершается путем сжатия, независимо от того, будет рассматриваемый процесс обратимым или нет. Если переход необратим, то (1.5.7) не выполняется и нет никакой зависимости между δW и $-p\delta v$.

Другая функция состояния, которая, подобно внутренней энергии и энтропии, оказывается удобной для использования в механике жидкости, особенно в тех случаях, когда важны эффекты ее сжимаемости, называется *энтальпией*, или теплосодержанием. Энтальпия единицы массы жидкости, обозначаемая I, определяется формулой

$$I = E + pv \tag{1.5.9}$$

и имеет размерность энергии на единицу массы. Малое изменение параметров состояния соответствует малым изменениям функций I, E и S, которые с учетом (1.5.8) связаны соотношением

$$\delta I = \delta E + p\delta v + v\delta p = T\delta S + v\delta p. \tag{1.5.10}$$

Соотношение (1.5.10), как и соотношение (1.5.8), содержит только функции состояния и, следовательно, не зависит от способа, с помощью которого жидкость может быть переведена из одного состояния в другое, соседнее состояние. В случае обратимого малого изменения состояния при постоянном давлении из (1.5.7) следует, что $\delta I = \delta Q$.

Еще одной важной функцией состояния с размерностью энергии является *свободная энергия* (по Гельмгольцу), величина которой на единицу массы

$$F = E - TS.$$

Малое изменение величины F вследствие малых изменений параметров состояния определяется соотношением

$$\delta F = -p\delta v - S\delta T,$$

показывающим, что увеличение свободной энергии на единицу массы при малом изотермическом изменении состояния, независимо от того, является ли оно обратимым или нет, равно $-p\delta v$; если это изменение обратимо, то приращение свободной энергии равно работе, совершаемой над системой.

Из приведенных выше определений различных функций состояния получаются четыре полезные тождества, известные как *термодинамические соотношения Максвелла*. Чтобы получить первое из них, отметим, исходя из (1.5.8), что если v и S рассматривать как два независимых параметра состояния, от которых зависят

все остальные термодинамические функции, то две частные производные от E соответственно равны

$$\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_S = -p, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_v = T, \tag{1.5.11}$$

где нижним индексом отмечена переменная, которая при дифференцировании сохраняется постоянной. Вторую производную $\partial^2 E/\partial v\,\partial S$ можно получить двумя различными путями, приводящими к соотношению

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v = -\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S. \tag{1.5.12}$$

Остальные три соотношения имеют вид

$$\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \tag{1.5.13}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T, \tag{1.5.14}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \tag{1.5.15}$$

и могут быть получены аналогично путем вычисления второй производной двумя различными способами от функций $E+pv$, $E-TS$ и $E+pv-TS$ соответственно. Можно показать, что они получаются иначе из (1.5.12) по правилам нахождения частных производных от неявных функций. Например, поскольку температуру T можно рассматривать как функцию давления p и энтропии S, производную правой части соотношения (1.5.12) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S,$$

а для преобразования левой части соотношения (1.5.12) можно воспользоваться известным тождеством

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p$$

для трех величин p, v, S, связанных одним функциональным соотношением, откуда и получается искомое соотношение (1.5.13).

Одна из производных в термодинамических соотношениях Максвелла определяет *коэффициент теплового расширения* жидкости

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p, \tag{1.5.16}$$

который играет важную роль при изучении действия силы тяжести на жидкость с неоднородной температурой.

Введение энтропии дает возможность получить и другие выражения для удельной теплоемкости. В случае общей удельной

теплоемкости имеем

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T} = T\,\frac{\delta S}{\partial T},$$

а для двух главных теплоемкостей (ср. выражения (1.5.5)) получим

$$c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p, \quad c_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v. \tag{1.5.17}$$

Кроме того, рассматривая энтропию S как функцию температуры T и удельного объема v, находим

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v \delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \delta v,$$

так что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

а затем из (1.5.17) и из соотношения Максвелла (1.5.15) следует, что

$$c_p - c_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \tag{1.5.18}$$

Правая часть этого равенства может быть вычислена, если известно уравнение состояния, связывающее p, v и T. Другое выражение для разности $(c_p - c_v)$, содержащее величины, которые можно измерить, получается с помощью тождества

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

для трех величин p, v, T, связанных одним функциональным соотношением, т. е.

$$c_p - c_v = -T\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2. \tag{1.5.19}$$

Наконец, получим выражения для приращений энтропии S и внутренней энергии E, возникающих вследствие малых изменений двух параметров состояния; эти выражения потребуются позднее при изучении потока жидкости с неоднородной температурой. Можно рассматривать энтропию S как функцию температуры T и давления p, откуда следует, что

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \delta p,$$

или, учитывая (1.5.17) и (1.5.14), получаем

$$\delta S = \frac{c_p}{T}\,\delta T - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \delta p.$$

Следовательно, используя обозначения для коэффициента теплового расширения (1.5.16), имеем

$$T\delta S = \delta E + p\delta v = c_p \delta T - \beta v T \delta p. \tag{1.5.20}$$

Ценность этого соотношения заключается в том, что все члены, за исключением $T\delta S$ и δE, содержат только непосредственно измеримые величины. Приращения δT и δp в правой части равенства (1.5.20) независимы, и относительное значение двух членов, содержащих эти приращения, будет, конечно, зависеть от конкретных условий. Из (1.5.19) видно, что отношение двух членов правой части второго равенства (1.5.20) можно представить в виде

$$-\frac{c_p\delta T}{\beta v T\delta p}=\frac{c_p}{c_p-c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\delta T}{\delta p}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\delta T}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\delta p}, \quad (1.5.21)$$

позволяющем часто сразу определить, какой из этих членов будет доминирующим. Если коэффициент $\gamma/(\gamma-1)$ порядка единицы, как это обычно бывает для газов и большинства жидкостей, то сравнение двух членов сводится по существу к сравнению приращений величины v, которые могли бы быть вызваны по отдельности заданными приращениями температуры T и давления p.

1.6. Явления переноса

Равновесные состояния вещества характеризуются равномерным распределением в пространстве всех его параметров, причем каждый элемент вещества находится в механическом и тепловом равновесии с соседними элементами. Если некоторые параметры вещества в исходном состоянии распределены неравномерно, то между соседними элементами вещества происходит механический или тепловой обмен, который всегда приводит вещество в равновесное состояние, т. е. стремится сгладить имеющиеся в нем неоднородности. Существование этого стремления к равновесию в неоднородном веществе, которое в классической термодинамике принимается без доказательства, по-видимому, требует только, чтобы смежные части вещества взаимодействовали определенным образом. Характер этого взаимодействия может зависеть от молекулярного строения смежных частей вещества и от физических свойств процессов переноса, зависящих от конкретного параметра, который распределен неравномерно, однако тенденция к равновесию между взаимодействующими частями вещества имеет вполне общий характер и не зависит, как и все результаты классической термодинамики, от конкретного строения данного вещества.

Важный и общий результат обмена между двумя элементами вещества с различными параметрами состоит в том, что величина некоторого количества, удовлетворяющего закону сохранения, связанная с одним элементом, уменьшается, а величина, связанная с другим элементом, увеличивается. В целом ряд таких обменов составляет то, что называют *явлением переноса*. Три

основных вида этого явления — это переносы вещества (массы), энергии и количества движения. Основное внимание в этом параграфе обращено на общие свойства этих трех видов переноса. Мы не будем привлекать конкретные молекулярные свойства вещества, хотя иногда на них придется ссылаться для удобства и выяснения природы молекулярного механизма переноса в жидкостях.

В жидкой смеси, состав которой изменяется в зависимости от координат, возникает перенос вещества особого вида [1]). Предположим, что молекулы одной составной части смеси отмечены определенным образом. Все молекулы находятся в непрерывном хаотичном движении и вследствие этого имеют тенденцию к удалению от какого-либо начального положения. В таком случае если в некоторый момент времени количество отмеченных молекул вблизи одной стороны элемента поверхности, проведенной в жидкости, больше чем на другой, то случайное блуждание отмеченных молекул в обоих направлениях через элемент поверхности приводит в общем случае к ненулевому потоку молекул через него; направление этого потока таково, что он приводит к выравниванию количества отмеченных молекул с обеих сторон от поверхности [2]). Этот ненулевой поток одной из частей жидкой смеси, создаваемый перемещением самих молекул, порождает *диффузию вещества* (массодиффузию). Обсуждение этого весьма сложного явления будет ограничено случаями малой концентрации диффундирующей части смеси.

Перенос кинетической энергии молекулярного движения осуществляется путем взаимодействия соседних молекул (или в результате столь малых расстояний между молекулами, что одна находится в пределах действия поля сил другой, как в случае твердых тел и жидкостей, или в результате случайных столкновений, как в случае газа). Условия, при которых происходит перенос только энергии молекул, т. е. тепловой энергии, известны из эксперимента. Две массы жидкости, разделенные тонкой жесткой стенкой, проницаемой для тепла, находятся в тепловом равновесии, если функция состояния, называемая температурой, имеет одинаковые значения для этих масс; а если две температуры не равны, то существует некоторый ненулевой поток тепла через

---

[1]) Такой перенос наблюдается также и в твердом теле, например, в сплаве, состоящем из молекул разных видов, поскольку молекула в твердом теле не сохраняет абсолютно одно и то же положение в решетке, хотя скорости переноса в твердом теле намного меньше, чем в жидкости.

[2]) Можно было бы предположить, что условием ненулевого потока отмеченных молекул через элемент поверхности является различие их числовой плотности (числа в единице объема) по обеим сторонам поверхности. Когда плотность жидкости постоянна, выбор между этими двумя условиями ненулевого потока не имеет значения. Но если плотность жидкости непостоянна (что, как правило, влечет за собой также и непостоянство температур), то стремление отмеченных молекул двигаться — путем хаотического движения — по отношению к неотмеченным молекулам проявляется в основном в результате неодинакового относительного количества отмеченных и неотмеченных молекул по обеим сторонам поверхности, а не вследствие неодинаковой их числовой плотности.

границу в направлении убывания температуры. Удаление стенки, разделяющей эти две массы при одном и том же давлении, очевидно, не влияет на условие теплового равновесия или на направление указанного теплового потока в том случае, когда две температуры различны, хотя величина теплового потока изменяется ввиду того, что давления при отсутствии стенки должны оставаться одинаковыми. Этот поток энергии молекул, когда температура распределена неравномерно, создает *теплопроводность*.

Перенос количества движения молекул через элемент поверхности, движущейся с локальной макроскопической скоростью жидкости, возникает в том случае, когда молекулы пересекают поверхность, и он всегда происходит, если имеется сила взаимодействия между двумя группами молекул на обеих сторонах элемента поверхности. Суммарный эффект потока количества движения при прохождении молекул через элемент поверхности и сил, создаваемых между молекулами на его обеих сторонах, представляется в виде локального напряжения в жидкости. Напряжение в какой-либо точке жидкости есть результат движения молекул и их взаимодействий в окрестности этой точки, поэтому если скорость жидкости постоянна в этой окрестности, то напряжение имеет вид, соответствующий покоящейся жидкости, и направлено по нормали к элементу поверхности при любой его ориентации. Если же скорость жидкости непостоянна в этой окрестности, то касательные напряжения могут быть отличными от нуля.

Закон изменения векторной функции координат, например скорости жидкости, в окрестности какой-либо точки не очевиден и будет рассмотрен в гл. 2; напряжение, связанное с этим изменением скорости, будет полностью описано в гл. 3. Однако пока можно использовать понятие переноса количества движения в рамках предварительного обсуждения, ограничиваясь частным случаем (имеющим, однако, как будет установлено позже, фундаментальное значение), когда скорость жидкости по отношению к элементу поверхности (движущемуся вместе с жидкостью) расположена в его плоскости и имеет величину, которая изменяется только по нормали к этому элементу поверхности; такое движение называется *простым сдвигом*, при котором плоскости жидкости, параллельные элементу поверхности, скользят как жесткие друг над другом. В этих условиях очевидно, что если скорости жидкости по обе стороны элемента поверхности различны, то любое случайное взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения, а знак напряжения будет таким, который соответствует уменьшению разности скоростей по обе стороны от элемента поверхности. Перенос количества движения создает таким образом *внутреннее трение*, а жидкость, в которой проявляется внутреннее трение, называется *вязкой*.

Основные общие свойства всех трех видов переноса состоят в следующем: во-первых, результирующий поток некоторой величины (числа отмеченных молекул, тепла, количества движения) равен нулю тогда, когда связанная с ней другая величина, характеризующая локальную интенсивность (долю отмеченных молекул, температуру, скорость жидкости), распределена равномерно в пространстве; во-вторых, направление движения ненулевого результирующего потока через элемент поверхности в веществе таково, что происходит выравнивание интенсивности по обе его стороны.

Приступим теперь к рассмотрению количественного соотношения между результирующим потоком и неоднородностью связанной с ним локальной интенсивности. Предварительно отметим, что, хотя наличие или отсутствие равновесия в классической термодинамике показывается на основании следствий контакта двух масс, каждая из которых однородна, в механике сплошной среды обычно приходится рассматривать такие состояния, в которых интенсивность представляет собой функцию координат. Очевидно, что явление молекулярного переноса при неравномерном распределении величины интенсивности в окрестности элемента поверхности приводит к результирующему потоку через элемент поверхности в веществе; однако вместо представления этой локальной неравномерности разностью значений интенсивностей по обе стороны элемента нужно придерживаться более общей точки зрения и представить ее в виде вектора градиента интенсивности в каждой точке поверхности.

Линейное соотношение между потоком и градиентом скалярной интенсивности

Рассмотрим сначала случаи, в которых соответствующая интенсивность представляет собой скалярную величину (а именно количество отмеченных молекул или температуру), которую обозначим C (как это принято для концентрации). Предполагается, что C — непрерывная функция координаты $\mathbf{x}$ в веществе и, возможно, также времени t, хотя время не будет оказывать явного влияния на процесс переноса в фиксированный момент времени. Теперь результирующий поток величины, связанной со скалярной величиной C, через элемент поверхности в веществе на единицу ее площади представляет собой локальную величину, которая изменяется с изменением направления нормали $\mathbf{n}$ к поверхности элемента, точно так же, как компонента некоторого вектора в направлении нормали $\mathbf{n}$. Это формально следует из рассуждения, подобного тому, которое приводит к выражению (1.3.4) для напряжения: сумма направленных внутрь потоков через три ортогональные грани малого тетраэдра отличается от потока,

выходящего из тетраэдра во внешнюю часть пространства через его наклонную грань, только на величину порядка объема тетраэдра. Следовательно, результирующий поток (перенос в секунду) через элемент поверхности с площадью δA и нормалью $\mathbf{n}$ равен произведению

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\delta A,$$

где *поток* $\mathbf{f}$ зависит от $\mathbf{x}$ (и, возможно, также от времени t), но не зависит от нормали $\mathbf{n}$.

Наша задача состоит в том, чтобы установить соотношение между двумя функциями координат, C и $\mathbf{f}$. О прямом вычислении потока, исходя из рассмотрения молекулярного процесса, почти не может быть и речи для жидкостей и твердых тел, и лишь в случае газов (рассматриваемом в следующем параграфе) такое вычисление оказывается отчасти успешным. Требуется ввести некоторое предположение, и лучше всего независимое от действительного характера основного молекулярного механизма, чтобы оно было применимо для возможно широкого круга веществ. Это предположение, к изложению которого мы сейчас приступаем, первоначально основывалось на измерениях переноса в конкретных физических задачах и использовалось только в таких задачах, однако затем было обнаружено, что оно имеет более общее значение.

Первая часть нашего предположения заключается в том, что для достаточно плавного и постепенного изменения величины интенсивности C относительно некоторой точки в веществе поток $\mathbf{f}$ зависит только от локальных свойств среды и локальных значений C и ∇C. Идея здесь проста: перенос через элемент поверхности определяется движениями молекул и их взаимодействиями в окрестности элемента поверхности и во всей этой области величина C может быть аппроксимирована линейной функцией координат, если удовлетворяется некоторое условие: отношение

$$\left|\frac{\partial C}{\partial x}\right| \Big/ \left|\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|$$

значительно больше характерной длины молекулярного движения или взаимодействия, как обычно и бывает на практике. Вторая часть предположения состоит в том, что для достаточно малых значений $|\nabla C|$ поток $\mathbf{f}$ изменяется линейно с изменением компонент вектора ∇C. Известно, что поток обращается в нуль в случае обращения в нуль $|\nabla C|$, так что наше предположение можно выразить в виде

$$f_i = k_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{1.6.1}$$

Как поток f_i, так и производная $\partial C/\partial x_j$ — векторы, а требование о том, чтобы соотношение (1.6.1) было справедливо при любом выборе системы координат, показывает, что *коэффициент пере-*

носа k_{ij} представляет собой тензор второго порядка. Коэффициент k_{ij} зависит от локальных свойств вещества (т. е. от локального термодинамического состояния вещества) и, возможно, также от локального значения C, но не от градиента ∇C. С математической точки зрения соотношение (1.6.1) можно рассматривать как предположение о том, что в разложении вектора $\mathbf{f}$ в ряд Тейлора по компонентам вектора ∇C члены второго и более высокого порядка малости пренебрежимо малы.

Это общее предположение можно дополнить другими предположениями, опирающимися на известные свойства конкретных материалов. Для *однородных* материалов коэффициенты k_{ij} могут зависеть от координат точки только посредством зависимости от локального значения C; обращение направления вектора ∇C должно приводить к обращению направления потока $\mathbf{f}$, поэтому в рассматриваемом случае члены второй и других четных степеней ряда Тейлора для вектора $\mathbf{f}$ тождественно равны нулю. Молекулярная структура многих материалов статистически изотропна [1]), и для них коэффициент k_{ij} должен иметь такую форму, чтобы свойства материала во всех направлениях были одинаковыми. Тогда любые ортогональные оси координат должны быть главными осями коэффициента k_{ij}, а это возможно только в случае

$$k_{ij} = -k\delta_{ij}. \tag{1.6.2}$$

(Другими словами, можно утверждать, что в изотропной среде вектор $\mathbf{f}$ должен быть параллелен вектору ∇C, так как нет никаких оснований для выбора другого направления вектора $\mathbf{f}$ и это вновь подтверждает необходимость равенства (1.6.2) для k_{ij}.) Скалярный коэффициент k положителен, как принято в соотношениях (1.6.1) и (1.6.2), если считать поток положительным, когда он направлен по нормали $\mathbf{n}$, так как величина, связанная с величиной C, переносится *против* направления ее градиента.

Проверка предположения (1.6.1), а также равенства (1.6.2) там, где это возможно, и определение области значений модуля $|\nabla C|$, в которой соотношение (1.6.1) верно,— это в основном задачи эксперимента. Характер проверки изменяется в соответствии с той физической величиной, перенос которой рассматривается, однако для всех них линейная зависимость (1.6.1) оказывается достаточно точной для большинства известных или встречающихся на практике значений $|\nabla C|$. Исследование причин, по которым отклонения от постоянной интенсивности C обычно столь малы, что обеспечивают необходимую точность зависимости (1.6.1), требует рассмотрения сложного молекулярного механизма, и поэтому

[1]) Твердое тело с правильной и анизотропной кристаллической структурой представляет собой важное исключение; обнаружено, что в некоторых кристаллах тепло распространяется быстрее в одних направлениях, чем в других. Но подобные исключения среди жидкостей, которые не обладают определенным молекулярным строением, являются весьма редкими.

здесь мы ограничимся тем, что будем считать зависимость (1.6.1) эмпирической. Различные соотношения, соответствующие равенству (1.6.1) при различном выборе смысла интенсивности C, известны как *определяющие уравнения*, поскольку они выражают физические свойства рассматриваемого вещества.

Уравнения диффузии и теплопроводности в покоящейся изотропной среде

Выражение для потока в данном случае имеет вид

$$\mathbf{f} = -k\nabla C \tag{1.6.3}$$

в любой точке среды. Из этого следует, что полный перенос в секунду рассматриваемой величины из объема вещества, ограниченного замкнутой поверхностью A с единичной (внешней) нормалью $\mathbf{n}$, определяется интегралом

$$-\int k\mathbf{n}\cdot\nabla C\, dA = -\int \nabla\cdot(k\nabla C)\, dV, \tag{1.6.4}$$

где V — объем замкнутой области. Если известно, что переносимая величина удовлетворяет закону сохранения, то можно составить уравнение, описывающее зависимость интенсивности C от координат и времени. Это будет сделано в отдельных случаях, в которых C представляет собой относительное количество отмеченных молекул или температуру. Будем считать, что среда находится в состоянии покоя; позже (в § 3.1) мы увидим, что для молекулярного переноса в движущейся жидкости необходимо внести некоторое изменение.

Если C — относительное количество отмеченных молекул в жидкой смеси, то справедлив простой закон сохранения. Число отмеченных молекул в объеме V жидкости равно

$$\int CN\, dV,$$

где N — полное число молекул на единицу объема, и оно может изменяться только вследствие переноса молекул через поверхность, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\int CN\, dV = \int \nabla\cdot(k_D\nabla C)\, dV, \tag{1.6.5}$$

$$\int\left\{\frac{\partial(CN)}{\partial t} - \nabla\cdot(k_D\nabla C)\right\} dV = 0,$$

где k_D — значение коэффициента k, соответствующее диффузии отмеченных молекул. Полная числовая плотность молекул в результате обмена отмеченных и неотмеченных молекул не изменяется, и ее можно считать постоянной. Последнее соотношение справедливо при любом выборе объема V, целиком лежащего в жидкости, и поэтому подинтегральное выражение должно всюду

обращаться в нуль, т. е.

$$N\frac{\partial C}{\partial t}=\nabla\cdot(k_D\nabla C). \tag{1.6.6}$$

Коэффициент k_D зависит от локального состояния вещества и, возможно, от концентрации C (ввиду того, что на величину C могут оказать влияние молекулы, окружающие какую-либо одну отмеченную молекулу); следовательно, в общем случае k_D есть функция координат. Однако на практике градиент величины k_D обычно достаточно мал, и тогда соотношение (1.6.6) можно записать в приближенной форме

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\varkappa_D\nabla^2 C, \tag{1.6.7}$$

т. е. как *уравнение диффузии*. Новый параметр

$$\varkappa_D=\frac{k_D}{N} \tag{1.6.8}$$

называется *коэффициентом диффузии* отмеченной составной части смеси в окружающей ее жидкости, состоящей из неотмеченных молекул, и имеет размерность

$$(\text{Длина})^2\times(\text{Время})^{-1}.$$

Когда число молекул N не зависит от координат, коэффициент диффузии $\varkappa_D$ равен потоку отмеченных молекул на единицу градиента числовой плотности отмеченных молекул. В частном случае, в котором отмеченные и неотмеченные молекулы с динамической точки зрения подобны и, следовательно, движутся статистически одинаково, коэффициенты k_D и $\varkappa_D$ не зависят от C, и тогда $\varkappa_D$ называется *коэффициентом самодиффузии*.

Уравнение (1.6.7) относится к одному из основных типов линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, и решения таких уравнений при различных граничных и начальных условиях хорошо изучены [1]).

Если C — температура, то можно воспользоваться законом сохранения энергии, учитывая, если нужно, как тепло, так и работу. Переносимой величиной является тепло, и, согласно равенству (1.6.4), скорость нагревания среды внутри малого объема δV вследствие переноса тепла через ограничивающую его поверхность равна (T, как обычно, обозначает температуру)

$$\nabla\cdot(k_H\nabla T)\delta V,$$

где величина k_H — значение k, соответствующее теплопроводности,—называется *коэффициентом теплопроводности*. Термодина-

[1]) См., например, Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, «Наука», М., 1964.

мическое состояние среды вследствие этого потока тепла постепенно изменяется, но если скорость этого изменения мала (при выводе основного соотношения (1.6.1) уже предполагалось, что это условие выполняется), то можно считать приращение тепла за малый промежуток времени δt на единицу массы подводимым теплом δQ, которое рассматривалось при обсуждении в § 1.5 обратимых изменений, происходящих при переходе вещества из одного равновесного состояния в другое, и, значит,

$$\delta Q = \frac{\delta t}{\rho} \nabla \cdot (k_H \nabla T). \tag{1.6.9}$$

Часть этого подводимого тепла может пойти на увеличение внутренней энергии на единицу массы, а часть перейти в работу, совершаемую единицей массы, как это представлено соотношением (1.5.3) в случае работы, совершаемой при расширении против сил внешнего давления (этот случай несомненно наиболее важен в механике жидкости). В любом случае происходит возрастание энтропии единицы массы на величину $\delta Q/T$ (см. (1.5.7)) и количество выделяемого дополнительного тепла можно выразить через приращения как температуры T, так и давления p с помощью соотношения (1.5.20). Таким образом, из (1.6.9) и (1.5.20), заменяя $1/v$ на плотность ρ и переходя от приращения всех величин к скоростям их изменения, получаем

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\beta T}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k_H \nabla T). \tag{1.6.10}$$

Это наиболее общее уравнение, описывающее распространение тепла в покоящейся среде (не считая малых движений в результате теплового расширения). Среда может быть твердой, жидкой или газообразной, если только в ее внутренних точках действуют чисто нормальные напряжения. Производные от температуры T и давления p по t независимы, так же как их приращения δT и δp в (1.5.20), а относительная величина обоих членов, содержащих эти приращения, будет зависеть от конкретных условий.

На основании (1.5.21) было показано, что отношение этих двух членов имеет такой же порядок, как и отношение изменений удельных объемов v (или плотностей ρ), которые происходят в результате данных приращений температуры T и давления p, происходящих независимо друг от друга. Если газ находится в движении, то при этом вполне возможны такие изменения температуры T и давления p, которые будут соответствовать изменениям плотности ρ (при постоянном давлении p и температуре T соответственно) на величины такого же порядка. Кроме того, для твердого тела, жидкости или газа, объем которых ограничен жесткими замкнутыми стенками и в которых температура

изменяется со временем более или менее равномерно по всему веществу, очевидно, что изменения давления и температуры по отдельности могут привести к сравнимым изменениям плотности ρ. Однако для покоящейся среды, имеющей возможность беспрепятственно расширяться, давление p постоянно, и для ограниченной покоящейся среды, в которой средняя температура, а, следовательно, также и давление, сохраняются приближенно постоянными, соотношение (1.6.10) записывается как

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k_H\nabla T). \tag{1.6.11}$$

Из соотношения (1.5.10) видно, что левая часть написанного равенства может быть также представлена как скорость изменения энтальпии I в условиях постоянного давления.

Когда коэффициент теплопроводности k_H приближенно постоянен, уравнение для температуры имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa_H\nabla^2T, \tag{1.6.12}$$

где

$$\varkappa_H=\frac{k_H}{\rho c_p}. \tag{1.6.13}$$

Это уравнение, называемое *уравнением теплопроводности*, совпадает по форме с уравнением диффузии среды в состоянии покоя. Величину $\varkappa_H$ можно назвать *коэффициентом термодиффузии*, который известен также как *коэффициент температуропроводности*.

Поскольку те области, в которых температура низкая, стремятся приобретать тепло путем теплопроводности, и наоборот, то влияние множителя T в члене, содержащем энтропию в уравнении (1.6.11), сводится к увеличению роли приращения энтропии. Вывод состоит в том, что полная энтропия термически изолированной массы, внутри которой температура не постоянна, увеличивается. В этом можно убедиться формально, переписав равенство (1.6.11) так:

$$\rho\frac{\partial S}{\partial t}=k_H\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2+\nabla\cdot\left(\frac{k_H}{T}\nabla T\right); \tag{1.6.14}$$

интегрирование по различным элементам массы $\rho\delta V$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\int S\rho\,dV=\int k_H\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2dV>0,$$

поскольку $\mathbf{n}\cdot\nabla T=0$ всюду на граничной поверхности. Это необратимое изменение системы, образованной всей изолированной массой вещества, так как никакое изменение внешних условий не может привести к обратимому изменению состояния, а возрастание энтропии, связанное с внутренней теплопроводностью, под-

утверждает общее утверждение из § 1.5 о том, что энтропия при адиабатическом необратимом изменении состояния не может уменьшаться. Однако процесс приобретения тепла малым элементом вещества за счет теплопроводности можно рассматривать как обратимое изменение системы, состоящей из одного этого элемента, подобно тому как это было сделано в рассуждении, приводящем к соотношению (1.6.10).

Молекулярный перенос количества движения в жидкости

Перенос количества движения требует другого аналитического описания вследствие векторного характера переносимой величины. Однако, как уже говорилось ранее в этом параграфе, можно исследовать общие свойства переноса тепла и количества движения, осуществляемого отмеченными молекулами, накладывая некоторое ограничение на локальное распределение скорости их движения, а именно допуская только простое движение сдвига с поперечным градиентом скорости в определенном направлении. В декартовой системе координат скорость жидкости в точке x, y, z при простом сдвиге имеет компоненты $U(y)$, 0, 0; рассмотрим напряжение, действующее на элемент поверхности, расположенный в плоскости (z, x). Касательная компонента этого напряжения не обращается в нуль из-за существования, во-первых, неравномерности скорости жидкости и, во-вторых, из-за взаимодействия молекул по обе стороны от элемента поверхности либо вследствие их движения через этот элемент, либо вследствие межмолекулярных сил, действующих через элемент.

Рассуждения, приводящие к гипотезе о линейном соотношении между вектором потока и локальным градиентом скалярной интенсивности, можно применить, изменяя только обозначения. Молекулярные взаимодействия распространяются только на малое расстояние, и молекулярный перенос количества движения через элемент поверхности обычно зависит от распределения скорости жидкости только вследствие изменения локального градиента dU/dy (причем зависимость от скорости U невозможна, так как U изменяется при использовании движущейся системы координат). Кроме того, предполагается, что для достаточно малых значений градиента $|dU/dy|$ касательная компонента напряжения, действующего на элемент поверхности (т. е. результирующий поток x-компоненты количества движения через элемент в единицу времени на единицу его площади), изменяется линейно по dU/dy. В обозначениях, принятых для напряжений в § 1.3, это означает, что

$$\sigma_{12} = \mu \frac{dU}{dy}. \qquad (1\ 6.15)$$

где величина μ, *коэффициент вязкости* жидкости, зависит от ее локальных свойств. Этот поток количества движения получается в результате взаимодействия молекул при их случайном и беспорядочном движении и имеет обязательно такое направление, чтобы происходило сглаживание неравномерного распределения скорости. Поэтому коэффициент положителен, как это следует из (1.6.15) (и с учетом принятого в § 1.3 допущения о том, что произведение $\sigma_{ij}n_j$ представляет собой силу, с которой жидкость действует на единицу площади той стороны элемента поверхности, к которой направлена нормаль $\mathbf{n}$), и представляет собой меру внутреннего трения, препятствующего деформации жидкости.

Линейное соотношение (1.6.15) хорошо известно как эмпирическое выражение для касательного напряжения, возникающего в обычных жидкостях при простом сдвиге; установлено, что оно справедливо в неожиданно большом диапазоне изменения величины $|dU/dy|$, который включает все значения, обычно встречающиеся в практике.

Изучению влияния этого напряжения, вызываемого вязкостью, на распределение скорости жидкости должен предшествовать более полный анализ, который будет проведен в гл. 3. Однако уже теперь ясно, что величина, которая, подобно коэффициентам диффузии $\varkappa_D$ и $\varkappa_H$, определяет способность молекулярного переноса сглаживать неравномерность соответствующей интенсивности (в данном случае скорости жидкости), вызывающей перенос, есть

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{1.6.16}$$

Величина ν называется *кинематическим коэффициентом вязкости*, поскольку в ее размерность (длина)^2 $\times$ (время)$^{-1}$ не входит размерность массы. Коэффициенты $\varkappa_D$, $\varkappa_H$ и ν вместе можно назвать *коэффициентами диффузии* массы, тепла и количества движения соответственно.

1.7. Отличительные свойства газов

Основная особенность газа, с которой связано большинство его характерных свойств, заключается в том, что молекулы газа находятся на большом удалении друг от друга и каждая молекула с динамической точки зрения изолирована от других молекул в течение большей части своей жизни. При температуре 0 °C и давлении в одну атмосферу число молекул в одном кубическом сантиметре газа равно $2{,}69 \cdot 10^{19}$ (оно называется *числом Лошмидта*, а тот факт, что оно одинаково для всех газов, известен как *закон Авогадро*), поэтому, если бы молекулы были размещены в углах кубической решетки, расстояние между соседними молекулами было бы $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ см. Диаметр молекулы точно не опреде-

лен, однако его обоснованной мерой служит расстояние между центрами двух отдельных молекул, на котором межмолекулярная сила изменяет знак (см. § 1.1). Для многих простых молекул этот эффективный диаметр d_0 находится в интервале $(3 \div 4) \cdot 10^{-8}$ см, так что средняя величина удаления молекул друг от друга в указанном выше смысле составляет величину порядка $10d_0$. На этом расстоянии силы сцепления молекул, действующие между ними, столь малы, что большую часть своей жизни молекулы движутся свободно по прямым линиям с постоянной скоростью (мы предполагаем, что они электрически нейтральны). Понятие столкновения между двумя молекулами также точно не определено, однако если определить столкновение как событие, происходящее всякий раз, когда одна молекула приближается к другой настолько близко, что действующая между ними сила становится отталкивающей, то можно вычислить среднее расстояние, проходимое молекулой между столкновениями и равное $8{,}3 \cdot 10^{-21} d_0^{-2}$ см, т. е. $7 \cdot 10^{-6}$ см, или $200d_0$ с учетом приведенной выше оценки для d_0.

Представление о газе как о скоплении молекул, движущихся почти свободно, исключая случайные столкновения, лежит в основе *кинетической теории* газов. В этой теории принято рассматривать свойства *совершенного газа*, молекулы которого не оказывают никакого силового воздействия друг на друга, не считая актов столкновений, и занимают пренебрежимо малый объем. (Частота столкновений молекулы стремится к нулю вместе с объемом молекул, однако она играет малую роль в теории и достаточно лишь знать, что *некоторые* столкновения происходят.) Из приведенных выше числовых данных кажется вероятным, что при нормальных условиях реальные газы обладают свойствами, которые мало отличаются от свойств гипотетического совершенного газа, и наблюдения показывают, что это именно так; в действительности некоторые из эмпирических законов, открытые ранее при исследовании свойств газов, такие, как закон Бойля или закон Шарля, можно вывести как свойства совершенного газа. Поэтому описание элементарных свойств газов целесообразно начать с изучения их отклонений от свойств совершенного газа.

Мы, естественно, в полной мере используем мощные идеи и результаты классической термодинамики (§ 1.5) и менее строгие результаты теории переноса (§ 1.6). Выводы двух предыдущих параграфов не зависят от молекулярной структуры вещества, и плата за такую общность отчасти состоит в том, что в них было получено мало подробных и конкретных результатов. Если теперь несколько снизить общность рассуждений и перейти к конкретным средам со сравнительно простой молекулярной структурой, таким, как, например, совершенный газ, то появится возможность получить значительно больше дополнительных результатов.

Совершенный газ в равновесном состоянии

Рассмотрим сначала покоящийся совершенный газ в состоянии термодинамического равновесия в смысле, указанном § 1.5: все параметры газа не зависят от координат и времени, так что процессов переноса нет. Предположим прежде всего, что все молекулы одинаковы и каждая имеет массу $m = \rho/N$, где N — числовая плотность молекул. Хотя молекулы подчиняются динамическим законам, их так много, что можно дать соответствующее статистическое описание движения. Поэтому введем плотность распределения вероятностей; эту плотность для скорости молекул $\mathbf{u}$ обозначим $f(\mathbf{u})$. Произведение $f(\mathbf{u})\,\delta u\delta v\delta w$ есть вероятность того, что скорость данной молекулы в любой момент времени имеет компоненты, значения которых лежат в интервалах u и $u + \delta u$, v и $v + \delta v$, w и $w + \delta w$; с другой стороны, произведение $f(\mathbf{u})\,\delta u\delta v\delta w$ можно рассматривать как относительное количество молекул в данном объеме, которые в каждый момент времени имеют компоненты скорости в указанных пределах. Функция $f(\mathbf{u})$ тождественно удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(\mathbf{u})\,du\,dv\,dw = 1.$$

Предположим, что столкновения молекул нарушают какое-либо заданное начальное распределение скоростей, так что в состоянии равновесия функция f зависит только от модуля скорости $|\mathbf{u}|$ и не зависит от вида молекул.

Простое соотношение между давлением и средними параметрами молекулы служит хорошим примером того, что можно достичь в статистической модели совершенного газа. Для получения этого соотношения рассмотрим перенос количества движения молекул газа, движущихся в обоих направлениях через неподвижный элемент поверхности δA с нормалью $\mathbf{n}$. Количество молекул, пересекающих в единицу времени элемент поверхности со скоростями, компоненты которых отличаются не более чем на δu, δv, δw от скорости $\mathbf{u}$ (переход молекул отсчитывается в ту сторону, на которой направление нормали $\mathbf{n}$ положительное), равно $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\delta A N f(\mathbf{u})\,\delta u\delta v\delta w$; каждая из этих молекул переносит через элемент поверхности количество движения $m\mathbf{u}$. Следовательно, полный поток количества движения через этот элемент в результате движения молекул равен

$$\rho\delta A\int_{-\infty}^{\infty}\int\int \mathbf{u}\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}f(\mathbf{u})\,du\,dv\,dw.$$

Благодаря симметрии распределения скоростей компонента этого потока количества движения в направлении касательной к эле-

менту поверхности равна нулю и нужно рассматривать только компоненту по нормали к ней. Кроме того, сила, действующая непосредственно между молекулами по любую сторону от элемента поверхности, равна нулю для совершенного газа, поэтому напряжение в газе порождается только потоком количества движения. Из этого следует, что напряжение в совершенном газе представляет собой нормальное давление

$$p = \rho \iiint (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})^2 f(\mathbf{u})\, du\, dv\, dw = \overline{\rho (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})^2}, \qquad (1.7.1)$$

где черточка означает среднее по всем молекулам в единице объема. Среднее значение в (1.7.1) не зависит от направления нормали n, так что можно написать

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{\mathbf{u}^2}. \qquad (1.7.2)$$

Если в газе имеется несколько различных видов молекул, то подобное рассуждение справедливо для каждого из них отдельно; поэтому, применяя очевидные обозначения, получаем

$$p = \frac{1}{3}\sum_r \rho_r \overline{\mathbf{u}_r^2} \equiv \frac{2}{3} \times (\text{Полная кинетическая энергия поступательного движения молекул в единице объема}). \qquad (1.7.3)$$

Это рассуждение не дает давления газа на твердую границу, однако выражение (1.7.3) справедливо и на твердой границе, поскольку условия механического равновесия газа требуют, чтобы давление p было непрерывным всюду внутри газа (см. (1.4.2)) и постоянным при отсутствии массовых сил.

Функция распределения скоростей $f(\mathbf{u})$ для каждой составной части газа является одной из фундаментальных в кинетической теории, и было предпринято много попыток найти ее вид для совершенного газа в состоянии равновесия. Ни один из имеющихся выводов полностью не свободен от различных предположений, хотя все они дают один и тот же результат, который также находится в удовлетворительном соответствии с наблюдением, и почти нет сомнений в его справедливости. Вероятно, наиболее удовлетворителен вывод с использованием методов статистической механики. Такой «метод наиболее вероятного состояния» дает полезную дополнительную информацию, и здесь будут изложены общие результаты, полученные по этому методу [1]).

Указанные результаты касаются распределения вероятностей для всех параметров, необходимых для определения состояния молекулы, включая три компоненты количества движения моле-

[1]) Описание этого метода см., например, в гл. 9 книги Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, 1938 [см. также Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, «Наука», М., 1964.— *Ред.*].

кулы как целого. Если предположить, что вращательные и колебательные формы движения молекулы описываются классическими законами (в действительности при некоторых условиях необходимо привлекать квантовую теорию, о чем речь пойдет ниже), то в целом состояние молекулы с s степенями свободы в каждый момент времени может быть представлено с помощью s обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и соответствующих им s обобщенных импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_s$; координаты q_1, q_2, q_3 можно считать декартовыми координатами центра масс молекулы и тогда $p_1 = mu$, $p_2 = mv$, $p_3 = mw$, а другие $(s - 3)$ степени свободы относятся к вращательным и колебательным формам движения. В совершенном газе молекулы динамически не зависят друг от друга,так что в соответствии с данными значениями обобщенных координат и моментов существует полная энергия молекулы ε, включающая как часть энергию их поступательного движения. Следовательно, вероятность того, что для данной молекулы в любой момент времени значения ее обобщенных координат и импульсов лежат внутри интервалов от q_1 до $q_1 + \delta q_1, \ldots$, от p_s до $p_s + \delta p_s$, равна

$$Ce^{-\alpha\varepsilon}\delta q_1 \ldots \delta q_s \delta p_1 \ldots \delta p_s, \tag{1.7.4}$$

где постоянные C и α не зависят от $q_1, \ldots, p_s$. Постоянную C можно определить из тождества

$$C \int \ldots \int e^{-\alpha\varepsilon}\, dq_1 \ldots dp_s = 1, \tag{1.7.5}$$

если знать зависимость энергии ε от обобщенных координат $q_1, \ldots, p_s$, причем интеграл в (1.7.5) берется по всевозможным значениям $q_1, \ldots, p_s$; постоянная C поэтому зависит только от вида молекул и от параметра распределения α. Выражение (1.7.4) широко используется и известно как классическое (т. е. неквантовое) *распределение Больцмана.*

Если на газ не действуют массовые силы, то энергия ε, а следовательно, также и выражение (1.7.4) не зависят от координат q_1, q_2, q_3, поэтому плотность газа постоянна, как это и предполагалось ранее.

Независимо от внутренней структуры молекулы можно написать, что энергия

$$\varepsilon = \frac{1}{2} mu^2 + (\text{Энергия, связанная с } (s-3) \text{ непоступательными степенями свободы}) =$$

$$= \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + F(q_4, \ldots, q_s, p_4, \ldots, p_s), \tag{1.7.6}$$

и допустимые значения p_1, p_2 и p_3 лежат в интервале от $-\infty$ до ∞. Интегрирование в (1.7.5) по p_1, p_2 и p_3 можно провести

отдельно, что дает соотношение

$$C\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^{3/2}\int\ldots\int e^{-\alpha F}\,dq_1\ldots dq_s\,dp_4\ldots dp_s=1 \qquad (1.7.7)$$

для определения константы C. Тогда вероятность нахождения молекулы в данном состоянии с компонентами скорости, отличающимися не более чем на δu, δv, δw от компонент скорости $\mathbf{u}$, после деления на $\delta u\delta v\delta w$ равна

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= m^3\int\ldots\int Ce^{-\alpha\varepsilon}\,dq_1\ldots dq_s\,dp_4\ldots dp_s = \\ &= m^3Ce^{-(1/2)\alpha m\mathbf{u}^2}\int\ldots\int e^{-\alpha F}\,dq_1\ldots dq_s\,dp_4\ldots dp_s = \\ &= \left(\frac{\alpha m}{2\pi}\right)^{3/2}e^{-(1/2)\alpha m\mathbf{u}^2}; \end{aligned} \qquad (1.7.8)$$

это хорошо известное *максвелловское распределение скоростей молекул* u, v, w, полученное впервые Максвеллом на основе предположения о статистической независимости трех компонент скорости (которое, очевидно, корректно, но строго доказать его трудно). Единственный параметр α, который необходим для полного вычисления распределения скоростей молекул, связан со средней энергией их поступательного движения, следовательно,

$$\frac{1}{2}\,m\overline{\mathbf{u}^2}=\frac{1}{2}\,m\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\mathbf{u}^2f(\mathbf{u})\,du\,dv\,dw=\frac{3}{2}\,\alpha \qquad (1.7.9)$$

Если газ представляет собой смесь молекул различного вида, то распределение (1.7.4) Больцмана и распределение (1.7.8) Максвелла применимы к каждому виду молекул отдельно. Кроме того, из рассуждения, приводящего к выражению (1.7.4), следует, что параметр α имеет одно и то же значение для всех молекул, из которых состоит газ; можно показать, что это необходимо. В самом деле, если в качестве $q_1, \ldots, q_t, p_1, \ldots, p_t$ взять обобщенные координаты и импульсы пар молекул различного вида, то в этом случае параметр ε равен сумме энергий двух молекул в отдельности и имеется шесть поступательных степеней свободы. Таким образом, если $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — скорости двух молекул с массами m_1 и m_2 соответственно, то из (1.7.9) следует

$$\frac{1}{2}\,m_1\overline{\mathbf{u}_1^2}=\frac{1}{2}\,m_2\overline{\mathbf{u}_2^2}=\frac{3}{2\alpha}\,, \qquad (1.7.10)$$

т. е. что все молекулы в смеси газов имеют одинаковую среднюю энергию поступательного движения. Ранее было показано, что молекулы создают давление газа в соответствии с энергией их поступательного движения; теперь выражение (1.7.3) можно пере-

писать в виде

$$p = \sum_r \frac{N_r}{\alpha} = \frac{N}{\alpha}, \qquad (1.7.11)$$

где N_r — числовая плотность молекул одного вида; выражение (1.7.11) показывает, что вклад в давление от каждой составной части смеси пропорционален числу молекул этой составной части в единице объема.

Соотношение (1.7.10) является одним из проявлений *принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы*. Этот принцип применим к любой из обобщенных координат и любому из импульсов молекулы, которые входят в выражение энергии молекул ε в виде квадратичных слагаемых и область допустимых значений которых простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Так, предположим, что функция F в (1.7.6) имеет такой вид, что

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\mathbf{u}^2 + aq_4^2 + G(q_5, \ldots, q_s, p_4, \ldots, p_s),$$

где коэффициент a не зависит от обобщенной координаты q_4. Тогда в соответствии с (1.7.4) и (1.7.5) среднее значение величины aq_4^2 при фиксированных значениях всех других обобщенных координат и импульсов равно

$$\frac{\int_0^\infty aq_4^2 e^{-\alpha\varepsilon}\, dq_4}{\int_0^\infty e^{-\alpha\varepsilon}\, dq_4} = \frac{1}{2\alpha}. \qquad (1.7.12)$$

Это среднее значение не зависит от выбранных значений координат и импульсов, за исключением q_4, и поэтому оно справедливо и в общем случае. Следовательно, средняя энергия, связанная с любой обобщенной координатой и любым импульсом, которые появляются в виде дополнительного квадратичного слагаемого, равна $(1/2)\,\alpha^{-1}$. Этот дополнительный квадратичный член может выражать кинетическую энергию поступательного движения в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений, или кинетическую энергию вращения молекулы относительно одной из ее главных осей, или кинетическую энергию колебательной формы ее движения, или потенциальную энергию, связанную с малой деформацией молекулы относительно ее равновесной формы. Если классические законы динамики применимы к молекулам, то средняя полная энергия одноатомной молекулы с массой, сосредоточенной в точке, равна $(3/2)\,\alpha^{-1}$, энергия жесткой двухатомной молекулы с ненулевым моментом инерции относительно двух главных осей равна $(5/2)\,\alpha^{-1}$, энергия двухатомной молеку-

лы, атомы которой могут колебаться вдоль соединяющей их прямой, равна $(7/2)\,\alpha^{-1}$ и т. д.

В смеси газов распределение координат и импульсов молекул каждого вида определяется значением параметра α функции распределения (1.7.4), который имеет одно и то же значение для каждой компоненты смеси. Этот факт можно сформулировать в виде утверждения, что если два различных газа находятся в тепловом равновесии, то соответствующие значения параметра α обоих газов равны. Температура определяется как величина, которая обладает тем же самым свойством, и поэтому естественно найти связь между параметром α и температурой газа. Это можно сделать путем сравнения равенства (1.7.11) и термодинамического выражения для давления p. В § 1.5 было показано, что для любой среды

$$T\delta S = \delta E + p\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

и

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}.$$

Соотношение Максвелла (1.5.15) позволяет записать последнее равенство в виде

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = p - \rho^2\left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_T. \qquad (1.7.13)$$

В совершенном газе по определению внутренняя энергия есть сумма отдельных видов энергии молекул на единицу массы и не зависит от расстояний между молекулами, т. е. не зависит от плотности ρ. Следовательно, для совершенного газа

$$E \equiv E(T), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = \frac{p}{T}.$$

Известно, что при постоянной плотности давление p пропорционально температуре T (закон Шарля), и, согласно равенству (1.7.11),

$$\frac{1}{\alpha} = kT, \qquad (1.7.14)$$

где k — постоянная, называемая *постоянной Больцмана*. Если единица температуры определена так, что абсолютная температура $T = 273{,}15°$ К при температуре плавления льда (соответствующей 0° С), то

$$k = 1{,}381 \cdot 10^{-16} \text{ см} \cdot \text{дин/град}.$$

Равенство (1.7.11) для давления превращается в *уравнение состояния совершенного газа*

$$p = NkT = \frac{k}{m}\rho T = R\rho T, \qquad (1.7.15)$$

где $\overline{m}$ — средняя масса молекулы газа, а параметр $R = k/\overline{m}$ известен как газовая постоянная (для сухого воздуха $R = 2{,}870 \cdot 10^6$ см^2/сек$^2 \cdot 1$/град). Одно из следствий уравнения состояния состоит в том, что коэффициент теплового расширения совершенного газа

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}. \tag{1.7.16}$$

Для изотермического коэффициента сжимаемости имеем выражение

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}, \tag{1.7.17}$$

показывающее, что относительные изменения давления p и плотности ρ при постоянной температуре T равны; адиабатический же коэффициент сжимаемости, как уже известно, равен изотермическому, умноженному на γ^{-1} (см. (1.5.6)).

Тот факт, что для совершенного газа E зависит только от температуры T, упрощает некоторые общие выражения для удельной теплоемкости. Две основные теплоемкости, определяемые равенствами (1.5.5), принимают вид

$$c_p = \frac{dE}{dT} + R, \qquad c_v = \frac{dE}{dT}; \tag{1.7.18}$$

отсюда получаем *закон Карно*

$$c_p - c_v = R, \tag{1.7.19}$$

который, как установлено, выполняется с погрешностью, не превышающей 1% для воздуха при нормальных температуре и давлении. Теплоемкости c_p и c_v, подобно E, зависят только от температуры, и функции состояния E, I и S можно записать так:

$$E = \int c_v\, dT, \qquad I = \int c_p\, dT, \tag{1.7.20}$$

$$S = \int \frac{dE}{T} + \int \frac{p}{T}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \int \frac{c_v}{T}\, dT - (c_p - c_v) \ln \rho. \tag{1.7.21}$$

Когда молекулы совершенного газа имеют простую структуру, можно еще упростить выражения для внутренней энергии и удельных теплоемкостей. Для одноатомных молекул в виде точечных масс, обладающих только энергией поступательного движения, средняя энергия равна $(3/2)\,\alpha^{-1} = (3/2)\,kT$, так что

$$E = \frac{3}{2}kT, \qquad c_p = \frac{5}{2}R, \qquad c_v = \frac{3}{2}R.$$

В более общем случае, если для каждой молекулы газа энергия ε выражается в виде суммы n членов, каждый из которых пропорционален квадрату обобщенной координаты или импульса, то

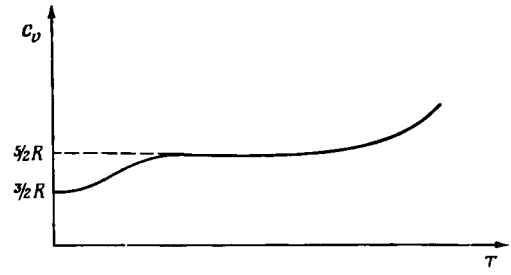
среднее значение $\bar{\varepsilon} = (1/2)\, nkT$ и

$$E = \frac{\bar{\varepsilon}}{m} = \frac{1}{2} nRT, \qquad c_v = \frac{1}{2} nR, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{n+2}{n}. \qquad (1.7.22)$$

Измеренные значения c_p и c_v для инертных газов, которые, как известно, одноатомны, хорошо согласуются с этими классическими формулами при $n = 3$. Кроме того, имеется несколько двухатомных газов, включая кислород и азот, для которых измеренные значения при «нормальных» температуре и давлении достаточно хорошо описываются этими формулами при $n = 5$ (например, для сухого воздуха при 15° С и атмосферном давлении измеренное значение γ равно 1,4 с точностью до 1%). Однако во многих других случаях никакой выбор числа n не приводит к хорошему соответствию с наблюдаемыми значениями теплоемкостей и часть внутренней энергии E, связанная с непоступательными движениями молекулы, очевидно, не всегда представляется в форме, даваемой классическими законами.

Известно, что зависимость удельной теплоемкости c_v от температуры T для некоторых обычных многоатомных газов описывается кривой вроде изображенной на рис. 1.7.1 и ее можно получить с помощью квантовой механики. Величина энергии, связанной с непоступательными формами движения, квантуется и принимает одно из множества дискретных значений. Только когда величина $(1/2)\, kT$ значительно больше наименьшего из этих энергетических уровней, непрерывное распределение (1.7.4) дает удовлетворительное представление о равновесном состоянии газа, и только тогда средняя энергия, связанная с каждой формой движения, будет приближенно равна $(1/2)\, kT$. При очень низких температурах газа ни одна из непоступательных форм движения молекулы не возбуждается и внутренняя энергия почти полностью является энергией поступательного движения, так что $c_v = (3/2)\, R$. По мере возрастания температуры достигается наименьший энергетический уровень некоторой непоступательной формы движения, обычно вращательной формы, и функция E возрастает с температурой T значительно быстрее, чем по линейному закону.

Плоский участок на графике рис. 1.7.1 соответствует промежуточному диапазону температур, таких, что величина $(1/2)\, kT$ превосходит наименьший энергетический уровень вращательной формы движения настолько, чтобы энергия этой формы полностью входила в величину E (т. е. была равна kT для двухатомных молекул), однако остается все еще намного меньше наименьшего энергетического уровня колебательных форм движения. Для воздуха энергия колебательных форм не имеет значения вплоть до температуры около 600° К, а теплоемкости c_p и c_v с достаточной



Р и с. 1.7.1. Зависимость удельной теплоемкости газа от температуры для многоатомной молекулы.

точностью постоянны и равны соответственно (7/2) R и (5/2) R в диапазоне температур 250—400° К, который обычно включает «нормальные» температуры. При очень высоких температурах, свыше 20 000° К, значительная часть E связана с энергией электронной системы молекулы (ее можно рассматривать как энергию вращения одноатомных молекул).

Для важного частного случая *совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями* (по крайней мере в некотором диапазоне температур), к которому близко подходит воздух при нормальных температуре и давлении, можно получить явные выражения для E, I и S. Вместо (1.7.20) можно записать

$$E - E_0 = c_v T, \quad I - I_0 = c_p T, \tag{1.7.23}$$

а из (1.7.21), используя уравнение состояния, находим

$$S - S_0 = c_v \ln (p\rho^{-\gamma}), \tag{1.7.24}$$

где постоянные E_0, I_0, S_0 не имеют какого-либо абсолютного значения, если удельная теплоемкость c_v постоянна для всех температур, меньших T. Из последней формулы следует связь между давлением p и плотностью ρ при изэнтропическом изменении состояния

$$p \sim \rho^{\gamma}, \tag{1.7.25}$$

которое часто называют связью между давлением p и плотностью ρ при адиабатическом изменении состояния совершенного газа, хотя для этого также необходимо, чтобы изменение состояния было обратимым (поскольку в противном случае энтропия S может не быть постоянной) и чтобы c_v было постоянным.

Отклонения от законов совершенного газа

В этой книге не рассматриваются условия, при которых полученные выше соотношения не применимы с достаточной точностью к обычным реальным газам, однако имеет смысл отметить вкратце

отклонения от законов совершенного газа, которые могут возникать при особых условиях. Эти отклонения бывают двух основных типов. Первые из них проявляются при больших плотностях и возникают вследствие взаимной близости молекул, вторые наблюдаются при высоких температурах и вызваны изменениями в структуре молекул.

При больших плотностях на динамическое поведение молекулы влияют расположенные поблизости другие молекулы, и основная формула (1.7.2) для давления в газе нуждается в изменении. В этой формуле учитывается только поток количества движения по нормали к элементу поверхности, а теперь нужно добавить еще слагаемое, обусловленное силами, действующими в один и тот же момент времени между парами молекул по обе стороны от элемента поверхности. Сила, приложенная к одной молекуле в любой момент времени со стороны всех молекул, расположенных на другой стороне элемента поверхности, пропорциональна числовой плотности молекул N, поэтому полная сила, действующая через элемент (и направленная по нормали вследствие симметрии), будет пропорциональна N^2. Следовательно, давление

$$p = \begin{pmatrix}\text{Поток нормальной компоненты количества} \\ \text{движения на единицу площади}\end{pmatrix} - a\rho^2,$$

где a — постоянная для данного газа, которая зависит от межмолекулярных сил. Если преобладают силы сцепления между молекулами, то $a > 0$. Наблюдения указывают на то, что эффективное значение a убывает с увеличением температуры T особенно потому, что по мере возрастания скоростей молекул все большую роль играют силы отталкивания в связи со все более глубоким взаимопроникании молекул в их силовые поля.

Выражение для потока количества движения также нуждается в уточнении, так как оно получено в предположении, что вероятность прохождения молекулы через элемент поверхности не зависит от наличия других молекул. Если объем, занимаемый молекулами, уже не является пренебрежимо малой частью всего объема, то частота, с которой данная молекула пересекает элемент поверхности, становится больше, чем предполагалось, поскольку пространство, доступное молекуле, оказывается меньшим. С точностью до величин первого порядка по отношению к объему молекул можно получить возросшую частоту, с которой молекулы пересекают элемент поверхности, путем деления ее прежней величины на коэффициент $1 - b\rho$ (соответствующий одному и тому же числу молекул, движущихся независимо друг от друга в объеме, который уменьшается на величину b для каждой единичной массы газа); отсюда следует, что уточненная величина давления p, определяе-

мая потоком количества движения молекул, принимает вид

$$\frac{NkT}{1-b\rho} = \frac{R\rho T}{1-b\rho}.$$

Здесь снова параметр b не является абсолютной постоянной, а уменьшается с увеличением температуры T, поскольку при более высоких скоростях молекулы подходят ближе друг к другу.

Таким образом, получаем уточненное уравнение состояния

$$p = \frac{R\rho T}{1-b\rho} - a\rho^2, \tag{1.7.26}$$

так называемое *уравнение Ван-дер-Ваальса*, которое наиболее известно среди различных попыток учесть «несовершенство» реальных газов. Рассуждения, на основании которых оно выведено, не вполне строги, однако установлено, что это уравнение применимо при описании малых отклонений от уравнения состояния для совершенного газа. Для воздуха опытные значения коэффициентов a и b приблизительно равны $3 \cdot 10^{-3}\ p_0/\rho_0^2$ и $3 \cdot 10^{-3}\ 1/\rho_0$ соответственно, причем значения p_0 и ρ_0 берутся при стандартных условиях. Это уравнение непригодно для газов вблизи точки конденсации.

Совсем другого рода отклонения от соотношений для совершенного газа возникают при очень высоких температурах, когда некоторые столкновения становятся настолько интенсивными, что может происходить диссоциация многоатомных молекул на отдельные атомы. Например, при нормальном давлении значительная часть двухатомных молекул кислорода диссоциирует при температуре 3 000° K, а азота — при 6 000° K. Следовательно, при температурах такого порядка воздух представляет собой смесь O, O_2, N и N_2. При еще более высоких температурах может, кроме того, начаться процесс ионизации, и тогда в смесь добавятся свободные электроны. Частицы такой газовой смеси могут быть приближенно динамически независимы (во всяком случае, если не принимать во внимание электростатические силы, которые уменьшаются обратно пропорционально квадрату расстояния между молекулами), так что в этом смысле газ еще можно считать совершенным. При этом выражение для давления и соотношение между энергией поступательного движения и температурой все еще сохраняют силу, откуда, как и раньше, следует

$$p = \frac{k}{\overline{m}} RT.$$

Однако здесь $\overline{m}$ — средняя масса частиц, из которых составлен газ, и она зависит от температуры и плотности (поскольку они влияют на равновесное соотношение между молекулами и атомами или между атомами и электронами), поэтому полученное уравнение

состояния лишь внешне похоже на уравнение состояния совершенного газа. Кроме того, энергетические соотношения также нуждаются в уточнении, поскольку при диссоциации молекул и ионизации атомов поглощается энергия. Таким образом, внутренняя энергия газа зависит от состава смеси, а не только от одной температуры, что характерно для совершенного газа.

Коэффициенты переноса в совершенном газе

Если некоторые параметры газа неоднородно распределены в пространстве и если эти параметры определяются величинами, которые связаны с отдельными молекулами и в некотором смысле сохраняются, то вследствие случайных движений молекул и неизменности их свойств с течением времени происходит сглаживание распределений параметров в пространстве. Явления молекулярного переноса подобного рода существуют у всех жидкостей, как уже отмечалось в § 1.6. В случае совершенного газа можно оценить величину коэффициентов переноса (представляемых параметрами k_{ij} в выражении (1.6.1)) путем фактического расчета переноса, обусловленного молекулами, движущимися независимо друг от друга. Точный расчет коэффициентов переноса для газа сопряжен как с принципиальными, так и с математическими трудностями, и описание соответствующих методов и их результатов выходит за рамки данной книги [1]).

В совершенном газе, находящемся в состоянии равновесия, распределение молекул по скоростям (см. (1.7.8)) изотропно. Следовательно, реакция газа на отклонение от состояния равновесия в виде пространственной неоднородности параметров газа не имеет какого-либо предпочтительного направления, и поэтому тензор коэффициента переноса k_{ij} определяется единственным скалярным параметром k, введенным в (1.6.2).

Предположим, что неоднородность газа связана с некой величиной, которая в процессе столкновения молекул сохраняется и значение которой для данной молекулы равно q; различные возможные интерпретации величины q будут даны ниже. Тогда вследствие свободного перехода молекул с характеристикой q и скоростью $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ по нормали к элементу поверхности в газе происходит перенос этой величины (на единицу площади и в единицу времени), равной произведению $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}q$ на число молекул в единице объема, и, таким образом, полный поток на единицу площади равен

$$N\overline{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}q},$$

[1]) Отсылаем читателя к книге: Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960. Более простое изложение вопроса можно найти в работах по кинетической теории газов.

причем осреднение производится по всем молекулам в окрестности рассматриваемого элемента. Если локальная средняя (в том же самом смысле) величина q постоянна по всему газу, то статистически не может быть никаких данных, чтобы с определенным значением q связать тот или иной знак нормальной скорости $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$, и поэтому полный поток равен нулю. С другой стороны, если величина $\bar{q}$ непостоянна, то молекулы, движущиеся в направлении возрастающих значений $\bar{q}$, будут смешиваться с молекулами, имеющими величины q, меньшие их локального среднего значения. Направление движения молекулы становится совершенно случайным в пределах нескольких столкновений после заданного направления движения, поэтому на поток может оказать влияние только изменение величины $\bar{q}$ в пределах нескольких длин свободного пробега молекул от рассматриваемой точки; иначе говоря, поток может зависеть только от локального градиента величины $\bar{q}$, как и в более общем случае, обсуждавшемся в § 1.6.

Если сделать грубое предположение, что в процессе свободного пробега молекула всегда имеет значение величины $\bar{q}$, равное q в положении ее последнего столкновения, то значение q на поверхности элемента определяется разностью

$$\bar{q} - t\mathbf{u}\cdot\nabla\bar{q},$$

где $\bar{q}$ и $\nabla\bar{q}$ вычислены при определенном положении элемента, а t — промежуток времени, прошедший после столкновения. Еще одно грубое приближение, которое нужно сделать, заключается в том, что время t можно заменить средним временем τ между столкновениями. Тогда поток на единицу площади будет равен

$$-N\overline{\tau\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathbf{u}\cdot\nabla\bar{q}}.$$

В этом случае изотропной среды вектор потока $\mathbf{f}$ направлен вдоль локального градиента величины $\bar{q}$ и поэтому величина вектора $\mathbf{f}$ равна потоку на единицу площади через элемент поверхности с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении $\nabla\bar{q}$. Отсюда следует выражение вектора потока

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{3}N\overline{\tau\mathbf{u}^2}\nabla\bar{q}, \tag{1.7.27}$$

в котором мы пренебрегли малыми различиями среднеквадратичных значений компонент скорости $\mathbf{u}$. Нельзя ожидать, что это выражение даст правильные численные результаты, но оно показывает, какие параметры влияют на коэффициенты переноса для совершенного газа. Характерным для этого выражения является произведение $\overline{\tau\mathbf{u}^2}$, которое входит в выражения всех коэффициентов диффузии для совершенного газа. Можно написать произведение

$\tau\overline{u^2}$ в виде $l\,(\overline{u^2})^{1/2}$, где l — некоторая средняя длина свободного пробега молекулы между столкновениями.

Придадим теперь величине q различные конкретные значения. Если q равно единице для молекул определенного вида и равно нулю для других молекул в смеси газов, то $\overline{q}$ есть локально относительное количество отмеченных молекул, и оно совпадает с концентрацией C, введенной в § 1.6. Поток, определяемый выражением (1.7.27), представляет собой поток числа отмеченных молекул, и в этом случае выражение (1.7.27) эквивалентно оценке коэффициента диффузии $\varkappa_D$ (см. (1.6.3) и (1.6.8)), который имеет порядок $\tau\overline{u^2}$, где τ и $\overline{u^2}$ — средние величины для отмеченных молекул. Величина $\tau\overline{u^2}$ для отмеченных молекул может отличаться от ее значения для неотмеченных молекул, и она уменьшается с увеличением молекулярного веса отмеченных молекул в газе при данной температуре.

Если q есть полная энергия молекулы, то в этом случае отношение $\overline{q}/\overline{m}$ представляет собой внутреннюю энергию единицы массы газа $E(T)$ и поток, определяемый выражением (1.7.27), есть по существу поток тепла. Поэтому на основании выражения (1.7.27) коэффициент теплопроводности k_H, определенный в § 1.6 как поток тепла через единицу площади на единицу локального градиента температуры (со знаком минус), имеет порядок

$$\tau\overline{u^2}\rho\frac{dE}{dT} = \tau\overline{u^2}\rho c_v$$

и соответственно коэффициент термодиффузии $\varkappa_H$ (см. (1.6.13)) имеет порядок $\tau\overline{u^2}c_v/c_p$.

Если в качестве q взять компоненту количества движения молекулы в данном направлении в плоскости элемента поверхности в газе, совершающем простое движение сдвига, так что скорость газа изменяется только в направлении нормали к элементу поверхности, то отношение $\overline{q}/\overline{m}$ равно скорости газа U, а поток, определяемый выражением (1.7.27) (которое, как предполагается в этом случае, применимо только лишь при одном выборе направления нормали к элементу поверхности), представляет собой касательную компоненту напряжения через элемент поверхности [1]). Поэтому из выражения (1.7.27) можно установить, что коэффициент вязкости жидкости μ, определяемый равенством (1.6.15) как касательное напряжение, разделенное на градиент скорости жидкости,

1) Отметим, что отношение касательной компоненты напряжения к нормальной оценивается величиной порядка $\tau dU/dy$, которая, учитывая, что время τ для воздуха при нормальных температуре и давлении составляет приблизительно 10^{-10} сек, намного меньше единицы для обычно встречающихся на практике значений градиента скорости dU/dy. Однако воздействие напряжений на движение газа определяется их градиентами (как следует, например, из (1.4.2)), а не их абсолютной величиной, и, как будет показано, нормальная и касательная компоненты напряжений в действительности могут оказывать сравнимые влияния на движение газа.

имеет порядок $\rho\tau\overline{u^2}$, а кинематический коэффициент вязкости ν (см. (1.6.16)), он же коэффициент диффузии количества движения, имеет порядок $\tau\overline{u^2}$.

Оказывается, что для совершенного газа все три коэффициента диффузии имеют вид произведения

$$(\text{Число порядка единицы}) \times \tau\overline{u^2} \ (\text{или } l(\overline{u^2})^{1/2}) \qquad (1.7.28)$$

(хотя при диффузии одной из составных частей смеси величины τ и $\overline{u^2}$ относятся к отмеченным молекулам, а не ко всему газу в целом). К сожалению, величины τ и l не вполне определены для реальных молекул, поскольку они требуют некоторого произвола при решении вопроса о том, что представляет собой столкновение молекул [1]). Вследствие этого из предложенной выше простой теории нельзя априори сделать точные выводы об абсолютной величине рассматриваемых коэффициентов диффузии; в действительности более полезно действовать в обратном направлении и определять величины τ и l, используя теорию и наблюдаемые значения коэффициентов диффузии. Однако предсказание того, что коэффициенты диффузии отмеченных молекул (в случае самодиффузии), тепла и количества движения имеют одинаковый порядок величины, подтверждается опытом. Простая формула

$$\frac{\nu}{\varkappa_H} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \qquad (1.7.29)$$

хорошо согласуется с измерениями кинематического коэффициента вязкости ν и коэффициента диффузии $\varkappa_H$ для многих газов. Для воздуха эта формула дает $\nu/\varkappa_H = 0{,}74$ при наблюдаемом значении 0.72. Измерениями установлено, что отношение $\nu/\varkappa_D$ ($\varkappa_D$ — коэффициент самодиффузии) находится для большинства простых газов между 0,6 и 0,8.

Представляет интерес также зависимость коэффициентов диффузии от абсолютной температуры и плотности, устанавливаемая оценкой (1.7.28). Средняя величина $\overline{u^2}$ зависит только от температуры T и изменяется по T линейно. При данной температуре и, следовательно, при данном типе столкновений количество молекул в каждый момент времени в цилиндре единичной длины, который условно проходит молекула при ее свободном движении, пропорционально ρ, так что произведение $l\rho$ постоянно; по мере же увеличения температуры T (и средней скорости молекул) можно ожидать небольшого уменьшения эффективного числа столкновечий молекулы на единице длины пробега, поскольку более отда-

[1]) В более точном варианте теории используется термин *поперечное сечение столкновения*, которое представляет собой эффективную площадь молекулы, относящуюся к «ударяющей» молекуле и зависящую от межмолекулярных сил и скорости молекулы, а также от геометрических параметров столкновения.

ленные встречи молекул друг с другом уже нельзя будет считать столкновениями. Следовательно, должно быть

$$l(\overline{u^2})^{1/2} \sim \frac{T^{(1/2)+a}}{\rho}, \qquad (1.7.30)$$

где величина a учитывает влияние температуры на процессы столкновения и, как показали наблюдения, для воздуха в диапазоне температур 200—400° K она приблизительно равна 0,25.

Измеренные значения коэффициентов диффузии и других параметров для воздуха при различных значениях температуры T и плотности ρ приведены в приложении 1 в конце книги.

Другие проявления отклонений совершенного газа от равновесного состояния

Если на границе массы совершенного газа поддерживаются однородные стационарные условия, то газ приходит в состояние равновесия с окружающей его средой посредством столкновений молекул друг с другом и с границей. Процесс столкновений представляет собой единственное средство, при помощи которого молекулы совершенного газа могут испытывать влияние условий на границе. Тот факт, что среднее время τ между столкновениями для данной молекулы не равно нулю, хотя оно чрезвычайно мало (обычно около 10^{-10} сек для воздуха), означает, что состояние равновесия достигается не мгновенно и что если условия на границе непрерывно меняются, то в газе постоянно существует малое отклонение от равновесия. (Ранее уже было описано, каким образом условие своего рода постоянства некоторых молекулярных параметров при движении молекул между столкновениями и продолжающееся влияние состояний молекул в предыдущие моменты времени приводят к явлениям переноса.) Здесь мы кратко рассмотрим некоторые возможные следствия отклонений от равновесия на примере совершенного газа, который сжимается поршнем в цилиндре. Подобно простому движению сдвига, рассмотренному в § 1.6, этот специальный вид движения газа имеет важное значение в общем анализе движений жидкости, о чем будет сказано позже; цель настоящего рассмотрения состоит в выяснении физической природы поведения газа при сжатии.

Предположим, что масса газа в цилиндре равномерно и адиабатически сжимается поршнем. Внутренняя энергия газа увеличивается за счет работы, совершаемой внешними силами на границе, и влияние столкновений приводит к распределению мгновенной полной внутренней энергии по всем возможным формам движения молекул в соответствии с равновесным распределением Больцмана (1.7.4). Очевидно, что в одних формах движения столкновения

вызывают более быстрые изменения энергии, чем в других. Первый и непосредственный результат перемещения поршня сводится к увеличению энергии поступательного движения молекул в направлении движения поршня. Посредством столкновений часть этого приращения энергии распределяется на две другие поступательные формы движения, а также на вращательные и колебательные. Подробные расчеты для конкретных законов взаимодействия при столкновении молекул показывают, что равномерное распределение энергии между тремя поступательными формами движения достигается очень скоро после остановки поршня, фактически за время нескольких столкновений, как и можно было ожидать.

Следовательно, поступательные формы движения молекул имеют *время релаксации* для достижения равновесия обычно порядка 10^{-10} или 10^{-9} сек и на практике редко встречаются условия столь быстрых изменений, чтобы значения $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ заметно различались [1]).

Если длина столба газа в цилиндре уменьшается с постоянной (отрицательной) скоростью расширения e, то возникающие при этом различия между величинами $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ должны быть порядка соответствующих величин, возникающих вследствие движения поршня при условии, что равновесное распределение не восстанавливается путем столкновений за время релаксации, которое для поступательных форм движения составляет величину порядка τ. За это время длина столба газа изменяется на малую величину τe, и работа, совершаемая поршнем против сил давления порядка $\rho\overline{u^2}$ при движении газа, дает энергию на единицу объема газа порядка

$$\rho\overline{u^2}\tau e, \tag{1.7.31}$$

которая затем при отсутствии столкновений полностью переходит в поступательную форму по направлению движения поршня (по направлению отсчета u). Этим определяются разности между $\rho\overline{u^2}$ и $\rho\overline{v^2}$ или $\rho\overline{w^2}$, представляющие собой нормальные напряжения в трех ортогональных направлениях. Эти малые разности, которые имеют такой знак, что они увеличивают сопротивление продолжающемуся движению поршня, оказываемое равновесной силой давления на каждой стадии процесса, и которые пропорциональны градиенту скорости в газе (e), представляют собой добавки к нормальным компонентам напряжения, возникающего в результате внутреннего трения. Эти добавки связаны, хотя и не очевидно, с касательной компонентой напряжения, которая возникает под

[1]) Однако вследствие соображений, подобных изложенным в примечании на стр. 76, было бы неправильно делать вывод, что эти различия вообще не имеют значения.

влиянием внутреннего трения в газе, совершающем простое движение сдвига.

Как будет показано ниже, отклонение тензора напряжений от изотропной формы (соответствующей состоянию покоя) для любой жидкости при деформации общего вида с учетом используемой в § 1.6 гипотезы можно записать в виде линейной функции локальных градиентов скорости, которая содержит один скалярный параметр, а именно коэффициент вязкости μ. Следовательно, оценка (1.7.31) разности между двумя нормальными компонентами напряжения эквивалентна оценке сил вязкости, имеющих порядок $\rho\overline{u^2}\tau$ в соответствии с оценкой по молекулярной теории переноса.

Перераспределение энергии вращательных и колебательных форм также происходит с некоторым опозданием после передачи энергии поршнем, хотя и с несколько другими последствиями. Вращательные формы движения многоатомных молекул не столь быстро возникают при столкновениях между молекулами, как поступательные формы, и, когда поршень остановлен, потребуется значительно больше столкновений для достижения равномерного распределения энергии между поступательными и вращательными формами. На колебательные формы движения соударения молекул должны оказывать, по-видимому, еще меньшее влияние, и экспериментальные данные показывают, что для достижения ими равновесного состояния требуется значительно больший промежуток времени; с другой стороны, как уже отмечалось ранее, средняя энергия колебательной формы молекул воздуха в состоянии равновесия при обычных температурах намного меньше классического значения при равномерном распределении энергии по степеням свободы из-за высокого энергетического уровня основной из этих форм. Таким образом, при температурах, при которых вращательные (а не колебательные) формы делают значительный вклад в величину внутренней энергии, когда при движении поршня энергия поступательных форм движения молекул составляет бóльшую часть полной внутренней энергии, чем при состоянии равновесия, приращение энергии (на единицу объема) на любой стадии является также величиной порядка $\rho\overline{u^2}\tau e$ (1.7.31). В этих неравновесных состояниях наше определение температуры не имеет точного смысла, однако определение внутренней энергии остается в силе (согласно (1.5.2)) и можно определить количество энергии, связанной с какой-либо формой движения молекул, в виде части внутренней энергии. В то время как для совершенного газа при постоянных удельных теплоемкостях в состоянии равновесия справедливы соотношения

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{u^2} = NkT = (\gamma - 1)\rho E,$$

возмущенное состояние можно описать соотношением

$$\frac{\frac{1}{3}\overline{\mathbf{u}^2}-(\gamma-1)E}{\frac{1}{3}\overline{\mathbf{u}^2}}\sim\tau e \qquad (1.7.32)$$

с коэффициентом пропорциональности порядка единицы. Отметим, что снова отклонение нормального напряжения, против которого совершает работу поршень, от его равновесного значения на любой стадии процесса имеет такой знак, чтобы оказать сопротивление деформации газа.

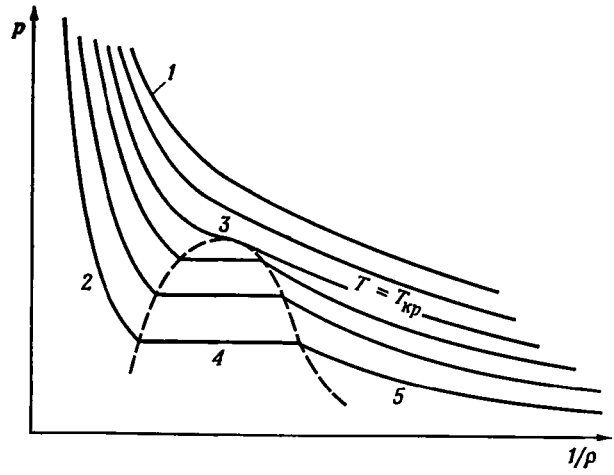
Эффекты подобного рода, связанные с релаксацией вращательных и колебательных форм движения молекул, важны в тех случаях, в которых масса газа подвергается быстрым изменениям давления, например когда через нее проходит звуковая волна высокой частоты или ударная волна.

1.8. Отличительные свойства жидкостей

О строении жидкостей известно значительно меньше, чем о строении газов. Для вывода приближенных результатов применительно к жидкостям не имеется никакой простой модели, подобной модели совершенного газа с динамически независимыми молекулами. Вследствие этого невозможно логически установить многие из наблюдаемых свойств жидкости или объяснить их через свойства отдельных молекул. Еще одна помеха заключается в том, что вода, которая представляет собой частную жидкость исключительно большого практического значения, обладает многими аномальными свойствами. В этом параграфе многие известные динамические свойства обычных жидкостей будут описаны без особых пояснений. В частности, численные значения некоторых физических параметров для чистой воды приведены в конце книги в приложении 1.

Основное свойство жидких и твердых фаз состоит в том, что они являются *конденсированными* фазами, в которых каждая молекула все время находится под действием интенсивных сил сцепления соседних с ней молекул. Однако жидкости обладают общим с газами свойством текучести и способностью к свободному изменению формы. В однородной покоящейся жидкости точно так же, как и в газе, касательные компоненты напряжения равны нулю, работа, совершаемая над единицей массы жидкости при медленном изменении ее плотности на малую величину $\delta\rho$, равна $(p/\rho^2)\,\delta\rho$ и уравнение состояния связывает три переменные ρ, p и T.

Данное вещество может существовать в жидкой фазе при некоторых значениях двух параметров состояния (например, p и T)



Р и с. 1.8.1. Изотермы типичных паро-жидкостных систем.
1 — изотермы; *2* — жидкая фаза; *3* — критическая точка; *4* — область двухфазного состояния; *5* — паровая фаза.

и в газообразной фазе при других значениях этих параметров. Причина существования двух различных фаз жидкости с существенно разными значениями плотности связана, конечно, с изменением межмолекулярной силы при изменении расстояния между молекулами. Если масса газа изотермически сжимается, то средняя энергия поступательного движения молекулы остается постоянной, а среднее расстояние между соседними молекулами уменьшается. Когда удельный объем газа настолько мал, что среднее расстояние между молекулами равно всего нескольким их диаметрам, силы притяжения между молекулами становятся значительными и давление, развиваемое газом, становится меньше потока нормальной компоненты количества движения, определяемой равенством (1.7.1). Если температура меньше критической $T_{кр}$, то дальнейшее уменьшение удельного объема приводит к неустойчивому состоянию, в котором молекулы не могут избежать влияния сил притяжения соседних молекул, и появляются центры конденсации молекул. Образование нескольких таких центров плотно упакованных молекул уменьшает числовую плотность молекул, все еще движущихся свободно и независимо друг от друга, так что при данной общей плотности устанавливается новое равновесие, в котором определенная (средняя) часть массы находится в конденсированной (жидкой) фазе, а остальная — в дисперсной или паровой фазе. Такое многофазное равновесие весьма чувствительно к изменениям давления; небольшое увеличение давления приводит к полностью конденсированной однородной жидкой

фазе с большой плотностью, а малое уменьшение давления приводит к однородной паровой фазе со значительно меньшей плотностью.

Изотермы на диаграмме состояний для типичной системы жидкость — пар изображены на рис. 1.8.1. Приблизительно постоянное давление на изотерме, проходящей через многофазную область, называется давлением насыщенного пара p_v, т. е. давлением, существующим в чистом паре, который граничит с жидкостью при данной температуре. При температурах выше критической $T_{кр}$ энергия поступательного движения молекул оказывается достаточно большой, чтобы помешать образованию центров конденсации молекул, и существует непрерывный переход вдоль изотермы от вещества со свойствами, близкими к газу при малых плотностях, к веществу со свойствами, похожими на свойства жидкостей при больших плотностях. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса (1.7.26) качественно воспроизводит основные свойства наблюдаемых изотерм, но, как уже отмечалось, оно не выполняется, если вещество находится в конденсированной фазе или близко к состоянию конденсации.

Для воды $T_{кр} = 374$ °С, а давление и плотность в точке, где критическая изотерма касается области многофазного состояния вещества (в критической точке), равны соответственно 218 атм и около 0,4 г/см^3. Изотерма, соответствующая нормальной температуре 15 °С, идет почти горизонтально через многофазную область при давлении $1{,}7 \cdot 10^4$ дин/см^2, или 0,017 атм, и пересекает границы многофазной области при плотностях 1 г/см^3 (однородная жидкость) и $1{,}28 \cdot 10^{-5}$ г/см^3 (однородный пар); следовательно, жидкая и газообразная фазы воды при нормальной температуре совершенно различны.

Эффект уменьшения давления ниже давления насыщенного пара имеет особое значение в механике жидкости, поскольку изменения давлений в потоке воды (которые более вероятно считать адиабатическими, а не изотермическими) могут легко превысить одну атмосферу. Когда давление в жидкости уменьшается до значения, незначительно отличающегося от давления насыщенного пара при температуре жидкости, она оказывается в неустойчивом состоянии и, как правило, в жидкости появляются полости, заполненные паром [1]).

Процесс появления таких полостей, называемый *кавитацией*, приводит к важным механическим следствиям в потоке жидкости, которые будут рассмотрены в § 6.12 и 6.13.

---

[1]) Было обнаружено, что однородность жидкости может поддерживаться, если принять специальные меры к удалению из жидкости в начальном ее состоянии мелких пузырьков нерастворенного газа (возможно, содержащегося в трещинах малых частиц пыли в жидкости); в воде при 15° С таким способом можно создать *отрицательное* давление величиной в несколько атмосфер, хотя она при этом находится в крайне неустойчивом напряженном состоянии.

Свойства жидкости в состоянии равновесия

Давление, действующее на элемент поверхности в жидкости, можно рассматривать как сумму потока нормальной компоненты количества движения на единицу площади и результирующей силы взаимодействия между молекулами с обеих сторон этого элемента [1]). Установлено таким же подсчетом, как и для газа, что нормальная компонента потока количества движения на единицу площади равна (1/3) $\rho\overline{u^2}$. Кроме того, классическое распределение Больцмана (1.7.4) с некоторыми обобщениями рассуждений, используемых в § 1.7, можно применить к молекулам жидкости или к системе жидкость — пар в тепловом равновесии и показать, что средняя поступательная энергия молекулы равна (3/2) kT, где, как и раньше, k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Следовательно, добавок к давлению в жидкости, вносимый потоком количества движения, равен NkT, и он больше, чем в газе при той же температуре и том же полном давлении, пропорционально отношению числовых плотностей их молекул. Это отношение обычно велико; например, в воде при 15 °С этот добавок составляет 1,312 атм. Указанная большая величина при нормальных условиях, очевидно, почти компенсируется большим напряжением под действием межмолекулярных сил. Имеющиеся данные о межмолекулярных силах показывают, что в воде при 15 °С и полном давлении в одну атмосферу результирующие силы сцепления, действующие между молекулами, расположенными на некотором среднем расстоянии друг от друга, создают напряжение порядка 10 000 атм и, по-видимому, существуют также значительные напряжения противоположного знака за счет сил отталкивания, действующих между теми молекулами, которые случайно подходят очень близко друг к другу.

Такое представление о давлении в жидкости как суммы большого положительного слагаемого, обусловленного потоком количества движения, и почти одинакового (при стандартном полном давлении) отрицательного слагаемого, которое в свою очередь есть разность двух еще больших величин, а именно сил сцепления и сил отталкивания, дает некоторую возможность приближенного объяснения молекулярных эффектов, определяющих наблюдаемые свойства жидкостей. В частности, этим можно объяснить крайнюю чувствительность давления в жидкости к расстоянию между молекулами. Весьма малые изменения плотности соответствуют при постоянных температуре или энтропии огромным изменениям давления, иначе говоря, коэффициент сжимаемости жидкостей

[1]) Это и другие утверждения в данном параграфе носят в основном качественный характер; рассмотрение в рамках волновой механики, которое уместно, когда движения соседних молекул сильно связаны, показывает, что провести строгое разделение указанных слагаемых давления невозможно.

чрезвычайно мал и как изотермы, так и адиабаты, проходящие через любую точку диаграммы состояния (рис. 1.5.1), близки к вертикалям. Например, если давление возрастает от одной до 100 атм при постоянной (нормальной) температуре, то плотность воды увеличивается только на 0,5%. Такое сильное сопротивление сжатию с точки зрения динамики жидкости является ее важной характеристикой и дает возможность с большой степенью точности для большинства приложений считать жидкости несжимаемыми.

Давления в глубинах океанов могут достигать нескольких сот атмосфер, и в этих и других условиях может появиться необходимость учитывать малое изменение плотности с изменением давления. Уравнение, описывающее наблюдаемое изэнтропическое соотношение между давлением p и плотностью ρ для воды в широком диапазоне давлений (Коул (1948)), имеет вид

$$\frac{p+B}{1+B}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n, \qquad (1.8.1)$$

где p и постоянная B измеряются в атмосферах, а ρ_0 — плотность при атмосферном давлении. Если величины n (безразмерная) и B (в атмосферах) выбрать равными 7 и 3000 соответственно, то соотношение (1.8.1) согласуется с данными для воды с точностью нескольких процентов при давлениях, не превышающих 10^5 атм. Величина n, по-видимому, не зависит от энтропии, а B и ρ_0 — медленно изменяющиеся функции энтропии S.

Если при постоянном давлении температура жидкости увеличивается, то она (обычно) расширяется. Если бы давление определялось только потоком количества движения, то падение плотности было бы таким, чтобы произведение ρT сохранялось постоянным, как и в случае газа. Однако вклад в давление от межмолекулярных сил более важен, а его зависимость от температуры трудно предсказать. Пример воды при температурах около 4 °C показывает также, что положительное расширение с увеличением температуры, в отличие от газов, не обязательно. Измерения указывают на вообще значительно меньшие значения коэффициента теплового расширения жидкостей β (определяемого, как и для газа, формулой (1.5.16)) по сравнению с его величиной T^{-1} для идеального газа. Для воды при 15 °C $\beta = 1{,}5\cdot10^{-4}$ 1/град. Значения β для других обычных жидкостей несколько больше и достигают значений приблизительно до $16\cdot10^{-4}$ 1/град.

Непосредственно можно измерить только одну из двух основных удельных теплоемкостей жидкости, а именно c_p, поскольку в жидкости, подогреваемой при постоянной плотности, развиваются огромные давления. Наблюдения показывают, что для большинства жидкостей при нормальных температурах теплоемкость c_p слабо изменяется с температурой или давлением и представляет

собой величину такого же порядка, как и для газов. Если теплоемкость c_p измерена, то теплоемкость c_v можно рассчитать с помощью термодинамического соотношения (1.5.19)

$$c_p - c_v = \frac{T\beta^2}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T\right]^{-1}. \qquad (1.8.2)$$

Для нескольких обычных жидкостей разность $(c_p - c_v)$ имеет порядок $0{,}1c_p$. Вода в этом отношении не типична, и для нее при нормальной температуре значения β малы, а следовательно, также мала и разность $(c_p - c_v)$; например, для воды при 15 °C $c_p - c_v = 0{,}003\, c_p$. Значение $\gamma = c_p/c_v$ для воды можно принять равным единице при температурах и давлениях, близких к нормальным.

Если в обратимом процессе единице массы жидкости сообщить малое количество тепла при постоянном давлении, то часть этой энергии, затрачиваемая при расширении жидкости против сил внешнего давления, равна

$$-\frac{p}{\rho^2}\frac{\delta\rho}{c_p \delta T} = \frac{p\beta}{\rho c_p};$$

это выражение для газов имеет порядок единицы, но оно значительно меньше единицы для жидкостей главным образом из-за больших значений плотности ρ. Поэтому тепло, сообщаемое жидкостям в обратимом процессе, почти полностью идет на приращение внутренней энергии независимо от связанного с этим процессом изменения давления p и плотности ρ и можно написать

$$\delta Q = T\delta S \approx \delta E. \qquad (1.8.3)$$

Кроме того, можно показать, что малые изменения функций состояния S и E при малых обратимых изменениях, связанных с подводом тепла, зависят главным образом от изменения температуры T. Действительно, если взять в качестве двух независимых параметров состояния температуру T и давление p, то отношение вкладов, вносимых в величину $T\delta S$ вследствие изменений температуры T и давления p, согласно равенству (1.5.21), представляет собой величину того же порядка, что и отношение изменений плотности ρ, которые можно получить по отдельным приращениям температуры T и давления p; это отношение весьма велико для жидкости, за исключением изменения, происходящего в направлении, почти параллельном изотерме на диаграмме состояния. Таким образом, при изменениях состояний, не близких к изотермическим, соотношение (1.5.20) приближенно записывается в виде

$$T\delta S \approx \delta E \approx c_p \delta T. \qquad (1.8.4)$$

Коэффициенты переноса

Явления переноса массы, тепла и количества движения в жидкости, параметры которой распределены неоднородно, хорошо изучены экспериментально, хотя их теоретическое исследование оказывается гораздо более сложным, чем анализ равновесных свойств жидкости.

В то время как в газе перенос всех величин, связанных с движением молекул, происходит в основном вследствие их беспорядочных перемещений, в жидкости важную роль играет обмен энергии и количества движения между молекулами вследствие действия межмолекулярных сил. Беспорядочное движение молекулы в жидкости можно приближенно рассматривать как комбинацию ее быстрого поступательного колебания с амплитудой того же порядка, что и ее диаметр, и более медленного перемещения вместе с другими молекулами, находящимися (временно) близко друг к другу под действием больших сил сцепления. Поэтому перенос отмеченных молекул, который происходит исключительно вследствие их совместного перемещения, протекает по сравнению с газом слабее. Коэффициент самодиффузии, определенный в § 1.6 как поток отмеченных молекул на единицу градиента числовой плотности отмеченных молекул, можно непосредственно измерить, и для нескольких различных типов отмеченных молекул, относящихся к растворам, таким, например, как раствор NaCl в воде, найдено, что он имеет при температуре 15 °С порядок 10^{-5} см^2/сек (по сравнению с величиной 0,2 для коэффициента самодиффузии азота). Установлено, что коэффициент диффузии растворов заметно изменяется с изменением их концентрации для растворов, подобных $KMnO_4$ в воде, когда молекулы растворенного вещества значительно больше, чем молекулы воды; обычно коэффициент диффузии убывает с уменьшающейся скоростью по мере возрастания концентрации от нулевой.

Перенос тепла в жидкости осуществляется иначе, в основном непосредственным обменом энергии поступательного движения между молекулами, расположенными в пределах действия полей сил соседних молекул, и, следовательно, он происходит не так слабо, как процесс диффузии отмеченных молекул в жидкостях. Коэффициент термодиффузии для воды равен $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ см^2/сек при 15 °С, что намного меньше, чем для воздуха (в 145 раз), как можно было бы ожидать, исходя из приближенной оценки эффективности в расчете на одну молекулу двух различных механизмов переноса; однако коэффициент теплопроводности k_H, определяемой диффузией, зависит и от числовой плотности молекул, вследствие чего поток тепла на единицу градиента температуры больше в воде, чем в воздухе. Для большинства других жидкостей коэффициент термодиффузии при нормальной температуре также имеет порядок

10^{-3} см^2/сек, за исключением жидких металлов, для которых коэффициент $\varkappa_H$ значительно больше (0,042 см^2/сек для ртути при 15 °С) вследствие существования добавочного и важного вклада в перенос тепла свободных электронов, которые не удерживаются межмолекулярными силами и движутся в жидкости, как молекулы в газе.

Коэффициент термодиффузии в жидкостях, как и следовало ожидать, практически не зависит от давления, но, по-видимому, несколько изменяется с температурой. Имеющиеся в настоящее время данные указывают для большинства жидкостей на медленное уменьшение коэффициента термодиффузии с увеличением температуры, хотя для воды происходит слабое изменение в обратном направлении.

Механизм переноса количества движения в жидкостях очень сложен, и о нем мало что известно. Очевидно, что перенос количества движения происходит в основном не за счет перемещения молекул через элемент поверхности внутри жидкости, так как тогда коэффициент диффузии количества движения (или кинематический коэффициент вязкости ν) был бы величиной того же порядка, что и коэффициент самодиффузии, в то время как в действительности измеренные величины ν оказываются больше примерно в 10^3 раз.

Представляется вероятным, что связанные группы молекул в жидкости оказывают сопротивление деформации некоторым способом, непосредственно связанным с действием межмолекулярных сил, и что основное явление, например, при простом сдвиге жидкости состоит в отрыве друг от друга некоторых существующих групп молекул и преодолении их сопротивления. Связанные группы молекул в жидкости постоянно перестраиваются с последующим высвобождением энергии молекулярного движения, и таким образом часть энергии упорядоченного основного движения большого количества жидкости расходуется (диссипируется), переходя в беспорядочное движение молекул, т. е. в тепло.

Не так просто понять, почему касательная компонента напряжения должна быть пропорциональна градиенту скорости жидкости в простом движении сдвига, однако мы облегчим свою задачу, воспользовавшись формальным рассуждением из § 1.6 и многочисленными экспериментальными данными, подтверждающими упомянутую линейную зависимость почти для всех однородных жидкостей, не имеющих весьма длинных молекул в виде цепочек.

Однако формальное рассуждение говорит лишь о том, что линейную зависимость между касательной компонентой напряжения и градиентом скорости следует ожидать при достаточно малых величинах градиента скорости, и объяснение наблюдаемой линейной зависимости фактически для всех встречающихся на практике

величин градиента скорости в жидкостях с не очень сложной структурой молекул нужно искать в механизме переноса количества движения. Единственное, что можно сказать с полной уверенностью, состоит в том, что характерное время образования связанных групп молекул в жидкости и других изменений в группах несомненно весьма мало и что гипотеза о линейной зависимости между касательным напряжением и градиентом скорости не выполняется, вероятно, только в том случае, когда обратная величина градиента скорости мала по сравнению с этим временем.

Кинематический коэффициент вязкости ν (т. е. коэффициент диффузии количества движения) для различных жидкостей изменяется в весьма широких пределах; например, при нормальной температуре он равен 0,0012 см^2/сек для ртути и 1,0 см^2/сек для оливкового масла. Такую разницу в величинах ν нельзя объяснить каким-либо простым способом через молекулярную структуру жидкостей. Для большинства жидкостей обнаружено заметное изменение вязкости с изменением температуры. Увеличение температуры приводит к уменьшению размеров связанных групп молекул вследствие более интенсивных возбуждений отдельных молекул, и в результате этого получается *меньшее* сопротивление жидкости деформации. Совсем не так ведет себя газ, который с ростом температуры оказывает большее сопротивление деформации вследствие более быстрого поступательного движения молекул при более высоких температурах. Приведенные в приложении 1, *в* данные показывают, что кинематическая вязкость воды уменьшается приблизительно на 50% при возрастании температуры от 10 до 40 °С; следовательно, предположение о постоянной вязкости может оказаться неприемлемым даже при умеренных изменениях температуры воды, что очень неудачно, так как математические трудности, возникающие при определении распределения скорости в движущейся жидкости, значительно возрастают, если учитывать изменение вязкости.

Как уже отмечалось в § 1.7, явления переноса оказываются не единственными следствиями отклонения от равновесного состояния, характерными для динамики жидкости. В газе возможны еще эффекты релаксации, возникающие вследствие запаздывания процесса перераспределения энергии молекул между поступательными формами движения, с одной стороны, и вращательными и колебательными формами — с другой.

Релаксационные эффекты возникают также и в жидкостях, хотя, несомненно, в связи с другим механизмом, и, как известно, эти эффекты приводят к дополнительному ослаблению звуковых волн высокой частоты. Однако имеющиеся данные неполны и ненадежны, поэтому мы будем просто учитывать, что при определенных условиях в жидкостях существуют релаксационные эффекты.

1.9. Условия на границе между двумя средами

Условия, возникающие на границе между жидкостью и некоторой другой средой, заслуживают специального рассмотрения, поскольку они играют некоторую роль в описываемых ниже динамических задачах и поскольку с ними непосредственно связано несколько важных явлений. Граница может разделять две различные фазы, твердую, жидкую или газообразную, или же две среды в одной и той же фазе, но с различным составом.

Как отмечалось в § 1.5, две массы, находящиеся в контакте и в термодинамическом равновесии друг с другом, имеют одинаковую температуру, и любое отклонение от равновесия, связанное с разностью температур двух сред, сопровождается появлением потока тепла через границу, причем поток направлен так, чтобы привести эти среды в состояние равновесия. Следовательно, температура при переходе через границу в равновесном состоянии постоянна, точно так же как она постоянна в пределах каждой отдельной среды. То же самое можно сказать и о скорости, которая также представляет собой интенсивность сохраняемой величины (а именно количества движения), которая переносится через границу в результате взаимодействия сред с обеих ее сторон. Однако состав молекул представляет собой особую категорию, поскольку существуют некоторые типы границ, через которые взаимодействие вещества с обеих сторон не приводит к установлению однородного состава. Очевидным примером служит поверхность раздела жидкости и твердого тела; молекулы твердого тела связаны в решетке, и хотя некоторые из молекул жидкости случайно попадают в поля действия сил молекул твердого тела, тем самым перенося тепло и количество движения, они снова возвращаются в жидкость и не изменяют состав сред. Поэтому разумно постулировать именно такую границу между двумя средами, находящимися в состоянии равновесия друг с другом, на которой молекулярные структуры и их состав могут скачкообразно изменяться. Граница такого типа и рассматривается в этом параграфе.

Поверхностное натяжение

Тот факт, что малые капли жидкости в воздухе и малые газовые пузырьки в воде принимают сферическую форму, а также многие другие явления могут быть объяснены на основании предположения, что на границе между двумя средами, находящимися в равновесии, сосредоточена энергия особого вида, величина которой пропорциональна площади поверхности раздела. В § 1.5 были представлены термодинамические соотношения в зависимости от величины энергии и работы на единицу массы жидкости с исполь-

зованием неявного предположения, что суммарные количества энергии и работы пропорциональны в любом случае объему жидкости. Теперь нужно сделать поправку для случаев, когда для некоторой массы жидкости отношение объема к поверхности мало, и найти добавок, зависящий от площади поверхности.

Гипотеза, которая, как установлено, согласуется со всеми известными фактами, заключается в следующем: в системе, находящейся в состоянии равновесия, поверхность раздела площади дает добавок γA к полной свободной энергии системы (§ 1.5), где коэффициент пропорциональности γ зависит от состояния системы; в этом случае полная свободная энергия системы, состоящей из двух однородных сред с плотностями ρ_1 и ρ_2 и объемами V_1 и V_2, разделенных поверхностью площади A, равна

$$\rho_1 V_1 F_1 + \rho_2 V_2 F_2 + \gamma A, \tag{1.9.1}$$

где F_1 и F_2, согласно § 1.5, представляют собой свободные энергии на единицу массы двух сред. Это выражение есть следствие определения свободной энергии, согласно которому при любом малом обратимом изотермическом изменении в системе полная работа, совершенная над системой, равна приращению полной свободной энергии. Таким образом, если при этом плотности, а также общая температура двух сред остаются неизменными, то полная работа, совершенная над системой, равна $\gamma \delta A$. Это выражение для работы, которая должна быть произведена над системой с целью изменить только площадь поверхности раздела, будет точно таким же, как если бы мы предположили, что на поверхности раздела находится в состоянии равномерного натяжения пленка, подобная равномерно натянутой мембране; фактически это своего рода эквивалентное представление принятой выше гипотезы. Кроме того, мы видим, что величину γ можно рассматривать и как свободную энергию на единицу площади поверхности раздела, и как *поверхностное натяжение*, причем последнее название означает, что на любую линию, проведенную на поверхности раздела, действует сила величиной γ на единицу длины в направлении нормали этой линии и по касательной к поверхности раздела.

Молекулярная природа поверхностного натяжения, очевидно, связана с межмолекулярными силами сцепления, описанными в § 1.1. Средняя свободная энергия молекулы не зависит от ее положения при условии, что она находится внутри вещества, однако на расстояниях от ограничивающей поверхности, меньших радиуса действия сил сцепления (порядка 10^{-7} см для простых молекул), на свободную энергию молекулы оказывает влияние близость ее к поверхности; поскольку же этот радиус действия очень мал, то все участки поверхности вносят одинаковый вклад в выражение (1.9.1), уточняющее суммарную свободную энергию

при наличии поверхности раздела. Когда только одна из двух рассматриваемых сред находится в конденсированной фазе, легко понять, что параметр γ должен быть положительным. Действительно, молекулы жидкости в основном подвержены влиянию сил притяжения соседних молекул и молекулы, которые находятся вблизи границы с газом, имеют недостаток соседей с одной стороны и на них действует неуравновешенная сила сцепления, направленная от поверхности раздела; такая тенденция всех молекул жидкости вблизи поверхности раздела к движению внутрь при заданном полном объеме жидкости равносильна стремлению поверхности раздела к *стягиванию*. Если поверхность раздела отделяет жидкость от твердого тела или от другой жидкости, знак γ с помощью такого рассуждения предсказать невозможно и действительно встречаются оба знака.

Измеренные значения поверхностного натяжения γ для различных пар жидкостей приведены в приложении 1. В случае поверхности, разделяющей воздух и чистую воду при 15 °С, $\gamma = 73{,}5$ дин/см, или эрг/см^2. Условия, при которых поверхностное натяжение такой величины оказывает заметное механическое действие, частично зависят от других сил, действующих на систему, однако некоторое представление о его значении с термодинамической точки зрения можно получить, заметив, что поверхностная энергия сферической капли чистой воды в воздухе при 15 °С равна скрытой теплоте парообразования этой капли при той же температуре, если радиус капли равен приблизительно 10^{-8} см.

Для поверхности раздела между воздухом и жидким металлом величина γ оказывается значительно большей, как это и можно ожидать ввиду большей плотности жидкого металла. Для поверхности раздела воды и масла величина γ типично положительна и меньше, чем для поверхности раздела вода — воздух. Для некоторых других пар жидкостей, как, например, спирт и вода, поверхность раздела нельзя заметить без специальных мер, так как она находится в состоянии сжатия (чему соответствует отрицательное значение γ) и стремится стать как можно большей, что приводит к быстрому и полному смешению двух жидкостей; не смешиваются только те жидкости, для которых $\gamma > 0$.

Поверхностное натяжение для данной пары сред обычно убывает с увеличением температуры. Если жидкость находится в контакте со своим паром, то, согласно эмпирическому закону, который выполняется весьма точно в широком диапазоне температур, величина γ пропорциональна разности температур $(T - T_{\text{кр}})$, где $T_{\text{кр}}$ — критическая температура.

Значение γ для поверхности раздела между жидкостью и жидкостью (или газом) в состоянии равновесия может значительно изменяться под влиянием присутствия адсорбированного

(поверхностно-активного) вещества на поверхности жидкости [1]). Согласно законам механики, применяемым ниже, капля смазочного масла, помещенного на свободную поверхность воды, расплывается в весьма тонкий слой, покрывающий всю ее поверхность. Очень малые количества масла, жира и некоторых других загрязняющих веществ, которые неизбежны в воде при нормальных условиях, также расплываются по любой свободной поверхности и, как можно ожидать исходя из молекулярной теории этого явления, оказывают заметное влияние на поверхностное натяжение. Обычно влияние адсорбируемых молекул загрязняющего вещества на свободной поверхности воды сводится к ослаблению поверхностного натяжения (в основном вследствие того, что большие молекулы загрязнителя принимают некоторую предпочтительную ориентацию в поверхностном слое и воздействуют на каждую другую молекулу силами отталкивания, которые частично компенсируют натяжение поверхности чистой воды); величина этого ослабления возрастает с увеличением концентрации адсорбируемого вещества [2]); на свободной поверхности обычной водопроводной воды поверхностное натяжение может быть близким к значению в чистой воде сразу после образования поверхности, но затем оно обычно быстро уменьшается приблизительно до половины этого значения. Загрязнение свободной поверхности ртути влияет аналогично.

Ввиду того что концентрация адсорбируемого вещества может изменяться по поверхности жидкости при некоторых (неравновесных) условиях, поверхностное натяжение не обязательно будет равномерным и на элемент поверхности могут действовать неуравновешенные силы. Это приводит к динамическим последствиям: например, модель лодки с куском камфары, прикрепленным к ней сзади, начинает двигаться в сосуде с водой [3]).

Механические свойства поверхности раздела между двумя жидкостями, на которой адсорбируется вещество и которая не находится в равновесии, еще не изучены. Иногда считают, что такая поверхность проявляет упругие свойства и испытывает напряжение, линейно изменяющееся с деформацией (такое мнение основано на том, что при увеличении размеров загрязненной поверхности на ней уменьшается концентрация адсорбируемого вещества, а поверхностное натяжение растет, во всяком случае до тех пор, пока загрязнитель не адсорбируется из соседней с ним

[1]) Более подробное описание этого важного для практики вопроса см. в книге Davies J. T., Rideal E. K., Interfacial Phenomena, Academic Press, 1961 [см. также: Оно С., Кондо С., Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях, ИЛ, М., 1963.— *Ред.*].

[2]) Использование моющих средств зависит от такого уменьшения величины γ, вследствие которого возрастает способность воды смачивать твердые поверхности, с которыми она соприкасается.

[3]) Много замечательных иллюстраций динамических эффектов неравномерного поверхностного натяжения можно увидеть в фильме «Поверхностное натяжение», снятом Л. Трефесеном при содействии Национального комитета США по фильмам в области механики жидкости.

жидкости), а также и вязкие свойства, и на ней развиваются напряжения трения, которые изменяются линейно с изменением скорости деформации. В этой книге будем предполагать, что поверхность раздела между двумя средами обладает только равновесным свойством равномерного поверхностного натяжения.

Равновесная форма границы между двумя неподвижными жидкостями

Обратимся теперь к краткому рассмотрению влияния натяжения, которое существует на границе жидкости. Нас интересует только случай, когда жидкость граничит с жидкостью (или газом), поскольку только в этом случае граница будет подвижной. Предположим, что две жидкости неподвижны и находятся в термодинамическом равновесии, так что натяжение γ равномерно на всей поверхности раздела. Задача заключается в том, чтобы определить геометрическую форму поверхности раздела, удовлетворяющую условию механического равновесия. Оказывается, что сделать это очень трудно, за исключением небольшого числа специальных случаев.

Предварительно отметим, что искривленная поверхность в состоянии растяжения испытывает напряжение по нормали к ней, как видно из опыта с растянутой резиновой лентой. Чтобы рассмотреть влияние натяжения вблизи точки O поверхности, проведем через нее касательную плоскость и возьмем ее в качестве плоскости (x, y) прямоугольной системы координат (x, y, z). Тогда имеем уравнение поверхности

$$z - \zeta(x, y) = 0,$$

где функция ζ и ее первые производные равны нулю в точке O. В точках, близких к O, единичная нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности имеет компоненты

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad 1$$

с точностью до величин первого порядка малости относительно $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$. Результирующая сил растяжения, действующих на часть поверхности, содержащую точку O, равна

$$-\gamma \oint \mathbf{n} \times d\mathbf{x},$$

где $\delta\mathbf{x}$ — линейный элемент замкнутой кривой, ограничивающей указанную часть поверхности. В случае части плоской поверхности (нормаль $\mathbf{n}$ к которой везде одинакова) эта сила равна нулю, т. е. натяжение само себя уравновешивает; в случае части искривленной поверхности малой площади δA результирующее натяжение определяется величиной меньшего порядка по сравнению

с линейным размером элемента поверхности. С точностью до величин второго порядка малости по этому линейному размеру результирующая сила параллельна оси z, т. е. параллельна нормали в точке O, и равна

$$-\gamma \oint \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\,dx\right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_0 \delta A.$$

Другими словами, натяжение, действующее поперек кривой, ограничивающей элемент поверхности, эквивалентно *давлению* на поверхность, величина которого равна

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_0 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

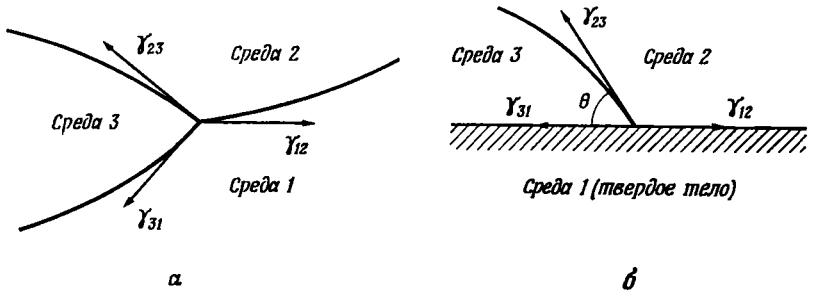
где R_1 и R_2 — радиусы кривизны кривых, получающихся при пересечении поверхности двумя ортогональными плоскостями, содержащими ось Oz. Как известно, сумма $R_1^{-1} + R_2^{-1}$ не зависит от направления этих плоскостей и обычно удобно брать в качестве R_1 и R_2 главные радиусы кривизны поверхности. Величины R_1 и R_2 нужно, конечно, брать с соответствующими знаками, учитывая, что добавок в эквивалентное давление на поверхности направлен к центру кривизны в каждом случае.

Поскольку можно считать, что поверхность раздела имеет нулевую массу, она может находиться в равновесии только в том случае, когда эффективное давление, обусловленное поверхностным натяжением, компенсируется равной ему по величине и противоположной по знаку разностью между давлениями в жидкостях по обе стороны от поверхности раздела. Следовательно, в любой точке поверхности раздела должен быть скачок давления

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1.9.2}$$

при переходе на ту сторону поверхности, с которой расположен центр кривизны.

Примером очевидной равновесной формы поверхности раздела может служить масса одной жидкости, окруженная другой жидкостью, вроде капель воды в воздухе (туман) или пузырьков газа в воде. Если объем капли или пузырька, или разность плотностей по обе стороны поверхности раздела достаточно малы, то влиянием силы тяжести можно пренебречь. Тогда давление в каждой из жидкостей будет одинаковым и скачок давления (1.9.2) по всей поверхности раздела будет постоянным. Неограниченная поверхность с постоянной суммой главных кривизн представляет собой сферу, и она должна быть равновесной формой искомой поверхности. Этот вывод следует также из того факта, что в состоянии (устойчивого) равновесия энергия поверхности должна быть минимальной для данного объема капли или пузырька, а сфера



Р и с. 1.9.1. Равновесие на линии контакта трех различных сред.

представляет собой как раз такую замкнутую поверхность, которая имеет наименьшую площадь при данном объеме.

Предположим теперь, что поверхность раздела отделяет газ, в котором давление можно считать постоянным, от жидкости постоянной плотности ρ, в которой изменение давления по высоте z вследствие влияния силы тяжести определяется по формуле (1.4.12) для несжимаемой жидкости. В таком случае условие равновесия в любой точке поверхности раздела есть

$$\rho g z - \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{const}, \qquad (1.9.3)$$

причем R_1 и R_2 выбраны здесь положительными, когда соответствующие центры кривизны расположены с той стороны поверхности раздела, где находится газ. Из уравнения (1.9.3) нелегко определить форму поверхности, однако его ценность состоит в том, что из него сразу виден единственный характерный параметр $(\gamma/\rho g)^{1/2}$ с размерностью длины. Для чистой воды этот параметр при нормальных температурах приблизительно равен 0,27 см и дает масштаб, в котором влияние поверхностного натяжения на форму поверхности раздела воздух — вода может быть сравнимым с влиянием силы тяжести.

Поверхности раздела жидкости и газа, к которым применимо условие (1.9.3), представляют собой обязательно незамкнутые поверхности, и на практике они обычно ограничены линией, вдоль которой соприкасаются три среды — как, например, в случае капли ртути, покоящейся на столе. Известные свойства такой линии тройного контакта используются в качестве граничных условий при интегрировании уравнения (1.9.3) для определения формы поверхности. На линию контакта оказывают воздействия натяжения трех разных поверхностей, и, поскольку она не обладает массой, результирующий вектор этих трех сил натяжения должен давать нулевую составляющую в любом направлении, в котором линия контакта может двигаться (рис. 1.9.1, *а*); если направление нормали к одной из трех поверхностей, встречающихся

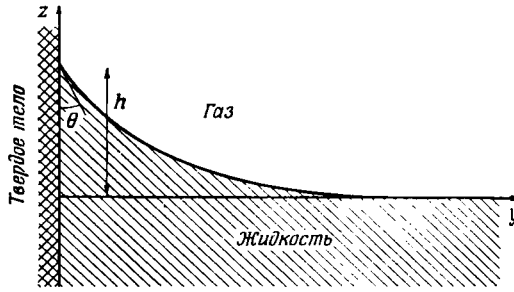


Рис. 1.9.2. Свободная поверхность жидкости на границе с вертикальной плоской стенкой.

на линии контакта, задано, то можно определить два других направления. В случаях, когда

$$|\gamma_{12}| > |\gamma_{23}| + |\gamma_{31}|,$$

ясно, что условия равновесия линии контакта не могут выполняться. Эти условия выполняются для линзовидных капелек жира на поверхности супа, однако в случае капли нефти на свободной поверхности воды натяжение поверхности раздела воды и воздуха оказывается слишком сильным по сравнению с натяжением двух границ капли нефти, и она неограниченно растекается до тех пор, пока нефть не покроет всю поверхность воды или пока толщина ее слоя не достигнет размеров молекул. Подобным же образом бензин или вода, содержащая смачивающие добавки, не могут образовывать изолированные капли на некоторых твердых поверхностях и растекаются по ним в виде очень тонкого слоя.

Когда одна из трех сред твердая (например, среда с номером *1* на рис. 1.9.1,*б*), поверхность этой среды локально обычно бывает плоскостью и линия контакта может свободно двигаться только в направлении, параллельном твердой поверхности [1]). В таком случае единственным условием равновесия является

$$\gamma_{12} = \gamma_{31} + \gamma_{23}\cos\theta,$$

из которого находится угол контакта θ. Если среда *2* — воздух, а среда *3* — жидкость, то жидкость называют *смачивающей* твердое тело, если $\theta < \pi/2$ (как в случае чистой воды, смачивающей большинство твердых тел, таких, как стекло, в отличие от ртути, для которой $\theta \approx 150°$ на многих твердых телах), хотя нет никакого особого значения величины $\theta = \pi/2$, и более разумно рассмат-

[1]) Понятие силы натяжения, действующей на поверхности твердого тела, сопряжено с некоторыми трудностями, однако можно дать эквивалентное и строгое его определение на основе понятия поверхностной энергии; см. цитированную выше книгу Davies J. T., Rideal E. K., Interfacial Phenomena.

ривать степень смачиваемости, считая ее увеличивающейся по мере уменьшения до нуля угла контакта θ.

Полную задачу определения формы поверхности раздела можно теперь продемонстрировать на примере свободной жидкости, соприкасающейся с твердой вертикальной плоской стенкой (рис. 1.9.2). В случае двумерной области уравнение поверхности раздела имеет вид $z = \zeta(y)$ и главные кривизны поверхности раздела равны

$$\frac{1}{R_1} = 0, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}},$$

где штрихи означают дифференцирование по y. Следовательно, уравнение (1.9.3) приводится к виду

$$\frac{\rho g}{\gamma}\zeta - \frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} = 0$$

причем постоянная в правой части принята равной нулю, так как поверхность раздела становится плоской при достаточном удалении от стенки, где $\zeta = 0$. Выполняя одно интегрирование, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\rho g}{\gamma}\zeta^2 + \frac{1}{(1+\zeta'^2)^{1/2}} = C;$$

то же граничное условие показывает, что $C = 1$. Из этого следует, что высота, на которую жидкость поднимается на твердой стенке, определяется формулой

$$h^2 = 2\frac{\gamma}{\rho g}(1 - \sin\theta), \tag{1.9.4}$$

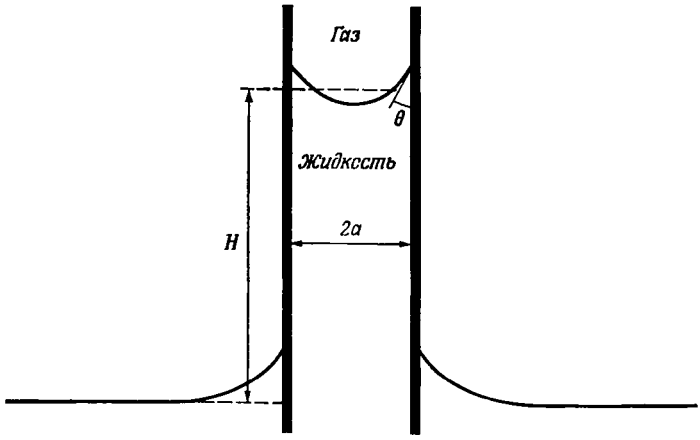
при этом угол контакта θ для жидкости известен для данных сред. Граничное условие $y = 0$, $\zeta = h$ можно в дальнейшем использовать для определения постоянной при повторном интегрировании, в результате которого находим

$$\frac{y}{d} = \operatorname{arch}\frac{2d}{\zeta} - \operatorname{arch}\frac{2d}{h} + \left(4 - \frac{h^2}{d^2}\right)^{1/2} - \left(4 - \frac{\zeta^2}{d^2}\right)^{1/2}, \tag{1.9.5}$$

где

$$d^2 = \gamma/\rho g.$$

Тот факт, что свободная поверхность жидкости поднимается или опускается при соприкосновении с твердой стенкой (на величину, зависящую от угла наклона стенки к вертикали и от угла контакта жидкости с ней), представляет собой основу явления, известного вообще как *капиллярность*, которая проявляется в малых трубках и узких щелях. Рассмотрим, например, круглую трубку малого радиуса a, содержащую жидкость со свободной поверхностью (рис. 1.9.3). Поверхность жидкости подходит к стенке под углом контакта θ и очевидно, что, когда $a \ll d$, радиус



Р и с. 1.9.3. Капиллярный подъем жидкости в тонкой трубке.

кривизны осевого сечения свободной поверхности приближенно постоянен и равен $a/\cos\theta$ (отклонение поверхности от сферической формы будет проявляться только за счет относительно малого изменения давления жидкости на поверхности вследствие влияния силы тяжести). Натяжение на этой сильно искривленной поверхности создает большой скачок давления при переходе через поверхность раздела, и если трубка открыта и погружена вертикально в жидкость со свободной поверхностью большего размера, то в трубке, несмотря на действие силы тяжести, поднимется значительный столб жидкости. Условие равновесия такого столба высотой H определяется приближенно равенством

$$\rho g H = \Delta p = \frac{2\gamma \cos\theta}{a},$$

т. е.

$$H = \frac{2a^2 \cos\theta}{a}. \qquad (1.9.6)$$

Следовательно, величина H может быть очень большой в случае очень тонких каналов в пористых материалах, таких, как промокательная бумага, кирпич или почва, которые, как известно, оказывают сильное всасывающее действие при смачивании их жидкостью, подобной воде. В случае жидкости, которая не смачивает стенку трубки, угол контакта $\theta > \pi/2$ и получается $H < 0$, что соответствует опусканию уровня свободной поверхности в трубке. Отметим, что, когда трубка расположена не вертикально, равенство (1.9.6) определяет величину смещения свободной поверхности в вертикальном направлении.

Соотношения перехода на жидкой границе

Приведем здесь для дальнейшего использования некоторые соотношения между условиями по обе стороны жидкой поверхности раздела между двумя средами. Многие из этих соотношений сводятся к утверждению, что некоторая локальная величина непрерывна при переходе через поверхность раздела либо вследствие равновесия среды (точного или приближенного), либо вследствие условия сохранения.

Прежде всего имеется в виду чисто кинематическое условие, связанное с тем фактом, что если не возникает разрыв на поверхности раздела, то граница остается жидкой поверхностью для обеих сред. Компонента скорости, направленная локально по нормали к границе, должна быть непрерывной при переходе через границу.

Для двух сред, через поверхность контакта которых возможен перенос тепла и количества движения посредством взаимодействия молекул на границе (оно происходит фактически на всех реальных границах), как температура, так и скорость должны быть непрерывны, когда обе среды находятся в равновесии.

Однако при относительном движении жидкости она не может находиться в точном термодинамическом и механическом равновесии, и нужно узнать, может ли отклонение от равновесия сопровождаться разрывом в температуре или скорости на границе между двумя средами. Как уже говорилось в § 1.6, градиент величины, подобной температуре или скорости, дает некоторую меру локального отклонения от равновесия и при наличии разрыва такой величины должно происходить сильное отклонение от равновесия. Влияние переноса тепла или количества движения, связанное с отклонением от равновесия, способствует выравниванию температуры или скорости, причем этот процесс тем интенсивнее, чем больше величина отклонения. Поэтому можно ожидать, что параметры, к которым применимы соотношения переноса, непрерывны всюду в жидкости в большинстве реальных неравновесных состояний. Молекулярное движение и взаимодействие, вероятно, также эффективны при выравнивании температур или скоростей на поверхности раздела двух различных сред, как и при выравнивании температур или скоростей в двух соседних точках жидкости, и поэтому всюду в жидкости должно установиться приближенное равновесие. Все имеющиеся данные показывают, что при обычных условиях движения жидкостей температура и скорость (как касательная, так и нормальная компоненты) непрерывны при переходе через материальную границу между жидкостью и другой средой.

В частном случае поверхности раздела жидкости и газа также существует возможность переноса массы через границу посред-

Р и с. 1.9.4. К выводу соотношения между напряжениями на двух сторонах границы двух жидкостей.

ством испарения жидкости, в результате которого должно возникнуть приближенное равновесное состояние, характеризуемое не непрерывностью состава среды на поверхности раздела, а скачком от устойчивой жидкой фазы к газу, «насыщенному» паром.

Свойства сохранения, которые связаны с соотношениями переноса, также приводят к граничным условиям, которые легко сформулировать, если отклонения от равновесия малы в смысле § 1.6. Рассмотрим, например, условие сохранения тепла для малого прямого цилиндра, образующие которого параллельны направлению локальной нормали $\mathbf{n}$ к границе между двумя средами, а основания расположены по одному в каждой среде. Если длину цилиндра взять намного меньше любого его поперечного размера, то условие сохранения тепла требует равенства потоков через его основания, т. е.

$$(k_H \mathbf{n} \cdot \nabla T)_{\text{среда 1}} = (k_H \mathbf{n} \cdot \nabla T)_{\text{среда 2}} \tag{1.9.7}$$

в каждой точке границы. Значения коэффициента теплопроводности k_H могут отличаться по обе стороны границы, и равенство (1.9.7) в общем случае означает разрыв градиента температуры $\mathbf{n} \cdot \nabla T$ при переходе через нее.

Аналогичные соображения применимы к потоку количества движения через границу между двумя средами, хотя здесь необходимо учитывать эффект поверхностного натяжения. Мы еще не получили общего выражения для переноса количества движения в движущейся среде, но можем написать граничное условие через тензор напряжения σ_{ij} из § 1.3. Когда длина упомянутого выше цилиндра стремится к нулю, сумма сил, действующих на два основания цилиндра, должна уравновешиваться результирующей сил натяжения, приложенных к цилиндру со стороны поверхности раздела вне цилиндра (рис. 1.9.4). Как уже было показано, эта результирующая сил натяжения эквивалентна (если поверхностное натяжение постоянно) давлению на поверхности раздела в направлении центра кривизны, поэтому граничное условие принимает вид

$$\sigma''_{ij} n_j - \sigma'_{ij} n_j = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i, \tag{1.9.8}$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны линий пересечения поверхности раздела любыми двумя ортогональными плоскостями, содержащи-

ми нормаль n; величины R_1 и R_2 считаются положительными, когда соответствующий центр кривизны расположен по ту сторону поверхности раздела, в которую направлена нормаль n. Когда две жидкости неподвижны, тензор напряжений имеет вид $-p\delta_{ij}$ и граничное условие (1.9.8) сводится к более простому соотношению (1.9.2).

В более общих условиях, в которых поверхностное натяжение изменяется вдоль поверхности раздела двух жидкостей из-за неравномерности температуры или (чаще всего) концентрации адсорбируемого вещества на поверхности раздела, имеется касательная компонента результирующей силы, действующей на элемент поверхности раздела вследствие неоднородного поверхностного натяжения. Нетрудно показать, что в этом случае к правой части равенства (1.9.8) нужно добавить $(\nabla\gamma)_i$, где $\nabla\gamma$ — градиент величины γ на поверхности раздела. Такая касательная компонента силы на поверхности раздела двух неподвижных жидкостей не может быть уравновешена напряжениями.

Упражнения

1. Два сферических мыльных пузыря радиусами a_1 и a_2 объединяются в один. Покажите, что радиус r вновь образовавшегося пузыря определяется уравнением

$$p_0 r^3 + 4\gamma r^2 = p_0 (a_1^3 + a_2^3) + 4\gamma (a_1^2 + a_2^2),$$

где p_0 — давление среды вне пузырей, γ — натяжение на поверхности раздела воздух — жидкость.

2. Твердая сфера радиуса a покоится на плоской твердой поверхности, и точку контакта окружает небольшое количество жидкости в форме плосковогнутой линзы, диаметр которой мал по сравнению с a. Угол контакта жидкости с каждой из твердых поверхностей равен нулю, а натяжение на поверхности раздела воздух — жидкость равно γ. Покажите, что существует сила сцепления величиной $4\pi a\gamma$, действующая на сферу. (Заслуживает внимания тот факт, что эта сила сцепления не зависит от объема жидкости.)

3. Несколько небольших твердых тел плавает на поверхности жидкости. Покажите, что действие силы поверхностного натяжения должно привести к сближению двух соседних тел, если оба тела или смачиваются, или не смачиваются жидкостью, и к удалению их друг от друга, если одно из них смачивается, а другое не смачивается.

Литература к главе 1

Cottrell A. H., The Mechanical Properties of Matter, John Wiley and Sons. 1964. [См. также Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, ИЛ, М., 1961.—*Ред.*]

2

КИНЕМАТИКА ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ

2.1. Основные понятия

Гипотеза сплошной среды позволяет воспользоваться простым понятием локальной скорости жидкости, и нужно теперь обсудить вопрос о том, каким образом поле течения в целом можно представить в виде совокупности локальных скоростей жидкости. Возможны два различных представления. Первое, обычно называемое *представлением Эйлера*, аналогично определению электромагнитного поля, в котором параметры течения определяются как функции координат $\mathbf{x}$ и времени t. Основным параметром поля течения является вектор скорости жидкости, который записывается в виде $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Можно считать, что такое эйлерово представление течения дает картину распределения скорости жидкости в пространстве (и других параметров, например, плотности и давления) в процессе ее движения для любого момента времени.

Второе, или *лагранжево*, представление использует тот факт, что некоторые динамические и физические параметры, так же как и в механике частиц, относятся не только к определенным точкам пространства, но также (и это более существенно) и к определенным частицам. В этом случае параметры течения зависят от времени и от выбранного элемента жидкости и изучается изменение со временем динамических параметров этого выбранного элемента. Поскольку элементы жидкости изменяют форму при движении, нам нужно отождествить выбранный элемент так, чтобы его линейные размеры не затрагивались; один подходящий для этой цели способ состоит в том, чтобы определить элемент вектором $\mathbf{a}$ его центра масс в некоторый начальный момент времени t_0 в предположении, что первоначальные линейные размеры элемента достаточно малы, чтобы обеспечить их малость в любые последующие рассматриваемые моменты времени, несмотря на деформирование элемента. Поэтому основным параметром течения в представлении Лагранжа является вектор скорости $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$.

Представление Лагранжа полезно в некоторых специальных случаях, но оно приводит к довольно сложному анализу, и основной его недостаток состоит в том, что оно не дает непосредственно градиентов скорости жидкости. Нам нет необходимости систематически использовать это представление, и в дальнейшем в основном будет применяться представление Эйлера. Тем не менее остаются

важными понятия о *жидких* объемах, поверхностях и линиях, которые всегда состоят из одних и тех же частиц жидкости и движутся вместе с ними, и они часто будут использоваться в рамках эйлерова представления поля течения.

Итак, при анализе течения основной зависимой переменной будет функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а другие переменные течения, например давление, также будут рассматриваться как функции от $\mathbf{x}$ и t.

Когда скорость $\mathbf{u}$ не зависит от времени t, говорят, что течение *установившееся* (или *стационарное*).

Линия в жидкости, касательная к которой в любой ее точке параллельна направлению скорости $\mathbf{u}$ в данный момент времени t, называется *линией тока*; семейство линий тока в момент времени t представляет собой решения системы уравнений

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)}, \tag{2.1.1}$$

в которой u, v, w—компоненты скорости вдоль осей прямоугольной системы координат, а величины x, y, z — компоненты вектора $\mathbf{x}$. В установившемся течении линии тока имеют одинаковую форму в любые моменты времени. Родственным понятием является *трубка тока*, которая представляет собой поверхность, образуемую в некоторый момент всеми теми линиями тока, которые проходят через данную замкнутую кривую в жидкости.

Траектория движения элемента жидкости вообще не совпадает с линией тока, хотя она совпадает с ней в том случае, когда движение установившееся. Кроме линий тока и траекторий, для целей наблюдения полезно определить *линию отмеченных частиц*, на которой расположены все те элементы жидкости, которые в некоторый более ранний момент времени проходили через определенную точку пространства; следовательно, когда краска или какое-либо другое помеченное вещество медленно выпускается в некоторой фиксированной точке в движущейся жидкости, видимая линия, возникающая в жидкости, и есть линия отмеченных частиц. Если течение установившееся, то линии отмеченных частиц, линии тока и траектории совпадают.

Говорят, что поле течения *двумерное* (или плоское), когда скорость $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в любой точке составляет прямые углы с определенным направлением и не зависит от перемещений, параллельных этому направлению. Поэтому всегда можно выбрать прямоугольную систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы компонентами скорости $\mathbf{u}$ в двумерном течении были $u, v, 0$, где u и v не зависят от z. Поле течения называется *осесимметричным*, если все компоненты скорости u, v, w по отношению к цилиндрическим координатам (x, σ, φ) (при соответствующем выборе направления линии $\sigma = 0$) не зависят от азимутального угла φ. В некоторых осесимметричных полях азимутальная, или окружная,

компонента скорости w всюду равна нулю и вектор скорости расположен в плоскости, проходящей через ось симметрии. В некоторых других полях течений только компонента w отлична от нуля и линиями тока являются окружности с центром на оси симметрии.

Дифференцирование по направлению движения жидкости

Очевидно, что в установившемся поле течения элемент жидкости может иметь ускорение, когда скорость $\mathbf{u}$ изменяется вдоль его траектории. Производная $\partial\mathbf{u}/\partial t$ не равна ускорению элемента в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t, так как элемент находится в этом положении только в данный момент времени. Правильное выражение для ускорения элемента жидкости можно найти только учитывая, что элемент, находившийся в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t, находится в точке $\mathbf{x}+\mathbf{u}\delta t$ в момент времени $t+\delta t$ и что изменение его скорости за малый промежуток времени равно

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{u}\delta t,\ t+\delta t)-\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=\delta t\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)+O(\delta t^2).$$

Таким образом, ускорение элемента жидкости при $(\mathbf{x},\ t)$ есть

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}. \tag{2.1.2}$$

(Ускорение, конечно, весьма просто можно выразить, используя лагранжево представление поля течения; если $\mathbf{v}$ — скорость некоторого определенного элемента жидкости, то его ускорение равно $\partial\mathbf{v}/\partial t$.)

Аналогичные рассуждения можно применить к любой другой динамической или физической величине (обозначим ее, например, θ), которая определяется как функция $\mathbf{x}$ и t и характеризует определенное свойство жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t; величина θ может быть скаляром, таким, как локальная плотность или температура жидкости, или вектором, таким, как угловая скорость вращения частицы жидкости. Производная $\partial\theta/\partial t$ представляет собой *локальную* скорость изменения, возникающую в результате временны́х изменений в точке $\mathbf{x}$; для того чтобы найти скорость изменения θ для элемента жидкости, нужно добавить *конвективную* скорость изменения $\mathbf{u}\cdot\nabla\theta$, обусловленную переносом этого элемента в другое положение.

Удобно ввести обозначение

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla, \tag{2.1.3}$$

такое, что, например, ускорение элемента жидкости можно записать в виде $D\mathbf{u}/Dt$. Оператор D/Dt имеет смысл только в том слу-

чае, когда он применен к полю переменной величины (т. е. к функции от $\mathbf{x}$ и t), и говорят, что он дает производную по времени, следящую за движением жидкости, или *субстанциональную* (полную) производную. Этот оператор часто появляется в дифференциальных уравнениях, выражающих законы сохранения, первым примером которых служит закон сохранения массы жидкости (§ 2.2).

Если форма жидкой поверхности определяется уравнением

$$F(\mathbf{x}, t) = \text{const},$$

где F — величина, инвариантная для частицы жидкости на этой поверхности, то

$$\frac{DF}{Dt} = 0. \tag{2.1.4}$$

В частности, уравнение любой поверхности, ограничивающей жидкость, должно удовлетворять уравнению (2.1.4).

2.2. Сохранение массы

Требование о сохранении массы жидкости налагает определенные ограничения на поле скоростей, и, хотя эти ограничения нельзя считать строго кинематическими, удобно рассмотреть их уже на данном этапе. Иногда течение бывает таким, что можно сразу обнаружить следствия из закона сохранения массы, как, например, в сферически симметричном или по существу одномерном течении, но во многих случаях необходимо использовать этот закон в виде дифференциального уравнения.

Рассмотрим замкнутую поверхность A, которая фиксирована относительно осей координат и охватывает объем жидкости V. Если ρ — плотность жидкости в точке $\mathbf{x}$ и в момент t, то масса жидкости, содержащаяся внутри замкнутой поверхности в любой момент времени, равна $\int \rho\, dV$; результирующий расход массы жидкости, которая вытекает из замкнутого объема через поверхность, равен $\int \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA$, где δV и δA — соответственно элемент замкнутого объема и элемент площади поверхности A, причем через $\mathbf{n}$ обозначена единичная внешняя нормаль к этому элементу поверхности. Условие сохранения массы жидкости требует, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = -\int \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA,$$

которое после дифференцирования под знаком интеграла (учитывая, что объем V фиксирован в пространстве) и преобразования интеграла по поверхности можно записать в виде

$$\int \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right\} dV = 0. \tag{2.2.1}$$

Это соотношение справедливо при любом выборе объема V, если только он находится целиком в жидкости, поэтому подинтегральное выражение, если оно является непрерывной функцией $\mathbf{x}$, всюду в жидкости должно тождественно обращаться в нуль. Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{2.2.2}$$

во всех точках жидкости, если левая часть равенства является непрерывной функцией координат. Это последнее ограничение не имеет большого значения, поскольку разрывы плотности ρ или скорости $\mathbf{u}$ будут встречаться в нашем анализе только в изолированных точках, на линиях или на поверхностях; следовательно, уравнение (2.2.2) справедливо всюду в жидкости, за исключением, возможно, этих точек, линий или поверхностей.

Уравнение сохранения массы (2.2.2) — одно из фундаментальных уравнений механики жидкости. В течение многих лет оно без особых к тому оснований называется *уравнением неразрывности.*

Другая форма этого уравнения получается путем раскрытия члена с дивергенцией и использования обозначения (2.1.3) для субстанциональной производной

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.2.3}$$

В этой форме уравнение можно интерпретировать применительно к объему τ данной массы жидкости. Величина τ изменяется в результате движения каждого элемента $\mathbf{n}\delta S$ граничной жидкой поверхности (где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали) [1] и согласно формуле Остроградского—Гаусса

$$\frac{d\tau}{dt} = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int \nabla \cdot \mathbf{u}\, d\tau.$$

Следовательно, скорость, с которой изменяется объем элемента жидкости [2] в точке $\mathbf{x}$, отнесенная к величине этого объема, равна

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int \nabla \cdot \mathbf{u}\, d\tau = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Эта относительная скорость изменения называется локальной *скоростью объемного расширения* или *дивергенцией* и будет иногда обозначаться одним символом Δ. Тогда уравнение сохранения массы в виде (2.2.3), очевидно, эквивалентно утверждению, что относительные скорости изменения плотности и объема жидкого

[1] Для того чтобы отличать геометрические и жидкие элементы, в дальнейшем по возможности везде через δV, $\mathbf{n}\delta A$, $\delta \mathbf{x}$ обозначаются элементы объема, поверхности, линии, фиксированные в пространстве, а через $\delta\tau$, $\mathbf{n}\delta S$, $\delta \mathbf{l}$ — элементы жидкого объема, жидкой поверхности и жидкой линии, которые движутся вместе с жидкостью.

[2] Здесь и далее используется термин «элемент», чтобы подчеркнуть его бесконечно малый размер и (обычно) переход к пределу $\tau \to 0$.

элемента равны по величине и противоположны по знаку; это утверждение, очевидно, могло служить исходным при выводе уравнения сохранения массы.

Жидкость называется *несжимаемой*, если плотность элемента жидкости остается неизменной под влиянием изменений давления. В дальнейшем мы убедимся, что изменения давления в некоторых обычных полях течений составляют столь малую долю абсолютного давления, что даже газы можно рассматривать как почти несжимаемую жидкость. Кроме того, плотность элемента жидкости может изменяться вследствие молекулярного переноса тепла (или, реже, растворенного вещества); однако условия, при которых влияние теплопроводности в жидкости пренебрежимо мало, являются общими, и утверждение о том, что жидкость по существу несжимаема, обычно означает при отсутствии какого-нибудь явного ограничения, связанного с теплопроводностью, что плотность каждого элемента жидкости остается постоянной (см. § 3.6). Следовательно, для несжимаемой жидкости скорость изменения плотности по направлению движения равна нулю, т. е.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{2.2.4}$$

Поэтому уравнение сохранения массы приобретает простую форму

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.2.5}$$

В этом случае относительная скорость объемного расширения всюду равна нулю, и, как показано в курсах векторного анализа, трубка тока не может заканчиваться внутри жидкости; она должна быть или замкнутой, или оканчиваться на границе жидкости, или уходить в бесконечность. Вектор $\mathbf{u}$, имеющий нулевую дивергенцию, называется *соленоидальным*.

Использование функции тока для удовлетворения уравнения сохранения массы

В случаях течения несжимаемой жидкости и установившегося течения сжимаемой жидкости уравнение сохранения массы (2.2.2) сводится к утверждению, что дивергенция некоторого вектора равна нулю, а именно равны нулю дивергенции векторов $\mathbf{u}$ или $\rho\mathbf{u}$. Если наложить дополнительное ограничение, состоящее в том, что поле течения двумерное или осесимметричное, то дивергенция вектора представляет собой сумму только двух производных, и тогда можно считать, что уравнение сохранения массы определяет скалярную функцию, из которой путем дифференцирования получаются компоненты векторов $\mathbf{u}$ или $\rho\mathbf{u}$. Здесь мы рассмотрим только несжимаемую жидкость.

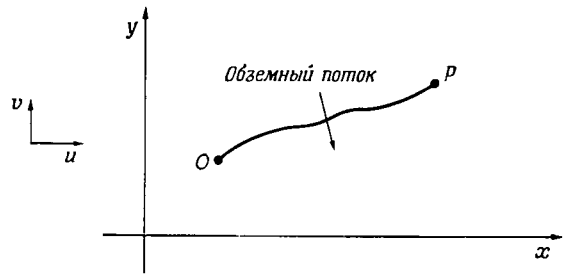


Рис. 2.2.1. К расчету объемного потока жидкости через кривую, соединяющую точку отсчета O и точку P с координатами (x, y).

Предположим сначала, что движение двумерное, так что вектор $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ и его компоненты u и v не зависят от z. Тогда из уравнения сохранения массы для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.2.6}$$

следует, что выражение $(u\delta y - v\delta x)$ есть полный дифференциал, равный, например, $\delta\psi$. Следовательно,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.2.7}$$

и неизвестная скалярная функция $\psi(x, y, t)$ определяется квадратурой

$$\psi - \psi_0 = \int (u\,dy - v\,dx), \tag{2.2.8}$$

где ψ_0 — постоянная, а криволинейный интеграл берется вдоль произвольной кривой, соединяющей некоторую исходную точку O и любую точку P с координатами x, y. Таким образом, мы использовали уравнение сохранения массы для замены двух зависимых переменных u, v одной зависимой переменной ψ, что дает весьма ценное упрощение во многих случаях двумерного течения.

Представляет интерес и физический смысл приведенного выше рассуждения. Объемный поток жидкости через кривую, которая соединяет точки O и P в плоскости (x, y), в точности определяется правой частью выражения (2.2.8) (см. рис. 2.2.1). (Под объемным потоком подразумевается поток через незамкнутую поверхность, образующуюся путем параллельного перемещения этой кривой на единицу высоты вдоль оси z, причем поток считается положительным, если относительно точки P он направлен против часовой стрелки.) Итак, объемный поток через замкнутую кривую, состоящую из любых двух несовпадающих путей интегрирования от точки O до точки P, обязательно равен нулю, если область, заключенная между ними, полностью занята несжимаемой жидкостью. Поэтому поток несжимаемой жидкости, определяемый

интегралом (2.2.8), не зависит от выбора пути, соединяющего точки O и P, и поэтому он определяет некоторую функцию координат точки P, которая уже записана в виде разности $(\psi - \psi_0)$.

Поскольку поток через любую кривую, соединяющую две точки, равен разности значений функции ψ в этих точках, то функция ψ вдоль линии тока постоянна; это также следует из соотношений (2.2.7) и соотношений (2.1.1), определяющих линии тока. Функция ψ называется *функцией тока*, и она (в случае двумерного течения) была введена Лагранжем. Функцию ψ можно также рассматривать как единственную ненулевую компоненту векторного потенциала для $\mathbf{u}$ (аналогичного векторному потенциалу магнитной индукции в теории электромагнитного поля, который также является соленоидальным вектором), поскольку (2.2.7) можно написать в виде

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} = (0, 0, \psi). \tag{2.2.9}$$

В механике жидкости общепринято изображать картину поля течения посредством различных линий тока, и если эти линии выбраны так, что два значения ψ для каждой пары соседних линий тока отличаются на одинаковую величину, например ε, то легко можно заметить закон, по которому величина скорости q и ее направление изменяются по всему полю, поскольку q прямо пропорциональна ε и обратно пропорциональна расстоянию между соседними линиями тока.

Примеры семейств линий тока, описывающих двумерные поля течений с равными интервалами значений функции ψ между всеми парами соседних линий тока, приведены на рис. 2.6.2, 2.7.2 и др.

Выражения для компонент скорости вдоль любых ортогональных координатных линий можно непосредственно получить через функцию ψ либо путем использования (2.2.9), либо с помощью соотношения между функцией ψ и объемным потоком жидкости между двумя точками. В полярной системе координат (r, θ) путем вычисления потока между парами соседних точек на координатных линиях r и θ и последующего приравнивания его к соответствующим приращениям функции ψ (при этом учитываются знаки, согласно выражению (2.2.8)) находим

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{2.2.10}$$

Читатель может установить полезное общее правило для двумерного течения, которое состоит в том, что дифференцирование функции ψ в определенном направлении дает компоненту скорости, повернутую на 90° по часовой стрелке от этого направления.

Наконец, для двумерного течения несжимаемой жидкости нужно отметить, что функция ψ может быть многозначной функци-

ей координат. Предположим, что через некоторый замкнутый контур в жидкости существует результирующий объемный поток жидкости m; этот поток может возникнуть в результате образования избыточного количества жидкости в области, ограниченной этим контуром (например, когда жидкость из трубки вытекает в эту область) или вследствие изменения объема части замкнутой области, не занятой жидкостью (например, когда газовая каверна, окруженная водой, расширяется или сжимается). Если теперь выбрать два различных пути, соединяющих две точки O и P, которые вместе образуют замкнутую кривую, охватывающую указанный контур, то объемные потоки через две объединенные кривые отличаются на величину m (или в более общем случае, на величину pm, где p — число, показывающее, сколько раз замкнутая кривая обходит внутренний контур). Тем самым разность $(\psi - \psi_0)$ в точке P зависит от выбора пути, соединяющего эту точку с начальной точкой O, и она может принимать любое из ряда значений, кратных m. Такой вид многозначности скалярной функции связан с распределением скоростей в области, которая не является односвязной, и будет более подробно рассмотрен в § 2.8. Это присуще не только двумерному течению, хотя в последнем такая неоднозначность встречается чаще всего.

Если теперь течение симметрично относительно некоторой оси, скажем $\sigma = 0$, то уравнение сохранения массы для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах (x, σ, φ) с соответствующими компонентами скорости u, v, w имеет вид [1])

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial (\sigma v)}{\partial \sigma} = 0.$$

Отсюда видно, что выражение $(\sigma u \delta\sigma - \sigma v \delta x)$ — полный дифференциал, равный, например, $\delta\psi$.

Таким образом,

$$u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \qquad v = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.2.11}$$

и функция $\psi(x, \sigma, t)$ определяется интегралом

$$\psi - \psi_0 = \int \sigma (u\, d\sigma - v\, dx), \tag{2.2.12}$$

где криволинейный интеграл берется вдоль произвольной кривой в осевой плоскости, соединяющей некоторую начальную точку O и точку P с координатами (x, σ). Следует отметить, что азимутальная компонента скорости w не входит в уравнение сохранения массы в случае осевой симметрии и ее нельзя получить из функции тока ψ.

[1]) Выражения для дивергенции и других векторных операторов в произвольной ортогональной криволинейной системе координат и в частности в цилиндрической, приведены в приложении 2.

течении, имеем

$$\frac{D\rho}{Dt}=0,\quad \frac{DE}{Dt}=0.$$

Согласно теореме Бернулли, величина

$$H'=\frac{1}{2}q^2+\frac{p}{\rho}+\Psi \tag{3.5.16}$$

в установившемся изэнтропическом течении принимает одно и то же значение во всех точках линии тока. Поскольку ρ не изменяется вдоль линии тока, а Ψ — известная функция координат (она равна $-\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ в случае однородной силы тяжести), теорема Бернулли дает простое соотношение на линии тока между двумя важными переменными, скоростью q и давлением p. Как мы увидим из последующих глав, это простое соотношение весьма полезно, когда сжимаемостью реальных жидкостей можно пренебречь.

Для совершенного газа мы имеем термодинамическое уравнение состояния (см. (1.7.15) и (1.7.19))

$$p=(c_p-c_v)\,\rho T \tag{3.5.17}$$

и интегральные выражения для E, I и S ((1.7.20) и (1.7.21)). С их помощью находим

$$I=E+\frac{p}{\rho}=\int c_p\,dT=\int\frac{c^2}{\rho}\,d\rho. \tag{3.5.18}$$

В этих соотношениях удельные теплоемкости c_p и c_v — функции только температуры. В обычных условиях, описанных в § 1.7, величины c_p и c_v приближенно постоянны; в этих условиях связь между давлением p и плотностью ρ при изэнтропическом изменении состояния выражается формулой $p\sim\rho^\gamma$, а

$$H=\frac{1}{2}q^2+c_pT+\Psi, \tag{3.5.19}$$

где $c_pT=\dfrac{c^2}{\gamma-1}=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}$. Для газа, движущегося с большими скоростями (большими по сравнению со скоростями, получающимися при свободном падении в диапазоне рассматриваемых высот), влиянием массовой силы тяжести можно пренебречь, и тогда остается простое соотношение между скоростью q и температурой T на любой линии тока в установившемся изэнтропическом течении. Газ теплее в тех местах на линии тока, где его скорость меньше, имеет максимальную температуру T_0 в критической точке (если она существует); произведение c_pT_0 для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями равно энтальпии торможения.

Если движение отнесено к осям, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, мы должны предположить, что на единицу

2.3. Анализ относительного движения в окрестности точки

Сила, приложенная со стороны одной части жидкости к соседней, зависит от того, как деформируется жидкость в процессе движения, и прежде чем перейти к рассмотрению динамики движения, нужно проанализировать характер движения жидкости в окрестности каждой точки. Этот анализ аналогичен производимому в теории локальной деформации упругого твердого тела при замене деформации и угла поворота частицы твердого тела на скорость деформации и угловую скорость вращения частицы жидкости.

Скорость жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t обозначена $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а ее мгновенная скорость в соседней точке $\mathbf{x}+\mathbf{r}$ равна $\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}$; тогда в прямоугольной системе координат

$$\delta u_i = r_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.3.1}$$

с точностью до величин первого порядка малости по сравнению с расстоянием r между двумя точками. Геометрический характер относительной скорости $\delta\mathbf{u}$, рассматриваемой как линейная функция $\mathbf{r}$, можно выяснить путем разложения производной $\partial u_i/\partial x_j$, которая представляет собой тензор второго порядка, на две части — симметричную и антисимметричную по индексам i и j. Итак,

$$\delta u_i = \delta u_i^{(s)} + \delta u_i^{(a)},$$

где

$$\delta u_i^{(s)} = r_j e_{ij}, \qquad \delta u_i^{(a)} = r_j \xi_{ij}, \tag{2.3.2}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad \xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.3.3}$$

Два слагаемых $\delta u_i^{(s)}$ и $\delta u_i^{(a)}$ выражают отдельные и по существу различные части относительной скорости, к рассмотрению которых мы и приступаем.

Очевидно, что первое слагаемое можно представить в виде

$$\delta u_i^{(s)} = r_j e_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}, \tag{2.3.4}$$

где

$$\Phi = (1/2)\, r_k r_l e_{kl}, \tag{2.3.5}$$

поскольку e_{ij} — симметричный тензор второго порядка. Поверхности, на которых Φ, рассматриваемая как функция от $\mathbf{r}$, постоянна, образуют семейство поверхностей второго порядка, и вектор $\delta\mathbf{u}^{(s)}$ параллелен локальной нормали к такой поверхности, проходящей через точку $\mathbf{r}$. Природа этой части величины $\delta\mathbf{u}$ станет яснее, если выбрать направления ортогональных осей координат так,

чтобы внедиагональные элементы тензора e_{ij} обратились в нуль, что всегда можно сделать. Тогда эти оси координат совпадут с главными осями тензора e_{ij} и семейства поверхностей второго порядка, а

$$\Phi = \frac{1}{2}(ar_1'^2 + br_2'^2 + cr_3'^2), \tag{2.3.6}$$

где r_1', r_2', r_3' — компоненты вектора $\mathbf{r}$ в новых осях. Коэффициенты a, b и c — диагональные компоненты тензора e_{ij}', полученные по общей формуле преобразования

$$e_{ij}' = \frac{\partial r_k}{\partial r_i'} \frac{\partial r_l}{\partial r_j'} e_{kl}, \tag{2.3.7}$$

и они удовлетворяют инвариантному соотношению

$$a + b + c = e_{ii}' = e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{2.3.8}$$

Величина $\delta\mathbf{u}^{(s)}$ в новых осях имеет три компоненты (ar_1', br_2', cr_3'). Поэтому любой линейный элемент жидкости вблизи точки $\mathbf{x}$, параллельный оси r_1' (так что для всех точек на линейном элементе значения r_2' и r_3' одинаковы), сохраняет свое направление и растягивается со скоростью $e_{11}' = a$. Подобным же образом все линейные элементы жидкости, параллельные осям r_2' и r_3', растягиваются со скоростями b и c без поворота (поскольку рассматривается только лишь величина $\delta\mathbf{u}^{(s)}$). Линейные элементы жидкости, не параллельные какой-либо одной из осей координат r_1', r_2', r_3', в общем случае подвергаются как растяжению, так и вращению, но только в тех пределах, которые необходимы для чистого растяжения линейных элементов, параллельных какой-либо одной из ортогональных осей.

Говорят, что величина $\delta\mathbf{u}^{(s)}$ определяет *чисто деформационное движение*. Величина e_{ij} называется *тензором скоростей деформации* и полностью задается направлениями своих главных осей и тремя главными скоростями деформации a, b, c. Другое описание поля относительных скоростей $\delta\mathbf{u}^{(s)}$ состоит в том, что оно превращает элемент жидкости вблизи точки $\mathbf{x}$ из сферического в эллипсоидальный с главными осями, которые не поворачиваются и скорости растяжения которых равны a, b, c. Для несжимаемой жидкости этот эллипсоид имеет постоянный объем и e_{ii} равно нулю (см. равенство (2.3.8)). Для сжимаемой жидкости чисто деформационное движение можно рассматривать как наложение, во-первых, изотропного расширения, при котором скорость растяжения всех линейных элементов равна $(1/3)e_{ii}$, а соответствующий добавок в выражение для Φ равен $(1/6)\, r_k r_k e_{ii}$, и, во-вторых, деформационного движения без изменения объема, для которого добавок в выражение Φ равен $(1/2)r_k r_l$ $(e_{kl} - (1/3)\, e_{ii}\delta_{kl})$.

Обращаясь к слагаемому $\delta\mathbf{u}^{(a)}$, видим, что величина ξ_{ij} представляет собой антисимметричный тензор только с тремя независимыми компонентами, и его можно записать в общей форме

$$\xi_{ij} = -(1/2)\,\varepsilon_{ijk}\omega_k, \tag{2.3.9}$$

где ω_1, ω_2, ω_3, очевидно, представляют собой компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$; коэффициент $(-1/2)$ выбран для упрощения последующего выражения (2.3.10). Соответствующая часть величины δu_i равна

$$\delta u_i^{(a)} = r_j\xi_{ij} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}r_j\omega_k,$$

т. е. представляет собой i-компоненту вектора $(1/2)\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Поэтому величина $\delta\mathbf{u}^{(a)}$ есть скорость в точке с координатой $\mathbf{r}$ по отношению к точке, относительно которой происходит *вращение* элемента как твердого тела с угловой скоростью $(1/2)\,\boldsymbol{\omega}$.

Явные выражения компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ получим из выражений (2.3.3) и (2.3.9):

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}. \tag{2.3.10}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ играет важную роль в механике жидкости и называется локальной *завихренностью* жидкости или *вектором вихря*. Обычно в практике общего векторного анализа векторную функцию координат, имеющую нулевой ротор, принято называть *безвихревой* в связи с указанной связью между вектором $\nabla\times\mathbf{u}$ и локальным вращением жидкости.

Можно непосредственно убедиться, что вектор $\nabla\times\mathbf{u}$ равен удвоенной локальной угловой скорости жидкости. По теореме Стокса

$$\int(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$$

для любой незамкнутой поверхности A, ограниченной замкнутой кривой, элемент которой равен $\delta\mathbf{r}$. Для площадки, ограниченной окружностью малого радиуса a с центром в точке $\mathbf{x}$ и единичной нормалью $\mathbf{n}$, касательная компонента скорости, осредненная по окружности и отнесенная к радиусу круга a, равна

$$\frac{1}{2\pi a^2}\oint\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} \approx \frac{1}{2}\,(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}. \tag{2.3.11}$$

Жидкость не вращается как твердое тело относительно точки $\mathbf{x}$, так что нельзя говорить, что она имеет локальную угловую скорость в обычном смысле; для деформируемой жидкости требуется несколько более общее определение угловой скорости, и выраже-

ние в левой части равенства (2.3.11) естественно считать определением компоненты локальной угловой скорости, параллельной нормали **n**. Чисто деформационное движение, представляемое величиной $\delta\mathbf{u}^{(s)}$, никак не влияет на эту угловую скорость.

Полезно также рассмотреть выражение для момента количества движения сферического элемента жидкости с центром в точке **x**, а именно интеграл

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \left(u_k + r_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \rho \, dV(\mathbf{r}).$$

При интегрировании по объему элемента величина u_k и ее производная $\partial u_k/\partial x_l$ постоянны; поэтому первый член суммы обращается в нуль и момент количества движения относительно оси x равен

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \int r_j r_l \rho \, dV = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} I \delta_{jl} = \frac{1}{2} \omega_i I, \qquad (2.3.12)$$

где I — момент инерции элемента жидкости относительно любой оси, проходящей через его центр. Это как раз та величина момента количества движения, которую имел бы сферический элемент, если бы он вращался как твердое тело с угловой скоростью $(1/2)\boldsymbol{\omega}$. Следует отметить, что этот вывод не справедлив для элемента произвольной формы, так как тогда момент количества движения, вообще говоря, зависит от деформационного движения, представляемого величиной $\delta\mathbf{u}^{(s)}$ (это ясно из рассмотрения момента количества движения элемента в виде длинного тонкого эллипсоида, когда его большая ось не параллельна одной из главных осей деформации), а также от вращательного движения, представляемого величиной $\delta\mathbf{u}^{(a)}$.

В заключение отметим, что с точностью до величин первого порядка малости по сравнению с линейными размерами малой области, окружающей точку **x**, поле скоростей в этой области в целом представляется наложением

а) однородного поступательного движения со скоростью $\mathbf{u}(x)$;

б) чисто деформационного движения, характеризуемого тензором e_{ij} скоростей деформации, которое может быть разложено на изотропное расширение и деформационное движение без изменения объема;

в) поворота как твердого тела с угловой скоростью $(1/2)\,\boldsymbol{\omega}$.

Аналитически это сводится к тому, что скорость в точке $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ представляется приближенно как

$$u_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{2} r_j r_k e_{jk} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k, \qquad (2.3.13)$$

где e_{ij} и ω_j вычисляются в точке **x**.

Простое движение сдвига

Типичным примером относительного поля скоростей, которое часто встречается на практике, является простое движение сдвига (коротко сдвиг), в котором плоские слои жидкости скользят друг относительно друга. В этом случае относительная скорость $\delta\mathbf{u}$ имеет всюду одно и то же направление и изменяется только в одном направлении, перпендикулярном к направлению $\delta\mathbf{u}$. При соответствующем выборе осей координат производная $\partial u_i/\partial x_j$ не обращается в нуль только при $i = 1$, $j = 2$, и, следовательно,

$$\delta\mathbf{u} = \left(r_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ 0,\ 0\right)$$

и

$$\Phi = \frac{1}{2} r_1 r_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \left(0,\ 0,\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{2.3.14}$$

Главные скорости деформаций равны $(1/2)\ \partial u_1/\partial x_2$, $-(1/2)\ \partial u_1/\partial x_2$ и нулю соответственно вдоль главных осей, направления которых относительно исходной системы координат определяются единичными векторами $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$, $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$ и $(0,\ 0,\ 1)$ соответственно. На рис. 2.3.1 показано, каким образом деформационное и вращательное движения суммируются в точках окружности на плоскости $(r_1,\ r_2)$, образуя простой сдвиг.

Такое представление простого сдвига в виде наложения чисто деформационного движения (с нулевой скоростью расширения) и вращения как твердого тела позволяет выбрать его в качестве основного элемента при изучении поля относительных скоростей более общего вида; иногда это оказывается весьма полезным. Прежде чем приступить к общему случаю, покажем, что любое двумерное поле относительных локальных скоростей можно представить путем наложения симметричного расширения, простого сдвига и квазитвердого вращения жидкости. Сначала разложим поле относительных скоростей на чисто деформационное и вращательное движения, подобно сделанному выше, и повернем оси координат так, чтобы они совпали с главными осями тензора скоростей деформации. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2}(ar_1'^2 + br_2'^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(a+b)\,r^2 + \frac{1}{4}(a-b)\,(r_1'^2 - r_2'^2),$$

где $r^2 = r_1'^2 + r_2'^2$. Затем повернем оси координат еще на 45° так, чтобы вектор $\mathbf{r}$ имел компоненты $(r_1'',\ r_2'')$ и

$$\Phi = \frac{1}{4}(a+b)\,r^2 - \frac{1}{2}(a-b)\,r_1''r_2''. \tag{2.3.15}$$

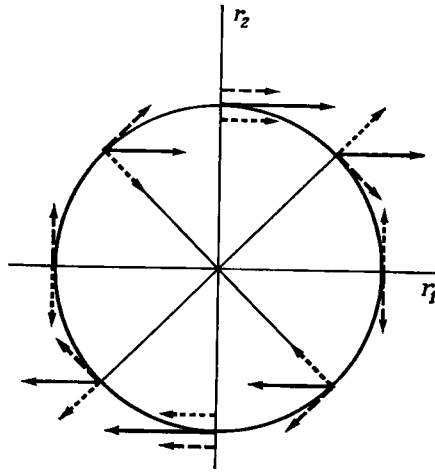


Рис. 2.3.1. Простое движение сдвига вблизи точки, разложенное на чисто деформационное движение и вращение. Главные оси деформационного движения наклонены под углами 45° к осям r_1 и r_2. Результирующее движение обозначено сплошными стрелками, деформационное — пунктирными стрелками, а вращение — штриховыми.

Первое слагаемое дает симметричное расширение, в котором все жидкие линии растягиваются со скоростью $(1/2)(a+b) = (1/2)\,\nabla\cdot\mathbf{u}$, а из равенств (2.3.14) видно, что второй член совместно с квазитвердым вращением с угловой скоростью $(1/2)(a-b)$ относительно нормали к плоскости движения дает простой сдвиг; отсюда следует сформулированный выше результат.

Аналогично в общем трехмерном случае любое поле относительных локальных скоростей может быть представлено наложением симметричного растяжения, двух простых сдвигов и одного квазитвердого вращения. Как и раньше, разлагаем движение на вращение и на чисто деформационное движение, причем для последнего в главных осях координат

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(ar_1'^2 + br_2'^2 + cr_3'^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}r^2 e_{ii} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{3}e_{ii}\right)\left(r_1'^2 - r_3'^2\right) + \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{3}e_{ii}\right)\left(r_2'^2 - r_3'^2\right).$$

Первый член дает сферически симметричное расширение, при котором объем жидкого элемента увеличивается со скоростью $\nabla\cdot\mathbf{u}$ на единицу объема, а второй и третий соответственно определяют двумерное чисто деформационное движение с нулевым объемным расширением, которое, как было показано ранее, может быть представлено наложением простого сдвига и подходящего квазитвердого вращения; отсюда и получается указанный результат. Следует отметить, что два простых сдвига, которые необходимы для представления данного поля относительных скоростей, можно

выбрать несколькими различными способами (в соответствии с тем, что внедиагональный элемент тензора скоростей деформаций определяет простой сдвиг с точностью до любого из двух квазитвердых вращений с равными по величине и противоположными по знаку угловыми скоростями).

2.4. Распределение скоростей при заданных скорости расширения и завихренности

Дивергенция и ротор векторной функции координат являются основными дифференциальными операторами векторного анализа, не зависящими от выбора системы координат. Применительно к полю скоростей они дают его локальную скорость расширения (дивергенцию) Δ и локальную завихренность (ротор) $\boldsymbol{\omega}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta, \qquad \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}. \tag{2.4.1}$$

В § 2.3 было показано, что мгновенное относительное перемещение жидкости вблизи любой точки состоит из 1) некоторого изотропного расширения, при котором скорость увеличения объема жидкого элемента на единицу объема равна Δ, 2) чисто деформационного движения без изменения объема и 3) квазитвердого вращения с угловой скоростью $(1/2)\,\boldsymbol{\omega}$. Очевидно, что значительная часть информации о распределении скоростей в целом обеспечивается распределениями величин Δ и $\boldsymbol{\omega}$ во всей жидкости. Иногда случается, что распределения величин Δ и $\boldsymbol{\omega}$ заданы или могут быть найдены из условий движения жидкости, и тогда полезно проверить аналитически, в какой степени при этом определяется поле скоростей. Поскольку рассматривается относительное движение вблизи некоторой точки, то чисто деформационное движение без изменения объема остается пока неопределенным; однако далее мы увидим, что имеются весьма сильные ограничения, налагаемые на распределение этих чисто деформационных движений по всей жидкости в целом.

Наша задача состоит в том, чтобы построить распределение скорости, дивергенция и ротор которой задаются значениями Δ и $\boldsymbol{\omega}$ во всех точках жидкости, а затем (в § 2.7 и последующих) рассмотреть свойства полей скоростей с нулевой скоростью объемного расширения и нулевой завихренностью. Начнем с известного распределения скорости расширения Δ и определим любую возможную скорость, например $\mathbf{u}_e$, такую, чтобы везде выполнялись соотношения

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_e = \Delta, \qquad \nabla \times \mathbf{u}_e = 0, \tag{2.4.2}$$

не касаясь других свойств $\mathbf{u}_e$. Один способ выбора скорости $\mathbf{u}_e$, удовлетворяющей соотношениям (2.4.2), заключается в том, что

можно положить

$$\mathbf{u}_e = \nabla\varphi_e, \qquad \nabla^2\varphi_e = \Delta. \tag{2.4.3}$$

(Этот выбор, конечно, не произволен; из векторного анализа известно, что при достаточно общих условиях любая векторная функция координат может быть представлена в виде суммы двух векторов $\nabla\varphi$ и $\nabla \times \mathbf{B}$, из которых только первый может иметь ненулевую дивергенцию и нулевой ротор.) Известно, что решение уравнения Пуассона (2.4.3) относительно функции φ_e есть [1])

$$\varphi_e(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta'}{s}\,dV(\mathbf{x}'), \tag{2.4.4}$$

где s — модуль вектора $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, штрих означает значение в точке $\mathbf{x}'$, а интеграл берется по объему, занятому жидкостью; заданное распределение Δ должно, конечно, быть таким, чтобы интеграл в правой части выражения (2.4.4) существовал.

Соответствующее выражение для скорости $\mathbf{u}_e$ есть [2])

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \Delta'\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{s}\right)dV(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{s}}{s^3}\Delta'\,dV(\mathbf{x}'). \tag{2.4.5}$$

Скорость $\mathbf{u}_e$ в точке $\mathbf{x}$ можно формально рассматривать как сумму слагаемых от различных элементов объема жидкости; так, от элемента объема δV в точке $\mathbf{x}'$ соответствующее слагаемое равно

$$\delta\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{s}}{s}\frac{\Delta'\delta V(\mathbf{x}')}{4\pi s^2}. \tag{2.4.6}$$

Это просто безвихревое распределение скоростей в бесконечной жидкости, которое согласуется с ее объемным потоком $\Delta'\delta V(\mathbf{x}')$ через все замкнутые поверхности, содержащие точку $\mathbf{x}'$. Поле скоростей (2.4.6) имеет нулевую скорость объемного расширения всюду, за исключением внутренней части элемента объема $\delta V(\mathbf{x}')$, содержащего точку $\mathbf{x}'$, где скорость расширения равна Δ'; итак, поле скоростей (2.4.5) имеет всюду заданную скорость объемного расширения. Можно сказать, что каждый элемент объема $\delta V(\mathbf{x}')$ действует как объемный источник в жидкости (в которой других механизмов расширения нет), причем скорость образования жидкости в объеме (*интенсивность* источника) равна $\Delta(\mathbf{x}')\,\delta V(\mathbf{x}')$.

Предположим теперь, что известно распределение завихренности $\boldsymbol{\omega}$ (причем всюду $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$), и определим возможную скорость, скажем $\mathbf{u}_v$, такую, чтобы было

$$\nabla \times \mathbf{u}_v = \boldsymbol{\omega}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u}_v = 0, \tag{2.4.7}$$

---

[1]) См. Джеффрис Г. Д., Свирлс Б., Методы математической физики, «Мир», М., 1969, т. 1, гл. 6.

[2]) Там, где имеется неясность относительно вектора, по отношению к которому применяется дифференциальный оператор ∇, как в случае величины $\nabla(1/s)$, он отмечается индексом. В случае применения оператора ∇ только к функции s имеем $\nabla_{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}'}$.

также не касаясь свойств $\mathbf{u}_v$. В данном случае естественно положить

$$\mathbf{u}_v = \nabla \times \mathbf{B}_v, \tag{2.4.8}$$

и тогда для *векторного потенциала* $\mathbf{B}_v$ получается уравнение

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_v) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}_v) - \nabla^2 \mathbf{B}_v = \boldsymbol{\omega}. \tag{2.4.9}$$

Если окажется, что $\nabla \cdot \mathbf{B}_v = 0$ всюду, то относительно $\mathbf{B}_v$ получается уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{B}_v = -\boldsymbol{\omega},$$

решение которого

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}'}{s}\, dV(\mathbf{x}'), \tag{2.4.10}$$

где интеграл, как и прежде, берется по объему, занятому жидкостью. Проверим теперь это решение, чтобы убедиться, действительно ли оно удовлетворяет уравнению $\nabla \cdot \mathbf{B}_v = 0$. Имеем

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}'}{s}\, dV(\mathbf{x}') \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{s} \right) dV(\mathbf{x}') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\omega}'}{s} \right) dV(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}}{s}\, dA(\mathbf{x}'),$$

где интеграл берется по всей границе жидкости. Этот интеграл по поверхности обращается в нуль, когда заданная завихренность имеет нулевую нормальную компоненту в каждой точке границы; так будет, в частности, в случае внешней границы жидкости, которая простирается в бесконечность в любом направлении и находится там в состоянии покоя. Когда $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ в некоторых точках границы жидкости, можно мысленно представить себе, что жидкость и распределение завихренности в ней простираются за пределы действительной границы и что завихренность распределена там таким образом, чтобы создать новую область жидкости с новой границей, на которой $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$. Тогда все те линии, касательные к которым всюду параллельны вектору $\boldsymbol{\omega}$, оказываются замкнутыми и ни одна из них не оканчивается на новой границе. Имеется много способов, с помощью которых распределение завихренности можно продолжить через заданную границу, поскольку задача отыскания соленоидального вектора $\boldsymbol{\omega}$, такого, что произведение $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ на границе рассматриваемой области принимает заданные значения, недоопределена, но в данный момент выбор конкретного способа несуществен, так как при любом выборе скорости $\mathbf{u}_v$ в соответствии с равенствами (2.4.8) и (2.4.10) имеем заданную завихренность во всех точках действительной жидкости. (В качестве одного из возможных способов можно принять $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0$ в области продолжения; в этом случае определение вектора $\boldsymbol{\omega}$ сводится к задаче, рассматриваемой в § 2.7.)

Принимая, что интеграл по объему в правой части равенства (2.4.10) (и (2.4.11) ниже) берется по всей расширенной области в тех случаях, когда $\omega \cdot \mathbf{n} \neq 0$ на реальной границе жидкости, из равенств (2.4.8) и (2.4.10) получаем

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{x}} \times \left(\frac{\boldsymbol{\omega}'}{s} \right) dV(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}'}{s^3} dV(\mathbf{x}'). \quad (2.4.11)$$

Скорость $\mathbf{u}_v$ можно формально рассматривать как сумму слагаемых от различных элементов объема жидкости; так, слагаемое от элемента $\delta V(\mathbf{x}')$ равно

$$\delta \mathbf{u}_v = -\frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}' \delta V(\mathbf{x}')}{4\pi s^3}. \quad (2.4.12)$$

Завихренность не может быть постоянной и отличной от нуля внутри элемента объема и равной нулю в окружающей его жидкости, поскольку такое распределение вектора $\boldsymbol{\omega}$ не будет иметь нулевую дивергенцию, так что выражение (2.4.12) в отличие от (2.4.6) дает распределение скоростей, которое само по себе не может существовать.

Существует аналогия между выражением (2.4.11) и формулой электромагнитной теории, которая связывает стационарное объемное распределение электрического тока (вместо $\boldsymbol{\omega}$ там выступает плотность тока) и возникающее под его влиянием магнитное поле. Можно сказать, что подобно тому, как электрический ток порождает в рассматриваемой области пространства магнитное поле (определяемое выражением вида (2.4.11)), так и завихренность порождает распределение скоростей (2.4.11) в окружающей ее жидкости. Термин «порождает» (иногда он заменяется термином «индуцирует») не означает в данном случае наличие механической причины или эффекта; строго говоря, он означает, что выражение (2.4.11) определяет скорость соленоидального течения, ротор которой имеет всюду вполне определенное значение и которая вследствие этого связана с заданным распределением завихренности.

Вывод заключается в том, что если $\mathbf{u}$ — скорость поля, совместимого с заданными значениями дивергенции Δ и завихренности $\boldsymbol{\omega}$ в любой точке жидкости, то разность скоростей $\mathbf{u} - \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_v$, где $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ определены формулами (2.4.5) и (2.4.11), будет соленоидальным и безвихревым вектором. Таким образом, можно записать

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_v + \mathbf{v}, \quad (2.4.13)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор, удовлетворяющий двум векторным уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.4.14)$$

в любой точке жидкости. Позже будет показано (§ 2.7), что вектор $\mathbf{v}$ определяется условиями, которые должны быть выполнены на границе жидкости.

2.5. Особенности скорости расширения. Источники и стоки

В этом параграфе мы рассмотрим поле скоростей безвихревого течения $\mathbf{u}_e(\mathbf{x})$, которое определяется уравнениями (2.4.3) и выражением (2.4.4) и связано с распределением скорости объемного расширения, содержащим различного рода особенности. Основной тип особенности представляет собой просто изолированный «пик» величины Δ в данной точке жидкости. Предположим, что Δ принимает большое значение в некотором малом объеме ε, содержащем внутри точку $\mathbf{x}'$, и равна нулю всюду вне его (если бы она не была равна нулю всюду вне этого малого объема, то к величине $\mathbf{u}_e$ нужно было бы добавить дополнительное слагаемое в виде линейной функции, согласно выражению (2.4.5)). Поскольку теперь ненулевые значения Δ сконцентрированы вблизи точки $\mathbf{x}'$, выражение (2.4.5) запишется так:

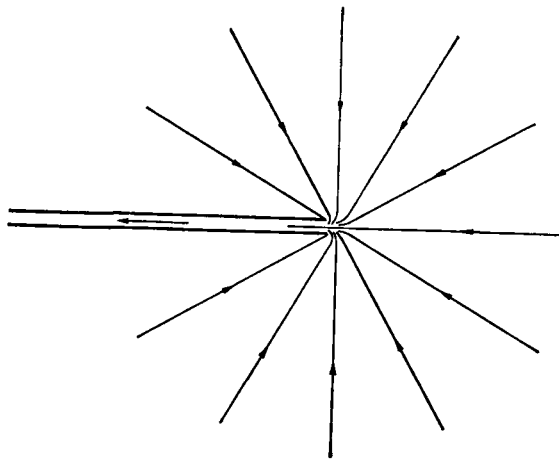
$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{s}}{s^3} \int_{\varepsilon} \Delta'' \, dV(\mathbf{x}''), \tag{2.5.1}$$

где, как и раньше, $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. В рассматриваемом случае имеет значение только интеграл по объему от величины Δ, а другие подробности ее распределения вблизи точки $\mathbf{x}'$ не оказывают никакого влияния на скорость $\mathbf{u}_e$. Предполагая далее, что малый объем ε постепенно стягивается к точке $\mathbf{x}'$, а интеграл $\int_{\varepsilon} \Delta'' dV(\mathbf{x}'')$ сохраняет постоянное значение, равное, например, m (это значит, что $|\Delta'| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$), приходим к математическому понятию *точечного источника* жидкости, для которого безвихревое поле скоростей задается точными формулами

$$\varphi_e = -\frac{m}{4\pi s}, \quad \mathbf{u}_e(\mathbf{x}) = \frac{m}{4\pi} \frac{\mathbf{s}}{s^3}. \tag{2.5.2}$$

Величина m называется *интенсивностью* источника (или стока, если m отрицательно) и равна полному объемному потоку жидкости через любую замкнутую поверхность, окружающую точку $\mathbf{x}'$.

Понятие точечного источника имеет некоторое значение для непосредственного изучения полей течения реальной жидкости, хотя ценность его ограниченна, поскольку пики в распределении величины Δ редко вызываются динамическими эффектами внутри жидкости. Когда все же нечто похожее на точечный источник возникает, это обычно бывает прямым следствием некоторого внешнего воздействия. Например, труба малого диаметра, всасывающая жидкость, порождает течение, сходное с течением точечного стока на конце трубы (рис. 2.5.1); течение с одной стороне твердой плоскости с малым отверстием, через которое жидкость всасы-



Р и с. 2.5.1. Течение, возникающее при отсосе среды через открытый конец трубы, приблизительно такое же, как и течение, создаваемое точечным стоком.

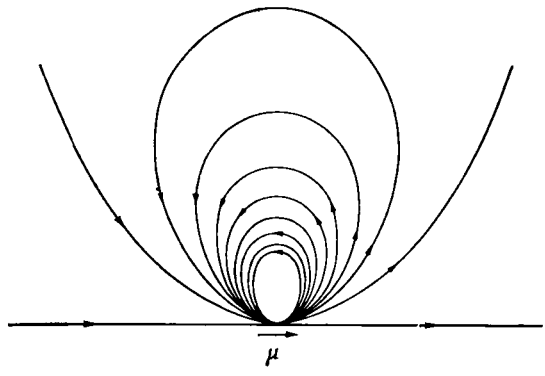
вается [1]) со скоростью M единиц объема в секунду, приблизительно такое же, как и течение, порождаемое в неограниченной жидкости точечным источником интенсивностью $-2M$. Однако более важную роль точечный источник играет в теоретической гидромеханике в качестве одной из математических моделей, с помощью которых могут быть построены более сложные и более интересные поля течений. В оставшейся части этого параграфа показывается возможность построения полей течения с использованием в качестве основы такого источника.

Математическое понятие точечного источника получается путем локализации его в точке. Можно получить другую особенность, локализованную аналогичным образом, предположив, что источник и сток с равными интенсивностями m расположены в точках $\mathbf{x}' + (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}' - (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$ соответственно. Если расстояние $\delta\mathbf{x}'$ между ними устремить к нулю, а интенсивность m — к бесконечности таким образом, чтобы произведение $m\delta\mathbf{x}'$ стремилось к конечному пределу

$$\boldsymbol{\mu} = \lim_{\delta\mathbf{x}'\to 0} m\delta\mathbf{x}',$$

то получится особенность, называемая *диполем* (источников) интенсивности $\boldsymbol{\mu}$ в точке $\mathbf{x}'$. Безвихревое поле скоростей, связанное с диполем, представляет собой наложение полей, обусловленных

[1]) Причина того, почему жидкость должна втекать в трубу и в отверстие в плоскости, а не вытекать из них, для того чтобы поле скоростей можно было представить точечным источником или стоком, связана с влиянием вязкости жидкости на твердой границе. Жидкость, которая вытекает из трубы или из отверстия в плоскости, обычно принимает форму струи. Спичку можно погасить, только подув на нее, а не втягивая в себя воздух!



Р и с. 2.5.2. Линии тока в осевой плоскости для течения, создаваемого диполем источников. Функция тока возрастает на одну и ту же величину между каждой парой соседних линий тока.

по отдельности источником и стоком, и поэтому оно имеет потенциал

$$\varphi_e(\mathbf{x}) = \lim_{\delta\mathbf{x}'\to 0} \frac{m}{4\pi}\left\{-\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\frac{1}{2}\delta\mathbf{x}'\right|}+\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\frac{1}{2}\delta\mathbf{x}'\right|}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_{\mathbf{x}'}\frac{1}{s} = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\frac{1}{s} \qquad (2.5.3)$$

и скорость

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) = \nabla\varphi_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\left(-\frac{\mathbf{s}}{s^3}\right) = \frac{1}{4\pi}\left\{-\frac{\boldsymbol{\mu}}{s^3}+3\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{s}}{s^5}\mathbf{s}\right\}. \qquad (2.5.4)$$

Поле скоростей (2.5.4) имеет осевую симметрию (с нулевой азимутальной компонентой) относительно направления $\boldsymbol{\mu}$, и компоненты скорости $\mathbf{u}_e$, которая является соленоидальным вектором всюду, за исключением точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, можно по этой причине выразить через функцию тока ψ (§ 2.2). В сферических координатах (s, θ, φ) с началом в точке $\mathbf{x}'$ и $\theta = 0$ в направлении $\boldsymbol{\mu}$ радиальная компонента скорости $\mathbf{u}_e$, согласно (2.2.14), записывается в виде

$$\frac{1}{s^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}_e}{s} = \frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{s}}{s^4} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{s^3},$$

где $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$; следовательно,

$$\psi = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\sin^2\theta}{s}, \qquad (2.5.5)$$

причем произвольная функция интегрирования определяется (равной нулю) из условий для поперечной компоненты скорости $\mathbf{u}_e$, которая также находится из равенства (2.5.5). На рис. 2.5.2 показана картина линий тока в осевой плоскости для течения, обусловленного диполем.

Заметим (это важно для дальнейших приложений), что при $s \to \infty$ скорость, связанная с изолированным источником в точке $\mathbf{x}'$, стремится к нулю как s^{-2}, в то время как скорость, создаваемая диполем, стремится к нулю как s^{-3}. Другое важное свойство состоит в том, что поскольку интенсивности источника и стока, составляющих диполь, равны, то результирующий полный поток жидкости через поверхность, охватывающую диполь, отсутствует; для непосредственного представления реальных полей течения жидкости это свойство делает диполь более полезным, чем отдельный источник.

Аналогично можно получить другие, более сложные точечные особенности тем же методом, который был применен для построения диполя, исходя из отдельного источника. Если диполь интенсивности $\boldsymbol{\mu}$ поместить в точку $\mathbf{x}' + (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$, а другой — интенсивностью $-\boldsymbol{\mu}$ — в точку $\mathbf{x}' - (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$ и если $|\,\delta\mathbf{x}'\,|$ устремить к нулю и при этом $|\,\boldsymbol{\mu}\,|$ растет таким образом, что произведение $\mu_i \cdot \delta x_j'$ стремится к конечному пределу, например ν_{ij}, то получается точечная особенность, для которой связанное с ней распределение скоростей находится из выражения потенциала

$$\varphi_e(\mathbf{x}) = \nu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i' \, \partial x_j'} \left(-\frac{1}{4\pi s} \right) = -\frac{\nu_{ij}}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} \left(\frac{1}{s} \right). \qquad (2.5.6)$$

Эту особенность можно также рассматривать (в предельном случае) как наложение двух равных источников, расположенных в противоположных вершинах малого параллелограмма определенной формы вблизи точки $\mathbf{x}'$, и двух равных стоков такой же интенсивности, как интенсивность источников, в других его двух вершинах. Характер распределения скоростей, связанного с особенностями высшего порядка, непосредственно ясен из выражения потенциала (2.5.6).

Можно представить, что пики в распределении скорости объемного расширения жидкости находятся на некоторых линиях и поверхностях в жидкости, и тем самым определить линию и поверхность особенностей. Так же как полный объемный поток жидкости от точечного источника имеет заданную ненулевую величину, так и поток *на единицу длины* линии распределенных источников не равен нулю, и он измеряет линейную плотность интенсивности источников (которая может быть неодинаковой во всех точках линии). Подобным же образом поток на единицу площади поверхности источников отличен от нуля и представляет собой меру поверхностной плотности интенсивности источников.

Диполи и особенности более высокого порядка также можно распределить по линиям и поверхностям с ненулевой и конечной плотностью.

Если линейная плотность интенсивности источника равна m в любой точке (x', y') линии, параллельной оси z, то каждый элемент $\delta z'$ линии можно рассматривать в качестве точечного источника интенсивности $m\delta z'$, и безвихревое поле скоростей $(u_e, v_e, 0)$, связанное с линией в целом, определяется по формулам

$$u_e(x, y) = \frac{m}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{s^3}\,dz' = \frac{m}{2\pi}\frac{x-x'}{\sigma^2},$$
$$v_e(x, y) = \frac{m}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-y'}{s^3}\,dz' = \frac{m}{2\pi}\frac{y-y'}{\sigma^2}, \qquad (2.5.7)$$

где $\sigma^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$. Скалярная функция, градиент которой имеет приведенные выше составляющие, записывается в виде

$$\varphi_e(x, y) = \frac{m}{2\pi}\ln\sigma. \qquad (2.5.8)$$

Следует заметить, что попытка получить функцию (2.5.8) непосредственно путем интегрирования выражения φ_e для точечного источника по всем значениям z' оказывается безуспешной, так как интеграл расходится; однако он расходится не по переменным (x, y) (появляется бесконечно большая постоянная) и функция (2.5.8) представляет собой конечную часть интеграла, которая зависит от (x, y) и которая вследствие этого и выражает поле скоростей.

Эта однородная и прямая линия источников в трехмерном поле эквивалентна, конечно, точечному источнику в двумерном поле. Компоненты скорости (2.5.7) можно было бы вывести, исходя с самого начала из понятия точечного источника интенсивности m, расположенного в точке (x', y') двумерного поля; тогда результирующий поток жидкости на единицу площади (или объемный поток на единицу глубины поля течения) через все кривые в плоскости (x, y), охватывающие точку (x', y'), будет равен m.

2.6. Распределение завихренности

Имеется много причин, по которым более удобно представлять движение жидкости, исходя из понятия завихренности, а не скорости, несмотря на ее более простой физический смысл. Кроме того, оказывается, что во многих важных случаях можно и полезно разделить поле течения на две области с различными свойствами, причем в одной из них завихренность почти всюду приближенно равна нулю. Изучению того, как изменяется распределение

завихренности, будет часто уделяться внимание в последующих главах. Мы еще не готовы описывать влияние на завихренность различных сил, действующих в жидкости, однако можем отметить чисто кинематические следствия определения вектора завихренности $\boldsymbol{\omega}$ в виде $\nabla \times \mathbf{u}$ или его эквивалентного определения как удвоенной локальной угловой скорости частиц жидкости. Одно из таких следствий — тождество

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \tag{2.6.1}$$

Линия в жидкости, касательная к которой в каждой точке параллельна локальному вектору завихренности, называется *вихревой линией*, а семейство таких линий в любой момент времени определяется уравнением, аналогичным уравнению (2.1.1). Поверхность в жидкости, образованная всеми вихревыми линиями, проходящими через данную стягиваемую [1]) замкнутую кривую, проведенную внутри жидкости, называется *вихревой трубкой*. Поток завихренности через открытую поверхность, ограниченную стягиваемой кривой и целиком расположенную в жидкости, определяется интегралом

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\, dA,$$

где $\mathbf{n}\delta A$ — элемент площади поверхности; можно воспользоваться соотношением (2.6.1), чтобы показать, что этот интеграл имеет одно и то же значение по *любой* такой открытой поверхности, расположенной в жидкости и ограниченной *любой* замкнутой кривой, лежащей на вихревой трубке и один раз охватывающей ее. Действительно, если $\mathbf{n}'\delta A'$ и $\mathbf{n}''\delta A''$ — элементы площади двух таких открытых поверхностей (направления векторов $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}''$ имеют одинаковый смысл по отношению к вихревой трубке), то по формуле Остроградского — Гаусса для объема жидкости, между этими поверхностями и связанной с ними частью вихревой трубки

$$\int \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}'\, dA' - \int \boldsymbol{\omega}'' \cdot \mathbf{n}''\, dA'' = \int \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}\, dV = 0,$$

причем добавок в интеграл на поверхности вихревой трубки равен нулю. Следовательно, поток завихренности вдоль вихревой трубки не зависит от выбора открытой поверхности, используемой для

---

1) Этот полезный термин, который будет встречаться в дальнейшем, означает, что замкнутая кривая может быть стянута в точку путем непрерывной деформации, *не выходя из области, занятой жидкостью*. Для стягиваемой замкнутой кривой, проведенной в жидкости, всегда можно указать открытую (незамкнутую) поверхность, которая ограничена этой кривой и расположена целиком в жидкости (причем эта поверхность образуется замкнутой кривой в процессе ее непрерывного стягивания в точку). Если область, занятая жидкостью, односвязна, то все замкнутые кривые в жидкости стягиваемы; если область не односвязна, то некоторые замкнутые кривые будут нестягиваемыми. Поле течения, которое мы сейчас будем рассматривать, обусловлено цилиндром бесконечной длины, движущимся в бесконечной массе жидкости; область пространства, занятого жидкостью, в данном случае двусвязна, и замкнутые кривые в жидкости, охватывающие цилиндр, являются нестягиваемыми.

его измерения, и называется *интенсивностью вихревой трубки*. В случае вихревой трубки бесконечно малого поперечного сечения ее интенсивность равна произведению площади поперечного сечения на величину локальной завихренности, при этом интенсивность одинакова в любом сечении трубки. Отметим, что вихревая трубка не может оканчиваться внутри жидкости.

Применение теоремы Стокса к замкнутой кривой, лежащей полностью на вихревой трубке и охватывающей ее один раз, дает

$$\int \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x}, \tag{2.6.2}$$

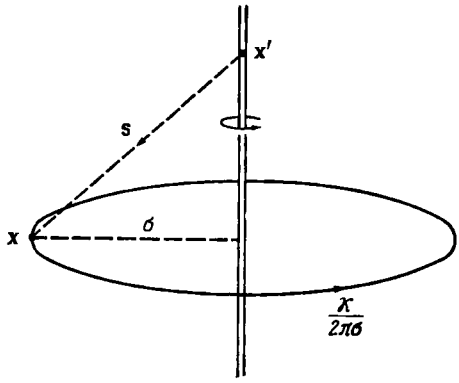
где $\mathbf{n}\delta A$ — элемент открытой поверхности, ограниченной этой замкнутой кривой. Криволинейный интеграл от скорости жидкости по замкнутой кривой называется *циркуляцией*; таким образом, циркуляция по любой стягиваемой замкнутой кривой равна потоку завихренности через открытую поверхность, ограниченную этой кривой, или, что эквивалентно этому, равна интенсивности вихревой трубки, образованной всеми вихревыми линиями, проходящими через эту кривую.

Вихревые нити

Многие поля течений характеризуются тем, что в окрестности некоторой линии в жидкости значения завихренности значительно больше, чем в других местах течения [1]) (эта линия обязательно всюду параллельна вектору $\boldsymbol{\omega}$, так как в противном случае не будет возможности удовлетворить уравнению $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$). Полезная математическая идеализация получается в таких случаях на основании предположения, что вихревая трубка, в которой $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, сужается и превращается в кривую линию с интенсивностью вихревой трубки, сохраняющейся постоянной и равной, скажем, $\varkappa$. Таким образом, имеется особая линия в распределении завихренности, которая полностью определяется (поскольку речь идет о ее вкладе в поток завихренности через любую поверхность) величиной $\varkappa$ и положением самой линии; она может быть названа *вихревой нитью* интенсивности $\varkappa$ (и ее не следует смешивать с вихревой линией или линией завихренности). Соленоидальное распределение скорости, которое связано с существованием одиночной вихревой нити в жидкости, всюду в которой завихренность равна нулю, сразу находится из выражения (2.4.11). Действительно, если $\delta\mathbf{l}$ — векторный элемент длины вихревой нити, которая расположена в элементе объема δV, то

$$\int_{\delta V} \boldsymbol{\omega}\,dV = \varkappa\delta\mathbf{l},$$

[1]) С подобной концентрацией завихренности связаны такие явления, как торнадо, водовороты, туманные следы, которые остаются за концами крыльев самолета, совершающего крутой разворот.



Р и с. 2.6.1. Соленоидальное распределение скоростей течения, создаваемого прямолинейной вихревой нитью интенсивности $\varkappa$.

так что выражение (2.4.11) дает

$$\mathbf{u}_v = -\frac{\varkappa}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{s}\times d\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{s^3}, \qquad (2.6.3)$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, а криволинейный интеграл берется по замкнутому пути, продолженному, если нужно, за пределы жидкости, как объяснялось в § 2.4. Соответствующее соотношение для магнитного поля, создаваемого вокруг замкнутого проводника с постоянным током, называется законом Био — Савара.

В очень простом случае прямолинейной вихревой нити бесконечной длины (всюду вне ее завихренность нулевая) скорость $\mathbf{u}_v$ всюду расположена в азимутальной плоскости относительно прямолинейной нити, ее направление соответствует положительной циркуляции относительно вихревой нити, а величина на расстоянии σ от вихревой нити равна (рис. 2.6.1)

$$|\mathbf{u}_v| = \frac{\varkappa\sigma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(\sigma^2+l^2)^{3/2}} = \frac{\varkappa}{2\pi\sigma}; \qquad (2.6.4)$$

можно считать, что на бесконечности два конца прямолинейной вихревой нити соединены вихревой нитью в форме, например, полуокружности радиуса R, поэтому добавок к скорости $\mathbf{u}_v$ от этого криволинейного пути имеет порядок R^{-1}, и, следовательно, им можно пренебречь. Кроме того, распределение скорости (2.6.4) можно получить и непосредственно на основании осевой симметрии распределения завихренности и применения равенства (2.6.2) к дуге окружности с центром на вихревой нити. Даже если вихревая нить искривлена, то значения скорости $\mathbf{u}_v$ в точках вблизи нее будут приближенно определяться по формуле (2.6.4), так как тогда интеграл в выражении (2.6.3) в основном зависит

от близлежащего приближенно прямолинейного участка вихревой нити (см. § 7.1).

Можно также отметить, что это двумерное соленоидальное поле, связанное с прямолинейной вихревой нитью, может быть описано с помощью функции тока; сопоставляя выражения (2.2.10) и (2.6.4), видим, что

$$\psi = -\frac{\varkappa}{2\pi} \ln \sigma. \tag{2.6.5}$$

В полностью двумерном поле течения соответствующий член с особенностью называется *точечным вихрем.*

Другую формулу для соленоидального поля скорости, связанного с одиночной вихревой криволинейной нитью интенсивности $\varkappa$ (всюду вне ее завихренность нулевая), можно получить, обращаясь снова к выражению (2.4.10) векторного потенциала $\mathbf{B}_v$. По аналогии с теоремой Стокса для скалярной величины, интегрируемой по замкнутой кривой, имеем

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{B}_v = \nabla \times \oint \frac{\varkappa\, d\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{4\pi s} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{4\pi} \nabla \times \int \left(\nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{s}\right) \times \mathbf{n}\, dA(\mathbf{x}'),$$

где $\mathbf{n}\delta A$ — элемент площади любой открытой поверхности, ограниченной вихревой нитью. Используя тот факт, что

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{s} = -\nabla_{\mathbf{x}}^2 \frac{1}{s} = 0,$$

находим скорость

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{\varkappa}{4\pi} \int \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left(\nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{s}\right) dA(\mathbf{x}').$$

Она может быть записана в виде

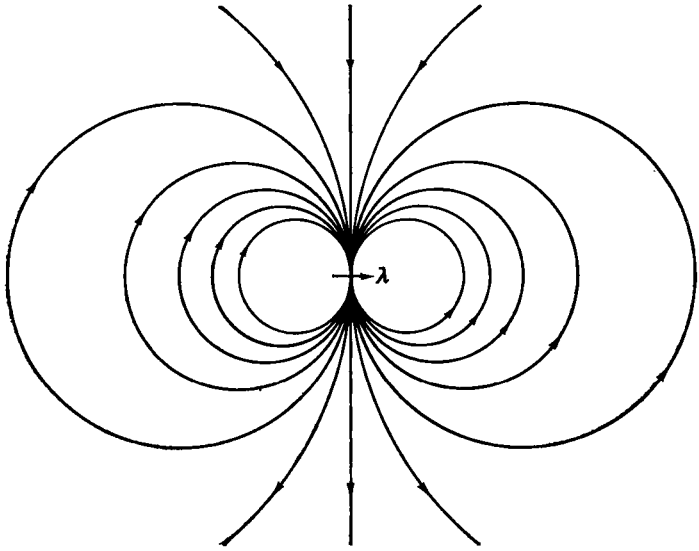
$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{\varkappa}{4\pi} \nabla\Omega, \tag{2.6.6}$$

где

$$\Omega(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}}{s^3}\, dA(\mathbf{x}')$$

— телесный угол, стягиваемый вихревой нитью в точке $\mathbf{x}$; положительное направление нормали $\mathbf{n}$ совпадает с положительным направлением циркуляции вокруг вихревой нити. Соответствующая формула в теории электромагнетизма также хорошо известна.

Подобно тому как точечный диполь и другие более сложные особенности строились посредством соответствующего наложения одиночных точечных источников, так и другие линейные особенности можно построить, исходя из вихревых нитей. *Линейный вихревой диполь* можно получить, взяв одну прямую вихревую нить интенсивности $\varkappa$, проходящую через точку $\mathbf{x}' + (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$, и дру-



Р и с. 2.6.2. Линии тока двумерного соленоидального течения, создаваемого вихревым диполем. Функция тока возрастает на одну и ту же величину между каждой парой соседних линий тока.

гую — интенсивности $-\varkappa$, проходящую через точку $\mathbf{x}' - (1/2)\,\delta\mathbf{x}'$ (где через $\mathbf{x}'$ и $\delta\mathbf{x}'$ временно обозначены векторы в плоскости, нормальной к вихревым нитям), и устремив $\varkappa$ к бесконечности, а $|\,\delta\mathbf{x}'\,|$ к нулю таким образом, чтобы произведение $\varkappa\delta\mathbf{x}'$ имело конечный предел $\boldsymbol{\lambda}$. Получающееся при этом двумерное соленоидальное распределение скорости можно представить функцией тока

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla_{\mathbf{x}'}(\ln\sigma) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\sigma^2}, \qquad (2.6.7)$$

где $\sigma = |\,\mathbf{x} - \mathbf{x}'\,|$. Все линии тока в плоскости, нормальной вихревым нитям,— окружности [1]), проходящие через точку $\mathbf{x}'$, с центрами на прямой, проходящей через ту же точку параллельно вектору $\boldsymbol{\lambda}$ (рис. 2.6.2). Можно легко показать, что соленоидальное распределение скорости, связанное с вихревым диполем в двух

1) Это справедливо для линий тока в случае любых двух параллельных вихревых нитей, интенсивности которых равны по величине и противоположны по знаку и которые проходят через любые точки $\mathbf{x}_1'$ и $\mathbf{x}_2'$ в плоскости, ортогональной к этим вихревым линиям; в этом можно убедиться, исходя из выражения функции тока

$$\frac{\varkappa}{2\pi}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

где

$$\sigma_1 = |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_1'\,| \quad \text{и} \quad \sigma_2 = |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_2'\,|.$$

измерениях, совпадает с распределением скорости безвихревого течения, обусловленного диполем источников (в двух измерениях), расположенным в той же самой точке и перпендикулярно к вихревому диполю.

Вихревая пелена

На практике также встречаются случаи, в которых величина завихренности велика всюду в окрестности некоторой поверхности в жидкости (которая, кроме того, должна быть поверхностью, на которой расположены вихревые линии $\boldsymbol{\omega}$), например, в полях течения вокруг крыльев самолета и других несущих тел (§ 7.8) и при некоторых движениях плохообтекаемых тел (§ 5.11). Очевидно, что локальные свойства такой поверхности с концентрацией завихренности определяются вектором

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int \boldsymbol{\omega}\, dx_n,$$

где x_n — расстояние по нормали к поверхности, а интеграл берется по малой области ε, содержащей эту поверхность. Если теперь предположить, что $\varepsilon \to 0$, а интеграл $\int \boldsymbol{\omega}\, dx_n$ остается постоянным и равным вектору $\boldsymbol{\Gamma}$, то приходим к понятию *вихревой пелены*, характеризуемой (локально) параметром $\boldsymbol{\Gamma}$. Интенсивность вихревой трубки, которая заключает в себе узкую полоску пелены, параллельной вектору $\boldsymbol{\Gamma}$, равна $\Gamma = |\boldsymbol{\Gamma}|$ на единицу ширины полоски, и величину Γ можно назвать интенсивностью (вихревой плотностью) пелены.

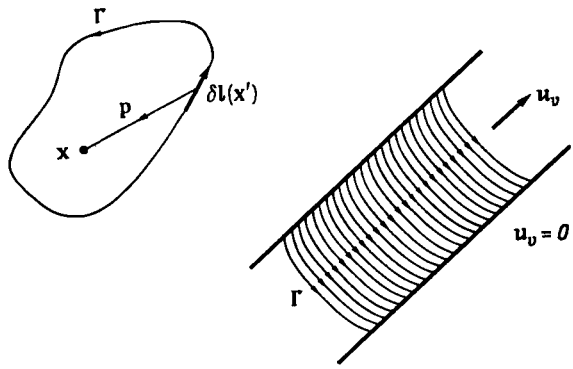
Если завихренность равна нулю всюду, за исключением заданной вихревой пелены, то распределение скорости (2.4.11), связанное с этой завихренностью, имеет вид

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{s}\times\boldsymbol{\Gamma}'}{s^3}\, dA(\mathbf{x}'), \tag{2.6.8}$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, как и раньше, а интеграл берется по площади пелены. В простом частном случае одиночной плоской вихревой пелены, на которой вектор $\boldsymbol{\Gamma}$ постоянен, имеем

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{4\pi}\times\int \frac{\mathbf{s}}{s^3}\, dA(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}\,\boldsymbol{\Gamma}\times\int \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{s^3}\,\mathbf{n}\, dA(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Gamma}\times\mathbf{n}, \tag{2.6.9}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к пелене, направленная в ту сторону, с которой находится точка $\mathbf{x}$. Следовательно, скорость жидкости, вызванная вихревой пеленой, постоянна, имеет противоположные знаки по обе стороны от пелены, равна по величине $(1/2)\Gamma$ и направлена параллельно пелене и перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\Gamma}$. Этот результат можно также получить с точностью до числового коэффициента, исходя из того, что данным распределением завихренности не предусматривается никакой масштаб



Р и с. 2.6.3. К расчету соленоидального распределения скорости в течении, создаваемом цилиндрической вихревой пеленой.

длины и что параметр Г, определяющий постоянную интенсивность пелены, имеет размерность скорости.

Аналогичный вывод справедлив для вихревой пелены в виде цилиндра произвольного поперечного сечения, интенсивность Г которого постоянна, а вектор Г направлен всюду под прямым углом к образующим цилиндра (так что все вихревые линии представляют собой одинаковые плоские кривые, обходящие вокруг цилиндра). Интеграл (2.6.8) преобразуется к виду

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\oint\frac{\mathbf{s}\times d\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{s^3}\,dm(\mathbf{x}'),$$

где $\delta m(\mathbf{x}')$ — элемент длины образующей и $\delta\mathbf{l}(\mathbf{x}')$ — векторный элемент длины вихревой линии в точке $\mathbf{x}'$. Компонента вектора $\mathbf{s}$, параллельная образующим, не дает результирующего слагаемого в величину интеграла по переменной m (ввиду нечетности подинтегрального выражения), поэтому

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\oint\frac{\mathbf{p}\times d\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{p^2}, \qquad (2.6.10)$$

где $\mathbf{p}$ — проекция вектора $\mathbf{s}$ на плоскость поперечного сечения цилиндра (рис. 2.6.3), а $|\mathbf{p}\times\delta\mathbf{l}|/p^2$ — угол, стягиваемый в точке $\mathbf{x}$ элементом $\delta\mathbf{l}$ в плоскости поперечного сечения, и поэтому очевидно, что в любой точке $\mathbf{x}$ внутри цилиндра вектор скорости $\mathbf{u}_v$ параллелен образующим и имеет одинаковую величину Г, в то время как в любой точке $\mathbf{x}$ вне цилиндра вектор скорости $\mathbf{u}_v$ равен нулю [1]). Таким образом, вихревая пелена постоянной интенсивно-

[1]) Имеется хорошо известный соответствующий результат электромагнитной теории, состоящий в том, что магнитное поле, создаваемое постоянным током, внутри идеального соленоида (длинной проволоки в форме тесно свернутой спирали) постоянно и параллельно оси соленоида, а вне соленоида равно нулю.

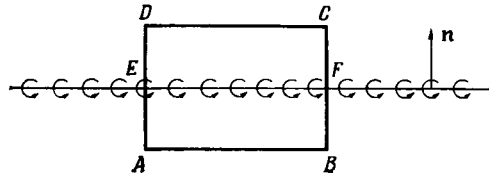


Рис. 2.6.4. Малый элемент неоднородной вихревой пелены.

сти снова разделяет две области, в каждой из которых связанная с ней скорость постоянна.

В этих двух случаях, в которых интенсивность вихрей постоянна, видно, что на пелене происходит разрыв компоненты скорости $\mathbf{u}_v$, параллельной пелене и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\Gamma}$, причем величина разрыва равна Γ. Можно показать, что это справедливо для любой вихревой пелены, даже если интенсивность $\boldsymbol{\Gamma}$ не постоянна, причем тогда соотношение между вектором $\boldsymbol{\Gamma}$ и скачком скорости будет локальным. Рассмотрим циркуляцию по контуру в виде малого прямоугольника с двумя противоположными сторонами AB и CD, которые расположены по обе стороны от вихревой пелены, параллельны пелене и перпендикулярны вектору $\boldsymbol{\Gamma}$ (рис. 2.6.4). Можно предположить, что вихревая пелена плоская и вектор $\boldsymbol{\Gamma}$ приближенно постоянен на отрезке, отсекаемом прямоугольником на пелене, а вектор скорости $\mathbf{u}_v$ также постоянен на прямоугольнике по каждую сторону пелены, где распределение завихренности имеет особенность. Тогда добавок к величине контурного интеграла $\oint \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{x}$ на отрезке EA взаимно уничтожается с соответствующим добавком, возникающим на отрезке BF (с ошибкой второго порядка малости относительно линейных размеров прямоугольника), а добавок от отрезка FC взаимно уничтожается с добавком на отрезке DE, так что общее соотношение (2.6.2) дает

$$\int_A^B \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{x} + \int_C^D \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Gamma} \times EF.$$

Таким образом, компонента $\mathbf{u}_v$ вектора скорости, параллельная пелене и перпендикулярная $\boldsymbol{\Gamma}$, при переходе через пелену претерпевает разрыв, величина которого равна Γ. Такое же рассуждение для прямоугольника со сторонами AB и CD, параллельными вектору $\boldsymbol{\Gamma}$, показывает, что компонента вектора скорости $\mathbf{u}_v$, параллельная вектору циркуляции $\boldsymbol{\Gamma}$, не претерпевает разрыва; не может быть также разрыва компоненты вектора скорости $\mathbf{u}_v$, нормальной к пелене, ввиду требования $\nabla \cdot \mathbf{u}_v = 0$. Поэтому скачок скорости $\mathbf{u}_v$, возникающий при переходе через пелену в направлении нормали $\mathbf{n}$, можно записать как

$$[\mathbf{u}_v] = \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{n}. \qquad (2.6.11)$$

Таким образом, локальный скачок скорости $\mathbf{u}_v$ будет таким же, как если бы вся пелена была плоской с постоянной интенсивностью вихрей, равной ее локальному значению Г. Когда пелена плоская и интенсивность вихрей постоянна, вектор скорости $\mathbf{u}_v$ просто изменяет направление при переходе через пелену, однако в общем случае это не справедливо.

2.7. Распределения скорости при нулевой завихренности и нулевой скорости расширения

Было показано, что заданным значениям скорости расширения Δ и завихренности $\boldsymbol{\omega}$ во всех точках жидкости отвечает распределение скорости (2.4.13). Слагаемые $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ в (2.4.13) получены по известным распределениям Δ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно, а последнее слагаемое $\mathbf{v}$ осталось неопределенным. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы изучить поле скорости $\mathbf{v}$, определяемое уравнением (2.4.14), т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0. \tag{2.7.1}$$

Скорость $\mathbf{u}$ *эффективно несжимаемой* жидкости удовлетворяет уравнению $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, поэтому уравнения (2.7.1) выполняются не только для функции $\mathbf{v}$ — одной из трех слагаемых скорости жидкости при заданных скорости расширения и завихренности, но и для фактической скорости несжимаемой жидкости, в которой по каким-либо причинам завихренность равна нулю. В дальнейшем мы убедимся, что большинство жидкостей в широком диапазоне условий течения ведут себя так, как будто они близки к несжимаемым (§ 3.6), а также, что поля течения жидкости, обладающие на первый взгляд очень ограничивающим свойством нулевой завихренности на протяжении больших частей поля, по динамическим причинам оказываются довольно распространенными (гл. 5). Поэтому изучение *безвихревых соленоидальных векторных полей* имеет в механике жидкости большое практическое значение. Кроме того, простота уравнений (2.7.1) дает возможность их всестороннего математического изучения и применения к ним мощных аналитических методов. Различные безвихревые поля течения, в которых скорость жидкости представляет собой безвихревой и соленоидальный вектор, будут подробно рассматриваться в гл. 6, здесь же нам желательно установить некоторые более общие результаты, касающиеся векторной функции $\mathbf{v}$, удовлетворяющей уравнениям (2.7.1) (для удобства изложения будем называть ее скоростью, даже если она может быть только одним из трех слагаемых реальной скорости жидкости).

В жидкости, в которой мгновенное распределение скорости определяется искомым вектором $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, жидкие элементы подвер

гаются поступательному смещению и чисто деформационному движению без изменения объема и без вращения.

Поскольку вихрь $\nabla \times \mathbf{v}$ равен нулю во всех точках жидкости, то из теоремы Стокса

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 \tag{2.7.2}$$

для любых стягиваемых замкнутых кривых, лежащих внутри жидкости, так как всегда можно найти открытую поверхность, ограниченную какой-либо стягиваемой кривой и расположенную целиком в жидкости. Если через O и P обозначить две точки связной области жидкости, а через C_1 и C_2 — две различные кривые, соединяющие точки O и P таким образом, чтобы они вместе образовывали стягиваемую замкнутую кривую, целиком расположенную в жидкости, то из (2.7.2) следует

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Криволинейный интеграл от векторной функции $\mathbf{v}$ по кривой, соединяющей точки O и P и лежащей внутри жидкости, имеет, следовательно, одно и то же значение для множества путей, любые два из которых образуют стягиваемую замкнутую кривую, и зависит только от координат $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ точек O и P соответственно. Поэтому можно определить функцию $\varphi(\mathbf{x})$, такую, что

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \int_O^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}. \tag{2.7.3}$$

Интеграл берется по одному из упомянутых выше путей. Вектор градиента функции $\varphi(\mathbf{x})$ находится путем варьирования положения точки P, что дает

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \tag{2.7.4}$$

Функция $\varphi(\mathbf{x})$ вызывается *потенциалом скорости* для поля вектора $\mathbf{v}$ (хотя не составляет труда интерпретировать φ как некоторую потенциальную энергию). Обычно координата $\mathbf{x}_0$ остается неопределенной, поскольку разность между значениями функции φ, соответствующими двум различным выбранным значениям $\mathbf{x}_0$, не зависит от координаты $\mathbf{x}$ и поэтому не оказывает влияния на величину градиента $\nabla\varphi(\mathbf{x})$.

Укажем попутно обращение результата, выражаемого равенством (2.7.2), поскольку оно пригодится нам позже при обсуждении динамических уравнений движения жидкости с малой вязкостью: если циркуляция в поле скорости $\mathbf{v}$ по любым стягиваемым замкнутым кривым, проведенным в жидкости, равна нулю, то $\nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$ всюду внутри этой области. Это следует из того факта,

что в этом случае для всех точек P внутри области может быть определена функция φ (2.7.3) и тогда скорость $\mathbf{v}$ имеет вид (2.7.4) для безвихревого течения. Иначе на основании теоремы Стокса можно утверждать, что для любых открытых поверхностей A, расположенных в жидкости и ограниченных стягиваемыми кривыми, должно быть

$$\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dA = 0;$$

если подинтегральное выражение есть непрерывная функция от $\mathbf{x}$, это возможно только тогда, когда равенство $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ выполняется для всех точек области.

Введение функции φ посредством (2.7.4) приводит к тому, что уравнение $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ удовлетворяется тождественно, а три неизвестные скалярные компоненты вектора $\mathbf{v}$ определяются тем самым единственной скалярной функцией φ. Тогда, согласно первому из условий (2.7.1), во всей жидкости должно выполняться уравнение

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{2.7.5}$$

Это уравнение относительно функции φ известно как *уравнение Лапласа*; оно встречается во многих разделах математической физики, и для функций, удовлетворяющих этому уравнению (часто называемых *гармоническими*), получено много общих результатов. Заслуживает упоминания линейность уравнения, объясняющая относительную простоту анализа безвихревого соленоидального течения; изменение распределения скоростей в жидкости во времени в общем случае описывается нелинейными динамическими уравнениями (гл. 3), однако в данном частном случае безвихревого соленоидального течения ограничения, налагаемые на распределения скоростей, оказываются настолько сильными, что сводятся к требованию, чтобы распределение скорости $\mathbf{v}$ в пространстве удовлетворяло простым линейным уравнениям (2.7.4) и (2.7.5) независимо ни от каких изменений во времени [1]).

Уравнение (2.7.5) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и относится к уравнениям *эллиптического* типа [2]). Известно, что решения таких уравнений и все их производные по компонентам вектора $\mathbf{x}$ конечны и непрерывны во всех точках, за исключением, возможно, некоторых точек на границе поля. (В противоположность этому

[1]) Вопрос о том, допускают ли динамические уравнения соленоидальное безвихревое распределение скорости, требует, конечно, дополнительного исследования. Для определенных условий ответ на этот вопрос положительный (см. § 5.3). В данном параграфе, касающемся только кинематики жидкости, исследуются свойства функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, по определению удовлетворяющей уравнениям (2.7.1) в данный момент времени, в который заданы (нулевые) скорость расширения Δ и завихренность $\boldsymbol{\omega}$.

[2]) По общей теории дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка см. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики. ИЛ, М., 1950; Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.

решения уравнений гиперболического типа, например волнового уравнения, могут быть разрывными во внутренних точках области.) Таким образом, гладкость распределения скорости обеспечивается во всех точках жидкости, за исключением тех точек границы, в которых задаются некоторые особенности, например резкое изменение направления касательной плоскости при наличии угла или кромки; эти особенности входят в граничные условия.

Свойства решений уравнения (2.7.5) сильно зависят от топологии области пространства, в котором справедливо это уравнение. Если область, занятая жидкостью, *односвязная*, то любая пара кривых, соединяющих две точки O и P и расположенных в жидкости, вместе составляют стягиваемую замкнутую кривую, при обходе по которой циркуляция равна нулю, так что функция φ, определяемая по формуле (2.7.3), представляет собой *однозначную функцию* $\mathbf{x}$. Если область, занятая жидкостью, многосвязная, то разность $\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)$ также имеет одно и то же значение для всех тех путей, любые два из которых образуют стягиваемую замкнутую кривую, однако эта разность может принимать различные значения для других путей и поэтому может быть многозначной. Пока будем считать, что жидкость занимает односвязную область; менее важный случай течения в многосвязной области будет изучен в § 2.8.

Условия единственности для определения $\nabla\varphi$

Важный результат, касающийся условий, при которых функция φ определяется однозначно с точностью до произвольной аддитивной постоянной, можно установить следующим путем. Запишем сначала тождество

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

и воспользуемся им, чтобы переписать следующий интеграл по объему, занимаемому жидкостью:

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int \nabla\cdot(\varphi\mathbf{v})\,dV.$$

Если произведение $\varphi\mathbf{v}$ представляет собой однозначную функцию координат, как это и бывает, если жидкость занимает односвязную область пространства, то по формуле Остроградского — Гаусса можно преобразовать этот интеграл в интеграл по поверхности A, ограничивающей рассматриваемый объем. Следовательно, для области жидкости, ограниченной извне поверхностью A_2 и, возможно, также ограниченной изнутри поверхностью A_1, имеем

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_2\,dA_2 - \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_1\,dA_1, \qquad (2.7.6)$$

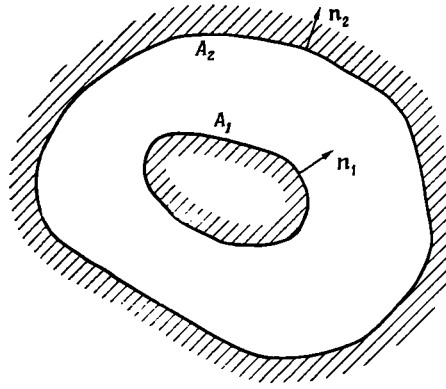


Рис. 2.7.1. К рассмотрению области жидкости, ограниченной изнутри поверхностью A_1 и извне поверхностью A_2.

где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы нормалей к элементам поверхности δA_1 и δA_2, являющиеся внешними по отношению к замкнутым поверхностям A_1 и A_2 (рис. 2.7.1).

Соотношение (2.7.6) дает замечательный результат, заключающийся в том, что всегда, если нормальная компонента вектора $\mathbf{v}$ равна нулю во всех точках внутренних и внешних границ, то

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = 0,$$

и, следовательно, вектор $\mathbf{v}$ должен быть равен нулю всюду в жидкости. Это означает, что никакое безвихревое движение несжимаемой жидкости, содержащейся в односвязной области внутри твердых границ (через которые поток массы жидкости должен быть равен нулю), не может возникнуть, если хотя бы часть границы не движется с ненулевой компонентой скорости в направлении локальной нормали.

Тот факт, что только одно решение уравнений (2.7.1) (а именно $\mathbf{v} = 0$) совместимо с нулевой нормальной компонентой скорости всюду на границах, показывает, что заданные значения нормальной компоненты скорости $\mathbf{v}$ на границах области единственным образом определяют значение скорости всюду внутри области. Это именно так, в чем можно весьма просто убедиться, заметив, что если $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ и $\mathbf{v}^* = \nabla\varphi^*$ — два решения уравнений (2.7.1), то их разность $(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)$ есть также решение, и соотношения (2.7.6) можно переписать, подставляя в них вместо $\mathbf{v}$ разность $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ и вместо φ — разность $(\varphi - \varphi^*)$. Условия, при которых существует не больше одного решения, т. е. при которых всюду $\mathbf{v} - \mathbf{v}^* = 0$, совпадают с условиями, которые тождественно обращают в нуль выражение

$$\int (\varphi - \varphi^*)(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{n}_2\,dA_2 - \int (\varphi - \varphi^*)(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{n}_1\,dA_1. \quad (2.7.7)$$

Если нормальные компоненты скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ имеют одинаковые заданные значения в каждой точке границ A_1 и A_2, то

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} = 0$$

на поверхностях A_1 и A_2, на которых выражение (2.7.7) обращается в нуль, и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ во всех точках жидкости. Аналогично выражение (2.7.7) обращается в нуль и в том случае, когда функции φ и φ^* имеют одинаковые заданные значения в каждой точке этих границ, хотя такое условие единственности менее пригодно для практических задач. Равенство $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ также выполняется всюду, если потребовать, чтобы было $\varphi = \varphi^*$ в некоторых точках границ, а в остальных $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^*$.

Многие поля течений, рассматриваемых в механике жидкости, имеют бóльшую протяженность, чем соответствующие линейные размеры интересующей области, и полезная математическая идеализация в таких случаях состоит в том, что жидкость считается простирающейся до бесконечности. В частности, наиболее часто встречающийся тип течения создается твердым телом, движущимся через большое пространство, занятое жидкостью, которая в отсутствие тела находится в покое [1]); поэтому желательно установить теорему единственности для такого типа течения подобно тому, как это было сделано выше. В доказательстве точно так же используется формула (2.7.6), причем в качестве поверхности A_2 нужно взять сферу достаточно большого радиуса, заключающую в себе все внутренние границы. Однако оценка интеграла по поверхности A_2 от произведения $\varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ требует тщательного изучения поведения функции φ на бесконечности, которое будет проведено в § 2.9 и 2.10, и поэтому пока отложим обсуждение теоремы единственности для жидкости, простирающейся на бесконечность и покоящейся там. Вывод состоит в том, что решение уравнений (2.7.1) для скорости $\mathbf{v}$ единственно, если наложить некоторые альтернативные условия в каждой точке на внутренней границе, причем одно — наиболее важное — условие состоит в том, что нормальная компонента скорости $\mathbf{v}$ на границе принимает заданное значение.

Эти теоремы единственности имеют очень важные следствия для безвихревого течения несжимаемой жидкости. Распределение скорости в целом в таком течении (в односвязной области пространства) определяется единственным образом по заданным значениям нормальной компоненты скорости на любой внутренней или внешней границах (если они имеются) и, следовательно, в случаях, в которых эти границы представляют собой поверх-

---

1) Если скорость тела постоянна, это течение идентично, конечно, течению при обтекании того же самого неподвижного тела потоком жидкости, скорость которого в отсутствие тела была бы постоянной, равной по величине и противоположной по знаку скорости движения тела в исходной задаче.

ности твердых тел,— по заданному движению самих твердых тел. Таким образом, когда твердое тело движется через жидкость, которая в отсутствие тела неподвижна, ее поле течения определяется однозначно мгновенной скоростью тела (и его формой); ни ускорение, ни предыстория движения тела при этом несущественны [1]). В частности, когда жидкость ограничена неподвижными твердыми границами, она обязательно будет всюду неподвижна. Очевидно, что мгновенные движения тела и жидкости тесно связаны друг с другом (это указывает на то, что уравнения (2.7.1) подходят для описания течения жидкости только при отсутствии у нее упругих и диссипативных свойств).

Общее описание способа, которым определяется полное распределение скорости жидкости в односвязной области, можно закончить случаем, когда заданы распределения скорости объемного расширения и завихренности. Как видно из (2.4.13), имеются три слагаемых в распределении скорости, одно из которых ($\mathbf{u}_e$) связано с заданным распределением скорости расширения, и оно определяется в явном виде по формуле (2.4.5), а другое ($\mathbf{u}_v$) связано с заданным распределением завихренности и определяется явно выражением (2.4.11). Третье слагаемое ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$) таково, что функция φ удовлетворяет уравнению (2.7.5), а скорость $\mathbf{v}$ однозначно определяется по заданным значениям нормальной компоненты скорости $\mathbf{v}$ (или по заданным значениям функции φ) на границе жидкости. Обычно бывает так, что выражения (2.4.5) для скорости $\mathbf{u}_e$ и (2.4.11) для $\mathbf{u}_v$ имеют отличные от нуля нормальные компоненты на границе жидкости. Следовательно, значение нормальной компоненты скорости $\mathbf{v}$, которое должно быть задано на границе, не будет просто нормальной компонентой действительной скорости жидкости на границе, а равно разности между нормальными компонентами этой действительной скорости и суммы добавков от скоростей $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$. Если границей жидкости служит твердое тело, движущееся поступательно со скоростью $\mathbf{U}$, то заданная величина нормальной компоненты скорости на границе равна

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{U} - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_v), \tag{2.7.8}$$

где $\mathbf{n}$ — локальная единичная нормаль к поверхности тела.

Безвихревое соленоидальное течение вблизи критической точки

В качестве простого примера распределения скорости, удовлетворяющего уравнениям (2.7.1), рассмотрим условия в окрест-

[1]) Этот замечательный вывод основан на математическом факте, заключающемся в том, что в уравнения (2.7.1) и (2.7.5) относительно функций $\mathbf{v}$ и φ входят производные только по координатам и не входит явно время; любые граничные условия, которые определяют решения единственным образом, будут обязательно содержать лишь мгновенные значения величин.

ности точки O, где $\mathbf{v} = 0$. Такая точка обычно называется *критической* и может возникнуть внутри жидкости или на ее границе. Потенциал скорости φ имеет конечные и непрерывные производные вблизи точки O, если только она не есть точка границы, в которой имеется геометрическая особенность; следовательно, функция φ может быть разложена в окрестности точки O в ряд Тейлора в прямоугольной системе координат с началом в точке O:

$$\varphi = \varphi_0 + a_i x_i + \frac{1}{2} a_{ij} x_i x_j + O(r^3),$$

где $r^2 = x_i x_i$, а тензор a_{ij} симметричен. Поскольку $\nabla\varphi = 0$ в точке O, все коэффициенты a_i обращаются в нуль, и поскольку $\nabla^2\varphi = 0$ всюду, то $a_{ii} = 0$. Таким образом, движение вблизи точки O оказывается чисто деформационным движением без изменения объема, характеризуется с точностью до малых порядка r^2 тензором скоростей деформаций a_{ij} и линейным распределением скорости

$$v_i = a_{ij} x_j.$$

Из этого следует, что через точку O проходят три ортогональные прямые, параллельные главным осям тензора a_{ij}, на каждой из которых скорость параллельна этой прямой; к точке O подходят и от нее отходят по крайней мере по одной линии. Линия тока, проходящая через точку O, в общем случае, очевидно, имеет три ортогональные ветви. Если воспользоваться осями, параллельными главным осям тензора a_{ij}, и в качестве координат взять x, y, z, то получим соответствующие компоненты скорости

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = -(a + b)\, z, \tag{2.7.9}$$

где a и b — константы, связанные с полем течения, частью которого является окрестность точки O.

Когда течение вблизи точки O либо двумерное, либо осесимметричное, его также можно описать с помощью функции тока (§ 2.2). Очевидно, что в случае двумерного течения с осями, параллельными главным осям тензора скоростей деформаций в точке O, в ее окрестности

$$\varphi = \frac{1}{2} k (x^2 - y^2), \quad \psi = kxy, \tag{2.7.10}$$

где k — постоянная. Линии тока вблизи точки O представляют собой равнобочные гиперболы, каждая из которых имеет асимптотами две ортогональные ветви линии тока, проходящей через точку O, как показано на рис. 2.7.2; эквипотенциальные линии образуют идентичное и ортогональное семейство с асимптотами, наклоненными под углом 45° к осям координат. Подобным же

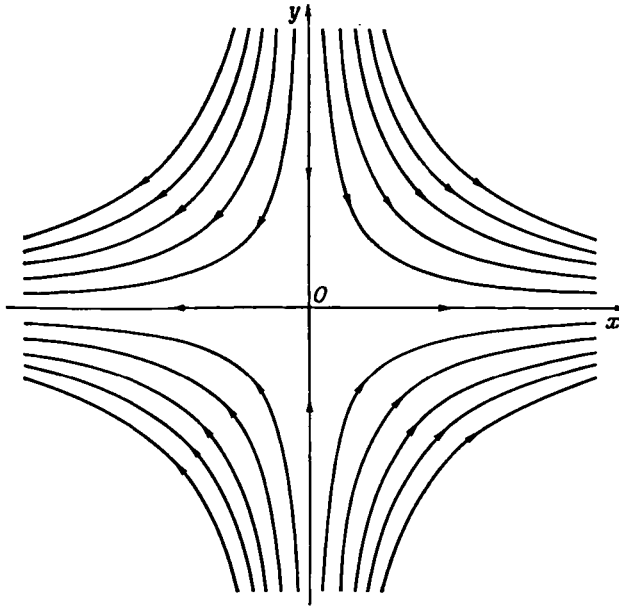


Рис. 2.7.2. Линии тока двумерного безвихревого соленоидального течения вблизи критической точки, $\psi = kxy$.

образом в осесимметричном течении вблизи точки O в цилиндрической системе координат (x, σ, θ)

$$\varphi = k\left(x^2 - \frac{\sigma^2}{2}\right), \qquad \psi = kx\sigma^2. \tag{2.7.11}$$

В этом случае каждая линия тока расположена в плоскости, проходящей через ось симметрии, и картина линий тока в каждой такой плоскости имеет такой же вид, что и на рис. 2.7.2.

Полученные результаты применимы к критической точке на границе течения при условии, что в этой точке нет геометрической особенности; касательная плоскость к границе в точке O содержит две главные оси тензора скоростей деформаций a_{ij} в этой точке. Например, на рис. 2.7.2 оси x или y могут быть границей. С другой стороны, полученные результаты неприменимы, если критическая точка совпадает с точкой, в которой касательная к границе претерпевает разрыв, например с вершиной конической или клиновидной границы. В таком случае некоторые ветви линии тока, проходящие через критическую точку, должны совпадать с границей и поэтому должны пересекаться с ней под углами, определяемыми формой границы.

Комплексный потенциал двумерного безвихревого соленоидального течения

В частном случае двумерного поля, и только в этом случае, скорость $\mathbf{v}$ удовлетворяет соотношениям такого вида, что можно изящно и эффективно использовать теорию функций комплексного переменного. Применение этой теории к двумерному полю течения частного вида подробно рассматривается в гл. 6; здесь же мы просто остановимся на основных математических соотношениях.

Компоненты v_x, v_y вектора $\mathbf{v}$ в двух измерениях для безвихревого течения можно написать в виде

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

С другой стороны, компоненты соленоидального вектора $\mathbf{v}$ в двух измерениях можно выразить через функцию тока ψ (см. § 2.2)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Две скалярные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ независимо определяют безвихревой и соленоидальный вектор $\mathbf{v}$ и, очевидно, связаны друг с другом соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.7.12}$$

Два уравнения точно такой же формы, как и (2.7.12), хорошо известны в теории функций комплексного переменного как условия Коши — Римана для комплексной величины $\varphi + i\psi$, являющейся функцией x и y такого специального вида, что она зависит только от комбинации $x + iy$, причем и функция $\varphi + i\psi$ имеет единственную производную по $x + iy$ [1]). В обычной терминологии это означает, что соотношения (2.7.12) представляют собой необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $\varphi + i\psi$ была *аналитической* (или регулярной) функцией комплексного аргумента $z = x + iy$ в той области, в которой четыре частные производные из (2.7.12) конечны и непрерывны; тогда действительные функции φ и ψ называются *сопряженными* [2]).

Будем писать

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

и называть функцию $w(z)$ *комплексным потенциалом* течения, описываемого действительными функциями φ и ψ. Непосредствен-

---

[1]) Можно легко проверить, что, когда соотношения (2.7.12) выполняются, отношение дифференциала функции $\varphi + i\psi$ к дифференциалу $\delta x + i\delta y$ при $(\delta x^2 + \delta y^2)^{1/2} \to 0$ стремится к пределу, который не зависит от $\delta y/\delta x$.

[2]) По теории функций комплексного переменного см., например, Copson E. T., Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford, 1935 [а также Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.— *Ред.*].

ное следствие такой связи с теорией функций комплексного переменного состоит в том, что любую аналитическую функцию z независимо от ее вида можно рассматривать как комплексный потенциал и как изображение некоторого возможного безвихревого соленоидального поля течения в двух измерениях. Более того, если f — аналитическая функция от z, то if — также аналитическая функция, так что по одной функции f можно построить два поля течения; для одного из них функции φ и ψ приравниваются $\mathscr{R}(f)$ и $\mathscr{J}(f)$ соответственно (где $\mathscr{R}(f)$ и $\mathscr{J}(f)$ — действительная и мнимая части функции f), а для другого — $\mathscr{J}(f)$ и $\mathscr{R}(f)$ соответственно.

Некоторые другие свойства сопряженных функций φ и ψ вытекают из соотношений (2.7.12). Как функция φ, так и функция ψ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Так как

$$(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

то эквипотенциальные линии, на которых φ постоянна, в общем случае ортогональны линиям тока, на которых ψ постоянна; этот вывод нарушается только в точке, где $|\mathbf{v}|=0$ (как это видно из примера на рис. 2.7.2).

Поскольку производная

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{|\delta z|\to 0}\frac{\delta w}{\delta z}$$

не зависит от направления дифференциала δz в плоскости (x, y), то для удобства можно считать, что предел берется по δz, параллельному оси x, и тогда

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y.$$

Выбирая теперь δz параллельным оси y (так что $\delta z = i\delta y$), находим

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x-iv_y.$$

Если через v обозначить модуль вектора $|\mathbf{v}|$, а через θ — угол между направлением вектора $\mathbf{v}$ и осью x, то выражение для dw/dz принимает вид

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y=ve^{-i\theta}. \qquad (2.7.13)$$

Все эти соотношения используются далее в различных частных случаях.

2.8. Безвихревое соленоидальное течение в двусвязных областях пространства

Когда область, занятая жидкостью, не односвязна, не все пары путей, соединяющих точки O и P в жидкости, образуют стягиваемую замкнутую кривую; грубо говоря, один путь может обходить одну сторону границы, а второй — ее другую сторону. В этих условиях можно показать, что криволинейный интеграл от вектора $\mathbf{v}$ (как и раньше, соленоидальной части общего поля скоростей безвихревого течения) по пути, соединяющему точки O и P, может зависеть от выбора пути и этот интеграл может быть неоднозначным [1]). Результат о единственности решений, установленный в предыдущем параграфе, справедлив только в том случае, когда функция $\varphi(\mathbf{x})$, определяемая криволинейным интегралом, однозначна; интересно рассмотреть, что происходит, когда функция φ может не быть однозначной.

Сначала напомним, каким образом с топологической точки зрения классифицируются области пространства. В односвязной области пространства любые две точки можно соединить кривыми, целиком лежащими в области, и любые две такие кривые образуют стягиваемую замкнутую кривую. В многосвязной области все еще можно соединить любые две точки кривыми, целиком расположенными в области, но некоторые пары таких кривых образуют уже нестягиваемые замкнутые кривые. Порядок связности многосвязной области определяется числом различных перегородок в виде открытых поверхностей с граничными кривыми, целиком лежащими на границе многосвязной области, которые можно провести в ней без разделения ее на несвязные части; если можно ввести $(n-1)$ таких перегородок, область называется *n-связной*. Например, внешняя область тора двусвязна, так как можно провести только одну перегородку (например, закрывающую «дырку» тора) без нарушения связности области. Введение каждой перегородки создает новую область (для которой обе стороны перегородки служат частью ее границы), порядок связности которой на единицу меньше порядка связности исходной области.

Порядок связности можно также определить числом попарно несовмещаемых замкнутых кривых, которые можно провести в области. Два контура в области называются *совмещаемыми*,

[1]) Мы считаем самоочевидным то, что если замкнутая кривая не стягивается, то невозможно найти открытую поверхность, ограниченную этой кривой и целиком лежащую в жидкости, так что нельзя использовать теорему Стокса, чтобы показать, что криволинейный интеграл от вектора $\mathbf{v}$ по этой кривой равен нулю. Несмотря на очевидность этого утверждения, оно в действительности корректно только для областей пространства достаточно простой топологической структуры (в число которых входят области, обычно встречающиеся в механике жидкости). Вообще в пространстве можно построить особые области с высоким порядком связности, содержащие некоторые нестягиваемые кривые, которые тем не менее ограничивают открытые поверхности, целиком лежащие в жидкости.

если их можно совместить друг с другом путем непрерывной деформации, не выходя из этой области; иногда совмещаемость такова, что имеется взаимно однозначное соответствие между точками на обоих контурах (т. е. каждая точка одного контура совпадает только с одной точкой другого), а иногда при совмещении один из контуров превращается в двух- или многократный. В односвязной области все контуры оказываются совмещаемыми (и стягиваемыми). В двусвязной области, такой, как внешняя область тора, все стягиваемые контуры совмещаемы друг с другом, а все нестягиваемые контуры, которые нанизаны на тор, совмещаемы друг с другом; однако никакой контур первой группы не совмещается ни с одним из контуров второй группы. Таким образом, существует в точности два несовмещаемых контура, которые можно провести в двусвязной области. В n-связной области можно провести n несовмещаемых контуров, один из которых будет стягиваемым, а $(n-1)$ — нестягиваемыми. Каждая из $(n-1)$ перегородок, которые можно ввести в n-связную область без разделения ее на несвязные части, исключает один контур из общего числа $(n-1)$ несовмещаемых нестягиваемых контуров, которые можно провести в этой области.

Двусвязные области имеют большое значение в механике жидкости. Течение, создаваемое длинным твердым цилиндром, движущимся в направлении нормали к своей оси, происходит именно в такой области, и тот факт, что некоторые замкнутые кривые в таком случае нестягиваемы, положен в основу теории подъемной силы (§ 6.6 и 6.7). Внешняя область тора двусвязна, и это используется при анализе движения такого рода, как движение дымового кольца (§ 7.2). Течения в областях с порядком связности, большим двух, встречаются нечасто, но, во всяком случае, опираясь на результаты для двусвязной области, нетрудно получить результаты для областей с порядком связности три и четыре. Поэтому остальная часть этого параграфа будет посвящена течениям в двусвязных областях пространства.

Удобно использовать терминологию, относящуюся к конкретному случаю течения в двусвязной области вне твердого цилиндра конечной длины. Рассмотрим различные замкнутые кривые, которые можно провести в жидкости. Некоторые из них оказываются стягиваемыми, и криволинейный интеграл от скорости $\mathbf{v}$ по этим кривым, согласно теореме Стокса, равен нулю. Те же кривые, которые один раз полностью обходят вокруг цилиндра (делают один виток), будут нестягиваемыми. Любые две кривые, которые делают один виток вокруг цилиндра, являются совмещаемыми, причем для точек этих кривых выполняется взаимно однозначное соответствие; поэтому поверхность, образуемая этими кривыми в процессе совмещения, образует поверхность, расположенную в жидкости и ограниченную двумя замкнутыми кривыми. По тео-

реме Стокса для такой открытой поверхности [1]) криволинейные интегралы от $\mathbf{v}$ по двум замкнутым кривым, взятые в одном и том же направлении по отношению к цилиндру, равны; следовательно,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \varkappa \tag{2.8.1}$$

для всех контуров, охватывающих цилиндр один раз; неизвестная величина $\varkappa$ называется *циклической постоянной* [2]) поля скорости $\mathbf{v}$.

Другие нестягиваемые кривые обходят цилиндр больше одного раза, например p раз. Любые две из таких кривых совмещаемы при наличии взаимно однозначного соответствия их точек, и теорема Стокса, примененная, как и раньше, к полосе, образуемой при деформации их в процессе совмещения, показывает, что криволинейные интегралы от $\mathbf{v}$ по двум таким замкнутым кривым имеют одно и то же значение. Однако среди контуров, обходящих цилиндр p раз, содержится контур, который повторяет p раз замкнутую кривую, обходящую цилиндр только один раз. Следовательно, для всех контуров, обходящих цилиндр p раз,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = p\varkappa. \tag{2.8.2}$$

Это равенство дает циркуляцию (связанную со скоростью $\mathbf{v}$) по *любой* замкнутой кривой, проведенной в жидкости, при условии, что для кривой, не обходящей цилиндр, p равно нулю.

Если теперь определить функцию $\varphi(\mathbf{x})$,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \int_O^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.8.3}$$

где интеграл берется по некоторому пути, лежащему в жидкости и соединяющему точки $O(\mathbf{x}_0)$ и $P(\mathbf{x})$, то, очевидно, значение функции $\varphi(\mathbf{x})$ зависит от выбора пути. Разность между двумя значениями φ, соответствующими двум выборам пути из точки O в точку P, равна криволинейному интегралу от $\mathbf{v}$ по замкнутой кривой, образованной этими путями вместе, а этот интеграл, как показывает равенство (2.8.2), должен быть равен некоторому целому числу, умноженному на циклическую постоянную $\varkappa$. Таким образом, в двусвязной области функция φ в общем случае многозначна, причем разность между возможными значениями φ представляет собой величину, кратную $\varkappa$. Безвихревое соленои-

---

[1]) Если теорема Стокса применяется к открытой поверхности, граница которой состоит из двух или более несвязных замкнутых кривых, то направление интегрирования для криволинейного интеграла по границе выбирается против часовой стрелки относительно нормали к соседнему с границей элементу поверхности.

[2]) В n-связной области пространства с полем скорости $\mathbf{v}$ связано $(n-1)$ циклических постоянных.

дальное поле течения в двусвязной области называется *циклическим*, если $\varkappa$ не равна нулю; если же $\varkappa = 0$, то оно называется *ациклическим*, и функция φ однозначна, как в случае течения в односвязной области.

Следует отметить, что функция φ, определяемая выражением (2.8.3), представляет собой, однако, непрерывную функцию от $\mathbf{x}$ (когда $|\mathbf{v}|$ конечно). По мере того как точка P движется непрерывно вокруг цилиндра в направлении против часовой стрелки, функция φ изменяется непрерывно и увеличивается на величину $\varkappa$, когда точка P возвращается в исходное положение после завершения одного полного обхода цилиндра. Для всех точек жидкости бесконечно малое изменение $\delta\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{x}$ точки P приводит к бесконечно малому изменению $\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{x}$ величины φ, и, как и раньше, справедливо выражение

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}).$$

Конечно, вектор $\mathbf{v}$ представляет собой однозначную функцию от $\mathbf{x}$ в любых условиях.

Одним примером циклического безвихревого соленоидального течения может служить течение, создаваемое вихревой нитью, подобное описанному в § 2.6. Поле скорости $\mathbf{u}_v$ в безграничной жидкости, связанное с одиночной вихревой нитью (которая обязательно либо замкнута, либо ее концы простираются в бесконечность), по определению всюду соленоидальное и безвихревое, за исключением точек на самой вихревой нити; поэтому в двусвязной области всюду вне вихревой нити $\mathbf{u}_v = \nabla\varphi$, и циклическая постоянная для функции φ равна интенсивности вихревой нити. В самом деле, выражение (2.6.6) определяет в явном виде именно потенциал скорости течения, связанного с замкнутой вихревой нитью интенсивности $\varkappa$, т. е.

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\varkappa}{4\pi}\Omega, \tag{2.8.4}$$

где Ω — телесный угол, стягиваемый замкнутой вихревой нитью в точке $\mathbf{x}$. Как и ожидалось, функция $\varphi(\mathbf{x})$ возрастает на величину $\varkappa$, когда точка с координатой $\mathbf{x}$ пробегает один раз по любому замкнутому пути вокруг вихревой нити в положительном направлении по отношению к вектору ее завихренности. В предельном случае прямолинейной вихревой нити бесконечной длины вихревую нить можно замкнуть полуокружностью бесконечного радиуса, так что

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\varkappa}{2\pi}\theta, \tag{2.8.5}$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки в плоскости, нормальной к вихревой нити, причем в точке с координатой $\mathbf{x}$ направление $\theta = 0$ относительно

вихревой нити считается произвольным. Следует отметить, что этот потенциал скорости дает то же самое поле течения, что и функция тока (2.6.5), и выражение для комплексного потенциала течения в плоскости z, нормальной к вихревой нити, имеет вид

$$w(z) = -\frac{i\varkappa}{2\pi} \ln z.$$

Условия единственности для определения $\nabla\varphi$

Обсуждение в § 2.7 граничных условий, при которых решение уравнения Лапласа относительно функции φ единственно (с точностью до аддитивной константы), было связано с использованием формулы Остроградского — Гаусса при написании равенства (2.7.6), которое справедливо только в том случае, когда φ — однозначная функция координат. Для течения в двусвязной области это обсуждение неприемлемо, если только циклическая постоянная не окажется равной нулю [1]). Однако существует простой способ использования полученных ранее результатов для нахождения достаточных условий единственности $\nabla\varphi$, когда функция φ — многозначный потенциал скорости. Пусть φ и φ^* — два решения уравнения Лапласа, которые, как известно, имеют одну и ту же циклическую постоянную; тогда разность этих решений $\varphi - \varphi^*$ дает потенциал скорости ациклического движения и является однозначной функцией координат, к которой применимы полученные ранее выводы. Следовательно, безвихревое соленоидальное течение в двусвязной области определяется единственным образом, если наложены граничные условия, необходимые для получения единственного течения в односвязной области, и определена циклическая постоянная.

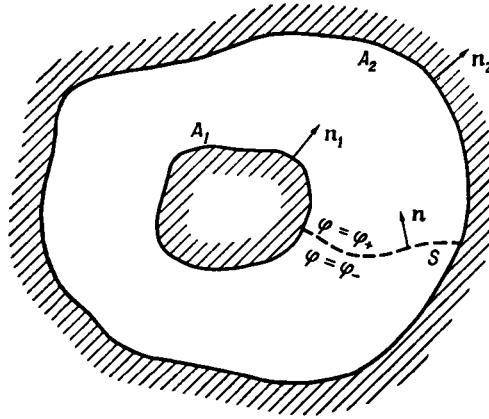
Несмотря на то что это простое рассуждение сразу дает полезную теорему единственности, представляет интерес рассмотрение способа, с помощью которого должны быть видоизменены соотношения, подобные (2.7.6), когда φ — многозначная функция координат. Как и ранее, начнем с тождества

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dV = \int \nabla\cdot(\varphi\mathbf{v})\, dV,$$

где интегралы берутся по двусвязной области, занятой жидкостью. Для того чтобы можно было преобразовать интеграл по поверхности, предположим, что в жидкости поставлена перегородка (нулевой толщины), вроде описанной ранее в этом параграфе [2]). Если

[1]) Метод, с помощью которого константа $\varkappa$ определяется динамическими процессами в течении, обусловленном движением цилиндра определенного типа, рассматривается в § 6.7; там же будет показано, что случай $\varkappa \neq 0$ часто встречается и имеет важное значение.

[2]) Термин «перегородка» имеет здесь топологический, а не механический смысл. Введение этой перегородки не оказывает никакого влияния на течение, и ее можно просто считать поверхностью, проведенной в жидкости.



Р и с. 2.8.1. Введение перегородки S в пространство между двумя цилиндрами.

обе стороны этой перегородки рассматривать как часть границы жидкости, то течение будет происходить в односвязной области, внутри которой φ — однозначная функция координат; путь, выбираемый для соединения исходной точки O с текущей точкой P (x), не должен пересекать перегородку (поскольку он не должен выходить из области, занятой жидкостью), и, следовательно, все пары путей образуют стягиваемые замкнутые кривые.

Теперь можно применить формулу Остроградского — Гаусса, так как объем V односвязен, и получить

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA + \int \varphi_-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS - \int \varphi_+\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS, \quad (2.8.6)$$

где A — действительная граница жидкости, включающая внутреннюю и внешнюю границы, соответственно A_1 (с нормалью $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$) и A_2 (с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$), там, где они имеются, а нормаль $\mathbf{n}$ к перегородке S имеет то же направление по отношению к действительным границам, что и нормаль, используемая для определения положительного значения $\varkappa$. Функции φ_+ и φ_- представляют собой значения функции φ по обе стороны от перегородки, причем φ_+ относится к той ее стороне, направление которой определяется нормалью $\mathbf{n}$. На рис. 2.8.1 приведены эти обозначения для случая двусвязной области между двумя бесконечно длинными цилиндрами. Когда точка P (x) движется в положительном направлении из одного положения на одной стороне перегородки в соседнее положение на другой ее стороне, не пересекая перегородку, изменение функции φ равно

$$\varphi_- - \varphi_+ = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \varkappa. \quad (2.8.7)$$

Следовательно,

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA + \varkappa\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS. \qquad (2.8.8)$$

Последний интеграл равен объемному потоку жидкости через перегородку.

Далее, правая часть равенства (2.8.8) равна нулю для движения, характеризуемого разностью $\varphi - \varphi^*$, если только циклические постоянные движений, определяемых по отдельности функциями φ и φ^*, равны и обеспечивают выполнение условий описанного ранее вида, накладываемых на граничной поверхности A как на функцию φ, так и на функцию φ^*.

Другой способ обращения в нуль правой части равенства (2.8.8) для движения с потенциалом $\varphi - \varphi^*$ состоит в том, чтобы установить, что движения, определяемые по отдельности функциями φ и φ^*, создают одинаковый объемный поток жидкости через перегородку. Однако такой способ установления единственности течения практически менее полезен, чем способ определения циклической постоянной.

В случаях циклического течения, в которых нормальная компонента скорости $\mathbf{v}$ заранее задана на всей границе A жидкости, можно и полезно для дальнейшего представить скорость $\mathbf{v}$ в виде двух, определяемых единственным образом частей, каждая из которых по отдельности вносит свой вклад в правую часть равенства (2.8.8). Одна часть, например $\mathbf{v}_1$, определяется однозначным потенциалом φ_1, таким, что произведение $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_1$ имеет вполне определенную величину $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ во всех точках границы A, а другая — $\mathbf{v}_2$ — определяется многозначным потенциалом φ_2, который имеет заданную циклическую постоянную $\varkappa$ и удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_2 = 0$$

во всех точках границы A. Тогда

$$\int \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\,dV = \int \nabla\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)\,dV = \int \varphi_1\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_2\,dA = 0, \qquad (2.8.9)$$

т. е. обе части $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ взаимно ортогональны в интегральном смысле, и соотношение (2.8.8) принимает вид

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1\,dV + \int \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2\,dV =$$

$$= \int \varphi_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}\,dA + \varkappa\int \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}\,dS. \qquad (2.8.10)$$

Упражнение

Покажите, что интеграл по перегородке S в соотношении (2.8.10) не зависит от ее выбора, в то время как в общем случае для соотношения (2.8.8) этого утверждать нельзя.

2.9. Трехмерные поля течения, простирающиеся в бесконечность

Асимптотические выражения для скоростей $\mathbf{u}_e$ *и* $\mathbf{u}_v$

Если жидкость простирается в бесконечность во всех направлениях и находится там в состоянии покоя, а в дальнейшем будет предполагаться, что это именно так, то скорость объемного расширения Δ и завихренность $\boldsymbol{\omega}$ обычно также обращаются в нуль на бесконечности. Интегральные выражения (2.4.5) и (2.4.11) для слагаемых $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, обусловленной заданными распределениями Δ и $\boldsymbol{\omega}$, по-прежнему будут решениями основных уравнений (2.4.2) и (2.4.7), если только соответствующие интегралы по бесконечной области жидкости сходятся. Во многих случаях, представляющих практический интерес, величины $|\Delta|$ и $|\boldsymbol{\omega}|$ быстро стремятся к нулю с увеличением расстояния от внутренней границы жидкости и можно наложить довольно сильные ограничения на порядки их величин, чтобы получить полезные результаты для асимптотических выражений скоростей $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ при больших значениях $|\mathbf{x}|$.

Рассмотрим сначала безвихревое поле скорости $\mathbf{u}_e(\mathbf{x})$, связанное с заданным распределением величины Δ и определяемое выражением (2.4.5). Если $|\Delta(\mathbf{x}')|$ достаточно быстро убывает при $r' \to \infty$, то величина интеграла в выражении (2.4.5) будет определяться главным образом центральной областью, окружающей начало координат; поскольку для этой области

$$\frac{1}{s} \approx \frac{1}{r},$$

с ошибкой порядка r^{-2}, когда r велико ($s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $r = |\mathbf{x}|$), можно приближенно считать, что

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int \Delta' \, dV(\mathbf{x}') \right\} \nabla \frac{1}{r} \tag{2.9.1}$$

при $r \to \infty$. Это можно доказать путем рассмотрения отдельных частей интеграла (2.4.5) по области $r' \leqslant \alpha r$ (интеграл I_1) и по области $r' \geqslant \alpha r$ (интеграл I_2), где $\alpha < 1$. Если $\Delta(\mathbf{x}')$ изменяется как r'^{-n}, когда r' велико, то интеграл I_2 пропорционален r^{1-n} при больших r. В подинтегральном выражении интеграла I_1 имеем $r' < r$, и, следовательно, можно разложить s^{-1} в ряд Тейлора по $\mathbf{x}'$, причем достаточно написать только первый член с r^{-1}, и учесть, что остаточный член имеет порядок r^{-2}. При подходящем ограничении, наложенном на n, а именно при $n > 3$, интегралом I_2 можно пренебречь, и тогда получается выражение (2.9.1).

Асимптотическая формула (2.9.1) определяет безвихревое поле скоростей, связанное с одиночным источником в начале координат, выделяющим объем жидкости со скоростью, равной

$\int \Delta(\mathbf{x}')\,dV(\mathbf{x}')$. Если интенсивность этого источника обращается в нуль, то второй член ряда Тейлора для функции s^{-1} нужно сохранить, причем функция s^{-1} в подинтегральном выражении I_1 заменяется с ошибкой порядка r^{-3} на

$$\frac{1}{r} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r};$$

отсюда следует, что при $r \to \infty$ и более строгом ограничении $n > 4$ имеем

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \mathbf{x}' \Delta'\, dV(\mathbf{x}') \right\} \cdot \nabla \left(\nabla \frac{1}{r} \right). \tag{2.9.2}$$

В данном случае асимптотическое выражение определяет безвихревое поле скоростей, связанное с диполем источников интенсивности $\int \mathbf{x}' \Delta' dV(\mathbf{x}')$ в начале координат (§ 2.5). Если и этот последний интеграл равен нулю, то тем же способом находится приближение более высокого порядка.

Аналогичные замечания можно сделать относительно слагаемого $\mathbf{u}_v(\mathbf{x})$, представляющего собой соленоидальное поле скоростей, связанное с заданным распределением вектора $\boldsymbol{\omega}$ и определяемое по формуле (2.4.11). Можно показать точно таким же образом, что если $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})|$ имеет порядок r^{-n} $(n > 3)$, когда r велико, то

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int \boldsymbol{\omega}'\, dV(\mathbf{x}') \right\} \times \nabla \frac{1}{r}. \tag{2.9.3}$$

Это асимптотическое выражение определяет распределение соленоидальной скорости, связанное с постоянной завихренностью внутри элемента объема в начале координат (ср. (2.4.12)), причем произведение завихренности на элемент объема равно $\int \boldsymbol{\omega}' dV(\mathbf{x}')$, или, иначе говоря, связано с элементом вихревой нити в начале координат, причем произведение (векторного) элемента длины на интенсивность вихревой нити равно $\int \boldsymbol{\omega}' dV(\mathbf{x}')$. Однако все вихревые линии являются замкнутыми кривыми, расположенными в жидкости (или в некоторой расширенной области, которая выходит за пределы внутренней границы и по которой должен браться объемный интеграл в (2.4.11) и (2.9.3), как объяснялось в § 2.4); вследствие этого интеграл в выражении (2.9.3) обращается в нуль; в этом формально можно убедиться с помощью тождества

$$\int \omega_i(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) = \int \nabla \cdot (x_i \boldsymbol{\omega})\, dV(\mathbf{x}),$$

формулы Остроградского — Гаусса и на основании предполагаемой малости $|\boldsymbol{\omega}|$ при больших r.

Чтобы найти приближение более высокого порядка для скорости $\mathbf{u}_v$, следует разложить в ряд Тейлора функцию s^{-1} и сохранить в нем на один член больше, как при получении (2.9.2). При более сильном ограничении, состоящем в том, что $|\boldsymbol{\omega}|$ имеет порядок r^{-n} $(n > 4)$, когда r велико, для $r \to \infty$ получается выражение

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{\omega}' \times \left\{ \mathbf{x}' \cdot \nabla \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right\} dV(\mathbf{x}') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \boldsymbol{\omega}' \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} dV(\mathbf{x}'). \qquad (2.9.4)$$

Это выражение можно легко обосновать, заметив, что на основании формулы Остроградского — Гаусса и предполагаемой малости величины $|\boldsymbol{\omega}|$ при больших r

$$\int (x_i \omega_j + x_j \omega_i)\, dV(\mathbf{x}) = \int \nabla \cdot (x_i x_j \boldsymbol{\omega})\, dV(\mathbf{x}) = 0.$$

В результате получается

$$\int \boldsymbol{\omega}' \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} dV(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \int \left(\boldsymbol{\omega}' \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} - \mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) dV(\mathbf{x}') =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \int \mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}'\, dV(\mathbf{x}'). \qquad (2.9.5)$$

Таким путем приходим к асимптотическому выражению скорости

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{8\pi} \nabla \left\{ \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \int \mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}'\, dV(\mathbf{x}') \right\}, \qquad (2.9.6)$$

которое, очевидно, имеет такую же форму, как и асимптотическое выражение (2.9.2). В случае отдельной замкнутой вихревой нити интенсивности $\varkappa$, линейный элемент которой есть $\delta\mathbf{l}$, имеем

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}\, dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varkappa \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \varkappa \int \mathbf{n}\, dA = \varkappa \mathbf{A}, \qquad (2.9.7)$$

где $\mathbf{n}\delta A$ — векторный элемент любой открытой поверхности, ограниченной вихревой нитью (направление нормали $\mathbf{n}$ выбирается в сторону вращения вихревой нити, характеризующегося вектором $\boldsymbol{\omega}$), а вектор $\mathbf{A}$ — полный вектор площади этой поверхности, зависящий только от формы замкнутой вихревой нити. Следовательно, асимптотическое выражение для скорости $\mathbf{u}_v$ дает распределение соленоидальной скорости, связанное с одиночной замкнутой вихревой нитью с бесконечно малыми размерами, расположенной в начале координат так, что произведение ее интенсивности на вектор площади, ограниченной этой нитью, равно $(1/2) \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} dV(\mathbf{x})$.

Итак, мы нашли, что в случае, когда полная скорость объемного расширения $\int \Delta dV(\mathbf{x})$ равна нулю, скорости $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ при

$r \to \infty$ имеют одинаковые асимптотические выражения, представляют собой величины порядка r^{-3} и изображают поле скоростей, связанное либо с диполем источников, либо с одиночной замкнутой вихревой нитью, расположенной в начале координат.

Поведение потенциала φ *на больших расстояниях*

Если полная скорость обращается в нуль на бесконечности и распределения скорости объемного расширения и завихренности таковы, что там скорости $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_o$ также обращаются в нуль, то и остающееся слагаемое скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi$ должно обращаться в нуль на бесконечности. В дальнейшем будем использовать предположение, что $\mathbf{v} \to 0$ при $r \to \infty$, чтобы определить поведение скорости $\mathbf{v}$ и функции φ при больших значениях r; полученная таким путем информация будет полезна при дальнейшем изучении соленоидального течения, которое, как известно, безвихревое во внешних частях жидкости бесконечной протяженности. Сначала будет показано, в частности, что функция φ стремится к постоянной при $r \to \infty$ вследствие того, что φ удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0$. Предположим сначала, что функция φ — однозначная функция от $\mathbf{x}$, как в случае односвязной области, занимаемой жидкостью; необходимые видоизменения для неоднозначной функции φ рассматриваются в следующем параграфе.

Поверхность внутренней границы жидкости будем обозначать как и раньше, через A_1 с внешней единичной нормалью $\mathbf{n}_1$ к элементу этой поверхности; через A_2 обозначим поверхность сферы в жидкости с центром в точке $P(\mathbf{x})$, с внешней единичной нормалью $\mathbf{n}_2$ и с достаточно большим радиусом R, заключающей в себе все внутренние границы; область вне сферы полностью занята жидкостью (рис. 2.9.1). Мы воспользуемся теоремой Грина [1]), одна из форм которой гласит, что если F и G — две скалярные функции координат, однозначные, конечные и непрерывные вместе со своими частными производными по координатам всюду внутри объема V, ограниченного поверхностями A_1 и A_2, то

$$\int (F\nabla G - G\nabla F)\cdot\mathbf{n}_2\, dA_2 - \int (F\nabla G - G\nabla F)\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1 = \int (F\nabla^2 G - G\nabla^2 F)\, dV. \tag{2.9.8}$$

В качестве F и G выберем в данном случае

$$F(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}'), \qquad G(\mathbf{x}') = s^{-1},$$

---

[1]) Это известная теорема из векторного анализа и теории потенциала. Соотношение (2.9.8) можно получить, применяя к объему V и вектору $F\nabla G - G\nabla F$ формулу Остроградского — Гаусса.

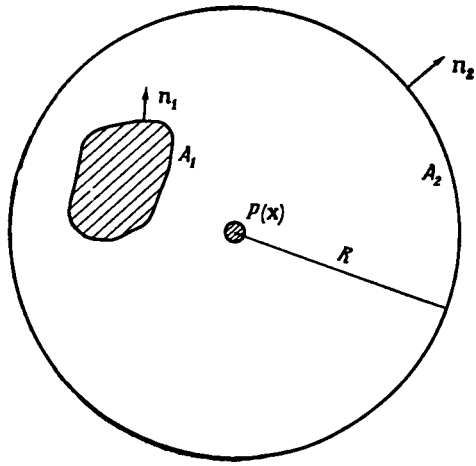


Рис. 2.9.1. Схема обозначений для жидкости, простирающейся в бесконечность и там покоящейся.

где $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ — расстояние между точкой P (x) и точкой x′, в которой расположен элемент интегрирования. Функция φ обладает всеми требуемыми свойствами, будучи однозначной, конечной и непрерывной всюду внутри объема V, однако функция s^{-1} не является конечной в точке P, поэтому точку P нужно окружить сферой малого радиуса ε, которая исключается из объема V и поверхность которой нужно отнести к внутренней границе жидкости. Это дополнительное слагаемое при интегрировании по поверхности в левой части равенства (2.9.8) при $\varepsilon \to 0$ есть

$$-\int \left(\varphi' \frac{\partial s^{-1}}{\partial s} - \frac{1}{s}\frac{\partial \varphi'}{\partial s}\right)_{s=\varepsilon} \varepsilon^2 \, d\Omega(\mathbf{x}') \to 4\pi\varphi(\mathbf{x}), \qquad (2.9.9)$$

где δΩ — элемент телесного угла, под которым виден элемент поверхности из точки P, а штрихом, как и раньше, отмечены значения функции в точке x′. Учтем далее, что обе функции, φ и s^{-1}, удовлетворяют уравнению Лапласа, поэтому правая часть равенства (2.9.8) обращается в нуль и остается

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \left(\varphi' \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\nabla\varphi'\right)\cdot \mathbf{n}_1 \, dA_1(\mathbf{x}') - \\ - \frac{1}{4\pi}\int \left(\varphi' \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\nabla\varphi'\right)\cdot \mathbf{n}_2 \, dA_2(\mathbf{x}'),$$

а поскольку $s = R$ на поверхности A_2, то

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\varphi' \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\nabla\varphi'\right)\cdot \mathbf{n}_1 \, dA_1(\mathbf{x}') + \\ + \frac{1}{4\pi R^2}\int \varphi' \, dA_2(\mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi R}\int \mathbf{n}_2 \cdot \nabla\varphi' \, dA_2(\mathbf{x}').$$

Так как $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ всюду внутри V, то

$$\int \mathbf{n}_2\cdot\nabla\varphi'\, dA_2(\mathbf{x}') = \int \mathbf{n}_1\cdot\nabla\varphi'\, dA_1(\mathbf{x}') = m, \qquad (2.9.10)$$

где m — объемный поток жидкости через внутреннюю границу A_1 (в направлении внешней ее части), обусловленный полем скорости $\mathbf{v}$. Кроме того, можно написать равенство

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int \varphi'\, dA_2(\mathbf{x}') = \bar{\varphi}(\mathbf{x}, R), \qquad (2.9.11)$$

выражающее среднее значение φ по сфере A_2 радиуса R с центром в точке $\mathbf{x}$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}) = \bar{\varphi} + \frac{m}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi}\int \left(\varphi'\nabla_{\mathbf{x}}\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\nabla\varphi'\right)\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1(\mathbf{x}'). \qquad (2.9.12)$$

Это соотношение удобно для определения поведения функции φ при больших значениях r, поскольку все члены в его правой части, за исключением первого, стремятся к нулю по мере того, как $r = |\mathbf{x}|$, а следовательно, и s возрастают (радиус R также увеличивается таким образом, что сфера A_2 с центром в точке $\mathbf{x}$ постоянно содержит внутренние границы). Однако теперь необходимо подробнее рассмотреть первое слагаемое $\bar{\varphi}$. Для этого воспользуемся теоремой, установленной Гауссом для гравитационного потенциала, который в свободном пространстве также удовлетворяет уравнению Лапласа. Результат Гаусса сводится к приведенному ниже соотношению (2.9.14), а его доказательство заключается в следующем.

Выражения (2.9.10) для объемного потока жидкости можно записать в виде

$$R^2\int \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial s}\right)_{s=R} d\Omega(\mathbf{x}') = R^2\frac{\partial}{\partial R}\int (\varphi')_{s=R}\, d\Omega(\mathbf{x}') = m, \qquad (2.9.13)$$

где $\delta\Omega$, как и раньше, — элемент телесного угла с вершиной в точке P. Следовательно, интегрирование в (2.9.13) по R дает

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}, R) = \frac{1}{4\pi}\int (\varphi')_{s=R}\, d\Omega(\mathbf{x}') = C - \frac{m}{4\pi R}, \qquad (2.9.14)$$

где C не зависит от R. Чтобы установить, зависит ли C от $\mathbf{x}$, центра сферы A_2, вычислим производную от C по любой компоненте вектора $\mathbf{x}$, например по x_1, сохраняя R постоянным,

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\int \varphi'\, dA_2(\mathbf{x}') =$$
$$= \frac{1}{4\pi R^2}\int \frac{\partial\varphi'}{\partial x_1'}\, dA_2(\mathbf{x}'). \qquad (2.9.15)$$

Последнее выражение представляет собой среднее значение компоненты скорости v_1 по сфере A_2, которая, как известно, обра-

щается в нуль для больших значений R, поскольку скорость $\mathbf{v}$ равна нулю всюду на бесконечности. Следовательно, C не зависит как от R, так и от $\mathbf{x}$.

Подставляя (2.9.14) в (2.9.12), определяем функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = C - \frac{1}{4\pi}\int \left(\varphi' \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\nabla\varphi'\right)\cdot \mathbf{n}_1\, dA_1(\mathbf{x}'), \qquad (2.9.16)$$

которая зависит только от $\mathbf{x}$ и условий на внутренней границе. При $r \to \infty$ величина s также становится большой, а подинтегральное выражение в (2.9.16) — малым всюду на конечной поверхности A_1; следовательно, получается, что

$$\varphi(\mathbf{x}) \to C \text{ при } r \to \infty.$$

Условия единственности для определения $\nabla\varphi$

Установленный факт, что φ стремится на бесконечности к постоянной, можно в дальнейшем использовать наряду с равенством (2.7.6), чтобы установить условия единственности для $\nabla\varphi$. Если в качестве внешней границы A_2 взять сферу большого радиуса R, содержащую все внутренние границы, то интеграл от произведения $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ по всему объему жидкости будет равен

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dV = \lim_{R\to\infty} \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_2\, dA_2 - \int \varphi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1.$$

Величина интеграла $\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_2\, dA_2$ конечна (и равна объемному потоку жидкости m через внутреннюю границу), так что

$$\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dV = \lim_{R\to\infty} \int (\varphi - C)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_2\, dA = -\int (\varphi - C)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1 =$$

$$= -\int (\varphi - C)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1. \qquad (2.9.17)$$

Для жидкости, простирающейся в бесконечность, это соотношение заменяет равенство (2.7.6), и очевидно, что условие, при котором два решения $\nabla\varphi$ и $\nabla\varphi^*$ обязательно совпадают, имеет вид

$$-\int (\varphi - \varphi^*)\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1 + (C - C^*)\,(m - m^*) = 0,$$

где C и C^* — постоянные значения потенциалов φ и φ^* на бесконечности, а m и m^* — объемные потоки жидкости через внутреннюю границу, соответствующие этим двум решениям. Снова мы видим, как и в § 2.7, что $\nabla\varphi$ определяется единственным образом, если значение его нормальной компоненты в каждой точке границ жидкости (в данном случае имеются в виду только внутренние границы жидкости) заданы, поскольку это условие требует выполнения в каждой точке границы A_1 равенств $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_1 = \mathbf{v}^*\cdot\mathbf{n}_1$

и $m = m^*$. Здесь опять существует другой, хотя и менее важный, путь обеспечения единственности $\nabla\varphi$, состоящий в том, чтобы задать значение φ в каждой точке границы A_1 и еще либо значение объемного потока m, либо константы C, к которой функция φ стремится на бесконечности.

Представление потенциала φ степенным рядом

Точное выражение функции φ (2.9.16) использовалось выше для того, чтобы показать стремление φ к постоянному значению на бесконечности. Кроме того, оно представляет и самостоятельный интерес, так как дает явное представление функции φ всюду в жидкости в зависимости от условий на внутренней границе. (Отметим, однако, что выражение (2.9.16) не определяет в явном виде функцию $\varphi(\mathbf{x})$ только через нормальную компоненту $\nabla\varphi$ на внутренней границе; в него входит также и распределение функции φ. На первый взгляд кажется, что это не согласуется с теоремой единственности, которая указывает, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ определяется единственным образом с точностью до аддитивной постоянной по заданному распределению скорости $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$ на внутренней границе. Объяснение состоит в том, что распределения скорости $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$ и функции φ на внутренней границе не являются независимыми, и в принципе одно из них можно исключить.)

Воспользуемся выражением (2.9.16) для представления функции $\varphi(\mathbf{x})$ степенным рядом по r^{-1}, в котором первым членом возьмем константу C. Сначала разложим функцию s^{-1} в ряд Тейлора по $\mathbf{x}'$:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - x_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots, \qquad (2.9.18)$$

который, очевидно, сходится при $r' < r$ в случаях, когда $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' = \mp rr'$, а следовательно, и для значений угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$. Ряд (2.9.18) можно подставить в выражение (2.9.16) и выполнить почленное интегрирование при условии, что при интегрировании r превосходит наибольшее значение r'; в результате получим

$$\varphi(\mathbf{x}) = C + \frac{c}{r} + c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots, \qquad (2.9.19)$$

где

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi\, dA = -\frac{m}{4\pi}, \\ c_i &= \frac{1}{4\pi}\int (x_i \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi - n_i\varphi)\, dA, \qquad (2.9.20) \\ c_{ij} &= \frac{1}{4\pi}\int \left(-\frac{1}{2} x_i x_j \mathbf{n}\ \nabla\varphi + x_i x_j \varphi\right) dA, \ldots . \end{aligned}$$

Написанные интегралы берутся по всей внутренней границе жидкости, элемент которой обозначается далее через $n\delta A$ без индекса 1.

Этот интересный ряд показывает, что в области вне сферы с центром в начале координат, содержащей внутреннюю границу, потенциал φ можно записать в виде суммы слагаемых с целыми степенями r^{-1}, каждое из которых удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ (так как $\varphi = r^{-1}$ удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, ему удовлетворяют все производные от r^{-1} по координатам) и каждое из которых представляет собой потенциал, обусловленный точечной особенностью, расположенной в начале координат и составленной из точечных источников, как было описано ранее в § 2.5. Система независимых решений

$$\frac{1}{r},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right),\ \ldots \tag{2.9.21}$$

уравнения $\nabla^2\varphi = 0$ имеет фундаментальное значение в теории гармонических функций, и они известны как *объемные сферические функции* (гармоники) степени -1, -2, -3, ... [1]). Соответствующие коэффициенты при r^{-1}, r^{-2}, ... в общем виде

$$S_n = r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial x_i\,\partial x_j \ldots}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.9.22}$$

зависят только от направления вектора x или, что равносильно, от положения точки на сфере с центром в начале координат и известны как *поверхностные сферические функции* (гармоники) целого порядка. Из уравнения Лапласа в сферических координатах (см. приложение 2) непосредственно следует, что если произведение $r^{-n-1}S_n$ есть решение, то решением будет также и функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = r^n S_n;$$

это значит, что каждой объемной сферической функции степени $(-n-1)$ соответствует такая же функция степени n (n — целое положительное число). Объемные сферические функции отрицательной степени необходимы и достаточны для представления потенциала φ в виде степенного ряда вне сферы в области, простирающейся в бесконечность, где жидкость находится в состоянии покоя, в то время как функций положительного порядка достаточно в области внутри сферы. В области, ограниченной сферами как изнутри, так и извне, необходимы оба типа функций.

Следует отметить, что второй член в правой части ряда (2.9.19) (который становится первым в соответствующем разложении для $\mathbf{v} = \nabla\varphi$) выражает поле скоростей, связанное с точечным источ-

---

[1]) См., например, Джеффрис Г., Свирле Б., Методы математической физики, «Мир», М., 1970 [а также: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, ГИТТЛ, М.— Л., 1950.— *Ред.*].

ником интенсивности $\int \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi dA = m$ в начале координат. Другими словами, влияние результирующего потока скорости $\mathbf{v}$ через внутреннюю границу на больших расстояниях от нее преобладает, и скорость $\mathbf{v}$ оказывается такой же самой, как если бы поток возникал в одной-единственной точке (точное положение этой точки произвольно, поскольку рассматривается главный член разложения для скорости $\mathbf{v}$). Как уже отмечалось, в наиболее распространенных случаях жидкость ограничена изнутри твердой границей и для безвихревого течения несжимаемой жидкости (для которого скорость $\mathbf{v}$ есть действительная скорость жидкости) вне такой границы результирующий поток m обязательно равен нулю; следовательно, на больших расстояниях от границы скорость $\mathbf{v}$ имеет порядок r^{-3}. Такое же заключение справедливо и в более общих случаях, когда ∇ и $\boldsymbol{\omega}$ отличны от нуля, а скорость $\mathbf{v}$ есть одно из трех слагаемых действительной скорости жидкости, так как можно показать, что результирующий объемный поток через твердую внутреннюю границу, соответствующий слагаемым $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$, равен нулю. Этот поток равен

$$\int (\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_v)\cdot\mathbf{n}\, dA = \int \nabla\cdot(\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_v)\, dV,$$

где интеграл по объему берется по области внутри замкнутой твердой границы; слагаемые $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_v$ не имеют прямого физического смысла в этой области, однако они определяются в точках $\mathbf{x}$ этой области выражениями (2.4.5) и (2.4.11) и являются в ней соленоидальными векторами. Таким образом, величина m, определяемая выражением (2.9.10), представляет собой действительный результирующий поток жидкости через внутреннюю границу, и он должен быть равным нулю, когда внутренняя граница твердая и непроницаемая.

Безвихревое соленоидальное течение, вызываемое поступательным движением твердого тела

Выражение скорости $\mathbf{v}$ принимает специальную форму, когда условие, которое должно удовлетворяться на внутренней границе, имеет вид

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$$

во всех точках данной замкнутой поверхности; здесь $\mathbf{U}$ — заданная векторная постоянная; скорость $\mathbf{v}$ — действительная скорость в безвихревом соленоидальном течении, создаваемом поступательным движением твердого тела со скоростью $\mathbf{U}$ через жидкость, которая покоится на бесконечности [1]). В данном случае

[1]) Напомним еще раз, что условия, при которых действительное течение, вызванное движущимся твердым телом, будет соленоидальное и безвихревое, все еще подлежат определению на основе динамических уравнений.

определение скорости $\mathbf{v}$ сводится к нахождению решения уравнения $\nabla^2\varphi = 0$, которое удовлетворяет условиям

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \text{const при } r \to \infty,$$

и

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U} \text{ на поверхности тела.}$$

Из теоремы единственности следует, что существует только одно решение уравнения для $\nabla\varphi$, которое может удовлетворять этим условиям. К функции φ можно прибавить произвольную постоянную, не изменяющую скорости $\mathbf{v}$, уравнения для φ или условия на внутренней границе; следовательно, постоянную, к которой функция φ стремится на бесконечности, можно в данном случае выбрать произвольно, и для удобства будем считать ее равной нулю. Дифференциальное уравнение и условия, которые должны удовлетворяться на границах, линейны и однородны относительно φ и $\mathbf{U}$, и, поскольку решение должно быть справедливо при любом заданном $\mathbf{U}$, оно должно иметь вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{2.9.23}$$

где $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ — неизвестная векторная функция, *не зависящая* ни от величины, ни от направления скорости $\mathbf{U}$ [1]). Поскольку функция $\boldsymbol{\Phi}$ определяется внутренним граничным условием, она зависит только от координат точки в жидкости *относительно тела*, т. е. только от разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0$ определяет мгновенное положение некоторой точки тела. Кроме того, выражение для φ в виде (2.9.23) справедливо (по тем же самым причинам) и в том случае, когда твердое тело движется через жидкость, которая не простирается в бесконечность, а ограничена извне неподвижной твердой границей, хотя в этом случае $\boldsymbol{\Phi}$ зависит не только от координат точки относительно твердого тела.

Равенство (2.9.23) полезно в ряде случаев и из него можно даже непосредственно определить функцию φ. Например, из него видно, что в случае твердой сферы с центром, находящимся в данный момент времени в начале координат, никакой вектор или направление не являются предпочтительными при описании формы границы и вектор $\mathbf{x}$ оказывается единственным, от которого может зависеть функция $\boldsymbol{\Phi}$. Отсюда следует, что единственным частным решением из системы независимых решений (2.9.21), которое в комбинации с $\mathbf{U}$ может иметь вид (2.9.23), является второе

[1]) Некоторые читатели могут считать очевидным, что функция φ должна быть линейной и однородной функцией трех компонент скорости $\mathbf{U}$, но не быть знакомыми с подобного рода предложением для векторов. Уравнение и граничные условия, определяющие функцию φ, были представлены в форме, не зависящей от системы координат, и выражение для φ через компоненты скорости $\mathbf{U}$ также не должно зависеть от системы координат; это значит, что три компоненты скорости $\mathbf{U}$ могут встречаться только в такой комбинации, которую дает вектор $\mathbf{U}$, входящий в выражение (2.9.23).

и функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{U}\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\alpha\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^3}, \tag{2.9.24}$$

где α — постоянная, представляет собой искомое решение. В сферических координатах при $\theta = 0$ в направлении $\mathbf{U}$ соответствующая скорость жидкости имеет компоненты

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\alpha\frac{U\cos\theta}{r^2}\right) = \alpha\frac{2U\cos\theta}{r^3},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \alpha\frac{U\sin\theta}{r^3}. \tag{2.9.25}$$

Внутреннее граничное условие удовлетворяется для сферы радиуса a, если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \text{ при } r = a,$$

т. е. если

$$\alpha = \frac{1}{2}a^3;$$

следовательно,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}a^3\mathbf{U}\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}a^3\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^3} = -\frac{1}{2}a^3U\frac{\cos\theta}{r^2}. \tag{2.9.26}$$

Эти формулы справедливы для скорости в точке в системе координат, неподвижной относительно жидкости на бесконечности и имеющей начало в мгновенном положении центра сферы. При другом начале координат, когда центр сферы находится в точке $\mathbf{x}_0$, распределение скорости, очевидно, останется тем же, если только координата $\mathbf{x}$ отсчитывается от $\mathbf{x}_0$, т. е. если

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}a^3\mathbf{U}\cdot\nabla\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} = -\frac{1}{2}a^3\frac{\mathbf{U}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3}. \tag{2.9.27}$$

Заметим также для дальнейшего использования, что в системе координат, движущейся вместе со сферой и с началом в ее центре, потенциал скорости течения

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right). \tag{2.9.28}$$

2.10. Двумерные поля течения, простирающиеся в бесконечность

Если жидкость не простирается в бесконечность в плоскости движения, то формулы предыдущих параграфов (и в частности § 2.8, когда жидкость ограничена изнутри и, следовательно, занимает многосвязную область) легко приспособить к случаю двумерного движения. В направлении нормали к плоскости дви-

жения жидкость обязательно простирается на бесконечное расстояние (при математическом описании задачи), но поведение скорости «на бесконечности» в данном случае известно, и никаких трудностей не возникает; там, где поверхностный интеграл приходится брать по границе жидкости, иногда целесообразно предположить, что поле течения ограничено двумя плоскостями, параллельными плоскости движения, на которых нормальная компонента скорости жидкости равна нулю.

Однако двумерное течение в жидкости, ограниченной изнутри и простирающейся в бесконечность в любом направлении в плоскости движения, все же обладает некоторыми специальными свойствами, которые требуют отдельного рассмотрения. Предположим, что на больших расстояниях от начала координат в плоскости движения жидкость покоится, а начало координат находится вблизи внутренних границ жидкости. Доказательства формул § 2.9 и, в частности, формул, определяющих поведение функции φ на больших расстояниях от внутренней границы, нуждаются в изменениях. Поскольку они основаны на предположении, что скорость жидкости мала всюду на *сфере* большого радиуса с центром, расположенным вблизи внутренних границ, необходимые изменения не представляют особых трудностей, и поэтому их можно только наметить в общих чертах.

Рассуждения, подобные тем, которые привели к выражениям (2.9.1) и (2.9.2), снова приводят к заключению, что если модуль $|\Delta|$ на больших расстояниях от внутренней границы достаточно мал, то поле скоростей, связанное с заданным распределением скорости объемного расширения Δ, асимптотически ведет себя так, как будто все объемное расширение происходит в начале координат; если случайно окажется, что $\int \Delta' dV(\mathbf{x}') = 0$ (теперь элемент объема представляет собой цилиндр единичной высоты в направлении нормали к плоскости движения и с площадью поперечного сечения δV), то распределение скоростей на достаточном удалении от внутренней границы совпадает с распределением скоростей от диполя источников в начале координат. Результаты, соответствующие формулам (2.9.3) и (2.9.6), можно получить для скорости $\mathbf{u}_v$, связанной с заданным распределением завихренности в двух измерениях.

Важная задача определения поведения функции $\varphi(\mathbf{x})$ при больших значениях $r = |\mathbf{x}|$, если известно, что $\nabla\varphi \to 0$ при $r \to \infty$, может быть исследована тем же самым общим методом. Формула (2.9.8), полученная по теореме Грина, справедлива и в двух измерениях при тех же условиях, налагаемых на функции F и G, только δA_1 и δA_2 в данном случае означают элементы длины, а δV — элемент площади в плоскости движения (точно так, как если бы они относились к слою жидкости единичной толщины

в направлении нормали к плоскости движения); внешняя граница A_2 теперь представляет собой круг с центром в точке $P(\mathbf{x})$ достаточно большого радиуса R, охватывающий все внутренние границы. Выберем функции

$$F(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}'), \qquad G = \ln s,$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению Лапласа в двух измерениях; здесь, как и раньше, $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, а φ — *однозначный* потенциал скорости. (Часто встречаются течения с многозначными потенциалами, поскольку рассматриваемая область многосвязна, но мы исключим такой случай, чтобы можно было воспользоваться теоремой Грина.) Точка $P(\mathbf{x})$ окружается малым кругом, площадь которого нужно исключить из области интегрирования по V, и вместо (2.9.9) находим добавок $-2\pi\varphi(\mathbf{x})$ к интегралу по A_1. Выражение объемного потока (2.9.10) остается без изменений, а вместо (2.9.12) находим

$$\varphi(\mathbf{x}) = \bar{\varphi} - \frac{m}{2\pi}\ln R + \frac{1}{2\pi}\int (\varphi'\nabla_{\mathbf{x}}\ln s + \ln s\,\nabla\varphi')\cdot\mathbf{n}_1\,dA_1(\mathbf{x}'),$$

в котором

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x},\ R) = \frac{1}{2\pi R}\int \varphi'\,dA_2(\mathbf{x}'). \tag{2.10.1}$$

Вместо (2.9.14) получаем путем интегрирования выражения для потока, соответствующего выражению (2.9.13),

$$\bar{\varphi} = C + \frac{m}{2\pi}\ln R, \tag{2.10.2}$$

где C — постоянная интегрирования, не зависящая от R; тем же способом, что и раньше, убеждаемся, что, когда $\nabla\varphi$ обращается в нуль на бесконечности, постоянная C также не зависит от $\mathbf{x}$, т. е. координат центра окружности A_2. Затем вместо (2.9.16) получается

$$\varphi(\mathbf{x}) = C + \frac{1}{2\pi}\int (\varphi'\nabla_{\mathbf{x}}\ln s + \ln s\nabla\varphi')\cdot\mathbf{n}_1\,dA_1(\mathbf{x}'). \tag{2.10.3}$$

Теперь можно установить асимптотическое выражение для функции φ. Действительно, из выражения (2.10.3) при $r\to\infty$ следует

$$\varphi(\mathbf{x}) - C - \frac{m}{2\pi}\ln r = \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\mathbf{s}}{s^2}\varphi' + \ln\frac{s}{r}\nabla\varphi'\right)\cdot\mathbf{n}_1\,dA_1(\mathbf{x}') \to 0.$$

Тот факт, что φ не стремится к постоянной на бесконечности, в данном случае связан с тем, что слагаемое типа «источника» в разложении функции φ в ряд, соответствующий выражениям (2.9.20), которое представляет собой член с наименьшей скоростью убывания при $r\to\infty$, в двумерном случае вообще не убывает, а возрастает как $\ln r$.

Несмотря на это различие в поведении φ при $r \to \infty$, условия единственности для $\nabla\varphi$ имеют такой же вид, как и в трехмерном поле течения. Величину $\varphi - (m/2\pi) \ln r$ можно рассматривать как (однозначный) потенциал скорости поля течения, а он, как известно, стремится к постоянному значению на бесконечности в плоскости движения; следовательно, формула Остроградского — Гаусса, примененная тем же способом, который приводит к (2.9.17), для объема жидкости, ограниченного двумя плоскостями, параллельными плоскости движения, показывает, что градиент разности $\varphi - (m/2\pi) \ln r$ определяется однозначно всюду, если задано значение ее нормальной производной в каждой точке внутренней границы. Однако если значение нормальной производной от φ в каждой точке внутренней границы известно, то известны и величина m (результирующий объемный поток жидкости через внутреннюю границу) и нормальная производная от $\varphi - (m/2\pi) \ln r$ в каждой точке внутренней границы. Следовательно, задание нормальной производной от φ в каждой точке внутренней границы всюду однозначно определяет величину $\nabla\varphi$. (Аналогично, если заданы m и φ в каждой точке внутренней границы, то может существовать по крайней мере одно решение $\nabla\varphi$ уравнения относительно φ.)

Сделанные выше замечания применимы к однозначным потенциалам скорости, и, следовательно, они применимы к разности двух многозначных потенциалов скорости, про которые известно, что они имеют одни и те же циклические постоянные. Поэтому, по аналогии с § 2.8, можно утверждать вообще, что двумерное безвихревое соленоидальное течение в области, ограниченной изнутри и простирающейся в бесконечность (где жидкость покоится), определяется однозначно, если заданы циклическая постоянная (или постоянные, если порядок связности больше двух) и нормальная компонента от $\nabla\varphi$ в каждой точке внутренней границы. В случае течения в двусвязной области вне одиночного цилиндра с циклической постоянной $\varkappa$ можно продвинуться еще дальше; простое решение уравнения Лапласа, имеющее такой же циклический характер (и не дающее никакого вклада в величину m), имеет вид $(\varkappa\theta/2\pi)$, где θ — полярный угол в плоскости движения относительно начала координат в пределах внутренней границы, так что в этом случае

$$\varphi(\mathbf{x}) - \frac{\varkappa}{2\pi}\theta$$

представляет собой однозначную функцию, к которой применимы полученные выше выводы и, в частности, точное выражение (2.10.3).

Теперь можно подробнее рассмотреть изменения функции φ на больших расстояниях от внутренней границы путем разложе-

ния φ в степенной ряд по r^{-1}. Если $(r'/r) < 1$, то $\ln s$ можно представить в виде ряда Тейлора по $\mathbf{x}'$, подобного ряду (2.9.18), и подстановка этого ряда вместо $\ln s$ в выражение (2.10.3) для φ в случае однозначной функции φ дает

$$\varphi(\mathbf{x}) = C + c \ln r + c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln r) + c_{ij} \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots, \qquad (2.10.4)$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi \, dA = \frac{m}{2\pi},$$

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \int (-x_i \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi + n_i \varphi) \, dA,$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{1}{2} x_i x_j \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi - x_i n_j \varphi \right) dA, \ \ldots .$$

Интегралы берутся по внутренней границе жидкости, элемент которой в дальнейшем обозначается через $\mathbf{n}\delta A$. Фундаментальные решения уравнения Лапласа в двух измерениях, порождаемые членами этого ряда, а именно

$$\ln r, \quad \frac{\partial (\ln r)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \ldots \qquad (2.10.5)$$

называются *круговыми гармониками* целой степени, и они аналогичны по своей роли сферическим гармоникам из § 2.9. Величина

$$S_n = r^n \frac{\partial^n (\ln r)}{\partial x_i \partial x_j \ldots} \quad (n = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots)$$

зависит только от направления вектора $\mathbf{x}$, а из формы уравнения Лапласа в полярных координатах (см. приложение 2) следует, что если $r^{-n} S_n$ — решение, то $r^n S_n$ также будет решением, дающим соответствующую систему фундаментальных решений положительных степеней по r.

В случае многозначной функции φ, соответствующей течению в двусвязной области вне цилиндра с циклической постоянной $\varkappa$, ряд (2.10.4) заменяется рядом

$$\varphi(\mathbf{x}) = C + \frac{\varkappa}{2\pi}\theta + \frac{m}{2\pi} \ln r + c_i \frac{\partial (\ln r)}{\partial x_i} + c_{ij} \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots, \qquad (2.10.6)$$

в котором коэффициенты m, c_i, c_{ij}, ... равны соответствующим интегралам от функции $\varphi - (\varkappa/2\pi)\,\theta$ и от ее нормальной производной на внутренней границе. Первый переменный член в правой части разложения (2.10.6) представляет собой потенциал, обусловленный точечным вихрем (т. е. прямолинейной вихревой нитью в трехмерном пространстве, см. (2.8.5)) интенсивности $\varkappa$ в начале координат, и учитывает многозначность функции φ; второй член представляет собой потенциал, обусловленный точечным источником интенсивности m в начале координат, и учитывает, как уже отмечалось, результирующий поток через внутреннюю гра-

ницу (как и в трехмерном пространстве он равен нулю, когда внутренняя граница твердая); третий член определяет потенциал от диполя источников (векторной) интенсивности $-2\pi c_i$ в начале координат и т. д.

Многие из этих результатов можно естественно выразить через комплексный потенциал, введенный в § 2.7. Аналитическая функция от $z = x + iy$, действительная часть которой представляет сумму потенциалов точечного вихря и точечного источника в разложении (2.10.6), имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}(m - i\varkappa)\ln z.$$

Функция тока ψ, соответствующая этому комплексному потенциалу, многозначна вследствие существования ненулевого потока через внутреннюю границу, как можно было ожидать из определения функции ψ в § 2.2. Многозначность функции ψ аналогична многозначности функции φ с заменой m на циклическую постоянную $\varkappa$, и в этом состоит другое проявление сопряженности функций φ и ψ в двумерном безвихревом соленоидальном течении. Комплексный потенциал, соответствующий другим членам в разложении (2.10.6), можно обнаружить с помощью соотношения

$$\frac{\partial^n \ln r}{\partial x^m\, \partial y^{n-m}} = \mathscr{R}\left(\frac{\partial^n \ln z}{\partial x^m\, \partial y^{n-m}}\right) = \mathscr{R}\left(i^{n-m}\frac{d^n \ln z}{dz^n}\right),$$

которое показывает, между прочим, что имеется только две независимые круговые гармоники степени $-n$, а именно действительная и мнимая части от $d^n \ln z/dz^n$, т. е. $r^{-n}\cos n\theta$ и $r^{-n}\sin n\theta$. Таким образом, комплексный потенциал, соответствующий всему разложению (2.10.6), можно записать в виде ряда

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}(m - i\varkappa)\ln z + C + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{d^n \ln z}{dz^n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(m - i\varkappa)\ln z + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n} \qquad (2.10.7)$$

с комплексными константами D_n и A_n. Действительная и мнимая части от A_n связаны с действительными коэффициентами C, c_i, c_{ij}, ... разложения (2.10.6), например

$$A_0 = C, \quad A_1 = c_1 + ic_2, \quad A_2 = c_{22} - c_{11} - ic_{12},$$

где индексами 1 и 2 обозначены компоненты в направлениях осей x и y соответственно. Ряд в выражении (2.10.7) называется *рядом Лорана* для функции, аналитической и однозначной в области вне круга с центром в начале координат плоскости z и стремящейся к постоянной на бесконечности.

Безвихревое соленоидальное течение, вызываемое поступательным движением твердого тела

Так же как и в § 2.9, можно получить специальные выражения функции φ, когда нормальная производная от φ на внутренней границе удовлетворяет простому условию

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U},$$

где $\mathbf{U}$ — скорость движения твердого тела, ограничивающего жидкость изнутри. Однозначная функция φ, стремящаяся к нулю при $r \to \infty$, также удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям, которые линейны и однородны относительно φ и $\mathbf{U}$ и определяют ее однозначно, поэтому функция φ должна иметь вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}). \tag{2.10.8}$$

Неизвестная функция $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{U}$ и зависит только от координат точки в жидкости относительно тела.

В частном случае тела в форме круга радиуса a с центром, расположенным в данный момент времени в начале координат, никакой вектор или направление не являются предпочтительными для выбранной формы границы. Следовательно, единственным среди системы решений (2.10.5), которое вместе с $\mathbf{U}$ может иметь вид (2.10.8), является второе. Поэтому в рассматриваемом случае

$$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{U}\cdot\nabla(\ln r) = \alpha\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^2} = \alpha\frac{U\cos\theta}{r}, \tag{2.10.9}$$

где α — постоянная, а r и θ — полярные координаты, $\theta = 0$ в направлении скорости $\mathbf{U}$. Соответствующая скорость жидкости имеет компоненты

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\alpha\frac{U\cos\theta}{r^2}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\alpha\frac{U\sin\theta}{r^2} \tag{2.10.10}$$

и удовлетворяет как внешним, так и внутренним граничным условиям, если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \quad \text{при} \quad r = a,$$

т. е. если

$$\alpha = -a^2. \tag{2.10.11}$$

Это единственно возможное решение, когда функция φ однозначна. Заметим для дальнейшего использования, что если оси координат движутся вместе с цилиндром, а их начало расположено в его центре, то в этих осях

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) = -U\cos\theta\left(r+\frac{a^2}{r}\right). \tag{2.10.12}$$

Если же в потоке вокруг тела, движущегося со скоростью $\mathbf{U}$, имеется циркуляция $\varkappa$, то потенциал скорости можно записать

в виде суммы слагаемого φ_1, представляющего собой течение, создаваемое тем же самым телом, движущимся со скоростью $\mathbf{U}$ и нулевой циркуляцией вокруг него, и слагаемого φ_2, описывающего течение с циркуляцией $\varkappa$ вокруг того же самого тела в состоянии покоя; потенциал φ_1 имеет выражение (2.10.8), а φ_2 во всяком случае не зависит от $\mathbf{U}$ и должен линейно изменяться по $\varkappa$, поэтому можно принять

$$\varphi_2 = \varkappa \left\{ \frac{\theta}{2\pi} + \Psi(\mathbf{x}) \right\}, \tag{2.10.13}$$

где Ψ — однозначная функция от $\mathbf{x}$, не зависящая от $\varkappa$. Функция Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа, имеет нулевой градиент на бесконечности и на поверхности тела удовлетворяет условию

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{\theta}{2\pi} + \Psi \right) = 0, \tag{2.10.14}$$

поэтому она определяется единственным образом с точностью до аддитивной постоянной. В частном случае тела в форме круга с центром в начале координат (в данный момент времени) единственно возможный вид функции Ψ есть просто $\Psi = \text{const}$ (например, $\Psi = 0$), так что в данном случае полный потенциал скорости

$$\varphi = \frac{\varkappa}{2\pi} \theta - a^2 \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}}{r^2}. \tag{2.10.15}$$

Линии тока и другие свойства этого и связанных с ним полей течения описаны в гл. 6.

Упражнения к главе 2

1. Покажите, что скорость объемного расширения жидкого линейного элемента в точке P жидкости изменяется с изменением направления, как $(PQ)^{-2}$, где отрезок PQ параллелен линейному элементу, а точка Q расположена на эллипсоиде тензора скорости деформации с центром в точке P.

2. Покажите, что векторный потенциал

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}'}{s} dV(\mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}'}{s} dA(\mathbf{x}')$$

соответствует завихренности $\boldsymbol{\omega}$ всюду в объеме V, ограниченном поверхностью A; обозначения совпадают с обозначениями из § 2.4.

3. Используя теорему Грина, покажите, что любое ациклическое безвихревое соленоидальное движение с потенциалом скорости φ в данной области можно рассматривать как движение, вызванное 1) распределением источников на границе области с интенсивностью $\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x})$ на единицу площади в точке $\mathbf{x}$ границы совместно с диполями источников интенсивности $-n\varphi(\mathbf{x})$ на единицу площади, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к границе, направленная внутрь жидкости; *или* 2) распределением источников на границе с интенсивностью $\mathbf{n} \cdot \nabla(\varphi + \varphi^*)$, где φ^* — потенциал такого ациклического

безвихревого соленоидального движения в остальном бесконечном пространстве, для которого $\varphi^* = \varphi$ на общей границе и $\nabla\varphi^* = 0$ (или $\nabla\varphi = 0$, если подходит) на бесконечности; *или* 3) распределением диполей источников интенсивности $-\mathbf{n}(\varphi - \varphi^*)$, где φ^* — потенциал такого ациклического движения в остальной части пространства, для которого $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi^* = \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$ на границе и $\nabla\varphi^* = 0$ (или $\nabla\varphi = 0$) на бесконечности.

4. Покажите, что безвихревое соленоидальное движение, обусловленное вихревой нитью интенсивности $\varkappa$, совпадает с движением, вызванным распределением диполей источников по открытой поверхности, граничная кривая которой является вихревой нитью, с интенсивностью на единицу площади $\varkappa\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности. Вихревая пелена эквивалентна поэтому распределению диполей источников по поверхности, совпадающей с пеленой, и по нормали к ней, если замкнутые вихревые линии стягиваемы на пелене, и обратно. В связи с этим покажите, что любое безвихревое соленоидальное движение, безразлично ациклическое или циклическое, можно рассматривать как движение, вызванное некоторой вихревой пеленой, совпадающей с границей области, в которой происходит движение.

3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

3.1. Интегралы по объему движущейся жидкости

Динамические уравнения, описывающие движение жидкости, по существу связаны с реакцией определенной части или массы жидкости на приложенные к ней внешние воздействия. Поэтому полезно разработать способы физического описания движения частицы жидкости, которая может деформироваться, а также изменять свое положение в пространстве.

В вводной кинематической части мы рассмотрим изменения размера и ориентации *элементов* жидкого объема, жидкой поверхности, жидкой линии при движении. Будем предполагать, что линейные размеры элементов столь малы, что в любой момент времени они совершают чисто деформационное движение и квазитвердое вращение (а также и поступательное движение), как показывает равенство (2.3.13). Однако при рассмотрении изменения объема, вектора площади или вектора длины соответствующих элементов жидкости оказывается, что удобнее не разделять явно изменения в элементе на чистую деформацию и квазитвердое вращение.

Рассмотрим сначала элемент жидкости, объем которого равен $\delta\tau$. Скорость изменения этого объема, как отмечалось в § 2.2, равна

$$\frac{d\delta\tau}{dt} = \int\limits_{\delta\tau} \nabla\cdot\mathbf{u}\, d\tau = \nabla\cdot\mathbf{u}\delta\tau + o(\delta\tau); \tag{3.1.1}$$

здесь скорость относительного объемного расширения $\nabla\cdot\mathbf{u}$ вычисляется в мгновенном положении элемента, а $o(\delta\tau)$ означает величину меньшего порядка, чем $\delta\tau$. Удобный способ получения точного соотношения из равенства (3.1.1) состоит в том, чтобы рассмотреть отношение объема $\delta\tau$ к его значению $\delta\tau(t_0)$ в некоторый начальный момент времени t_0, а затем сделать этот объем $\delta\tau\,(t_0)$ бесконечно малым. Таким образом,

$$\frac{d\tau^*}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{u}\tau^*, \tag{3.1.2}$$

где

$$\tau^* = \lim_{\delta\tau\,(t_0)\to 0} \frac{\delta\tau\,(t)}{\delta\tau\,(t_0)}.$$

Здесь τ^* — безразмерный мгновенный удельный объем элемента жидкости, очевидно равный $\rho(t_0)/\rho(t)$, где ρ — плотность той же самой частицы жидкости.

Скорость изменения вектора $\delta\mathbf{l}$, изображающего элемент жидкой линии, который приближенно остается прямолинейным, равна просто разности скоростей двух концов элемента, т. е.

$$\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = \delta\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{u} + o(|\delta\mathbf{l}|). \tag{3.1.3}$$

Это соотношение также можно сделать точным путем введения величины $|\delta\mathbf{l}(t_0)|$ и последующего перехода к пределу при $|\delta\mathbf{l}(t_0)| \to 0$.

Скорость относительного изменения объема элемента жидкости зависит от величины объема, но не зависит от формы его поверхности. Мы можем выбрать элемент жидкости в виде цилиндра, два торца которого представляют собой одинаковые элементы жидкой поверхности с вектором площади $\delta\mathbf{S}$, а образующие — элементы жидкой линии $\delta\mathbf{l}$; такой элемент жидкого объема остается цилиндрическим при чистой деформации или квазитвердом вращении, хотя векторы $\delta\mathbf{l}$, $\delta\mathbf{S}$ и углы между ними изменяются, и

$$\delta\tau = \delta\mathbf{l}\cdot\delta\mathbf{S} + o(\delta\tau) \tag{3.1.4}$$

в любой момент времени. Подставляя выражение (3.1.4) в (3.1.1) с учетом (3.1.3), находим

$$\delta l_i\left(\frac{d\delta S_i}{dt} + \delta S_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta S_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = o(\delta\tau)$$

(векторные обозначения здесь менее удобны), и поскольку это соотношение должно быть справедливым при любом выборе вектора $\delta\mathbf{l}$, имеем

$$\frac{d\delta S_i}{dt} = \delta S_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \delta S_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + o(|\delta\mathbf{S}|). \tag{3.1.5}$$

И снова точное равенство можно получить путем деления на $|\delta\mathbf{S}(t_0)|$ и последующего перехода к пределу при $|\delta\mathbf{S}(t_0)| \to 0$. Другой способ написания этого выражения для скорости изменения площади элемента жидкой поверхности, который следует из уравнения сохранения массы (2.2.3), дает равенство

$$\frac{d(\rho\delta S_i)}{dt} = -\rho\delta S_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + o(|\delta\mathbf{S}|), \tag{3.1.6}$$

где плотность ρ берется в данном положении движущегося элемента.

Своеобразная общность в поведении векторов $\delta\mathbf{l}$ и $\rho\delta\mathbf{S}$ выясняется при вычислении скоростей изменения их величин δl и $\rho\delta S$. С помощью (3.1.3) и (3.1.6) можно найти, что

$$\frac{1}{\delta l}\frac{d(\delta l)}{dt} \to m_i m_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{при } \delta l \to 0 \tag{3.1.7}$$

и

$$\frac{1}{\rho\delta S}\frac{d(\rho\delta S)}{dt} \to -n_i n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{при } \delta S \to 0, \qquad (3.1.8)$$

где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы, параллельные векторам $\delta\mathbf{l}$ и $\delta\mathbf{S}$ соответственно. Скалярная величина $m_i m_j \partial u_i/\partial x_j$ представляет собой скорость относительного растяжения жидкости в направлении вектора $\delta\mathbf{l}$, а величина $-n_i n_j \partial u_i/\partial x_j$ — скорость относительного сжатия жидкости в направлении вектора $\delta\mathbf{S}$.

В частном случае несжимаемой жидкости ρ и $\delta\tau$ — инварианты элемента жидкости и множитель ρ в соотношениях (3.1.6) и (3.1.8) сокращается.

Скорости изменения субстанциональных интегралов

Криволинейный интеграл от какой-нибудь величины по жидкой линии, которая движется вместе с жидкостью и состоит всегда из одних и тех же частиц, можно назвать субстанциональным интегралом. Интегралы по поверхности и по объему также могут быть субстанциональными в том же самом смысле. Такие интегралы часто встречаются в механике жидкости, иногда из-за необходимости представить полное количество какой-нибудь величины, связанной с данной массой жидкости, а также из-за необходимости определения скорости изменения этого количества во времени. Ниже обосновывается простой непосредственный метод вычисления скоростей изменения субстанциональных интегралов, который будет использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим сначала криволинейный интеграл

$$\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l}$$

по жидкой линии, соединяющей две точки P и Q в жидкости, где θ — некоторая переменная в жидкости, обычно зависящая от радиуса-вектора $\mathbf{x}$ и времени t. Если жидкая кривая определена, то интеграл зависит только от времени t; его производная по времени будет связана как с изменениями величины θ в точках пути интегрирования, так и с изменениями формы и ориентации этого пути. Чтобы определить влияние изменения формы и ориентации пути интегрирования, предположим, что криволинейный интеграл определяется в некоторый момент времени обычным способом как предел при $\varepsilon \to 0$ суммы слагаемых от большого числа бесконечно малых отрезков длиной ε. Если эти отрезки, элементы линии интегрирования, рассматриваются далее как элементы жидкости, то они будут изменяться в процессе движения вместе с жидкостью, однако тем не менее их все же можно продолжать использовать

для построения суммы, предел которой при $\varepsilon \to 0$ определяет интеграл в любой последующий момент времени. Длины элементов линии изменяются со временем, но все они остаются пропорциональными ε и бесконечно малыми, если никакой из них не испытывает бесконечного расширения в течение рассматриваемого интервала времени. В связи со сказанным напишем

$$\frac{d}{dt}\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_n \theta_n \delta\mathbf{l}_n\right\},$$

где величина θ_n вычисляется для элемента $\delta\mathbf{l}_n$ жидкой линии, и, таким образом, ее производную по времени следует представлять как полную, $D\theta_n/Dt$. Тогда из равенства (3.1.3) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_n \left\{\frac{D\theta_n}{Dt}\delta\mathbf{l}_n + \theta_n \delta\mathbf{l}_n\cdot\nabla\mathbf{u}\right\} =$$

$$= \int_P^Q \frac{D\theta}{Dt}\, d\mathbf{l} + \int_P^Q \theta\, d\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{u}. \qquad (3.1.9)$$

Представление интеграла в виде предела суммы слагаемых от элементов жидкой линии, соединяющей точки Q и P, является только промежуточным этапом в рассуждении, и для наших целей можно считать, что два члена в выражении (3.1.9) получены непосредственно дифференцированием подинтегрального выражения θ (производимым в движущейся точке) и элемента интегрирования $\delta\mathbf{l}$.

Другой путь, приводящий к выражению (3.1.9), который не так тесно связан с физическими представлениями, основан на параметрическом задании жидкой линии интегрирования. Пусть $\mathbf{y}(s, t)$ — мгновенное положение точки на кривой, задаваемое параметром s, который, например, может быть равен расстоянию от точки P вдоль кривой интегрирования в некоторый начальный момент времени. Тогда можно написать

$$\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l} = \int_P^Q \theta(\mathbf{y}, t)\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial s}\, ds.$$

Дифференцирование по t выполняется обычным способом:

$$\frac{d}{dt}\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l} = \int_P^Q \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t}\cdot\nabla\theta\right)\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial s}\, ds + \int_P^Q \theta\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial t\,\partial s}\, ds;$$

поскольку же производная $\partial\mathbf{y}/\partial t$ равна скорости жидкости $\mathbf{u}$ в точке $\mathbf{y}$, то

$$\frac{d}{dt}\int_P^Q \theta\, d\mathbf{l} = \int_P^Q \frac{D\theta}{Dt}\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial s}\, ds + \int_P^Q \theta\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\, ds.$$

Эти два интеграла совпадают с интегралами в правой части равенства (3.1.9), записанными в параметрическом виде.

Та же методика дифференцирования субстанционального элемента интегрирования с использованием соотношений (3.1.5) и (3.1.1) может быть применена при вычислении скоростей изменения субстанциональных интегралов по жидкой поверхности и по жидкому объему, а именно

$$\frac{d}{dt}\int \theta\, dS_i = \int \frac{D\theta}{Dt}\, dS_i + \int \theta\, \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, dS_i - \int \theta\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dS_j \qquad (3.1.10)$$

и

$$\frac{d}{dt}\int \theta\, d\tau = \int \frac{D\theta}{Dt}\, d\tau + \int \theta \nabla \cdot \mathbf{u}\, d\tau. \qquad (3.1.11)$$

Другая полезная форма этого соотношения получается после замены скалярной величины θ на $\theta\rho$ и упрощения его правой части с помощью уравнения сохранения массы (2.2.3):

$$\frac{d}{dt}\int \theta\rho\, d\tau = \int \frac{D\theta}{Dt}\, \rho\, d\tau. \qquad (3.1.12)$$

Конечно, соотношение (3.1.12) можно рассматривать как прямое следствие постоянства массы $\rho\delta\tau$ элемента жидкости. Эти результаты опять же можно получить другим и теперь более длинным путем, заменяя переменные интегрирования параметрическими координатами, задающими положение точки в области интегрирования в начальный момент времени.

Законы сохранения для движущейся жидкости

Многие из законов механики сплошной среды формулируются как утверждения, что полное количество некоторой величины, связанной с массой жидкости, либо инвариантно, либо изменяется определенным образом под влиянием известных внешних воздействий, таких, как, например, молекулярный перенос через граничную поверхность. Если результирующий эффект этих внешних воздействий можно выразить в виде интеграла по объему жидкости, то дифференциальное уравнение, описывающее распределение рассматриваемой величины, можно вывести с помощью полученных выше выражений для скоростей изменения субстанциональных интегралов.

Полная масса жидкости в заданном жидком объеме представляет собой наиболее очевидную неизменяемую величину. Интеграл $\int \rho\, d\tau$ является инвариантом, и обращение в нуль правой части равенства (3.1.11) при $\theta = \rho$ для любого выбора объема τ сразу приводит к уравнению сохранения массы (2.2.3).

Рассмотрим теперь произвольную, относящуюся ко всему объему жидкости, величину (например, кинетическую энергию или

количество движения), которая в расчете на единицу массы жидкости является локальной интенсивностью и которую обозначим $\theta(\mathbf{x}, t)$. Для жидкого объема τ рассматриваемая величина определяется интегралом $\int \theta\rho\, d\tau$; будем считать, что она изменяется под влиянием внешних воздействий со скоростью, определяемой интегралом $\int Q\, d\tau$, где Q — функция от $\mathbf{x}$ и t; через Q обозначена эффективная плотность распределения интенсивности соответствующих источников, и она может зависеть некоторым образом от (мгновенного) движения жидкости. Тогда «закон сохранения» этой величины с соответствующей интенсивностью θ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int \theta\rho\, d\tau = \int Q\, d\tau,$$

или, с учетом соотношения (3.1.12),

$$\int \frac{D\theta}{Dt}\rho\, d\tau = \int Q\, d\tau. \tag{3.1.13}$$

Если это равенство справедливо при любом выборе объема τ, то интенсивность θ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\rho\frac{D\theta}{Dt} = Q. \tag{3.1.14}$$

Можно также вывести дифференциальное уравнение (3.1.14), рассматривая изменения соответствующей полной величины для жидкости, ограниченной в данный момент неподвижной в пространстве поверхностью A. Между этими рассуждениями имеются различия, которые хотя и незначительны, но заслуживают упоминания. В данном случае полная величина определяется интегралом $\int \theta\rho\, dV$, где V— объем, ограниченный поверхностью A, и эта полная величина изменяется как вследствие внешних воздействий, так и в результате прохождения жидкости через поверхность A. Поток этой величины через поверхность A в направлении внешней нормали при движении жидкости равен $\int \theta\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA$, поэтому искомый закон сохранения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int \theta\rho\, dV = -\int \theta\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA + \int Q\, dV,$$

или

$$\int \frac{\partial(\theta\rho)}{\partial t}\, dV = -\int \nabla\cdot(\theta\rho\mathbf{u})\, dV + \int Q\, dV. \tag{3.1.15}$$

Из условия, чтобы соотношение (3.1.15) выполнялось при любом выборе объема V, получается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial(\theta\rho)}{\partial t} + \nabla\cdot(\theta\rho\mathbf{u}) = Q. \tag{3.1.16}$$

Видно, что это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением (3.1.14), если учесть уравнение сохранения массы (2.2.2), которое, конечно, уже применялось при выводе уравнения (3.1.14) с использованием (3.1.12).

Точное выражение функции Q в (3.1.14) зависит от природы рассматриваемой величины с интенсивностью θ, и здесь нет необходимости его рассматривать. Однако если полная величина, связанная с данной массой жидкости, изменяется лишь вследствие молекулярного переноса через граничную поверхность, можно сразу заметить изменение вида дифференциального уравнения для θ при движении жидкости. В § 1.6 было установлено, что для покоящейся жидкости скорость молекулярного переноса физической величины интенсивности θ пропорциональна локальному градиенту от θ; соответствующее значение Q определяется равенством (1.6.4). Рассуждение, приведенное в § 1.6, в одинаковой мере применимо и к движущейся жидкости [1]), поэтому выражение для величины Q в том случае, когда она отражает эффект молекулярного переноса, является тем же самым, что и для жидкости в состоянии покоя. Следовательно, влияние движения жидкости на форму дифференциального уравнения (3.1.14) определяется членом в его левой части; в случае покоящейся жидкости он имеет вид $\rho\,\partial\theta/\partial t$, а для движущейся жидкости $\rho D\theta/Dt$.

Различные специальные дифференциальные уравнения, выведенные в § 1.6 в случае неподвижной среды для различных физических величин, на которые оказывает влияние молекулярный перенос, теперь можно применить в случае движущейся жидкости. Например, дифференциальное уравнение (1.6.7) относительно числовой доли отмеченных молекул C принимает вид

$$\frac{DC}{Dt} = \varkappa_D \nabla^2 C. \tag{3.1.17}$$

Если рассматривается теплопроводность, то инвариантной величиной при отсутствии молекулярного переноса является энтропия; при условии, что в движущейся жидкости теплопроводность представляет собой единственный процесс с изменением энтропии [2]), уравнение (1.6.10), очевидно, должно быть заменено в этом случае на уравнение

$$T\frac{DS}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k_H \nabla T) \tag{3.1.18}$$

Специальные формы уравнения теплопроводности (1.6.11) и (1.6.12) изменяются аналогичным способом.

---

[1]) Существование относительного движения в жидкости указывает на отсутствие ее равновесия, но на то же самое указывает и неравномерное распределение θ, и единственное ограничение, требуемое в этом рассуждении, состоит в том, что любого вида отклонения от равновесия должны быть малыми.

[2]) Другой возможной причиной изменения энтропии является внутреннее трение, вызываемое молекулярным переносом количества движения; однако в обычных условиях оно дает пренебрежимо малый добавок к скорости изменения энтропии.

Дифференциальные уравнения для векторных величин, удовлетворяющих законам сохранения, также можно вывести, пользуясь соотношениями (3.1.9) и (3.1.10); один пример такого вывода приведен в § 5.2 и 5.3.

3.2. Уравнение движения

«Уравнение движения» для жидкости в наиболее фундаментальном виде представляет собой равенство скорости изменения количества движения выбранной части жидкости и суммы всех сил, действующих на эту часть жидкости. Для жидкого объема τ, ограниченного жидкой поверхностью S, количество движения определяется интегралом $\int \mathbf{u}\rho\, d\tau$, и скорость его изменения, согласно соотношению (3.1.12), равна

$$\int \frac{D\mathbf{u}}{Dt}\rho\, d\tau,$$

т. е. просто сумме произведений масс на ускорения всех элементов жидкого объема τ.

Как уже объяснялось в § 1.3, на часть жидкости действуют в общем случае как объемные, так и поверхностные силы. Обозначим результирующий вектор объемных сил на единицу массы жидкости через $\mathbf{F}$, так что полная объемная сила, действующая на выбранную часть жидкости, равна

$$\int \mathbf{F}\rho\, d\tau;$$

i-ю компоненту поверхностной или контактной силы, приложенной к элементу поверхности с площадью δS и нормалью $\mathbf{n}$, можно представить как $\sigma_{ij}n_j\delta S$, где σ_{ij} — тензор напряжений, введенный в § 1.3; следовательно, полная поверхностная сила, приложенная к выбранной части жидкости со стороны окружающей ее среды, определяется интегралом

$$\int \sigma_{ij}n_j\, dS = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d\tau.$$

Таким образом, уравнение количества движения для выбранной части жидкости выражается в виде

$$\int \frac{Du_i}{Dt}\rho\, d\tau = \int F_i\rho\, d\tau + \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d\tau, \tag{3.2.1}$$

где все три интеграла берутся по жидкому объему τ.

Уравнение (3.2.1) справедливо при любом выборе жидкого объема τ; если подинтегральные выражения являются непрерывными функциями x, то это возможно только тогда, когда равенство

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{3.2.2}$$

выполняется во всех точках жидкости. Полученное дифференциальное уравнение, выражающее ускорение жидкости через локальную объемную силу и тензор напряжений, обычно называется «уравнением движения». Оно принадлежит классу уравнений сохранения, представляемых уравнением (3.1.14), в котором объемные и поверхностные силы приводят к росту количества движения на единицу объема со скоростью, определяемой правой частью уравнения (3.2.2). Поверхностные силы оказывают влияние на ускорение жидкости только в том случае, когда тензор напряжений изменяется в жидкости от точки к точке или, более точно, когда величина σ_{ij} имеет ненулевую дивергенцию по второму индексу, определяющему направление элемента поверхности; если $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$, то влияние поверхностных сил на элемент жидкости сводится к его деформации без изменения количества движения.

Уравнение (3.2.2) нельзя использовать для определения поля скорости жидкости до тех пор, пока ничего неизвестно о силе F_i и тензоре напряжений σ_{ij}. Объемная сила, действующая на жидкость, во многих случаях возникает под влиянием гравитационного поля Земли, для которого $\mathbf{F} = \mathbf{g}$; в других случаях выражения для $\mathbf{F}$ обычно очевидны из заданных условий. Тензор напряжений вызывает больше затруднений, поскольку он выражает действие внутренних сил в жидкости и сам подвержен влиянию движения жидкости, о чем будет говориться в следующем параграфе.

Применение уравнения количества движения в интегральной форме

Хотя в большинстве задач механики жидкости требуется использовать уравнения движения в дифференциальной форме (3.2.2) или в некоторой ее разновидности, существует несколько важных случаев, когда это уравнение в интегральной форме для количества движения в определенной области жидкости сразу позволяет получить нужную информацию. Если использование интегральной формы для уравнения количества движения позволяет достичь цели, а обычно это делается легко и быстро, то его следует предпочесть дифференциальному уравнению движения. На практике более удобно рассматривать количество движения жидкости, содержащейся внутри неподвижной в пространстве поверхности A, чем количество движения массы жидкости, поэтому получим уравнение количества движения в интегральной форме для жидкого объема, которое так же отличается от уравнения (3.2.1), как (3.1.15) отличается от (3.1.13), а именно,

$$\int \frac{\partial (u_i\rho)}{\partial t}\, dV = -\int \rho u_i u_j n_j\, dA + \int F_i \rho\, dV + \int \sigma_{ij} n_j\, dA, \quad (3.2.3)$$

где оба интеграла берутся по объему V, ограниченному поверхностью A.

Обычные условия, при которых это уравнение количества движения полезно, состоят в том, чтобы все члены в нем можно было написать в виде интегралов по граничной поверхности A, поскольку тогда подробности движения внутри области, ограниченной поверхностью A, не имеют значения. Вклад массовых сил можно представить в виде поверхностного интеграла, когда $\rho\mathbf{F}$ можно записать как градиент скалярной величины; это возможно, если плотность ρ однородна и массовая сила на единицу массы потенциальна; в этом случае

$$\rho\mathbf{F} = -\nabla(\rho\Psi),$$

где функция Ψ — потенциальная энергия единицы массы. Остающийся интеграл по объему в левой части уравнения (3.2.3), который обычно мешает применению интегральной формы уравнения, обращается в нуль в важном частном случае установившегося движения. В этом специальном случае уравнение (3.2.3) можно записать в виде

$$\int \rho u_i u_j n_j \, dA = \int (-\rho\Psi n_i + \sigma_{ij} n_j) \, dA, \tag{3.2.4}$$

представляющем собой запись в аналитической форме того факта, что конвективный поток количества движения из области, ограниченной поверхностью A, равен сумме результирующей поверхностных сил, приложенных к границе области со стороны окружающей ее среды, и результирующей сил на границе, эквивалентных массовой силе.

Уравнение (3.2.4) для установившегося движения часто называется *теоремой количества движения* (или *уравнением импульсов*), а граничная поверхность A, которая может быть выбрана произвольно, называется *контрольной поверхностью*. Примеры использования теоремы количества движения будут приведены в последующих главах, и они проиллюстрируют тот факт, что, хотя основной смысл этой теоремы достаточно очевиден, подходящий выбор контрольной поверхности может привести к удивительно сильным результатам, которые другим путем было бы трудно получить. Поля течения частного вида, к которым эта теорема применяется в § 5.15, существенным образом зависят от сил вязкости; в § 6.3 рассматриваются близкие к безвихревым поля течения несжимаемой жидкости, в которой силы вязкости пренебрежимо малы.

Уравнения движения в подвижных осях

Если внешняя граница жидкости движется, то может быть удобным выбрать систему координат, по отношению к которой

эта граница будет находиться в состоянии покоя. Тогда ускорение элемента жидкости в подвижной системе координат может отличаться от абсолютного ускорения в ньютоновой (инерциальной) системе отсчета и нужно соответствующим образом видоизменить уравнение движения. Наиболее часто встречаются системы координат, совершающие поступательное или равномерное вращательное движения, однако не составляет особого труда получить выражение для ускорения элемента в системе координат, совершающей произвольное движение. Такое выражение содержится в любом учебнике по механике, но для полноты изложения мы приведем его вывод.

Предположим, что в данный момент времени подвижная система координат вращается с угловой скоростью Ω вокруг точки O, которая в свою очередь движется с ускорением $\mathbf{f}_0$ в ньютоновой системе координат. Следовательно, абсолютное ускорение элемента равно сумме

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1,$$

где $\mathbf{f}_1$ — ускорение этого элемента в движении относительно точки O. Связь между ускорением $\mathbf{f}_1$ и относительным ускорением элемента во вращающейся системе координат определяется следующим образом.

Если $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — тройка ортогональных единичных векторов, фиксированных в подвижной системе координат, то любой вектор $\mathbf{P}$ можно записать в виде суммы его компонент

$$\mathbf{P} = P_1\mathbf{i} + P_2\mathbf{j} + P_3\mathbf{k}.$$

Изменение вектора $\mathbf{P}$ с течением времени t происходит как в результате изменения его проекций P_1, P_2, P_3 в подвижной системе координат, так и в результате изменения единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вследствие вращения системы координат вокруг точки O; тогда скорость изменения вектора $\mathbf{P}$ для наблюдателя, поступательно движущегося вместе с точкой O, равна

$$\sum_{\mathbf{i}} \left(\frac{dP_i}{dt}\mathbf{i} + P_i \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right) = \sum_{\mathbf{i}} \left(\frac{dP_i}{dt}\mathbf{i} + P_i\Omega \times \mathbf{i} \right) =$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_r + \Omega \times \mathbf{P}, \qquad (3.2.5)$$

где производная $(d\mathbf{P}/dt)_r$ обозначает относительную скорость изменения вектора $\mathbf{P}$ для наблюдателя во вращающейся системе координат. Это соотношение можно применить сначала к радиусу-вектору $\mathbf{y}$ элемента жидкости, проведенному из точки O, а затем к вектору скорости $\mathbf{v}_1$ (элемента жидкости относительно системы координат, поступательно движущейся вместе с точкой O); в ре-

зультате получим

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}, \tag{3.2.6}$$

$$\mathbf{f}_1 = \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 =$$

$$= \left(\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}\right)_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r \times \mathbf{y} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}). \tag{3.2.7}$$

Производная $(d^2\mathbf{y}/dt^2)_r = \mathbf{f}$ есть относительное ускорение элемента в системе отсчета, совершающей поступательное и вращательное движения, а $(d\mathbf{y}/dt)_r = \mathbf{v}$ — относительная скорость элемента в этой же системе координат; скорость изменения вектора $\boldsymbol{\Omega}$, конечно, одна и та же как в абсолютной, так и во вращающейся системах координат. Таким образом, абсолютное ускорение элемента равно

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_0 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{y} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}). \tag{3.2.8}$$

Это выражение можно приравнять к локальной силе, действующей на единицу массы жидкости, и получить уравнение движения в подвижной системе координат.

Используя прежнее обозначение скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ эйлерова представления поля течения в подвижной системе координат, имеем

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt};$$

относительные радиус-вектор элемента $\mathbf{y}$ и его скорость $\mathbf{v}$ в выражении (3.2.8) можно заменить на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. При этом уравнение движения жидкости в подвижной системе координат совпадает по форме с уравнением движения в абсолютной системе, если предположить, что в дополнение к реальным массовой и поверхностной силам на единицу массы элемента жидкости действуют силы инерции

$$-\mathbf{f}_0 - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \tag{3.2.9}$$

Здесь $-\mathbf{f}_0$ — сила инерции поступательного движения системы, $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ — поворотная или кориолисова сила, которая перпендикулярна векторам $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, а $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$ — центробежная сила. Остающееся слагаемое $-(d\boldsymbol{\Omega}/dt) \times \mathbf{x}$ не имеет общепринятого названия (иногда оно называется вращательной силой инерции).

Случай осей координат, которые равномерно вращаются относительно абсолютной системы координат и для которых $\mathbf{f}_0 = 0$, представляет особый интерес и будет рассмотрен в последующих параграфах. В этом случае массовая сила (3.2.9) имеет вид

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \tag{3.2.10}$$

3.3. Выражение для тензора напряжений

Механическое определение давления в движущейся жидкости

В § 1.3 было показано, что в покоящейся жидкости действуют только нормальные напряжения, причем они не зависят от направления нормали к элементу поверхности, на который они действуют, и тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \tag{3.3.1}$$

где p — статическое давление в жидкости, которое может зависеть от координат. Нет оснований ожидать, что это справедливо для движущейся жидкости, и наблюдения показывают, что это действительно не так: в движущейся жидкости касательные напряжения в общем случае отличны от нуля, а нормальная компонента напряжения, действующего на элемент поверхности, зависит от направления нормали к элементу. Простое представление о давлении, действующем одинаково во всех направлениях, неприемлемо в большинстве случаев движущейся жидкости.

Тем не менее полезно иметь подходящую скалярную величину, характеризующую движущуюся жидкость, которая аналогична статическому давлению в том смысле, что является мерой локальной интенсивности «сжатия» жидкости. Такая величина определяется в любой ортогональной системе координат как средняя трех нормальных напряжений (со знаком минус). Из тензорной алгебры известно, что величина $(1/3)\sigma_{ii}$ инвариантна относительно вращения осей координат, и этой величине можно дать физическую интерпретацию, не связанную ни с какой специальной системой координат. Среднее значение нормальной компоненты напряжения на элементе поверхности в точке $\mathbf{x}$ по всем направлениям нормали $\mathbf{n}$ к элементу равно

$$\frac{1}{4\pi}\sigma_{ij}\int n_i n_j\, d\Omega(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{ii},$$

где $\delta\Omega(\mathbf{n})$ — элемент телесного угла вокруг нормали $\mathbf{n}$; можно сказать, что величина $(1/3)\sigma_{ii}$ представляет собой среднее значение нормальной компоненты напряжения по поверхности малой сферы с центром в точке $\mathbf{x}$. Таким образом, величина $-(1/3)\,\sigma_{ii}$, которая сводится к статическому давлению, когда жидкость покоится, имеет механический смысл и позволяет обобщить элементарное понятие «давления» на состояние, в котором нормальная компонента напряжения зависит от направления нормали к элементу поверхности. В силу сказанного определим *давление в точке движущейся жидкости* как среднее нормальное напряже-

ние, взятое с обратным знаком; для него удобно сохранить обозначение

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}. \tag{3.3.2}$$

Следует отметить, что это чисто механическое определение давления, и на основании такого определения пока ничего нельзя сказать о связи между этой механической величиной и термодинамическим понятием давления. Точная связь между ними не проста, поскольку термодинамические соотношения, такие, как уравнение состояния жидкости, относятся к равновесным условиям, в то время как элементы жидкости в относительном движении не находятся в строгом термодинамическом равновесии. Величина, которую мы назвали давлением в движущейся жидкости, является ее реальным параметром и доступна прямому наблюдению, в то время как любая величина, рассчитанная на основании равновесных соотношений, представляет собой в лучшем случае приближение к реальному параметру движущейся жидкости. К этому вопросу мы вернемся в § 3.4 при обсуждении применимости равновесных термодинамических соотношений.

Теперь удобно представить тензор напряжений σ_{ij} в виде двух частей: изотропной, $-p\delta_{ij}$, имеющей такую же форму, как и тензор напряжений в покоящейся жидкости (хотя величина p для движущейся жидкости не обязательно будет такой же), и неизотропной части, d_{ij}, в которую входят касательные напряжения и некоторые диагональные члены, в сумме равные нулю,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}. \tag{3.3.3}$$

Неизотропная часть d_{ij} может быть названа *девиатором напряжений*, и его существование связано исключительно с движением жидкости.

Связь между девиатором напряжений и скоростью деформации для ньютоновой жидкости

Поскольку напряжение в любой точке жидкости отражает взаимодействие соседних частей жидкости вблизи этой точки, естественно рассмотреть связь между напряжением и локальными параметрами жидкости. Для покоящейся жидкости это простой вопрос, поскольку напряжение полностью определяется одной скалярной величиной p, статическим давлением в жидкости, которое в свою очередь можно найти из равновесного уравнения состояния, когда известны значения двух локальных параметров состояния (например, плотности и температуры); если же известно распределение массовой силы на единицу объема жидкости, то не обязательно рассматривать локальные параметры более чем в одной точке, так как давление определяется всюду из уравнения

механического равновесия (1.4.2). Если жидкость находится в относительном движении, то связь между напряжением и локальными параметрами жидкости оказывается более сложной по двум причинам: во-первых, тензор напряжений кроме изотропной части содержит еще неизотропную часть и, во-вторых, скалярная величина p, определяемая его изотропной частью, не является одним из параметров состояния, используемых в равновесной термодинамике. Первое из этих двух отклонений от состояния равновесия связано с переносом количества движения или внутренним трением, и оно, несомненно, наиболее важно для большинства течений, как будет показано позднее.

Рассуждение, используемое при нахождении связи девиатора напряжений d_{ij} и локальных параметров жидкости, аналогично рассуждению, приведенному в § 1.6, и отличается от него только лишь аналитическими выкладками вследствие векторного характера переносимой величины (а именно количества движения жидкости). Читателю рекомендуется еще раз посмотреть § 1.6 и вспомнить, что внутреннее трение в движущейся жидкости представляет собой один из нескольких видов переноса, возникающих при отклонении среды от состояния равновесия; в частности, нужно еще раз прочитать обсуждение в конце § 1.6 молекулярного переноса количества движения в случае простого сдвига. Кроме того, к рассматриваемому вопросу относится также часть § 1.7 и 1.8, касающаяся коэффициентов переноса, таких, как коэффициент вязкости, и параметров газов и жидкостей, хотя в этих параграфах, как и в § 1.6, принят феноменологический подход и ищутся соотношения, вид которых не зависит от природы молекулярного механизма внутреннего трения.

Предполагается, что часть потока количества движения через элемент жидкой поверхности, связанного с взаимодействием сред посредством трения в относительном движении по обе стороны от этого элемента (напряжения трения представляются девиатором напряжения), согласно общей гипотезе из § 1.6, должна зависеть только от мгновенного распределения скорости жидкости в окрестности элемента, а точнее от величины отклонения этого распределения от однородного. Локальный градиент скорости, типичная компонента которого есть $\partial u_i/\partial x_j$, представляет собой, следовательно, параметр поля течения, наиболее тесно связанный с девиатором напряжения, а поскольку производная $\partial u_i/\partial x_j$ обычно постоянна на всех расстояниях, больших по сравнению с характерными для механизма молекулярного переноса количества движения, то мы примем, что девиатор напряжений d_{ij} зависит только от *одного* этого параметра. Более того, d_{ij} обращается в нуль в покоящейся жидкости и, следовательно, обращается в нуль вместе с $\partial u_i/\partial x_j$. У нас нет способа вывести зависимость d_{ij} от $\partial u_i/\partial x_j$ для жидкостей в общем случае, поэтому мы вернемся

к гипотезе, введенной в § 1.6 и состоящей в том, что тензор d_{ij} (аналогичный вектору потока из § 1.6) представляет собой в первом приближении линейную функцию различных компонент градиента скорости для достаточно малых их величин. Математически эта гипотеза записывается в виде

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \tag{3.3.4}$$

где коэффициент A_{ijkl} — тензор четвертого порядка — зависит от локального состояния жидкости, но не зависит непосредственно от распределения скоростей и обязательно симметричен по i и j, как и d_{ij}. Формула (3.3.4) есть тензорный аналог линейного соотношения (1.6.1) для скалярной переносимой величины. На этой стадии удобно писать производную $\partial u_k/\partial x_l$, как в § 2.3, в виде суммы ее симметричной e_{kl} (тензор скоростей деформации) и антисимметричной $-(1/2)\varepsilon_{klm}\omega_m$ частей ($\boldsymbol{\omega}$ — вектор завихренности), поэтому формула (3.3.4) становится такой:

$$d_{ij} = A_{ijkl}e_{kl} - \frac{1}{2} A_{ijkl}\varepsilon_{klm}\omega_m. \tag{3.3.5}$$

Тензор A_{ijkl} принимает простой вид, если молекулярная структура жидкости статистически изотропна, т. е. если девиатор напряжений, возникающих в элементе жидкости под действием заданного градиента скорости, не зависит от ориентации элемента. Все газы обладают изотропной структурой, как и простые жидкости, хотя в суспензиях и растворах, содержащих очень длинные линейные молекулы, могут появляться некоторые предпочтительные направления вследствие выравнивания ориентации этих молекул в зависимости от предыстории движения. Рассмотрим жидкости с изотропной структурой, для которых коэффициент A_{ijkl} — изотропный тензор, т. е. такой, что для него нет предпочтительного направления в пространстве.

В руководствах по тензорному анализу [1]) показано, что основным изотропным тензором является дельта-тензор Кронекера и что все изотропные ортогональные тензоры четного порядка можно записать в виде суммы произведений дельта-тензоров. Поэтому

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu'\delta_{il}\delta_{jk} + \mu''\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{3.3.6}$$

где μ, μ' и μ'' — скалярные коэффициенты, а поскольку тензор A_{ijkl} симметричен по i и j, должно быть

$$\mu' = \mu.$$

Кроме того, теперь видно, что тензор A_{ijkl} симметричен и по индексам k и l, и в результате этого член, зависящий от вектора $\boldsymbol{\omega}$,

[1]) См. Jeffreys H., Cartesian Tensors, Cambridge University Press, 1931 [а также Кочин Н. Е., Векторное исчисление, М., 1951.— *Ред.*].

выпадает из равенства (3.3.5), и тогда

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu'' \delta_{ij} \Delta, \tag{3.3.7}$$

где Δ — скорость объемного расширения, $\Delta = e_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, как и в главе 2.

Это выражение для тензора d_{ij} в случае изотропной жидкости можно вывести из формулы (3.3.5) другим способом, не используя явно тождество (3.3.6). Рассмотрим сначала жидкость, совершающую чистое вращение. Из формулы (3.3.5) следует, что изменение направления вектора $\boldsymbol{\omega}$ на противоположное приводит к изменению знака всех компонент девиатора напряжений, что невозможно в изотропной жидкости, так как эта операция равносильна сохранению фиксированного направления вектора $\boldsymbol{\omega}$ и выбору другой ориентации осей (замене направлений x_l на противоположные); следовательно, тензор A_{ijkl} должен иметь такую форму, чтобы член с $\boldsymbol{\omega}$ в равенстве (3.3.5) обращался тождественно в нуль [1]). Далее, для чисто деформационного движения можно утверждать, что поскольку свойства жидкости одинаковы в любом направлении, то главные оси тензора d_{ij} должны определяться тензором e_{ij} и, следовательно, совпадать с главными осями последнего; формула же (3.3.7) является единственно возможным линейным соотношением между тензорами d_{ij} и e_{ij}, удовлетворяющим этому условию.

Наконец вспомним, что по определению тензор d_{ij} не дает добавка к среднему нормальному напряжению, поэтому равенство

$$d_{ii} = (2\mu + 3\mu'')\,\Delta = 0$$

должно выполняться для всех значений Δ; отсюда следует, что

$$2\mu + 3\mu'' = 0. \tag{3.3.8}$$

Выбирая μ в качестве единственной независимой скалярной постоянной для девиатора напряжений, получаем выражение

$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta \right), \tag{3.3.9}$$

где величина внутри скобок есть просто неизотропная часть тензора скоростей деформации. Это выражение для d_{ij} было выведено Сен-Венаном (1843) и Стоксом (1845) по существу изложенным выше способом, после того как оно было получено Навье (1822) и Пуассоном (1829), исходя из специальных предположений относительно молекулярного механизма внутреннего трения. Для изотропных упругих тел существует аналогичное линейное соотношение между напряжениями и деформациями.

[1]) В большинстве изложений механики жидкости принимается без доказательства, что девиатор напряжений не может возникать при чистом вращении, независимо от строения жидкости, просто исходя из соображения, что тогда жидкость не деформируется; однако такое соображение не имеет силы строгого доказательства.

Следует отметить, что при сферически симметричном деформационном движении, для которого $e_{ij} = (1/3)\,\Delta\delta_{ij}$, девиатор напряжений равен нулю. Это простое следствие сферической симметрии движения и нашего определения тензора d_{ij} как отклонения полного тензора напряжений от изотропного. Возникает вопрос: имеются ли какие-нибудь неравновесные эффекты при изотропном расширении? Ответ состоит в том, что такие эффекты возможны, хотя они только в редких случаях имеют какое-либо значение, и что они учитываются в нашем анализе величиной p, определяемой как среднее нормальное напряжение во всех случаях. Влияние на среднее нормальное напряжение отклонения от равновесия при изотропном расширении рассмотрено в следующем параграфе.

Значение параметра μ, который зависит от локального состояния жидкости, можно оценить по формулам, получающимся из равенства (3.3.9) в случае простого движения сдвига. Если $\partial u_1/\partial x_2$ — единственная отличная от нуля производная скорости, то все компоненты тензора d_{ij} равны нулю, за исключением касательного напряжения

$$d_{12} = d_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \tag{3.3.10}$$

Таким образом, μ есть коэффициент пропорциональности между скоростью сдвига и касательной компонентой силы на единицу площади, когда плоские слои жидкости скользят относительно друг друга; он уже был введен в формуле (1.6.15) и назван *коэффициентом вязкости* жидкости. Тот факт, что μ — единственная скалярная постоянная, необходимая в приведенном выше общем выражении для d_{ij}, связан с полученным в § 2.3 результатом, что относительное движение общего вида вблизи любой точки можно представить как наложение двух простых движений сдвига, каждое из которых порождает касательное напряжение, определяемое коэффициентом μ и соответствующим градиентом скорости, а также квазитвердого вращения и изотропного расширения; ни одно из этих последних слагаемых не оказывает какого-либо влияния (в изотропной жидкости) на неизотропную часть тензора напряжения; итак, выражение (3.3.9) можно, конечно, рассматривать как единственное возможное линейное тензорное соотношение, содержащее один скалярный параметр, между тензором e_{ij} и симметричным тензором d_{ij}, сумма диагональных элементов которого равна нулю.

На основании многочисленных опытов известно, что сила, действующая между слоями жидкости при их относительном скольжении, всегда есть сила трения, противодействующая относительному движению, чему соответствует $\mu > 0$, как и ожидалось, исходя из того, что молекулярный перенос количества движения, происходящий в результате случайного движения или располо-

жения молекул жидкости, стремится сгладить любые пространственные неоднородности в распределении средней скорости независимо от механизма переноса. Кроме того, формула (3.3.9) показывает, что положительное значение μ соответствует также таким знакам главных напряжений, возникающих от d_{ij}, чтобы противодействовать главным скоростям деформаций (ср. обсуждение в § 1.7 реакции газа при сжатии его поршнем); так, например, малая жидкая сфера, по мере ее деформации в эллипсоид, действует на окружающую жидкость силами трения, нормальная компонента которых направлена вовне (внутрь) эллипсоида в тех местах его поверхности, где она смещается внутрь (вовне) относительно сферы одинакового с эллипсоидом объема.

Эксперименты с различными жидкостями и полями течений показывают, что приведенное выше линейное соотношение между скоростью деформации и неизотропной частью тензора напряжений может оставаться справедливым в исключительно широком диапазоне значений скорости деформации. Наблюдения потока жидкости в круглой трубе малого радиуса при наличии перепада давления на ее концах (см. § 4.2) особенно подходят для этой цели. Хотя исключение всех членов, кроме линейного по градиентам скоростей в правой части исходного выражения (3.3.4), было проведено исключительно в виде гипотезы, которая, казалось бы, может годиться только для малых градиентов скорости, из наблюдений следует, что эти «малые» градиенты скорости включают и те значения, которые обычно встречаются на практике. Для воды и для большинства газов линейный закон, по-видимому, выполняется весьма точно при всех условиях, за исключением, возможно, самых крайних, таких, как в ударной волне. Жидкости, для которых линейное соотношение (3.3.9) выполняется точно, обычно называются *ньютоновыми жидкостями* (в ознаменование факта, что простая формула (3.3.10) для движения сдвига была предложена Ньютоном). Для жидкостей со сложной молекулярной структурой и, в частности, с длинными линейными молекулами, а также для некоторых эмульсий и смесей выражение девиатора напряжений (3.3.9) может нарушаться при весьма умеренных скоростях деформации; для некоторых же жидкостей типа каучука напряжение, очевидно, зависит от истории деформации, а также и от мгновенной скорости деформации. Мало известно о том, как следует изменить выражение (3.3.9) для таких жидкостей. Инженеры-химики часто встречаются с жидкостями, которые при обычных рабочих условиях проявляют неньютоновы свойства, однако, несмотря на промышленное значение неньютоновых жидкостей, мы не можем уделить им внимания.

Тот факт, что линейное соотношение между девиатором напряжений и тензором скоростей деформации выполняется в большом диапазоне скоростей деформации для многих жидкостей, стано-

вится понятным, если рассмотреть молекулярный механизм внутреннего трения. Относительное движение жидкости в целом может вызывать только малые изменения статистических свойств молекулярного движения, если характерное время движения, т. е. величина, обратная характерной скорости деформации, велико по сравнению с характерным временем молекулярного движения (которое в случае газа определяется средним временем между столкновениями молекул). Это и есть условия, при выполнении которых можно ожидать, что физические предположения, используемые при выводе соотношения (3.3.9), будут справедливы. Для воздуха при нормальных температуре и давлении среднее время между столкновениями составляет приблизительно 10^{-10} сек, так что по крайней мере для газов очевидно, что обычно встречающиеся на практике значения скорости деформации в самом деле «малы» в указанном выше смысле. Для капельных жидкостей нельзя так просто оценить характерное время молекулярного движения, однако любое время, связанное с молекулярным движением, по-видимому, чрезвычайно мало по сравнению с обратной величиной обычных значений скоростей деформации.

Типичные значения вязкости газов и жидкостей при различных условиях уже обсуждались в § 1.7 и 1.8, а наблюдаемые значения коэффициента μ для воздуха, воды и некоторых других обычных жидкостей приведены в приложении 1. Для воздуха при нормальных температуре и давлении $\mu = 0{,}00018$ г/см·сек, а для воды $\mu = 0{,}011$ г/см·сек. Ни в одном из этих случаев μ не изменяется заметно с изменением давления, но для воздуха μ возрастает с температурой вблизи ее нормальных значений со скоростью приблизительно 0,3% на 1 °С; для воды μ убывает с температурой со скоростью около 3% на 1 °С. Коэффициенты вязкости воздуха и воды при обычных условиях являются, следовательно, очень малыми величинами, когда они выражены в единицах, обычно используемых на практике для большинства других механических величин; поэтому естественно возникает вопрос, можно ли рассматривать эти простые жидкости, по крайней мере для некоторых целей, как жидкости, имеющие нулевую вязкость, т. е. *невязкие*. Это — важный вопрос, который будет подробно рассмотрен в гл. 5. Здесь нам нужно только отметить, что для невязкой жидкости касательные напряжения всюду равны нулю и тензор напряжений имеет такую же изотропную форму, как и для любой жидкости в состоянии покоя.

Уравнение Навье — Стокса

Принимая во внимание выражение (3.3.9) для девиатора напряжений, полный тензор напряжений (3.3.3) запишем в виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right), \qquad (3.3.11)$$

где

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad \Delta=e_{ii}.$$

Подставляя его в уравнение движения (3.2.2), получаем

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{2\mu\left(e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\right\}. \qquad (3.3.12)$$

Это уравнение обычно называется *уравнением Навье — Стокса.*

Для многих жидкостей коэффициент вязкости μ существенно зависит от температуры (см. § 1.7, 1.8), и когда в поле течения имеются заметные разности температур, нужно рассматривать μ как функцию координат. Однако, к счастью, эти разности часто достаточно малы, чтобы коэффициент μ можно было считать постоянным по всей жидкости; в этом случае уравнение (3.3.12) становится проще

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial\Delta}{\partial x_i}\right). \qquad (3.3.13)$$

Следующий частный случай, имеющий важное значение, это случай несжимаемой жидкости. Уравнение сохранения массы сводится для нее к уравнению $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$, а уравнение (3.3.13) в векторных обозначениях принимает вид

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=\rho\mathbf{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}. \qquad (3.3.14)$$

Если силу $\mathbf{F}$ и коэффициент вязкости μ можно считать заданными, это уравнение количества движения и уравнение сохранения массы дают четыре скалярных уравнения для определения скорости $\mathbf{u}$, плотности ρ и давления p как функций от $\mathbf{x}$ и t. Вообще требуется еще одно скалярное уравнение, и обычно таким уравнением принимается уравнение состояния жидкости, но при этом вводится еще одна переменная (обычно температура), которая используется при рассмотрении внутренней энергии жидкости (см. § 3.4). Однако если жидкость ведет себя как несжимаемая, а так обычно ведут себя реальные жидкости в условиях, описываемых в § 3.6, то плотность каждого элемента жидкости при изменениях давления не изменяется, и поэтому она является инвариантом, если не имеется никаких других процессов, изменяющих плотность (например, молекулярного переноса тепла или растворенного вещества). Тогда получаем дополнительное уравнение

$$\frac{D\rho}{Dt}=0, \qquad (3.3.15)$$

которое, конечно, представляет собой частный случай уравнения состояния жидкости; явное использование уравнения (3.3.15) часто оказывается необязательным вследствие того, что плот-

ность среды, однородная в начальный момент, остается однородной и в последующем. Таким образом, для несжимаемой жидкости система уравнений теперь полна и достаточна для определения скорости $\mathbf{u}$ и давления p, если, конечно, известны соответствующие граничные условия.

Существует кажущееся противоречие в форме приведенного выше выражения для результирующей силы на единицу объема жидкости, обусловленной внутренним трением, которое наиболее отчетливо проявляется для несжимаемой жидкости постоянной вязкости. Результирующая сила вязкости равна

$$2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = \mu \nabla^2 u_i = -\mu (\nabla \times \boldsymbol{\omega})_i. \tag{3.3.16}$$

Мы видели, что вязкое напряжение возникает исключительно вследствие деформации жидкости и не зависит от локальной завихренности. Поэтому на первый взгляд удивительно, что результирующая сила вязкости на единицу объема пропорциональна производной от завихренности по координатам. Объяснение этого факта полностью кинематическое и связано с векторным тождеством, использованным при написании равенства (3.3.16); величины e_{ij} и $\boldsymbol{\omega}$ независимо влияют на возникновение напряжения, но некоторые пространственные производные от e_{ij} тождественно связаны с некоторыми производными от $\boldsymbol{\omega}$.

Надо отметить, что сила вязкости на единицу объема несжимаемой однородной жидкости обращается в нуль, если вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет везде одинаковое значение и, в частности, когда $\boldsymbol{\omega} = 0$, т. е. если движение жидкости безвихревое; однако вязкие напряжения при этом вовсе не равны нулю.

Условия для скорости и напряжений на жидкой границе двух сред

Как было отмечено в § 1.9, вообще имеются два соотношения перехода на поверхности для каждой переносимой величины: одно соотношение отражает непрерывность соответствующей интенсивности при переходе через поверхность и основывается на предположении, что локальное отклонение от равновесия не слишком велико, а другое отражает непрерывность нормальной компоненты вектора потока (с учетом влияния поверхностного натяжения). Количество движения жидкости представляет собой одну такую переносимую величину, причем связанными с ней интенсивностью и вектором потока являются скорость и напряжения соответственно. Учитывая, что мы получили выражение для тензора напряжений, можем приступить к выводу в явном виде граничных условий, необходимых в дальнейшем при математическом определении распределения скорости в жидкости.

Первое из двух упомянутых выше соотношений перехода состоит просто в том, что касательная компонента скорости непрерывна при переходе через жидкую границу, разделяющую жидкость и другую среду [1]). Согласно § 1.9, подтверждение этого условия можно искать в известном факте, что любой разрыв скорости при переходе через жидкую поверхность приводит почти немедленно (путем молекулярного переноса) к очень большому напряжению на поверхности в таком направлении, что исключается относительная скорость двух масс; следовательно, условие непрерывности скорости является не точным законом, а лишь приближенным утверждением того, что можно ожидать в обычных условиях. Эффективность вязкого напряжения в сглаживании разрыва скорости в жидкости зависит от величины вязкости и от других факторов, которые будут изучены позже. Очевидно, имеются некоторые специальные условия, в которых касательные напряжения относительно малы и в которых по какой-либо причине большие градиенты скорости поддерживаются, и в таких случаях может быть удобно говорить о «разрыве» в скорости, хотя и не в буквальном смысле этого слова.

Случай границы, отделяющей жидкость и твердое тело, особенно важен для практики. Непрерывность касательной компоненты скорости при переходе через границу называется в этом случае *условием отсутствия скольжения* (*условием прилипания*). Выполнение условия прилипания на поверхности раздела жидкость — твердое тело обсуждалось в последнем столетии в течение нескольких лет, причем было сомнение в том, приводит ли взаимодействие молекул на такой поверхности раздела к переносу количества движения такой же природы, как перенос на поверхности внутри жидкости; однако отсутствие скольжения жидкости на твердой стенке неоднократно подтверждалось непосредственным наблюдением и правильностью многих следствий из этого условия при нормальных условиях. Одним важным исключением служит течение газа при такой низкой плотности, что средняя скорость молекул заметно изменяется на протяжении одного среднего свободного пути их пробега. По-видимому, в потоке такого газа может быть ненулевой скачок скорости и температуры на твердой стенке, что понятно, поскольку число столкновений, совершаемых молекулами в элементе объема прежде, чем они рассеиваются в поле течения, недостаточно велико, чтобы равновесие установилось хотя бы приближенно.

Второе из двух соотношений перехода заключается в том, что разность между напряжениями на двух элементах поверхности, параллельных границе и расположенных с двух ее сторон, представляет собой нормальную силу, полностью обусловленную

[1]) Конечно, нормальная компонента скорости также непрерывна, как отмечалось в § 1.9, по кинематическим причинам, не связанным с молекулярным взаимодействием.

поверхностным натяжением, выражаемым соотношением (1.9.8). Записывая это соотношение более подробно с помощью выражения (3.3.11) для тензора напряжения σ_{ij}, удобно взять отдельно компоненты поверхностной силы, нормальные к границе (направление **n**) и касательные к ней (направление **t**). В случае касательной компоненты в обозначениях рис. 1.9.4 имеем

$$\mu'' e''_{ij} t_i n_j = \mu' e'_{ij} t_i n_j, \tag{3.3.17}$$

а для нормальной компоненты —

$$p'' - 2\mu'' \left(e''_{ij} n_i n_j - \frac{1}{3} \Delta'' \right) =$$

$$= p' - 2\mu' \left(e'_{ij} n_i n_j - \frac{1}{3} \Delta' \right) + \gamma (R_1^{-1} + R_2^{-2}). \tag{3.3.18}$$

Условия (3.3.17) и (3.3.18) должны выполняться в каждой точке границы между двумя различными жидкостями.

Целесообразно сравнить форму, принимаемую двумя рассматриваемыми соотношениями перехода на жидкой границе — условиями непрерывности скорости и непрерывности напряжения (с учетом поверхностного натяжения) — в двух крайних случаях, в которых среда с одной стороны границы или является совершенно твердой, или имеет пренебрежимо малые плотность и вязкость. На поверхности раздела жидкость — твердое тело как нормальная, так и касательная компоненты скорости непрерывны, так что если скорость твердой границы задана, то имеется практически удобное граничное условие для распределения скорости в жидкости. Однако напряжение в твердом теле неизвестно, и нет никакого простого граничного условия для распределения напряжений в жидкости.

Другой крайний случай можно охарактеризовать как поверхность раздела жидкость — газ, причем плотность и вязкость газа много меньше тех же величин жидкости. Из уравнения Навье — Стокса в форме (3.3.12) видно, что изменения величины давления в жидкости уменьшаются с уменьшением плотности ρ и вязкости μ, так что если скорости и их производные в газе и в жидкости по величине сравнимы, то давления в газе изменяются много меньше, чем в жидкости, и напряжения трения в газе также много меньше. В качестве первого приближения для напряжения всюду в газе можно взять $-p_0 \delta_{ij}$, где p_0 — его постоянное давление. Поэтому сравнение скачка напряжения на поверхности раздела и нормальной силы, вызванной поверхностным натяжением, дает в каждой точке поверхности следующие приближенные граничные условия для течения жидкости (предполагается, что оно происходит на той стороне поверхности раздела, от которой направлена нормаль **n**):

$$e_{ij} t_i n_j = 0, \tag{3.3.19}$$

$$p - 2\mu \left(e_{ij} n_i n_j - \frac{\Delta}{3} \right) = p_0 - \gamma (R_1^{-1} + R_2^{-1}). \tag{3.3.20}$$

Обычно можно считать, что на поверхности раздела $\Delta = 0$, если иметь в виду эффективную несжимаемость жидкости. Условия (3.3.19) и (3.3.20) соответствуют тому, что называется *свободной поверхностью* жидкости. Условие непрерывности скорости на поверхности раздела, как правило, в данном случае не используется; это следует из приближенного выражения напряжений в газе, поэтому распределение скоростей в газе интереса не представляет и может оставаться неизвестным [1]).

Оба соотношения перехода на поверхности раздела необходимо использовать только в том случае, когда нужно найти распределения скоростей в жидкостях по обе стороны от жидкой границы.

Упражнение

Покажите, что элемент жидкой линии, который в начальный момент времени нормален к свободной поверхности жидкости, остается таким все время, пока он «упирается» в нее.

3.4. Изменение внутренней энергии движущейся жидкости

Более глубокое понимание того, как поверхностные силы влияют на движение жидкости, может быть достигнуто при рассмотрении баланса энергии объема жидкости τ, содержащейся внутри жидкой поверхности S. Работа над этой массой жидкости совершается как объемными, так и поверхностными силами, и, кроме того, может подводиться тепло путем его переноса через границу. Некоторая часть полного увеличения энергии проявляется в виде увеличения кинетической энергии жидкости, а остальная часть, согласно первому закону термодинамики (см. § 1.5), тратится на увеличение ее внутренней энергии. Чтобы представить этот баланс энергии аналитически, мы обычным путем выведем, исходя из баланса энергии для данной массы жидкости, дифференциальное уравнение, справедливое в любой точке жидкости.

Сначала нужно сказать несколько слов об определении некоторых термодинамических величин, связанных с элементом жидкости, при неравновесных условиях. Как было объяснено в § 1.6 и 3.3, при обычных условиях элемент жидкости, скорость и температура которого не постоянны, можно рассматривать как элемент, проходящий через ряд последовательных состояний, в каждом из которых отклонение от равновесия мало. Для некоторых целей отклонением от равновесия в любой момент времени можно пренебречь; в других случаях (например, при расчете девиатора напряжений) эти отклонения важны. Это свидетельствует о необ-

[1]) В задачах переноса количества движения и в задачах теплопроводности имеется аналогия между предельными случаями полностью проводящих и полностью изолированных границ и рассмотренными случаями твердых и свободных границ соответственно; поверхностное натяжение в этой аналогии, конечно, не учитывается.

ходимости проявлять осторожность в определении термодинамических величин, всякий раз убеждаясь, что эти определения не требуют строгого соблюдения состояния равновесия. Не возникает трудностей в определении плотности ρ как отношения массы к мгновенному объему элемента, но определения некоторых других величин, например температуры, не являются такими простыми. Определение внутренней энергии на единицу массы имеет основное значение, и оно будет рассмотрено прежде всего Первый закон термодинамики, выражаемый соотношением (1.5.2), сводится по существу к определению разности между значениями внутренней энергии (на единицу массы элемента) в двух различных равновесных состояниях.

Работа, совершаемая над элементом, и количество подведенного к нему тепла между двумя промежутками времени представляют собой реальные, «измеряемые» величины, определение которых не зависит от существования равновесия. Поэтому мы можем по-прежнему определять внутреннюю энергию E (на единицу массы) элемента в любой момент времени с помощью соотношения (1.5.2), предполагая при этом, что равновесное состояние, которому в данный момент времени соответствует внутренняя энергия E, достигается посредством мгновенной изоляции элемента от окружающей его жидкости с последующим представлением ему возможности прийти в состояние равновесия без совершения работы и без подвода тепла.

Теперь после определения двух параметров состояния ρ и E способами, которые не зависят от существования равновесия, можно определить и другие величины, рассматривая ρ и E как два параметра состояния и используя равновесные уравнения состояния (если только жидкость однородная). Так, например, температуру T движущегося элемента жидкости можно определить как величину, удовлетворяющую равновесному соотношению между параметрами ρ, E и T при заданных мгновенных значениях плотности ρ и внутренней энергии E элемента, и аналогично определить его энтропию S (на единицу массы). Это и есть то, что обычно понимают под символами T и S в соотношениях типа (1.6.10), применяя их к неравновесным состояниям.

Перейдем теперь к вычислению баланса внутренней энергии массы однородной жидкости. Скорость, с которой совершается работа над жидкостью (мощность) в объеме τ, равна сумме величины

$$\int u_i F_i \rho d\tau,$$

зависящей от результирующей массовой силы, и величины

$$\int u_i \sigma_{ij} n_j \, dS = \int \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} d\tau,$$

связанной с поверхностными силами, приложенными на границе объема со стороны окружающей среды. Таким образом, полная скорость совершения работы на единицу массы жидкости с учетом уравнения движения (3.2.2) имеет выражение

$$u_i F_i + \frac{u_i}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv u_i \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \qquad (3.4.1)$$

Можно видеть, что первый из двух членов, возникающих из-за работы поверхностных сил, а именно член $\rho^{-1}u_i\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$, связан с малой разностью напряжений на противоположных сторонах элемента и приводит (наряду с работой массовых сил) к увеличению кинетической энергии движения элемента как целого; второй член, $\rho^{-1}\sigma_{ij}\partial u_i/\partial x_j$, связан с малой разностью скоростей на противоположных сторонах элемента и зависит от работы, совершаемой при деформации элемента без изменения его скорости. Эта работа деформации элемента полностью идет на увеличение внутренней энергии жидкости.

Предположим, что тепло переносится в жидкости с помощью молекулярной проводимости; тогда скорость подведения тепла к массе жидкости за счет теплопроводности через жидкую граничную поверхность S равна

$$\int k\frac{\partial T}{\partial x_i} n_i\, dS = \int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) d\tau,$$

где T — локальная температура и k — коэффициент теплопроводности (§ 1.6). Следовательно, скорость подвода тепла к элементу жидкости на единицу его массы равна

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \qquad (3.4.2)$$

Мы можем считать все члены равенства (1.5.2) отнесенными к изменению состояния элемента в единицу времени. Величина работы W в данном случае определяется вторым членом уравнения (3.4.1), а величина теплоты Q — членом (3.4.2). Следовательно, скорость изменения внутренней энергии на единицу массы элемента равна

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sigma_{ij}e_{ij}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \qquad (3.4.3)$$

Подстановка тензора напряжения (3.3.11) в равенство (3.4.3) дает

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{p\Delta}{\rho} + \frac{2\mu}{\rho}\left(e_{ij}e_{ij} - \frac{\Delta^2}{3}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \qquad (3.4.4)$$

Для выяснения смысла производной (3.4.4) полезна другая ее запись:

$$\frac{DE}{Dt}=\frac{1}{\rho}(-p\delta_{ij})\left(\frac{\Delta}{3}\delta_{ij}\right)+\frac{2\mu}{\rho}\left(e_{ij}-\frac{\Delta}{3}\delta_{ij}\right)\left(e_{ij}-\frac{\Delta}{3}\delta_{ij}\right)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right),$$

в которой выделены две слагающие работы, совершаемой при деформации элемента: первая слагающая соответствует изотропной части тензора напряжении (давлению) и изотропной части тензора скоростей деформации (скорости объемного расширения), а вторая соответствует девиатору напряжений и неизотропной части тензора скоростей деформации (скорости сдвига). Вторая слагающая неотрицательна; это значит, что любое движение сдвига в жидкости неизбежно сопровождается односторонним переходом энергии от механических источников, вызывающих движение, во внутреннюю энергию жидкости, что и следовало ожидать для напряжений, вызываемых трением. Введем специальное обозначение

$$\Phi=\frac{2\mu}{\rho}\left(e_{ij}e_{ij}-\frac{\Delta^2}{3}\right) \tag{3.4.5}$$

для этой *скорости диссипации* механической энергии (на единицу массы жидкости), вызываемой вязкостью, и отметим, что по своему воздействию на жидкость она эквивалентна необратимому подводу тепла.

Естественно предположить, что первый член в правой части равенства (3.4.4) представляет собой скорость изменения потенциальной энергии сжатия, способной без потерь возвратиться в механическую систему, когда элемент жидкости расширяется. Это верно, хотя только приближенно, из-за влияния (вообще говоря) отклонения от равновесия на механическое давление p в равенстве (3.4.4), заслуживающего специального рассмотрения. Давление p определяется как среднее нормальное напряжение (со знаком минус) и представляет собой измеряемую величину. Плотность ρ и внутренняя энергия E, как объяснялось ранее в этом параграфе, являются функциями состояния элемента жидкости, определения которых не нуждаются ни в каких видоизменениях и которые имеют определенные значения, когда элемент не находится в состоянии равновесия; данным значениям ρ и E соответствует определенная величина давления, вычисляемая из (равновесного) уравнения состояния жидкости. Назовем эту последнюю величину «равновесным давлением» и обозначим ее через p_e. При отсутствии какого-либо относительного движения жидкости давление p и равновесное давление p_e элемента жидкости совпадают; если же имеется относительное движение, то они могут отличаться друг от друга.

Приближенная величина разности $(p - p_e)$ для элемента движущейся жидкости может быть определена с помощью точно такого же рассуждения, которое было использовано при определении девиатора напряжений. Предположим, что разность $(p - p_e)$ зависит только от мгновенного локального градиента скорости и для достаточно малых величин этого градиента скорости представляет собой линейную функцию от различных компонент тензора $\partial u_i/\partial x_j$, т. е.

$$p - p_e = B_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv B_{ij}e_{ij} - \frac{1}{2}B_{ij}\varepsilon_{ijk}\omega_k, \tag{3.4.6}$$

где тензорный коэффициент B_{ij} зависит от локального состояния жидкости, а не от распределения скоростей. Кроме того, предположим, как и раньше, что реакция жидкости на приложенный градиент скорости одинакова в любом направлении, поэтому тензор B_{ij} должен быть изотропным. У изотропного тензора второго порядка все оси должны быть главными, что возможно только при условии

$$B_{ij} = -\varkappa\delta_{ij}, \tag{3.4.7}$$

где $\varkappa$ — скалярный коэффициент (с той же размерностью, что и коэффициент вязкости μ), зависящий от локального состояния жидкости. Тогда (3.4.6) сводится к равенству

$$p - p_e = -\varkappa\Delta, \tag{3.4.8}$$

из которого видно, что квазитвердое вращение жидкости снова не оказывает никакого влияния на определяемую величину.

Скорость, с которой изотропная часть тензора напряжения совершает работу, переходящую во внутреннюю энергию жидкости на единицу ее массы, можно теперь написать в виде

$$-\frac{p\Delta}{\rho} = -\frac{p_e\Delta}{\rho} + \frac{\varkappa\Delta^2}{\rho}. \tag{3.4.9}$$

Первый член в правой части равенства (3.4.9) представляет собой обратимое преобразование энергии, связанной только с равновесным давлением, соответствующим мгновенным значениям плотности ρ и внутренней энергии E, а второй член имеет постоянный знак и определяет (при выборе $\varkappa > 0$) диссипацию механической энергии. Скорость относительного расширения представляет собой единственную часть локального градиента скорости, от которой зависит разность $(p - p_e)$, и, следовательно, $\varkappa$ есть коэффициент сопротивления объемному расширению. Величину $\varkappa$ можно также назвать *коэффициентом вязкости расширения* жидкости [1]) в отличие от величины μ, которую тогда следует назвать *коэффициентом*

[1]) Другие используемые названия: коэффициент объемной вязкости и второй коэффициент вязкости.

вязкости сдвига. В принятых выше условиях второй из двух членов в правой части равенства (3.4.9) имеет малую величину по сравнению с первым, однако, поскольку второй член постоянно положителен, он может приводить к значительной полной диссипации энергии, если скорость расширения периодична и совершает много колебаний.

Процесс, в котором молекулярный перенос количества движения приводит к появлению касательных напряжений и к диссипации механической энергии при простом сдвиге, достаточно очевиден; это — трение в его обычном смысле. Молекулярный процесс, который мог бы быть причиной демпфирования при расширении, менее очевиден, и, хотя природа молекулярного механизма не играет роли в нашем феноменологическом подходе при выводе равенства (3.4.8), сейчас вполне уместно рассмотреть этот вопрос. Во всяком случае, явное представление о действии молекулярного механизма необходимо, если нужно оценить величину $\varkappa$ для различных жидкостей.

Равенство (3.4.8) можно рассматривать как соотношение, определяющее величину запаздывания при согласовании механического давления с непрерывно изменяющимися значениями плотности ρ и внутренней энергии E при движении жидкости с расширением; предположительно коэффициент $\varkappa$ отличен от нуля для любой жидкости, в которой механическое давление p иначе зависит от характера движения молекул и их строения, чем величины ρ и E. Действительно, в конце § 1.7 мы уже видели, как может появиться запаздывание в установлении механического давления совершенного газа из многоатомных молекул. В таком газе среднее нормальное напряжение пропорционально энергии поступательного движения молекул, в то время как внутренняя энергия включает также энергию вращательных и (если температура достаточно высока) колебательных форм движения молекул; запаздывание в установлении (в процессе столкновения молекул) равного распределения энергии между различными формами движения молекул для данных значений внутренней энергии E и плотности ρ приводит к большой по сравнению с равновесной величине среднего нормального напряжения, когда газ сжимается, т. е. к положительному значению $\varkappa$. Кроме того, поскольку величина $(1/3)\,\rho\overline{\mathbf{u}^2}$ (где $\mathbf{u}$, как в § 1.7, скорость молекулы) равна среднему нормальному напряжению в совершенном газе, как в состоянии равновесия, так и в неравновесном состоянии, а величина $(\gamma - 1)\,\rho E$ равна равновесному нормальному напряжению в зависимости от ρ и E, мы видим, что соотношение (1.7.32) есть просто разновидность равенства (3.4.8) для совершенного газа; из этого следует, что для такого газа из многоатомных молекул, вращательные формы движения которых обладают временем релаксации порядка нескольких интервалов столкновения и вносят существенный

вклад в величину внутренней энергии, отношение $\mu/\varkappa$ должно быть постоянной величиной порядка единицы.

Исследования затухания звуковых волн достаточно высокой частоты в некоторых двухатомных газах подтвердили точность линейного соотношения (3.4.8) и дали значения отношения $\mu/\varkappa$ порядка единицы. Однако для более высоких частот (например, выше 10^7 гц в азоте при стандартных условиях) линейная зависимость $p - p_e$ от Δ нарушается. При условиях, в которых колебательные формы движения молекул делают заметный вклад в величину внутренней энергии газа, равенство (3.4.8) обычно неточно вследствие очень большого времени релаксации для этих форм их движения. В этих случаях требуется другая теория, которая до некоторой степени учитывает историю движения [1]). О пригодности линейного соотношения (3.4.8) и о величине $\varkappa$ в жидкостях имеется мало сведений.

Скорости относительного объемного расширения в подавляющем большинстве течений много меньше скоростей сдвига по той очевидной причине, что изменения среднего нормального напряжения, сопровождающиеся изменением объема, оказываются значительно больше типичного касательного напряжения. Следовательно, условия, в которых вязкость при расширении жидкости играет важную роль, редки, причем большей частью они ограничиваются исследованиями затухания высокочастотных звуковых волн и структуры ударных волн.

В этой книге у нас не будет другого случая обратиться к объемной вязкости, кроме обсуждения свойств жидкости, содержащей малые газовые пузырьки в суспензии (§ 4.11), и в дальнейшем давления p и p_e будут считаться одинаковыми без дополнительных пояснений.

Наконец, приведем выражение для скорости относительного изменения энтропии на единицу массы жидкости в ее элементе. Соотношения (1.5.20) между различными переменными, описывающими изменение состояния среды, дают

$$T\frac{DS}{Dt} = \frac{DE}{Dt} + p_e\frac{D(1/\rho)}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp_e}{Dt}. \qquad (3.4.10)$$

Используя уравнение сохранения энергии (3.4.4) и уравнение сохранения массы, можно получить

$$T\frac{DS}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp_e}{Dt} = \frac{\varkappa\Delta^2}{\rho} + \Phi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right); \qquad (3.4.11)$$

это уравнение — аналог уравнения (1.6.10) для движущейся жидкости, и оно является более общим, чем уравнение (3.1.18).

---

[1]) Такая теория впервые была предложена Максвеллом и описана Лайтхиллом (Lighthill M. J., Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, в сборнике Surveys in Mechanics под ред. Batchelor G. K., Davies R. M., Cambridge University Press, 1956).

Все последние члены в правой части уравнения (3.4.11) связаны с явлениями молекулярного переноса. Имеется много течений, в которых, как будет показано, эффектами молекулярного переноса можно пренебречь, и тогда

$$T\frac{DS}{Dt}=c_p\frac{DT}{Dt}-\frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp}{Dt}\approx 0. \qquad (3.4.12)$$

Течения этого вида, в которых энтропия элемента жидкости постоянна, называются *изэнтропическими*. Другой полезный, еще не общепринятый термин — *гомоэнтропическое* течение означает, что энтропия S на единицу массы постоянна по всей жидкости.

3.5. Теорема Бернулли для установившегося течения невязкой и нетеплопроводной жидкости

Уравнение движения материальной точки массы m, движущейся под действием силы, которая представляет собой функцию только от координат вида $-m\nabla\Psi$, дается соотношением

$$\dot{\mathbf{s}}\cdot\frac{d\dot{\mathbf{s}}}{dt}=-\dot{\mathbf{s}}\cdot\nabla\Psi\equiv-\frac{d\Psi(\mathbf{s})}{dt},$$

где $\mathbf{s}(t)$ — радиус-вектор точки, а $\dot{\mathbf{s}}(t)$ — ее скорость. Это соотношение можно проинтегрировать и найти «интеграл энергии»

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}^2+\Psi(\mathbf{s})=\text{const};$$

потенциал силы Ψ в этом равенстве определяется как «потенциальная энергия» на единицу массы точки. Условия существования интеграла такого типа состоят в том, что сила, под действием которой движется точка единичной массы, равна пространственному градиенту скалярной функции $-\Psi$ *и одновременно* функция Ψ зависит только от координат. Второе требование так часто встречается в динамике точки, что оно обычно принимается как должное.

При определенных условиях существует аналогичный интеграл энергии для отдельных элементов жидкости. Полная действительная энергия (такое название подчеркивает отсутствие в ней потенциальной энергии) на единицу массы элемента жидкости, движущегося со скоростью $\mathbf{u}$, представляет собой сумму кинетической энергии $(1/2)\,\mathbf{u}^2$ движения элемента как целого и его внутренней энергии E. Эта полная энергия может изменяться в результате работы, производимой объемными и поверхностными силами, действующими на элемент, и в результате переноса тепла (предполагается, что этот перенос происходит только за счет теплопроводности) через поверхность, ограничивающую элемент, и, как

показано в § 3.4,

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2+E\right)=u_iF_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_i\sigma_{ij})}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \quad (3.5.1)$$

Если массовую силу на единицу массы (**F**) можно представить в форме $-\nabla\Psi$ и если Ψ — функция только координат, а не времени, то можно написать

$$u_iF_i=-u_i\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=-\frac{D\Psi}{Dt}$$

и рассматривать Ψ как «потенциальную энергию» поля массовых сил.

Далее, хотя давление действует как нормальное напряжение на поверхность, ограничивающую элемент жидкости, результирующая сила давления на элемент оказывается такой же, как массовая сила на единицу объема, равная $-\nabla p$. Это свидетельствует о том, что при определенных условиях давление может играть роль потенциальной энергии, поскольку речь идет об интегрировании дифференциального уравнения (3.5.1). В правой части уравнения (3.5.1) давление входит в слагаемое

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_ip\delta_{ij})}{\partial x_j}=\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}-\frac{u_i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\frac{D(p/\rho)}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.5.2)$$

и поэтому в том случае, когда поле давления установившееся, непосредственное влияние давления на энергию элемента жидкости оказывается тем же самым, как если бы он двигался в поле массовой силы с потенциальной энергией p/ρ на единицу массы. Отметим, что давление, входящее таким образом в уравнение (3.5.1), включает работу, производимую как при сжатии элемента, так и при ускорении его как целого.

Таким образом, если $\mathbf{F}=-\nabla\Psi$, а также если и Ψ, и p не зависят от времени t, то уравнение энергии (3.5.1) можно написать в виде

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2+E+\frac{p}{\rho}+\Psi\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{2u_i\mu\left(e_{ij}-\frac{\Delta}{3}\delta_{ij}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \quad (3.5.3)$$

причем в качестве выражения для тензора напряжений σ_{ij} взято (3.3.11). Если, кроме того, оказывается, что два оставшихся члена в правой части уравнения (3.5.3) равны нулю, то уравнение энергии элемента жидкости можно проинтегрировать, как это было сделано для материальной точки. Тогда мы получаем очень важный результат, состоящий в том, что в движущейся невязкой и нетеплопроводной жидкости с установившимся распределением

давления величина H, определяемая выражением

$$H = \frac{1}{2} q^2 + E + \frac{p}{\rho} + \Psi, \tag{3.5.4}$$

имеет одно и то же значение во всех точках траектории жидкого элемента (здесь $q = |\mathbf{u}|$ — модуль скорости). Если поле давлений установившееся, то поле скоростей обычно также установившееся и траектория движения элемента жидкости становится линией тока. Используя энергетическую терминологию, можно сказать, что для установившегося движения невязкой и нетеплопроводной жидкости полная энергия H на единицу массы постоянна для каждого элемента жидкости, если только эта энергия включает в себя не только кинетическую и внутреннюю энергию, но также и потенциальную энергию, связанную с внешним полем массовых сил и с полем давления. В более общих условиях эта полная энергия элемента жидкости непостоянна обычно вследствие а) вязких напряжений, действующих на границу элемента и совершающих работу при его ускорении (в таком случае изменяется кинетическая энергия) и деформации (в этом случае изменяется внутренняя энергия), б) подвода тепла к элементу или отвода тепла от него и в) нестационарности поля давления, из-за чего связанная с ним потенциальная энергия изменяется независимо от других видов энергии элемента жидкости.

Тот факт, что величина H постоянна вдоль линии тока в установившемся движении невязкой нетеплопроводной жидкости, известен как *теорема Бернулли*; впервые она была установлена Даниилом Бернулли в 1738 г. для частного случая несжимаемой жидкости.

Другой вывод теоремы начинается с прямого вычисления баланса энергии невязкой и нетеплопроводной жидкости, текущей вдоль трубки тока малого поперечного сечения. Если величины q, ρ, E, p и Ψ представляют собой значения соответствующих величин в том месте трубки тока, где ее поперечное сечение равно δA, то скорость, с которой энергия жидкости (включая обычную потенциальную энергию, связанную с полем внешних массовых сил) переносится через это поперечное сечение, равна

$$\left(\frac{1}{2} q^2 + E + \Psi\right) q\rho\delta A;$$

скорость же, с которой нормальная поверхностная сила совершает работу в этом поперечном сечении, есть

$$pq\delta A.$$

Однако в установившемся поле течения энергия жидкости, содержащейся между двумя фиксированными поперечными сечениями трубки тока, постоянна, и ее приращение, возникающее в результате переноса энергии и работы, совершаемой давлением в одном

поперечном сечении, должно полностью компенсироваться теми же величинами в другом поперечном сечении. Таким образом, величина

$$\left(\frac{1}{2}q^2 + E + \frac{p}{\rho} + \Psi\right) q\rho\delta A$$

постоянна вдоль трубки тока, а поскольку поток массы $q\rho\delta A$ также постоянен, то из написанного выражения очевидно следует теорема Бернулли.

Выше было установлено, что конкретные свойства жидкости, достаточные для справедливости теоремы Бернулли,— нулевые значения коэффициентов вязкости μ и теплопроводности k — имеют значение для скорости изменения энтропии элемента жидкости. Часто говорят, что необходимым условием для выполнения теоремы Бернулли является полное отсутствие процессов, изменяющих энтропию. Вообще это нестрого [1]), так как запаздывание в установлении механического давления p по отношению к изменению внутренней энергии представляет собой процесс с возрастанием энтропии (со скоростью, определяемой членом выражения (3.4.11), содержащим коэффициент вязкости расширения $\varkappa$), который тем не менее не приводит к изменению величины H вдоль линии тока в установившемся течении. Однако редко бывает так, что вязкостью сдвига и теплопроводностью жидкости можно пренебречь, учитывая в то же время вязкость расширения, и для практических целей мы можем утверждать, что теорема Бернулли справедлива тогда и только тогда, когда течение изэнтропическое (т. е. $DS/Dt = 0$) и установившееся.

[1]) Это утверждение нестрого и по более существенным причинам. Автор выводит «теорему Бернулли», т. е. заключение о постоянстве H (3.5.4) вдоль линии тока, как следствие уравнения энергии (3.5.3) для невязкой ($\mu = 0$, $\varkappa = 0$) и нетеплопроводной ($k = 0$) жидкости. Однако такой вывод обедняет содержание теоремы Бернулли. Обычно она выводится иначе, как интеграл уравнений установившегося движения (и поэтому называется не теоремой, а интегралом) и в более слабых предположениях, а именно: результирующая сил трения, действующих на элемент жидкости, равна нулю (но сами силы трения могут существовать) и движение жидкости *баротропно*, т. е. имеется однозначная зависимость $\rho = \rho(p)$. Тогда таким же путем, как это сделано в книге для несжимаемой жидкости (см. § 6.2) или непосредственно из уравнения (3.5.7), получается *интеграл Бернулли* (аналогичный интегралу живых сил в динамике точки):

$$\frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Psi = C = \text{const} \qquad (*)$$

вдоль линий тока и вихревых линий (или во всем потоке, если $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = 0$). Интеграл Бернулли, вообще говоря, не зависит от уравнения энергии, хотя действительно совпадает с ним для изэнтропического и *адиабатического* движения совершенного газа и тогда константа Бернулли C равна величине полной энергии H в (3.5.4) и одновременно в (3.5.15). Различие между величинами C и H проявляется в некоторых специальных случаях, правда, выходящих за рамки рассмотрения в § 3.5.

Величину H нельзя назвать константой Бернулли, так как она может быть постоянной за счет подвода тепла (по существу такой случай рассматривается в конце § 3.5) или за счет действия непотенциальной массовой силы, причем, конечно, величина C не сохраняется.

С другой стороны, в случае течения вязкой несжимаемой жидкости при $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0$ (и, в частности, при $\boldsymbol{\omega} = 0$, т. е. в потенциальном потоке *вязкой* жидкости) в уравнении движения (3.3.14) последний член, зависящий от вязкости, согласно (3.3.16) равен нулю, поэтому интеграл Бернулли (*) существует, хотя вязкие напряжения не равны нулю, диссипация механической энергии происходит, и величина H вдоль линий тока возрастает. Уравнение энергии (3.5.3) в этом случае имеет самостоятельное значение, и из него (после решения динамической задачи) можно определить распределение температуры T.— *Прим. ред.*

Однако ничего еще не было сказано о том, как изменяется постоянная H при переходе от одной линии тока к другой в установившемся изэнтропическом течении; более того, нельзя было и рассчитывать на получение каких-либо сведений об этом, поскольку значение H для каждой линии тока должно зависеть от того, каким образом возникло течение. Самое большое, на что мы можем надеяться,— это установить определенные зависимости между изменениями величины H и энтропии S поперек линий тока. Если жидкость всюду имеет один и тот же состав, то каждый элемент жидкости имеет некоторое равновесное состояние [1]), определяемое однозначно двумя независимыми переменными, в качестве которых в данном случае мы возьмем внутреннюю энергию E и плотность ρ. Тогда разность между значениями энтропии S двух элементов в любой момент времени связана соотношением (1.5.8) с соответствующими им значениями внутренней энергии E и плотности ρ, поэтому в любой точке жидкости

$$T\nabla S = \nabla E + p\nabla(1/\rho). \tag{3.5.5}$$

Величина H, определяемая выражением (3.5.4), также есть функция координат, и равенство (3.5.5) можно записать в другой форме:

$$\nabla H = T\nabla S + \nabla\left(\frac{q^2}{2} + \Psi\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{3.5.6}$$

Это весьма общее соотношение, если не считать предположения, что $\mathbf{F} = -\nabla\Psi$. Далее, если течение установившееся и изэнтропическое, то уравнение движения (3.3.12) сводится к уравнению

$$\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\rho\nabla\Psi - \nabla p,$$

которое с помощью векторного тождества

$$\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\nabla q^2 - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$$

может быть переписано в виде

$$\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega} = \nabla\left(\frac{1}{2}q^2 + \Psi\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{3.5.7}$$

Тогда подстановка его в правую часть выражения (3.5.6) дает уравнение

$$\nabla H = T\nabla S + \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{3.5.8}$$

полученное Крокко (1937) [2]). Из этого уравнения видно, что

[1]) Это такое состояние, которое в принципе можно получить путем мгновенной изоляции элемента и предоставления ему возможности прийти в состояние равновесия адиабатически и без совершения работы.

[2]) Уравнение движения в энергетической форме (3.5.8) имеется в книге А. А. Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», ОНТИ, М.— Л., 1934, стр. 198 и 239, поэтому его следует называть уравнением Фридмана — Крокко. Отметим одновременно, что уравнение (3.5.7) есть частный случай (при $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$ и $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$) уравнений Эйлера в форме Громеки — Ламба.— *Прим. ред.*

постоянство обеих величин H и S поперек линий тока, как и вдоль них, в установившемся изэнтропическом течении возможно только в том случае, когда всюду или $\boldsymbol{\omega} = 0$ (т. е. в безвихревом течении), или — что значительно менее вероятно — если векторы $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ всюду параллельны.

Подобно тому как поле течения, в котором энтропия S постоянна во всей жидкости, называлось гомоэнтропическим (§ 3.4), так и поле течения, в котором энергия H постоянна во всей жидкости, может быть названо *гомоэнергетическим*. Установившееся течение невязкой и нетеплопроводной жидкости в зависимости от условий может быть гомоэнтропическим или гомоэнергетическим, тем и другим одновременно или негомоэнтропическим и негомоэнергетическим.

Уравнение (3.5.8) показывает, что в случае установившегося гомоэнтропического течения всюду в потоке

$$\nabla H = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.5.9}$$

Поэтому в данном случае величина H постоянна также и вдоль вихревых линий, и поверхности уровня H совпадают с пересекающимися семействами линий тока и вихревых линий. Если, кроме того, распределение скоростей безвихревое, то величина H имеет одно и то же значение всюду в жидкости.

Отметим теперь еще две формы теоремы Бернулли. В § 1.5 была введена термодинамическая функция I, определяемая выражением

$$I = E + \frac{p}{\rho},$$

и она была названа энтальпией или теплосодержанием единицы массы жидкости. Следовательно, величина H, постоянная вдоль линий тока в установившемся изэнтропическом потоке, может быть написана в виде

$$H = \frac{1}{2} q^2 + I + \Psi. \tag{3.5.10}$$

В течениях газа изменения потенциальной энергии Ψ часто значительно меньше, чем изменения величин $(1/2)q^2$ и I, и тогда приближенный вариант теоремы Бернулли состоит в том, что величина

$$H = \frac{1}{2} q^2 + I \tag{3.5.11}$$

постоянна вдоль линии тока. В указанных условиях постоянную H для какой-либо одной линии тока можно рассматривать как *энтальпию торможения*, т. е. как величину энтальпии в той точке на линии тока, где $q = 0$, или, когда такой точки не существует, как то значение, которое принимала бы энтальпия любого

элемента жидкости на линии тока, если бы он изэнтропически был приведен в состояние покоя.

Другая форма теоремы Бернулли, в которую термодинамическая функция E не входит явно и которая содержит только механические величины, может быть получена с использованием второго закона термодинамики (см. (1.5.8)) в виде

$$\frac{D}{Dt}\left(E+\frac{p}{\rho}\right)=T\frac{DS}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}. \tag{3.5.12}$$

Давление можно считать функцией двух параметров состояния ρ и S, и поскольку в изэнтропическом течении $(DS/Dt)=0$, то из этого следует, что изменения давления p любого элемента жидкости в данном случае полностью определяются изменениями его плотности ρ. В этих условиях из (3.5.12) следует равенство

$$\frac{D}{Dt}\left(E+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{D}{Dt}\int\frac{c^2}{\rho}\,d\rho, \tag{3.5.13}$$

в котором интегрирование выполняется при постоянной энтропии, а

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S \tag{3.5.14}$$

есть функция только плотности ρ для данного S. В таком случае выражение (3.5.4) в сочетании с равенством (3.5.13) показывает, что в установившемся изэнтропическом течении величина

$$H=\frac{1}{2}q^2+\int\frac{c^2}{\rho}\,d\rho+\Psi \tag{3.5.15}$$

имеет одно и то же значение во всех точках линии тока. Теорема Бернулли в этой форме обычно используется в тех случаях, когда известна изэнтропическая зависимость между давлением p и плотностью ρ для жидкости [1]).

Специальные формы теоремы Бернулли

Выпишем здесь для последующих ссылок некоторые частные следствия из теоремы Бернулли в важных случаях, в которых жидкость 1) несжимаема, 2) представляет собой совершенный газ или 3) движется установившимся образом относительно стационарно вращающихся осей.

На плотность элемента несжимаемой жидкости изменения только одного давления влияния не оказывают (§ 2.2). Внутренняя энергия элемента может изменяться только путем подвода тепла или же при совершении работы против сил внутреннего трения, а при отсутствии этих явлений, как в изэнтропическом

[1]) В принятых условиях выражение (3.5.15) совпадает с интегралом Бернулли (*), приведенным в примечании на стр. 208. Величина H здесь равна константе Бернулли C а параметр с есть скорость звука в газе (см. § 3.6, стр. 217).— *Прим. ред.*

массы жидкости действует дополнительная массовая сила, определяемая выражением (3.2.10). Кориолисова сила имеет нулевую компоненту в направлении вектора $\mathbf{u}$; центробежную силу можно написать в виде градиента:

$$-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \nabla (\Omega \times \mathbf{x})^2.$$

Следовательно, рассуждение, приводящее к (3.5.3) и (3.5.4), применимо и в случае установившегося движения по отношению к вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат, если в выражение потенциала массовой силы Ψ включить член $-(1/2)\,(\Omega \times \mathbf{x})^2$, вызываемый центробежной силой. Случаи течений, которые являются неустановившимися в абсолютной системе координат, но оказываются установившимися во вращающейся системе и к которым поэтому можно применить теорему Бернулли, часто встречаются в связи с различными турбомашинами. Отметим, кроме того, что для изэнтропического установившегося течения во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат, помимо отмеченного выше изменения Ψ, в левую часть уравнения движения (3.5.7) входит добавочный член, $-2\Omega \times \mathbf{u}$, определяющий кориолисову силу. Таким образом, в важном случае гомоэнтропического течения вместо (3.5.9) получим уравнение

$$\nabla H = \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\Omega), \tag{3.5.20}$$

где $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость и завихренность относительно вращающейся системы координат, а потенциал массовой силы Ψ, входящий в выражение для H, содержит слагаемое от центробежной силы. Сумма $\boldsymbol{\omega} + 2\Omega$ в уравнении (3.5.20) равна локальной завихренности жидкости по отношению к абсолютной системе координат, и если она всюду равна нулю, то величина H постоянна во всей жидкости, так же как в установившемся течении в неподвижной системе координат.

Сохранение величины H при пересечении области перехода в одномерном установившемся течении

Отметим теперь важный результат, который выходит за пределы условий теоремы Бернулли, но который используется вместе с ней при рассмотрении ударных волн и других областей быстрого изменения параметров потока. Если течение установившееся и одномерное (все параметры — функции только одной скалярной координаты x, а вектор скорости $\mathbf{u}$ всюду параллелен оси x), то полное уравнение энергии (3.5.3) записывается в форме

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \rho u \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{3.5.21}$$

а уравнение сохранения массы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0.$$

Интегрирование уравнения (3.5.21) между двумя точками x_1 и x_2 дает

$$\rho u\,[H]\Big|_{x_1}^{x_2} = \left[\frac{4}{3}\mu u\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial T}{\partial x}\right]\Big|_{x_1}^{x_2}. \qquad (3.5.22)$$

Из выражения (3.5.22) видно, что даже если жидкость вязкая и теплопроводная, то величина H имеет одно и то же значение в любых двух точках течения, в котором градиенты скорости u и температуры T обращаются в нуль; хотя в данном случае величина H изменяется вдоль линии тока, ее увеличение и уменьшение на различных частях линии тока, обусловленные силами вязкости и теплопроводностью, взаимно компенсируются во всей области, ограниченной этими двумя точками.

Смысл этого результата раскрывается при его приложении к двумерным и трехмерным установившимся течениям жидкости, когда μ и k малы и когда существует тонкий слой перехода, внутри которого параметры течения резко изменяются. Нам нет необходимости входить в детали этого вопроса, а будет вполне достаточно краткого изложения. Для некоторых тонких слоев перехода течение вблизи слоя можно считать локально одномерным и параметры течения рассматривать как локально однородные на каждый из двух сторон слоя. Вне слоя, где градиенты скорости и температуры невелики, теорема Бернулли приближенно справедлива, а поперек слоя не происходит никакого результирующего изменения в величине H, как было показано выше, несмотря на то что внутри слоя возможны большие градиенты и заметные эффекты вязкости и теплопроводности. Таким образом, величина H имеет одно и то же значение во всех точках линии тока, за исключением только расположенных внутри самого слоя перехода. Отметим, однако, что энтропия S не имеет одно и то же значение на обеих сторонах слоя перехода, так как из уравнения (3.4.11) следует, что в установившемся одномерном течении

$$\rho u\,[S]\Big|_{x_1}^{x_2} = \left[\frac{k}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right]\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\varkappa\,\Delta^2}{T} + \frac{\rho\Phi}{T} + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right\}dx; \qquad (3.5.23)$$

член с интегралом обязательно отличен от нуля и отражает возрастание энтропии на единицу массы при переходе через слой в направлении течения.

Если ударная волна не слабая (т. е. отношения давлений, плотностей или скоростей среды по обе стороны от ударной волны значительно отличаются от единицы), то ширина слоя перехода, образующего ударную волну, может быть такой малой, что «ньюто-

новские» выражения для вязкого напряжения и теплового потока, использованные выше, становятся недействительными. Однако правая часть уравнения (3.5.21) дивергентна, и независимо от свойств молекулярных потоков количества движения и тепла внутри слоя перехода равенство $H(x_1) = H(x_2)$ все еще справедливо, если, конечно, напряжение и поток тепла обращаются в нуль в крайних точках x_1 и x_2, подобно тому, как они обращаются в нуль в том случае, когда точки x_1 и x_2 расположены в приближенно однородных областях по обе стороны от ударной волны.

3.6. Полная система уравнений движения жидкости

Полезно свести воедино различные уравнения, которые, как было показано, определяют движение однородной по составу ньютоновой жидкости.

Было установлено, что закон сохранения массы жидкости (см. (2.2.3)) требует, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{3.6.1}$$

Ускорение жидкости, создаваемое различными действующими на нее силами, определяется уравнением движения (3.3.12)

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{2\mu\left(e_{ij} - \frac{\Delta\delta_{ij}}{3}\right)\right\}, \tag{3.6.2}$$

в котором e_{ij} — тензор скоростей деформации, определяемый формулой (2.3.3), и $\Delta = e_{ii} = \nabla\cdot\mathbf{u}$.

Рассмотрение взаимного перехода внутренней энергии и других видов энергии жидкости приводит к соотношению (3.4.11) (заметим, что в данном случае влияние объемной вязкости не учитывается)

$$T\frac{DS}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \Phi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{3.6.3}$$

где функция Φ, определяемая выражением (3.4.5), есть скорость диссипации механической энергии на единицу массы жидкости, обусловленная вязкостью жидкости при сдвиге, а

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$$

— коэффициент теплового расширения жидкости.

Коэффициенты молекулярного переноса μ и k в уравнениях (3.6.2) и (3.6.3) представляют собой функции локального состояния жидкости, вид которых можно считать известным из предварительных исследований рассматриваемой жидкости (см. § 1.7

и 1.8). В качестве параметров состояния удобно выбрать ρ и T, тогда можно положить

$$\mu \equiv \mu(\rho, T), \qquad k \equiv k(\rho, T). \tag{3.6.4}$$

Две величины c_p и β в уравнении (3.6.3) также являются функциями локального состояния, вид которых можно установить из предварительных наблюдений.

Уравнения (3.6.1), (3.6.2) и (3.6.3) содержат скорость $\mathbf{u}$, плотность ρ, давление p и температуру T в качестве неизвестных зависимых переменных, и, чтобы сделать возможным определение поля течения, необходимо еще одно скалярное уравнение. Этим добавочным соотношением является уравнение состояния жидкости (§ 1.5), которое в общем виде может быть записано как

$$f(p, \rho, T) = 0. \tag{3.6.5}$$

Конкретный вид уравнения состояния связан с природой той или иной жидкости.

Изэнтропическое течение

Поля течения, в которых нет эффектов молекулярного переноса, образуют важный специальный случай, на который постоянно ссылаются в теоретической гидродинамике. Поэтому временно положим, что в приведенных выше уравнениях величины μ и k равны нулю, не зная пока еще условий, при которых это может быть подходящим приближением.

Уравнение (3.6.3) показывает, что в этих условиях $(DS/Dt) = 0$, и, как отмечалось в § 3.5, тогда говорят, что течение является изэнтропическим. Остающуюся часть уравнения (3.6.3), а именно

$$c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\beta T}{\rho} \frac{Dp}{Dt}, \tag{3.6.6}$$

вместе с уравнением состояния (3.6.5) можно использовать для нахождения зависимости между ρ и p при изэнтропических изменениях состояния каждого элемента жидкости

$$\rho \equiv \rho(p, S). \tag{3.6.7}$$

Наличие в этой зависимости энтропии S напоминает нам, что если поле течения негомоэнтропическое, то плотность ρ может выражаться разными функциями от давления p для различных элементов жидкости. Уравнение (1.7.24) является частным случаем уравнения (3.6.7) для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями. Уравнения (3.6.1) и (3.6.2), дополненные соотношением (3.6.7) между ρ и p, достаточны для определения поля течения, а равенство (3.6.6) служит для определения связанного с ним распределения температуры. Характерная

особенность изэнтропического течения, упрощающая рассмотрение, заключается в том, что обмен между внутренней энергией и другими видами энергии происходит обратимо, а внутренняя энергия и температура играют пассивную роль, изменяясь только вследствие сжатия элемента.

Таким образом, основные уравнения изэнтропического течения можно написать в виде

$$\frac{1}{\rho c^2}\frac{Dp}{Dt}+\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \tag{3.6.8}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=\rho\mathbf{F}-\nabla p, \tag{3.6.9}$$

и еще уравнение (3.6.7), причем $c^2=(\partial p/\partial\rho)_S$ считается известной функцией плотности ρ (или давления p), вид которой может быть различным для различных элементов жидкости.

Физический смысл параметра c, который имеет размерность скорости, можно понять следующим образом. Предположим, что масса однородной жидкости находится первоначально в состоянии покоя, в равновесии, так что давление p_0 и плотность ρ_0 связаны уравнением

$$\rho_0\mathbf{F}=\nabla p_0.$$

Затем эта жидкость слабо возмущается (все изменения происходят изэнтропически), так что некоторые или все ее элементы подвергаются сжатию, причем плотность изменяется на малые величины, а потом освобождается, свободно возвращается в состояние равновесия и совершает колебания относительно этого состояния [1]). Возмущения величин плотности $\rho_1=\rho-\rho_0$, давления $p_1=p-p_0$ и скорости $\mathbf{u}$ малы по величине, и подходящее приближение уравнений (3.6.8) и (3.6.9) имеет вид

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{u}=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\rho_1\mathbf{F}-\nabla p_1,$$

где c_0 — значение c при $\rho=\rho_0$; исключая из этих двух уравнений скорость $\mathbf{u}$, получаем

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=\nabla^2 p_1-\rho_1\nabla\cdot\mathbf{F}-\frac{\mathbf{F}\cdot\nabla p_1}{c_0^2}. \tag{3.6.10}$$

Массовая сила обычно возникает под действием силы тяжести, тогда $\mathbf{F}=\mathbf{g}$, $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$, и последний член в уравнении (3.6.10) пренебрежимо мал, за исключением маловероятного случая крупномасштабных изменений давления, масштаб которых не мал

[1]) Следует ожидать появления колебаний относительно состояния равновесия, так как жидкость упруга и диссипации энергии не происходит.

по сравнению с величиной c_0^2/g, которая для воздуха при нормальных условиях равна приблизительно $1{,}2 \cdot 10^4$ м (для воды эта величина еще больше). Следовательно, в этих обычных условиях уравнение (3.6.10) сводится к волновому относительно p_1 и плотность ρ_1 удовлетворяет такому же уравнению [1]). Для этого уравнения существуют решения, представляющие плоские волны сжатия, которые распространяются с фазовой скоростью c_0 и в которых скорость жидкости $\mathbf{u}$ параллельна направлению распространения волны. Другими словами, величина c_0 есть скорость распространения звуковых волн в жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии равна ρ_0. Не все решения уравнений (3.6.8) и (3.6.9) представляют собой волны сжатия малой амплитуды, однако тем не менее полезно иметь в виду приведенную интерпретацию величины c как *локальной* скорости, с которой звуковые волны могут распространяться в жидкости.

Условия, при которых поле скоростей можно приближенно считать соленоидальным

В § 2.2 было отмечено, что на практике скорость, с которой изменяется плотность элемента жидкости, часто пренебрежимо мала и что в этих условиях из уравнения сохранения массы (3.6.1) можно сделать вывод о соленоидальном распределении скорости. Этот вывод представляет собой важное и ценное упрощение, условия справедливости которого должны быть тщательно изучены.

Предположим, что распределение скорости $\mathbf{u}$ и других параметров течения характеризуется масштабом длины L (означающим, что, вообще говоря, скорость $\mathbf{u}$ не сильно изменяется на любом расстоянии, малом по сравнению с масштабом L) и что изменения модуля скорости $|\mathbf{u}|$ в зависимости как от координат, так и от времени имеют порядок величины U. Тогда порядок величины производных по координатам от компонент скорости $\mathbf{u}$ равен U/L и можно сказать, что распределение скорости будет приближенно соленоидальным, если

$$|\nabla \cdot \mathbf{u}| \ll \frac{U}{L},$$

т. е. если

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L}. \tag{3.6.11}$$

Для однородной жидкости плотность ρ и энтропию единицы массы S можно выбрать в качестве двух независимых параметров состояния; тогда относительная скорость изменения давления,

---

[1]) Для волнового уравнения получены многочисленные математические результаты; см., например, Зоммерфельд А., Уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1951; Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.

испытываемого элементом жидкости, может быть выражена в виде

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt}. \tag{3.6.12}$$

Таким образом, условие того, что вектор скорости $\mathbf{u}$ будет приближенно соленоидальным, выражается неравенством

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L}. \tag{3.6.13}$$

Условие (3.6.13), как правило, будет удовлетворяться только тогда, когда каждый из двух членов в левой части неравенства имеет малую величину по сравнению с отношением U/L; сейчас мы изучим эти вспомогательные условия.

I. Если условие

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L} \tag{3.6.14}$$

выполняется, то изменения плотности элемента жидкости, вызванные изменениями давления, пренебрежимо малы, т. е. жидкость ведет себя так, *как если бы она была несжимаемой*. Из двух условий соленоидальности вектора $\mathbf{u}$ это условие практически наиболее важно. При оценке модуля производной $|Dp/Dt|$ общность рассуждений почти не нарушается предположением об изэнтропичности течения, так как эффекты вязкости и теплопроводности обычно значительно сильнее влияют на распределение давления в пространстве, чем на его изменения во времени. Поэтому мы можем переписать условие (3.6.11) с помощью уравнения (3.6.9) в виде неравенства

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2c^2} \frac{Dq^2}{Dt} + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}}{c^2} \right| \ll \frac{U}{L}, \tag{3.6.15}$$

показывающего, что в общем случае (т. е. без сокращения членов в левой части неравенства (3.6.15) во всех точках поля течения) жидкость можно считать *эффективно несжимаемой*, если выполняются три отдельных условия, а именно если каждый член в левой части неравенства мал по сравнению с отношением U/L.

Ia. Рассмотрим сначала второй член в левой части неравенства (3.6.15). Порядок величины производной Dq^2/Dt будет таким же, как и порядок любой из величин $\partial q^2/\partial t$ или $\mathbf{u}\cdot\nabla q^2$ (т. е. U^3/L). Могут существовать течения с колебаниями, частота которых в некоторой фиксированной точке значительно больше отношения U/L, однако такие течения сейчас можно не рассматривать, так как ниже мы увидим, что требование малости первого члена неравенства (3.6.15) по сравнению с отношением U/L будет для них более строгим. Таким образом, условие малости второго члена в (3.6.15) принимает вид

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1. \tag{3.6.16}$$

Параметр c является функцией координат, и если его изменение существенно, то для использования в неравенстве (3.6.16) нужно выбрать некоторую характерную величину c.

В течении установившемся или в таком, что в нем изменения скорости со временем не играют доминирующей роли, изменение скорости жидкого элемента от нуля до U влечет за собой изменение давления порядка ρU^2 (это видно также из теоремы Бернулли), и, следовательно, отношения $\delta\rho/\rho$ или $\delta\rho/\rho c^2$ ($\delta\rho$ и δp — изменения для элемента жидкости) малы по сравнению с единицей, если $U^2/c^2 \ll 1$; проведенным неформальным рассуждением подкрепляется неравенство (3.6.16). Отношение U/c называется *числом Маха* поля течения с характерными параметрами U и c, и оно играет важную роль в газовой динамике. Для воздуха при 15 °C и давлении в одну атмосферу $c = 340{,}6$ м/сек, а для воды при 15 °C $c = 1470$ м/сек. Следует ожидать, что в течениях, возникающих при установившемся движении тел в атмосфере со скоростями ниже 100 м/сек, влияние сжимаемости воздуха будет слабым, если оно вообще будет проявляться, и весьма маловероятно, чтобы сжимаемость среды оказывала какое-либо влияние на обычные установившиеся течения воды.

Iб. Величина первого члена в неравенстве (3.6.15) непосредственно зависит от нестационарности течения. Предположим, что в поле течения происходят колебания, пусть и не строго периодические, и что n есть мера основной частоты. Величину флуктуаций давления можно оценить на основании замечания, что жидкость в области с линейными размерами L имеет приблизительно однородную скорость, которая изменяет знак за время порядка n^{-1}, и что приращения давления по всей границе области, вызывающие соответствующее изменение количества движения, должны иметь величину ρLUn. Поэтому порядок величины производной $\partial p/\partial t$ равен ρLUn^2 и условие малости первого члена неравенства (3.6.15) по сравнению с U/L получает вид

$$\frac{n^2L^2}{c^2} \ll 1. \tag{3.6.17}$$

Если характерная частота временны́х изменений равна отношению U/L, то это условие сводится к неравенству (3.6.16) и оказывается более жестким, чем условие (3.6.16), если $n \gg U/L$, что уже указывалось. Отметим, кроме того, что отношение nL/c равно единице, если величину L считать равной длине звуковой волны частоты n; это соответствует очевидному факту, что сжимаемость нельзя не учитывать в процессе прохождения звуковой волны.

Iв. Если мы учитываем массовую силу тяжести, то третий член в левой части неравенства (3.6.15), а именно $\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}/c^2$ (который соответствует изменению давления, необходимому для уравнове-

шивания массовой силы), имеет величину порядка gU/c^2, поэтому условие ее малости по сравнению с отношением U/L сводится к неравенству

$$\frac{gL}{c^2} \ll 1. \tag{3.6.18}$$

В случае воздуха, который практически является единственной рабочей жидкостью, для которой существует какая-либо возможность нарушения этого условия, можно воспользоваться изэнтропическим уравнением состояния (1.7.25) и найти, что

$$\frac{gL}{c^2} = \frac{\rho gL}{\gamma p}.$$

Это равенство показывает, что условие (3.6.18) удовлетворяется, если только разность между статическими давлениями в двух точках на расстоянии L друг от друга в вертикальном направлении составляет малую долю от абсолютного давления, т. е. если масштаб L характерного распределения скорости мал по сравнению с отношением $p/\rho g$ — масштабом высоты атмосферы (см. § 1.4), который составляет приблизительно 8,4 км для воздуха при нормальных условиях. Очевидно, что это условие удовлетворяется для всех движений, встречающихся в лабораториях или в слоях атмосферы, не превышающих по высоте нескольких сот метров.

Таким образом, жидкость ведет себя как несжимаемая, если все три условия (3.6.16), (3.6.17) и (3.6.18) удовлетворяются. Область газодинамики большей частью имеет дело с условиями, в которых неравенство (3.6.16) не выполняется; неравенство (3.6.17) не выполняется в явлениях, изучаемых акустикой; условия, при которых нарушается неравенство (3.6.18), встречаются в динамической метеорологии. В нашей книге ни одна из этих областей не будет изучаться, хотя все они очень интересны и важны. Поэтому последующие главы посвящены рассмотрению таких течений, в которых удовлетворяются все три условия и в которых жидкость можно считать несжимаемой.

II. Обратимся снова к неравенству (3.6.13) и рассмотрим второе дополнительное условие соленоидальности вектора скорости $\mathbf{u}$, а именно условие малости второго члена в его левой части по сравнению с U/L. Поскольку существует единственное функциональное соотношение между тремя параметрами p, S и ρ, когда жидкость однородна, а мы предполагаем, что это так, то, учитывая (1.5.16) и (1.5.17), можно написать

$$\frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = -\frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\frac{(\partial\rho/\partial T)_p}{(\partial S/\partial T)_p} = \frac{\beta T}{c_p}. \tag{3.6.19}$$

Подстановка производной DS/Dt из уравнения (3.6.3) дает условие

$$\left|\frac{\beta}{c_p}\left\{\Phi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\right\}\right| \ll \frac{U}{L}, \tag{3.6.20}$$

основной смысл которого состоит в том, что изменения плотности элемента жидкости, вызываемые внутренним нагревом (из-за диссипации) или молекулярной теплопроводностью внутри элемента, должны быть малыми [1]).

Предположим вновь, что дифференцирование некоторой величины по координатам сводится к умножению ее характерного значения на L^{-1} и что два члена левой части неравенства (3.6.20) взаимно не уничтожаются во всех точках поля течения. Тогда из выражения (3.4.5) для Ф следует, что неравенство (3.6.20) эквивалентно двум вспомогательным условиям

$$\frac{\beta U^2}{c_p}\frac{\mu}{\rho L U} \ll 1, \qquad \beta\theta\frac{\varkappa}{LU} \ll 1, \tag{3.6.21}$$

где $\varkappa = k/\rho c_p$ — коэффициент термодиффузии, θ — мера разности температур в жидкости, а коэффициент термического расширения β положителен. Некоторые указания на обстоятельства, при которых условия (3.6.21) не удовлетворяются, можно найти в следующей таблице (для воздуха и воды при 15 °С и давлении в одну атмосферу в случае $L = 1$ см; $U = 10$ см/сек; $\theta = 10$ °С):

	$(\beta U^2/c_p)[\mu/(\rho LU)]$	$\beta\theta\varkappa/(LU)$
Воздух	$5\cdot10^{-10}$	$7\cdot10^{-4}$
Вода	$4\cdot10^{-13}$	$3\cdot10^{-7}$

Очевидно, маловероятно, чтобы нагрев из-за диссипации был достаточным для нарушения первого из условий (3.6.21); и только в довольно редких обстоятельствах (например, при θ порядка 100 °С и LU порядка 10^{-1} см^2/сек в газе) нагрев посредством теплопроводности будет достаточно сильным, чтобы нарушить второе условие.

Поэтому для практических целей вторым членом в левой части неравенства (3.6.13) можно пренебречь. При отсутствии каких-либо явных ограничений вывод о том, что жидкость эффективно несжимаема, можно рассматривать как утверждение, что распределение ее скорости соленоидально; условия, при которых жидкость ведет себя как несжимаемая, выражаются неравенствами (3.6.16), (3.6.17) и (3.6.18), из которых первое представляется наиболее важным.

[1]) Если допустить, что жидкость неоднородна, то изменения плотности ее элемента могут происходить также вследствие молекулярной диффузии, как, например, в случае воды, содержащей соль в растворе неоднородной концентрации. Условие соленоидальности вектора скорости $\mathbf{u}$ в этом случае можно получить аналогичным способом.

3.7. Заключительные замечания к первым трем главам

Конец этой главы служит поворотным пунктом нашего изложения динамики жидкости. Первые три главы были посвящены описанию общих свойств жидкостей — физических, кинематических и динамических соответственно, и они заканчиваются выводом основных дифференциальных уравнений, описывающих течение обычных жидкостей. Оставляя в стороне некоторые невыясненные вопросы, например, о точности условий, при которых девиатор напряжений является линейной функцией тензора скоростей деформации, можно утверждать, что теперь мы имеем вполне надежную и ясную систему понятий и законов, на которых может базироваться исследование движения жидкостей. С точки зрения «чистого» ученого, имеющего дело только с основными законами, не представляет особого смысла двигаться дальше. Однако такая точка зрения совершенно не подходит для гидродинамики.

Существенное и характерное свойство этого предмета заключается в том, что он охватывает различные механические и физические процессы, и хотя каждый из них в отдельности можно считать вполне понятным в смысле фундаментальной физики, в целом они могут порождать многие неожиданные эффекты. Одно дело знать, что уравнение Навье — Стокса описывает движение жидкости, и совсем другое — знать, например, почему тонкие пограничные слои образуются именно на передней, обращенной к потоку части большой твердой сферы, падающей в жидкости, а не на ее обратной стороне. Умение предсказать, что произойдет в заданных условиях в общих чертах, даже если не входить в подробности числовых расчетов, представляет собой существенную часть знания, и, как мы увидим из дальнейшего, точное предсказание свойств течения требует значительно большего, чем простого знания основных уравнений. Движение данной массы жидкости очень слабо ограничивается формой и характером границ, и слишком много возможных видов движения согласуется с очевидными, на первый взгляд, требованиями, например сохранения массы, к полю течения, которое действительно получится в данных условиях. Картина течения жидкости существенно зависит от причин, вызывающих это течение, и включает огромное разнообразие свойств, на которые в основных уравнениях движения можно видеть только слабый намек.

Таким образом, предыдущие три главы представляют собой не больше, чем оборудование сцены. Нами теперь подготовлена почва для перехода к конкретному исследованию движения жидкостей, и необходимо сказать несколько слов относительно принятого в дальнейшем плана изложения. Как уже отмечалось, многие различные физические или механические процессы отражены в системе основных уравнений § 3.6, и бывает трудно

постичь способ, которым эти процессы влияют на течение в заданных обстоятельствах. К тому же система основных уравнений движения слишком сложна для прямого математического подхода. Прогресс в теоретической гидродинамике был достигнут в основном благодаря изучению различных физических и механических процессов по возможности в изолированной форме и путем исследования большого числа полей течения частного вида, иллюстрирующих влияние каждого из этих процессов в отдельности. Эти специальные случаи, собранные и объясненные соответствующим образом, приводят к пониманию области действия и природы процессов, отраженных в уравнениях, и эффектов, которые они вызывают.

Многие из известных разделов теоретической гидродинамики соответствуют исследованию отдельных механических процессов, отраженных в общих уравнениях движения. Газовая динамика изучает поля течения, в которых проявляются заметные изменения абсолютного давления, а следовательно, и плотности, и такое исследование большей частью осуществляется путем аналитического рассмотрения ряда типичных или наглядных специальных случаев; при изучении свободной конвекции рассматриваются движения, вызываемые только силами тяжести; теория смазки имеет дело с полями течения вполне определенного вида, в которых преобладающую роль играют напряжения трения; магнитная гидродинамика занимается исследованием течений, в которых электромагнитные поля и поля скоростей влияют друг на друга, и т. д. Кроме того, существуют разделы гидродинамики, такие, например, как гидродинамическая устойчивость, которые не затрагивают каких-либо новых механических процессов, но которые приобрели особую специфику вследствие разработки соответствующих аналитических методов.

Полное изложение гидродинамики должно было бы включать описание всех этих разделов, бóльшая часть которых порождает в свою очередь много отчетливо видных подразделов. Предыдущие три главы были написаны без особого направления на какие-либо специальные области гидродинамики, и можно надеяться, что они могут быть основой для изучения любого специального раздела либо в последующих главах этой книги, либо в каком-нибудь другом курсе. Даже если общность подхода к предмету, принятая в первых трех главах, не используется непосредственно при дальнейшем изучении частных разделов гидродинамики, тем не менее желательно понимать, каким образом идеи и приближения каждого частного вопроса связаны с предметом в целом.

В книге вводного характера, предназначенной для использования учащимися, объем изложения ограничен и некоторый отбор тем неизбежен; распределение естественно ограниченного числа страниц по многим важным разделам современной гидродинамики

привело бы к поверхностному рассмотрению каждого из них. Принятый отбор вопросов для последующих глав книги основывается на следующих соображениях.

Во-первых, важно достигнуть надлежащего понимания свойств течения жидкости, наделенной инерцией, но при отсутствии других физических свойств [1]). Жидкость с инерцией как с единственным физическим свойством может представляться весьма простым частным случаем, но на самом деле, как будет показано, течения такой жидкости обладают весьма разнообразными свойствами. Как специальный случай эти течения исключительно важны, поскольку только в весьма редких обстоятельствах инерция жидкости не имеет важного значения. Кроме того, изучение течения жидкости только с одной инерцией имеет и прямое практическое значение, поскольку именно реальные жидкости часто движутся так, что существенного влияния их других физических свойств не обнаруживается.

Во-вторых, из всех физических свойств жидкости, отличных от инерции, наибольшее влияние на течение в обычных условиях оказывает внутреннее трение, измеряемое величиной касательных напряжений. Более того, предсказать влияние вязкости на картину течения оказывается весьма трудным делом по причинам, которые с математической точки зрения вытекают из того факта, что коэффициент вязкости μ является коэффициентом при производной высшего порядка в уравнении (3.6.2). Добавление вязкости к физическим свойствам рассматриваемой жидкости может привести к появлению особенности или разрыва в картине течения, и необходимо провести обширное исследование движения вязкой жидкости, прежде чем его свойства не покажутся естественными и объяснимыми.

Поэтому остальная часть книги посвящена течениям жидкости, которая обладает инерцией и вязкостью, однако ведет себя как несжимаемая. Эта программа может показаться скромной, однако она находится в центре гидродинамики и не только заслуживает, но и требует серьезного изучения. Мы начнем с рассмотрения вязкой жидкости, а позже, определив условия, при которых вязкость оказывает малое влияние на течение, опишем подробно движение жидкости только с инерцией.

---

[1]) То есть при отсутствии сжимаемости, вязкости и теплопроводности и т. д.

4

РАВНОМЕРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Введение

В этой и следующей главах будет изучено влияние напряжений, вызываемых вязкостью жидкости. Чтобы наглядно показать это влияние и развить физическое представление о нем, предположим, что исследуемая жидкость несжимаема; как уже отмечалось, такое предположение оказывается хорошим приближением к действительности в широком диапазоне условий, причем основное ограничение сводится к тому, что скорость жидкости должна быть всюду мала по сравнению со скоростью звука. Будем также считать, что нет каких-либо других эффектов, которые могли бы вызвать значительное изменение плотности элементов жидкости (см. § 3.6). При этом уравнение баланса энергии жидкости и термодинамическое уравнение состояния заменяются условием постоянства плотности элемента жидкости

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{4.1.1}$$

Уравнение сохранения массы с учетом (4.1.1) сводится к уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4.1.2}$$

а выражение для напряжений в несжимаемой жидкости

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.1.3}$$

дает возможность написать уравнение движения в виде

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}. \tag{4.1.4}$$

Эти уравнения определяют течение ньютоновой жидкости при одном лишь предположении, что жидкость несжимаема. Наиболее общий вид граничного условия, налагаемого на решение, состоит в том, что все компоненты скорости должны быть непрерывными функциями вплоть до границы твердого тела и жидкости.

Отметим, исходя из общего выражения (3.4.5), что скорость диссипации механической энергии на единицу массы жидкости под влиянием вязкости есть

$$\Phi = 2\frac{\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij}, \quad \text{где} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.1.5}$$

Эта энергия теряется жидкостью и выделяется в виде тепла.

Вязкость жидкости изменяется в основном с изменением температуры, так что когда происходят заметные изменения температуры либо в результате теплопроводности от границы, либо под влиянием тепла, выделяемого за счет вязкой диссипации механической энергии, коэффициент μ нужно рассматривать как функцию координат, полученную на основании распределения температуры. Однако здесь мы будем считать, что коэффициент вязкости μ всюду постоянен.

Массовая сила $\mathbf{F}$ выражает действие гравитационного поля Земли, и в подавляющем большинстве случаев мы примем

$$\mathbf{F} = \mathbf{g},$$

полагая в этой главе, что сила тяжести $\mathbf{g}$ постоянна во всей жидкости.

При этих условиях уравнение движения вязкой жидкости (в векторных обозначениях, в которых оно становится более ясным) имеет вид

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{4.1.6}$$

где ρ и μ — заданные постоянные.

Еще одно упрощение, которое должно быть принято, состоит в том, что плотность жидкости постоянна. В тех случаях, в которых выталкивающие силы, возникающие под действием силы тяжести на жидкость с малыми изменениями плотности, полностью обусловливают движение жидкости, приближение однородной плотности, очевидно, неприемлемо; однако подобные случаи свободной конвекции в книге не рассматриваются.

Добавок к ускорению элемента жидкости, обусловленный вязкими напряжениями, возникающими при данной скорости деформации, очевидно, определяется отношением μ/ρ, а не только одним коэффициентом вязкости μ. Как отмечалось в § 1.6, отношение μ/ρ называется *кинематическим коэффициентом вязкости* и обозначается буквой ν. Ввиду того, что уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \ldots + \nu\nabla^2\mathbf{u},$$

коэффициент ν является по существу *коэффициентом диффузии* для скорости $\mathbf{u}$, имеющим размерность (длина) $\times$ (скорость), как и все коэффициенты диффузии, и играет такую же роль по отношению к динамическому коэффициенту вязкости μ, какую коэффициент термодиффузии $\varkappa = k/\rho c_p$ играет по отношению к коэффициенту теплопроводности k. Значения μ и ν для воздуха и воды при различных условиях приведены в таблицах приложения 1, а их значения для некоторых обычных жидкостей при температуре 15 °C и давлении в одну атмосферу представлены ниже. Заслуживает внимания то, что если значения μ для воздуха, воды и ртути расположить в порядке возрастания, то значения ν

при этом располагаются в порядке убывания; когда важен только кинематический коэффициент вязкости, ртуть по существу оказывается значительно менее вязкой жидкостью, чем воздух.

Вещество	μ, г/см·сек	ν, см^2/сек
Воздух	0,00018	0,15
Вода	0,011	0,011
Ртуть	0,016	0,0012
Оливковое масло	0,99	1,08
Глицерин	23,3	18,5

Численные значения как μ, так и ν для двух обычных жидкостей — воздуха и воды — весьма малы. Пока мы еще не знаем, с чем нужно сравнивать эти значения, имея в виду важность эффектов вязкости, хотя есть много указаний на то, что во многих случаях эти эффекты пренебрежимо малы. Трудно определить даже в общих чертах условия, при которых можно с уверенностью пренебречь эффектами вязкости, и трудно предсказать эти эффекты в случаях, в которых они не являются пренебрежимо малыми. Поэтому мы должны начать с общего изучения эффектов вязкости, прежде чем использовать преимущества, которые дает малость численных значений коэффициентов μ и ν для воздуха и воды.

Модификация давления с учетом влияния массовой силы

Из уравнения (4.1.6) можно видеть, что если плотность ρ однородна, то сила на единицу объема, обусловленная силой тяжести, полностью компенсируется давлением, равным $\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$. Это свидетельствует о том, что можно ввести давление

$$p = p_0 + \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x} + P, \tag{4.1.7}$$

где p_0 — постоянная, а $p_0 + \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ — давление, которое существует в той же массе жидкости в состоянии покоя и которое в движущейся жидкости создает градиент давления, уравновешивающий силу тяжести. Через P обозначена остальная часть давления, которая возникает только под влиянием движения жидкости и которая входит в уравнение

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{4.1.8}$$

Общепринятого названия для P нет. Мы будем называть его *модифицированным давлением*. Следует подчеркнуть, что его

можно ввести только в том случае, когда плотность жидкости однородна, и поэтому массовая сила тяжести *на единицу объема* представима в виде градиента скалярной величины.

После введения модифицированного давления сила тяжести в уравнении движения больше не появляется, и если она также отсутствует в граничных условиях, то можно утверждать, что сила тяжести не оказывает влияния на распределение скорости в жидкости. Однако если в граничных условиях встречается абсолютное давление, как, например, в том случае, когда часть границы является поверхностью раздела с другой жидкостью или, в частности, свободной поверхностью, то в граничных условиях приходится использовать полное выражение для давления (4.1.7), и таким путем влияние силы тяжести снова входит в задачу. Введение модифицированного давления P для жидкости с однородной плотностью полезно только в тех случаях, когда граничные условия содержат только скорость. Так будет почти всегда при рассмотрении движения воздуха; для воды это может быть и не так.

В последующих обсуждениях движений однородной жидкости, для которой в граничные условия входит только скорость и на движение которой сила тяжести поэтому не оказывает влияния и дает лишь добавок $\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ к давлению, согласно (4.1.7), мы будем вводить модифицированное давление и записывать уравнение движения в виде (4.1.8). Однако, следуя обычной практике, это модифицированное давление обозначим той же малой буквой p, которая в более общих условиях представляет абсолютное давление.

Условия, при которых введение модифицированного давления приносит пользу, подобны условиям, при которых выполняется закон Архимеда для движущегося в жидкости тела. Результирующая сила, приложенная со стороны жидкости к погруженному в нее телу с поверхностью A и объемом V, равна сумме величины

$$-\int p\mathbf{n}\,dA$$

и слагаемого от касательных напряжений, которое зависит только от распределения скорости в жидкости. После подстановки вместо давления p его выражения (4.1.7) и использования формулы Остроградского — Гаусса написанный интеграл приводится к виду

$$-\int \nabla(p_0+\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\,dV-\int P\mathbf{n}\,dA=-\rho V\mathbf{g}-\int P\mathbf{n}\,dA.$$

Таким образом, если модифицированное давление P и распределение скорости в жидкости не зависят от действующей на жидкость силы тяжести, а это будет в том случае, когда в граничные условия не входит абсолютное давление, все влияние силы тяжести

на жидкость, поскольку речь идет о силовом воздействии на погруженное тело, заключается в том, что тело испытывает потерю веса, равную весу жидкости, вытесненной этим телом. Можно также показать, что пара сил, приложенная к погруженному в жидкость телу и возникающая под влиянием действия силы тяжести на окружающую тело жидкость, равна по величине и противоположна по знаку паре сил, которую сила тяжести развивает в вытесняемой жидкости. Следовательно, свободное твердое тело, погруженное в жидкость, будет двигаться независимо от действия силы тяжести, если только оно имеет ту же массу и то же положение центра масс, что и вытесненная жидкость.

Существуют аналогичные, хотя и менее важные результаты, касающиеся влияния установившегося вращения на двумерное поле течения. Если движение жидкости рассматривается в ускоренно движущейся системе координат, то форма уравнений движения изменяется лишь за счет добавления массовых сил инерции, согласно выражению (3.2.9). В случае прямоугольной системы координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси z, результирующая этих сил на единицу массы расположена в плоскости (x, y) и имеет компоненты

$$2\Omega v + \Omega^2 x, \quad -2\Omega u + \Omega^2 y,$$

где x, y и u, v — соответствующие компоненты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Далее, в случае двумерного течения несжимаемой жидкости в плоскости (x, y) можно удовлетворить уравнению сохранения массы, полагая (см. § 2.2)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Из этого следует, что уравнение движения во вращающейся системе координат отличается от уравнения движения в абсолютной системе координат только добавлением массовой силы на единицу объема

$$\rho \nabla \left\{ -2\Omega\psi + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) \right\}, \tag{4.1.9}$$

и когда плотность ρ однородна, силы инерции, как и сила тяжести, могут быть скомпенсированы некоторым добавком к давлению; часть этого добавка возникает от кориолисовой силы инерции и часть — от центробежной силы. Таким образом, уравнение движения вновь можно написать в виде (4.1.8), и опять, если только абсолютное давление не входит в граничные условия, то силы инерции не учитываются при определении распределения скорости. Иначе говоря, установившееся вращение двумерного течения без изменения граничных условий относительно вращающейся системы координат не влияет на распределение скорости.

Аналог закона Архимеда для массовой силы (4.1.9) можно установить без особого труда. В случае добавка в выражение (4.1.9) от центробежной силы рассуждение одинаково с рассуждением для силы тяжести, так как обе эти силы представляют собой функции координат пространства. Для того чтобы можно было воспользоваться точно таким же рассуждением для добавка в выражение (4.1.9) от кориолисовой силы, предположим, что функция тока продолжена в область, занятую погруженным твердым телом, некоторым способом, соответствующим движению жидкости в этой области как твердого тела. Тогда добавочная сила воздействия жидкости на тело (на единицу ее глубины), обусловленная действием массовой силы (4.1.9), приложенной к жидкости, определяется интегралом

$$-\int \nabla \left\{ -2\rho\Omega\psi + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 (x^2+y^2) \right\} dA,$$

который берется по площади тела в плоскости (x, y). Эта сила равна и противоположна по знаку результирующей центробежных и кориолисовых сил, которые действуют на жидкость в объеме тела, если бы она двигалась как твердое тело. Соответствующий результат существует и для пары сил, приложенной к телу со стороны жидкости. Из этого следует, что твердое тело, которое совершает свободное движение, будет двигаться таким образом, что на него не влияет равномерное вращение всей системы координат, если тело имеет ту же общую массу и такое же положение центра масс, как и вытесненная жидкость [1]).

Упражнения

1. Покажите, что в несжимаемой жидкости девиатор напряжений, действующий па элемент твердой границы, направлен в точности по касательной к ее поверхности. (Используйте криволинейную систему координат, одна координатная поверхность которой совпадает с твердой границей.)

2. Получите другое возможное выражение силы, действующей на единицу площади элемента поверхности с нормалью $\mathbf{n}$ в несжимаемой жидкости:

$$-p\mathbf{n} + \mu\,(2\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega}).$$

Покажите, что на твердой границе оно сводится к выражению

$$-p\mathbf{n} - \mu\mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega}.$$

[1]) Различие в этом отношении между двумерными и трехмерными движениями может быть показано путем протаскивания тела такой же плотности, что и вода, в одном и том же горизонтальном направлении относительно жидкости в плоском сосуде с водой, совершающей вращение с постоянной угловой скоростью (Тейлор (1921)). Было обнаружено, что круговой цилиндр с вертикальными образующими движется в направлении приложенной к нему силы, как и в невращающейся системе координат, в то время как сфера отклоняется от прямолинейного пути в направлении, противоположном направлению вращения сосуда (это показывает, что добавок к давлению жидкости от кориолисовой силы в данном случае оказывается недостаточным для компенсации кориолисовой силы, действующей на само тело). Установлено также, что вихревое кольцо, движущееся в горизонтальном направлении, также следует по пути, искривленному относительно жидкости в направлении, противоположном вращению системы координат.

4.2. Установившееся течение одного направления

Особенностью уравнения движения (4.1.6) или (4.1.8), которая вызывает наибольшие трудности для анализа, является его нелинейность по скорости $\mathbf{u}$, входящей в выражение (2.1.2) для ускорения жидкого элемента при эйлеровом описании поля течения. Математические трудности, возникающие при рассмотрении полного уравнения движения, настолько велики, что большинство существующих решений получено только в условиях, в которых по каким-либо причинам эти уравнения сводятся к линейным. Среди простейших находятся случаи, в которых вектор скорости всюду имеет одно и то же направление и не изменяется по течению. Тогда конвективная производная скорости обращается тождественно в нуль и ускорение элемента жидкости равно $\partial\mathbf{u}/\partial t$ и имеет лишь одну ненулевую компоненту.

Предварительно укажем точные условия, при которых скорость жидкости в длинной цилиндрической области имеет строго одно направление. Нас интересуют состояния, в которых движение основного потока в направлении оси x, параллельной образующим, установилось и не зависит от концевых эффектов, так что все три компоненты скорости u, v, w в декартовой системе координат не зависят от x. Уравнение движения показывает, что градиент ∇p также не должен зависеть от x. Таким образом, u и v — компоненты скорости двумерного течения, которые никак не связаны с движением в направлении оси x. В таком движении может происходить вязкая диссипация энергии только в том случае, когда энергия непрерывно подводится к жидкости касательными напряжениями, развиваемыми на части границы, движущейся в направлении касательной, т. е., как можно легко показать, только когда

$$\mu \oint \{n_2 (ve_{22} + we_{23}) + n_3 (ve_{23} + we_{33})\}\, dl > 0,$$

где $(0,\ n_2,\ n_3)$ — единичная нормаль к границе и интегрирование выполняется по замкнутой граничной кривой в плоскости поперечного сечения. Следовательно, если, например, граница будет твердой и либо неподвижной, либо движущейся в направлении оси x или будет свободной поверхностью, на которой касательное напряжение равно нулю, то течение обязательно всюду направлено по оси x.

Положим теперь $v = w = 0$, тогда уравнения движения (4.1.8) по осям y и z сводятся к

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{4.2.1}$$

где p — модифицированное давление, как было принято в § 4.1. Уравнение движения по оси x имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{4.2.2}$$

и так как в нем ни первый, ни последний члены не зависят от x, то можно написать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -G(t). \tag{4.2.3}$$

Когда функция G положительна, градиент давления представляет собой постоянную массовую силу, действующую в *положительном* направлении оси x.

В случае установившегося течения, которое будет рассматриваться в этом параграфе, производная $\partial u/\partial t = 0$, величина $(-G)$ есть постоянный градиент давления и уравнение (4.2.2) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{G}{\mu}. \tag{4.2.4}$$

Плотность жидкости не входит в уравнение (4.2.4), так как полное ускорение каждого элемента жидкости равно нулю. Каждый элемент жидкости находится в равновесии, поскольку речь идет о компонентах сил в направлении оси x, под действием нормальных напряжений (градиента давления), которые изменяются с изменением x, и касательных напряжений, вызываемых вязкостью, которые зависят от y и z. (Кроме того, может быть еще нормальное напряжение — скрытое из-за введения модифицированного давления,— изменение которого с изменением координат таково, что уравновешивает силу тяжести, действующую на каждый элемент.)

Теперь нужно решить уравнение (4.2.4), подчиняющееся граничным условиям, с помощью которых в общем случае задаются градиент давления $(-G)$ и значения u при определенных y и z.

Течение Пуазейля

Течение в длинной трубе кругового сечения под действием разности давлений на концах трубы было изучено Гагеном в 1839 г. и Пуазейлем в 1840 г. Можно считать, что течение, как и граничные условия, имеет осевую симметрию, так что u — функция только расстояния r от оси трубы. Соответствующее решение уравнения (4.2.4) таково:

$$u = \frac{G}{4\mu}(-r^2 + A \ln r + B).$$

При $r = 0$ в этом решении имеется нереальная особенность (связанная с конечной силой, действующей на жидкость на единицу

длины отрезка оси), если постоянная A не равна нулю; поэтому выберем именно это значение A. Выбирая постоянную B такой, чтобы получить $u = 0$ на границе трубы при $r = a$, находим

$$u = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2). \tag{4.2.5}$$

Практический интерес представляет объемный поток жидкости через любое сечение трубы, величина которого

$$Q = \int_0^a u\, 2\pi r dr = \frac{\pi G a^4}{8\mu} = \frac{\pi a^4 (p_0 - p_1)}{8\mu l}, \tag{4.2.6}$$

где p_0 и p_1 — (модифицированные) давления в начальном и концевом сечениях отрезка трубы, имеющего длину l. Гаген и Пуазейль установили в экспериментах с водой, что поток зависит от первой степени перепада давления и четвертой степени радиуса трубы (половина этой степени получается вследствие зависимости площади поперечного сечения трубы от ее радиуса, а другая половина связана с увеличением скорости u для данной результирующей силы вязкости при увеличении радиуса трубы). Точность, с которой получено постоянство отношения Q/a^4 в наблюдениях, убедительно подтверждает предположение об отсутствии скольжения частиц жидкости на стенке трубы, а также косвенно подтверждает гипотезу о линейной зависимости вязкого напряжения от скорости деформации в данных условиях.

Касательное напряжение на стенке трубы равно

$$\mu \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{1}{2} Ga,$$

так что полная сила трения в направлении течения на участке трубы длиной l равна

$$2\pi a l \left(\frac{1}{2} Ga\right) = \pi a^2 (p_0 - p_1).$$

Такого выражения для полной силы трения на стенке трубы и следовало ожидать, так как все элементы жидкости внутри этой части трубы в данный момент времени находятся в состоянии установившегося движения под действием нормальных сил $\pi a^2 p_0$ и $\pi a^2 p_1$ на двух концевых сечениях и силы трения на стенке трубы. Кроме того, из выражения (4.1.5) видно, что скорость диссипации механической энергии на единицу массы жидкости под влиянием вязкости определяется в данном случае выражением

$$\Phi = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \frac{G^2 r^2}{4\rho\mu}.$$

Таким образом, полная скорость диссипации в жидкости, заполняющей в данный момент отрезок круговой трубы длиной l, равна

$$\frac{\pi l G^2 a^4}{8\mu} = lQG.$$

В случае, в котором среда в трубе представляет собой капельную жидкость и на обоих концах трубы действует атмосферное давление (как если бы жидкость поступала в трубу из мелкого открытого резервуара и вытекала из конца трубы), градиент давления вдоль трубы создается силой тяжести. Абсолютное давление в данном случае одно и то же на обоих ее концах и поэтому постоянно во всей жидкости, так что модифицированное давление равно $-\rho g x \cos\alpha$ и

$$G = -\frac{dP}{dx} = \rho g \cos\alpha, \tag{4.2.7}$$

где α — угол наклона трубы к направленной вниз вертикали. Приведенное выше выражение для скорости диссипации в жидкости, занимающей отрезок трубы длиной l, равно скорости, с которой та же масса жидкости теряет потенциальную энергию силы тяжести, как и должно быть.

Течение в трубах некругового поперечного сечения

Аналогичные соотношения применимы к установившемуся течению в трубах с различными поперечными сечениями, хотя только в немногих частных случаях распределение скорости можно определить аналитически.

Рассмотрим, например, распределение скорости

$$u = \frac{G}{2\mu\,(b^{-2}+c^{-2})}\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right); \tag{4.2.8}$$

оно является решением уравнения (4.2.4) и удовлетворяет граничным условиям течения в трубе эллиптического поперечного сечения с полуосями b и c.

Чтобы найти распределение скорости в трубе прямоугольного поперечного сечения со сторонами $y = \mp b$, $z = \mp c$ (пусть $c > b$), заметим, что разность

$$u - \frac{G}{2}\frac{b^2 - y^2}{\mu}$$

представляет собой четную функцию как от y, так и от z, которая удовлетворяет уравнению Лапласа и равна нулю при $y = \mp b$. Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье по y

$$\sum_{n \text{ нечетное}} A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n z}{2b} \cos\frac{\pi n y}{2b};$$

коэффициенты A_n можно найти из граничного условия при $z = \mp c$. Такой метод решения подробно объяснен в рассматриваемой ниже задаче о малярной кисти (для краски).

В обоих указанных случаях нетрудно определить связь между объемным потоком и градиентом давления.

Двумерное течение

В данном случае основное уравнение есть

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{G}{\mu}. \tag{4.2.9}$$

и можно без потери общности считать, что течение происходит между плоскостями $y = 0$ и $y = d$. Если две граничные плоскости твердые и движутся в направлении оси x со скоростями нуль и U соответственно, то искомое решение уравнения (4.2.9) имеет вид

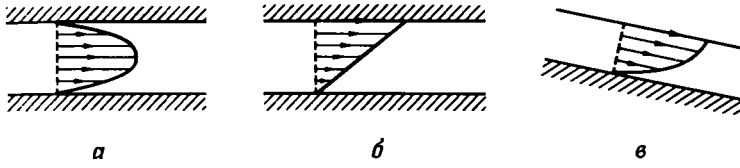
$$u = \frac{G}{2\mu} y(d-y) + \frac{Uy}{d}. \tag{4.2.10}$$

Когда две твердые плоскости неподвижны относительно друг друга, профиль скоростей параболический; когда же градиент давления G равен нулю, получается простое течение сдвига с линейным профилем скорости, причем каждый тонкий слой жидкости движется равномерно под действием равных и противоположных по знаку сил на его обеих сторонах (рис. 4.2.1). Очевидно, что можно наложить эти параболический и линейный профили также и в случае, в котором направления градиента давления и относительное движение двух плоскостей не параллельны, хотя тогда результирующее течение уже не будет двумерным.

Установившееся двумерное течение одного направления может также возникать, когда вязкая жидкость стекает по наклонной плоскости слоем постоянной толщины h. Граничное условие, которое необходимо удовлетворить на (плоской) свободной поверхности, состоит в том, чтобы касательное напряжение на ней обратилось в нуль (см. § 3.3), т. е. было $du/dy = 0$. Таким образом находится профиль скорости

$$u = \frac{G}{2\mu} y(2h-y) \tag{4.2.11}$$

(имеющий такую же форму, как и для двумерного течения между двумя относительно неподвижными параллельными твердыми плоскостями, расположенными на расстоянии $2h$ друг от друга), а G имеет значение (4.2.7). На практике может случиться так, что единственными известными величинами оказываются угол наклона границы и объемный расход Q жидкости через плоскость, нормальную к течению, на единицу ширины этой плоскости;



Р и с. 4.2.1. Установившееся двумерное течение: *а* — под действием градиента давления между двумя неподвижными твердыми плоскостями; *б* — вызванное относительным движением двух твердых плоскостей; *в* — в слое на наклонной плоскости, вызванное действием силы тяжести.

тогда из формулы (4.2.11) находим объемный расход

$$Q = \int_0^h u\,dy = \frac{Gh^3}{3\mu}. \qquad (4.2.12)$$

Написанное выражение показывает, что силы тяжести и силы вязкости, действующие на слой будут уравновешиваться, если его толщина равна

$$h = \left(\frac{3\mu Q}{G}\right)^{1/3} = \left(\frac{3\mu Q}{\rho g \cos\alpha}\right)^{1/3}. \qquad (4.2.13)$$

Если объемный поток жидкости, стекающей с наклонной плоскости, внезапно изменится на малую величину δQ, то толщина слоя увеличится на $(dh/dQ)\,\delta Q$. Пусть область перехода от одной толщины к другой перемещается вниз по плоскости, например со скоростью V; тогда сравнение установившегося объемного потока на каждой стороне от области перехода в системе координат, движущейся со скоростью V, показывает, что

$$V\delta h = \delta Q$$

или

$$V \approx \frac{dQ}{dh} = \left(\frac{9Q^2\rho g \cos\alpha}{\mu}\right)^{1/3}. \qquad (4.2.14)$$

Модель малярной кисти

Когда кисть, смоченная в краске, проводится по поверхности твердой стенки, некоторая часть краски снимается с кисти силой трения на твердой границе и остается в виде слоя за кистью, толщина которого вскоре становится постоянной под действием поверхностного натяжения. Определение количества краски, остающейся на стенке,— задача, имеющая практическое значение; полезно выяснить, как это количество зависит от свойств краски и кисти. Рассматриваемая ниже модель кисти (которая не претендует на близость к реальности) дает грубое представление о процессе и дает еще один пример установившегося течения одного направления.

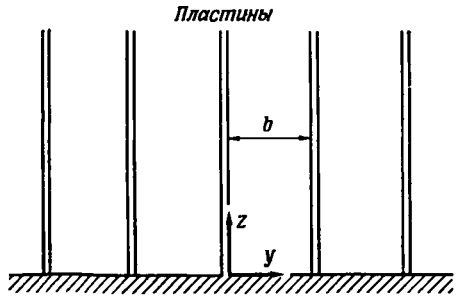


Рис. 4.2.2. Схема модели малярной кисти.

Предположим, что кисть состоит из большого числа параллельных и равноотстоящих друг от друга тонких твердых пластин, которые совместно скользят по плоской стенке в направлении их линии контакта со стенкой вдоль оси x (рис. 4.2.2). Пространство между пластинами заполнено жидкостью, а так как пластины перемещаются вдоль стенки, то жидкость приводится в движение относительно этих пластин под действием касательного напряжения на стенке. Предположим прежде всего, что пластины имеют бесконечные размеры в направлениях осей x и z, так что результирующее движение представляет собой установившееся течение одного направления. В данном случае градиента давления нет, и уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (4.2.15)$$

Оси координат удобно связать с пластинами, тогда граничные условия течения в канале между двумя соседними пластинами будут

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b, \qquad 0 < z < \infty,$$
$$u = U \text{ при } z = 0, \qquad 0 < y < b,$$

где U — относительная скорость движения кисти и стенки.

Математически эта задача представляет собой хорошо известную краевую задачу, и мы начнем с исследования решений с разделенными переменными [1]). Одно такое решение, удовлетворяющее однородным граничным условиям при $y = 0$ и $y = b$, определяется функцией

$$u = \sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_n e^{-n\pi z/b} + B_n e^{n\pi z/b}\right),$$

в которой n принимает целые значения. Появление больших скоростей при $z \to \infty$ исключается физическими условиями задачи,

[1]) См., например, Churchill R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill, 1941 [а также Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1953.— *Ред.*].

так что искомое решение должно иметь вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi z/b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{4.2.16}$$

если можно подобрать такие константы A_n, которые позволяют удовлетворить оставшемуся условию при $z = 0$. Из этого условия следует, что

$$A_n = \frac{2U}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy = \begin{cases} 0, & n\text{ — четное}, \\ \dfrac{4U}{n\pi}, & n\text{ — нечетное}, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$u(y, z) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} e^{-n\pi z/b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{4.2.17}$$

Этот ряд, а также ряды, получаемые из него путем почленного дифференцирования по y или по z, сходятся при $z > 0$; если $z = 0$, то ряд (4.2.17) сходится, хотя, конечно, существует разрыв решения u при $y = 0$ и при $y = b$, и почленное дифференцирование не дает рядов, сходящихся при $z = 0$.

Этим распределением скорости можно теперь воспользоваться для получения оценки толщины слоя жидкости, который будет оставаться на стенке позади кисти, если предположить, что все пластины имеют заднюю кромку при одном и том же значении x. Будем считать, что жидкость занимает только пространство между пластинами, за исключением области вблизи стенки, где она притормаживается под действием трения на стенке, и предположим, что полученное выше распределение скорости справедливо до выходной кромки пластин. Объемный расход жидкости, вытекающей из одного канала, есть

$$Q = \int_0^b \int_0^{\infty} u\, dy\, dz = \frac{8Ub^2}{\pi^3} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^3} \approx 0{,}27Ub^2,$$

и, следовательно, средняя толщина слоя, остающегося на стенке, равна 0,27 b. Роль, которую играет расстояние между пластинами, очевидна. Вязкость жидкости не входит в выражение для толщины слоя, как и следовало ожидать от модели, в которой результирующая сила вязкости, действующая на каждый элемент жидкости, равна нулю; на практике же важны все свойства краски вследствие того, что способ, которым краска покидает кисть, несомненно, по существу намного сложнее принятого здесь, а также, возможно, и того, что связь между напряжением и скоростью деформации для краски не всегда имеет принятую здесь линейную форму.

Замечание об устойчивости

Выводы из этого параграфа (и из многих последующих) должны быть дополнены замечанием, что многие встречаемые на практике установившиеся течения одного направления при некоторых условиях оказываются неустойчивыми. Простое течение Пуазейля в действительности было первым полем течения, которое систематически используется для исследования явления гидродинамической неустойчивости. Рейнольдс в 1883 г. установил экспериментально, что если объемный поток жидкости через трубу достаточно мал, то описанное выше поле течения реализуется, а случайные возмущения погашаются; однако при более высоких скоростях в потоке появляются перемежающиеся колебания, и в конце концов он превращается в неустановившееся и сильно нерегулярное течение (это явление называется *турбулентностью*). Условия, при которых различные установившиеся течения одного направления устойчивы и, следовательно, могут существовать на практике, во всех случаях точно неизвестны, хотя вообще верно то, что эти течения устойчивы для достаточно малых значений безразмерного параметра $\mathrm{Re} = UL/\nu$ (числа Рейнольдса), где U и L — соответственно характерные скорость и поперечный размер рассматриваемого течения. Рейнольдс оценил критическое значение этого параметра для течения Пуазейля (для которого L — диаметр трубы, а U — средняя скорость в ее поперечном сечении) величиной приблизительно 6400, что соответствует наблюдению установившегося течения воды при 20 °C для значений UL, меньших 64 см^2/сек. Таким образом, здесь, как и в других случаях, условия существования устойчивого установившегося течения таковы, что они встречаются в природе и в лаборатории, так что полученные выше решения имеют практическую ценность; в то же время необходимо знание свойств и турбулентного течения, которое возникает в условиях неустойчивости установившихся течений; однако этот вопрос в данной книге не рассматривается.

4.3. Неустановившееся течение одного направления

Как было показано в § 4.2, градиент давления в течении одного направления направлен вдоль линий тока и зависит только от времени t. Почти во всех случаях такого течения, рассматриваемых в этом параграфе, движение жидкости создается различными неустановившимися движениями границ, причем давление далеко вверх и вниз по потоку сохраняется одинаковым во время движения. Следовательно, для этих случаев $G = 0$ и уравнение (4.2.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{4.3.1}$$

Это уравнение, называемое *уравнением диффузии* или теплопроводности, оказывается точно таким же, как уравнение, описывающее двумерное распределение температуры в неподвижной среде с коэффициентом термодиффузии ν, и в связи с этим можно воспользоваться уже установленными для него математическими результатами [1]). Один наиболее полезный из этих результатов заключается в решении, описывающем распределение температуры в среде с первоначально постоянной температурой во всей плоскости (y, z) при выделении в момент $t = 0$ в точке $y = y'$, $z = z'$ конечного количества тепла («начальный точечный источник»). Если величину u считать приращением температуры в точке (y, z) в текущий момент времени t, то это решение имеет вид

$$u(y, z, t) = \frac{A}{4\pi\nu t} \exp\left\{-\frac{(y-y')^2}{4\nu t} - \frac{(z-z')^2}{4\nu t}\right\}, \qquad (4.3.2)$$

где постоянная A — мера количества выделяемого тепла, определяемая из начальных условий,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int u(y, z, 0)\, dy\, dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int u(y, z, t)\, dy\, dz.$$

На основании этого элементарного решения можно построить интеграл, выражающий распределение температуры в любой момент t через ее распределение по всей плоскости (y, z) в начальный момент времени, а именно

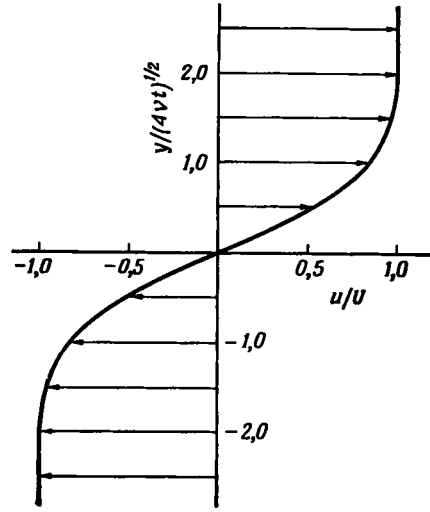
$$u(y, z, t) = \frac{1}{4\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\int u(y', z', 0) \exp\left\{-\frac{(y-y')^2}{4\nu t} - \frac{(z-z')^2}{4\nu t}\right\} dy'\, dz'. \qquad (4.3.3)$$

Основной смысл этого решения состоит в том, что поскольку уравнение (4.3.1) линейно и поскольку не требуется удовлетворять граничные условия, то выделенное вначале тепло в каждом элементе площади на плоскости (y, z) распространяется как будто от изолированного начального точечного источника с постоянной A в решении (4.3.2), замененной на $u(y', z', 0)\, \delta y' \delta z'$. Аналогичные решения имеются для пространств одного и трех измерений; первое из них может быть получено из решения (4.3.3), если функцию $u(y', z', 0)$ считать не зависящей от z' и проинтегрировать (4.3.3) по z'.

Сглаживание плоского разрыва скорости

Простая и важная задача, к которой может быть применено решение (4.3.3), состоит в определении влияния вязкости на переход от скорости в одном установившемся равномерном потоке

[1]) См. Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, «Наука», М., 1964.



Р и с. 4.3.1. Переходный слой между двумя параллельными потоками.

к скорости в другом таком же соприкасающемся с ним потоке. Предположим, что переходный слой сначала имеет нулевую толщину (такое предположение само по себе не соответствует реальному начальному условию, однако имеются возможности использовать такое решение) и, следовательно, представляет собой вихревую пелену, совпадающую с плоскостью $y = 0$. Тогда, рассматривая систему координат, движущуюся со средней скоростью двух потоков, и учитывая скачок скорости $2U$ поперек слоя, мы должны принять

$$u(y', z', 0) = \pm U \quad \text{при} \quad y' \lessgtr 0.$$

При этом решение (4.3.3) дает

$$u(y, t) = \frac{U}{\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^y \exp\left(-\frac{y'^2}{4\nu t}\right) dy' = U \operatorname{erf}\left\{\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right\}. \quad (4.3.4)$$

Это распределение скоростей, зависящее только от отношения $y/\sqrt{\nu t}$, изображено на рис. 4.3.1. С течением времени изменяется только ширина переходного слоя (как $t^{1/2}$); если мы условимся определять толщину слоя расстоянием вдоль оси y от места, где $u = 0{,}99U$, до места, где $u = -0{,}99U$, то толщина этого слоя будет равна $8{,}0\sqrt{\nu t}$.

Можно было сразу ожидать, что распределение скорости должно быть функцией только отношения $y/\sqrt{\nu t}$, так как размерных

параметров задачи не достает для того, чтобы обеспечить зависимость решения по отдельности от y и от t. При замене зависимой переменной отношением $u/U = f(y, t)$ наша задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{4.3.5}$$

при начальном условии

$$f(y, 0) = \pm 1, \quad y \lesseqgtr 0.$$

Единственной размерной величиной, от которой, кроме координаты y и времени t, может зависеть функция f, является ν. Из этих трех величин можно составить только одну безразмерную комбинацию, а именно $y/\sqrt{\nu t}$, поэтому требование независимости распределения скорости от используемых размерных единиц неизбежно приводит к утверждению о зависимости f только от отношения $y/\sqrt{\nu t}$. Опираясь на этот вывод, можно было бы преобразовать уравнение (4.3.5) в обыкновенное дифференциальное уравнение с единственной независимой переменной $\eta = y/\sqrt{\nu t}$; его решением вновь будет (4.3.4). Вообще в механике жидкости имеется много задач, в которых бывает выгодно предварительно установить по соображениям размерностей, что различные переменные (координаты и время) должны появляться в решении только в определенных комбинациях и что исходное дифференциальное уравнение в частных производных может быть преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение. Такое решение, содержащее время только в сочетании с координатой, часто называют *подобным* (*автомодельным*) решением, так как профиль распределения скорости по координате в любой момент времени подобен самому себе.

Выражение (4.3.4) описывает скорость в переходном слое, который возникает из начального разрыва на общей границе двух потоков, и нетрудно видеть, что оно дает также асимптотическое распределение скорости при $t \to \infty$ для произвольной начальной формы переходного слоя. Предположим, что при $t = 0$ распределение скорости в слое имеет вид

$$u = \frac{y}{|y|} U + F(y), \tag{4.3.6}$$

где $F(y) \to 0$ при $y \to \mp \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, dy = 0$ (последнее условие достигается путем соответствующего выбора положения начала координат $y = 0$). Кроме того, если функция F такова, что инте-

грал $\int_{-\infty}^{\infty} |F|\,dy$ ограничен, то мы можем построить функцию

$$u(y, t) = U \operatorname{erf}\left\{\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right\} + \int_{-\infty}^{\infty} \{A(k, t)\sin ky + B(k, t)\cos ky\}\,dk, \tag{4.3.7}$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.3.1), если

$$\begin{aligned} A(k, t) &= A(k, 0)\exp(-k^2\nu t), \\ B(k, t) &= B(k, 0)\exp(-k^2\nu t) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

(дифференцирование под знаком интеграла в выражении (4.3.7) подтверждается апостериори очевидной равномерной сходимостью дифференцируемого интеграла при $t > 0$), и которая удовлетворяет начальному условию (4.3.6), если функции $A(k, 0)$, $B(k, 0)$ выбраны в качестве коэффициентов в представлении $F(y)$ интегралом Фурье. Затем мы видим, что интеграл в выражении (4.3.7) стремится к нулю при $t \to \infty$ по крайней мере как t^{-1}, так как $A(0, 0) = 0$ по определению и $B(0, 0) = 0$ ввиду условия $\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,dy = 0$. Таким образом, распределение скорости в слое в конце концов оказывается таким же, как если бы он образовался из простого разрыва.

Этот пример неустановившегося течения одного направления иллюстрирует несколько характерных свойств рассмотренного вязкого течения и некоторых других близких ему. Во-первых, существует постепенное распространение или диффузия изменения скорости поперек линий тока, что происходит под влиянием касательной компоненты силы, приложенной к плоскостям, нормальным к оси y. Условная глубина проникновения этих изменений скорости в области однородной скорости через некоторый промежуток времени t имеет порядок $\sqrt{\nu t}$. Скорость этого проникновения меньше для жидкостей с меньшим кинематическим коэффициентом вязкости и уменьшается с увеличением времени t, так как градиенты скорости и их производные по времени становятся постепенно все меньше. Во-вторых, распределение скорости в слое асимптотически стремится к автомодельной форме, зависящей только от $y/\sqrt{\nu t}$ при произвольной начальной форме переходного слоя. Эта асимптотическая форма устанавливается вследствие того, что отклонение начального распределения скорости от простого разрыва эквивалентно действию множества начальных «источников» и «стоков» с нулевой полной интенсивностью, влияние которых постепенно исчезает, по мере того как они распространяются и накладываются друг на друга.

Плоская граница, внезапно приводимая в движение в покоящейся жидкости

Предположим, что полубесконечная область неподвижной жидкости ограничена твердой плоскостью ($y = 0$), которая мгновенно приводится в движение со скоростью U в своей плоскости и затем продолжает двигаться с этой скоростью. Жидкость начинает двигаться под влиянием вязкого напряжения на пластине, причем распределение скорости, как и в предыдущем примере, определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.3.9}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(y, 0) &= 0 \quad \text{при } y > 0, \\ u(0, t) &= U \quad \text{при } t > 0. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Параметр U фактически можно исключить из задачи, используя в качестве независимой переменной отношение u/U; далее, согласно анализу размерностей, мы можем заметить, что отношение u/U должно быть функцией только одной комбинации $y/\sqrt{\nu t}$, как уже отмечалось ранее. Однако нет необходимости производить расчеты, так как путем выбора неподвижных относительно плоскости осей координат задачу можно преобразовать так, что она совпадает с предыдущей. Теперь граничные условия

$$\begin{aligned} u(y, 0) &= -U \text{ при } y > 0, \\ u(0, t) &= 0 \qquad \text{при } t > 0 \end{aligned}$$

эквивалентны граничным условиям для половины переходного слоя, который образуется из простого разрыва на общей границе двух потоков со скоростями $-U$, $+U$, причем скорость при $y = 0$ все время равна нулю вследствие антисимметрии относительно оси $y = 0$. Таким образом, решение исходной задачи (4.3.9) и (4.3.10) представляется в виде

$$u(y, t) = U - U \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4\nu t}}; \tag{4.3.11}$$

качественные свойства этого решения можно объяснить, как и раньше. Сила трения на единицу площади, развиваемая жидкостью на пластине, равна

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\rho U^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\nu}{U^2 t}};$$

убывание силы трения как $t^{-1/2}$ находится в соответствии с утолщением области переменных скоростей.

Твердая граница, внезапно приводимая в движение относительно другой неподвижной границы

Пусть жидкость ограничена двумя твердыми плоскими границами при $y = 0$ и $y = d$, в начальный момент она находится в состоянии покоя, а ее движение, как и раньше, возникает в результате того, что нижняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость U в своей плоскости, причем верхняя граница остается неподвижной. Дифференциальным уравнением задачи будет, как и раньше, уравнение (4.3.9) с граничными условиями

$$u(0, t) = U, \quad u(d, t) = 0 \text{ при } t > 0,$$
$$u(y, 0) = 0 \text{ при } 0 < y \leqslant d.$$

Поскольку в задачу входит размерный параметр d, отношение $y/\sqrt{\nu t}$ больше не является единственной безразмерной комбинацией из имеющихся в нашем распоряжении параметров и нет оснований надеяться получить автомодельное решение.

Подходящее решение уравнения (4.3.9) удобнее найти, введя сначала новую зависимую переменную

$$w(y, t) = U\left(1 - \frac{y}{d}\right) - u,$$

которая удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению, но имеет однородные граничные условия при $y = 0$ и $y = d$. Частное решение w, которое удовлетворяет этим двум граничным условиям, имеет вид

$$\exp\left(-n^2\pi^2 \frac{\nu t}{d^2}\right) \sin \frac{n\pi y}{d} \tag{4.3.12}$$

при n целом. Теперь попытаемся удовлетворить условию для функции w при $t = 0$ посредством наложения семейства таких решений, т. е. будем искать величины констант A_n так, чтобы выполнялось равенство

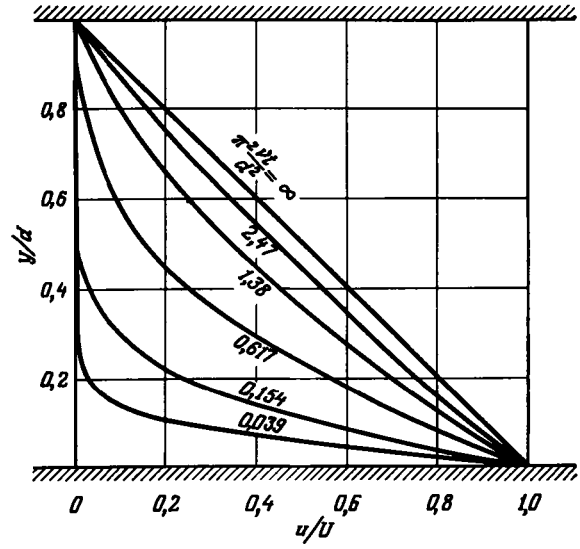
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{d} = w(y, 0) = U\left(1 - \frac{y}{d}\right).$$

Отсюда следует, что

$$A_n = \frac{2}{d} \int_0 U\left(1 - \frac{y}{d}\right) \sin \frac{n\pi y}{d}\, dy = \frac{2U}{\pi n}. \tag{4.3.13}$$

Таким образом, искомое распределение скорости определяется выражением

$$u(y, t) = U\left(1 - \frac{y}{d}\right) - \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{\nu t}{d^2}\right) \sin \frac{n\pi y}{d}. \tag{4.3.14}$$



Р и с. 4.3.2. Развитие из состояния покоя установившегося течения между параллельными пластинами при их относительном движении.

Форма полученного ряда Фурье отражает существующий разрыв функции u по y при $y = 0$, когда $t = 0$. Это решение в виде ряда не очень удобно для проведения вычислений при $\nu t \ll d^2$, так как тогда ряд сходится очень медленно, и более подходящее для этого случая решение было найдено с помощью преобразования Лапласа в связи с аналогичной задачей теплопроводности в неподвижной среде.

Профили скорости для различных значений $\nu t/d^2$ на рис. 4.3.2 показывают, каким образом влияние неподвижной верхней границы, вначале пренебрежимо малое, постепенно сказывается на распространении изменений скорости. Как и следовало ожидать, скорость асимптотически стремится к величине, соответствующей установившемуся течению между двумя твердыми плоскостями в относительном движении (см. § 4.2); в противоположность этому в предыдущем случае, в котором верхней границы не было, изменение скорости продолжает распространяться в невозмущенной жидкости бесконечно долго. Скорость, с которой члены ряда в выражении (4.3.14) стремятся к нулю, растет с ростом n, и дольше всех сохраняется первый член ($n = 1$). Как только этот первый член становится доминирующим, отклонение от асимптотического установившегося состояния затухает приблизительно по экспоненциальному закону с постоянной («периодом полураспада»), равной $d^2/\pi^2\nu$.

Течение, вызываемое колебанием плоской границы

Демпфирующее и сглаживающее действие, присущее процессу вязкой диффузии, ясно видно для течения, производимого плоской твердой границей, движущейся в своей плоскости с синусоидальным законом изменения скорости. Предположим, что верхняя половина плоскости (x, y) занята жидкостью, причем твердая граница совпадает с $y = 0$ и имеет скорость $U\cos nt$. На практике движение жидкости начинается из состояния покоя, и некоторое время после начала движения поле скорости находится в «переходном режиме» и зависит от начальных условий. Можно показать, что скорость жидкости постепенно становится гармонической функцией времени t, изменяющейся с такой же частотой, как и скорость границы, и здесь будет рассматриваться именно это установившееся периодическое движение.

В соответствии со сказанным положим

$$u(y, t) = \mathscr{R}\{e^{int} F(y)\}, \tag{4.3.15}$$

где через $\mathscr{R}$ обозначена действительная часть соответствующего комплексного выражения, причем комплексная форма записи используется только для удобства. Из (4.3.9) находим уравнение

$$inF = \nu \frac{d^2F}{dy^2},$$

единственное решение которого, остающееся конечным при $y \to \infty$, имеет вид

$$F(y) = A \exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{n}{2\nu}}\, y\right).$$

Для того чтобы скорость жидкости при $y = 0$ была равна скорости колеблющейся границы, нужно положить $A = U$; отсюда получим решение

$$u(y, t) = U \exp\left(-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}\, y\right) \cos\left\{nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}}\, y\right\}. \tag{4.3.16}$$

Этот профиль скорости можно назвать затухающей поперечной «волной», длина которой равна $2\pi\,(2\nu/n)^{1/2}$, «распространяющейся» в направлении оси y с фазовой скоростью $(2\nu n)^{1/2}$ и затуханием амплитуды колебаний по закону $\exp\{-(n/2\nu)^{1/2} y\}$. Способ, которым параметры n и ν входят в формулу длины волны и фазовой скорости, можно объяснить, заметив, что расстояние, на которое может распространиться изменение скорости за время t, имеет порядок $(\nu t)^{1/2}$; формулу затухания колебаний объяснить труднее, если не привлекать обычных рассуждений теории размерности. Отношение амплитуд колебаний в двух точках, расположенных друг от друга на расстоянии одной длины волны, т. е. в двух соседних точках, в которых колебание происходит в одной

фазе, равно $e^{-2\pi}$ ($\approx$0,002), и, учитывая малость этого отношения, можно считать, что движение по существу ограничено «глубиной проникания», равной части длины волны, т. е. величиной порядка $(\nu/n)^{1/2}$.

Следует отметить, что благодаря линейности дифференциального уравнения и граничных условий полученное выше решение можно применить для любой гармонической компоненты скорости твердой границы и использовать его для построения решения в случае более общего закона периодического движения твердой границы.

Решение (4.3.16) имеет и другие непосредственные приложения, такие, как суточное изменение температуры в верхних слоях почвы под влиянием солнечной радиации. Можно принять величину коэффициента термодиффузии для почвы приблизительно равной 0,01 см^2/сек; при этом длина волны суточного изменения температуры (температура на поверхности берется в виде простой гармоники по времени t) равна приблизительно одному метру и суточные изменения температуры будут очень малыми на глубинах такого порядка. Кроме того, позже (в § 5.14) мы убедимся, что при некоторых условиях течение в окрестности поверхности твердого тела при его поступательных колебаниях приближенно описывается решением (4.3.16) и что работа, совершаемая против сил трения за один период движения тела, может быть получена исходя из этого решения.

Начало течения в трубе

Наконец мы рассмотрим случай, в котором течение вызывается не движущейся границей, а приложенным градиентом давления. Жидкость, сначала находящаяся в состоянии покоя в длинной трубе кругового поперечного сечения, приводится в движение за счет разности давлений на ее концах, приложенной мгновенно и затем поддерживаемой постоянной. Эта разность давлений немедленно порождает однородный градиент давления вдоль оси трубы, например $-G$, во всей жидкости, и, следовательно, уравнение, которому должна удовлетворять скорость u вдоль оси трубы, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{G}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{4.3.17}$$

где величина G постоянна. Граничные и начальные условия задачи

$$u = 0 \text{ при } r = a \text{ для всех } t,$$

$$u = 0 \text{ при } t = 0 \text{ для } 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Уравнение (4.3.17) можно сделать однородным, используя в качестве зависимой переменной отклонение скорости от ее

асимптотически установившегося значения, выражаемого формулой (4.2.5). С указанной новой переменной

$$w(r, t) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2) - u$$

приходим к задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

$$w(a, t) = 0, \quad w(r, 0) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2).$$

Частное решение написанного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям при $r = a$, есть

$$J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а λ_n — один из положительных корней уравнения $J_0(\lambda) = 0$. Используя полную систему этих частных решений, можно удовлетворить условию при $t = 0$. Таким образом, w представляется рядом Фурье — Бесселя [1])

$$w(r, t) = \frac{G}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right), \qquad (4.3.18)$$

коэффициенты A_n которого должны удовлетворять равенству

$$a^2 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right),$$

из которого следует, что

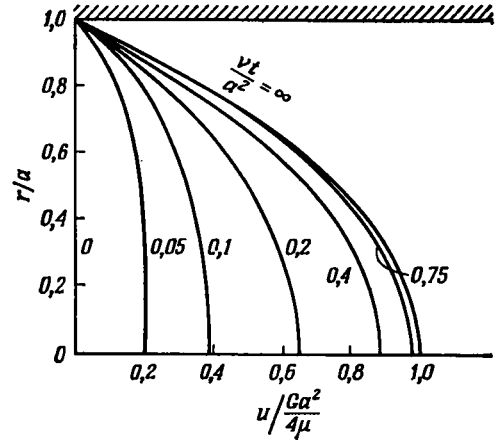
$$A_n = \frac{2a^2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x(1 - x^2) J_0(\lambda_n x)\, dx = \frac{8a^2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}.$$

Окончательно распределение скорости выражается формулой

$$u(r, t) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2) - \frac{2Ga^2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right). \qquad (4.3.19)$$

Изменение скорости u поперек трубы представлено на рис. 4.3.3 для нескольких различных значений $\nu t/a^2$. Вначале вся жидкость имеет ускорение G/ρ, однако по мере того, как скорость возрастает, тормозящее влияние стенок распространяется все дальше

[1]) См. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, 1958 (есть русский перевод первого издания: Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 1, 2, ИЛ, М., 1949.— *Ред.*].



Р и с. 4.3.3. Течение в начальном участке круглой трубы. Профили скорости в различные моменты времени (Шиманский (1932)).

внутрь жидкости. Центральная часть жидкости, скорость которой возрастает со временем как Gt/ρ, сужается до тех пор, пока при t порядка $a^2/(\nu\lambda_1^2)$, $\lambda_1 = 2{,}41$, влияние стенки не распространится на всю жидкость и скорость на оси трубы $r = 0$ не перестанет расти. Как и в предыдущих случаях, приближение к установившемуся состоянию определяется в основном первым членом ряда (4.3.19).

Упражнения

1. Круговой цилиндр бесконечной длины радиуса a помещен в покоящуюся всюду жидкость и приводится мгновенно в движение с постоянной скоростью U в направлении его оси. Покажите, что сила трения, действующая на единицу длины цилиндра в момент времени t после начала движения, определяется интегралом

$$\frac{8\mu U}{\pi}\int_0^\infty \frac{\exp(-k^2\nu t)\,dk}{k\,[J_0^2(ka)+Y_0^2(ka)]},$$

асимптотическое выражение которого при $t \to \infty$ равно $4\pi\mu U/\ln(\nu t/a^2)$.

2. Получите выражение через функции Бесселя для скорости течения в длинной прямой круглой трубе, вызванного колебанием осевого градиента давления $-G + C\cos nt$, где G, C и n — постоянные, и исследуйте предельные случаи $n \to 0$ и $n \to \infty$.

4.4. Слой Экмана на границе вращающейся жидкости

Рассмотрим большую массу воды, первоначально находящуюся в покое под влиянием силы тяжести и приводящуюся в движение посредством воздействия на нее постоянного каса-

тельного напряжения, приложенного на ее горизонтальной свободной поверхности. Это простая задача неустановившегося течения одного направления, в котором скорость $u\,(y,\ t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.3.9) и граничным условиям

$$u\,(y,\ 0)\ =0$$

в начальный момент и

$$\frac{\partial u}{\partial y}=S \quad \text{при} \quad y=0,$$

$$u\to 0 \quad \text{при} \quad y\to-\infty$$

для всех значений времени t, где μS — постоянное напряжение на свободной поверхности. Дифференцируя уравнение (4.3.9) по y, мы получаем уравнение и граничные условия для производной $\partial u/\partial y$, которые совпадают с граничными условиями для переменной u в задаче о течении полубесконечной жидкости, создаваемом плоской твердой границей, движущейся с постоянной скоростью в ее плоскости. Таким образом, скорость u в рассматриваемой здесь задаче получается небольшим видоизменением выражения (4.3.11)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=S+S\operatorname{erf}\left\{\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right\} \tag{4.4.1}$$

и его интегрированием:

$$u=Sy+Sy\operatorname{erf}\left\{\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right\}+2S\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right). \tag{4.4.2}$$

Это решение применимо при соответствующих условиях к распределению скорости в воде, которая приводится в движение ветром, дующим с постоянной скоростью над ее свободной поверхностью; правда, скорость воды на свободной поверхности с течением времени увеличивается и в результате этого напряжение, развиваемое ветром на воде, может изменяться, однако скорости воздуха обычно оказываются значительно больше скоростей воды, и это изменение напряжения мало. Тогда возникает естественный вопрос, применима ли формула (4.4.2) к системам большого масштаба и, в частности, к дрейфу на поверхности моря, вызываемому ветром. Течения в атмосфере и в океане редко представляют собой такие невозмущенные или равномерные течения над горизонтальными плоскостями, какие описаны выше, и перенос количества движения, создаваемый случайными флуктуациями скорости жидкости (турбулентностью), обычно значительно более важен, чем вязкие напряжения, однако, не говоря уже об этих очень сложных явлениях, можно убедиться, что вращение Земли оказывает существенное влияние на поверхностные движения воды.

Уравнение движения в осях, связанных с Землей, содержит силы инерции, которыми, как видно из выражения (3.2.9), являются: 1) кориолисова сила $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (на единицу массы жидкости), где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли, и 2) центробежная сила, которая приближенно однородно распределена на протяжении больших областей земной поверхности и, следовательно, эквивалентна по своему влиянию (малому) изменению ускорения силы тяжести. В движении, подобном описываемому решением (4.4.2), скорость заметно изменяется на расстояниях порядка $\sqrt{\nu t}$, а сила вязкости на единицу массы жидкости имеет порядок $|\mathbf{u}|/t$; таким образом, кориолисова сила становится сравнимой по величине с силой вязкости, когда время t имеет величину порядка одного дня, и очевидно, что этот случай имеет отношение к геофизическим дрейфовым движениям.

Оказывается, что учет влияния кориолисовой силы в движениях, подобных (4.4.2), приводит к новому удивительно простому распределению скоростей, которое играет важную роль во многих вращающихся системах, что и оправдывает обсуждение его здесь. Основные свойства этого нового распределения скоростей заключаются в том, что оно является установившимся и что изменение скорости ограничено слоем конечной толщины, прилегающим к границе. Установившийся характер течения становится возможным в силу того, что если скорость жидкости зависит только от одной вертикальной координаты и изменяется как по направлению, так и по величине, то сила вязкости может быть всюду перпендикулярной локальной скорости, подобно кориолисовой силе, которая оказывается единственной внешней силой, действующей на жидкость. Установившееся течение можно было бы обнаружить путем анализа развития движения из состояния покоя, однако в дальнейшем примем его существование без доказательства и просто изучим его свойства.

Слой на свободной поверхности

Предположим сначала, что, как и раньше, жидкость ограничена горизонтальной свободной поверхностью, к которой приложено постоянное напряжение μS. Воспользуемся прямоугольной системой координат, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, вертикальная ось z которой направлена вверх, а ось x направлена вдоль приложенного на поверхности напряжения. Очевидно, что вектор скорости жидкости лежит в горизонтальной плоскости и имеет компоненты u, v, 0 и зависит только от z. Граничные условия, которым надо удовлетворить, имеют вид

$$\frac{du}{dz} = S, \quad \frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{4.4.3}$$

а также

$$u,\ v \to 0 \text{ при } z \to -\infty.$$

Давление (модифицированное для учета силы тяжести и центробежной силы) также постоянно в горизонтальной плоскости, поэтому уравнения установившегося движения относительно вращающихся осей в этой плоскости записываются так:

$$-2v\Omega_3 = \nu \frac{d^2u}{dz^2}, \tag{4.4.4}$$

$$2u\Omega_3 = \nu \frac{d^2v}{dz^2}. \tag{4.4.5}$$

Здесь Ω_3 — компонента в направлении оси z вектора Ω угловой скорости вращения системы координат. В случае движения на земной поверхности $\Omega_3 = \Omega \cos\theta$, где разность $(\pi/2) - \theta$ равна широте, и Ω_3 только приближенно постоянна во всем поле течения. Компонента кориолисовой силы в направлении оси z компенсируется градиентом давления и не представляет интереса с динамической точки зрения.

Уравнения (4.4.4) и (4.4.5) достаточны для определения u и v как функций от z. Умножение уравнения (4.4.5) на $i = \sqrt{-1}$ и сложение его с уравнением (4.4.4) дает одно дифференциальное уравнение

$$\nu \frac{d^2(u+iv)}{dz^2} = 2i\Omega_3 (u+iv), \tag{4.4.6}$$

решение которого, удовлетворяющее условиям на бесконечности, имеет вид

$$u + iv = A \exp\{k(1+i)z\}, \tag{4.4.7}$$

где $k = \sqrt{\Omega_3/\nu}$, причем Ω_3 считается положительной, что соответствует северному полушарию. Комплексная постоянная A находится из условий (4.4.3) на свободной поверхности

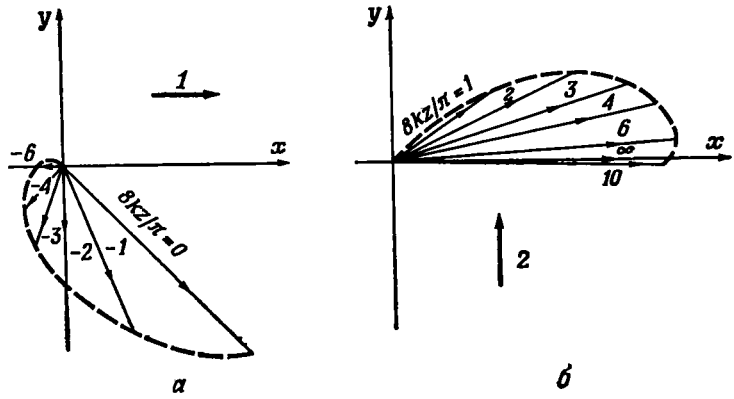
$$A = \frac{S(1-i)}{2k}, \tag{4.4.8}$$

и тогда

$$u = \frac{S}{k\sqrt{2}} e^{kz} \cos\left(kz - \frac{\pi}{4}\right), \tag{4.4.9}$$

$$v = \frac{S}{k\sqrt{2}} e^{kz} \sin\left(kz - \frac{\pi}{4}\right). \tag{4.4.10}$$

Поэтому в слое вблизи поверхности с толщиной порядка k^{-1} вполне возможно установившееся течение. На поверхности жидкости скорость имеет максимальную величину $S/(k\sqrt{2})$ и направлена под углом 45°, отсчитываемым по часовой стрелке (глядя сверху) от приложенного напряжения. Довольно неожиданно, но этот угол не зависит от угловой скорости вращения Ω (можно



Р и с. 4.4.1. Вектор скорости во вращающейся жидкости: *а* — на различных расстояниях под свободной поверхностью, на которой приложено касательное напряжение, и *б* — на различных расстояниях над твердой плоскостью, когда имеется градиент давления. *1* — направление напряжения на свободной поверхности; *2* — направление градиента давления.

поинтересоваться, что происходит при $\Omega_3 \to 0$; в этом случае время, необходимое для установления движения, которое возникает из состояния покоя, неограниченно возрастает и, следовательно, также возрастает величина установившейся скорости на поверхности). По мере углубления под свободную поверхность жидкости происходит равномерный поворот вектора скорости по часовой стрелке ($\Omega_3 > 0$), а его величина уменьшается по экспоненциальному закону; на глубине, равной π/k, которую можно было бы назвать глубиной проникания, направление скорости противоположно ее направлению на поверхности, а величина скорости уменьшается в e^{π} (≈ 25) раз по сравнению со значением на поверхности. На рис. 4.4.1, *а* представлена проекция на горизонтальную плоскость вектора скорости для нескольких равноотстоящих глубин, причем кривая, описываемая концом вектора, оказывается логарифмической спиралью.

На это установившееся течение, характеризуемое равновесием кориолисовых сил и сил трения, впервые обратил внимание Экман (1905) и использовал его при обсуждении порождаемых ветром океанических течений на вращающейся Земле [1]). Недостаток любого такого приложения этой теории к океану связан с предположением, что касательные напряжения возникают в результате молекулярной вязкости; как уже отмечалось, перенос количества движения через горизонтальные плоскости как в океане, так и в атмосфере происходит обычно в основном вследствие нерегулярных флуктуаций скорости жидкости, возникающих по разным причинам. Одно возможное усовершенствование полученного

[1]) См. также Defant A., Physical Oceanography, v. 1, p. 400, Pergamon Press, 1961 [или Зубов Н. Н., Динамическая океанология, М.—Л., 1947.—*Ред.*].

решения с учетом этого факта заключается в том, чтобы рассматривать ν, которое входит в выражения (4.4.9) и (4.4.10), как некоторый эффективный кинематический коэффициент вязкости, обусловленный флуктуациями скорости (и если имеются данные об изменении этой эффективной вязкости с изменением глубины, то можно вернуться к дифференциальным уравнениям (4.4.4) и (4.4.5) и проинтегрировать их заново). Глубина проникания спирали пропорциональна $\nu^{1/2}$ и равна на полюсах Земли 0,39 м, если величина ν равна коэффициенту кинематической вязкости воды при 15 °С; эффективный коэффициент вязкости при турбулентном смешении в поверхностных слоях моря широко изменяется с изменением условий, однако он почти всегда значительно больше коэффициента молекулярной вязкости (иногда в 10^5 раз), и соответственно больше становится и глубина проникания.

Одним из параметров течения, представляющим интерес в океанографии, является результирующий объемный поток воды в поверхностном слое через вертикальную плоскость. Его можно определить интегралом

$$\int_{-\infty}^{0} (u+iv)\,dz = -\frac{iS}{2k^2} = -\frac{i\mu S}{2\rho\Omega_3}. \qquad (4.4.11)$$

и он не зависит от ν, если задано приложенное напряжение μS; следовательно, эффективная величина коэффициента ν в данном случае не имеет особого значения. Следует отметить, что результирующий поток в направлении приложенного напряжения равен нулю, как и следовало ожидать, исходя из того, что результирующее движение в этом направлении привело бы к появлению результирующей кориолисовой силы в ортогональном к нему направлении, которое невозможно было бы скомпенсировать какой-либо другой внешней силой.

Слой на твердой плоской границе

Предположим теперь, что большая масса жидкости, покоящаяся относительно равномерно вращающихся осей координат, приведена в движение действием однородного градиента модифицированного давления, который компенсируется силой Кориолиса. Если однородный градиент давления расположен в горизонтальной плоскости (x, y) и имеет компоненты $(0, -G)$, причем вектор скорости вращения направлен как и раньше, то однородная скорость в установившемся состоянии имеет компоненты $(U, 0)$ и

$$2U\Omega_3 = \frac{G}{\rho}. \qquad (4.4.12)$$

Если помимо этого жидкость ограничена горизонтальной твердой плоскостью, покоящейся относительно вращающихся осей коор-

динат, то отклонение от однородного потока в соответствующем «слое Экмана» вблизи твердой плоскости вызывает появление сил вязкости и кориолисовых сил таким же образом, как и в предыдущем случае, и снова оказывается, что существует установившееся течение.

Уравнения, определяющие компоненты скорости (u, v) как функции от координаты z в установившемся течении вблизи твердой границы ($z = 0$), отличаются от уравнений (4.4.4) и (4.4.5) только добавлением наложенного на течение однородного градиента давления:

$$-2v\Omega_3 = \nu \frac{d^2u}{dz^2},$$

$$2u\Omega_3 = \frac{G}{\rho} + \nu \frac{d^2v}{dz^2}.$$

Второе уравнение можно переписать так:

$$2(u - U)\Omega_3 = \nu \frac{d^2v}{dz^2}. \qquad (4.4.13)$$

Решение, соответствующее однородному потоку на достаточно больших расстояниях от твердой плоскости (жидкость в этом случае расположена *выше* плоскости $z = 0$, что соответствует атмосферному течению вблизи земной поверхности), имеет вид

$$u - U + iv = A \exp\{-k(1 + i)z\}, \qquad (4.4.14)$$

где, как и раньше, $k = \sqrt{\Omega_3/\nu}$. На плоскости $z = 0$ мы требуем выполнения равенства $u = v = 0$, поэтому

$$A = -U,$$

и получаем компоненты скорости

$$u = U(1 - e^{-kz}\cos kz), \qquad (4.4.15)$$

$$v = Ue^{-kz}\sin kz. \qquad (4.4.16)$$

Общие свойства этого спирального распределения скоростей $(u - U, v)$ вблизи твердой поверхности во многом такие же, как и в предыдущем случае. Векторы скоростей на разных высотах над твердой поверхностью представлены на рис. 4.4.1, *б*. В данном случае скорость вблизи $z = 0$ линейно зависит от z и отклонена на угол 45° в направлении по часовой стрелке от приложенного к жидкости градиента давления. Результирующий объемный поток в слое Экмана по нормали к однородному течению вне слоя на единицу ширины (в направлении оси x) выражается интегралом

$$\int_0^\infty v\,dz = \frac{U}{2k} = \frac{1}{2}U\sqrt{\frac{\nu}{\Omega_3}}. \qquad (4.4.17)$$

Горизонтальные градиенты давления, которые можно приближенно считать однородными на расстояниях порядка многих километров, естественно возникают в атмосфере от крупномасштабных циклонов и антициклонов, а также от изменений температуры в горизонтальном направлении, происходящих вследствие неравномерного нагрева атмосферы, и результирующее течение вблизи земной поверхности всегда сопровождается появлением закрутки, напоминающей спираль Экмана. И снова простое теоретическое распределение скорости можно применить только в том случае, когда параметр ν рассматривается как эффективный кинематический коэффициент вязкости в процессе нерегулярного турбулентного перемешивания горизонтальных слоев жидкости. Для значения ν, соответствующего молекулярной вязкости воздуха, «глубина проникания» равна $\pi/k = 14$ м на полюсах, в то время как его наблюдаемая в атмосфере величина может быть от 500 до 1000 м в зависимости от условий. Наблюдения изменения направления и величины скорости ветра с высотой над поверхностью Земли использовались (в сочетании с формулами компонент скоростей (4.4 15) и (4.4.16)) для определения величины эффективного коэффициента вязкости в процессе турбулентного перемешивания (Тейлор (1915)). Аналогично можно приложить этот анализ к пограничному слою вблизи дна моря, хотя в этом случае имеется мало наблюдений.

4.5. Течение с круговыми линиями тока

Другим простым примером движения жидкости оказывается движение, в котором все линии тока представляют собой окружности с центром на общей оси симметрии. Такие движения могут быть установившимися или неустановившимися, и они обычно создаются в жидкости, ограниченной снаружи или изнутри вращающейся твердой поверхностью кругового цилиндра. Если движение остается чисто вращательным с осевой компонентой скорости, равной нулю, то градиент давления в направлении оси должен быть равен нулю и уравнение движения показывает, что для соблюдения этого условия течение должно быть двумерным. Тогда скорость зависит только от расстояния до оси симметрии.

Поскольку компонента ускорения по нормали к линиям тока в течениях подобного типа играет пассивную роль и поскольку все изменения скорости происходят только в результате действия сил трения между соседними цилиндрическими слоями жидкости, такие течения эквивалентны в механическом смысле течению одного направления.

Уравнения (двумерного) движения в полярных координатах (r, θ) приведены в приложении 2; предполагая, что θ-компонента

скорости v есть функция только переменных r и t и что $u = 0$, находим

$$\frac{\rho v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \tag{4.5.1}$$

Первое из этих уравнений показывает, что радиальное изменение давления просто дает силу, необходимую для сохранения движения элементов жидкости по круговым траекториям. Второе уравнение представляет собой по существу равенство скорости увеличения момента количества движения цилиндрического слоя жидкости и момента равнодействующей пары сил трения на его внутренней и внешней поверхностях. В этом можно непосредственно убедиться, замечая, что касательное напряжение, действующее на элемент поверхности цилиндра радиуса r (см. приложение 2), равно

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right),$$

поэтому момент пары сил, приложенной к жидкости (находящейся внутри цилиндрической поверхности радиуса r) со стороны внешней части жидкости на единицу длины цилиндра, равен

$$2\pi\mu r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \tag{4.5.2}$$

Приравнивая скорость изменения момента количества движения жидкости в цилиндрическом слое (на единицу его длины и единицу толщины) моменту пары сил, действующей на него, получаем

$$\frac{\partial (2\pi\rho r^2 v)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2\pi\mu r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right\}, \tag{4.5.3}$$

откуда и следует уравнение (4.5.1).

Несколько более простая форма уравнений (4.5.1) или (4.5.3) получается при использовании в качестве зависимой переменной угловой скорости Ω (r, t) жидкого цилиндрического слоя радиуса r. Полагая в уравнении (4.5.3) $v = \Omega r$, мы имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right). \tag{4.5.4}$$

Если в качестве зависимой переменной взять величину завихренности

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \Omega)}{\partial r}, \tag{4.5.5}$$

то получится еще одна форма уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \tag{4.5.6}$$

Это уравнение совпадает с уравнением теплопроводности в двух измерениях (при наличии осевой симметрии). Исходя из уравнения (4.2.2), можно установить, что в течении одного направления две компоненты завихренности, перпендикулярные к линиям тока, также удовлетворяют уравнению теплопроводности. Таким образом, задачи течений одного направления и течений с круговыми линиями тока можно полностью описать при помощи диффузии компонент завихренности поперек линий тока. В каждом частном случае выбор одного из полученных выше уравнений обычно будет определяться зависимой переменной, которая входит в граничные условия.

Установившиеся движения с круговыми линиями тока должны поддерживаться движением твердых границ, и можно охватить все обычные случаи, предположив, что жидкость находится между твердыми цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$), которые равномерно вращаются с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2. В таком случае легко найти, что решение как уравнения (4.5.3), так и уравнения (4.5.4) при нулевых левых частях, которое удовлетворяет условию прилипания на обеих границах, определяет скорость

$$v(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r_1^{-2} - r_2^{-2}} + r\,\frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}. \qquad (4.5.7)$$

Течение подобного типа можно осуществить в лаборатории с цилиндрами, общая длина которых велика по сравнению с их радиусами; распределение скорости (4.5.7) было подтверждено при различных значениях r_1, r_2, Ω_1 и Ω_2. Вязкость в формулу (4.5.7) не входит, так как равнодействующая пара сил трения, действующих на каждый цилиндрический слой жидкости, равна нулю; в этом отношении установившееся течение с круговыми линиями тока представляет собой аналог течения между параллельными твердыми плоскостями, которые скользят друг относительно друга (и этот случай фактически получается из формулы (4.5.7) при $r_2 - r_1 \ll r_1$). Пользуясь выражением (4.5.2) и решением (4.5.7), находим момент пары сил трения, действующей на единицу длины цилиндрической поверхности радиуса r:

$$-4\pi\mu\,\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r_1^{-2} - r_2^{-2}}, \qquad (4.5.8)$$

который, как и ожидалось, не зависит от r; в частности, пара сил с таким моментом приложена к внутреннему твердому цилиндру, а противоположная по знаку — к внешнему цилиндру.

Из выражения (4.5.7) можно получить распределения скоростей в различных специальных случаях установившегося течения. Полагая $r_1 = 0$ (с угловой скоростью Ω_1 не настолько большой, чтобы сделать произведение $\Omega_1 r_1^2$ ненулевым) для течения *внутри* вращающегося цилиндра, находим

$$v = \Omega_2 r, \qquad (4.5.9)$$

что соответствует вращению жидкости как твердого тела, при котором касательные напряжения всюду равны нулю. Другой предельный случай течения в безграничной жидкости *вне* одиночного вращающегося цилиндра получается при $r_2 \to \infty$ и $\Omega_2 = 0$; при этом

$$v = \frac{r_1^2 \Omega_1}{r}. \tag{4.5.10}$$

Это — распределение скорости безвихревого течения, в котором циркуляция скорости по всем замкнутым кривым, обходящим один раз вокруг цилиндра, равна $2\pi r_1^2 \Omega_1$. Момент пары сил трения, приложенной к жидкости со стороны цилиндра единичной длины, равен постоянной $4\pi\mu r_1^2 \Omega_1$, что указывает на непрерывное увеличение полного момента количества движения жидкости; это не противоречит предполагаемой стационарности движения, так как полный момент количества движения, связанный с распределением (4.5.10), бесконечен и пара, развиваемая все время цилиндром, нужна для того, чтобы создавать и поддерживать это распределение скоростей на всех расстояниях от цилиндра.

Уравнение (4.5.1) или один из его эквивалентов можно использовать для исследования изменений в течении при начале или остановке вращения кругового цилиндра и последующего приближения его к установившемуся состоянию. В качестве примера рассмотрим движение, возникающее из состояния покоя в жидкости, содержащейся внутри кругового цилиндра радиуса a, который начинает вращаться с постоянной угловой скоростью Ω_0. Условия, которым должна удовлетворять скорость $v(r, t)$, суть

$$v(r, 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r < a,$$
$$v(a, t) = \Omega_0 a \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Тот же метод решения, который несколько раз использовался в § 4.3, в применении к уравнению (4.5.1) показывает, что скорость v нужно искать в форме ряда по функциям Бесселя первого порядка. Вновь более удобно рассмотреть функцию

$$w(r, t) = \Omega_0 r - v(r, t),$$

так как $w = 0$ для всех значений t при $r = a$ и при отсутствии каких-либо особенностей на оси вращения при $r = 0$. Уравнение для функции w такое же, как и уравнение для функции v, и решение, которое тождественно удовлетворяет этому уравнению и условиям при $r = 0$ и $r = a$, представляет собой ряд Фурье — Бесселя

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right), \tag{4.5.11}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, а λ_n — положительные значения λ, при которых $J_1(\lambda) = 0$. Написанное

выражение будет также удовлетворять начальному условию при $t = 0$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) = \Omega_0 r, \quad 0 \leqslant r \leqslant a.$$

С помощью стандартных формул находим [1])

$$A_n = \frac{2a}{J_0^2(\lambda_n)} \int_0^1 \Omega_0 x^2 J_1(\lambda_n x)\, dx = -\frac{2\Omega_0 a}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}.$$

Таким образом, получаем распределение скорости

$$v(r, t) = \Omega_0 r + 2\Omega_0 a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right). \quad (4.5.12)$$

Дольше всех сохраняется первый член ряда ($n = 1$), и соответственно отклонение от вращения твердого тела очень скоро затухает по экспоненциальному закону с постоянной $a^2/(\lambda_1^2\nu)$, $\lambda_1 = 3{,}83$.

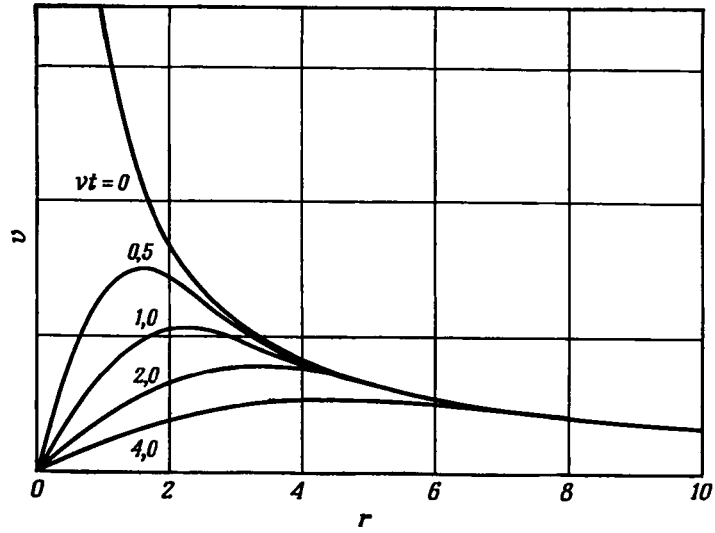
Аналогичные, хотя и более сложные решения можно получить для течения, возникающего из состояния покоя в жидкости между двумя круговыми цилиндрами (когда скорость выражается в виде ряда Фурье — Бесселя, содержащего функции Бесселя как первого, так и второго родов), а также для жидкости вне одного кругового цилиндра (когда скорость определяется интегралом Фурье — Бесселя с бесселевыми функциями обоих родов) [2]).

Наконец, в качестве случая, для которого более удобно использовать уравнение (4.5.6), рассмотрим течение, в котором в начальный момент времени завихренность равна везде нулю, за исключением оси $r = 0$, вдоль которой расположена вихревая нить (см. § 2.6) интенсивности C.

Вначале циркуляция по всем окружностям с центром на этой оси имеет одно и то же значение C и, следовательно, $v = C/2\pi r$. Завихренность в данном случае диффундирует радиально от места ее начальной концентрации на линии, в то время как в обсуждавшемся ранее случае (§ 4.3) завихренность первоначально была сосредоточена на плоскости. С математической точки зрения эта задача распространения (или диффузии) завихренности от вихревой нити идентична двумерной задаче распространения тепла в однородном твердом теле от линии, на которой первоначально было сконцентрировано конечное количество тепла C. Решение

[1]) См. примечание на стр. 250.

[2]) См. Titchmarsh E. C., Eigenfunction Expansions, § 1.11, 4.10, Oxford, 1962 [есть русский перевод первого издания: Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям..., ИЛ, М., ч. 1, 1960, ч. 2, 1961.— *Ред.*].



Р и с. 4.5.1. Распределение скорости, связанное с влиянием вихревой нити (радиус r и произведение νt измерены в соответствующих единицах).

получается непосредственно из решения (4.3.2):

$$\omega(r,\ t)=\frac{C}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \tag{4.5.13}$$

Соответствующее распределение скорости

$$v(r,\ t)=\frac{1}{r}\int_0^r \omega r\,dr=\frac{C}{2\pi r}\left\{1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right\} \tag{4.5.14}$$

изображено на рис. 4.5.1 для различных значений t. При малых значениях $r \ll \sqrt{4\nu t}$ жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью $C/(8\pi\nu t)$; при больших же значениях $r \gg \sqrt{4\nu t}$ движение безвихревое, каким оно и было в начальный момент. Можно установить, что распределение циркуляции скорости по окружностям с центрами в начале координат, т. е. $2\pi rv$, имеет одинаковую форму при всех t. Это можно предсказать по соображениям размерностей, исходя из того факта, что комбинация rv/C — безразмерная зависимая переменная, которая может зависеть только от ν, r и t и, следовательно, должна быть функцией только одного параметра $r^2/\nu t$.

4.6. Установившаяся струя из точечного источника количества движения

Перейдем теперь к менее простым полям течения и рассмотрим одно из немногих известных точных решений уравнения движения (4.1.8), не относящееся к течениям одного направления.

Сталкиваясь с трудностью решения нелинейного дифференциального уравнения с частными производными, имеет смысл попытаться найти частные решения, в которые все независимые переменные, кроме одной, либо вообще не входят, либо входят в некоторой простой комбинации, определяемой на основе теории размерностей, и тогда зависимость от остающейся переменной задается обыкновенным дифференциальным уравнением. Тривиальным примером этого может быть исключение из числа независимых переменных времени t и угловой координаты посредством выбора установившегося течения со сферической симметрией относительно начала координат, когда в качестве независимой переменной остается только расстояние r вдоль радиуса. В таком случае может быть отлична от нуля только радиальная компонента скорости u и уравнение сохранения массы показывает сразу, что $u \sim r^{-2}$; в этом случае уравнение движения служит только для определения давления. Это простое решение имеет особенность в начале координат, которой физически соответствует установившийся источник массы.

Подобным же образом можно рассмотреть установившееся течение, симметричное относительно некоторой оси, сохраняя в качестве независимых переменных только r и θ (угол между радиусом-вектором и осью симметрии), и затем перейти к наложению таких дополнительных ограничений, чтобы зависимость решения либо от r, либо от θ стала очевидной. Поле течения, обсуждаемое в этом параграфе, может быть получено на основе предположения о том, что скорость жидкости изменяется по закону r^{-1}; тогда зависимость ее от угла θ находится из обыкновенного дифференциального уравнения. Такой способ не является прямым в том смысле, что заранее неизвестно, какой вид имеет поле течения и имеет ли оно физический смысл, пока математическое решение не получено и не объяснено, хотя он может быть весьма полезным в опытных руках.

Предположим, что вращения жидкости относительно оси симметрии течения не происходит. Целесообразно ввести стоксову функцию тока ψ, тогда получаем выражения для компонент скорости $(u, v, 0)$ в сферической системе координат (r, θ, φ)

$$u = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{4.6.1}$$

а уравнение сохранения массы удовлетворяется тождественно (см. § 2.2). Дополнительное ограничение, которое нужно наложить

в надежде, что уравнения движения можно будет решить, заключается в том, что компоненты скорости u и v изменяются по закону r^{-1}, и, следовательно, $\psi \sim r$. На этом основании можно написать

$$\psi(r,\ \theta) = r\nu f(\theta), \tag{4.6.2}$$

причем множитель ν введен для того, чтобы сделать искомую функцию f безразмерной.

Теперь уравнения установившегося осесимметричного движения без азимутальной закрутки ($w = 0$; см. приложение 2) в сферической системе координат записываются в форме

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\right), \tag{4.6.3}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right), \tag{4.6.4}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

Если в эти два скалярные уравнения вместо u и v подставить их выражения (4.6.1) с учетом (4.6.2), то тогда все члены, за исключением содержащих давление p, умножаются на одинаковую степень величины r; в этом проявляется специальное свойство представления (4.6.2), на котором основывается выбор именно *первой* степени r в правой его части. Переменную r можно исключить из уравнения движения, если принять

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2}g(\theta), \tag{4.6.5}$$

где p_0 — давление на больших расстояниях от начала координат; после этого уравнения (4.6.3) и (4.6.4) сводятся к двум обыкновенным уравнениям

$$g = -\frac{f^2}{2(1-\xi^2)} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}[ff' - (1-\xi^2)f'], \tag{4.6.6}$$

$$g' = -f'' - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\frac{f^2}{1-\xi^2}, \tag{4.6.7}$$

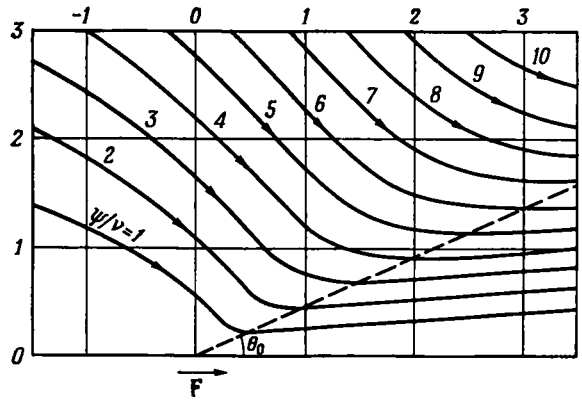
где $\xi = \cos\theta$, а штрихом отмечено дифференцирование по ξ.

Исключая функцию g из уравнений (4.6.6) и (4.6.7) и интегрируя их три раза, находим

$$f^2 - 2(1-\xi^2)f' - 4\xi f = c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3, \tag{4.6.8}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Таким образом, примененный способ позволил получить решение уравнений движения (мы считаем, что дифференциальное



Р и с. 4.6.1. Линии тока течения для $c = 0{,}1$, $\theta_0 = 24°37'$ (величины ψ/v и r измерены в соответствующих единицах; ось абсцисс совпадает с осью симметрии).

уравнение (4.6.8) можно решить численно, если это необходимо) и теперь нужно дать его объяснение. Три постоянные c_1, c_2 и c_3 находятся пока в нашем распоряжении для получения частных полей течения, которые представляют интерес с физической точки зрения. Если мы хотим, чтобы течение не имело особенностей на оси симметрии, за исключением точки $r = 0$, в которой, как это видно из выражений (4.6.1) и (4.6.2), особенность неизбежна, то компонента скорости v на оси должна быть равна нулю, а функция f вблизи значения $\xi = 1$ ($\theta = 0$) должна вести себя как $(1 - \xi)$, а вблизи $\xi = -1$ ($\theta = \pi$) — как $(1 + \xi)$; при этом функция в левой части уравнения (4.6.8) должна изменяться как $(1 - \xi)^2$ вблизи $\xi = 1$ и как $(1 + \xi)^2$ вблизи $\xi = -1$, что невозможно для функции в правой части, если только все постоянные c_1, c_2 и c_3 не равны нулю. Таким образом, течение с минимальным числом особенностей на оси, по-видимому, вообще самое простое течение из числа рассматриваемых, определяется уравнением

$$f^2 - 2(1 - \xi^2) f' - 4\xi f = 0. \qquad (4.6.9)$$

Преобразование $f = (1 - \xi^2) h(\xi)$ дает

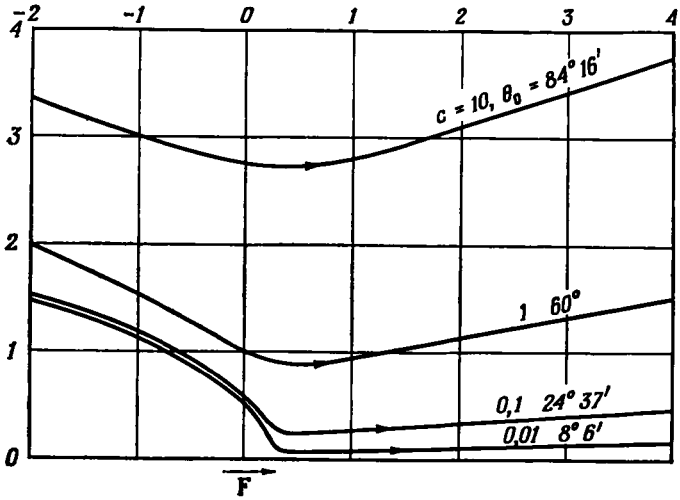
$$h^2 - 2h' = 0,$$

отсюда получается решение уравнения (4.6.9)

$$f(\xi) = \frac{2(1-\xi^2)}{1+c-\xi}, \qquad (4.6.10)$$

где c — произвольная постоянная.

Характер течения, описываемого выражениями (4.6.1) и (4.6.2) при решении (4.6.10) (изученного впервые Ландау (1944) и независимо от него Сквайром (1951)), виден из формы семейства линий тока $\psi = \text{const}$ (рис. 4.6.1), построенных для случая $c = 0{,}1$.



Р и с. 4.6.2. Линии тока $\psi/\nu = rf(\theta) = 1$ для $c = 0{,}01$, 0,1 и 1,0 и $\psi/\nu = rf(\theta) = 1/2$ для $c = 10$ (величины ψ/ν и r измерены в соответствующих единицах; ось абсцисс совпадает с осью симметрии).

Очевидно, что это решение представляет собой струю, которая движется с большой скоростью из начала координат и подсасывает медленно движущуюся окружающую жидкость. Границу струи проще всего определить как поверхность с минимальным расстоянием линий тока от оси, и из решения (4.6.10) легко видеть, что эта граница соответствует постоянной величине $\theta = \theta_0$, где

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{1+c};$$

для линий тока, изображенных на рис. 4.6.1, $\theta_0 = 24°37'$. Когда значение c задано, отношение ψ/r зависит только от θ, так что все линии тока на рис. 4.6.1 имеют одинаковую форму, причем одна получается из другой путем изменения масштаба r. Таким образом, чтобы показать поля течения, соответствующие разным значениям c, вполне достаточно построить по одной линии тока для каждого значения c, как это сделано на рис. 4.6.2. По мере приближения c к нулю струя все более концентрируется вблизи оси симметрии.

Распределение скоростей не имеет никаких особенностей, за исключением начала координат, и давление на больших расстояниях от начала координат распределено однородно. Поэтому особенность при $r = 0$, которая, очевидно, влияет на движение в целом, должна быть исследована более тщательно. Струя может существовать только тогда, когда некоторый внешний источник непрерывно сообщает жидкости необходимое количество движе-

ния, и очевидно, что именно это делает особенность в точке $r = 0$, обеспечивая пропорциональность скорости жидкости величине r^{-1}. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся уравнением количества движения в интегральной форме, как было описано в § 3.2. Жидкость, находящаяся в данный момент вне замкнутой поверхности, окружающей начало координат, действует на жидкость внутри этой поверхности с силой $\int \sigma_{ij} n_j dA$, а поток количества движения в направлении внешней нормали к этой поверхности имеет величину $\int \rho u_i u_j n_j dA$; величина

$$F_i = \int (\rho u_i u_j - \sigma_{ij})\, n_j dA \qquad (4.6.11)$$

при установившемся движении равна силе, действующей на выделенную жидкость со стороны ее внутренних границ. Приложение формулы Остроградского — Гаусса показывает, что так как рассматриваемое течение установившееся, то сила F_i имеет одно и то же значение для любых двух замкнутых поверхностей, окружающих начало координат, независимо от их формы, что и можно было ожидать.

Чтобы вычислить силу F_i, выберем замкнутую поверхность в виде сферы радиуса r с центром в начале координат. В силу симметрии только осевая компонента силы F отлична от нуля, и для нее имеем формулу

$$F = \int_0^{\pi} \{\rho u\,(u\cos\theta - v\sin\theta) - (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)\}\, 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta,$$

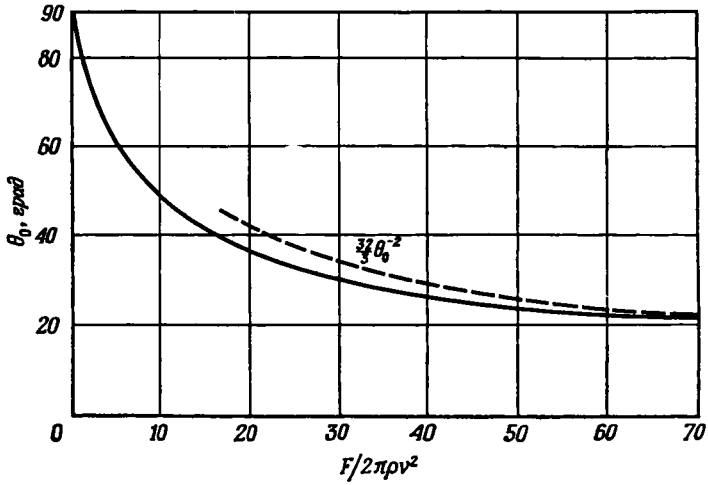
в которой индексы r и θ относятся к компонентам в положительных направлениях координатных линий r и θ. Используя формулы для σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$, приведенные в приложении 2, и выражения (4.6.1), (4.6.2) и (4.6.5), находим

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} = \int_{-1}^{1} \{f'(\xi f' - f) + \xi(g - 2f') + 2f + (1-\xi^2) f''\}\, d\xi.$$

Наконец, с учетом выражения (4.6.6) и решения (4.6.10) после некоторых элементарных вычислений получаем

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} = \frac{32}{3}\,\frac{1+c}{c(2+c)} + 4(1+c)^2 \ln\frac{c}{2+c} + 8(1+c). \qquad (4.6.12)$$

Таким образом, сила F, действующая на жидкость в начале координат, однозначно связана с постоянной c в решении (4.6.10), и из этого следует, что все влияние особенности в начале координат сводится к этой силе.



Р и с. 4.6.3. Соотношение между силой, приложенной в начале координат, и полууглом возникающей струи.

Следует отметить, что так как $f(0) = f(\pi)$, то никакого результирующего потока массы через любую замкнутую поверхность, окружающую начало координат, нет; особенность при $r = 0$ представляет собой источник только количества движения, а не массы.

Выражение силы (4.6.12) можно представить в другой форме, в зависимости от полууугла θ_0 конической границы струи,

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} = \frac{32}{3}\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} + \frac{4}{\cos^2\theta_0}\ln\frac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0} + \frac{8}{\cos\theta_0}, \qquad (4.6.13)$$

которая графически изображена на рис. 4.6.3. Для больших значений F струя становится быстрой и узкой и формула (4.6.13) заменяется приближенной

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} \sim \frac{32}{3}\theta_0^{-2}. \qquad (4.6.14)$$

При тех же условиях течение внутри струи, где $\theta \leqslant \theta_0$, описывается асимптотической формой решения (4.6.10), т. е.

$$f(\theta) \sim \frac{4\theta^2}{\theta^2+\theta_0^2}, \qquad (4.6.15)$$

а далеко вне струи, где $\theta \gg \theta_0$,— приближенным выражением

$$f(\theta) \sim 2(1 + \cos\theta). \qquad (4.6.16)$$

Радиальная компонента скорости, соответствующая выражению (4.6.16), равна $u = -2\nu/r$; это скорость втекающего потока жид-

кости, который компенсирует убывание жидкости, подсасываемой струей.

Легко убедиться из вычислений, приводящих к выражению (4.6.12), что при малых θ_0 и $c \ll 1$ основной вклад в силу F (а именно первый член в (4.6.12)) вносит поток количества движения. Этот факт дает возможность оценить силу F для реальной струи, вытекающей из малого отверстия. Если жидкость вытекает из отверстия площадью A с однородной скоростью V, имеем

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} \approx \frac{1}{2\pi}\frac{AV^2}{\nu^2}; \qquad (4.6.17)$$

эта величина должна быть большой по сравнению с единицей, чтобы оценка силы F была правильной. Массовый расход через отверстие равен $\rho AV = F/V$, и асимптотические решения (4.6.15) и (4.6.16) для данного (большого) значения F дают все лучшее приближение к реальному течению, порождаемому струей из отверстия, по мере того как скорость V возрастает (или, что эквивалентно, по мере того, как площадь отверстия A уменьшается). Массовый расход в струе, определяемый приближенным решением (4.6.15), на расстоянии r от источника имеет порядок $8\pi\rho\nu r$, и поэтому представляется возможным, что струя с профилем скорости, задаваемым выражением (4.6.15), который развивается на некотором расстоянии вниз по потоку от действительного источника, будет такой, как если бы она образовалась в точке на расстоянии порядка $AV/8\pi\nu$ вверх по потоку от отверстия.

Безразмерный параметр $\sqrt{F/2\pi\rho\nu^2}$, как видно из приближенного равенства (4.6.17), по существу представляет собой число Рейнольдса для течения вблизи отверстия; трактовка этого числа в § 4.7 делает понятным, что силы вязкости не могут затормозить и рассеять концентрированную струю из отверстия, когда $(F/2\pi\rho\nu^2) \gg 1$.

В другом крайнем случае $c \gg 1$ и θ_0 близко к 90°. Соответствующее асимптотическое выражение для функции $f(\theta)$, получаемое из точного решения (4.6.10), имеет вид

$$f(\theta) \sim \frac{2}{c}\sin^2\theta;$$

исходя из выражения (4.6.12), можно установить зависимость между постоянной c и силой F, приложенной в начале координат:

$$\frac{F}{2\pi\rho\nu^2} \sim \frac{8}{c} \ll 1.$$

Следовательно, в этом асимптотическом случае функция тока

$$\psi = \frac{F}{8\pi\mu} r\sin^2\theta. \qquad (4.6.18)$$

Тело, движущееся через жидкость, оказывает на нее силовое воздействие, и если скорость тела достаточно мала, так что точку приложения силы по существу можно считать неподвижной, то следует ожидать, что выражение (4.6.18) имеет некоторое отношение к течению, вызываемому телом. В § 4.9 будет показано, что функция тока (4.6.18) действительно описывает результирующую картину течения на больших расстояниях (где форма тела значения не имеет) от движущегося тела, действующего на жидкость с силой F, при условии, что сила F мала по сравнению с $2\pi\rho\nu^2$.

4.7. Динамическое подобие и число Рейнольдса

Движение однородной жидкости, которую можно считать несжимаемой, описывается уравнениями

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}, \tag{4.7.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{4.7.2}$$

где p — модифицированное давление. Мы предполагаем рассмотреть влияние изменения (однородных) параметров ρ и μ. С этой целью полезно написать эти уравнения в безразмерных переменных, чтобы отделить влияние изменений ρ и μ от влияния изменений только единиц измерения. В выписанных выше уравнениях нет параметров с размерностями длины и скорости, поэтому мы должны обратить внимание на граничные и начальные условия для размерных величин, с помощью которых радиус-вектор $\mathbf{x}$ и скорость $\mathbf{u}$ можно сделать безразмерными.

Предположим, что задание начальных и граничных условий для определенного течения связано с некоторой характерной длиной L (которая может быть максимальным размером внутренней границы или расстоянием между внешними границами) и с некоторой характерной скоростью U (в качестве которой может быть постоянная скорость твердой границы) таким путем, что эти условия можно выразить в безразмерной форме: 1) вектор $\mathbf{u}'$ — заданная функция времени t' при данных значениях $\mathbf{x}'$ и 2) вектор $\mathbf{u}'$ — заданная функция от $\mathbf{x}'$ при некоторых данных значениях времени t', где

$$\mathbf{u}'=\frac{\mathbf{u}}{U}, \qquad t'=\frac{tU}{L}, \qquad \mathbf{x}'=\frac{\mathbf{x}}{L}.$$

Тогда в этих новых переменных и с безразмерным давлением

$$p'=\frac{p-p_0}{\rho U^2},$$

где p_0 — некоторое характерное значение модифицированного давления в жидкости, основные уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t'} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j' \partial x_j'}, \tag{4.7.3}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0, \tag{4.7.4}$$

где *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L U}{\mu}.$$

Уравнения теперь содержат явно только безразмерный параметр Re, и их решения относительно переменных $\mathbf{u}'$ и p', которые удовлетворяют граничным условиям, могут зависеть только от

а) независимых переменных $\mathbf{x}'$ и t',

б) параметра Re и

в) безразмерных относительных величин, необходимых для точного задания граничных и начальных условий (например, отношения двух осей эллиптического цилиндра, ограничивающего жидкость,— все эти относительные величины можно рассматривать как соотношения, определяющие геометрию граничных и начальных условий) [1].

Этот переход к безразмерным переменным, кажущийся формальным несерьезным действием, имеет далеко идущие последствия. Во-первых, как только решение задачи для частного поля течения получено и выражено в безразмерной форме, из него путем выбора трех значений параметров ρ, L, U и μ при неизменном числе Рейнольдса можно получить три бесконечных семейства решений. Все эти течения, которые удовлетворяют одним и тем же начальным и граничным условиям в безразмерной форме и для которых соответствующие значения параметров ρ, L, U и μ отличаются друг от друга без изменения величины их комбинации $\rho LU/\mu$, описываются одним и тем же безразмерным решением; говорят, что все такие течения *динамически подобны*, так как величины различных членов в уравнении движения, представляющих влияние сил (вязкости, давления и инерции), действующих в данном положении, определяемом безразмерными координатами, и в данный безразмерный момент времени в жидкости, входят в виде одного и того же отношения для всех таких течений.

Этот принцип динамического подобия широко применяется как способ получения информации относительно некоторого

[1] Когда распределение скорости зависит от сил тяжести, например, при наличии свободной поверхности жидкости, а эти силы должны явно входить в уравнения движения (см. § 4.1), в данное перечисление должен быть также включен безразмерный параметр U^2/gL, называемый *числом Фруда*.

неизвестного поля течения по результатам «модельных испытаний», т. е. экспериментов, проведенных при более удобных физических условиях по сравнению с условиями этого неизвестного поля течения. Так, например, инженеры-гидравлики и химики часто хотят предсказать скорость, с которой малые твердые частицы оседают в водной суспензии, и для начала им нужно знать предельную скорость падающей в воде изолированной малой частицы известного размера и плотности и упрощенной —сферической — формы. Непосредственное измерение скорости падения одной частицы затруднительно, так как очень малый размер, например, частиц ила, создает трудности обращения с ними и их наблюдения. Тогда можно использовать динамическое подобие и утверждать, что если течение около падающей сферической частицы представить в безразмерных величинах, отнесенных к скорости сферы U и ее диаметру L, то оно будет таким же, как и течение около значительно большей сферы, движущейся с такой скоростью и в такой жидкости, что отношение $\rho LU/\mu$ принимает одинаковое значение в обоих случаях. Отношение μ/ρ для смазочного масла приблизительно в 400 раз больше, чем для воды, а для глицерина оно приблизительно в 680 раз больше, чем для воды; таким образом, динамически подобное поле течения может быть получено в одной из этих жидкостей со сферой большего и более подходящего размера, а силу торможения или «сопротивления» D сферы, создаваемую жидкостью, можно наблюдать для ряда значений параметров L и U. Выражение для силы сопротивления

$$D = -\int m_i \sigma_{ij} n_j \, dA =$$

$$= -\rho U^2 L^2 \int m_i \left\{ -p' \delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i'} \right) \right\} n_j \, dA', \quad (4.7.5)$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет направление движения сферы, интегрирование выполняется по площади A сферы и $\delta A' = \delta A/L^2$, непосредственно показывает, что безразмерный «коэффициент сопротивления» $D/\rho U^2 L^2$ один и тот же для всех динамически подобных полей течения, соответствующих заданному значению числа Рейнольдса Re. Поэтому модельные испытания позволяют получить величину искомого коэффициента сопротивления, если диапазон значений числа Рейнольдса Re при испытаниях содержит то значение, которое соответствует оседанию частицы ила. Затем можно вычислить предельную скорость этой частицы, зная ее размер и плотность.

Во-вторых, уравнения (4.7.3) и (4.7.4) в безразмерных переменных показывают, что для данной геометрической формы границы и данных начальных условий не существует больше одного бесконечного семейства различных решений в безразмер-

ной форме, причем разные элементы семейства соответствуют разным значениям числа Рейнольдса. Другими словами, при данных граничных и начальных условиях влияние на поле течения изменения параметров ρ, L, U или μ или изменения нескольких из них одновременно может быть однозначно описано путем последовательного изменения одного только числа Рейнольдса. Тот факт, что число Re представляет собой параметр, который определяет поля течения для границ данной формы, был впервые установлен Стоксом (1851), однако после работы Рейнольдса (1883) о начале зарождения турбулентности при течении в трубах это число было названо *числом Рейнольдса.*

Выражение (4.7.5) для силы сопротивления, действующей на движущееся тело, может быть представлено в общей форме

$$\frac{D}{\rho U^2 L^2} = f(\mathrm{Re}), \tag{4.7.6}$$

которая справедлива для семейства полей течения с геометрически подобными граничными и начальными условиями. Все другие безразмерные параметры течения тоже оказываются функциями только одного числа Рейнольдса. Практические задачи в динамике вязкой жидкости часто сводятся к теоретическому или экспериментальному определению вида соответствующей неизвестной функции от числа Re в некотором интервале его значений.

Число Рейнольдса можно рассматривать также как некоторую оценку относительной важности сил вязкости и не связанных с влиянием вязкости сил, действующих на единицу объема жидкости. Уравнение движения (4.7.1) содержит в правой части силу давления $-\partial p/\partial x_i$ и силу вязкости $\mu \partial^2 u_i/\partial x_j \partial x_j$, а сумма двух этих сил со знаком минус равна так называемой силе инерции $-\rho Du_i/Dt$. Эти силы находятся в равновесии, и соотношение между ними можно определить с помощью отношения любых двух сил из трех. Так как сила давления обычно играет пассивную роль, причем она возникает в жидкости в результате движений твердой границы или существования в жидкости касательных напряжений (хотя это и не так для течений, вызванных градиентом давления, таких, например, как течение Пуазейля), то общепринято характеризовать течение отношением величин силы инерции и силы вязкости. В любой точке жидкости это отношение равно

$$\frac{|\rho Du_i/Dt|}{|\mu \partial^2 u_k/\partial x_j\, \partial x_j|} = \mathrm{Re}\frac{|Du_i'/Dt'|}{|\partial^2 u_k'/\partial x_j' \partial x_j'|}.$$

Таким образом, если каждая из производных Du_i'/Dt' и $\partial^2 u_k'/\partial x_j' \partial x_j'$ представляет собой величину порядка единицы, что, по-видимому, так, когда поле течения достаточно простое, а L и U действительно являются его характерными параметрами (хотя в жидкости

обычно будут встречаться специальные места, где эти безразмерные параметры весьма малы), то число Рейнольдса служит мерой относительной величины сил инерции и сил вязкости. Для заданных начальных и граничных условий изменение числа Рейнольдса вообще соответствует изменению относительной величины сил инерции и вязкости; правда, такое утверждение тоже не вполне точно, так как производные Du_i'/Dt' и $\partial^2 u_k'/\partial x_j' \partial x_j'$ сами зависят от числа Рейнольдса и мы должны предположить, что они остаются величинами порядка единицы. В частности, уменьшение числа Рейнольдса до величин $\mathrm{Re} \ll 1$ сводится к тому, что силы инерции становятся значительно меньше сил вязкости, поэтому силы давления и вязкости доминируют в поле течения; условие $\mathrm{Re} \gg 1$ означает, что, наоборот, силы инерции намного превосходят силы вязкости и они вместе с силами давления преобладают. При значениях числа Рейнольдса порядка единицы все три силы предположительно играют одинаково важную роль в уравнении движения.

Ни для одного из исследованных в этой главе течений эти общие замечания о динамическом подобии не имеют существенного значения, так как все эти течения особенно просты в том или ином отношении (и в действительности они были выбраны именно по этой причине). В некоторых из этих течений (например создаваемом движением одной плоской границы из состояния покоя) для определения граничных условий нужна только скорость, а не длина, поэтому число Рейнольдса не входит в задачу; в случае же струи, исследованной в § 4.6, эффективное число Рейнольдса $(F/\rho\nu^2)^{1/2}$ можно было построить на основе параметров, взятых из граничных условий, однако здесь также нет никакой характерной длины, с помощью которой координаты можно сделать безразмерными. В случае установившегося течения одного направления сила инерции всюду в потоке тождественно равна нулю, поэтому не существует никакой возможности нарушить равновесие сил посредством изменения какого-либо граничного параметра; не имеется такой возможности и в случаях неустановившегося движения одного направления, создаваемого движущимися границами, так как силы давления всюду в потоке равны нулю. Только в случае движения, возникающего из состояния покоя в результате внезапного движения плоской границы со скоростью U, если жидкость находится между этой границей и другой неподвижной плоскостью, расположенной на расстоянии d от нее, распределение скорости (см. (4.3.14)) имеет выражение

$$\frac{u(y, t)}{U} = 1 - \frac{y}{d} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\pi^2 n^2 \frac{tU}{d} \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \sin\left(\pi n \frac{y}{d}\right),$$

содержащее число $\mathrm{Re} = \rho dU/\mu$. Это выражение имеет общую форму, ожидаемую для случая, в котором задание граничных условий обеспечивается только одной длиной и только одной скоростью. Как уже отмечалось, силы давления в этом течении всюду равны нулю, так что силы инерции и силы вязкости всюду имеют одинаковую величину независимо от значения Re. В этих условиях изменение числа Рейнольдса по своему влиянию полностью эквивалентно изменению масштаба времени, причем большим числам Re соответствует более медленное приближение к конечному установившемуся состоянию.

Другие безразмерные параметры, имеющие динамическое значение

В приведенном обсуждении число Рейнольдса появилось в качестве единственного безразмерного параметра, необходимого для определения динамического состояния полей течения с геометрически подобными начальными и граничными условиями, так как параметры L, U, ρ и μ считались единственными размерными параметрами, изменяющимися от одного поля течения к другому. Если учитывается влияние на течение других физических факторов, то в анализ входят новые безразмерные параметры и новые критерии динамического подобия такого же общего смысла, как и число Рейнольдса. Обширный перечень таких чисел, многие из которых назывались именами авторов, впервые использовавших эти числа, можно найти в учебниках. Однако для динамического определения почти всех полей течения, рассмотренных в этой книге, требуется только число Рейнольдса, изменение которого, впрочем, дает большое разнообразие форм течений.

Один дополнительный безразмерный параметр появляется (даже если на жидкость действуют только силы инерции, давления и вязкости), когда в граничные и начальные условия входят три независимых размерных параметра L, U и, например, частота колебаний. Примером служит течение, создаваемое плоской пластиной длины L (в двух измерениях), которая движется вперед в неподвижном воздухе со скоростью U и одновременно колеблется относительно некоторого среднего положения с частотой n. В таких случаях для динамического подобия двух полей течения требуется, чтобы как число Рейнольдса, так и *число Струхаля*

$$\mathrm{Sh} = \frac{nL}{U},$$

имели одинаковые значения для обоих полей. Следует подчеркнуть, что число Струхаля представляет собой независимый параметр, который влияет на динамическое состояние поля течения, только в том случае, когда все три параметра L, U и n изменяют-

ся независимо друг от друга. Существуют случаи, в которых колебания потока возникают спонтанно (как в следе за круговым цилиндром при числах Рейнольдса в диапазоне примерно от 40 до $4 \cdot 10^5$), и в таких случаях частота колебаний представляет собой зависимый параметр течения, и, следовательно, можно написать, что

$$n = \frac{Uf(\mathrm{Re})}{L}.$$

Все же удобно говорить об отношении nL/U как о числе Струхаля потока, даже если оно характеризует частное свойство потока, а не является определяющим критерием подобия.

4.8. Поля течений, в которых силы инерции пренебрежимо малы

Как уже отмечалось, наличие нелинейного члена $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ в выражении для ускорения создает большие трудности при решении уравнения движения для любых течений, за исключением простейших. К счастью, в некоторых условиях, представляющих практический интерес, нелинейный член хотя и не равен нулю, однако настолько мал, что в первом приближении им можно пренебречь. Если, кроме того, течение установившееся или почти установившееся, такое, что модуль производной $|\partial \mathbf{u}/\partial t|$ ненамного больше модуля $|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|$, то полная сила инерции всюду мала по сравнению с силами давления или вязкости. Этот и следующий параграфы будут посвящены случаям, в которых силы инерции пренебрежимо малы при условиях, которые еще нужно будет определить; более трудные случаи течения, когда силами инерции пренебрегать нельзя, будут изучены в следующей главе.

Когда сила инерции всюду незначительна, основными уравнениями становятся

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{4.8.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4.8.2}$$

Если в основные граничные условия (имеются в виду условия, которые вызывают движение жидкости) входит только скорость $\mathbf{u}$, задача сводится к нахождению решения уравнений

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4.8.3}$$

причем давление определяется из уравнения (4.8.1). Если, наоборот, основные граничные условия выражены только через давление, то необходимо решать уравнение

$$\nabla^2 p = 0, \tag{4.8.4}$$

и тогда скорость течения находится из уравнения (4.8.1) с использованием (4.8.2). В любом случае распределения давления p

и скорости $\mathbf{u}$ не зависят от коэффициента вязкости μ, который определяет только соотношение между скоростью $\mathbf{u}$ и давлением p (точнее, избыточным давлением $p - p_0$). Выводы предыдущего параграфа относительно общей формы решения, очевидно, сводятся здесь к тому, что решение должно иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}}{U} &= f_1\left(\frac{\mathbf{x}}{L};\ a,\ b,\ \ldots\right), \\ \frac{p-p_0}{\rho U^2} &= \frac{\mu}{\rho L U} g_1\left(\frac{\mathbf{x}}{L};\ a,\ b,\ \ldots\right), \end{aligned} \tag{4.8.5}$$

если основные граничные условия содержат только $\mathbf{u}$, или

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}}{U} &= \frac{\rho L U}{\mu} f_2\left(\frac{\mathbf{x}}{L};\ a,\ b,\ \ldots\right), \\ \frac{p-p_0}{\rho U^2} &= g_2\left(\frac{\mathbf{x}}{L};\ a,\ b,\ \ldots\right), \end{aligned} \tag{4.8.6}$$

если основные граничные условия содержат только давление p. Безразмерные параметры a, b, ... в решении должны зависеть только от геометрической формы границ течения.

Течение в каналах слабо изменяющейся формы

В этом первом примере нелинейный член уравнения движения оказывается всюду малым, так как по существенно геометрическим причинам скорость $\mathbf{u}$ изменяется вдоль линий тока очень медленно. В случае течения в цилиндрической трубе под действием разности давления на ее концах член $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ тождественно равен нулю; если теперь поперечное сечение трубы изменяется вдоль ее длины, произведение $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} \neq 0$, но, так как сила вязкости для цилиндрической трубы не равна нулю, всегда можно сделать отношение модуля $|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|$ к силе вязкости пренебрежимо малым, выбирая достаточно малое изменение поперечного сечения трубы по ее длине.

Рассмотрим сначала простой случай установившегося течения в круговой трубе, радиус которой a медленно изменяется по координате x вдоль ее оси. На концах трубы поддерживается постоянная разность давлений и возникающий градиент давления $-G$ будет также медленно изменяться по x. В окрестности любого сечения $x = \text{const}$, например, в пределах нескольких радиусов трубы вверх и вниз по потоку, радиус трубы и осевой градиент давления можно считать приближенно постоянными, равными соответственно $a(x)$ и $-G(x)$, поэтому приближенно можно воспользоваться выражением осевой скорости, полученным в пренебрежении силой инерции (см. (4.2.5)):

$$u(x, r) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2), \tag{4.8.7}$$

где r — расстояние вдоль радиуса от оси трубы. Тогда, если Q — постоянный объемный расход жидкости вдоль трубы,

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu}, \tag{4.8.8}$$

то выражение (4.8.7) можно представить в виде

$$u(x, r) = U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad U = \frac{2Q}{\pi a^2}. \tag{4.8.9}$$

Линии тока не идут строго в одном направлении, а наклонены к оси под малым углом, величина которого имеет порядок $da/dx = \alpha(x)$, поэтому кроме осевой компоненты скорости u существует и радиальная компонента скорости v порядка αu. Из формулы (4.8.8) следует, что

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu Q}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} a^{-4}\, dx,$$

так что если заданы давления p_1 и p_2 в двух сечениях трубы $x = x_1$ и $x = x_2$ и известна геометрическая форма трубы, то можно вычислить объемный расход Q, а затем и градиент давления $G(x)$.

Очевидно, что выражение (4.8.9) будет хорошим приближением при достаточно малых значениях α и можно отыскать специальное условие для его выполнения, используя само выражение (4.8.9) для оценки величины пренебрегаемой силы инерции. Из выражения (4.8.9) следует, что характерное значение величины каждого из членов $\rho u\, \partial u/\partial x$ и $\rho v\, \partial u/\partial r$ равно $\alpha\rho U^2/a$. С другой стороны, для силы вязкости $\mu\nabla^2 u$, сохраняемой в уравнении движения, мы имеем характерную величину $\mu U/a^2$, показывающую, что решение (4.8.9) согласуется с пренебрежением силой инерции, если

$$\alpha\frac{\rho\alpha U}{\mu} \ll 1. \tag{4.8.10}$$

Подобные простые соотношения применимы и к установившемуся течению между двумя непараллельными плоскостями, и из точного решения основных уравнений движения для этого случая, которое будет описано в § 5.6, непосредственно получается приближенное решение, аналогичное решениям (4.8.7) или (4.8.9), когда удовлетворяется условие (4.8.10).

Такого рода приближение, какое было использовано при получении решения (4.8.7), а именно предположение о том, что ширина канала и градиент давления локально постоянны, полезно во многих случаях. Когда движущаяся жидкость находится между двумя границами, разность скоростей в соседних точках на двух границах является еще одним, третьим параметром,

который может медленно изменяться с изменением координат, как, например, в течении между двумя близкими друг к другу дисками, один из которых вращается в своей плоскости, или в слое смазки, который рассматривается ниже. Некоторые случаи, в которых условия течения в канале медленно изменяются с течением времени, как, например, когда два плоских диска прижимаются друг к другу и жидкость между ними вытекает в радиальных направлениях, также можно рассматривать в указанном приближении. Во всех таких случаях силы вязкости преобладают в связи с большими градиентами скорости, определяемыми поперечными размерами области течения, а силы инерции зависят от производных скорости, определяемых относительно большей длиной (расстоянием вдоль линии тока, на котором заметно изменяются параметры канала) или бóльшим промежутком времени.

Теория смазки

Из повседневного опыта известно, что два твердых тела могут очень легко скользить друг по другу, если между ними имеется тонкий слой жидкости, и при определенных условиях в этом слое жидкости устанавливается высокое положительное давление. Так, например, лист бумаги, падающий на гладкий пол, вдруг начинает «плыть» на слое воздуха между ним и полом и будет скользить в горизонтальном направлении некоторое время, прежде чем остановится. Существование этого высокого давления в слое жидкости между поверхностями широко используется в инженерной практике как средство замены трением между жидкостью и твердым телом значительно большего трения между двумя твердыми телами, находящимися в контакте; однажды возникнув, слой жидкости оказывает большое сопротивление сдавливанию и сохраняется в виде смазочной пленки между двумя поверхностями. В некоторых случаях слой жидкости можно использовать для поддержания полезной нагрузки, и он тогда называется несущим слоем.

Сущность этого явления состоит в том, что толщина слоя жидкости между двумя твердыми границами становится настолько малой, что скорость деформации и напряжение, обусловленное вязкостью слоя жидкости, оказываются весьма большими, и это большое напряжение используется путем соответствующего выбора конфигурации слоя жидкости для создания большого давления. Чтобы понять, как это можно сделать, рассмотрим простой случай твердого тела с плоской поверхностью, скользящего равномерно по твердой поверхности, причем поверхность скользящей части тела имеет конечную длину l в направлении движения и настолько большую ширину, что движение можно рассматривать как двумерное; этот случай был изучен Рейнольдсом

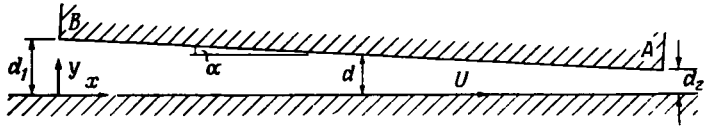


Рис. 4.8.1. Слой смазки между двумя плоскими поверхностями в относительном движении.

в 1886 г. Опыт показывает, что плоские поверхности должны быть немного наклонены друг к другу, в чем мы скоро убедимся. Итак предположим, что границы жидкости расположены так, как показано на рис. 4.8.1. Оси координат свяжем с верхним твердым телом; поверхность нижнего твердого тела будем считать движущейся в своей плоскости со скоростью U, а поле течения в целом будет установившимся относительно выбранной системы координат.

Толщина d слоя жидкости считается всюду малой по сравнению с l, и прежде всего мы проверим возможность того, что в любом сечении слоя, в котором толщина слоя и градиент давления имеют определенные значения, распределение скорости оказывается приближенно таким же, как и в слое с постоянной толщиной и постоянным градиентом давления, имеющими всюду те же значения, что и в рассматриваемом сечении. Если скорость жидкости всюду имеет один и тот же порядок величины U, а позже будет показано, что дело обстоит именно так, то здесь вновь применимо рассуждение, приводящее к условию (4.8.10). Таким образом, условие для предлагаемого приближения, при котором оно должно быть справедливо, выражается неравенством

$$\alpha \frac{\rho U d}{\mu} \ll 1.$$

В практических задачах смазки это условие обычно удовлетворяется. Поэтому можно перейти к использованию полученных выше решений для слоев постоянной толщины.

Вблизи любого сечения, где толщина слоя жидкости равна d, а градиент давления равен $-G$, в соответствии с (4.2.10) имеем

$$u = \frac{G}{2\mu} y\,(d-y) + U\left(\frac{d-y}{d}\right). \qquad (4.8.11)$$

Объемный расход на единицу ширины слоя жидкости равен

$$Q = \int_0^d u\,dy = \frac{Gd^3}{12\mu} + \frac{1}{2}Ud, \qquad (4.8.12)$$

а величина Q не должна зависеть от x. Из этого следует, что градиент давления должен изменяться с изменением толщины слоя d

в соответствии с соотношением

$$\frac{dp}{dx} \equiv -G = 6\mu \left(\frac{U}{d^2} - \frac{2Q}{d^3} \right), \qquad (4\,8.13)$$

в котором $d = d_1 - \alpha x$. Интегрирование соотношения (4.8.13) дает

$$p - p_0 = \frac{6\mu}{\alpha} \left\{ U \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) - Q \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) \right\}, \qquad (4.8.14)$$

где p_0 — давление в сечении $x = 0$ при $d = d_1$. Можно предположить, что скользящее тело полностью погружено в жидкость и образует узкий канал для жидкости только с одной стороны, так что давления в точках A и B приближенно одинаковы. Это условие, состоящее в том, что $p = p_0$, когда $d = d_2$, позволяет вычислить расход Q, исходя из формулы (4.8.14):

$$Q = U \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}, \qquad (4.8.15)$$

и тогда выражение для давления принимает вид

$$p - p_0 = \frac{6\mu U}{\alpha} \cdot \frac{(d_1 - d)(d - d_2)}{d^2 (d_1 + d_2)}. \qquad (4.8.16)$$

Решение (4.8.11) и (4.8.16) имеет вид общих зависимостей (4.8.5), соответствующих случаю, когда основные граничные условия выражены только через скорость $\mathbf{u}$.

Теперь можно рассчитать объемный расход и распределение давления в смазочном слое, если скорость скольжения U и наклон скользящей плоскости тела известны. Приращение давления $p - p_0$ в слое имеет постоянный знак, и оно положительно, если только $d_2 < d_1$, как и предполагалось. Таким образом, слой смазки создает положительное давление и способен поддерживать нагрузку по нормали к слою только в том случае, когда слой располагается так, что относительное движение поверхностей заставляет жидкость (посредством касательных напряжений) двигаться в направлении от более широкого к более узкому концу слоя. Приращение давления имеет единственный максимум в слое с величиной порядка $\mu l U / d_1^2$ (мы полагаем величину $(d_1 - d_2)/d_1$ имеющей порядок единицы); из этой оценки видно, что в очень тонких пленках могут устанавливаться весьма высокие давления.

Полная величина нормальной силы, действующей на каждую из двух границ со стороны слоя жидкости, равна

$$\int_0^l (p - p_0)\, dx = \frac{6\mu U}{\alpha^2} \left\{ \ln \frac{d_1}{d_2} - 2 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) \right\}. \qquad (4.8.17)$$

Полная касательная сила, приложенная к нижней плоскости, определяется интегралом

$$\int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dx = \frac{2\mu U}{\alpha} \left\{3 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}\right) - 2 \ln \frac{d_1}{d_2}\right\},$$

а такая же сила на верхней границе равна

$$-\int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=d} dx = \frac{2\mu U}{\alpha} \left\{3 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}\right) - \ln \frac{d_1}{d_2}\right\}.$$

Две касательные силы не равны и не противоположны, так как нормальная сила на одной плоскости имеет малую составляющую, параллельную другой плоскости. Таким образом, отношение касательной силы к нормальной равно произведению

$$\alpha f \left(\frac{d_1}{d_2}\right), \tag{4.8.18}$$

и если величина $(d_1 - d_2)/d_1$ имеет порядок единицы, то порядок величины этого «коэффициента трения» равен отношению d_1/l. Отчасти удивительно, что отношение двух компонент силы не зависит от вязкости жидкости и его можно сделать сколь угодно малым путем уменьшения d_1 при сохранении постоянным отношения d_2/d_1.

Выше мы принимали угол α заданным, хотя в любом случае, когда скользящее тело свободно движется под действием данной нагрузки, угол α может быть переменным; тогда положение тела, при котором заданная нагрузка поддерживается давлением в смазочном слое, должно быть состоянием устойчивого равновесия. Рассмотрение этих практических вопросов и важного случая смазочного слоя между вращающимся круглым валом (цапфой) и цилиндрическим подшипником несколько большего радиуса выходит за рамки этой книги [1]).

Течение в приборе Хеле-Шоу

Прибор Хеле-Шоу дает хороший пример течения, в котором инерционные силы пренебрежимо малы. Он представляет собой две параллельные пластины, близко расположенные друг от друга; пространство между пластинами частично заполнено жидкостью и частично занято «препятствиями» в виде цилиндров с образующими, перпендикулярными пластинам. Жидкость приводится в движение от одного конца слоя к другому приложен-

[1]) Отсылаем читателя к специальным руководствам, например, Michell A. G. M., Lubrication: Its Principles and Practice, Blackie, 1950 [см. также Лейбензон Л. С. (ред.), Гидродинамическая теория смазки. Н. П. Петров, О. Рейнольдс, А. Зоммерфельд, А. Мичель, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, М.— Л., 1934.— *Ред.*].

ной постоянной разностью давлений. Толщина слоя d мала по сравнению с линейным размером L препятствия (измеряемым в плоскости пластин), так что мы опять рассматриваем случай, когда течение в малой части слоя приближенно такое же, как если бы локальный градиент давления был постоянным. Если такое приближение справедливо, то соотношение между локальной скоростью и локальным градиентом давления выражается приближенными формулами

$$u \approx -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} z(d-z), \qquad v \approx -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y} z(d-z), \quad (4.8.19)$$

где координата z берется по нормали к пластинам.

Скорость жидкости заметно изменяется вдоль линий тока на протяжении длины порядка L, и поэтому сила инерции имеет порядок $\rho (u^2 + v^2)_{\max}/L$. Следовательно, условие о малости сил инерции по сравнению с силами вязкости (для какого-либо характерного значения z) сводится к неравенству

$$\frac{d}{L}\left(\frac{\rho d^3 |\nabla p|}{\mu^2}\right) \ll 1. \quad (4.8.20)$$

Это условие, которое по существу совпадает с условием (4.8.10), если заметить, что отношение двух длин, определяющих силы вязкости и силы инерции, равно α в одном случае и d/L— в другом, без труда выполняется в лаборатории.

Хеле-Шоу (1898) установил, что величины u и v при некотором постоянном значении z (или средние по z), находимые по формулам (4.8.19), определяют в плоскости (x, y) двумерное поле скоростей, которое оказывается безвихревым и которое на твердой границе удовлетворяет условию обращения в нуль нормальной компоненты скорости, но не условию отсутствия скольжения. Таким образом, линии тока установившегося течения в приборе Хеле-Шоу около препятствий идентичны по форме линиям тока гипотетического двумерного безвихревого течения невязкой жидкости около препятствий такой же формы. Вводя красящее вещество в нескольких точках во входной части щели (положение источников красящего вещества по нормали к пластинам существенного значения не имеет), этот прибор можно использовать для визуальной демонстрации линий тока в таком гипотетическом течении [1]).

Соотношения типа приведенных применимы также к течению в очень тонком слое жидкости (толщиной в несколько миллиметров) в открытом горизонтальном сосуде, причем уровень поверхности жидкости с одной стороны сосуда поддерживается выше

---

[1]) Будут ли в действительности жидкости с малой вязкостью двигаться хотя бы приблизительно безвихревым образом с однозначным и непрерывным потенциалом скорости, как это следует из выражений (4.8.19), зависит главным образом от формы препятствий, как мы увидим в следующей главе.

уровня на другой стороне путем непрерывного добавления жидкости; такое устройство может быть более удобным для демонстрационных целей.

Фильтрация через пористую среду

Когда грунтовая вода под влиянием градиента давления вынуждена двигаться через почву, каждая ее частица, проходя через нерегулярно расположенные поры между частицами почвы, описывает сложную траекторию. Пусть d — характерный линейный размер этих пор, а U^2— характерная скорость движущейся жидкости в порах; следует ожидать, что в установившемся движении силы инерции будут иметь порядок $\rho U^2/d$, а силы вязкости — порядок $\mu U/d^2$. Силы инерции будут малы по сравнению с силами вязкости, если

$$\frac{\rho Ud}{\mu} \ll 1,$$

и тогда основные уравнения движения сводятся к уравнениям (4.8.1) и (4.8.2). Это условие удовлетворяется в большинстве случаев движения грунтовых вод и во многих других случаях просачивания жидкости через пористые твердые тела, и соответствующие законы течений с очень малыми инерционными силами имеют большое практическое значение.

Так как подробных данных о геометрической форме пор, заполняемых жидкостью, не имеется и, более того, они были бы непригодны вследствие их сложности, то обычно вводят зависимые переменные, которые по существу представляют собой средние величины для большого числа пор. Мы можем определить «локальную» скорость $\bar{\mathbf{u}}$ установившегося течения через пористую среду как такую, которая имеет компоненты, равные объемному потоку жидкости на единицу площади через три плоские элемента поверхности, перпендикулярные к координатным осям, причем линейные размеры их намного больше характерного размера d. Такое определение, конечно, будет иметь смысл только тогда, когда можно найти длину, одновременно большую по сравнению с d и малую по сравнению с линейными размерами внешних границ. Подобным же образом можно определить давление $\bar{p}$, равное среднему значению давления p по некоторому объему жидкости, достаточно большому, чтобы заполнить много пор, но малому по линейным размерам в сравнении с полем всего течения.

Уравнения, описывающие действительное течение вне и внутри пор, линейны, и можно ожидать, что поток жидкости через данную часть пористой среды, содержащую достаточно много пор, пропорционален приложенному к ней градиенту давления и обратно пропорционален μ, точно так же, как если бы среда состояла из ряда трубок малого диаметра, в каждой из которых реализует-

ся течение Пуазейля. Если пористая среда имеет статистически изотропную структуру, так что приложенные к ней градиенты давления во всех направлениях дают одинаковый поток, то можно написать

$$\nabla \bar{p} = -\mu \frac{\bar{\mathbf{u}}}{k}, \tag{4.8.21}$$

где k — постоянная, называемая *коэффициентом проницаемости* и зависящая от размера и формы пор (для данной формы пор она пропорциональна квадрату их линейных размеров). Соотношение (4.8.21) известно как *закон Дарси* (Дарси (1856)) и имеет долгую историю использования в механике грунтов для самых различных пористых сред. Оно обосновывается в основном приведенными выше теоретическими рассуждениями и частично его соответствием с измерениями течений, возникающих под действием приложенных градиентов давления в однородных средах типа песка.

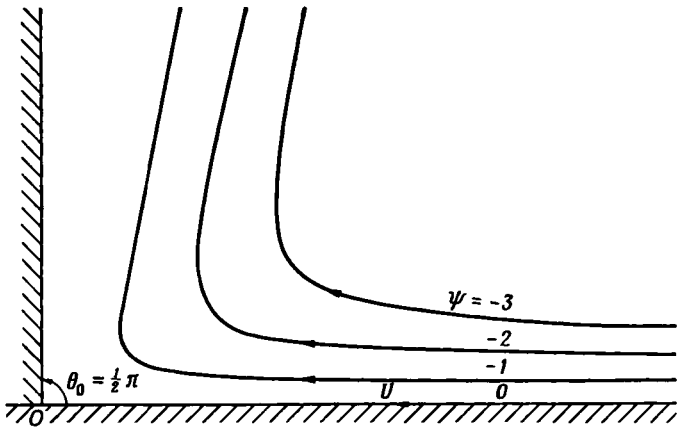
Соотношение (4.8.21) означает, что, когда пористая среда статистически однородна, а коэффициент проницаемости k не зависит от координат, скорость $\bar{\mathbf{u}}$ есть скорость безвихревого течения с потенциалом φ, пропорциональным давлению, как и в случае течения Хеле-Шоу. Уравнение сохранения массы, осредненное указанным выше способом, приводит к уравнению $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, и соответственно

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{4.8.22}$$

Это уравнение нужно решать, подчиняя его условиям обращения в нуль нормальной производной от φ на непроницаемой поверхности и условию постоянного значения φ (или $\bar{p}$) на свободной поверхности жидкости. (В случае воды, просачивающейся через почву, свободная поверхность воды в виде границы сред воздух — вода может быть и внутри грунта.) Таким путем были решены многие практические задачи, касающиеся фильтрации под плотинами, изменения уровня грунтовых вод вблизи стенок, приливного движения грунтовой воды вблизи побережья, фильтрации нефти и газа и т. п.

Двумерное течение в угловой области

Предположим, что одна твердая плоскость наклонена к другой под постоянным углом θ_0 и равномерно скользит по ней, как показано на рис. 4.8.2 для $\theta_0 = \pi/2$. Жидкость в области между плоскостями приводится в движение, как это может быть в цилиндре с движущимся поршнем или вблизи кромки ножа, когда им хотят соскрести пролитый на скатерть соус. Вблизи точки O пересечения плоскостей градиенты скорости становятся



Р и с. 4.8.2. Двумерное течение в угловой области, возникающее при скольжении одной твердой плоскости по другой (ψ в произвольных единицах).

очень большими, так как скорость имеет различные значения на двух твердых границах, и поэтому разумно предположить, что основную роль играют силы вязкости. Распределение скорости в окрестности точки O будет определяться на основе именно такого допущения, которое затем будет проверено апостериори.

Задача может быть сведена к задаче установившегося движения путем выбора подвижной системы координат с началом в движущейся точке O. В случаях двумерного движения с малыми силами инерции удобно ввести функцию тока (§ 2.2), причем уравнение сохранения массы тождественно удовлетворяется и единственная ненулевая компонента завихренности становится равной $-\nabla^2\psi$. Тогда первое из уравнений (4.8.3) принимает вид

$$\nabla^2 (\nabla^2\psi) = 0, \tag{4.8.23}$$

а граничные условия в полярных координатах (r, θ) суть

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -U \text{ при } \theta = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0.$$

Форма этих граничных условий такова, что функция тока ψ может быть всюду пропорциональной r, и остается только проверить, позволяет ли дифференциальное уравнение осуществить эту возможность. Поэтому положим

$$\psi (r, \theta) = rf (\theta) \tag{4.8.24}$$

и, подставив эту функцию в дифференциальное уравнение (4.8.23), найдем

$$\nabla^2\left\{\frac{1}{r}(f+f'')\right\}=\frac{1}{r^3}(f+2f''+f^{IV})=0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f(\theta)=A\sin\theta+B\cos\theta+C\theta\sin\theta+D\theta\cos\theta; \qquad (4.8.25)$$

теперь нужно выбрать коэффициенты A, B, C, D так, чтобы было

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=-U, \qquad f(\theta_0)=0, \qquad f'(\theta_0)=0.$$

Требуемые значения коэффициентов таковы:

$$(A, B, C, D)=(-\theta_0^2, 0, \theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0, \sin^2\theta_0)\frac{U}{\theta_0^2-\sin^2\theta_0}. \qquad (4.8.26)$$

Таким образом, мы имеем решение, которое удовлетворяет граничным условиям и уравнениям движения в пренебрежении силами инерции. Компоненты ускорения жидкости в любой точке, вычисленные из этого решения, пропорциональны U^2/r с коэффициентом пропорциональности, который зависит от θ и имеет порядок единицы. Силы вязкости, также оцениваемые на основании этого решения, имеют порядок $\mu U/r^2$, поэтому предположение о том, что силы инерции пренебрежимо малы, оправдано, если $(\rho rU/\mu)\ll 1$; это значит, что полученное решение справедливо в окрестности точки O пересечения сторон угла, определяемой радиусом

$$r\ll\frac{\mu}{\rho U}.$$

Для смазочных масел при нормальных температурах и скорости $U=10$ см/сек это условие имеет вид $r\ll 0{,}4$ см.

Для любого течения с функцией тока (4.8.24) компоненты скорости не зависят от r и линии тока с равными приращениями ψ пересекают любой радиус в равноотстоящих точках. Движение обратимо, так как основные уравнения и граничные условия линейны и однородны. В частном случае $\theta_0=\frac{1}{2}\pi$ решение имеет вид

$$\psi=\frac{rU}{\frac{\pi^2}{4}-1}\left(-\frac{1}{4}\pi^2\sin\theta+\frac{1}{2}\pi\theta\sin\theta+\theta\cos\theta\right); \qquad (4.8.27)$$

линии тока течения относительно точки O для этого случая изображены на рис. 4.8.2.

Следует отметить, что как нормальная, так и касательная компоненты напряжения в жидкости изменяются как r^{-1}, так что полная сила давления жидкости на плоскостях $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$ стремится к бесконечности по логарифмическому закону. На практике две плоские твердые границы не имеют идеального геометри-

толщину пограничного слоя на всей пластине, пропорциональна $(\nu l/U)^{1/2}$, и, следовательно, мы имеем

$$\delta \sim \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}, \tag{5.8.3}$$

Приближенное уравнение движения (5.8.1) можно теперь преобразовать таким образом, что оно превратится в первое из безразмерных уравнений (5.7.11). Тот факт, что распределение скорости в пограничном слое на расстоянии x от передней кромки не зависит от полной длины пластины l, позволяет в этом частном случае значительно упростить указанное уравнение в безразмерном виде. Мы утверждаем, что единственная возможность согласовать зависимость безразмерных компонент скорости u' и v' от безразмерных переменных x' и y' с независимостью u и v от l состоит в том, чтобы считать u' функцией величины

$$\eta = \frac{y'}{(x')^{1/2}} = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} y, \tag{5.8.4}$$

а v' — произведением $(x')^{-1/2}$ на некоторую функцию от η. Это соответствует функции тока

$$\psi(x, y) = (\nu U x)^{1/2} f(\eta)$$

и

$$u = U f'(\eta), \qquad v = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu U}{x}\right)^{1/2} (\eta f' - f), \tag{5.8.5}$$

где f — некоторая безразмерная функция, а штрих означает дифференцирование по η. Мы получили, таким образом, некоторое решение, такое, что, как и следовало ожидать, все профили скорости при различных значениях x имеют одинаковую форму.

Подстановка выражений (5.8.5) в уравнение (5.8.1) дает

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \tag{5.8.6}$$

с граничными условиями

$$f = f' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$
$$f' \to 1 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Условие $u = U$ при $x = 0$ уже удовлетворяет решению, так что f (а следовательно, и скорость $u = \partial\psi/\partial y$) зависит только от $y/x^{1/2}$. Численное интегрирование уравнения (5.8.6) показывает, что решение, удовлетворяющее поставленным выше граничным условиям, действительно может быть найдено [1]); соответствующее распределение скорости показано на рис. 5.8.1. Были выполнены

[1]) Такое решение было впервые получено в форме рядов Блазиусом (1908), который основывался на ранней работе Прандтля; в последующем это решение было улучшено с использованием численных методов.

независимо от знаков A и $\cos\theta_0$ вектор градиента давления (который в соответствии с решением (4.8.28) однороден) и вектор скорости при $\theta = \theta_0$ лежат в одном и том же квадранте.

Теоремы единственности и минимума диссипации энергии

Докажем, что в заданной области не может быть больше одного решения для распределения скоростей течения с малыми силами инерции и заданными величинами вектора скорости на границе области (включая гипотетическую границу на бесконечности, когда жидкость имеет бесконечную протяженность). Доказательство это по форме весьма похоже на использованное в § 2.7 при установлении единственности решения для потенциала φ соленоидального безвихревого поля скорости с заданными граничными условиями. С доказательством непосредственно связан интересный результат, который состоит в том, что течение с малыми силами инерции обладает наименьшей общей скоростью диссипации из всех других течений несжимаемой жидкости в той же области при одних и тех же значениях вектора скорости всюду на границе области. (Оба результата были установлены Гельмгольцем (1868 *а*).)

Сначала предположим, что (u_i, p, e_{ij}) и (u_i^*, p^*, e_{ij}^*) — два набора распределений скоростей, давлений и тензора скоростей деформации в определенной области, которые удовлетворяют уравнениям (4.8.1) и (4.8.2); предположим, далее, что во всех точках на границе (A) области $u_i = u_i^*$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int (e_{ij}^* - e_{ij})\,(e_{ij}^* - e_{ij})\,dV = \\
&\quad = \int \frac{\partial (u_i^* - u_i)}{\partial x_j}\,(e_{ij}^* - e_{ij})\,dV = \\
&\quad = \int (u_i^* - u_i)\,(e_{ij}^* - e_{ij})\,n_j\,dA - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int (u_i^* - u_i)\,(\nabla^2 u_i^* - \nabla^2 u_i)\,dV = \\
&\quad = -\frac{1}{2\mu}\int (u_i^* - u_i)\,\frac{\partial (p^* - p)}{\partial x_i}\,dV = \\
&\quad = -\frac{1}{2\mu}\int (p^* - p)\,(u_i^* - u_i)\,n_i\,dA = \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Этот результат показывает, что величины скоростей деформации e_{ij}^* и e_{ij} всюду в области должны быть равны. Следовательно, разность скоростей $u_i^* - u_i$ представляет движение, в котором никакой элемент жидкости не деформируется и которое должно

быть комбинацией поступательного и вращательного движений жидкости как твердого тела; такое движение исключается граничными условиями, так что всюду в области $u_i^* = u_i$.

Предположим теперь, что (u_i, p, e_{ij}) удовлетворяют уравнениям (4.8.1) и (4.8.2) и что (u_i', p', e_{ij}') соответствуют любому другому течению несжимаемой жидкости в той же самой области (т. е. $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$, но уравнение (4.8.1) не удовлетворяется); как и раньше, $u_i = u_i'$ во всех точках на границе области. Аналогично предыдущему убеждаемся, что

$$\int (e_{ij}' - e_{ij})\, e_{ij}\, dV = 0.$$

Полная скорость диссипации механической энергии под влиянием вязкости во всей области течения, скорость которого равна u_i', есть

$$2\mu \int e_{ij}' e_{ij}'\, dV = 2\mu \int \{e_{ij}e_{ij} + (e_{ij}' - e_{ij})\,(e_{ij}' - e_{ij})\}\, dV$$

и представляет собой сумму полной скорости диссипации, соответствующей течению со скоростью u_i, и неотрицательного члена, который равен нулю только при $e_{ij}' = e_{ij}$. Таким образом, скорость диссипации, соответствующая течению в данной области с пренебрежимо малыми силами инерции, меньше скорости диссипации в любом другом соленоидальном распределении скорости в той же области (включая и распределения, которые удовлетворяют полным уравнениям движения) с одними и теми же значениями скорости во всех точках на границе области.

Упражнения

1. Круглый диск радиуса a параллелен твердой плоскости и находится на малом расстоянии h ($\ll a$) от нее; пространство между ними занято жидкостью. Давление на краю диска равно атмосферному. Покажите, что движение диска в направлении нормали к плоскости порождает силу, действующую на диск в противоположном направлении и равную

$$\frac{3\pi}{2}\frac{\mu a^4}{h^3}\frac{dh}{dt}, \quad \text{если} \quad \frac{\rho h}{\mu}\frac{dh}{dt} \ll 1.$$

Исходя из этого покажите, что постоянная сила F, приложенная к диску, который находится сначала на расстоянии h_0 от плоскости, оторвет его от плоскости за время $(3/4)\,\pi\mu a^4/h^2F$. (Тот факт, что это время велико, если h мало, представляет собой основу явления вязкого склеивания, проявляющегося, например, в липкой ленте и в «слипающихся» хорошо отшлифованных металлических поверхностях.)

Аналогично покажите, что сила, противодействующая изменению минимального расстояния h между поверхностями двух почти соприкасающихся твердых сфер радиусами a и b равна

$$6\pi \frac{\mu}{h\,(a^{-1} + b^{-1})^2}\frac{dh}{dt}, \quad \text{если} \quad \frac{\rho h}{\mu}\frac{dh}{dt} \ll 1.$$

2. Жидкость в области между двумя твердыми плоскостями при $\theta = \mp\alpha$ находится в состоянии установившегося двумерного движения, вызванного некоторой причиной вдали от угла. Исследуйте движение вблизи угла с функцией тока вида $r^{\lambda} f(\theta)$, где $f(\theta)$ — четная функция от θ, а постоянную λ нужно определить. Покажите, что действительные решения относительно λ существуют только при $\alpha > 73°$ (приблизительно). Течение, соответствующее комплексным решениям, полученным при $\alpha < 73°$, состоит из ряда вихрей уменьшающихся размера и интенсивности по мере приближения к углу (Моффат (1964)).

4.9. Течение, вызываемое движением тела при малых числах Рейнольдса

Если тело с характерным линейным размером d совершает установившееся поступательное движение со скоростью U в ничем больше не возмущенной жидкости, то d и U представляют собой характерную длину и скорость поля течения в целом. Поэтому силы инерции жидкости должны иметь порядок $\rho U^2/d$, а силы вязкости — порядок $\mu U/d^2$. Отношение этих двух величин $\rho dU/\mu = \mathrm{Re}$, и поэтому при $\mathrm{Re} \ll 1$ силами инерции можно пренебречь. Приступим к исследованию поля течения в этом предположении, сознавая, что полученное таким образом решение должно быть проверено на соответствие с начальным предположением. Движение тела через жидкость при малом числе Рейнольдса (обычно из-за весьма малого размера тела) представляет собой задачу, которая важна при изучении многих явлений, таких, например, как выпадение осадка в жидкости или падение капель тумана в воздухе. Величиной, представляющей наибольший практический интерес, является сила сопротивления, действующая со стороны жидкости на тело, так как, зная эту силу, можно рассчитать в частности предельную скорость свободного падения под действием силы тяжести. Скорость тела в практических задачах не всегда постоянна, однако полученная выше оценка относительной величины сил инерции и сил вязкости остается пригодной, если только тело или окружающая его жидкость не вынуждены двигаться с ускорением, бо́льшим, чем U^2/d (как может быть, например, если через жидкость проходит звуковая волна высокой частоты).

Уравнения (4.8.1) и (4.8.2) перепишем так:

$$\nabla\left(\frac{p-p_0}{\mu}\right) = \nabla^2\mathbf{u} = -\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \tag{4.9.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{4.9.2}$$

где p_0 — постоянное давление на достаточном удалении от тела. Из этих уравнений следует, что

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Выберем систему координат, в которой жидкость на бесконечности неподвижна. Тогда граничные условия при движении *твердого* тела со скоростью $\mathbf{U}$ таковы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{на поверхности тела,} \\ &\mathbf{u} \to 0,\ p - p_0 \to 0 \ \text{при}\ |\mathbf{x}| \to \infty. \end{aligned} \tag{4.9.3}$$

Из общего результата, полученного в конце предыдущего параграфа, мы видим, что существует единственное решение уравнений (4.9.1) и (4.9.2), которое может удовлетворять граничным условиям (4.9.3).

В данном случае мы будем явно использовать тот факт, что уравнения (4.9.1) и (4.9.2) и граничные условия (4.9.3) линейны и однородны по $\mathbf{u}$, $(p - p_0)/\mu$ и $\mathbf{U}$. При этом выражения для $\mathbf{u}$ и $(p - p_0)/\mu$ также должны быть линейными и однородными относительно $\mathbf{U}$. (Аналогичное рассуждение использовалось в § 2.9 для безвихревого течения — см. (2.9.23).)

Твердая сфера

Важный случай тела сферической формы является одним из немногих, который поддается аналитическому изучению. Поле течения, создаваемого твердой сферой при поступательном движении, было впервые определено Стоксом (1851).

Выберем начало неподвижной системы координат в мгновенном положении центра сферы радиуса a. Распределения скорости $\mathbf{u}$ и давления $(p - p_0)/\mu$ должны быть симметричными относительно оси, проходящей через центр сферы и параллельной вектору скорости $\mathbf{U}$, а вектор $\mathbf{u}$ должен быть расположен в плоскости, проходящей через эту ось. Дифференциальные операторы в уравнениях (4.9.1) и (4.9.2) не зависят от выбора системы координат, так что величины $(p - p_0)/\mu$ и скорость $\mathbf{u}$ зависят от вектора $\mathbf{x}$. а не от какой-либо комбинации его компонент. Параметры $\mathbf{U}$ и a завершают перечень величин, от которых могут зависеть $(p - p_0)/\mu$ и $\mathbf{u}$ (если бы тело имело какую-либо другую форму, отличную от сферической, то следовало бы включить векторы, определяющие ориентацию тела, и скалярные параметры его формы).

Из сказанного следует, что решение $(p - p_0)/\mu$ должно иметь вид $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} F/a^2$, где F — безразмерная функция только от $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}/a^2) = r^2/a^2$. Поскольку разность давления $p - p_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается в нуль на бесконечности, она может быть представлена в виде ряда по объемным сферическим функциям отрицательных степеней радиуса r (см. (2.9.19)); указанному виду решения соответствует единственный член ряда

порядка —2 («дипольный» член). Таким образом,

$$\frac{p-p_0}{\mu}=\frac{C\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^3}, \tag{4.9.4}$$

где C — постоянная.

Точно такое же рассуждение применимо и к гармонической функции $\boldsymbol{\omega}$, которая представляет собой азимутальный вектор и которая должна быть пропорциональна произведению $\mathbf{U}\times\mathbf{x}/r^3$. Из уравнения (4.9.1) можно установить, что коэффициент пропорциональности равен C, так что

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{C\mathbf{U}\times\mathbf{x}}{r^3}. \tag{4.9.5}$$

Скорость, соответствующую такому распределению завихренности, удобнее всего выразить через функцию тока ψ. В сферической системе координат ($\theta=0$ в направлении $\mathbf{U}$) азимутальная или φ-компонента вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеет выражение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.$$

Заменяя u_r и u_θ выражениями (2.2.14), получаем из (4.9.5) уравнение относительно ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=-\frac{CU\sin^2\theta}{r}.$$

Очевидно, что частный интеграл этого уравнения пропорционален $\sin^2\theta$; внутреннее граничное условие требует, чтобы при $r=a$ функция ψ зависела от θ таким же образом. Поэтому мы положим

$$\psi=U\sin^2\theta f(r). \tag{4.9.6}$$

Очевидно, что этому выражению отвечает вектор скорости

$$\mathbf{u}=\mathbf{U}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)+\mathbf{x}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{U}}{r^2}\left(\frac{2f}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right). \tag{4.9.7}$$

Уравнение для неизвестной функции $f(r)$ принимает вид

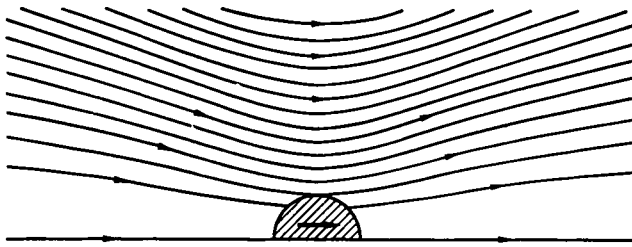
$$\frac{d^2f}{dr^2}-\frac{2f}{r^2}=-\frac{C}{r}, \tag{4.9.8}$$

общее решение которого

$$f(r)=\frac{1}{2}Gr+Lr^{-1}+Mr^2. \tag{4.9.9}$$

Члены, содержащие новые постоянные L и M, относятся к некоторому безвихревому движению.

Далее, согласно внешнему граничному условию, при $r\to\infty$ должно быть $(f/r^2)\to 0$, и, согласно кинематическому условию



Р и с. 4.9.1. Линии тока в осевой плоскости течения, создаваемого движущейся сферой при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ (без учета сил инерции).

$u_r = U \cos\theta$ на поверхности сферы, $f(a) = (1/2)\, a^2$. Следовательно,

$$M = 0, \quad L = \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{2} Ca^2. \tag{4.9.10}$$

Остается выполнить условие прилипания на поверхности сферы, а именно

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin\theta \quad \text{при} \quad r = a;$$

это условие удовлетворяется, если

$$C = \frac{3}{2} a. \tag{4.9.11}$$

Таким образом, получена функция тока этого течения:

$$\psi = Ur^2 \sin^2\theta \left(\frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right). \tag{4.9.12}$$

Картина линий тока показана на рис. 4.9.1. Линии тока симметричны относительно центральной плоскости, нормальной к скорости $\mathbf{U}$, что, конечно, вытекает из линейной зависимости $\mathbf{u}$ от $\mathbf{U}$; изменение направления вектора скорости $\mathbf{U}$ на обратное приводит только к изменению знака всех векторов $\mathbf{u}$. Следует также заметить, что возмущение, вызванное сферой, распространяется на значительное расстояние, причем скорость при больших значениях r стремится к нулю как r^{-1}. Вследствие этого наличие внешней твердой границы, например в виде цилиндра с образующими, параллельными скорости $\mathbf{U}$, может заметно изменить движение жидкости, даже если граница находится на расстоянии многих диаметров от сферы; подобным же образом может оказаться заметным взаимодействие между двумя сферами, движущимися на расстоянии многих диаметров друг от друга.

Эти особенности решения возникают в результате пренебрежения инерционным членом в уравнении движения. Уравнение для завихренности, $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$, показывает, что течение, соответствующее функции тока (4.9.12), вызвано по существу только лишь установившейся молекулярной диффузией завихренности

в бесконечность во всех направлениях, причем сфера оказывается источником завихренности вследствие наличия условия прилипания. Член $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$, который имеется в полном уравнении для $\boldsymbol{\omega}$ и который отражает влияние непрерывного изменения положения сферы относительно неподвижных осей координат, в данном случае не учитывается, и вследствие молекулярной диффузии завихренность распространяется на большое расстояние одинаково как перед сферой, так и за ней; распределение завихренности таково, как если бы сфера была неподвижной и действовала исключительно как ее источник. Завихренность затухает как r^{-2}, что и следовало ожидать для диффузии каждой компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ от неподвижного стационарного источника типа диполя (на поверхности сферы образуются равные друг другу положительная и отрицательная величины каждой компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$).

Нам остается проверить, что решение, найденное в пренебрежении силами инерции, действительно согласуется с таким предположением. Согласно решению (4.9.12), сила вязкости $\mu\nabla^2\mathbf{u}$ имеет порядок $\mu Ua/r^3$. Если скорость сферы строго постоянна, а изменение скорости $\mathbf{u}$ в фиксированной точке обусловлено просто перемещением сферы относительно этой точки, то оператор $\partial/\partial t$ эквивалентен оператору $-\mathbf{U}\cdot\nabla$ и сила инерции имеет вид

$$\rho\,(-\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}). \tag{4.9.13}$$

Для первого из двух написанных членов оценка порядка его величины с использованием решения (4.9.12) дает $\rho U^2a/r^2$, для второго же $\rho U^2a^2/r^3$. Эти два члена вблизи сферы имеют одинаковый порядок, но вдали от сферы доминирующим оказывается первый. Таким образом, отношение порядков величин пренебрегаемых сил инерции и сохраняемых сил вязкости равно

$$\frac{\rho U^2a}{r^2}\Big/\frac{\mu Ua}{r^3} = \frac{\rho aU}{\mu}\,\frac{r}{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{r}{a}. \tag{4.9.14}$$

В точках вблизи сферы полученное решение действительно пригодно, если $\mathrm{Re} \ll 1$, однако силы инерции, соответствующие этому решению, становятся сравнимыми с силами вязкости на расстояниях от сферы порядка a/Re. Очевидно, что решение (4.9.12) на таких больших расстояниях от сферы непригодно, хотя это само по себе может и не иметь значения, так как там скорость жидкости, силы инерции и силы вязкости — все малые величины. В самом деле, в § 4.10 мы увидим, что возможно найти распределение скорости, которое при $\mathrm{Re} \ll 1$ представляет собой хорошее приближение к решению полного уравнения движения всюду в жидкости и которое совпадает с приведенным выше приближенным решением, когда отношение r/a имеет порядок единицы.

Чтобы найти силу, действующую на сферу, определим теперь тензор напряжений при $r = a$. Возьмем выражение i-компоненты силы, действующей на единицу площади сферы в точке $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$:

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = n_j\left\{-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}_{r=a}.$$

Используя формулу (4.9.7) для скорости, после небольших преобразований i-компоненту напряжения можно записать так:

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = \left\{-pn_i + \mu n_i \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\left(-\frac{f''}{r} + \frac{6f'}{r^2} - \frac{10f}{r^3}\right) + \right.$$
$$\left. + \mu U_i\left(\frac{f''}{r} - 2\frac{f'}{r^2} + 2\frac{f}{r^3}\right)\right\}_{r=a}; \qquad (4.9.15)$$

здесь $f' = df/dr$. Наконец, подстановка вместо p и f их выражений из (4.9.4) и (4.9.9) и использование равенств (4.9.10) дают

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = n_i\left\{-p_0 + \frac{3\mu\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{a}\left(2\frac{C}{a} - 3\right)\right\} + \frac{3\mu U_i}{a}\left(1 - \frac{C}{a}\right). \qquad (4.9.16)$$

Определив постоянную C из условия прилипания, получим [1])

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = -p_0 n_i - \frac{3\mu U_i}{2a}. \qquad (4.9.17)$$

Оказывается, что вектор силы на единицу площади сферы при ее движении имеет одно и то же значение $-3\mu\mathbf{U}/2a$ во всех точках сферы — поразительный результат, который, однако, не справедлив для тел другой формы, а также и для сферы с нетвердой поверхностью. Первый член в правой части выражения (4.9.17) — просто однородное нормальное напряжение, равное давлению в жидкости на бесконечности, и оно не дает никакого вклада в величину полной силы сопротивления, параллельной вектору скорости $\mathbf{U}$ и имеющей величину

$$D = 6\pi a\mu U. \qquad (4.9.18)$$

Выражение (4.9.18) обычно называют *законом Стокса* для сопротивления движущейся сферы. Общепринято выражать силы, действующие на движущиеся тела со стороны жидкости, через безразмерный *коэффициент сопротивления*, получаемый путем деления силы на $(1/2)\,\rho U^2$ и на площадь тела в проекции на плоскость, нормальную к вектору скорости $\mathbf{U}$; в данном случае этот коэффициент есть

$$C_D = \frac{D}{(1/2)\,\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{\mathrm{Re}} \quad \left(\mathrm{Re} = \frac{2aU\rho}{\mu}\right). \qquad (4.9.19)$$

Теперь несложно рассчитать предельную скорость сферы, свободно падающей в жидкости под действием силы тяжести при выполнении закона Стокса. Принимая во внимание выталкивающую силу, получаем

$$U = \frac{2}{9}\frac{(\rho_s - \rho)ga^2}{\mu}, \qquad (4.9.20)$$

[1]) Иначе этот результат можно просто получить из выражения для напряжения на твердой границе, приведенного во втором упражнении в конце § 4.1.

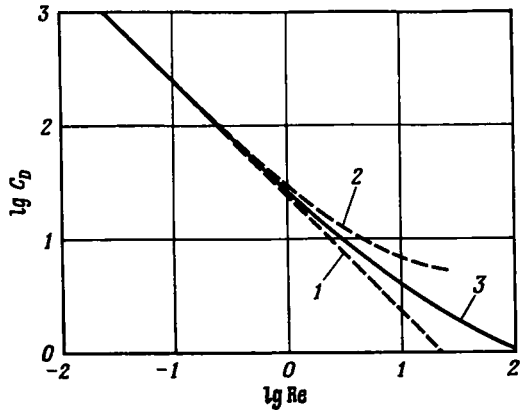


Рис. 4.9.2. Сравнение наблюдаемых значений коэффициента сопротивления сферы (из работы Кастлмана (1925)) с двумя теоретическими (по закону Стокса $C_D = 24/\mathrm{Re}$ и по второму приближению $C_D = (24/\mathrm{Re})(1 + {}^3/_{16}\,\mathrm{Re})$, где $\mathrm{Re} = 2a\rho U/\mu$).
1 — закон Стокса; *2* — второе приближение; *3* — наблюдение.

кивающую силу, приложенную к сфере (§ 4.1), для предельной скорости V сферы с плотностью $\bar{\rho}$ получим уравнение

$$6\pi a\mu \mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi a^3 (\bar{\rho} - \rho)\,\mathbf{g},$$

из которого

$$\mathbf{V} = \frac{2}{9}\frac{a^2\mathbf{g}}{\nu}\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1\right), \qquad (4.9.20)$$

где $\nu = \mu/\rho$. Соответствующее значение числа Рейнольдса для сферы, падающей с предельной скоростью, равно

$$\frac{2aV\rho}{\mu} = \frac{4}{9}\frac{a^3 g}{\nu^2}\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1\right). \qquad (4.9.21)$$

Для песчинки, падающей в воде при 20 °С, имеем $\bar{\rho}/\rho \approx 2$ и $\nu = 0{,}010$ см^2/сек, и соответственно число Рейнольдса равно $4{,}4 \cdot 10^6\, a^3$, где a надо брать в сантиметрах; для капли воды (считаем ее твердой), падающей в воздухе, $\bar{\rho}/\rho \approx 780$, $\nu = 0{,}15$ см^2/сек и число Рейнольдса получается равным $1{,}5 \cdot 10^7\, a^3$. Условие, позволяющее пренебречь силами инерции, а именно $\mathrm{Re} \ll 1$, удовлетворяется для песчинки в воде при $a \ll 0{,}006$ см, а для капли воды в воздухе — при $a \ll 0{,}004$ см. Следовательно, результаты такого анализа можно применить только к весьма малым сферам. Однако, как видно из сравнения наблюдаемой и расчетной предельных скоростей сфер известного размера (см. рис. 4.9.2), закон Стокса для силы сопротивления дает удовлетворительную точность в большинстве случаев, когда $\mathrm{Re} < 1$, и ошибку нельзя

заметить уже при $\mathrm{Re} < 0{,}5$. Таким образом, теоретическое требование быть «малым по сравнению» на практике обычно можно заменить (по крайней мере, когда речь идет о силе сопротивления) просто требованием быть «меньше чем».

Из рис. 4.9.2 можно заметить, что кривая, соответствующая закону Стокса, расположена ниже измеренных значений сопротивления и ниже другой теоретической кривой (которая будет рассматриваться в следующем параграфе). Этого и следовало ожидать на основании общего результата, установленного в конце § 4.8; поле скоростей, полученное в пренебрежении силами инерции, сопровождается меньшей общей скоростью диссипации, чем при любом другом соленоидальном распределении скорости с теми же граничными условиями, поэтому ему соответствует меньшая величина работы, совершаемой сферой против сопротивления жидкости при данной скорости U.

Сферическая капля в другой жидкости

В ряде случаев, представляющих практический интерес, сфера, поступательно движущаяся при малых числах Рейнольдса, сама состоит из жидкости, в которой в свою очередь может возникать движение, и желательно выяснить, какое влияние оказывает эта внутренняя циркуляция на силу сопротивления (Адамар (1911)). Будем считать, что эти две жидкости не смешиваются и что поверхностное натяжение на поверхности раздела достаточно велико, чтобы сохранить сферическую форму капли при любом деформационном влиянии сил вязкости. Это последнее условие состоит в том, чтобы отношение γ/a (γ — коэффициент поверхностного натяжения) было большим по сравнению с нормальным напряжением порядка $\mu U/a$, вызываемым движением, т. е. чтобы было

$$\gamma \gg \mu U; \tag{4.9.22}$$

в конце этого параграфа мы еще раз обратимся к этому требованию. Кроме того, примем, что число Рейнольдса для движения внутри капли мало по сравнению с единицей, как и число Рейнольдса для движения вне капли.

Необходимые изменения в рассуждениях, использованных для нахождения полей скорости и давления в случае твердой сферы, можно произвести без особого труда. Движения как внутри, так и вне сферы осесимметричны и удовлетворяют уравнениям (4.9.1) и (4.9.2) (хотя и с разными значениями коэффициентов вязкости). Вектор скорости $\mathbf{u}$ и разность давлений $(p - p_0)$ вне сферы, как и раньше, должны обращаться в нуль на бесконечности, а $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{p} - \bar{p}_0$ (черточка указывает на величину, связанную с жидкостью внутри сферы и с ее движением) конечны везде в области

определения. Обычное кинематическое условие на поверхности раздела имеет вид

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U} \quad \text{при } r = a. \tag{4.9.23}$$

Вместо условия прилипания на поверхности твердой сферы теперь выставляются определенные динамические условия сращивания. На поверхности раздела не может возникать относительного движения двух жидкостей, и касательное напряжение, развиваемое на поверхности раздела внешней частью жидкости, должно быть равно по величине и противоположно по знаку напряжению, развиваемому внутренней жидкостью [1]). Из рассмотрения нормального напряжения на поверхности раздела нельзя получить никаких сведений, так как ясно, что любой разрыв нормального напряжения, который невозможно исключить посредством соответствующего выбора $\bar{p}_0$, компенсируется поверхностным натяжением, возникающим при небольшой деформации поверхности раздела. Таким образом,

$$\mathbf{x}\times\mathbf{u} = \mathbf{x}\times\bar{\mathbf{u}} \quad \text{при } r = a, \tag{4.9.24}$$

$$\varepsilon_{mki}n_k n_j\,(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) = 0 \quad \text{при } r = a. \tag{4.9.25}$$

Уравнения и граничные условия линейны и однородны относительно $\mathbf{u}$, $p - p_0$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{p} - \bar{p}_0$ и $\mathbf{U}$, так что все соотношения от (4.9.4) до (4.9.10) остаются справедливыми и дополняются аналогичными соотношениями для внутреннего движения. Давление $\bar{p}$, как и p, удовлетворяет уравнению Лапласа, и соответствующее решение аналогично решению (4.9.4), т. е.

$$\frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\bar{\mu}} = \bar{C}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}.$$

Функция тока и скорость внутри сферы имеют вид (4.9.6) и (4.9.7), а завихренность внутри сферы

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{2}\bar{C}\mathbf{U}\times\mathbf{x},$$

и, следовательно, правая часть дифференциального уравнения относительно $\bar{f}$, аналогичного уравнению (4.9.8), равна (1/2) $\bar{C}r^2$. Тогда

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{20}\bar{C}r^4 + \bar{L}r^{-1} + \bar{M}r^2. \tag{4.9.26}$$

---

[1]) Здесь мы предполагаем, что единственная механическая величина, характеризующая поверхность раздела,— это однородное поверхностное натяжение; в действительности оказывается, что на поверхности раздела могут собираться молекулы примесей, что обусловливает и другие ее свойства (см. § 1.9).

Необходимость избежать особенность при $r = 0$ и кинематическое условие при $r = a$ требуют, чтобы было

$$\bar{L} = 0, \quad \bar{M} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\bar{C}a^2.$$

Таким образом, скорость внутри сферы

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{U} - \frac{1}{10}\bar{C}\{\mathbf{U}(a^2 - 2r^2) + \mathbf{x}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{x})\}. \tag{4.9.27}$$

Остается определить C и $\bar{C}$ из динамических условий сращивания. Из условия (4.9.24)

$$C - \frac{1}{2}a = \frac{1}{10}\bar{C}a^3 + a.$$

Касательная компонента зависит только от члена со скоростью U_i в общем выражении (4.9.15) для напряжения на поверхности раздела; сращивая соответствующие касательные компоненты, получим

$$\frac{3\mu}{a^2}(a - C) = \frac{3}{10}\bar{\mu}a\bar{C}.$$

Из написанных условий находим

$$C = \frac{a}{2}\frac{2\mu + 3\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}, \quad \bar{C} = -\frac{5}{a^2}\frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}}. \tag{4.9.28}$$

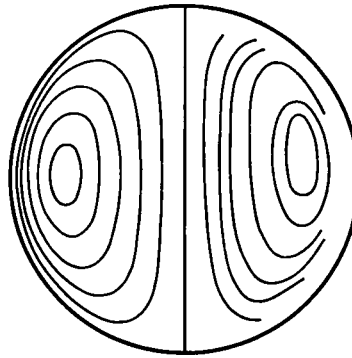
Результирующая сила, действующая на поверхность раздела со стороны внешней части жидкости, определяется путем интегрирования силы (4.9.16), действующей на единицу площади, по поверхности раздела A:

$$\int n_j(\sigma_{ij})_{r=a}\,dA = -4\pi\mu U_i C \equiv -4\pi a\mu U_i \frac{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}. \tag{4.9.29}$$

Следовательно, предельная скорость $\mathbf{V}$ жидкой сферы с плотностью $\bar{\rho}$ и коэффициентом вязкости $\bar{\mu}$, движущейся свободно под действием силы тяжести, равна

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\mathbf{g}}{\nu}\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1\right)\frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}. \tag{4.9.30}$$

Случай твердой сферы получается, если положить $\bar{\mu}/\mu \to \infty$. Случай сферического пузырька газа, движущегося в жидкости, соответствует (приближенно) другому предельному значению $(\bar{\mu}/\mu) = 0$ и одновременно $\bar{\rho}/\rho = 0$. Поэтому скорость сферического газового пузырька, равномерно всплывающего под влиянием выталкивающей силы, будет равна $(1/3)a^2g/\nu$. Однако наблюдения предельной скорости V очень маленьких пузырьков газа



Р и с. 4.9.3. Сравнение теоретических (слева) и наблюдаемых (справа) картин линий тока в сферической капле глицерина, падающей в касторовом масле (Спеллс (1952)).

показывают, что сила сопротивления часто ближе к значению $6\pi a\mu V$, чем к ожидаемому значению $4\pi a\mu V$; это объясняют тем, что любые поверхностно активные примеси, имеющиеся в жидкости, вероятно, образуют на поверхности пузырька жесткие структуры больших молекул и заставляют поверхность раздела действовать отчасти как твердая поверхность [1]).

Были проведены наблюдения общей формы течения внутри жидких капель, падающих под влиянием силы тяжести в другой жидкости; измерение распределения скорости в них затруднительно. На рис. 4.9.3 показаны схематически линии тока, наблюдаемые в сферической жидкой капле, относительно осей координат, движущихся вместе с каплей. Теоретические линии тока, соответствующие распределению скорости (4.9.27) относительно этих же самых осей, представляют собой линии, на которых функция тока

$$\psi \sim \frac{1}{2} U r^2 (a^2 - r^2) \sin^2 \theta \qquad (4.9.31)$$

принимает постоянные значения, и эти линии тока также показаны; соответствие между ними удовлетворительное.

Наконец, мы затронем интересный вопрос относительно нормальной компоненты напряжения на поверхности жидкой сферы, на которую не наложено никаких ограничений. Следует напомнить, что давление, входящее в уравнения в этой главе, представляет собой модифицированное давление, и чтобы получить абсолютное давление (или отличающееся от него на постоянную), нужно добавить к модифицированному давлению член $\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ для поля течения вне сферы и член $\bar{\rho} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ для поля течения внутри нее.

[1]) Общее обсуждение влияния адсорбированного вещества на поверхности малого газового пузырька, всплывающего в жидкости, можно найти в книге: Левич В. Г., Физико-химическая гидродинамика, Физматгиз, М., 1959.

Тогда разность значений нормальной компоненты абсолютного напряжения на поверхности сферы при подходе к ней с внешней и с внутренней сторон находится независимо от поверхностного натяжения из общего выражения (4.9.15):

$$n_i n_j (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})_{r=a} = \bar{p}_0 - p_0 - \mathbf{n}\cdot g a (\rho - \bar{\rho}) + \\ + \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}\left[\frac{3\mu}{a^2}(C - 2a) + \frac{3}{5}a\bar{\mu}\bar{C}\right] = \\ = \bar{p}_0 - p_0 - \mathbf{n}\cdot g a (\rho - \bar{\rho}) - \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}\frac{3\mu}{a}\frac{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}. \quad (4.9.32)$$

Интересное свойство выражения (4.9.32) состоит в том, что, когда сфера равномерно движется под действием силы тяжести, причем скорость ее поступательного движения определяется по формуле (4.9.30), нормальные компоненты напряжения отличаются только на постоянную величину $\bar{p}_0 - p_0$. Следовательно, напряжения на поверхности раздела не стремятся деформировать сферу, и фактически нет необходимости предполагать, что поверхностное натяжение будет настолько сильным, чтобы сохранить каплю или пузырек в сферической форме; поверхностное натяжение входит только в соотношение $\bar{p}_0 - p_0 = 2\gamma/a$ (см. (1.9.2)), определяющее $\bar{p}_0$. Если вязкости и плотности двух жидкостей таковы, что малые значения чисел Рейнольдса позволяют пренебречь силами инерции, то, очевидно, нет никакого ограничения на размер жидкой сферы. Обнаружено, что пузыри воздуха, поднимающиеся в очень вязких жидкостях, таких, как патока, имеют сферическую форму, даже если их радиус становится настолько большим, что влияние поверхностного натяжения могло бы не иметь решающего значения.

Тело произвольной формы

Хотя трудно аналитически исследовать структуру течения, вызываемого движущимся телом любой формы, кроме сферической [1]), по этому вопросу имеются некоторые общие результаты. Следующие замечания относятся только к условиям, в которых силами инерции можно полностью пренебречь, т. е. к малым числам Рейнольдса.

Рассуждения, подобные тем, которые использовались в начале этого параграфа, показывают, что для тела произвольной формы при поступательном движении со скоростью $\mathbf{U}$ как вектор скорости $\mathbf{u}$, так и отношение $(p - p_0)/\mu$ линейны и однородны отно-

[1]) Решение для твердого эллипсоида см. в книге: Ламб Г., Гидродинамика, ГИТТЛ, М.— Л., 1947.

сительно вектора U. Кроме того, изменение размера тела без изменения его формы приводит просто к изменению масштаба всего поля течения, так что для тела данной формы величины $\mathbf{u}/U$ и $(p - p_0)\, d/\mu U$ суть безразмерные функции от $\mathbf{x}/d$, где d — характерный линейный размер тела.

Как касательное, так и нормальное напряжения в жидкости линейно зависят от U, поэтому результирующий вектор силы, приложенной к жидкости, определяется интегралом по поверхности тела

$$F_i = -\int \sigma_{ij} n_j \, dA; \tag{4.9.33}$$

величина силы пропорциональна $\mu U d$. Уравнение (4.9.1), описывающее течение с пренебрежимо малыми силами инерции, эквивалентно равенству

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

и из применения формулы Остроградского — Гаусса следует, что интеграл (4.9.33) имеет одно и то же значение для любой поверхности в жидкости, охватывающей тело, и, в частности, для сферы достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Следовательно,

$$F_i = -\int \lim_{r\to\infty} (r\sigma_{ij} x_j)\, d\Omega(\mathbf{x}), \tag{4.9.34}$$

где $\delta\Omega(\mathbf{x})$ — элемент телесного угла в направлении вектора $\mathbf{x}$. Это равенство показывает, что в случае течения, вызванного движущимся телом, которое действует на жидкость конечной силой, разность давлений $(p - p_0)$ и тензор скоростей деформации должны уменьшаться при $r \to \infty$ по крайней мере как r^{-2}.

Мы знаем также, что $p - p_0$ является гармонической функцией, и ее можно представить рядом в виде (2.9.19). Первый ненулевой член этого ряда, очевидно, имеет степень r^{-2}, так что асимптотически при $r \to \infty$ имеем

$$\frac{p - p_0}{\mu} \sim \frac{P_{ij} U_j x_i d}{r^3}, \tag{4.9.35}$$

где P_{ij} — числовой тензор, зависящий только от формы тела. Завихренность $\boldsymbol{\omega}$ также удовлетворяет уравнению Лапласа и может быть записана в виде аналогичного ряда (с учетом того, что $\boldsymbol{\omega}$ — аксиальный вектор). Члены одного и того же порядка в разложениях $(p - p_0)/\mu$ и $\boldsymbol{\omega}$ связаны уравнением (4.9.1), и можно убедиться, что если первый член ряда для $(p - p_0)/\mu$ равен $\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla r^{-1}$, то тот же член в случае $\boldsymbol{\omega}$ равен $\boldsymbol{\alpha} \times \nabla r^{-1}$. Следовательно, при $r \to \infty$ будет

$$\omega_l \sim \varepsilon_{ikl} \frac{P_{ij} U_j x_k d}{r^3}. \tag{4.9.36}$$

Наконец, мы можем получить асимптотическое выражение для скорости, которое определяется с помощью (4.9.36) (не считая слагаемого от безвихревого течения, величина которого не может быть больше r^{-3}, если объемный поток через поверхность тела равен нулю) и с учетом требования соленоидальности скорости $\mathbf{u}$. При $r \to \infty$ находим

$$u_k \sim \frac{1}{2} P_{ij} U_j \left(\frac{d}{r} \delta_{ik} + \frac{d}{r^3} x_i x_k \right). \qquad (4.9.37)$$

Теперь можно связать коэффициент P_{ij} с силой $\mathbf{F}$, оценивая напряжение на сферической поверхности большого радиуса (см. (4.9.34)). Несложные выкладки приводят к результату

$$F_i = 4\pi\mu P_{ij} U_j d. \qquad (4.9.38)$$

Оказывается, что, когда тело данной формы движется поступательно со скоростью $\mathbf{U}$, для определения полной силы, действующей на жидкость, и асимптотических выражений давления и скорости, достаточно знать только числовой тензор P_{ij}.

Из предыдущих вычислений известно, что в случае тела сферической формы радиуса $d/2$, состоящего из жидкости с коэффициентом вязкости $\bar{\mu}$,

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}.$$

Течение на больших расстояниях от тела имеет осевую симметрию относительно направления вектора $P_{ij}U_j$. Следовательно, течение жидкости в этой области можно описать с помощью функции тока. В сферической системе координат (r, θ, φ) при выборе оси $\theta = 0$ вдоль вектора $P_{ij}U_j$ (который указывает также и направление действия силы $\mathbf{F}$) из выражений (4.9.37) и (4.9.38) находим функцию тока

$$\psi = \frac{F}{8\pi\mu} r \sin^2\theta \quad (F = |\mathbf{F}|). \qquad (4.9.39)$$

Теперь выражение (4.9.38) показывает, что величина $F/\rho\nu^2$ имеет такой же порядок малости, что и величина Ud/ν, которая по предположению мала по сравнению с единицей. Поэтому не удивительно, что мы вновь получили поле течения (4.6.18), вызываемое малой по сравнению с $\rho\nu^2$ силой, приложенной к жидкости в начале координат. Когда тело произвольной формы движется через жидкость при малом числе Рейнольдса, поле течения на большом расстоянии от него зависит только от результирующей силы, действующей на жидкость, и непрерывное изменение положения самого тела не оказывает влияния на это поле.

Эти общие результаты имеют удобную для приложения форму в случае малой частицы, твердой или жидкой, свободно падающей

под действием силы тяжести. Если объем τ и плотность частицы $\bar{\rho}$ известны, то распределения скорости и давления на большом расстоянии от нее можно получить непосредственно из выписанных выше формул, положив

$$\mathbf{F} = (\bar{\rho} - \rho)\,\tau\mathbf{g};$$

точная форма частицы в данном случае не имеет никакого значения; по-видимому, также не имеет значения, перевертывается ли частица, изменяя свою ориентацию по отношению к направлению действия силы тяжести, а также движется ли она по траектории, которая не совпадает с вертикалью.

Иногда говорят, что поле течения, изображаемое функцией тока (4.9.39), вызвано «стокслетом» в начале координат (термин аналогичен «дуплету», «озеенлету»).

Упражнения

1. Докажите, что $\mathbf{U}\cdot\mathbf{F}' = \mathbf{U}'\cdot\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ — силы, развиваемые телом, движущимся со скоростями $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}'$ соответственно (при малых числах Рейнольдса в обоих случаях) и, следовательно, что коэффициент P_{ij} в выражении (4.9.38) — симметричный тензор.

2. Твердая сфера радиуса a вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ в жидкости, которая покоится на бесконечности. Покажите, что если $(a^2\Omega\rho/\mu) \ll 1$, то пара сил сопротивления, приложенная к жидкости, имеет момент $8\pi\mu a^3\boldsymbol{\Omega}$.

4.10. Уточненное уравнение Озеена для течения при малом числе Рейнольдса

Было показано, что при полном пренебрежении силами инерции в течении вокруг тела произвольной формы с линейным размером d, движущимся со скоростью U, скорость жидкости на больших расстояниях от тела имеет порядок Ud/r. Так как первый член в выражении (4.9.13) для силы инерции содержит производную первого порядка по координате, а сила вязкости зависит от производной второго порядка, то из этого следует, что локальная сила инерции, рассчитанная на основании этого решения, фактически сравнима по величине с силой вязкости, когда расстояние r имеет порядок d/Re (где $\mathrm{Re} = \rho Ud/\mu$), как и в ранее рассмотренном случае сферы.

Это критическое замечание об использовании уравнения (4.9.1), описывающего течение при движении тел в неограниченной жидкости, которая в других отношениях невозмущена, было сделано Озееном (1910), который, кроме того, показал, каким образом можно улучшить уравнение и тем самым устранить имеющееся противоречие. Улучшение Озеена применяется в случаях, когда тело движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ и течение отно-

сительно тела установившееся; в таких случаях локальная сила инерции определяется выражением (4.9.13), а именно

$$\rho\,(-\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}), \tag{4.10.1}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость жидкости, как и раньше в системе координат, неподвижной относительно жидкости на бесконечности. Так как первый из этих двух членов при больших r преобладает и является причиной появления сил инерции, сравнимых при достаточно большом r с силами вязкости, Озеен считал, что это единственное из двух слагаемых силы инерции, сохраняемое в уравнении движения. Второй член, который создает основные математические трудности в связи с его нелинейностью по $\mathbf{u}$, снова опускается при $\mathrm{Re}\ll 1$, когда с возрастанием r величина $|\mathbf{u}|$ уменьшается по крайней мере как r^{-1} и этот второй член продолжает оставаться малым по сравнению с силой вязкости, сколь бы большой ни была величина r. Вблизи тела оба слагаемых в выражении (4.10.1 имеют одинаковый порядок и будут малы по сравнению с силой вязкости при условии $\mathrm{Re}\ll 1$, и в этой области предлагаемое уравнение будет столь же точным, что и уравнение (4.9.1).

Уравнения Озеена для течения, создаваемого движущимся телом при малых числах Рейнольдса, имеют вид

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\approx -\rho\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{4.10.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

с граничными условиями

$$\mathbf{u}=\mathbf{U}\ \text{на поверхности твердого тела},$$

$$\mathbf{u}\to 0\quad\text{и}\quad p-p_0\to 0\quad\text{при}\quad r\to\infty.$$

Хотя уравнения остаются линейными относительно зависимых переменных $\mathbf{u}$ и p, граничные условия нелинейны (относительно параметра $\mathbf{U}$) и задачу значительно труднее решить, чем задачу (4.9.1) — (4.9.2).

Твердая сфера

Решение этих новых уравнений в случае движущейся сферы в замкнутой форме неизвестно, однако было найдено его приближенное решение при той же степени приближения, которая используется в самих уравнениях (Ламб (1911)). Это приближенное решение для функции тока, приводимое здесь без вывода, записывается так:

$$\psi=Ua^2\left\{-\frac{1}{4}\frac{a}{r}\sin^2\theta+3(1-\cos\theta)\frac{1-\exp\left[-r(1+\cos\theta)\mathrm{Re}/(4a)\right]}{\mathrm{Re}}\right\}. \tag{4.10.3}$$

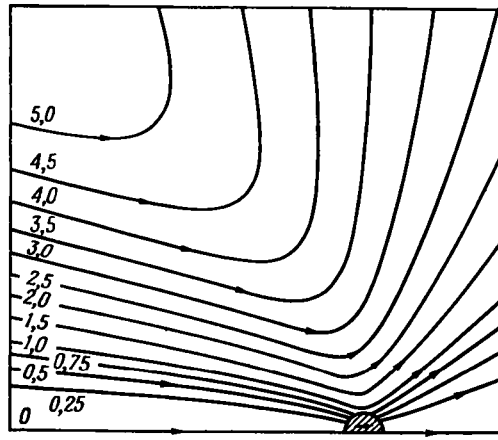


Рис. 4.10.1. Линии тока в осевой плоскости для внешней части течения, вызванного движущейся сферой, согласно уравнениям Озеена. Функция тока ψ равна произведению некоторой постоянной, умноженной на число, указанное на линиях тока.

Решение относится к моменту времени, когда центр сферы совпадает с началом координат; как и раньше, $\mathrm{Re} = 2aU\rho/\mu$. Легко проверить, что оно строго удовлетворяет уравнениям (4.10.2) и дает $\mathbf{u} \to 0$ при $r \to \infty$. Вблизи сферы, где отношение r/a имеет порядок единицы и $\mathrm{Re}\, r/a \ll 1$,

$$\psi = Ua^2 \sin^2\theta \left\{ -\frac{a}{4r} + \frac{3r}{4a} + O\left(\frac{r}{a}\,\mathrm{Re}\right)\right\}, \qquad (4.10.4)$$

и совпадает с решением Стокса (4.9.12) — и, в частности, удовлетворяет внутреннему граничному условию — с относительной ошибкой порядка числа Рейнольдса. Это как раз та степень приближения, с которой уравнение (4.10.2) представляет точные уравнения движения, поэтому его решение (4.10.3) имеет ту самую точность, которую и нужно было получить.

На рис. 4.10.1 показаны линии тока, соответствующие решению (4.10.3) без первого члена в квадратных скобках, который значителен при $\mathrm{Re} \ll 1$ только вблизи сферы. Легко видеть качественное различие между решениями Озеена и Стокса во внешней части поля течения. Линии тока больше не симметричны относительно плоскости $\theta = (1/2)\,\pi$, как можно было ожидать исходя из того, что уравнение движения уже не удовлетворяется после изменения знаков векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$. На больших расстояниях от сферы течение стремится к радиальному, которое подобно течению от источника на сфере, за исключением области «следа» за ней. Аналитически можно показать, исходя из решения (4.10.3), что при $\mathrm{Re}\, r/a \gg 1$ течение имеет различные формы в зависимости от того, мала ли сумма $(1 + \cos\theta)$ по сравнению с единицей.

В точках, в которых величина $(1+\cos\theta)$ не мала, функция тока

$$\psi \sim Ua^2 \frac{3}{\mathrm{Re}}(1-\cos\theta) \qquad (4.10.5)$$

описывает течение от источника в начале координат с расходом $12\pi a^2 U/\mathrm{Re}$ единиц объема в секунду. С другой стороны, в пределах следа, где $(1+\cos\theta)$ имеет порядок величины $4a/(r\,\mathrm{Re})$ (т. е. там, где величина $\pi-\theta$ имеет порядок $\sqrt{8a/(r\,\mathrm{Re})}$), функция тока

$$\psi \sim Ua^2 \frac{6}{\mathrm{Re}}\left\{1-\exp\left[-\frac{\mathrm{Re}\,r\,(\pi-\theta)^2}{8a}\right]\right\} \qquad (4.10.6)$$

описывает компенсирующее течение в направлении к сфере, причем скорость втекания на оси $\theta=\pi$ равна $3Ua/2r$.

На больших расстояниях от сферы завихренность в области течения от источника равна нулю и заключена в следе, который можно считать ограниченным параболоидом вращения, на котором $(\pi-\theta)^2\, r/a$ имеет порядок Re^{-1}. В то время как в приближении Стокса завихренность диффундирует во всех направлениях как бы от неподвижной сферы, в рассматриваемом случае движение сферы учитывается, в чем можно убедиться исходя из уравнения

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\mathbf{U}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}, \qquad (4.10.7)$$

которое получается из (4.10.2). Для каждой компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ это уравнение имеет такую же форму, как и уравнение, которому удовлетворяет температура неподвижной теплопроводной среды, через которую с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ движется тепловой источник постоянной интенсивности (в этом случае источник имеет характер диполя). Завихренность, образующаяся на сфере, по мере ее движения остается позади, в следе, который при возрастании числа Рейнольдса сужается.

Теперь мы можем утверждать, что решение Озеена (4.10.3) в противоположность решению Стокса непротиворечиво. Действительно, пренебрегаемый член $\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$, оцениваемый с помощью решения (4.10.3), мал по сравнению с любым членом, сохраняемым в уравнении движения, если $\mathrm{Re}\ll 1$. В области вблизи сферы, где отношение r/a имеет порядок единицы, решение (4.10.3) сводится к решению Стокса (с ошибкой порядка числа Рейнольдса), для которого, как уже известно, $\rho|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|$ мало по сравнению с $\mu|\nabla^2\mathbf{u}|$, причем отношение этих членов имеет порядок числа Рейнольдса. На больших расстояниях от сферы, в области, где отношение $\mathrm{Re}\,r/a$ становится величиной порядка единицы и решение (4.10.3) начинает значительно отличаться от решения Стокса, величина $\mathbf{u}$, определяемая по функции тока (4.10.3), имеет порядок Ua/r или $U\mathrm{Re}$; следовательно, отношение отбрасываемого члена $\rho|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|$ к сохраняемому члену $\rho|\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}|$ является

величиной порядка Re, т. е. опять мало. На еще больших расстояниях от сферы, где $r/a \gg \mathrm{Re}^{-1}$, модуль скорости $|\mathbf{u}|$ по сравнению со скоростью U становится еще меньше.

Оказывается, что приближенная форма уравнения движения, предложенная Озееном, имеет такое решение, что принятое приближение непротиворечиво во всем поле течения, когда $\mathrm{Re} \ll 1$. Вблизи сферы это решение имеет такую же форму, как и решение Стокса, и, следовательно, для сопротивления сферы оно дает то же самое выражение $6\pi a\mu U$, с той же относительной ошибкой порядка Re, которая возникает при замене уравнения движения уравнением Озеена [1]). Так как решение (4.10.3), очевидно, есть приближение к решению полных уравнений движения, справедливое при $\mathrm{Re} \ll 1$ во всем поле течения, то естественно считать решение (4.10.3) исходным в процессе последовательных приближений к решению этих уравнений.

Это соображение было использовано Каплуном и Лагерстромом (1957), а также Праудменом и Пирсоном (1957), и ими был найден коэффициент сопротивления сферы во втором приближении:

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re}\right). \qquad (4.10.8)$$

(Это выражение для коэффициента сопротивления C_D порядка $(\mathrm{Re})^0$ также получается из уравнений Озеена, что на первый взгляд удивительно; дело в том, что член порядка Re в разности между решением уравнений Озеена для $\mathbf{u}$ и вторым приближением к решению полных уравнений дает нулевое слагаемое в величину сопротивления тел с продольной симметрией.) Как видно из рис. 4.9.2, формула (4.10.8) согласуется с измеренным сопротивлением сферы в несколько большем диапазоне чисел Рейнольдса, чем закон Стокса.

Твердый круговой цилиндр

Трудности, связанные с использованием уравнений (4.9.1) и (4.9.2), и преодоление этих трудностей с помощью уравнений Озеена (4.10.2) обнаружены в ряде других случаев равномерно движущихся в жидкости тел. Упомянем здесь случай кругового цилиндра радиуса a, движущегося со скоростью $\mathbf{U}$ в направлении нормали к своей оси, так как в нем наиболее наглядно проявляются отличия от движения сферы, типичные для двумерного течения при малых числах Рейнольдса.

---

[1]) Следует отметить, что сопротивление равно произведению величины ρU и направленного внутрь объемного потока далеко в следе за сферой. Это соотношение следует из общего рассмотрения количества движения в следе (см. § 5.12) и справедливо для любого тела и при любом числе Рейнольдса, если тело движется равномерно и оставляет за собой след ненулевой завихренности, ширина которого растет медленнее, чем его длина.

Решение уравнений (4.9.1) и (4.9.2) можно искать точно таким же способом, как и для движущейся сферы, используя линейность решения относительно скорости $\mathbf{U}$ и зависимость его только от $\mathbf{x}$, $\mathbf{U}$ и a. Вместо выражений (4.9.4) и (4.9.5) находим

$$\frac{p-p_0}{\mu}=\frac{C\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^2}, \qquad \boldsymbol{\omega}=\frac{C\mathbf{U}\times\mathbf{x}}{r^2}, \tag{4.10.9}$$

где C — постоянная и (r, θ) — полярные координаты двумерного вектора $\mathbf{x}$. Завихренность также можно выразить через функцию тока ψ. Аналогично выражению (4.9.6) имеем функцию тока

$$\psi = U \sin\theta f(r), \tag{4.10.10}$$

где функция f удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{f}{r^2}=-\frac{C}{r}.$$

Общее решение этого уравнения

$$f(r)=-\frac{1}{2}Cr\ln r+Lr+Mr^{-1}. \tag{4.10.11}$$

В случае цилиндра возникает трудность, состоящая в том, что частный интеграл, связанный с распределением завихренности, не удовлетворяет условию обращения в нуль скорости на бесконечности. Если на время пренебречь внешним граничным условием для $\mathbf{u}$, то можно найти, что условия на внутренней границе, а именно

$$\frac{f}{r}=1 \text{ и } \frac{df}{dr}=1 \text{ при } r=a,$$

удовлетворяются, если

$$L=1+\frac{1}{4}C+\frac{1}{2}C\ln a, \qquad M=-\frac{1}{4}a^2C.$$

В таком случае распределение скорости выражается формулой

$$\mathbf{u}=\mathbf{U}+C\mathbf{U}\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{r}{a}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2}\right)+C\mathbf{x}\,\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{x}}{r^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\right). \tag{4.10.12}$$

Нормальное и касательное напряжения на поверхности цилиндра, которые получаются из выражений (4.10.9) и (4.10.12), развивают на поверхности цилиндра силу сопротивления

$$D = 2\pi\mu UC \tag{4.10.13}$$

на единицу длины цилиндра.

Выражения (4.10.9) и (4.10.12) для давления $(p - p_0)/\mu$ и скорости $\mathbf{u}$ удовлетворяют уравнениям (4.9.1) и (4.9.2), внутреннему граничному условию и условиям линейности относительно $\mathbf{U}$

и симметрии при $\theta = 0$, хотя скорость $\mathbf{u}$ возрастает как $\ln r$ при больших значениях r и никаким выбором остающейся произвольной постоянной C нельзя добиться, чтобы при $r \to \infty$ было $\mathbf{u} \to 0$. Однако решение (4.10.12) небесполезно. Согласно выражению (4.10.12), две части пренебрегаемой силы инерции (см. (4.9.13)) при больших r имеют величины

$$\left|\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right| \sim \frac{\rho U^2 C}{r}, \qquad |\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| \sim \frac{\rho U^2 C^2}{r} \ln \frac{r}{a}. \qquad (4.10.14)$$

С другой стороны, сохраняемая в уравнении сила вязкости имеет величину

$$|\mu \nabla^2 \mathbf{u}| \sim \frac{\mu U C}{r^2}.$$

Обе части силы инерции становятся сравнимыми с силой вязкости на достаточно больших расстояниях от цилиндра: первая часть, когда отношение r/a имеет порядок Re^{-1} ($\mathrm{Re} = 2a\rho U/\mu$), и вторая — когда $(Cr/a) \ln (r/a)$ имеет порядок Re^{-1}. Следовательно, решение (4.10.12) оказывается несостоятельным приближением для поля течения при больших значениях r, и невозможность удовлетворить внешнему граничному условию может и не быть результатом какого-либо непоправимого недостатка этого решения. Очевидно, что при больших r нужно какое-нибудь другое приближение к уравнению движения, и скорость (4.10.12) должна сращиваться с решением такого приближенного уравнения при $r \to \infty$.

Подробные вычисления показывают, что уравнение движения в приближении Озеена действительно имеет решение (Ламб (1911)), непротиворечивое на всем протяжении поля течения в том смысле, что отбрасываемый член $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, оцененный на основании полученного решения, оказывается всюду малым по сравнению с членами, сохраняемыми в уравнении при $\mathrm{Re} \ll 1$. Вблизи цилиндра это решение для $\mathbf{u}/U$ приближается, с абсолютной ошибкой порядка Re, к выражению (4.10.12), если константу в нем выбрать равной

$$C = \frac{2}{\ln \dfrac{7{,}406}{\mathrm{Re}}}. \qquad (4.10.15)$$

Отметим, что при этом значении C величина $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, согласно «внутреннему» решению (4.10.12), не становится сравнимой с величиной $|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|$ до тех пор, пока отношение r/a не будет величиной порядка Re^{-1}, которая в то же время определяет величину отношения r/a, при котором необходимо уточненное уравнение Озеена и при котором его решение начинает отличаться от решения (4.10.12).

Общие свойства течения на больших расстояниях от цилиндра, полученные исходя из уравнения Озеена, подобны установленным

в случае сферы; в частности, за цилиндром имеется параболический след с конечной завихренностью.

Поскольку решение уравнения Озеена вблизи цилиндра приближенно совпадает с выражением (4.10.12) с ошибкой такого же порядка, которая возникает при замене уравнения движения уравнением Озеена (а именно с ошибкой $O(\mathrm{Re})$), то формула силы сопротивления (4.10.13) остается применимой. Подставляя в нее значение постоянной (4.10.15), получаем коэффициент сопротивления на единицу длины цилиндра

$$C_D = \frac{D}{(1/2)\,\rho U^2 2a} = \frac{8\pi}{\mathrm{Re}\,\ln\dfrac{7{,}406}{\mathrm{Re}}}. \qquad (4.10.16)$$

Измерения силы сопротивления цилиндра при низких числах Рейнольдса провести значительно труднее, чем в случае сферы, главным образом вследствие нежелательного влияния торцов цилиндра конечной длины, однако формула (4.10.16) дает вблизи $\mathrm{Re} = 0{,}5$ значения, которые не противоречат наблюдению (см. рис. 4.12.7).

В некоторых недавних исследованиях предложен метод нахождения приближений более высокого порядка для течения около кругового цилиндра и вычислен коэффициент его сопротивления [1]). Из этих исследований выяснилось, что формула (4.10.12) (вместе с (4.10.15)) дает (безразмерное) распределение скорости в окрестности цилиндра с абсолютной ошибкой порядка $[\ln \mathrm{Re}]^{-2}$.

4.11. Вязкость разбавленной суспензии из малых частиц

Смеси, состоящие из одного вещества в виде малых твердых, жидких или газообразных частиц, рассеянных беспорядочно в другом жидком веществе, весьма часто встречаются в природе и в промышленности. Термин «суспензия» обычно относится к системе малых твердых частиц в жидкости, хотя с динамической точки зрения природа обеих сред не имеет особого значения, и мы будем использовать этот термин также для системы твердых частиц в газе, системы капель одной жидкости, рассеянных либо в другой жидкости (эмульсии), либо в газе, и системы пузырьков газа в жидкости. Интересно выяснить, как будут вести себя такие суспензии при движении границ и приложении сил. Если характерная длина масштаба движения суспензии велика по сравнению со средним расстоянием между частицами, а мы будем предполагать, что дело обстоит именно так, то суспензию можно рассматривать как однородную жидкость с механическими свойствами,

[1]) Общее описание метода, который можно применить и к некоторым другим задачам гидродинамики, см. в книге: Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, «Мир», М., 1967.

отличающимися от свойств окружающей ее жидкости, в которой эти частицы взвешены. Хаотическое распределение сферических частиц не имеет какого-либо свойства, зависящего от направления движения в среде (частицы в форме длинных стержней могут создать такие свойства вследствие их тенденции располагаться в определенном направлении относительно локального распределения скорости, хотя броуновское движение взвешенных частиц стремится исключить любое такое преимущественное направление). Поэтому если окружающая среда —«ньютонова» однородная жидкость, то эквивалентная суспензия приближенно сферических частиц также является ньютоновой и характеризуется вязкостью сдвига (и, возможно, также объемной вязкостью).

В этом параграфе мы определим эффективную вязкость несжимаемой жидкости, содержащей взвешенные частицы столь малых линейных размеров, что а) влияние сил тяжести и инерции на движение частицы не учитывается (поэтому частица локально движется вместе с окружающей ее жидкостью) и б) число Рейнольдса возмущенного движения, возникающего вследствие наличия одной частицы, мало по сравнению с единицей. Будем считать ради простоты, что частицы имеют сферическую форму; в случае жидких или газообразных частиц малого радиуса поверхностное натяжение стремится сохранить частицы сферическими, несмотря на деформирующее влияние движения жидкости, поэтому предположение о форме нужно только для твердых частиц. Наконец, будем предполагать, что суспензии являются разбавленными настолько, что среднее расстояние между частицами велико по сравнению с их линейными размерами.

При этих условиях основное движение окружающей жидкости, на которое налагается возмущенное течение, создаваемое наличием в ней одной частицы, можно считать состоящим из однородных поступательного, вращательного и чисто деформационного движений. Частица движется поступательно и вращается вместе с окружающей ее жидкостью, так что возмущение связано лишь с чисто деформационным движением (сдвигом). Возмущение деформационного движения, возникающее из-за частицы, по-видимому, неизбежно сопровождается увеличением полной скорости диссипации, и эффективная вязкость суспензии (сдвига или объемная) должна быть *больше*, чем вязкость окружающей ее жидкости; в дальнейшем мы убедимся, что это именно так.

Для начала предположим, что частицы несжимаемы, поэтому суспензия также ведет себя как несжимаемая среда, и нужно определить только эффективное значение коэффициента вязкости сдвига. Для этого необходимо явное представление возмущенного течения, создаваемого одной несжимаемой частицей, и поэтому мы рассмотрим соответствующую задачу течения с пренебрежимо малыми силами инерции.

Сфера в чисто деформационном течении

Жидкость с коэффициентом вязкости μ и с плотностью ρ занимает пространство вне сферы радиуса a и на больших расстояниях от нее совершает чисто деформационное движение, определяемое тензором скоростей деформации e_{ij} при $e_{ii} = 0$. Скорость и давление в жидкости можно записать как

$$u_i = u_i' + e_{ij}x_j, \qquad p = p' + P, \tag{4.11.1}$$

где P — давление в чисто деформационном движении с тензором e_{ij} при отсутствии сферы; u_i' и p' представляют изменения, вызываемые наличием сферы, и

$$u_i' \to 0, \qquad p' \to 0 \quad \text{при} \quad r = |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4.11.2}$$

Пусть центр сферы находится в начале координат; тогда в силу симметрии не существует тенденции сферы к поступательному перемещению, и поверхность сферы все время задается уравнением $r = a$; следовательно,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \tag{4.11.3}$$

Существуют дополнительные условия на поверхности сферы, которые зависят от природы частиц. Мы можем включить в рассмотрение частицы различных видов, предполагая, что сфера содержит несжимаемую жидкость с коэффициентом вязкости $\bar{\mu}$ (случай твердой частицы соответствует, как и в § 4.9, $\bar{\mu}/\mu \to \infty$). При переходе через поверхность раздела скорость должна быть непрерывной; то же относится и к касательной компоненте напряжения, если предположить, как и в § 4.9, что поверхность раздела не обладает никакими другими механическими свойствами, кроме однородного поверхностного натяжения. Таким образом, при $r = a$ имеем

$$\begin{aligned} u_i &= u_i' + e_{ij}x_j = \bar{u}_i, \\ \varepsilon_{kli}n_l n_j(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.11.4}$$

где чертой сверху обозначены величины, относящиеся к движению внутри сферы, и $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности. Кроме того, при $r = 0$ величины $\bar{p}$ и $\bar{u}_i$ конечны.

Скорости $\mathbf{u}$ и $\bar{\mathbf{u}}$ удовлетворяют уравнению Навье — Стокса (с различными значениями коэффициента вязкости), однако для *малой* сферической частицы, очевидно, можно использовать приближенную форму этого уравнения, как и в случае течения, обусловленного поступательным движением малой сферы (§ 4.9). Для течения вне сферы уравнение Навье — Стокса после замены в нем скоростей и давлений по формулам (4.11.1) приводится

к виду

$$\rho\left\{\frac{\partial u_i'}{\partial t}+(u_j'+e_{jk}x_k)\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+e_{ij}u_j'\right\}=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\mu\nabla^2u_i'. \quad (4.11.5)$$

Изменение невозмущенной скорости по области, занятой частицей, имеет величину порядка $|e_{ij}|a$; очевидно, что возмущение скорости $\mathbf{u}'$ вблизи частицы имеет тот же порядок. Следовательно, если радиус частицы удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\mu}|e_{ij}|a^2\rho\ll 1 \quad (4.11.6)$$

(и если скорость деформации изменяется не слишком быстро), то течение вблизи частицы определяется приближенным уравнением

$$\nabla p'=\mu\nabla^2\mathbf{u}'. \quad (4.11.7)$$

При одинаковых условиях скорость $\bar{\mathbf{u}}$ и давление $\bar{p}$ внутри сферы удовлетворяют такому же уравнению движения без сил инерции

$$\nabla\bar{p}=\bar{\mu}\nabla^2\bar{\mathbf{u}}. \quad (4.11.8)$$

Наконец, закон сохранения массы дает два уравнения

$$\nabla\cdot\mathbf{u}'=\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \qquad \nabla\cdot\bar{\mathbf{u}}=0. \quad (4.11.9)$$

Уравнения (4.11.7), (4.11.8) и (4.11.9) и граничные условия (4.11.2), (4.11.3) и (4.11.4), описывающие возмущенное движение, линейны и однородны относительно $\mathbf{u}'$, p', $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{p}$ и e_{ij}. В описание поверхности раздела никакой вектор не входит, и с помощью рассуждения, подобного рассуждению из § 4.9, можно показать, что давления (которые представляют собой гармонические функции) и скорости должны выражаться функциями вида

$$\begin{aligned} p'&=C\mu e_{ij}\frac{x_ix_j}{r^5}, \qquad \bar{p}-\bar{p}_0=\bar{C}\bar{\mu}e_{ij}x_ix_j,\\ u_i'&=e_{ij}x_jM+e_{jk}x_ix_jx_kQ,\\ \bar{u}_i&=e_{ij}x_j\bar{M}+e_{jk}x_ix_jx_k\bar{Q}, \end{aligned} \quad (4.11.10)$$

где M, Q, $\bar{M}$ и $\bar{Q}$ — функции только от r, а C, $\bar{C}$ и $\bar{p}_0$ — постоянные. Можно без труда найти эти функции, которые удовлетворяют основным уравнениям и условиям на больших расстояниях от частицы и при $r=0$:

$$\begin{aligned} M&=\frac{D}{r^5}, \qquad Q=\frac{C}{2r^5}-\frac{5D}{2r^7},\\ \bar{M}&=\bar{D}+\frac{5}{21}\bar{C}r^2, \qquad \bar{Q}=-\frac{2}{21}\bar{C}. \end{aligned} \quad (4.11.11)$$

Условия на поверхности раздела при $r = a$ будут удовлетворены, если

$$\frac{C}{(2\mu+5\bar{\mu})\,a^3} = \frac{D}{\bar{\mu}a^5} = -\frac{2\bar{C}a^2}{21\mu} = \frac{2\bar{D}}{3\mu} = -\frac{1}{\mu+\bar{\mu}}. \qquad (4.11.12)$$

Между прочим заметим, что на больших расстояниях от частицы

$$u_i' = \frac{1}{2} C e_{jk} \frac{x_i x_j x_k}{r^5} + O(r^{-4}), \qquad (4.11.13)$$

откуда видно, что скорость возмущения на один порядок меньше, чем в случае поступательного движения сферы, как можно было бы ожидать исходя из «дипольного» характера условия для скорости $\mathbf{u}'$ на поверхности сферы (см. (4.11.3) и (4.11.1)).

Приведенное решение было получено в пренебрежении инерционными членами в уравнении движения (4.11.5), и непротиворечивость решения можно доказать, используя его для оценки порядка величины пренебрегаемых членов. Таким способом мы находим, что отношение величин пренебрегаемой силы инерции и сохраняемой силы вязкости имеет порядок $|e_{ij}|r^2\rho/\mu$. Это отношение, как и предполагалось, мало по сравнению с единицей в окрестности сферы, когда удовлетворяется условие (4.11.6), однако оно не мало́ во внешней области поля течения, где r/a имеет порядок $(|e_{ij}|a^2\rho/\mu)^{-1/2}$. Таким образом, уравнение (4.11.7) нельзя считать хорошим приближением к полному уравнению движения (4.11.5) во внешней области, хотя снова можно убедиться (после приведения уравнения к безразмерному виду с параметрами a и $|e_{ij}|$), что в ней все члены полного уравнения движения малы. Вероятно, улучшенное и полностью непротиворечивое приближение к распределению скорости можно было бы получить (для установившегося деформационного движения) исходя из уравнения

$$\rho\left(e_{jk}x_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + e_{ij}u_j'\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i',$$

которое все еще остается линейным относительно $\mathbf{u}'$, однако мы примем без доказательства, что такое усовершенствованное приближение в окрестности частицы не будет существенно отличаться от полученного.

Повышенная скорость диссипации в несжимаемой суспензии

Приступим к использованию полученных результатов для расчета эффективной вязкости сдвига в суспензии малых несжимаемых сферических частиц, совершающей заданное движение. Способ определения и вычисления эффективной вязкости неочевиден и должен быть подробно описан.

Предположим, что объем V_1 суспензии ограничен изменяемой поверхностью A_1, на которой скорость определяется как некоторая линейная функция координат; чтобы иметь полностью определенную систему, возьмем эту скорость *в точности* линейной функцией от x. Вращательная часть движения границы в анализ не входит, поэтому для удобства выберем i-ю компоненту скорости на границе в виде произведения $e_{ij}x_j$, где e_{ij} — симметричный тензор с $e_{ii} = 0$. Суспензия совершает движение, совместное с движением границы, и если бы суспензия была однородной жидкостью, то всюду в объеме V_1 ее скорость была бы равна $e_{ij}x_j$, однако вследствие наличия частиц скорость окружающей жидкости имеет такое значение только в среднем, и она равна

872 ∞ 3 $e_{ij}x_j + u_i'$.

Давление в суспензии также имело бы вполне определенную величину, например P, если бы суспензия была однородной жидкостью с одной и той же средней плотностью, в то время как в действительности давление в окружающей жидкости,

$$P + p',$$

имеет более сложную зависимость от координат.

Если частицы находятся далеко друг от друга, то можно считать, что каждая частица погружена в жидкость с чисто деформационным движением, характеризуемым тензором скоростей деформации e_{ij}, и вблизи одной частицы скорость u_i' и давление p' определяются формулами (4.11.10) и последующими; однако пока нет необходимости их использовать.

Тензор напряжений в любой точке окружающей жидкости с коэффициентом вязкости μ равен

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \sigma_{ij}',$$

где

$$\sigma_{ij}' = -p'\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right). \qquad (4.11.14)$$

С другой стороны, если бы суспензия была однородной жидкостью с той же самой средней плотностью и коэффициентом вязкости μ^*, то тензор напряжений был бы равен

$$-P\delta_{ij} + 2\mu^* e_{ij}.$$

Мы хотим выбрать коэффициент вязкости μ^* так, чтобы по физическому смыслу он отражал суммарное влияние возмущений из-за наличия в суспензии всех частиц. Соответствующая величина, которая, будучи выраженной двумя различными способами, приводит к определению эффективной вязкости, представляет собой скорость диссипации механической энергии в объеме V_1; эта скорость диссипации есть прямой результат действия внут-

реннего трения, и она позволяет учесть влияние возмущений течения, создаваемых всеми частицами внутри объема V_1.

Дополнительная скорость диссипации на единицу объема в жидкости на расстоянии r от одной частицы изменяется асимптотически по закону r^{-3} (см. (4.11.1) и (4.11.13)), и из-за этого становится тщетной попытка непосредственного вычисления полной добавочной скорости диссипации путем интегрирования по объему жидкости V_1; интеграл, хотя он и сходится, зависит, однако, от формы удаленной внешней границы области интегрирования для каждой частицы. Поэтому мы вынуждены выбрать другой путь. Скорость, с которой совершается работа силами на границе A_1, равна

$$\int_{A_1} e_{ik}x_k\sigma_{ij}n_j\,dA = e_{ik}\int_{A_1}(-P\delta_{ij}+2\mu e_{ij}+\sigma'_{ij})\,x_kn_j\,dA,$$

а если бы суспензия была однородной жидкостью с той же средней плотностью и с коэффициентом вязкости μ^*, то та же величина была бы равна

$$e_{ik}\int_{A_1}(-P\delta_{ij}+2\mu^*e_{ij})\,x_kn_j\,dA.$$

Член, содержащий P, одинаков в обоих выражениях, и он учитывает любое возрастание кинетической энергии, связанное с линейным полем скоростей. Остальные члены обоих выражений представляют собой скорости диссипации внутри объема V_1, и эффективный коэффициент вязкости μ^* определяется как раз так, чтобы они были равны; используя формулу Остроградского — Гаусса, получаем

$$2\mu^*e_{ij}e_{ij}V_1 = 2\mu e_{ij}e_{ij}V_1 + e_{ik}\int_{A_1}\sigma'_{ij}x_kn_j\,dA. \qquad (4.11.15)$$

Последний член в выражении (4.11.15), добавочную скорость диссипации в объеме V_1 в связи с наличием в нем частиц, можно преобразовать в интеграл по поверхностям частиц. Поэтому

$$e_{ik}\int_{A_1}\sigma'_{ij}x_kn_j\,dA = e_{ik}\int_{V_1-\sum V_0}\left(\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}\,x_k+\sigma'_{ik}\right)dV + e_{ik}\sum\int_{A_0}\sigma'_{ij}x_kn_j\,dA,$$

где A_0 и V_0 суть поверхность и объем одной частицы, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности A_0, а символ $\sum$ означает суммирование по всем частицам в объеме V_1. Возмущение движения, обусловленное наличием каждой частицы, описывается уравнением (4.11.7), если, как мы предположили, удовлетворяется условие (4.11.6); поэтому $\partial\sigma'_{ij}/\partial x_j = 0$. Кроме того,

$$e_{ik}\int_{V_1-\sum V_0}\sigma'_{ik}\,dV = e_{ik}\int_{V_1-\sum V_0}2\mu\,\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\,dV = -e_{ik}\sum\int_{A_0}2\mu u'_in_k\,dA,$$

поскольку $\mathbf{u}' = 0$ на границе A_1. В результате соотношение (4.11.15) преобразуется так:

$$2(\mu^* - \mu)\, e_{ij} e_{ij} = \frac{e_{ik}}{V_1} \sum \int_{A_0} (\sigma'_{ij} x_k n_j - 2\mu u'_i n_k)\, dA. \quad (4.11.16)$$

Правая часть его представляет собой добавочную скорость диссипации на единицу объема из-за наличия в объеме частиц. Соответствующее выражение для коэффициента эффективной вязкости изотропной суспензии справедливо для любого расположения частиц в объеме V_1.

Если теперь мы учтем, что суспензия содержит сферические частицы на больших (по сравнению с диаметрами) расстояниях друг от друга и возмущение течения вблизи одной частицы приближенно не зависит от существования других частиц, то полученные ранее результаты можно использовать для вычисления интеграла в соотношении (4.11.16). Из выражений (4.11.14), (4.11.10) и (4.11.11) следует, что

$$\sigma'_{ij} x_j x_k - 2\mu u'_i x_k = \mu e_{ij} x_j x_k \left(\frac{C}{r^3} - \frac{10D}{r^5} \right) + \\ + \mu e_{jl} x_i x_j x_k x_l \left(-\frac{5C}{r^5} + \frac{25D}{r^7} \right). \quad (4.11.17)$$

Поверхность A_0 представляет собой сферу радиуса a, и с использованием известных тождеств

$$\int n_j n_k\, d\Omega = \frac{4}{3} \pi \delta_{jk},$$

$$\int n_i n_j n_k n_l\, d\Omega = \frac{4}{15} \pi (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.11.18)$$

в которых интегрирование выполняется по полному телесному углу, стягиваемому поверхностью сферы с вершиной в ее центре, находим

$$\int_{A_0} (\sigma'_{ij} x_k n_j - 2\mu u'_i n_k)\, dA = -\frac{4}{3} \pi \mu C e_{ik}.$$

Таким образом,

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 - \frac{2\pi}{3V_1} \sum C,$$

и с использованием равенств (4.11.12) имеем

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \frac{1}{V_1} \sum \left(\frac{\mu + 5/2\, \bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \right) V_0. \quad (4.11.19)$$

Суммирование в формуле (4.11.19) производится по различным частицам, которые по предположению имеют сферическую форму,

хотя в других отношениях они не подобны. Если все частицы имеют одинаковую внутреннюю вязкость, то

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \alpha \left(\frac{\mu + \frac{5}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \right), \qquad (4.11.20)$$

где $\alpha = \Sigma\, V_0/V_1$ — объемная концентрация частиц. В случае суспензии твердых частиц эффективный коэффициент вязкости больше, чем коэффициент вязкости окружающей их жидкости, в $(5/2)\alpha$ раз (этот результат был впервые получен Эйнштейном (1906, 1911)); для суспензии газовых пузырьков соответствующая величина равна α.

Формулы (4.11.19) и (4.11.20) подчинены ограничению $\alpha \ll 1$; когда концентрация не мала по сравнению с единицей, наличие соседних частиц влияет на возмущенное течение, вызываемое одной частицей, и тогда равенство (4.11.17) нуждается в уточнении. Экспериментальное подтверждение справедливости соотношения (4.11.20) не очень убедительно, хотя считается, что коэффициент вязкости суспензии малых твердых сфер можно определять по формуле Эйнштейна $\mu\left(1 + \frac{5}{2}\alpha\right)$ для значений α, меньших приблизительно 0,02 [1]). Формула, соответствующая формуле (4.11.20) для твердых частиц эллипсоидальной формы (в предположении, что броуновское движение достаточно интенсивно, чтобы сделать все направления эллипсоидов равновероятными), была получена Джеффри (1922), и она показывает, что эффективный коэффициент вязкости возрастает с увеличением отклонения формы частицы от сферической, поскольку градиенты скоростей в окружающей жидкости больше для более «заостренных» частиц; однако было обнаружено, что изменение коэффициента α мало до тех пор, пока отношение максимального диаметра частицы к ее минимальному диаметру не превосходит приблизительно трех.

Эффективная объемная вязкость жидкости, содержащей газовые пузырьки

В качестве интересного дополнения к предыдущему анализу рассмотрим теперь реакцию суспензии на заданное объемное движение, когда частицы (но не окружающая жидкость) имеют возможность сжиматься.

Предположим, что объем V жидкости, содержащей большое число малых газовых пузырьков в суспензии, подвергается чисто деформационному движению границ, определяемому, как и раньше,

[1] Сведения о коэффициенте вязкости более концентрированных суспензий приведены в гл. 9 книги: Happel J., Brenner H., Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, 1965 [см. также Coy C., Гидродинамика многофазных систем, «Мир», М., 1971.— *Ред.*].

тензором скоростей деформаций e_{ij}, хотя в данном случае $e_{ii} = \Delta \neq 0$. Если бы суспензия была однородной жидкостью, то скорость расширения всюду в объеме V равнялась бы Δ, но в действительности расширение происходит только в пузырьках газа. Вблизи любого сферического пузырька радиуса a относительное движение в жидкости, обусловленное расширением этого пузырька, имеет сферическую симметрию с радиальной скоростью

$$u(r) = \frac{a^2}{r^2}\frac{da}{dt}. \qquad (4.11.21)$$

В вязкой жидкости возникают связанные с этим движением напряжения и, в частности, имеется нормальное напряжение на поверхности пузырька, равное $2\mu(\partial u/\partial r)_{r=a}$, которое препятствует его расширению. В результате этого давление внутри пузырька отличается от давления в жидкости на некотором расстоянии от пузырька на величину, которая зависит от скорости расширения, и механическое давление, приложенное на границе суспензии, отличается от давления, которое можно было бы получить исходя из равновесного уравнения состояния для суспензии при данном мгновенном значении ее плотности независимо от формы этого уравнения. Это в точности такая реакция, которая соответствует объемной вязкости суспензии (см. § 3.4).

Оценка эффективного значения коэффициента объемной вязкости может быть выполнена таким же способом приравнивания выражений полной диссипации, которая была бы в однородной сжимаемой жидкости, и полной диссипации, создаваемой обычной вязкостью в несжимаемой жидкости, окружающей пузырьки. Расчет намного проще в этом случае, поскольку диссипация в жидкости оказывается сильнее сконцентрированной в окрестности пузырьков и может быть получена непосредственным интегрированием.

В точке на расстоянии r от центра одного пузырька, где радиальная скорость жидкости равна $u(r)$, одна главная скорость деформации есть du/dr, а две другие одинаковые главные скорости должны быть равны $-(1/2)du/dr$. Следовательно, локальная скорость диссипации на единицу объема жидкости есть

$$3\mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \frac{12\mu a^4\dot{a}^2}{r^6}, \qquad (4.11.22)$$

где $\dot{a} = da/dt$. Полная скорость диссипации в жидкости, создаваемая одним пузырьком, есть

$$\int_a^\infty \frac{12\mu a^4\dot{a}^2}{r^6}\,4\pi r^2\,dr = 16\pi\mu a\dot{a}^2,$$

а скорость диссипации суспензии в объеме V, содержащей ряд сферических пузырьков, равна $16\pi\mu\sum a\dot{a}^2$.

В то же время если мы представим суспензию однородной жидкостью, совершающей симметричное расширение с однородной скоростью расширения Δ, то в жидкости не будет диссипации, создаваемой обычной вязкостью сдвига, и, согласно формуле (3.4.9), скорость диссипации на единицу объема вследствие существования объемной вязкости $\varkappa^*$ будет равна $\varkappa^*\Delta^2$. Тогда эффективный коэффициент объемной вязкости суспензии

$$\varkappa^* = 16\pi\mu\frac{\sum a\dot{a}^2}{V\Delta^2}. \tag{4.11.23}$$

Расширение суспензии связано с изменением объема каждого пузырька, и поэтому

$$\Delta = \frac{1}{V}\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4\pi}{V}\sum a^2\dot{a}, \tag{4.11.24}$$

причем суммирование производится, как и раньше, по всем пузырькам в объеме V. Следовательно, имеем

$$\varkappa^* = \frac{\mu}{\pi}\frac{V\sum a\dot{a}^2}{(\sum a^2\dot{a})^2}. \tag{4.11.25}$$

В простом случае n газовых пузырьков равного диаметра и с одинаковым содержанием (так что все они расширяются с равной скоростью) в единице объема суспензии имеем

$$\varkappa^* = \frac{\mu}{\pi n a^3} = \frac{4\mu}{3\alpha}, \tag{4.11.26}$$

где α — мгновенная концентрация частиц в объеме. Нереальное свойство модели, приводящее к тому, что $\varkappa^* \to \infty$ при $\alpha \to 0$, устраняется при учете сжимаемости жидкости.

Помимо того, что полученные результаты имеют некоторое практическое значение, анализ этого параграфа указывает на определенный вид связи, которая существует между микроскопическими свойствами среды, в данном случае — существованием частиц известной формы и состава, и макроскопическими свойствами эквивалентной однородной жидкости. Наблюдаемые макроскопические свойства среды часто становятся более понятными, если можно вообразить некоторую ее микроскопическую структуру, которая могла бы приводить к данному макроскопическому поведению среды, и изобретение микроскопических моделей представляет собой обычное упражнение в теоретической реологии, особенно при изучении свойств неньютоновых жидкостей.

4.12. Изменения в обтекании тел при возрастании числа Рейнольдса от 1 до 100

В § 4.7 мы видели, что когда твердое тело данной формы совершает установившееся поступательное движение со скоростью U в безграничной и ничем больше не возмущенной жидкости, то все безразмерные величины, описывающие поле течения, зависят только от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho LU/\mu$, а не от плотности ρ, характерной длины тела L, скорости U и вязкости μ в отдельности. Иначе говоря, величина числа Рейнольдса характеризует поле течения, если только заданы форма тела и его положение относительно направления движения. Одна из наиболее важных задач механики жидкости состоит в определении во всем диапазоне значений числа Рейнольдса, и в особенности при больших его значениях, свойств течения, создаваемого телами простой формы обычного размера, движущимися в воздухе или в воде, которые имеют малый коэффициент кинематической вязкости.

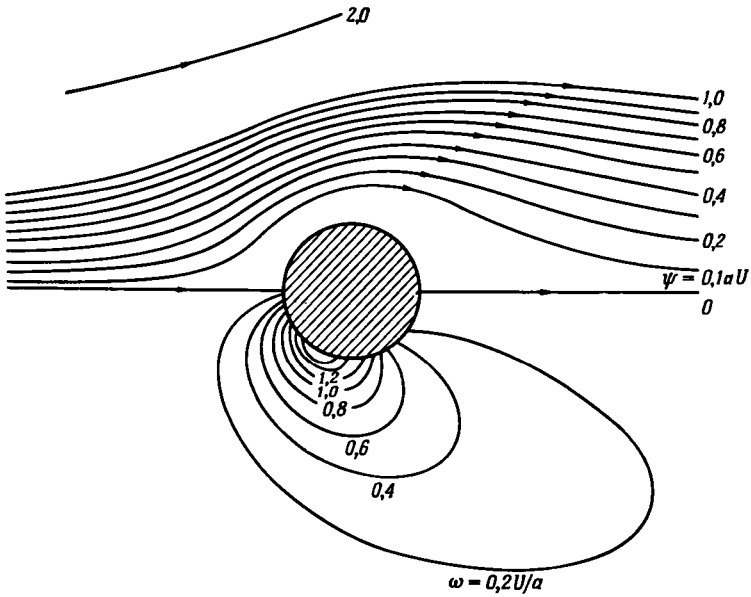
Описание течения при очень малых числах Рейнольдса было дано для сферы и кругового цилиндра (§ 4.9 и 4.10), и теперь мы кратко опишем изменения, которые происходят в этих течениях по мере того, как число Рейнольдса возрастает. Анализ этих двух параграфов основывался на предположении, что при $\mathrm{Re} \ll 1$ силы инерции в большей части поля течения пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости. Принимая во внимание интерпретацию числа Рейнольдса как меры отношения этих двух сил, мы можем ожидать, что при $\mathrm{Re} \gg 1$ будет справедливо обратное утверждение и что силами вязкости в некотором смысле можно пренебречь; это приближение представляет собой тему исследований следующей главы. В промежуточном диапазоне, в котором ни одно из этих приближений не справедливо, а именно в диапазоне, который весьма грубо можно оценить пределами $1 < \mathrm{Re} < 100$, аналитические исследования наталкиваются на большие трудности, и наши знания о течении были получены главным образом путем наблюдений и частично с помощью численного интегрирования полного уравнения движения.

При числах Рейнольдса, малых по сравнению с единицей, доминирующим процессом является диффузия завихренности вдаль от тела. Жидкость, находящаяся в непосредственном контакте с телом, движется с его скоростью, и это приводит к образованию завихренности. Смысл приближения Стокса (§ 4.9) заключается в том, что влияние движения тела ограничивается образованием этой завихренности и что она диффундирует во всех направлениях от тела по существу как от неподвижного источника. Это приводит к потоку с продольной симметрией на больших расстояниях от тела (а также и вблизи тела, если его поверхность имеет такую же симметрию). Усовершенствованное приближение

Озеена (§ 4.10) частично учитывает силы инерции, и завихренность в этом случае диффундирует от равномерно движущегося источника. Завихренность диффундирует на условное расстояние l от источника за время порядка l^2/ν (для целей этого качественного рассуждения мы не делаем различия между скалярными и векторными величинами, подвергающимися влиянию молекулярной диффузии), и в течение этого времени тело продвигается вперед на расстояние Ul^2/ν. Если величина l имеет порядок размера тела L и если $LU/\nu \ll 1$, то процесс диффузии доминирует и распределение завихренности приближенно имеет продольную симметрию вблизи тела в пределах, допускаемых формой тела. С другой стороны, если же $l \gg L$, то движущееся тело оставляет за собой завихренность в области, форма которой приближается к параболической (с телом в фокусе этой параболы) по мере увеличения расстояния от тела вниз по потоку. Таким образом, для $\mathrm{Re} \ll 1$, когда справедливы приближения Стокса и Озеена, течение вблизи тела с продольной симметрией обладает такой же симметрией, но при удалении от тела становится отчетливо асимметричным.

Это рассуждение показывает, что при больших значениях числа Рейнольдса асимметрия выражается более сильно, и она должна оказывать влияние на течение вблизи тела (это не может быть описано в приближении Озеена). Наблюдения подтверждают сказанное и показывают интересные формы, принимаемые течением, особенно в кормовой части тела, где концентрируется завихренность. Ряд полей течения, соответствующих различным значениям числа Рейнольдса будет описан сначала на примере движущегося кругового цилиндра, который более удобен для наблюдения линий тока, чем сфера. В условиях, когда основное внимание обращается на окрестность самого тела, характер течения оценить легче, если рассматривать движение относительно тела; тогда поле течения можно назвать обтеканием тела, а не течением, создаваемым движущимся телом. Жидкость на бесконечности имеет постоянную скорость U, направленную слева направо.

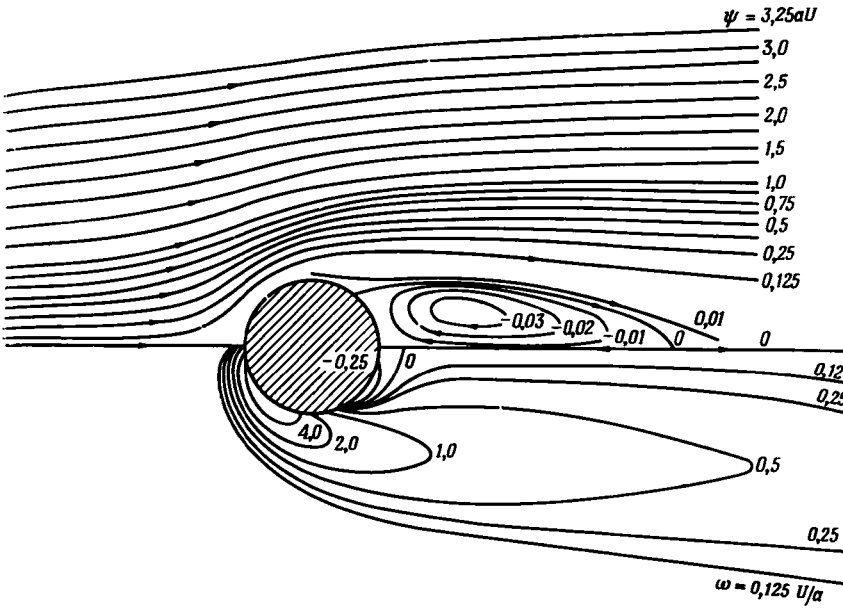
На фото 4.12.1 показаны короткие отрезки пути (хотя фотопластинка экспонировалась с большой выдержкой), проходимые малыми твердыми частицами в жидкости, движущейся около кругового цилиндра диаметром $2a$, при различных значениях числа $\mathrm{Re} = 2aU/\nu$. Течение относительно цилиндра установившееся, поэтому эти отрезки пути частицы представляют собой участки линий тока и можно видеть форму всех связанных с этим течением линий тока, за исключением, быть может, области, в которой скорость жидкости и проходимые частицами расстояния малы. При $\mathrm{Re} = 0{,}25$ продольная асимметрия почти неразличима, но она хорошо заметна при $\mathrm{Re} = 3{,}64$. При $\mathrm{Re} = 9{,}10$ сразу за цилиндром наблюдается область медленно циркулирующей жидкости; при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса эта



Р и с. 4.12.2. Линии тока (вверху) и линии постоянной завихренности (внизу) для обтекания кругового цилиндра при числе Рейнольдса Re = 4 (расчет Келлера и Таками (1966)).

область становится длиннее и внутри нее возникает более интенсивная вполне определенная форма движения. Детали течения сразу за цилиндром не полностью ясны из этих фотографий, однако численное интегрирование полного уравнения движения показывает, что линии тока там замкнуты и существуют в виде двух групп, расположенных симметрично, причем каждая группа содержит «стационарный вихрь» с таким направлением циркуляции, которое согласуется с линиями тока обтекания цилиндра.

Несколько численных расчетов обтекания кругового цилиндра выполнили Том (1933) для Re = 10 и Re = 20, Кавагути (1953) для Re = 40, Апельт (1961) для Re = 40 и 44 и Келлер и Таками (1966) для Re = 2, 4, 10 и 15. Все эти авторы пользовались конечно-разностным приближением полных уравнений движения, которые в случае двумерного течения, подобного рассматриваемому, можно свести к одному дифференциальному уравнению относительно функции тока ψ в качестве зависимой переменной. Расчет становится весьма трудным при возрастании числа Рейнольдса, однако соответствие между этими расчетными и наблюдаемыми картинами течения удовлетворительное, в чем можно убедиться, сравнивая расчетные линии тока при числах Рейнольдса Re = 4 и Re = 40, приведенные на рис. 4.12.2 и 4.12.3, с линиями тока, наблюдаемыми при числах Рейнольдса Re = 3,64 и Re = 39,0

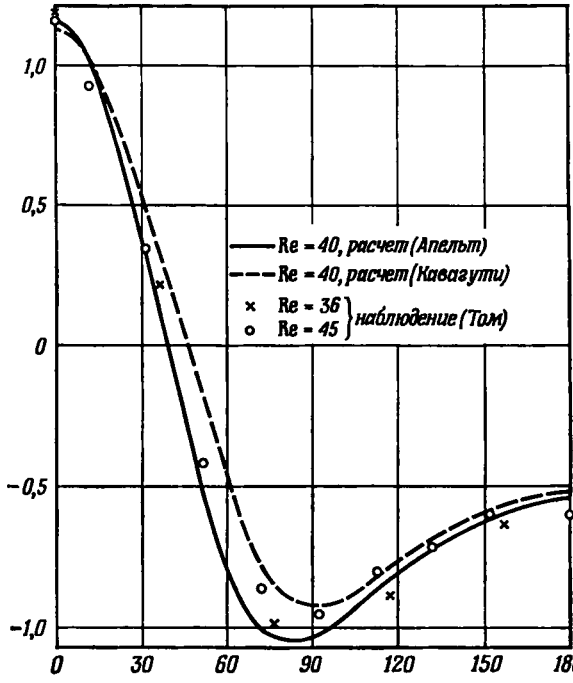


Р и с. 4.12.3. Линии тока (вверху) и линии постоянной завихренности (внизу) для обтекания кругового цилиндра при Re = 40 (расчет Апельта (1961)).

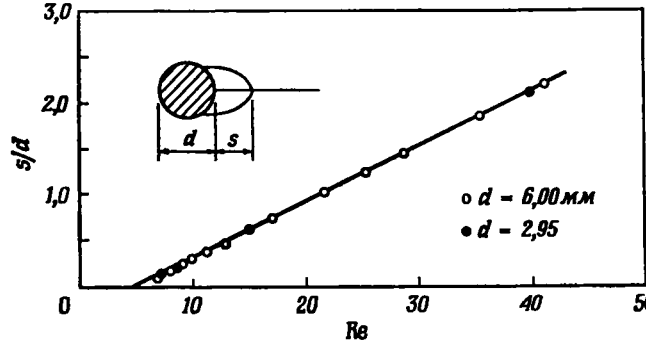
(фото 4.12.1). На рис. 4.12.4 расчетное распределение давлений по поверхности цилиндра при Re = 40 сравнивается с измеренным Томом (1933) при Re = 36 и Re = 45. Следует заметить, что минимум давления появляется на боковой стороне цилиндра, как можно было бы ожидать исходя из теоремы Бернулли для невязкой жидкости (из рис. 4.12.3 видно, что там скорость максимальна), в то время как при $\mathrm{Re} \ll 1$ этот минимум расположен в кормовой критической точке (см. (4.10.9)). Кроме того, на рис. 4.12.2 и 4.12.3 приведены расчетные линии постоянной завихренности ω для Re = 4 и Re = 40. Видно, что при возрастании числа Рейнольдса усиливается перенос завихренности вниз по потоку, где она продолжает диффундировать по мере удаления от тела.

По-видимому, существует вполне определенное число Рейнольдса, при котором за цилиндром появляются замкнутые линии тока [1]). Танеда (1956*а*) измерил длину стационарных вихрей

[1]) Обычно считают, что это критическое значение числа Рейнольдса зависит от кривизны боковых сторон тела. Было обнаружено, что в случае эллиптического цилиндра с большой осью, перпендикулярной потоку, это критическое значение уменьшается по мере уменьшения длины малой оси эллипса и стремится к нулю, когда эллипс вырождается в плоскую пластину, нормальную потоку. В этом отношении представляют интерес некоторые расчеты, выполненные Дином (1944). Дин показал, что если на плоской стенке имеется твердый выступ простой формы и вдоль стенки происходит простое течение сдвига, то с подветренной стороны этого выступа обратное течение возникает при числах Рейнольдса выше вполне определенного значения, и что при увеличении кривизны вершины выступа это критическое значение уменьшается, стремясь к нулю в случае заостренной вершины.



Р и с. 4.12.4. Распределение давления на поверхности кругового цилиндра (по оси абсцисс — угол в градусах, отсчитываемый от передней критической точки; по оси ординат — $(p-p_0)/(^1/_2\rho U^2)$; p_0—давление в бесконечности).



Р и с. 4.12.5. Наблюдаемые размеры области замкнутых линий тока за круговым цилиндром (Танеда (1956а)).

исходя из ряда фотографий линий тока, подобных приведенным на фото 4.12.1, и его результаты на рис. 4.12.5 свидетельствуют, что вихри впервые появляются вблизи значения $Re = 6$. Не так легко дать прямое объяснение явлению образования стационарных вихрей, несмотря на известный факт, что эти вихри имеются при обтекании большинства тел, вне зависимости от того, двумерное это течение или трехмерное (за исключением тонких тел, поперечные размеры которых малы по сравнению с их продольными размерами), при всех числах Рейнольдса выше некоторого значения порядка $Re = 10$, которое зависит от формы тела. Упрощая суть вопроса, можно сказать, что по мере того как число Рейнольдса возрастает и перенос завихренности становится более эффективным, чем ее диффузия, все большее и большее количество завихренности переносится в направлении к кормовой части цилиндра, причем завихренность имеет отрицательный знак (направление вращения по часовой стрелке) вблизи верхней части поверхности цилиндра и положительный знак вблизи ее нижней части. В конце концов на кормовой части цилиндра скапливается завихренности каждого знака больше, чем это нужно там для удовлетворения условию прилипания, и тогда вблизи поверхности индуцируется обратное течение. Обратное течение направлено навстречу движению основного потока и отклоняет его от кормовой части цилиндра, что в свою очередь приводит к усилению вращательного движения в стационарном вихре.

Для значений числа Рейнольдса от 30 до 40 установившееся течение, по-видимому, становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям. Это явление, которое, как уже отмечалось, затрагивает почти все установившиеся течения, когда число Рейнольдса становится достаточно большим (и диссипативное влияние вязкости оказывается сравнительно слабым). В данном случае неустойчивость сначала возникает в следе на некотором расстоянии за цилиндром и приводит к медленным колебаниям следа, приближенно синусоидальным как по времени, так и по координате в направлении потока, с амплитудой, возрастающей с расстоянием вниз по потоку.

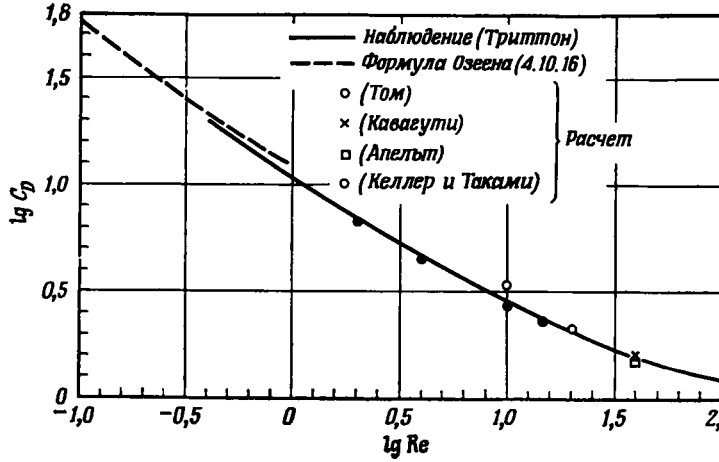
На фото 4.12.6 эти колебания видны по линиям частиц, отмеченных краской, которые испускаются с цилиндра и сносятся в след. Когда число Рейнольдса становится выше критического значения, при котором впервые проявляется неустойчивость, колебания следа приближаются к цилиндру, и при числе Рейнольдса, равном приблизительно 60, непосредственно за цилиндром возникают два стационарных вихря. Они одновременно совершают колебания в поперечном направлении и, по-видимому, в конце каждого полупериода сбрасывают в поток часть вращающейся жидкости попеременно с каждой стороны цилиндра. Поведение следа на этой стадии, как показывают последние три фото-

графии, представляется весьма интересным. Бóльшая часть жидкости, подходящей близко к цилиндру, по-видимому, скапливается в виде дискретных комков, располагающихся двумя регулярными колеблющимися рядами по каждую сторону от прямой, проходящей через ось цилиндра вниз по потоку.

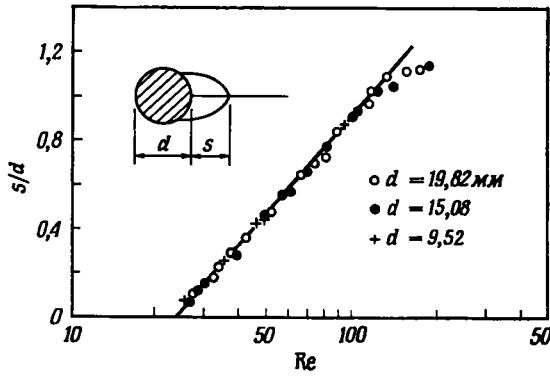
Другие наблюдения показывают, что бóльшая часть завихренности следа вне всякого сомнения сконцентрирована в этих комках, причем все они в каждом ряду имеют завихренность одинакового знака. Эта регулярная расположенная в определенном порядке система дискретных завихренных элементов жидкости (неточно называемых «вихрями», причем вся система расположенных в определенном порядке вихрей называется «вихревой дорожкой») движется вниз по потоку со скоростью меньшей U, и эта система продолжает существовать значительно дальше вниз по потоку, чем показано на фото 4.12.6, хотя с медленным увеличением расстояний между двумя рядами и между соседними вихрями. Два вихря непосредственно за цилиндром становятся слабо различимыми при числах Рейнольдса, больших 100, хотя вихревая дорожка продолжает формироваться в следе вплоть до значительно больших чисел Рейнольдса.

Все эти изменения в картине течения по мере возрастания числа Рейнольдса сопровождаются изменениями в полной силе сопротивления D, действующей на цилиндр. На рис. 4.12.7 представлены обширные данные измерений коэффициента сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса, полученные Триттоном (1959), а также теоретическая зависимость Озеена (4.10.16) и имеющиеся в литературе численные результаты. Анализ отдельных слагаемых коэффициента сопротивления C_D, а именно слагаемого от сил нормального давления (определяемого по измерениям среднего по времени давления p на поверхности цилиндра (Том (1929)) или расчетным путем) и слагаемого от касательных сил вязкости или сил поверхностного трения (определяемых как разность между измеренными полной силой сопротивления и результирующей нормальных сил), показывает, что первое представляет собой возрастающую функцию числа Рейнольдса в диапазоне приблизительно от 50 до 110. Такое аномальное явление предположительно связано с возрастанием колебаний двух стационарных вихрей за цилиндром. Известно, что эти колебания сопровождаются также значительной боковой силой (средняя по времени величина которой равна нулю), направленной по нормали к скорости основного потока и к оси цилиндра.

Аналогичная последовательность изменений по мере возрастания числа Рейнольдса от значений его вблизи единицы происходит при обтекании большинства других тел. На фото 4.12.8 приведены фотографии линий тока обтекания сферы, расположенных в плоскости, проходящей через центр сферы в направлении течения



Р и с. 4.12.7. Коэффициент сопротивления цилиндра радиуса a; $C_D = D/\frac{1}{2}\rho U^2 2a$, $\mathrm{Re} = 2aU/\nu$.



Р и с. 4.12.9. Наблюдаемые размеры области замкнутых линий тока за сферой (Танеда (1956б)).

(как и раньше, $\mathrm{Re} = 2aU/\nu$, где $2a$ — диаметр сферы). Область замкнутых линий тока за сферой, которая образуется, согласно рис. 4.12.9, приблизительно при $\mathrm{Re} = 24$, в данном случае содержит стационарный кольцевой вихрь, направление циркуляции которого снова устанавливается таким, чтобы создать поток того же направления, какое имеет внешнее течение на их общей границе. Здесь также существует неустойчивость течения выше критического значения числа Рейнольдса, возможно берущая начало в следе, и Танеда (1956б) обнаружил, что кольцевой вихрь впервые начинает совершать слабые колебания при числе Рейнольдса, приблизительно равном 130. При более высоких числах

Рейнольдса кольцевой вихрь за сферой колеблется с большей амплитудой, и некоторая часть жидкости в области замкнутых линий тока вырывается из нее и сносится вниз по потоку. Никакого регулярного движения, подобного вихревой дорожке, по-видимому, в следе за сферой не формируется (как и за любым другим трехмерным телом), хотя создается впечатление, что от стационарного кольцевого вихря завихренность отходит непрерывным рядом искаженных вихревых петель, несимметричных относительно центральной оси. Закон, по которому сопротивление сферы изменяется в зависимости от числа Рейнольдса, был представлен ранее на рис. 4.9.2.

Еще одно свидетельство появления картин потока указанных выше видов для тел почти всех форм дают фотографии линий тока установившегося обтекания тонкой пластины прямоугольной формы длины l и очень большой ширины (в направлении нормали к плоскости снимка), поставленной нормально к потоку (см. фото 4.12.10). В качестве примера тонких тел необычного вида, установленных в направлении потока, в кормовой части которых не образуются стоячие вихри, те же самые фотографии показывают линии тока при значении $lU/\nu = 3$ в случае тонкой пластины длины l, помещенной по потоку. По мере дальнейшего возрастания числа Рейнольдса до величины порядка 10^5 форма линий тока этого последнего течения весьма мало изменяется. Изменение сводится к постепенному уменьшению толщины заторможенного слоя жидкости, который можно видеть вблизи пластины на фото 4.12.10, и пластина вызывает все меньшее и меньшее видимое возмущение в однородном потоке жидкости. Между прочим, можно отметить, что тонкая пластина, расположенная кромкой навстречу потоку, представляет собой тело, продольные и поперечные размеры которого весьма разнятся по величине, и что соответствующие числа Рейнольдса, взятые по этим размерам, могут приводить к различным оценкам картины течения; в таком случае выбору числа Рейнольдса придается особое значение. Поскольку мы рассматриваем продольную асимметрию течения, число Рейнольдса, базирующееся на длине пластины, имеет большее значение, так как эта длина характерна для течения в целом. Когда же изучаются определенные локальные свойства течения, такие, например, как распределение давления вблизи входной кромки пластины, большее значение может иметь число Рейнольдса, взятое по толщине пластины.

Упражнения к главе 4

1. Покажите, что в случае жидкости, полностью окруженной неподвижными твердыми границами, скорость диссипации, обусловленной вязкостью, равна $\mu \int \omega^2 \, dV$, где интеграл берется по всему объему жидкости.

Упражнения к главе 4

2. Плоская твердая поверхность, покрытая тонким слоем жидкости постоянной толщины h_0, поставлена вертикально и жидкость стекает с нее. Покажите, что толщина слоя h на расстоянии x от верхней кромки пластины удовлетворяет приближенному уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{h^2}{h_0^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

где $V = \rho g h_0^2/\mu$, и что в момент времени t после начала стекания толщина стекающего слоя

$$h = h_0 \sqrt{\frac{x}{Vt}} \text{ при } x \leqslant Vt,$$

$$h = h_0 \text{ при } x \geqslant Vt.$$

3. Длинная труба кругового сечения содержит цилиндрический слой жидкости постоянной толщины, прилипшей к ее внутренней поверхности. Чтобы удалить жидкость, через трубу продувают воздух, прилагая разность давлений воздуха на ее концах. Определите, как изменяется отношение установившихся объемных потоков воздуха и жидкости в зависимости от расстояния от конца трубы.

4. Тонкий слой вязкой жидкости расположен между двумя параллельными твердыми плоскостями, одна из которых неподвижна, а другая совершает поступательные колебания с частотой n в ее плоскости. Определите отношение величин (переменных) сил трения на обеих пластинах и исследуйте случаи больших и малых значений n.

5. Тонкое твердое осесимметричное тело длиной l вдоль оси и максимального диаметра $d \ll l$ движется поступательно в жидкости со скоростью U при $\rho l U/\mu \ll 1$. Покажите, что сила сопротивления, действующая на тело, когда оно движется в направлении нормали к своей оси, приблизительно в два раза больше силы сопротивления, действующей на тело, когда оно движется параллельно оси.

6. Какое изменение происходит в расположении вихрей вихревой дорожки за телом в потоке жидкости, когда изменяются размер тела и скорость потока, но не их произведение (и не форма тела)?

5

ТЕЧЕНИЕ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА: ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОСТИ

5.1. Введение

В этой главе будет продолжено обсуждение течения вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.

Величины кинематической вязкости воздуха и воды настолько малы, что для большинства практически важных течений, встречающихся в природных условиях, технике или лабораторных исследованиях, числа Рейнольдса намного превышают единицу. Так, величина $\mathrm{Re} = 10^3$ достигается в воздухе при температуре 20 °C и весьма умеренном значении произведения $UL = 150$ см^2/сек, а в воде — всего лишь при $UL = 10$ см^2/сек; здесь U и L — характерные величины изменения скорости и линейного размера, на котором происходит изменение скорости в рассматриваемом течении. Столь малые значения произведения UL так легко и часто превышаются в реальных условиях, что течение при большом числе Рейнольдса следует считать обычным явлением.

Как было установлено в § 4.7, порядок величины числа $\mathrm{Re} = UL/\nu$ непосредственно влияет на относительную величину различных членов в уравнении движения. Если обе безразмерные величины $|D\mathbf{u}'/Dt'|$ и $|\nabla^2\mathbf{u}'|$ имеют порядок единицы почти во всем поле течения, за исключением, конечно, некоторых простых течений, таких, как, например, установившееся прямолинейное течение в трубе, для которого ускорение жидкости всюду равно нулю, то число Рейнольдса является мерой отношения сил инерции и вязкости в жидкости; поле течения, для которого $\mathrm{Re} \gg 1$ во всем течении, характеризуется, по-видимому, тем свойством, что в нем силы инерции намного превышают силы вязкости. Таким образом, исследование течения при большом числе Рейнольдса естественно проводить на основе предположения, что силами вязкости в уравнениях движения можно пренебречь. Такой подход оставался общепринятым на протяжении длительного периода в истории механики жидкостей, и, как следствие этого, теория течения невязкой жидкости достигла высокого уровня развития.

Однако с учетом имеющихся результатов наблюдений предположение о том, что течение при больших числах Рейнольдса является приближенно таким же, как и течение невязкой жидкости, нельзя считать полностью оправданным. В частности, в рамках

теории невязкой жидкости совершенно невозможно объяснить существование обратного течения жидкости за стационарными препятствиями в потоке — явление, которое служит характерной чертой течений при всех (кроме очень малых) числах Рейнольдса и для всех видов препятствий (кроме очень тонких тел, расположенных вдоль потока). Мы знаем теперь, что поведение гипотетической жидкости с нулевой вязкостью должно резко отличаться от поведения жидкости с малой, но не нулевой вязкостью и что течение реальной жидкости при очень больших числах Рейнольдса нельзя считать слегка измененной формой течения невязкой жидкости (за исключением весьма специальных случаев).

Причина указанного различия характера течений реальной и невязкой жидкостей обычно связана с неодинаковым поведением этих жидкостей вблизи твердых границ. Реальная жидкость удовлетворяет условию прилипания на твердых границах (поскольку она обладает хотя бы небольшой вязкостью), тогда как невязкая жидкость не удовлетворяет этому условию. Мы не можем обойти эти физические различия в поведении жидкостей путем введения условий прилипания при математическом описании течения невязкой жидкости. Дело в том, что пренебрежение силами вязкости в уравнении движения (4.1.6) понижает порядок этого дифференциального уравнения на единицу и одно из граничных условий становится, следовательно, излишним.

Мы увидим в этой главе, каким образом сохранение условия прилипания жидкости на твердых границах в течении при больших числах Рейнольдса может оказать существенное влияние на течение в целом; тем самым подтверждается, за исключением особых случаев, неприемлемость предположения о невязкой жидкости. В то же время нас особенно будут интересовать условия, при которых поведение реальной жидкости *должно* приближенно совпадать с поведением невязкой жидкости, поскольку некоторые свойства невязкого потока (в особенности нулевое сопротивление тел в таких потоках) оказываются практически важными в самолетостроении и других областях техники, связанных с движением тел в жидкостях. К тому же надо учитывать многочисленные результаты математической теории невязкой жидкости, которые хотелось бы применить для исследования течения реальных жидкостей.

В этой главе нам иногда придется использовать теорему Бернулли (§ 3.5) для установившегося изэнтропического невязкого течения, поэтому для удобства читателей мы дадим здесь ее вывод (в случае однородной несжимаемой жидкости). С учетом векторного тождества $\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})=(1/2)\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ уравнение движения жидкости с постоянными плотностью и вязкостью (см. (4.1.6)) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)+\nu\nabla^2\mathbf{u}, \qquad (5.1.1)$$

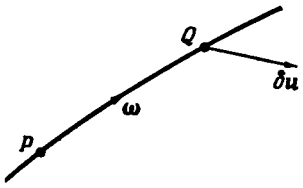


Рис. 5.2.1. Часть вихревой линии.

завихренность жидкости, проходящей через данную точку, непостоянна. Не нуждается в пояснении и член $\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$, ибо он представляет скорость изменения $\boldsymbol{\omega}$ за счет молекулярной диффузии завихренности точно так же, как в уравнениях движения член $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ представляет ускорение, обусловленное диффузией скорости (или количества движения). Завихренность, или угловая скорость жидкости, на первый взгляд не кажется величиной, которая может переноситься от одной части жидкости к другой посредством молекулярного движения, однако ввиду того, что как компоненты скорости $\mathbf{u}$ во всех точках жидкости, так и производные от $\mathbf{u}$ по координатам обладают этим свойством, в действительности этим свойством обладает и завихренность.

Член $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}$ из уравнений (5.2.1) и (5.2.2) не имеет себе подобного в уравнении количества движения и дает своеобразное изменение завихренности. Смысл этого члена станет ясным, если его переписать следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} = |\boldsymbol{\omega}| \lim_{PQ\to 0} \frac{\delta u}{PQ}\,; \tag{5.2.3}$$

отрезок PQ соединяет две соседние точки некоторой вихревой линии (рис. 5.2.1), а $\delta\mathbf{u}$ — скорость жидкости в точке Q относительно точки P. Соответствующий вклад в скорость изменения завихренности по времени, т. е.

$$\text{либо в } \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t},\ \text{либо в } \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt},$$

в точности выражается скоростью изменения по времени направленного элемента жидкой линии, проведенного от точки P к Q, где P и Q считаются теперь материальными точками (ср. (3.1.3)). Поведение $\boldsymbol{\omega}$ подобно поведению элемента жидкой линии, в некоторый момент времени совпадающему с участком вихревой линии, так что изменение величины $\boldsymbol{\omega}$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: одно связано с поворотом линейного элемента как твердого тела (оно обусловлено компонентой скорости $\delta\mathbf{u}$,

нормальной к $\boldsymbol{\omega}$), а другое — с растяжением или сжатием линейного элемента (оно вызвано компонентой скорости $\delta\mathbf{u}$, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$).

Необходимо отметить, что в случае двумерного движения завихренность $\boldsymbol{\omega}$ всюду нормальна к плоскости движения и $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} = 0$; уравнение (5.2.2) в этом случае сводится к скалярному

$$D\omega/Dt = \nu^2\nabla^2\omega, \tag{5.2.4}$$

которое имеет такую же форму, как и уравнение для плотности некоторого содержащегося в жидкости вещества, переносимого жидкостью и диффундирующего в ней (см. (3.1.17)). Другой случай, в котором $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} = 0$,— это течение постоянного направления, поскольку для скорости $(u, 0, 0)$, где u зависит от прямоугольных координат y и z в перпендикулярной движению плоскости, векторы

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ \partial u/\partial z,\ -\partial u/\partial y) \quad \text{и} \quad \nabla u = (0,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z)$$

ортогональны.

Продолжим обсуждение первого члена в правой части уравнения (5.2.2). Тот факт, что величина $\boldsymbol{\omega}$ изменяется подобно вектору, представляющему собой элемент жидкой линии, который в данный момент времени совпадает с участком вихревой линии, можно интерпретировать при помощи понятия потока завихренности через элемент жидкой поверхности. Для элемента $\delta\mathbf{S}(t)$ жидкой поверхности, который в данный момент времени находится в точке $\mathbf{x}$, поток завихренности равен $\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\mathbf{S}$ и, конечно, совпадает с циркуляцией $\delta C(t)$ по замкнутому контуру, ограничивающему этот элемент поверхности. Скорость изменения потока завихренности через элемент $\delta\mathbf{S}$ определяется выражением

$$\frac{d\delta C}{dt} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}\cdot\delta\mathbf{S} + \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{d\delta\mathbf{S}}{dt},$$

которое с использованием (3.1.6) (при постоянном ρ) и (5.2.2) преобразуется к следующему:

$$\frac{d\delta C}{dt} = \nu\delta\mathbf{S}\cdot(\nabla^2\boldsymbol{\omega}) + o(\delta\mathbf{S}) = -\nu\delta\mathbf{S}\cdot\{\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\} + o(\delta S). \tag{5.2.5}$$

Отсюда можно заключить, что поток завихренности через элемент жидкой поверхности изменяется только вследствие молекулярной диффузии; изменения величины и направления элемента $\delta\mathbf{S}$ оказывают некоторое влияние на поток завихренности, которое в точности компенсируется изменениями $\boldsymbol{\omega}$, обусловленными первым членом в правой части уравнения (5.2.2).

Мы можем проинтегрировать (5.2.5) по произвольной незамкнутой жидкой поверхности и в результате найти скорость изменения циркуляции по ограничивающему поверхность контуру. Однако

более полезно начать с определения циркуляции. Циркуляция по замкнутому жидкому контуру равна

$$C(t)=\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{l},$$

а в качестве элемента интегрирования может быть взят элемент $\delta\mathbf{l}$ жидкой линии, скорость изменения которого равна $\delta\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{u}$ в соответствии с процедурой, описанной в § 3.1. Тогда получим

$$\frac{dC}{dt}=\oint\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\right)\cdot d\mathbf{l}+\oint \mathbf{u}\cdot(d\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{u})=$$

$$=\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}+\oint d\mathbf{l}\cdot\nabla\left(-\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)+\nu\oint(\nabla^2\mathbf{u})\cdot d\mathbf{l}, \quad (5.2.6)$$

поскольку плотность ρ постоянна. Предполагая, что $\mathbf{F}=-\nabla\Psi$, а также, что Ψ — однозначная функция координат (например, если $\mathbf{F}$ — сила тяжести) подобно функциям p, ρ и q, имеем

$$\frac{dC}{dt}=\nu\oint(\nabla^2\mathbf{u})\cdot d\mathbf{l}=-\nu\oint(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\cdot d\mathbf{l}. \quad (5.2.7)$$

Это соотношение, очевидно, согласуется с (5.2.5). Действительно, если взять замкнутую жидкую кривую, для которой существует открытая поверхность, ограниченная этой кривой и лежащая в жидкости (такая кривая обычно называется *стягиваемой*, см. § 2.6), то, интегрируя (5.2.5) по такой жидкой поверхности и применяя теорему Стокса, мы снова получаем в точности соотношение (5.2.7). Соотношение (5.2.7) фактически несколько сильнее, чем (5.2.5); в самом деле, в случае замкнутых нестягиваемых жидких кривых (например, таких, которые охватывают твердое цилиндрическое тело бесконечной длины) интегрирование (5.2.5) по открытой поверхности, ограниченной *двумя* нестягиваемыми жидкими кривыми, приводит к утверждению, что величина

$$\frac{dC}{dt}+\nu\oint(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\cdot d\mathbf{l}$$

принимает одно и то же значение для всех таких замкнутых кривых, тогда как, согласно (5.2.7), это общее значение равно нулю. Различие возникает из-за того, что при выводе соотношения (5.2.7) использовано предположение об однозначности потенциала сил Ψ как функции координат, а при выводе (5.2.1) и (5.2.5) это предположение не использовалось. Вследствие этого в (5.2.1) и (5.2.5) допускается возможность возникновения циркуляции (но не завихренности), обусловленной массовыми силами более общего вида, чем сила тяжести, действующими на жидкость в многосвязной области. Подходящим примером являются электромагнитные массовые силы (при определенных условиях); напри-

мер, в плоском сосуде с ртутью можно воспроизвести безвихревое движение с круговыми линиями тока, обусловленное действием радиального электрического поля между внутренней и внешней граничными цилиндрическими стенками сосуда при наличии магнитного поля, нормального к поверхности ртути. В данной главе мы предполагаем, что на жидкость действуют только массовые силы, имеющие однозначный потенциал.

Интересное и существенное свойство соотношения (5.2.7) состоит в том, что циркуляция C не зависит от условий в точках, расположенных вдали от замкнутой жидкой кривой. Ни силы тяжести, ни силы давления не оказывают какого-либо прямого воздействия на циркуляцию C, и лишь силы вязкости, действующие в окрестности жидкой кривой, могут изменить величину C. С этими фактами в упрощенном виде мы столкнулись при обсуждении в § 4.5 течения с круговыми линиями тока, для которого молекулярная диффузия завихренности в радиальном направлении в точности соответствует угловому ускорению жидких колец жидкости под действием пары сил, к которой сводятся силы вязкости. При более общих условиях процесс диффузии завихренности, по-видимому, должен быть более сложным вследствие того, что $\boldsymbol{\omega}$ — вектор. Однако каждая компонента вектора $\boldsymbol{\omega}$ (относительно прямоугольной системы координат) диффундирует как скалярная величина, подобная, например, температуре, и сложность процесса диффузии в значительной степени является кажущейся.

В случае изменений потока завихренности через элемент жидкой поверхности, описываемых соотношением (5.2.5), мы видим, что только диффузия компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$, в данный момент параллельной элементу $\delta\mathbf{S}$, изменяет величину потока. В случае же изменений циркуляции по замкнутому жидкому контуру, описываемых соотношением (5.2.7), мы можем наблюдать процесс диффузии более детально, выбрав в некоторой точке замкнутого контура в качестве оси x_1 прямоугольной системы координат ось, параллельную линейному элементу $\delta\mathbf{l}$ в этой точке. Тогда вклад в правую часть соотношения (5.2.7) от этого линейного элемента

$$-\nu\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right)\delta l$$

явно состоит из вклада от диффузии компоненты ω_3, определяемого градиентом в направлении оси x_2 (при движении в этом направлении компонента ω_3 переносится поперек линейного элемента), и вклада от диффузии компоненты ω_2, определяемого градиентом в направлении оси x_3; знаки этих вкладов определяются потоком завихренности через поверхность, охватываемую контуром.

Наконец, небезынтересно напомнить, что оба соотношения (5.2.1) и (5.2.7) были получены в предположении, что жидкость имеет постоянную плотность. Если жидкость неоднородна, хотя и остается несжимаемой, то выражения для величин $D\boldsymbol{\omega}/Dt$ и dC/dt должны содержать члены, вызванные неодинаковым действием градиентов силы тяжести и давления на элементы жидкости различной плотности. Возникновение завихренности и циркуляции под действием силы тяжести на неоднородную жидкость — один из важных процессов, происходящих в атмосфере, где изменения плотности обусловлены тепловыми эффектами.

Интенсификация завихренности при растяжении вихревых линий

Тот факт, что завихренность жидкого элемента возрастает при растяжении его в направлении вихревой линии (мы ограничиваемся невязкой жидкостью), указывает на возможность увеличения суммарной завихренности в некотором объеме жидкости. Удобной мерой суммарной величины завихренности в жидком объеме τ служит интеграл $\int \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2 d\tau$; согласно (5.2.2), имеем

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2\, d\tau = \int \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}\, d\tau = \int \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega})\, d\tau.$$

Это соотношение становится более понятным, если его переписать в тензорной форме и использовать формулу Остроградского — Гаусса:

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\omega_i\omega_i\, d\tau = \int \omega_i\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, d\tau - \nu\int \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\, d\tau + \\ + \frac{1}{2}\nu\int \frac{\partial(\omega_i\omega_i)}{\partial x_j}\, n_j\, dS, \qquad (5.2.8)$$

где S — жидкая поверхность, ограничивающая объем τ. Как и ожидалось, влияние вязкости может привести только к уменьшению суммарной величины завихренности (второй член в правой части (5.2.8)), если не учитывать изменения за счет диффузии потока завихренности $\boldsymbol{\omega}^2$ через граничную поверхность (последний член в (5.2.8)). Кроме того, отметим, что величина $\omega_i\omega_j\partial u_i/\partial x_j$ положительна там, где скорость растяжения элементов жидкости в направлении $\boldsymbol{\omega}$ положительна. В общем случае в произвольный момент времени некоторые элементы жидкой линии подвергаются растяжению, а некоторые — сжатию, поэтому ясно, что при надлежащем расположении вихревых линий (только не в двумерном течении) величина $\int \omega_i\omega_j(\partial u_i/\partial x_j)d\tau$ может стать положительной, а вместе с ней станет положительной и вся правая часть соотношения (5.2.8).

Существуют многочисленные поля течений, в которых суммарная величина завихренности возрастает и продолжает расти некоторым удивительным образом до тех пор, пока изменение распределения завихренности за счет уменьшения под действием сил вязкости не уравновесит ее прирост за счет растяжения вихревых линий. В этом состоит одно из самых замечательных свойств турбулентного течения, в котором величина интеграла от ω^2 на единицу объема жидкости достигает большого значения (пропорционального положительной степени числа Рейнольдса) прежде, чем потеря завихренности под действием вязкости скомпенсирует или превысит упомянутый прирост завихренности.

Общее обсуждение интенсификации завихренности не входит в план данной книги, и мы ограничимся лишь рассмотрением простого примера установившегося течения, в котором вихревые линии подвергаются растяжению. В этом примере вектор завихренности имеет неизменное направление; в цилиндрической системе координат (x, σ, φ) его компоненты суть $(\omega, 0, 0)$, причем ω зависит только от радиуса σ и времени t. Распределение скорости течения напоминает осесимметричное и характеризуется компонентами $(u_x, u_\sigma, u_\varphi)$. Действительно, направление завихренности будет оставаться неизменным лишь в том случае, когда вектор $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}$ параллелен оси x, так что u_σ и u_φ должны по предположению не зависеть от x. Таким образом, движение в осевой плоскости описывается уравнениями

$$u_x = \alpha x, \qquad u_\sigma = -\frac{1}{2}\alpha\sigma$$

и представляет собой осесимметричное безвихревое течение в окрестности критической точки (§ 2.7), на которое наложено азимутальное движение с завихренностью ω. Здесь α — произвольная положительная постоянная.

Уравнение для завихренности (5.2.1) теперь сводится к единственному скалярному уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\alpha}{2\sigma}\frac{\partial(\omega\sigma^2)}{\partial\sigma} + \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right). \tag{5.2.9}$$

Нас главным образом интересует возможность существования стационарного течения рассматриваемого вида, для которого ω зависит только от σ и, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\alpha\omega\sigma^2 + \nu\sigma\frac{d\omega}{d\sigma} = \text{const} \tag{5.2.10}$$

Если положить константу равной нулю, чтобы устранить особенность функции ω при $\sigma = 0$, то решение этого уравнения примет следующий вид:

$$\omega(\sigma) = \omega_1 \exp\left(-\frac{\alpha\sigma^2}{4\nu}\right). \tag{5.2.11}$$

Можно показать, что (5.2.11) в действительности есть предельное распределение завихренности ω, к которому она стремится при $t \to \infty$, причем произвольное начальное распределение завихренности ω в зависимости от σ должно удовлетворять только условию, что ω стремится к нулю быстрее, чем σ^{-2} при $\sigma \to \infty$, и что интеграл $\int_0^\infty \omega 2\pi\sigma d\sigma$ конечен и отличен от нуля. Этот интеграл выражает поток завихренности через плоскость, нормальную оси x, и является инвариантом, вследствие чего он определяет константу ω_1 из начальных условий.

Решение (5.2.11) представляет установившееся течение, в котором завихренность концентрируется в области, ограниченной расстоянием порядка $(\nu/\alpha)^{1/2}$ от оси симметрии, и в котором интенсификация завихренности, обусловленная растяжением вихревых линий, в конце концов уравновешивается уменьшением завихренности из-за распространения ее в боковых направлениях под действием вязкой диффузии. Это установившееся распределение завихренности в точности совпадает с мгновенным распределением завихренности $\omega = \omega(\sigma)$ в задаче о расширении (диффузии) вихревой нити (см. (4.5.13)), а соответствующие распределения азимутальной скорости в зависимости от σ имеют, следовательно, вид (4.5.14) (см. также рис. 4.5.1). Интересное свойство решения (5.2.11) состоит в том, что, несмотря на возможность существования любого начального распределения завихренности, она концентрируется в конечном счете внутри области, ограниченной некоторым расстоянием от оси симметрии, которое может быть очень малым. Если начальную завихренность ω приближенно можно считать постоянной, равной ω_0 внутри области, ограниченной расстоянием σ от оси симметрии, и равной нулю вне этой области, то условие постоянства потока завихренности через плоскость, нормальную оси x, дает

$$\omega_1 \approx \omega_0 \frac{\alpha\sigma_0^2}{4\nu}. \tag{5.2.12}$$

Условия, используемые при получении решения (5.2.11), а именно неизменность направления вектора вихря вдоль оси симметрии и наложенное деформационное движение, приводящее к однородному растяжению вихревых линий, кажутся весьма специальными, однако можно ожидать, что близкие к этим условия встречаются локальным образом довольно часто. Если упомянутые условия выполняются в значительном объеме жидкости, то это может привести к неожиданным результатам. Примером установившегося течения такого вида приближенно можно считать торнадо, в котором растяжение вихревых линий возникает в результате восходящих потоков теплого воздуха. Другой пример:

когда струя газа выбрасывается из реактивного двигателя неподвижного самолета, часто наблюдается появление интенсивного вихря в области между поверхностью земли и воздухозаборником двигателя. Более житейский пример связан с известным вихрем, возникающим при вытекании воды из ванны. Это установившееся концентрированное распределение завихренности вызывается вытекающим потоком воды в результате растяжения вихревых линий исходного случайного движения воды в ванне. Во всех этих примерах растяжение вихревых линий порождается, грубо говоря, осесимметричным движением жидкости вдали от плоской границы.

Для случая, когда сжатие в плоскости (y, z), перпендикулярной к вихревым линиям, происходит только в одном направлении, скажем вдоль оси y, можно найти решение, аналогичное решению (5.2.11). В этом случае завихренность не зависит от z и представляется в виде

$$\omega(y) = \omega_1 \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2\nu}\right), \tag{5.2.13}$$

что соответствует вихревой пелене, распределенной в слое толщиной порядка $(\nu/\alpha)^{1/2}$.

Упражнение

Вихревые линии осесимметричного установившегося поля течения суть винтовые линии с осью x, а функция тока для движения в осевой плоскости имеет вид $\psi = x\sigma^2 f(\sigma^2)$. Определите линии тока в осевой и азимутальной плоскостях для вихря, определяемого функцией $f(\sigma) = {}^1/_2\alpha - 6\nu(1 - e^{-\alpha\sigma^2/(4\nu)})/\sigma^2$, где α — положительная константа (Салливан (1959)). Отметим, что некоторые вихревые линии здесь сжимаются.

5.3. Теорема Кельвина о циркуляции и законы распространения завихренности для невязкой жидкости

Поскольку существуют условия, для которых движение жидкости при больших числах Рейнольдса аппроксимируется движением невязкой жидкости, полезно обсудить результаты предыдущего параграфа в случае $\nu = 0$. Некоторые из них становятся крайне простыми и сильными. Для начала из (5.2.7) получим

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0, \tag{5.3.1}$$

т. е. в невязкой жидкости циркуляция по любому замкнутому жидкому контуру инвариантна. Это *теорема Кельвина о циркуляции* (Кельвин (1869)); она выведена здесь для невязкой несжи-

маемой жидкости постоянной плотности, находящейся под действием удельной массовой силы, которую можно записать в виде градиента однозначной скалярной функции координат.

Уравнение для завихренности (5.2.2) записывается теперь короче:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{5.3.2}$$

В случае стягиваемой замкнутой жидкой кривой, которая ограничивает жидкую поверхность S, лежащую в жидкости, уравнение (5.3.1) эквивалентно такому:

$$\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{5.3.3}$$

Следовательно, поток завихренности через жидкую поверхность инвариантен. Это означает, что вихревые трубки остаются в некотором смысле неизменными; приводимые ниже соображения подтверждают этот вывод.

Рассмотрим жидкую трубку, которая в начальный момент совпадает с вихревой трубкой произвольного поперечного сечения. Первоначально вихревые линии не пересекают поверхность трубки, и циркуляция по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности трубки и охватывающему ее p раз, равна произведению p на напряженность вихревой трубки. Если теперь такие замкнутые контуры считать жидкими, то, согласно теореме Кельвина о циркуляции, циркуляция по каждому из них будет оставаться постоянной. В частности, циркуляция по всем тем замкнутым жидким контурам, которые имеют малые линейные размеры и в начальный момент лежат на вихревой трубке, не охватывая ее, остается равной нулю. Это означает, что поток завихренности через любую поверхность, ограниченную одним из этих малых замкнутых контуров, остается нулевым, а это возможно только тогда, когда эти жидкие замкнутые контуры продолжают находиться на поверхности вихревой трубки, не охватывая ее. Кроме того, в силу инвариантности циркуляции по тем из жидких контуров, которые вначале охватывали вихревую трубку, следует, что напряженность вихревой трубки, определяемая по всем этим контурам, инвариантна.

Таким образом, вихревая трубка, заданная в начальный момент системой вихревых линий, пересекающих некоторый замкнутый контур в жидкости, во время движения будет состоять из одних и тех же частиц жидкости. Мы можем утверждать, что в невязкой жидкости постоянной плотности *вихревые трубки движутся вместе с жидкостью и их напряженность остается постоянной*. Это утверждение подытоживает очень важные теоремы о завихренности, впервые сформулированные Гельмгольцем (1858).

Если поперечное сечение вихревой трубки стягивается в точку, то в пределе получается вихревая линия. Приведенные выше результаты показывают, что жидкая линия, совпадавшая в начальный момент с вихревой, совпадает с ней и в дальнейшем. Таким образом, для удобства можно считать, что вихревые линии состоят из одних и тех же частиц и движутся вместе с жидкостью. (В случае вязкой жидкости можно, конечно, нарисовать картину вихревых линий в любой момент времени, но не существует способа для идентификации отдельных вихревых линий в различные моменты времени.) Тот факт, что напряженность вихревой трубки малого поперечного сечения остается постоянной при ее движении вместе с жидкостью, справедлив также и для вихревой линии. Действительно, если жидкая линия, совпадающая с вихревой линией, растягивается, то малое поперечное сечение соответствующей вихревой трубки должно уменьшиться в соответствии с законом сохранения массы и величина завихренности должна увеличиться. Ясно, что длина элемента жидкой линии, совпадающей с вихревой линией, и локальное значение завихренности *остаются в постоянном отношении*: обе эти величины обратно пропорциональны бесконечно малой площади поперечного сечения соответствующей вихревой трубки. Таким образом, независимо показано, что направление и величина завихренности ω жидкого элемента изменяются во времени точно так же, как направление и величина вектора $\delta\mathbf{l}$, представляющего элемент жидкой линии, который в некоторый начальный момент времени, скажем t_0, был параллелен вектору локальной завихренности. Следовательно, для завихренности жидкого элемента мы имеем соотношение

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t_0)|} = \frac{\delta\mathbf{l}(t)}{|\delta\mathbf{l}(t_0)|}; \tag{5.3.4}$$

из вывода соотношения (5.3.4) ясно, что оно становится точным при $|\delta\mathbf{l}(t_0)| \to 0$.

Очевидно, было бы заманчиво интерпретировать некоторые из полученных выше результатов как следствие закона сохранения момента количества движения жидкости, заключенной в вихревой трубке. Такая интерпретация возможна в том случае, когда вихревая трубка имеет малое круговое поперечное сечение; оно будет оставаться круговым при движении, поскольку (невязкие) напряжения на границе вихревой трубки не образуют пары сил, действующей на жидкость внутри вихревой трубки. При более общих условиях напряженность вихревой трубки не просто пропорциональна моменту количества движения жидкости на единицу длины трубки: она связана с полученными выше результатами, а не с законом сохранения момента количества движения.

Данные результаты настолько общие, что имеет смысл показать их применимость к сжимаемой жидкости. Если ограничиться

рассмотрением гомоэнтропических течений (§ 3.4), то можно показать, что влияние сжимаемости на законы вихревого движения невязкой жидкости мало.

В гомоэнтропическом поле течения плотность жидкости в любой точке зависит только от (абсолютного) давления, и мы можем, следовательно, записать

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\int \frac{1}{\rho}\,dp\right).$$

Если не учитывать вязкость и считать массовую силу $\mathbf{F}$ заданной в форме градиента $\mathbf{F} = -\nabla\Psi$, то уравнение движения примет следующий вид:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\left(\Psi + \int \frac{1}{\rho}\,dp\right). \tag{5.3.5}$$

Вывод соотношения (5.3.1) остается в силе, и поэтому теорема Кельвина о циркуляции применима. Отсюда следует, что вихревые трубки, как и раньше, движутся вместе с жидкостью, а их напряженность сохраняется. Уравнение для завихренности, которое получается путем применения операции ротора к обеим частям уравнения (5.3.5) и использования векторного тождества, как и при выводе (5.1.1), в данном случае таково:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\nabla\cdot\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} = 0.$$

Используя уравнение сохранения массы, находим

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\cdot\nabla\mathbf{u}. \tag{5.3.6}$$

Уравнение (5.3.3) для потока завихренности остается неизменным; дело в том, что влияние сжимаемости на скорости изменения $\boldsymbol{\omega}$ и $\delta\mathbf{S}$ компенсируют друг друга. Отсюда следует, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью, а изменения завихренности жидкого элемента тесно связаны с изменениями линейного элемента $\delta\mathbf{l}$, который в начальный момент локально параллелен вектору завихренности $\boldsymbol{\omega}$. Ясно также, что соотношению (5.3.4) в данном случае соответствует

$$\frac{(\boldsymbol{\omega}/\rho)_t}{|\boldsymbol{\omega}/\rho|_{t_0}} = \frac{\delta\mathbf{l}(t)}{|\delta\mathbf{l}(t_0)|}. \tag{5.3.7}$$

Мы можем получить теперь соотношения (5.3.4) и (5.3.7) в лагранжевой форме. Заметим для этого, что, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ суть радиусы-векторы одного из концов элемента $\delta\mathbf{l}$ в моменты времени t_0 и t соответственно, то отношение $\delta\mathbf{l}(t)/|\delta\mathbf{l}(t_0)|$ равно производной вектора $\mathbf{x}$ по $\mathbf{a}$ в направлении элемента $\delta\mathbf{l}(t_0)$. Таким образом, мы получаем чисто геометрическое соотношение

$$\frac{\delta\mathbf{l}(t)}{|\delta\mathbf{l}(t_0)|} = \frac{\omega_i(t_0)}{|\boldsymbol{\omega}(t_0)|}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial a_i}, \tag{5.3.8}$$

где элемент δ (t_0) локально параллелен вектору завихренности. После подстановки (5.3.8) в (5.3.7) находим

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_t = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\rho}\right)_{t_0} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a_i}. \tag{5.3.9}$$

Это уравнение (в случае несжимаемой жидкости) впервые было получено Коши.

Сохраняемость безвихревого движения

Большое значение имеет частный случай течения, в котором в некоторый начальный момент времени циркуляция по любому стягиваемому замкнутому контуру в жидкости равна нулю. Как было показано в § 2.7, движение жидкости, для которого циркуляция по любому стягиваемому замкнутому контуру внутри определенной области равна нулю, является безвихревым в этой области. Согласно (5.3.1), циркуляция по любому из этих замкнутых контуров, рассматриваемых как жидкие, остается нулевой и во все последующие моменты времени. Таким образом, в том же самом объеме жидкости движение будет безвихревым в последующие моменты времени, т. е. *некоторый объем невязкой жидкости, находящейся в безвихревом движении, остается безвихревым* [1]). Этим общим свойством безвихревых движений прежде всего объясняется их большое значение в механике жидкостей и повсеместное их распространение (правда, с некоторым приближением, поскольку реальные жидкости нельзя считать совершенно невязкими). Мы можем, например, утверждать, хотя это и тривиально, что если движение невязкой жидкости начинается из состояния покоя (как и большинство реальных движений), то оно будет обязательно оставаться безвихревым, поскольку начальное состояние было безвихревым.

Условия, при которых безвихревое движение остается безвихревым, в точности совпадают с условиями, при которых справедлива теорема Кельвина о циркуляции. В частности, необходимо подчеркнуть, что в обоих этих случаях речь идет о *жидком объеме*, а не о жидкости, занимающей фиксированную часть пространства.

Мы можем также, исходя из (5.3.2), показать, что завихренность некоторого жидкого элемента остается равной нулю, если она была нулевой в начальный момент времени (и таким образом снова получить, что любой объем жидкости, совершающий безвихревое движение, будет все время совершать такое движение). Для этого совсем недостаточно утверждать, что если $\boldsymbol{\omega} = 0$ в начальный момент, то из равенства $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$ в силу (5.3.2)

[1]) Это результат был получен Лагранжем, хотя строгое доказательство его впервые было дано Коши в 1815 г.

в начальный момент следует равенство нулю завихренности ω; как отметил Стокс (1845, Papers, I, p. 106), здесь требуется более полное доказательство, подобное, например, следующему. Из (5.3.2) имеем

$$\frac{D\omega^2}{Dt} = 2\omega_i\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\omega^2\lambda_i\lambda_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \qquad (5.3.10)$$

где $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, а $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\lambda}$. Тогда, если K — наибольшее положительное значение выражения $\lambda_i\lambda_j\,\partial u_i/\partial x_j$ при движении рассматриваемого жидкого элемента в интервале времени от t_0 до t, то решение уравнения (5.3.10) будет удовлетворять неравенству

$$\omega^2(t) \leqslant \omega^2(t_0)\, e^{2K(t-t_0)}.$$

При условии $\omega(t_0) = 0$ отсюда следует $\omega(t) = 0$, когда $K(t - t_0)$ конечно. Подобное ограничение на величину градиента скорости, как отмечалось в § 3.1 при обсуждении скорости изменения интегралов по переменному объему, имеется и в доказательстве сохраняемости безвихревого движения с использованием (5.3.1). Соотношения (5.3.4), (5.3.7) или (5.3.9) показывают также, что коэффициент усиления завихренности жидкого элемента за определенный интервал времени конечен и, следовательно, завихренность остается равной нулю, если она равна нулю в начальный момент и если растяжение элемента жидкости остается конечным.

5.4. Возникновение завихренности при движениях жидкости из состояния покоя

В § 5.2 было установлено, что изменения потока завихренности через элемент жидкой поверхности возникают исключительно вследствие местной диффузии завихренности под действием вязкости. В случае, когда удельная массовая сила представляется в виде однозначного потенциала, изменения циркуляции по жидкому замкнутому контуру происходят только за счет вязкой диффузии завихренности через контур, независимо от вида контура, ограничивающего незамкнутую поверхность, целиком лежащую в жидкости. Внутри жидкости поток завихренности или циркуляция не могут возникать, а могут только распространяться под действием вязкости.

В связи с этим возникает важный вопрос о первичном источнике завихренности при движениях однородной жидкости из состояния покоя. В начальный момент завихренность всюду равна нулю, и движение должно оставаться безвихревым, если завихренность не диффундирует через поверхность, ограничивающую жидкость. Известно, что движения реальных жидкостей, которые мы можем наблюдать, обладают завихренностью по крайней мере в некоторой части поля течения (так, например, можно отчетливо видеть вра-

щающиеся участки жидкости на поверхности воды в сосуде, если опущенное в воду лезвие ножа начать двигать из состояния покоя); поэтому мы можем ожидать, что существует некоторый механизм возникновения завихренности на границе жидкости.

Если жидкость целиком или частично ограничена твердыми поверхностями, а для удаленных на бесконечность участков границы считается покоящейся, то механизм возникновения завихренности связан с условием прилипания жидкости на стенках. Существуют и другие типы границ, приводящих к возникновению завихренности, такие, как «свободные» поверхности жидкости, на которых давление постоянно, а касательное напряжение равно нулю (§ 5.14); однако случай твердых границ встречается намного чаще, и здесь мы подробно рассмотрим только его.

Условие непротекания через каждый элемент твердой границы полностью определяет безвихревое движение жидкости [1]), и это единственное безвихревое движение почти неизбежно имеет ненулевую касательную компоненту относительной скорости жидкости на твердой границе (у нас нет причин рассматривать какие-либо случайные обстоятельства, в силу которых это было бы не так). Таким образом, если движение жидкости возникает из состояния покоя при отсутствии диффузии завихренности через границы жидкости, то оно должно сопровождаться ненулевой касательной скоростью на границе жидкости. Поскольку условие прилипания требует обращения в нуль касательной компоненты относительной скорости в каждой точке твердой границы, сколь бы малой ни была вязкость в таком течении, на границе возникает завихренность бесконечной величины. Эта пелена завихренности на твердой границе и является тем источником, из которого завихренность — как только начинает действовать вязкость — распространяется внутрь жидкости.

Формирование течения с образованием завихренности внутри жидкости можно наглядно представить путем рассмотрения следующего частного вида движения; пусть покоящаяся в начальный момент времени жидкость приводится в движение твердым телом, которое при $t = 0$ мгновенно приобретает конечную скорость и в дальнейшем движется с этой скоростью в жидкости. Можно считать, что окончательная картина установившегося движения жидкости относительно твердого тела формируется в три этапа.

На первом этапе происходит мгновенное возникновение движения жидкости, которое удовлетворяет условию непротекания через каждый элемент поверхности тела. Твердое тело приобретает скорость внезапно, или импульсивно, и окружающая тело

[1]) При условии, что занятая жидкостью область односвязна (см. § 2.7, 2.9). Если область двусвязна, как в случае обтекания цилиндра бесконечной длины, то сделанное утверждение справедливо тогда, когда задана циркуляция по нестягиваемым замкнутым кривым в жидкости (§ 2.8, 2.10); и действительно, последнее условие выполняется для безвихревого движения, возникающего из состояния покоя.

жидкость также должна начать двигаться внезапно [1]). Движение при $t = 0$ обязательно будет безвихревым внутри жидкости, поскольку при $t < 0$ завихренность всюду в жидкости была равна нулю. Как уже отмечалось, начальное безвихревое течение полностью определяется известным движением твердой границы, и единственное безвихревое течение, возникающее при $t = 0$, практически всегда должно иметь скорость на границе, касательная компонента которой отличается от той же компоненты скорости границы тела. Таким образом, при $t = 0$ на границе тела имеется разрыв касательной составляющей скорости, что равносильно наличию вихревой пелены на поверхности тела. Величина интеграла от завихренности ω по нормали к границе тела в любой ее точке равна скачку касательной компоненты скорости и, следовательно, конечна.

На втором этапе формирования течения под действием вязкости начинается диффузия завихренности от границы тела, где она была сосредоточена в момент $t = 0$. Если изменения завихренности в каждой фиксированной точке обусловлены только вязкой диффузией, то каждая компонента завихренности ω в прямоугольной системе координат будет удовлетворять уравнению теплопроводности; как было показано в гл. 4 на примерах, в которых другие виды изменения завихренности ω по тем или иным причинам не возникали, величина расстояния [2]), на которое распространяется завихренность за счет диффузии за время t, будет порядка $(\nu t)^{1/2}$. Фактически завихренность переносится также за счет конвекции (что дает вклад в $\partial\omega/\partial t$ в фиксированной точке, определяемый первым членом в правой части уравнения (5.2.1)) и изменяется за счет локального деформирования и вращения жидкости (второй член в правой части уравнения (5.2.1)). Второй из указанных дополнительных эффектов не оказывает влияния на распределение по пространству завихренности, чего нельзя сказать о первом. Однако вблизи тела скорость жидкости относительно тела имеет только малую нормальную компоненту, так что при малых значениях времени t, когда расстояние $(\nu t)^{1/2}$ мало, влияние конвекции выражается в переносе завихренности в основном параллельно поверхности тела, а не по нормали к ней. Таким образом, при

---

[1]) В действительности внезапное движение приобретают только частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с границей тела, а другие начинают двигаться позже в результате действия волн сжатия, которые распространяются от границы тела с конечной скоростью. Однако если скорости жидкости малы по сравнению с минимальной скоростью волн сжатия (т. е. скоростью распространения звука в жидкости), то жидкость можно условно считать несжимаемой, а скорость распространения волн сжатия — бесконечной.

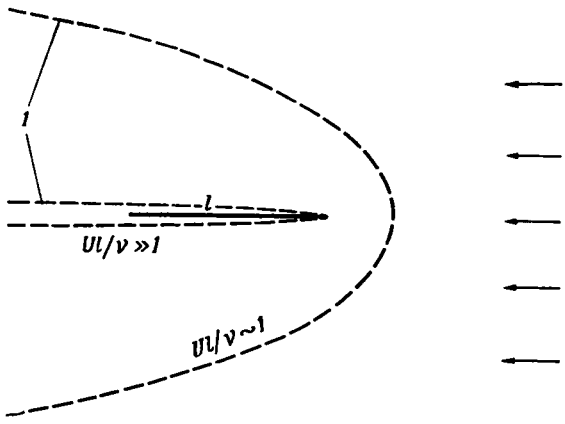
Подробное описание возникновения импульсивного градиента давления в несжимаемой жидкости, а следовательно, и внезапного ее движения под действием внезапного движения границы, содержится в § 6.10.

[2]) Это, конечно, не есть какое-то определенное расстояние, поскольку при $t > 0$ в жидкости нет точек, в которых завихренность ω, определенная теоретически, тождественно равна нулю. Рассматриваемое расстояние представляет собой «глубину проникания», смысл которой можно выяснить на примерах, подобных приведенным в § 4.3.

малых значениях t завихренность жидкости будет отлична от нуля в окружающем тело слое толщины порядка $(\nu t)^{1/2}$. Внутри этого слоя завихренность конечна, так как она обусловлена конечным скачком скорости в слое ненулевой толщины.

Во время третьего этапа расстояние $(\nu t)^{1/2}$ не остается малым (по сравнению с каким-либо характерным линейным размером границы), и за счет конвекции завихренность будет переноситься к границе тела или от нее. При $t \to \infty$ обычно формируется установившееся движение жидкости относительно тела; в этом случае изменения завихренности ω в любой точке, фиксированной относительно тела, вызванные действием конвекции, локальным деформированием и вращением жидкости, а также вязкой диффузией, имеют нулевую результирующую. Тот из этих трех эффектов, который связан с локальным деформированием и вращением жидкости, обусловливает лишь локальное изменение завихренности и оказывает второстепенное влияние на общую картину распределения завихренности. Другие два эффекта — конвекция и диффузия — очевидно, определяют, по всей ли жидкости будет распространяться завихренность в установившемся течении. В некоторых случаях конвекция не препятствует распространению завихренности по всей жидкости за счет вязкой диффузии. Относительно других этого нельзя сказать; так, в случае течения, вызванного движением тела в жидкости, ясно, что относительная скорость жидкости перед телом направлена к телу, и поскольку перенос за счет диффузии ослабляется с уменьшением расстояния от источника завихренности, то она будет распространяться только на конечное расстояние перед телом. В тех случаях, когда конвекция сильна (скорость тела всюду велика) или диффузия слаба (вязкость жидкости всюду мала), существуют большие области жидкости (впереди тела и по бокам от него), в которых окончательное установившееся течение является приближенно безвихревым.

Большинство из этих общих положений относительно развития установившегося течения с распределенной завихренностью применимо в аналогичной форме к изучению развития стационарного распределения температуры в жидкости, обтекающей нагретое тело; некоторым читателям эта более знакомая ситуация может показаться нагляднее. Отмеченная аналогия особенно заметна в случае двумерных полей, когда уравнение для одной ненулевой компоненты завихренности ω совпадает (см. (5.2.4)) с уравнением для распределения температуры в движущейся среде, имеющей коэффициент термодиффузии ν. С целью сравнения этих двух случаев рассмотрим следующую задачу. Твердая плоская пластина пренебрежимо малой толщины, бесконечной ширины и длины l в начальный момент $t = 0$ внезапно приобретает скорость U в своей плоскости и одновременно внезапно нагревается до температуры, превышающей температуру окружающей жидкости.



Р и с. 5.4.1. Диффузия и конвекция завихренности и теплоты от пластины, помещенной в однородный поток.
1 — граница области завихренности и повышения температуры; стрелки справа — скорость однородного потока.

Начальное безвихревое движение жидкости относительно пластины имеет постоянную скорость $-U$ (это первый этап развития движения). На втором этапе как завихренность, так и температура диффундируют от поверхности пластины и по истечении малого интервала времени t распространяются в жидкости на расстояние порядка $(\nu t)^{1/2}$. В данном случае аналогия неполная, поскольку, во-первых, распределения скорости и завихренности связаны соотношением $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, в то время как температура является независимой величиной, и, во-вторых, граничное условие для завихренности связано с условием прилипания, чего нельзя сказать о граничном условии для температуры. Однако качественная аналогия остается справедливой, если граничное условие для температуры таково, что обеспечивается непрерывный поток тепла от поверхности тела; это может быть, скажем, в том случае, когда температура тела стационарно поддерживается на некотором уровне, превышающем температуру жидкости на бесконечности. На третьем этапе завихренность и избыточная температура переносятся путем конвекции в точки, расположенные вдали от тела вниз по потоку; что касается распространения завихренности и повышения температуры в области впереди тела и по бокам от него, то они будут зависеть от относительной значимости процессов конвекции и диффузии, как показано на рис. 5.4.1.

Скорость жидкости при установившемся течении всюду имеет порядок U и направлена почти параллельно пластине; поэтому время, в течение которого элемент жидкости находится у пластины, имеет величину порядка l/U. За этот промежуток времени завих-

ренность и избыточная температура за счет диффузии распространяются в боковых направлениях (перпендикулярно линиям тока) на расстояние порядка $(\nu l/U)^{1/2}$. Таким образом, если отношение Ul/ν имеет порядок единицы, то завихренность и избыточная температура распространятся в боковом направлении на расстояние порядка длины пластины. Если $Ul/\nu \gg 1$, то завихренность и избыточная температура будут уноситься от пластины прежде, чем они смогут далеко распространиться в боковых направлениях; это приведет к образованию узкого «следа» завихренности и теплоты непосредственно вниз по потоку от тела (величины завихренности и избыточной температуры будут тем больше, чем у́же след); если же $Ul/\nu \ll 1$, то влияние конвекции пренебрежимо мало, а завихренность и избыточная температура будут распространяться от тела более или менее одинаково во всех направлениях. Для распределения рассматриваемых величин вверх по потоку от тела из условия баланса конвективных и диффузионных членов получается, что завихренность и избыточная температура в общем случае распространяются на расстояние порядка ν/U от кромки тела; приведенные выше качественные рассуждения о выборе различных величин для параметра Ul/ν применимы и здесь, однако количественные оценки будут отличаться.

Теперь мы можем вернуться к многочисленным частным примерам течений из гл. 4, для того чтобы показать, насколько упрощаются рассмотренные в данном параграфе общие положения, если их применить к конкретным задачам. В § 4.3 обсуждались некоторые случаи развития из состояния покоя течения при постоянном направлении скорости, а в § 4.5 рассматривались течения с круговыми линиями тока. Во всех этих случаях не происходит изменения завихренности вдоль линий тока и не происходит поворота или растяжения вихревых линий, так что изменение завихренности здесь обусловлено исключительно действием диффузии. Однако, как ясно из проведенного анализа, твердая граница тела является источником завихренности, которая постепенно диффундирует от границ тела в первоначально безвихревое течение жидкости. В большинстве этих случаев течений окончательное установившееся состояние таково, что всюду в жидкости имеется ненулевая завихренность; стационарный поток завихренности от одних твердых границ уравновешивается стационарным потоком, проходящим через другие границы. Интересным исключением является возникающее из состояния покоя течение во внешней области кругового стационарно вращающегося цилиндра. В этом случае завихренность, диффундирующая от поверхности цилиндра в первой стадии движения, полностью уносится на бесконечность; в результате этого во все возрастающей области, охватывающей цилиндр, течение становится установившимся и безвихревым (см. (4.5.10)). Так уж посчастли-

вилось, что в этом течении твердая граница перестает быть источником завихренности.

Проведенные в § 4.9, 4.10 и 4.12 исследования установившихся движений сферы и кругового цилиндра в жидкости, покоящейся на бесконечности, дают более поучительные примеры того, каким образом величина числа Рейнольдса может оказывать влияние на общую картину распределения завихренности в установившемся течении. Согласно этим исследованиям, по мере увеличения числа Рейнольдса от некоторого малого по сравнению с единицей значения распределение завихренности становится более несимметричным и стремится локализоваться внутри параболы, ветви которой направлены вниз по потоку, а фокус совпадает с центром тела; эта картина находится в соответствии с общими положениями данного параграфа о развитии такого установившегося течения из состояния покоя.

Наша основная цель, к достижению которой мы постепенно приближаемся, состоит в изучении тех течений, в которых существенны конвекция и диффузия; при этом влияние увеличения числа Рейнольдса до значений, намного превосходящих единицу, приводит к локализации возникшей у стенок тела завихренности в слое относительно малой толщины (по крайней мере на передней стороне и отчасти на боковых поверхностях движущихся тел); величина этой завихренности будет тем больше, чем тоньше становится указанный слой при увеличении числа Рейнольдса.

5.5. Установившиеся течения, в которых диффузия завихренности, возникающей на твердой границе, ограничивается за счет конвекции

Существует немного решений основных уравнений гидродинамики, позволяющих аналитическим путем показать, каким образом завихренность в установившемся течении может локализоваться в некоторой области течения вблизи твердой границы. Эта локализация области распространения завихренности достигается за счет конвекции завихренности *к границе*, т. е. в направлении, противоположном вязкой диффузии, которая переносит завихренность, возникающую на стенке. Для существования таких решений поле скоростей в некоторой области рассматриваемого течения должно иметь направленную к границе компоненту скорости.

В силу уравнения сохранения массы это возможно только в том случае, когда накапливаемая вблизи границы жидкость удаляется либо путем отсоса через границу, либо путем непрерывного увеличения тангенциальной компоненты скорости с увеличением расстояния вдоль границы. Ниже рассматриваются один пример первого из указанных типов течений и два примера второго типа.

(*а*) *Обтекание пластинки и цилиндра при отсосе жидкости через стенку*

Некоторые материалы, такие, как пористая бронза или металлический лист с многочисленными отверстиями малого размера, обладают свойствами твердого тела и способностью принимать ту или иную заданную форму. Если слой такого материала использовать в качестве границы области течения жидкости и если обеспечить пониженное давление на внутренней стороне тела, то жидкость будет просачиваться через него. Тогда подходящее граничное условие для указанной области течения состоит в том, что нормальная компонента относительной скорости жидкости и твердого тела на границе должна быть равна некоторой величине, определяемой пористостью материала и приложенным перепадом давления; для простоты мы возьмем в качестве заданной нормальной относительной скорости постоянную для всех точек границы величину $-V$ (положительное значение V будет соответствовать отсосу жидкости на границе).

Что касается граничного условия для тангенциальной компоненты относительной скорости на поверхности тела, то, согласно экспериментальным данным, условие прилипания все еще остается приемлемым и при наличии отсоса; а поскольку обычно используемые на практике значения скорости отсоса V очень малы по сравнению со скоростью основного течения (из-за большого сопротивления течению жидкости через поры), то кажется вполне разумным сохранить условие прилипания жидкости на границе, во всяком случае, как очень хорошее приближение.

Сначала мы рассмотрим решение для установившегося двумерного течения над плоской твердой границей, через которую жидкость отсасывается с постоянной скоростью V. Не будем пока учитывать картину течения вверх по потоку. предполагая, что переменные задачи не зависят от координат в плоскости, параллельной границе (при этом мы действуем по обычному в гидромеханике правилу: делаем какое-либо предположение и потом его проверяем). Таким образом, если (x, y, z) — прямоугольная система координат (ось y нормальна к границе), то скорость жидкости есть $(u, -V, 0)$, а завихренность есть $(0, 0, \omega)$, где $\omega = -du/dy$. Уравнение для завихренности (5.2.1) принимает вид

$$-V\frac{d\omega}{dy} = \nu\frac{d^2\omega}{dy^2},$$

или после интегрирования

$$V(\omega_0 - \omega) = \nu\frac{d\omega}{dy}. \tag{5.5.1}$$

Это уравнение просто выражает тот факт, что часть завихренности, переносимая через единицу площади в плоскости (x, z) за счет

конвекции со скоростью $-V$, в точности уравновешивается величиной завихренности, переносимой за счет вязкой диффузии. Выполнив еще одно интегрирование, получим

$$\omega - \omega_0 = -\frac{du}{dy} - \omega_0 = Ae^{-Vy/\nu}, \tag{5.5.2}$$

где A и ω_0 — константы. Отсюда видно, что область неоднородной завихренности простирается на расстояние порядка ν/U от границы; этот же результат был предсказан при общем обсуждении баланса между переносом завихренности к границе за счет конвекции и от границы за счет вязкой диффузии.

Это означает, следовательно, что подходящее решение ожидаемого вида существует. Чтобы представить это решение в удобной для практического использования форме, мы выберем специальные значения для постоянных ω_0 и A. Константа ω_0, очевидно, равна постоянной завихренности вдали от границы, и ее можно положить равной нулю, что соответствует безвихревому течению в той области, куда не проникла завихренность за счет диффузии. При $\omega_0 = 0$ мы должны положить $u = U = \text{const}$ в той же области течения. После интегрирования уравнения (5.5.2) с использованием граничных условий

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u \to U \quad \text{при} \quad y \to \infty$$

мы получим распределение скорости

$$u = U\,(1 - e^{-Vy/\nu}). \tag{5.5.3}$$

Для завершения решения заметим, что, согласно уравнению движения, давление во всей рассматриваемой области течения постоянно. Решение (5.5.3) обладает тем примечательным свойством, что его можно считать *асимптотическим* решением по двум причинам. Во-первых, оно асимптотическое по времени для различных начальных условий, при которых параметры течения остаются не зависящими от x (в чем можно непосредственно убедиться путем решения линейного уравнения для завихренности ω с учетом члена $\partial\omega/\partial t$). Во-вторых, оно асимптотическое по x для различных стационарных условий вверх по потоку. Предполагается, что вдали от границы течения завихренность в обоих случаях равна нулю.

Здесь будет уместно рассмотреть случай $\omega_0 \neq 0$. После интегрирования уравнения (5.5.2) находим

$$u = B - \omega_0 y + \frac{A\nu}{V} e^{-Vy/\nu};$$

смысл константы ω_0 можно объяснить, используя уравнение движения, которое в данных условиях принимает следующий

вид:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=V\frac{du}{dy}-\nu\frac{d^2u}{dy^2}=V\omega_0.$$

Заметим, что ненулевой постоянный градиент давления, равный, скажем, $-\rho G$, практически реализуется для течения жидкости в трубе или канале. При этом имеем граничные условия

$$u=0 \quad \text{при} \quad y=0, \qquad u=0 \quad \text{при} \quad y=d.$$

Нормальная составляющая скорости на стенке канала при $y=d$ равна $-V$, так что через эту стенку жидкость нагнетается в канал. С учетом этих граничных условий имеем

$$u=\frac{G}{V}\left(-y+d\,\frac{1-e^{-Vy/\nu}}{1-e^{-Vd/\nu}}\right). \tag{5.5.4}$$

Если $Vd/\nu \ll 1$, то диффузия завихренности преобладает над конвекцией в направлении оси y и распределение скорости (5.5.4) принимает известную параболическую форму. В другом крайнем случае, когда $Vd/\nu \gg 1$, получаем распределение скорости $u \approx \approx G(d-y)/V$, исключая область вблизи $y=0$, где скорость u резко падает до нуля. Большой градиент скорости u вблизи $y=0$ обусловлен тем, что возникающая у границы течения $y=0$ завихренность концентрируется в тонком слое, а относительно небольшая постоянная завихренность вне этого слоя возникает у границы течения $y=d$ и переносится путем конвекции поперек канала. Рассматривая изменение количества движения жидкости, полученный постоянный градиент скорости в большей части канала можно объяснить постоянным ускорением элементов жидкости под действием градиента давления при их движении от стенки $y=d$ до области вблизи $y=0$, где проявляется действие вязкости.

Можно найти решение также и для течения около вращающегося кругового цилиндра, на поверхности которого задана направленная внутрь цилиндра скорость V, соответствующая отсосу через стенку. Как было установлено в § 4.5, течение, возникающее из состояния покоя при стационарном вращении твердого цилиндра (без отсоса), в пределе становится безвихревым, поскольку вся порождаемая у твердой поверхности завихренность диффундирует в бесконечность. При отсосе жидкости можно ожидать, что он будет препятствовать диффузии завихренности на бесконечность и около цилиндра образуется установившееся течение с ненулевой завихренностью. Считая, что указанное течение существует, мы получим вместо (5.5.1) следующее уравнение:

$$\frac{Vr_1}{r}(\omega_0-\omega)=\nu\frac{d\omega}{dr},$$

где теперь ω — осевая компонента завихренности, r_1 — радиус цилиндра. Решение имеет вид

$$\omega - \omega_0 = A\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\mathrm{Re}}, \tag{5.5.5}$$

где $\mathrm{Re} = r_1 V/\nu$ — число Рейнольдса; константу ω_0 снова можно положить равной нулю в соответствии с тем, что установившееся течение возникло при некоторых начальных условиях с $\omega = 0$ для достаточно больших значений r. Полученное решение, как и ожидалось, дает максимальное значение завихренности на поверхности цилиндра, однако следует заметить, что ω лишь незначительно уменьшается с увеличением радиуса r при малых числах Рейнольдса. Последующее интегрирование (5.5.5) с учетом $\omega_0 = 0$ дает

$$rv = r_1^2\Omega_1 - \frac{Ar_1^2}{\mathrm{Re}-2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\mathrm{Re}-2}, \tag{5.5.6}$$

где Ω_1 — константа; решение (5.5.6) показывает, что касательная к окружности скорость v имеет конечное значение на бесконечности только при $\mathrm{Re} \geqslant 1$, а циркуляция $2\pi rv$ имеет конечное значение только при $\mathrm{Re} > 2$, если $A \neq 0$. Если бы это стационарное решение было получено как асимптотическая форма решения нестационарной задачи с начальными условиями при постоянной (или, возможно, нулевой) циркуляции на бесконечности, то мы заключили бы, что циркуляция остается конечной и что, следовательно, $A = 0$, когда $\mathrm{Re} < 2$. Таким образом, при $\mathrm{Re} < 2$ стационарное состояние будет безвихревым точно так же, как и в случае без отсоса жидкости; это означает, что конвекция не будет препятствовать завихренности, возникшей у поверхности цилиндра, распространяться в бесконечность за счет диффузии. Это становится возможным из-за того, что радиальная скорость конвекции Vr_1/r уменьшается с увеличением расстояния от цилиндра.

(*б*) *Течение в окрестности критической точки на твердой границе*

Займемся теперь изучением стационарного распределения завихренности в непосредственной окрестности расположенной на твердой поверхности точки, течение возле которой характеризуется тем, что притекающая к поверхности жидкость разделяется на потоки, направленные в различные стороны от этой точки. Без учета условия прилипания эта разделяющая точка отличалась бы тем, что скорость жидкости относительно тела была бы равна в ней нулю; на практике течение в ее окрестности обычно называют *течением у критической точки*, хотя в действительности для реальной жидкости на всей твердой границе относительная скорость

равна нулю. Концентрируя внимание на достаточно малой окрестности разделяющей точки, мы можем считать твердую поверхность плоской (если, конечно, она не имеет излома).

Очевидно, что если нормальная к границе компонента скорости направлена всюду в сторону к границе в рассматриваемой области, то возникающая у границы завихренность будет переноситься к границе в противоположность вязкой диффузии, действующей в сторону от границы. Мы можем, следовательно, предположить, что порожденная у границы завихренность в стационарных условиях будет локализоваться в прилегающем к границе слое, толщина которого тем меньше, чем сильнее влияние конвекции; что касается завихренности вне этого слоя, то ее величина определяется условиями течения вдали от границы; эту величину можно положить равной нулю, как, например, для критической точки на передней части твердого тела, обтекаемого установившимся потоком с постоянной скоростью на бесконечности.

Рассмотрим сначала двумерное течение вблизи критической точки на твердой поверхности. Для решения этой задачи удобно будет определить прежде всего течение во внешней безвихревой области (что обычно легче из-за предположения об отсутствии вихрей); затем это течение используется с целью определения внешнего граничного условия для течения в слое жидкости с ненулевой завихренностью. Если теперь толщину вихревого слоя считать малой по сравнению с линейными размерами рассматриваемой области, то наличие этого слоя будет вносить небольшие изменения во внешнее безвихревое течение. Следовательно, мы можем искать безвихревое течение в приближенной форме, не учитывая вихревой слой вовсе (и, конечно, не учитывая условие прилипания, приводящее к возникновению этого слоя). Таким образом, внешнее течение представляет собой обычное безвихревое течение вблизи критической точки на *плоской* границе. Как мы увидим позже, один из способов улучшения данного приближения с целью учета влияния вихревого слоя на внешнее течение непосредственно следует из вида окончательного решения.

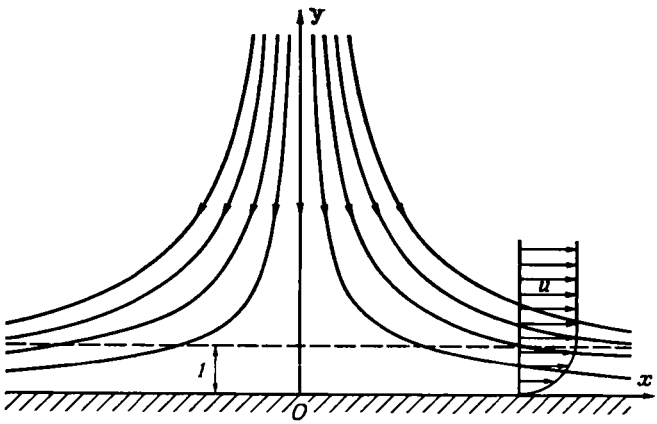
Известно (см. (2.7.10)), что течение в безвихревой области описывается функцией тока

$$\psi = kxy, \tag{5.5.7}$$

где x, y — прямоугольные координаты, направленные вдоль границы и по нормали к ней (рис. 5.5.1); соответствующее распределение скорости:

$$u = kx, \qquad v = -ky. \tag{5.5.8}$$

Здесь k — положительная константа, которая в случае критической точки на обтекаемом теле должна быть по соображениям размерности пропорциональна скорости тела, движущегося в



Р и с. 5.5.1. Установившееся двумерное течение в окрестности критической точки на твердой границе.
1 — область ненулевой завихренности; штриховкой показана твердая граница.

жидкости, и, как установлено, зависит также от формы обтекаемого тела в целом.

Определим теперь распределение завихренности в тонком слое вблизи границы, воспользовавшись уравнением

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right). \tag{5.5.9}$$

Граничные условия при $y = 0$ записываются как $u = 0$, $v = 0$, а на внешней границе слоя течение приобретает вид (5.5.8). Далее, условие прилипания, конечно, приведет к изменению полученной зависимости компонент скорости от y, однако это не очевидно в отношении их зависимости от x; следовательно, имеет смысл выяснить, существует ли такое решение, для которого $u \sim x$ во всем слое завихренности. Для этого решения мы можем записать

$$\psi = xf(y), \tag{5.5.10}$$

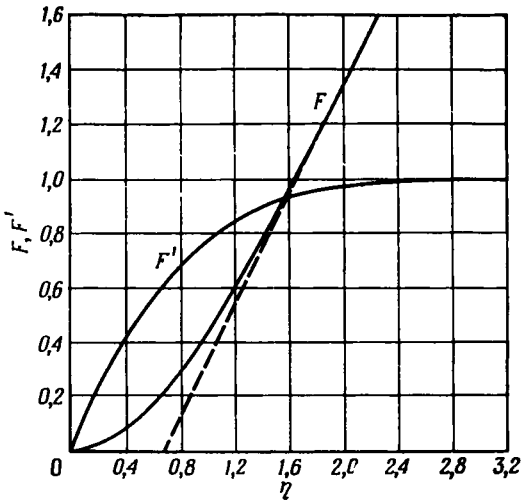
чему соответствует

$$u = xf'(y), \qquad v = -f(y),$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} = -xf''(y),$$

где $f(y)$ — неизвестная функция, а штрихи означают дифференцирование по y. После подстановки в (5.5.9) для определения функции $f(y)$ получаем уравнение

$$-f'f''+ff'''+\nu f^{\mathrm{IV}}=0 \tag{5.5.11}$$



Р и с. 5.5.2. Функция $F(\eta)$, определяющая течение в вихревом слое.

с граничными условиями

$$f = f' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$f \to ky \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Путем однократного интегрирования с учетом граничного условия при $y \to \infty$ из (5.5.11) находим

$$f'^2 - ff'' - \nu f''' = k^2. \tag{5.5.12}$$

Коэффициенты этого уравнения можно сделать безразмерными, если использовать преобразование

$$y = \left(\frac{\nu}{k}\right)^{1/2} \eta, \quad f(y) = (\nu k)^{1/2} F(\eta);$$

в результате имеем

$$F'^2 - FF'' - F''' = 1 \tag{5.5.13}$$

с граничными условиями

$$F = F' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$
$$F \to \eta \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Как было численно показано Хименцом (1911), можно найти решение этого уравнения, удовлетворяющее всем граничным условиям; оно приведено на рис. 5.5.2. Соответствующая картина линий тока и распределение компоненты $u(y)$ схематически показаны на

рис. 5.5.1. Что касается единственности решения, то для уравнений движения с приведенными выше граничными условиями она не доказана. Однако с физической точки зрения можно считать, что поставленная нами задача решена, а полученное выше решение описывает происходящее в действительности течение жидкости.

Толщина слоя ненулевой завихренности (условно определяемая как значение y, при котором $u = 0{,}99kx$), найденная численно, равна (по уточнению Хоуарта (1935))

$$\delta = 2{,}4\ (\nu/k)^{1/2}. \tag{5.5.14}$$

Она не зависит от расстояния вдоль границы и, как и предполагалось ранее, стремится к нулю, когда влияние конвекции (выражаемое коэффициентом k) намного превосходит влияние диффузии (выражаемое коэффициентом ν). Факт независимости толщины δ от координаты x наводит на мысль о том, что влияние слоя завихренности на безвихревое течение (это влияние совсем не учитывалось в начале вычислений) приближенно выражается смещением всего течения в направлении оси y, что равносильно простому передвижению границы; для подтверждения этого заметим, что, согласно рис. 5.5.2, уточненная асимптотическая оценка для F при $\eta \to \infty$ имеет вид

$$F \to \eta - 0{,}65,$$

так что для соответствующих асимптотических выражений компонент скорости u и v получаем

$$u \to kx, \qquad v \to -k\,(y - \delta_1),$$

где «толщина вытеснения» слоя

$$\delta_1 = 0{,}65\ (\nu/k)^{1/2}. \tag{5.5.15}$$

Это простое смещение всего безвихревого течения не вызывает изменения в распределении скорости течения.

Теперь становится ясным, как найти ограничение на величину k/ν, необходимое для того, чтобы полученное выше решение было справедливо в слое завихренности; это ограничение состоит в том, чтобы область вблизи критической точки, внутри которой течение имело бы вид (5.5.8) без учета условия прилипания, находилась от границы жидкости дальше, чем внешний край слоя завихренности. В случае критической точки на передней части тела, обтекаемого равномерным потоком, указанное ограничение обычно определяется тем условием, чтобы величина $(\nu/k)^{1/2}$ была много меньше радиуса кривизны тела в критической точке.

В заключение полезно отметить, что постоянство толщины слоя завихренности в рассматриваемых условиях связано, очевидно, с постоянством по x поперечной скорости жидкости на внешней

границе слоя или, что равносильно, с конвекцией завихренности от критической точки вдоль границы со скоростью, линейно возрастающей по x. Как будет установлено в дальнейшем (§ 5.9), при изменении компоненты скорости u на внешнем крае слоя по закону x^m толщина слоя увеличивается по x при $m < 1$; в этом случае влияние конвекции не настолько велико, чтобы препятствовать увеличению толщины слоя за счет диффузии; если же $m > 1$, то толщина слоя уменьшается с увеличением x.

Аналогичное решение можно найти и в случае установившегося осесимметричного течения (без азимутальной составляющей) в окрестности «критической точки» на плоской твердой границе (Хоман (1936б)); такое течение приближенно соответствует течению на передней части тела вращения, которое движется параллельно своей оси симметрии в жидкости, покоящейся на бесконечности. В этом случае безвихревое течение вне слоя завихренности описывается соотношениями (2.7.11) с $x = 0$ в качестве границы, а определение течения в слое завихренности остается таким же, что и в плоском случае, с небольшими числовыми отличиями. Как плоское, так и осесимметричное решения являются частными (и простыми) случаями решения общей задачи о течении в окрестности критической точки (Хоуарт (1951)), когда скорость в безвихревой области течения задается соотношениями вида (2.7.9).

(*в*) *Центробежное течение жидкости, вызванное вращающимся диском*

В первом из рассмотренных примеров течений конвекция завихренности в направлении к границе была обусловлена отсосом жидкости через границу, а во втором — наличием внешнего течения, направленного к границе; здесь мы рассмотрим третий случай, когда течение к границе вызывается действием центробежных сил на вихревой слой. Пусть плоский диск большого диаметра, помещенный в первоначально покоящуюся жидкость, приведен во вращение в своей плоскости с постоянной угловой скоростью Ω. В результате относительного движения диска и жидкости возникают вязкие напряжения, которые стремятся заставить жидкость вращаться вместе с диском. Вблизи поверхности диска невозможно существование в точности кругового движения жидкости, поскольку нет никакого внешнего радиального градиента давления для создания направленного к центру ускорения жидкости; следовательно, вблизи диска жидкость будет двигаться по расходящимся от центра диска спиралям. Это растекающееся от центра радиальное течение вблизи диска должно сопровождаться в соответствии с законом сохранения массы некоторым осевым течением, направленным перпендикулярно к плоскости диска; под действием этого течения завихренность, возникающая у границы, будет удержи-

ваться от распространения далеко во внешнюю область. Таким образом, действие вращающегося диска на жидкость подобно центробежному вентилятору, который отбрасывает в радиальных направлениях воздух и подсасывает на его место новые порции.

Результирующее установившееся течение на первый взгляд кажется весьма сложным для аналитического описания, однако благодаря тому, что окружная скорость диска линейно зависит от радиального расстояния r, зависимость радиальной скорости жидкости от r тоже оказывается линейной; вследствие этого точно так же, как и для течения в окрестности критической точки, вихревой слой имеет постоянную толщину. Как было впервые отмечено Карманом (1921), уравнения движения и соответствующие граничные условия допускают решение, в котором величины u/r, v/r и w зависят только от z; здесь (u, v, w) — компоненты скорости вдоль координатных линий (r, φ, z) соответственно в цилиндрической системе координат, в которой $r = 0$ на оси диска. С учетом указанной зависимости компонент скорости от z из уравнения (установившегося) движения в проекции на ось z следует, что выражение для давления должно иметь вид

$$\frac{p}{\rho} = \nu \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2} w^2 + F, \tag{5.5.16}$$

где F зависит только от r. Далее, поскольку вдали от диска жидкость не вращается и, по-видимому, там нет и радиального движения, то давление p при больших z не должно зависеть от r; следовательно, $F = \text{const}$. Уравнения движения в проекциях на координатные линии r и φ (см. приложение 2) записываются следующим образом:

$$\left(\frac{u}{r}\right)^2 + w \frac{d(u/r)}{dz} - \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \nu \frac{d^2(u/r)}{dz^2}, \tag{5.5.17}$$

$$\frac{2uv}{r^2} + w \frac{d(v/r)}{dz} = \nu \frac{d^2(v/r)}{dz^2}. \tag{5.5.18}$$

Дополнительно имеем уравнение сохранения массы

$$\frac{2u}{r} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

которое позволяет исключить компоненту u из (5.5.17) и (5.5.18).

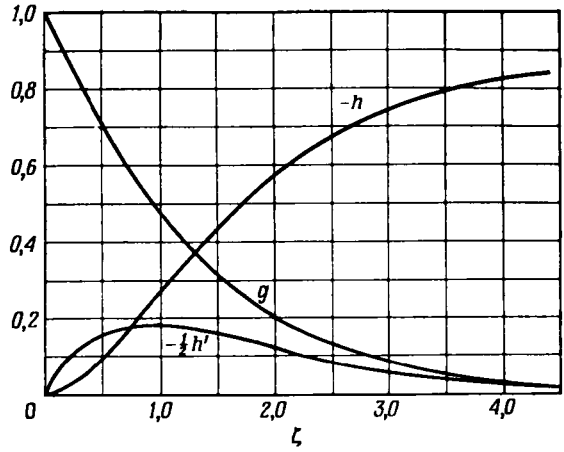
Граничные условия для решения этих уравнений — это условия прилипания

$$u = w = 0, \quad v = \Omega r \quad \text{при} \quad z = 0$$

и условия на бесконечности

$$u \to 0, \quad v \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Мы пока не будем задавать какие-либо условия на компоненту w при $z \to \infty$, так как мы ожидаем, что вдали от диска должно



Р и с. 5.5.3. Безразмерные функции, определяющие компоненты скорости течения, вызванного вращающимся диском.

быть осевое течение к диску, возникающее в результате центробежного эффекта вблизи диска; в подтверждение этого предположения заметим, что выписанные выше уравнения и граничные условия фактически полностью определяют компоненту w.

В задаче имеется только два размерных множителя ν и Ω, которые определяют масштабы скорости и длины. Введем новые переменные

$$z = \left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2} \zeta, \quad \frac{v}{r} = \Omega g(\zeta), \quad w = (\nu\Omega)^{1/2} h(\zeta), \qquad (5.5.19)$$

которые позволяют уравнения (5.5.17) и (5.5.18) записать в безразмерном виде:

$$\frac{1}{4} h'^2 - \frac{1}{2} hh'' - g^2 = -\frac{1}{2} h'', \qquad (5.5.20)$$

$$-gh' + g'h = g'' \qquad (5.5.21)$$

с граничными условиями

$$h = h' = 0, \quad g = 1 \quad \text{при} \quad \zeta = 0,$$

$$h' \to 0, \quad g \to 0 \quad \text{при} \quad \zeta \to \infty.$$

Аккуратное численное решение, удовлетворяющее этим уравнениям и граничным условиям, было получено Кокраном (1934); на рис. 5.5.3 показаны графики функций g, $-h$ и функции $-\frac{1}{2}h'$ (пропорциональной компоненте скорости u). Поведение этих функций показывает, что действие диска подобно вентилятору и сопровождается осевым движением жидкости к диску, которое препятствует распространению завихренности вдаль от диска.

Условимся определять внешнюю границу вихревого слоя как геометрическое место точек, для которых $v/\Omega r = 0{,}01$; тогда толщина слоя будет постоянной и равной $5{,}4\ (\nu/\Omega)^{1/2}$. Вне вихревого слоя осевая скорость постоянна и равна $-0{,}89\ (\nu\Omega)^{1/2}$; эта скорость притока жидкости уменьшается с уменьшением ν, поскольку при этом слой становится тоньше и меньшее количество жидкости требуется для замещения жидкости, перетекающей в радиальных направлениях. Полный поток жидкости через цилиндрическую поверхность радиуса r равен $0{,}89\pi r^2(\nu\Omega)^{1/2}$.

Один из способов проверки соответствия между полученным численным решением и экспериментальными данными состоит в измерении крутящего момента, развиваемого на обеих сторонах вращающегося тонкого диска конечного радиуса a. Строго говоря, полученное выше решение применимо к бесконечному диску, однако при условии, что толщина слоя завихренности мала по сравнению с радиусом диска, т. е. при $a\Omega^{1/2}/\nu^{1/2} \gg 1$; в этом случае влияние края диска разумно считать малым. Касательное напряжение на поверхности диска равно

$$\sigma_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} = \rho\nu^{1/2}\Omega^{3/2} r g'(0),$$

и, следовательно, крутящий момент, возникающий за счет действия жидкости на обеих сторонах диска радиуса a, равен

$$2\int_0^a \sigma_{z\varphi} 2\pi r^2\, dr = \pi a^4 \rho\nu^{1/2}\Omega^{3/2} g'(0). \qquad (5.5.22)$$

Согласно численному решению Кокрана, $g'(0) = -0{,}616$. Это значение находится в хорошем соответствии с измеренной величиной в том случае, когда $a^2\Omega/\nu$ меньше, чем 10^5 (но намного больше единицы); при значениях $a^2\Omega/\nu$, превышающих 10^5, течение становится неустойчивым и установившееся движение практически не может быть реализовано.

Если окружающая вращающийся диск жидкость на больших расстояниях от диска находится в состоянии квазитвердого вращения с угловой скоростью, скажем, Γ относительно оси вращения диска, то, по-видимому, существует установившееся течение, представимое в автомодельной форме (5.5.19), хотя для всего диапазона изменения отношения Γ/Ω точное описание поля течения получить не удается. Аналитически эта задача не очень сильно отличается от описанной выше. На больших расстояниях от диска давление теперь равно $^1/_2\rho\Gamma^2r^2$, так что мы должны положить $F = {}^1/_2\Gamma r^2$ в (5.5.16) и добавить член $-\Gamma^2$ в правую часть уравнения (5.5.17). Наконец, еще одно изменение состоит в замене граничного условия $g \to 0$ при $\zeta \to \infty$ на $g \to \Gamma/\Omega$ при $\zeta \to \infty$. Однако

численное решение уравнений оказывается теперь более сложным, особенно если Γ и Ω имеют противоположные знаки.

В том случае, когда диск и жидкость на бесконечности вращаются почти с одной и той же угловой скоростью, решение уравнений можно получить в явном виде. Это явное решение нельзя использовать для показа накопления завихренности у границы под действием конвекции, однако мы дадим краткое его описание, поскольку это решение оказывается неожиданным образом связано с предыдущим изложением. В данном случае мы, очевидно, можем положить

$$g = 1 + g_1, \quad |g_1| \ll 1, \tag{5.5.23}$$

и тогда из (5.5.21) следует, что $|h| \ll 1$. В силу первого порядка малости величин $|g_1|$ и $|h|$ уравнения (5.5.20) и (5.5.21) с учетом приведенного выше выражения для давления принимают следующий вид:

$$1 + 2g_1 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right)^2 + \frac{1}{2}h''', \qquad -h' = g_1''.$$

Легко показать, что всем граничным условиям удовлетворяет решение

$$g_1(\zeta) = \frac{\Gamma - \Omega}{\Omega}(1 - e^{-\zeta}\cos\zeta), \tag{5.5.24}$$

$$h'(\zeta) = 2\frac{\Gamma - \Omega}{\Omega}e^{-\zeta}\sin\zeta. \tag{5.5.25}$$

Покажем, что полученное решение приближенных уравнений совпадает со спиральным распределением скорости в слое Экмана вблизи твердой границы (см. § 4.4), над которой происходит течение во вращающейся жидкости. Радиальная и азимутальная компоненты скорости u и v в данном случае равны

$$u = -\frac{1}{2}r\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2}r\Omega h', \qquad v = r\Omega(1 + g_1),$$

и они соответствуют компонентам скорости $-v$ и u в плоскости границы в (4.4.16) и (4.4.15). Рассмотрим вызванное диском течение жидкости, вращающейся с угловой скоростью, близкой к угловой скорости Ω вращения диска, в системе координат, связанной с ним. В этом случае радиальная и азимутальная компоненты скорости малы по сравнению с Ωr, а компонента завихренности, параллельная оси вращения, мала по сравнению с Ω. Это в точности соответствует тем условиям, когда силы Кориолиса намного превышают силы инерции (получается так называемое геострофическое течение, о котором более подробно будет сказано в § 7.6, 7.7), и наша аппроксимация (5.5.23) равносильна предположению об отсутствии локальных изменений скорости вдоль линий тока. Условие постоянства скорости вдоль линии тока во вращающейся

системе координат было тем предположением, на котором основывался анализ в § 4.4, поэтому становится понятной идентичность полученных двух решений. Следует отметить, что чистый перенос в слое Экмана происходил в направлении, противоположном градиенту модифицированного давления; применительно к данной задаче это соответствует чистому переносу вдоль радиуса к центру диска при $\Gamma > \Omega$ и от центра диска при $\Gamma < \Omega$; величина этого переноса пропорциональна r. В соответствии с этим подобный перенос может осуществляться и в вязком слое на вращающемся диске, если имеется компенсирующая постоянная осевая компонента скорости, которая обеспечивает удаление жидкости из слоя при $\Gamma > \Omega$ и приток ее в слой при $\Gamma < \Omega$; это уже было установлено ранее.

Легко можно показать, что скорость притока или оттока жидкости из вязкого слоя, т. е. предельное значение w при $z \to \infty$, определяемое интегрированием выражения (5.5.25), в точности равняется величине, получаемой из уравнения сохранения массы и объемного потока жидкости (4.4.17) в направлении, противоположном градиенту давления в слое Экмана.

5.6. Установившееся двумерное течение в сужающемся или расширяющемся канале

Двумерное течение в области между двумя пересекающимися плоскими стенками дает другой пример взаимодействия эффектов конвекции и диффузии завихренности, возникающей на твердой границе. Стенки считаются неподвижными, а установившееся течение обусловлено наличием источника или стока жидкости в точке пересечения стенок; на практике такие точечные источники или стоки в плоском течении могут быть аппроксимированы либо небольшими отверстиями вблизи точки пересечения, через которые жидкость вытекает или втекает, либо путем соединения узкого конца канала с отсосной трубкой постоянного сечения. Наличие источника в точке пересечения стенок соответствует течению в расширяющемся канале, наличие стока дает течение в сужающемся канале. Для уравнений движения рассматриваемых течений известна система автомодельных решений в широком диапазоне значений угла между стенками и эффективных чисел Рейнольдса (впервые эти решения получили Джеффри (1915) и Гамель (1917)). Эти решения имеют сходство с решениями из § 4.6 для стационарной струи, порожденной точечным источником количества движения, так как и в том и в другом случаях компоненты скорости пропорциональны r^{-1}, где r — расстояние от особой точки в этих течениях. Как и все автомодельные решения, эти решения полезны тем, что они дают динамически возможные распределения скоростей. В реальных течениях распределение скорости будет зависеть,

конечно, от конкретных условий вверх по потоку. Может оказаться, что в некоторых условиях приводимые ниже решения являются асимптотическими, справедливыми на достаточно больших расстояниях вниз по потоку от того сечения, где в действительности заданы условия; правда, этот вопрос еще не совсем ясен.

Мы будем использовать полярные координаты (r, θ), задавая две плоские стенки условием $\theta = \mp\alpha$; компоненты скорости обозначим соответственно через (u, v). Будем искать решение для чисто радиального течения, тогда в силу уравнения сохранения массы должно быть

$$u = r^{-1}F(\theta). \tag{5.6.1}$$

Подставляя это выражение для u в два уравнения движения в полярных координатах (см. приложение 2), полагая $v = 0$ и исключая давление, находим

$$2FF' + \nu F''' + 4\nu F' = 0, \tag{5.6.2}$$

где штрихи означают дифференцирование по θ. Поскольку завихренность жидкости равна $-F'/r$, то три члена в уравнении (5.6.2) представляют вклады (со знаком минус) в скорость изменения завихренности в точке от конвекции, диффузии в окружном направлении и от радиальной диффузии соответственно. Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям прилипания

$$F = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \mp\alpha. \tag{5.6.3}$$

Кроме того, должны быть наложены условия, связанные с интенсивностью течения. Один из способов введения этих условий состоит в задании полного расхода жидкости от источника в начале координат

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} ur\,d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} F\,d\theta. \tag{5.6.4}$$

Так как некоторые из получаемых ниже решений соответствуют радиально расходящимся течениям, а другие — радиально сходящимся, то непосредственной мерой интенсивности течения может служить величина F, например значение $F_0 = u_0 r$ — один из локальных максимумов величины $|F|$; если существует только одно стационарное значение F в области $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, то $|F_0|/r$ представляет собой максимальное значение скорости жидкости на расстоянии r от начала координат. Величину $|Q|/\nu$ можно считать числом Рейнольдса для течения, а поскольку αr определяет ширину канала, то в качестве числа Рейнольдса можно взять $\alpha|F_0|/\nu$. Положим

$$\mathrm{Re} = \alpha F_0/\nu,$$

причем знак числа Re будет указывать направление течения для выбранного максимального значения $|F_0|$.

Для дальнейшего удобно ввести безразмерные переменные

$$\eta = \theta/\alpha, \qquad f = F/F_0;$$

тогда уравнение (5.6.2) запишется в виде

$$2\alpha \operatorname{Re} ff' + f''' + 4\alpha^2 f' = 0, \tag{5.6.5}$$

где теперь штрихи означают дифференцирование по η. Функция f должна удовлетворять граничным условиям

$$f = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \mp 1, \tag{5.6.6}$$

$$f' = 0 \quad \text{при} \quad f = 1. \tag{5.6.7}$$

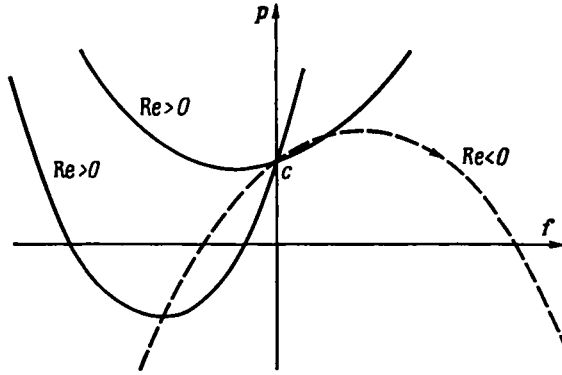
Уравнение (5.6.5) можно проинтегрировать один раз в том виде, как оно записано, и еще один раз после умножения результата на f'. Тогда

$$f'^2 = (1-f)\left\{\frac{2}{3}\alpha \operatorname{Re}(f^2+f) + 4\alpha^2 f + c\right\}, \tag{5.6.8}$$

где c — одна из констант интегрирования, а другая должна быть определена условием (5.6.7). Дальнейшее интегрирование уравнения (5.6.8) требует введения эллиптических функций, что уже выходит за рамки нашего обсуждения [1]). Обе константы интегрирования, и c, и получаемая из граничных условий (5.6.6) при дальнейшем интегрировании, зависят от угла α и числа Рейнольдса. Константа c должна быть действительной и неотрицательной, поскольку $f'^2 = c$ при $\eta = \mp 1$.

Вид решения (5.6.8) зависит от расположения нулей многочлена, стоящего в фигурных скобках в (5.6.8), который мы обозначим через $P(f)$. Если $\operatorname{Re} \geqslant 0$, то ясно, что $P(f)$ не имеет нулей при положительных значениях f. В этом случае при любом Re существует локальный максимум функции $f(\eta)$, равный 1, так что $P > 0$; кроме того, $P = c \geqslant 0$ при $f = 0$. Поскольку для $\operatorname{Re} < 0$ имеем $P \to -\infty$ при $f \to \mp\infty$, то отсюда заключаем, что квадратичная функция $P(f)$ не может обратиться в нуль в интервале $0 < f \leqslant 1$ для $\operatorname{Re} < 0$. Возможное поведение функции $P(f)$ показано на рис. 5.6.1, из которого следует, что в интервале между $f = 0$ и $f = 1$ при любых Re функция f изменяется монотонно. Это означает, что при любом направлении течения функция $f(\eta)$ может иметь только один локальный максимум. Поскольку в пределах канала функция f имеет единственный максимум, то он достигается при $\eta = 0$ в силу симметрии решения относительно этого максимума.

[1]) Более подробное обсуждение можно найти в работах Розенхеда (1940), Миллсапса и Польгаузена (1953) и Френкеля (1962).



Р и с. 5.6.1. Схематическое представление функции $P(f) = {}^2/_3\alpha\,\mathrm{Re}\,(f^2 + f) + 4\alpha^2 f + c$ для различных значений Re.

Попутно имеет смысл заметить, что здесь мы можем получить некоторое подтверждение гипотезы о течении одного направления, введенной в § 4.8 в связи с обсуждением течения между почти параллельными границами произвольной формы. В случае, когда

$$\alpha \ll 1, \qquad \alpha|\mathrm{Re}| \ll 1,$$

приближенное решение (5.6.8), удовлетворяющее граничным условиям, таково:

$$u/u_0 = f = 1 - \eta^2, \qquad c = 4,$$

т. е. имеем параболическое изменение скорости поперек канала, как и при использовании упомянутой гипотезы. Кроме того, ограничение $\alpha|\mathrm{Re}|$ $(= \alpha^2 r|u_0|/\nu) \ll 1$ в точности совпадает с найденным в § 4.8, которое вводилось для того, чтобы была справедливой аппроксимация течения одного направления в слабо изменяющемся канале.

В данной главе нас особенно будут интересовать течения при больших числах Рейнольдса. Поскольку f имеет порядок единицы, то при $|\,\mathrm{Re}\,| \gg 1$ уравнение (5.6.5) можно записать приближенно в следующем виде:

$$2\alpha\,\mathrm{Re}\,ff' + f''' = 0, \tag{5.6.9}$$

т. е. членом, выражающим диффузию завихренности в направлении течения, можно пренебречь. В соответствии с этим уравнение (5.6.8) принимает приближенную форму

$$f'^2 = \frac{2}{3}\alpha\,\mathrm{Re}\,(1 - f^2) + c\,(1 - f). \tag{5.6.10}$$

Таким образом, решение зависит только от единственного параметра α Re, а не от двух параметров α и Re.

Ниже мы обсудим поведение решения уравнения (5.6.8) в каждом из двух случаев — при $\mathrm{Re} < 0$ и $\mathrm{Re} > 0$, уделяя особое внимание течениям при больших значениях $|\mathrm{Re}|$.

Чисто сходящееся течение

Здесь мы имеем течение со сходящимися линиями тока во всем канале, причем $F_0 < 0$ и $\mathrm{Re} < 0$. В канале достигается единственное максимальное значение $|F|$, и распределение скорости симметрично относительно прямой $\theta = 0$. Согласно граничному условию (5.6.6), должно быть

$$1 = \int_0^1 \frac{df}{(1-f)^{1/2}\left\{\frac{2}{3}\alpha\,\mathrm{Re}\,(f^2+f)+4\alpha^2 f+c\right\}^{1/2}}. \qquad (5.6.11)$$

Если теперь считать величину $|\mathrm{Re}|$ достаточно большой при фиксированном значении α, то мы видим, что (5.6.11) выполняется в том случае, когда один из нулей выражения в фигурных скобках стремится к $f = 1$, т. е. интеграл будет при этом расходящимся. Следовательно, при $\mathrm{Re} \to -\infty$ необходимо иметь

$$c \to -\frac{4}{3}\alpha\,\mathrm{Re}.$$

Это асимптотическое значение c мы можем принять в качестве приближения при больших $|\mathrm{Re}|$ для выражения в фигурных скобках в (5.6.11), и при этом интеграл в (5.6.11) уже не будет расходящимся. Таким образом, если $|\mathrm{Re}| \gg 1$, то из (5.6.8) получаем соотношение

$$1-\eta \approx \left(-\frac{2}{3}\alpha\,\mathrm{Re}\right)^{-1/2} \int_0^f \frac{df}{(1-f)\,(f+2)^{1/2}} =$$

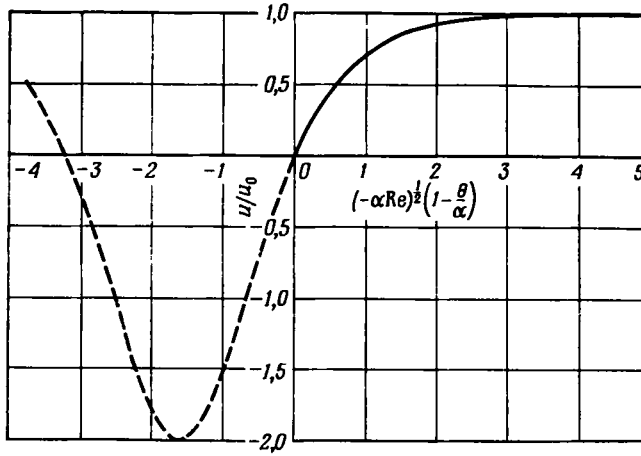
$$= \left(-\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Re}\right)^{-1/2} \left\{\mathrm{arth}\left(\frac{f+2}{3}\right)^{1/2} - \mathrm{arth}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\right\}$$

и приближенное выражение для скорости в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$

$$\frac{u}{u_0} = \frac{F}{F_0} = f = 3\,\mathrm{th}^2\left\{\left(-\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Re}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\theta}{\alpha}\right) + \mathrm{arth}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\right\} - 2. \qquad (5.6.12)$$

Отсюда заключаем, что при больших числах Рейнольдса существует чисто сходящееся течение, для которого радиальная скорость приближенно не зависит от угла θ и равна значению скорости u_0 во всей области течения в канале, за исключением прилегающих к стенкам слоев, определяемых условием

$$O(\alpha - |\theta|) = \left(-\frac{\mathrm{Re}}{\alpha}\right)^{-1/2} = \left(\frac{r|u_0|}{\nu}\right)^{-1/2}. \qquad (5.6.13)$$



Р и с. 5.6.2. Течение в сужающемся канале при больших числах Рейнольдса.

Вне этих слоев течение безвихревое и возникающая на стенках завихренность накапливается в них. Поскольку скорость всюду направлена вдоль радиуса, то компонента, нормальная к ближайшей стенке, будет направлена в ее сторону, так что в данном случае эффект конвекции противоположен диффузии завихренности от стенки и его действие достаточно сильно, чтобы вызвать уменьшение толщины слоя с увеличением расстояния в направлении течения.

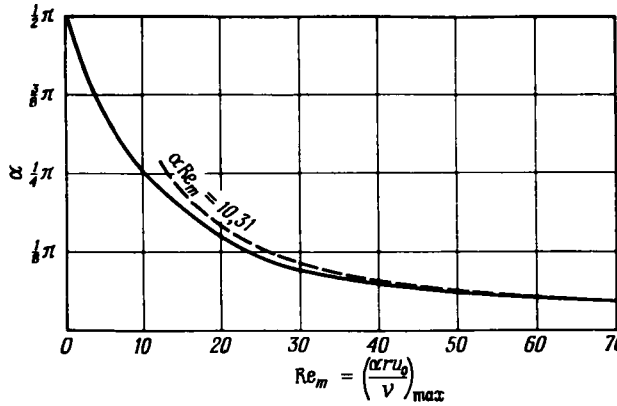
Распределение скорости поперек канала показано на рис. 5.6.2. Параметры Q, ν и Re связаны между собой:

$$Q \approx 2\alpha u_0 r = 2\alpha F_0 = 2\nu \,\mathrm{Re}.$$

Следует заметить, что профиль скорости (5.6.12) можно продолжить в область значений θ, больших α, соответствующую расходящемуся течению со скоростью, принимающей еще одно нулевое значение при

$$\frac{\theta}{\alpha} = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\alpha \,\mathrm{Re}\right)^{-1/2} \operatorname{arth}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2},$$

как это показано штриховой линией на рис. 5.6.2. Это второе нулевое значение скорости u соответствует другому возможному положению границы канала при ином значении угла α. По-видимому, приближенно однородное втекающее течение в широкой центральной части канала может быть ограничено узкой областью потока, вытекающего вдоль любой стенки. Дальнейшее продолжение профиля скорости приведет к новому сходящемуся течению с распределением скорости, в точности соответствующим области $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$.



Р и с. 5.6.3. Зависимость между α и максимальным значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = (\alpha r u_0/\nu)_{\max}$, для которого возможно чисто расходящееся течение. В области выше кривой чисто расходящийся поток невозможен; в области ниже кривой возможен.

Чисто расходящееся течение

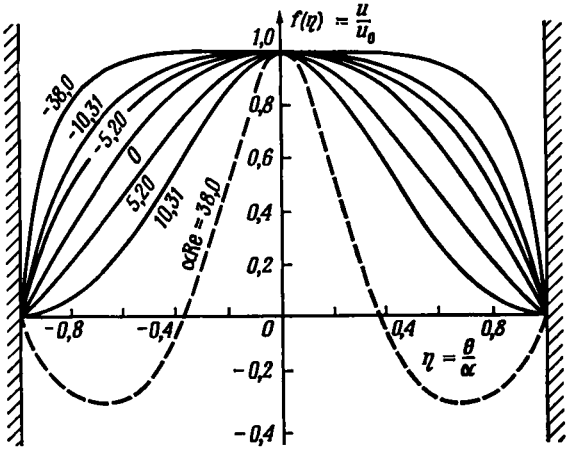
Рассмотрим теперь течение с расходящимися линиями тока при $|\theta| < \alpha$, $F_0 > 0$, $\mathrm{Re} > 0$. Как и в предыдущем случае, имеется единственное максимальное значение $|F|$, и распределение скорости симметрично относительно осевой линии $\theta = 0$. Соотношение (5.6.11) должно выполняться и здесь, но получаемые из него следствия совершенно иные. В фигурных скобках в (5.6.11) все члены теперь положительные и ясно, что при произвольном выборе α и Re невозможно выполнение этого соотношения. В нашем распоряжении имеется константа c, на которую наложено условие $c \geqslant 0$; максимальное значение числа Рейнольдса, скажем Re_m, при котором может быть выполнено соотношение (5.6.11) для заданного значения α, очевидно, достигается при $c = 0$ и определяется условием

$$\left(\frac{2}{3}\alpha\,\mathrm{Re}_m\right)^{1/2} = \int_0^1 \frac{df}{\{f(1-f)(f+1+6\alpha\,\mathrm{Re}_m^{-1})\}^{1/2}}. \qquad (5.6.14)$$

Этот интеграл сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода, и численные значения для заданных α и Re могут быть найдены по таблицам. На рис. 5.6.3 показана полученная на основе (5.6.14) зависимость между α и Re, которая дает ограничение на интенсивность чисто расходящегося течения в канале при заданном угле α.

Для $\mathrm{Re}_m \gg 1$ из (5.6.14) следует

$$\alpha\,\mathrm{Re}_m \approx \frac{3}{2}\left\{\int_0^1 \frac{df}{f^{1/2}(1-f^2)^{1/2}}\right\}^2 = 10{,}31, \qquad (5.6.15)$$



Р и с. 5.6.4. Симметричные профили радиальной скорости в расширяющемся канале для различных значений $\alpha\,\mathrm{Re} = \alpha^2 r u_0/\nu$. Положительные значения $\alpha\mathrm{Re}$ соответствуют расходящемуся течению вблизи оси канала.

профиль скорости симметричен относительно плоскости $\theta = 0$. Все показанные на рис. 5.6.4 решения можно продолжить в область $\eta > 1$; продолжить можно также и те из них, которые имеют второй нуль производной функции f'; в этом случае функцию f можно интерпретировать как решение для комбинированного втекающего и вытекающего течения в канале, ширина которого выбрана в соответствии с положением второго нуля функции f. Один пример такого комбинированного течения, имеющего широкий сходящийся участок с почти постоянной скоростью, который примыкает к узкому расходящемуся участку, был получен просто продолжением профиля (5.6.12) в область значений θ, лежащих за «стенкой» $\theta = \alpha$ (рис. 5.6.2). Другой пример показан штриховой линией на рис. 5.6.4; это течение получено путем продолжения решения при $\alpha\mathrm{Re} = 5{,}20$ в область значений $\eta > 1$ и путем уменьшения масштаба по оси абсцисс так, чтобы иметь второй нуль функции f в точке $\eta = 1$; для определения указанной на рис. 5.6.4 величины $\alpha\mathrm{Re}$ было использовано соответствующее измененное значение угла α. (Этот способ позволяет выяснить, каким образом можно построить последовательность решений для $\alpha\mathrm{Re}$, превышающих критическое значение 10,31.)

В области значений η за вторым нулем функции f решения повторяются и соответствуют чередующимся областям вытекающих и втекающих течений; профили всех вытекающих течений идентичны; то же справедливо и для втекающих течений. Каждое из этих вытекающих или втекающих течений в точности совпадает с чисто

вытекающим или чисто втекающим течениями для подходящего значения $\alpha\mathrm{Re}$ (при $|\mathrm{Re}| \gg 1$), рассмотренными выше.

Ясно, что возможность найти комбинированное течение с нулевыми значениями f в точках $\eta = \mp 1$ возрастает по мере увеличения параметра $\alpha\mathrm{Re}$; поэтому для заданного (большого) значения параметра $\alpha\mathrm{Re}$ существует несколько симметричных решений. Например, при $\alpha\mathrm{Re} = 114$ было установлено, что существуют три возможных симметричных распределения скоростей с вытекающим течением в центральной части канала: 1) одно вытекающее течение и два втекающих, 2) три вытекающих и два втекающих, 3) три вытекающих и четыре втекающих. Число возможных распределений скорости увеличивается с увеличением $\alpha\mathrm{Re}$, правда, по непростому закону. Аналогичные замечания справедливы и для несимметричных распределений скорости с нечетным числом нулей функции f.

Интересно выяснить следующий практически важный вопрос: что произойдет, если жидкость течет в канале таким образом, что угол между (криволинейными) стенками увеличивается постепенно от некоторого малого начального значения на входе, удовлетворяющего условию $\alpha\mathrm{Re} \ll 1$? Во входном участке канала развивается параболический профиль скорости, и можно ожидать, что по мере увеличения эффективного значения αQ, а следовательно и $\alpha\mathrm{Re}$, с расстоянием вниз по потоку профиль скорости будет последовательно принимать конфигурации, подобные приведенным на рис. 5.6.4 для интервала $0 \leqslant \alpha\mathrm{Re} \leqslant 10{,}31$. Когда локальное значение параметра $\alpha\mathrm{Re}$ достигает и превосходит величину 10,31, чисто расходящееся течение становится невозможным и можно ожидать появления области возвратного (втекающего) течения вблизи одной или обеих стенок.

Как показывают имеющиеся эксперименты, подобная этой картина действительно наблюдается, хотя расходящееся течение в канале приобретает неустойчивый характер и выявить установившееся течение с возвратными участками вблизи стенок становится трудно.

Имея в виду основную цель данной главы, важно подчеркнуть следующие свойства полученных выше семейств автомодельных решений. Вполне ясно, что существует значительное различие между чисто сходящимся и чисто расходящимся течениями в канале, или, что равносильно, между почти параллельным течением вблизи твердой стенки с непрерывным *ускорением* всех жидких элементов и соответственно с их *замедлением*. В течении с непрерывным ускорением завихренность из потока переносится к стенке, а завихренность, возникающая у стенки, локализуется в слое, примыкающем к стенке, толщина которого стремится к нулю при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. В обширной области течения вне этого слоя распределение ско-

рости имеет форму, которую можно было бы предсказать из анализа невязкой жидкости.

Однако в случае течения с непрерывным замедлением имеется критическое число Рейнольдса, при превышении которого уже не существует автомодельного решения, для которого скорость жидкости была бы всюду направлена от источника; действительно, мы нашли автомодельные решения, в которых имеются области возвратного течения. В этом состоит типичное и практически важное свойство всех течений с расходящимися линиями тока; характерно также (это подтверждается при численном исследовании трехмерных течений в расходящихся каналах), что условие отсутствия возвратного движения жидкости в расходящемся течении имеет форму неравенства

$$\alpha \operatorname{Re} < O(10),$$

где число Рейнольдса основано на локальном максимуме скорости и локальной ширине рассматриваемого сечения канала. Если интенсивность источника достаточно велика, то возможные решения будут содержать большое число идентичных областей вытекающих и втекающих течений. Ширина каждой области автомодельного течения настолько мала, что эффекты вязкости имеют большое значение. Таким образом, в этом случае распределение скорости никак нельзя предсказать на основе анализа течения невязкой жидкости.

5.7. Пограничные слои

В предыдущих разделах было введено понятие тонкого слоя, прилегающего к твердой границе, внутри которого происходит быстрое изменение завихренности в результате комбинированного действия вязкой диффузии и конвекции и вне которого завихренность равна нулю (или отлична от нуля и изменяется весьма медленно). Теперь мы можем приступить к обсуждению более общей идеи *пограничного слоя*, представляющего собой тонкий слой, внутри которого важно влияние вязкости, если даже число Рейнольдса течения велико.

Мы проанализировали развитие течения из состояния покоя в результате движения тела в бесконечной жидкости со скоростью, которая становится постоянной; при этом было отмечено, что твердая граница действует на жидкость как источник завихренности, которая диффундирует затем от стенки за счет вязкости и переносится путем конвекции вместе с жидкостью вниз по потоку (в общем случае завихренность изменяется также из-за вращения и растяжения вихревых линий, однако для наших целей этими изменениями завихренности можно пренебречь). По мере увеличения числа Рейнольдса в таком течении влияние конвекции в любой

точке течения становится более значительным. Мы видели также, что в некоторых течениях при наличии твердых границ та область, внутри которой вязкость оказывает какое-либо влияние на течение, ограничена при $\nu \to 0$ тонким слоем, лежащим на границе. К числу таких течений относятся, например, течение, вызванное колебанием плоской стенки (§ 4.3), течение в окрестности критической точки на плоской стенке (§ 5.5) и сходящееся течение в канале (§ 5.6). Эти и многие другие частные случаи течений подтверждают важную гипотезу, впервые выдвинутую Прандтлем (1905) и состоящую в следующем: для довольно широкого диапазона условий эффекты вязкости (такие, как напряжения и силы, вызванные вязкостью, диффузия завихренности и др.) являются значительными и сравнимыми по величине с конвекцией и другими проявлениями сил инерции в некоторых слоях, прилегающих к твердым границам, или в некоторых других слоях, толщина которых стремится к нулю по мере стремления числа Рейнольдса к бесконечности, а вне этих слоев указанные эффекты вязкости малы.

После того как была выдвинута эта гипотеза, она была применена к весьма различным классам течений. Общего математического доказательства существования пограничного слоя нет, однако гипотеза подтверждается многочисленными экспериментальными наблюдениями конкретных течений, а также несколькими известными частными решениями полных уравнений движения жидкости. Рассмотренный в § 5.6 случай расходящегося течения в канале служит полезным предостережением о неприменимости гипотезы пограничного слоя ко всем течениям. В оставшейся части этой главы мы выясним ряд простых положений о тех течениях, к которым указанная гипотеза не может быть применена, а также обсудим некоторые приемы, полезные при ее использовании в конкретных задачах.

Гипотеза пограничного слоя помогает примирить, с одной стороны, интуитивные представления о том, что малая вязкость ν не оказывает какого-либо влияния на бóльшую часть поля течения, и, с другой стороны, тот факт, что, сколь бы малой ни была величина ν, на твердой границе должно выполняться условие прилипания; и действительно, такое согласование было основной целью исследования Прандтля и явилось важным рубежом в развитии механики жидкости. Пограничный слой — это по существу слой, в котором происходит переход от нулевого значения скорости жидкости на границе к конечному значению, которое соответствует в определенном смысле (о чем будет сказано позже) течению невязкой жидкости.

Тот факт, что пограничный слой тонок по сравнению с размерами тела, позволяет ввести некоторые аппроксимации в уравнениях движения, что также было сделано Прандтлем; тем самым появляет-

ся возможность в некоторых случаях определить течение внутри пограничного слоя. С целью выяснения этих аппроксимаций рассмотрим в качестве границы плоскую стенку ($y = 0$), а течение будем считать двумерным. Толщина пограничного слоя (определяемая некоторым подходящим способом) всюду предполагается малой по сравнению с расстоянием вдоль границы, на котором происходит заметное изменение скорости жидкости. Поперек пограничного слоя скорость изменяется от нулевого значения на границе до некоторого конечного значения, характерного для невязкой жидкости; кроме того, производные по координате y любой из рассматриваемых величин в потоке в общем случае много больше производных тех же величин по координате x. Таким образом, для точек внутри пограничного слоя мы можем использовать следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|;$$

следовательно, уравнение движения в проекции на ось x принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5.7.1}$$

Поскольку нормальная компонента скорости v также должна быть мала, то из уравнения сохранения массы, а именно из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5.7.2}$$

заключаем, что компонента v и толщина пограничного слоя имеют одинаковый порядок малости [1]); отсюда следует, что ни одним членом в левой части уравнения (5.7.1) нельзя пренебречь.

Различие между уравнением пограничного слоя (5.7.1) и соответствующим уравнением движения для невязкого течения вне пограничного слоя состоит в том, что в уравнении (5.7.1) оставлен член $\nu\partial^2 u/\partial y^2$, который выражает вязкую диффузию поперек пограничного слоя. По определению пограничного слоя в нем происходит значительная вязкая диффузия завихренности, так что для точек внутри пограничного слоя член $\nu\,\partial^2 u/\partial y^2$ в (5.7.1) должен быть сравним по величине с инерционными членами в левой части этого уравнения. Если величина $u\,\partial u/\partial x$ является характерной для инерционных членов в левой части уравнения (5.7.1), то мы можем считать, что при больших числах Рейнольдса основного потока область пограничного слоя определяется по порядку величин оценкой

$$O\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 1.$$

[1]) Эта оценка не совсем ясна ввиду различной размерности указанных величин, однако вскоре для нее будет дана более точная формулировка.

Далее, если U_0 — характерное значение для скорости u рассматриваемого течения, а L — характерный линейный размер в направлении оси x, на котором происходит заметное изменение скорости u, то порядок величины $u\,\partial u/\partial x$ будет равен U_0^2/L. Если через δ_0 обозначить малую длину, характеризующую толщину пограничного слоя [1]), то порядок величины $\nu\,\partial^2 u/\partial y^2$ будет равен $\nu U_0/\delta_0^2$. Выписанная выше оценка принимает теперь вид

$$O\left(\frac{\delta_0^2}{L^2}\mathrm{Re}\right)=1, \quad \text{где} \quad \mathrm{Re}=\frac{U_0 L}{\nu}. \tag{5.7.3}$$

Число Рейнольдса в данном случае соответствует основному течению, а поскольку оценки, лежащие в основе теории пограничного слоя, улучшаются при $\mathrm{Re}\to\infty$, то, очевидно, (5.7.3) можно переписать как

$$\delta_0/L \sim \mathrm{Re}^{-1/2} \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\to\infty. \tag{5.7.4}$$

Тот факт, что толщина пограничного слоя изменяется как $\nu^{1/2}$ при малых ν, уже известен из рассмотренных ранее частных случаев течений. Эта зависимость основана исключительно на соображениях о размерностях величин, которые приводят к весьма общему результату; как мы уже видели раньше, при некоторых условиях эту зависимость можно представить иначе: расстояние, на которое проникает диффузия завихренности или скорости, имеет порядок $(\nu t)^{1/2}$, что справедливо для слоя, развивающегося к моменту времени t (в нашем случае время эквивалентно отношению L/U_0).

С учетом этой оценки порядка величины δ_0 и, следовательно, порядка величины производных по y из (5.7.2) заключаем, что порядок компоненты v равен $U_0\,\mathrm{Re}^{-1/2}$. Теперь мы располагаем всем необходимым для вывода уравнения движения в проекции на ось y. В этом уравнении все члены, кроме одного, очевидно, малы, и мы получаем приближенное соотношение

$$\partial p/\partial y = 0; \tag{5.7.5}$$

точнее говоря, $\partial p/\partial y$ имеет тот же порядок малости, что и δ_0. Таким образом, давление поперек пограничного слоя приближенно можно считать постоянным; в том случае, когда известно изменение давления p по x вне пограничного слоя (полученное либо путем решения уравнений невязкого течения вне пограничного слоя, либо экспериментально), член с давлением в (5.7.1) можно считать заданным. Уравнения (5.7.1) и (5.7.2) позволяют тогда определить компоненты скорости u и v во всем пограничном слое.

---

[1]) Толщина пограничного слоя в общем случае изменяется с расстоянием вдоль границы, и величину δ_0 следует считать некоторым средним значением.

Граничные условия состоят, во-первых, из условий на стенке

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{5.7.6}$$

и, во-вторых, из требования, чтобы пограничный слой гладко сопрягался с областью внешнего невязкого течения. Если через U обозначить компоненту скорости вдоль x на внешней границе слоя и учесть, что величина u медленно изменяется по y (так что невозможность точно указать внешнюю границу пограничного слоя не имеет существенного значения), то второе условие можно записать в виде

$$u(x, y, t) \to U(x, t) \quad \text{при} \quad y/\delta_0 \to \infty. \tag{5.7.7}$$

При рассмотрении пограничного слоя отдельно от внешнего течения величина U, подобно давлению p, должна быть задана; эти две величины удовлетворяют приближенному уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5.7.8}$$

описывающему невязкое течение в проекции на ось x в области сразу вне пограничного слоя (где v мало, а членом $v\,\partial U/\partial y$ можно пренебречь); для установившегося течения уравнение (5.7.8) эквивалентно теореме Бернулли, т. е. утверждению, что $p/\rho + {}^1/_2U^2$ постоянно вдоль линии тока на внешней границе пограничного слоя.

Третье граничное условие необходимо для описания того, каким образом происходит конвекция завихренности внутри пограничного слоя от удаленных участков его вверх по потоку; это означает, что функция $u(y)$ должна быть задана при некотором значении x. И наконец, если движение неустановившееся, то в момент $t = 0$ должна быть задана $u(x, y)$.

Асимптотическая зависимость (5.7.4) для δ_0 может быть использована для преобразования уравнений пограничного слоя таким образом, чтобы исключить из них число Рейнольдса (или коэффициент вязкости). Для перехода к более удобной системе координат, в которой горизонтальные размеры и скорости измеряются в относительных единицах, а толщина пограничного слоя принимается в качестве единицы измерения, мы определим следующие безразмерные величины:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \mathrm{Re}^{1/2}\frac{y}{L}, \quad t' = \frac{tU_0}{L}, \tag{5.7.9}$$

$$u' = \frac{u}{U_0}, \quad v' = \mathrm{Re}^{1/2}\frac{v}{U_0}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2},$$

где p_0 — значение давления p в некоторой условно выбранной точке течения. В этих новых переменных *полная* система уравнений движения в проекциях на оси x и y, а также уравнение

сохранения массы принимают вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v'}{\partial t'}+u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \qquad (5.7.10)$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0.$$

Если мы теперь предположим, что Re велико и что безразмерные величины u', v', p' вместе с их производными по x', y', t' остаются конечными и ненулевыми для рассматриваемых значений x', y', t' при $\mathrm{Re}\to\infty$ (это соответствует гипотезе пограничного слоя), то получим систему приближенных уравнений

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$
$$0=-\frac{\partial p'}{\partial y'}, \qquad (5.7.11)$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0,$$

которые становятся точными в пределе при $\mathrm{Re}\to\infty$.

Эти уравнения представляют собой просто преобразованные уравнения (5.7.1), (5.7.5) и (5.7.2). Уравнения (5.7.11) не содержат в явном виде число Рейнольдса; оно не будет содержаться также и в граничных условиях, выраженных с использованием введенных выше безразмерных величин, а следовательно, и в решении уравнений. Роль числа Рейнольдса сводится лишь к определению толщины пограничного слоя, поэтому пограничные слои, соответствующие различным числам Рейнольдса, но одним и тем же граничным условиям (в безразмерной форме), будут идентичными в масштабе толщины δ_0.

Для простоты рассуждений мы считали пограничный слой двумерным, прилегающим к твердой плоской стенке. В действительности ни одно из этих ограничений не является существенным. Если основное течение трехмерное, то пограничные слои образуются вблизи твердых стенок, и в общем случае в таких пограничных слоях вектор скорости при перемещении вдоль нормали к стенке будет изменять свое направление, оставаясь почти параллельным стенке. И снова уравнения, описывающие течение в пограничном слое, можно будет преобразовать так, чтобы исключить из них число Рейнольдса. Если пограничный слой формируется на искривленной стенке, то в этом случае естественно заменить систему прямолинейных координат системой криволинейных ортогональных координат x, y, так, чтобы координатная линия $y=0$ совпадала с криволинейной границей. При этом кривизна стенки

войдет в полное уравнение движения, однако можно показать (и это совершенно очевидно), что влияние кривизны стенки $\varkappa$ в приближенных уравнениях для двумерного течения приведет лишь к небольшому изменению уравнения (5.7.5), которое запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \varkappa u^2. \tag{5.7.12}$$

Если кривизна $\varkappa$ конечна, то полное изменение давления поперек пограничного слоя имеет порядок δ_0 и им можно пренебречь, так что уравнение (5.7.8), связывающее давление в пограничном слое и скорость U на внешней его границе, остается справедливым.

Более того, для существования пограничного слоя излишне требовать, чтобы стенка была твердой, поскольку в приведенных выше рассуждениях влияние твердой стенки проявляется лишь в виде граничного условия (5.7.6) (правда, наличие твердой стенки — одна из наиболее общих причин формирования пограничного слоя; высказывая гипотезу пограничного слоя, Прандтль имел в виду это обстоятельство). В общем случае пограничный слой будет возникать на любой границе, граничные условия на которой не соответствуют в точности распределению скорости, получаемому из уравнений движения невязкой жидкости. Так, например, пограничный слой может существовать на «свободной» поверхности, на которой касательные напряжения обращаются в нуль (§ 5.14). В области между двумя приближенно невязкими движущимися жидкостями может также существовать тонкий слой, в котором значительны эффекты вязкости и для обеих границ которого применимы граничные условия, подобные (5.7.7). Переходный слой между двумя однородными параллельными потоками с разными скоростями (§ 4.3) оказывается таким же разделяющим или свободным «пограничным» слоем, хотя для него нет надобности прибегать к аппроксимации, поскольку те члены, которыми пренебрегают в уравнениях пограничного слоя, оказываются здесь тождественно равными нулю.

При определенных условиях, сводящихся в основном к требованию, чтобы были велики соответствующие числа Рейнольдса, к свободным «пограничным» слоям можно отнести также струи и следы. Очевидно, что должен существовать по крайней мере один отделившийся слой завихренности, который распространяется вниз по потоку от движущегося в жидкости твердого тела; действительно, возникшая на границе тела завихренность сносится вниз по потоку и в конечном счете срывается с кормовой части тела; если поперечный градиент завихренности в прилегающем к границе слое достаточно велик, он будет большим и в отделившемся вниз по потоку слое или следе, так что там будет важна вязкая диффузия завихренности; во всяком случае, на некотором расстоянии вниз по потоку от тела она будет существенна до тех

пор, пока не произойдет значительное расширение отделившегося вихревого слоя.

В остальных разделах данной главы будут кратко описаны свойства пограничных слоев, а также будут продемонстрированы основные черты пограничных слоев при больших числах Рейнольдса для некоторых частных случаев течения. Исследования пограничных слоев столь же обширны, сколь и важны. Однако мы можем дать здесь лишь некоторое введение в них. Для простоты обсуждения ограничимся лишь двумерными или осесимметричными течениями; для этих течений вращение вихревых линий не происходит, а растяжение вихревых линий в случае осесимметричного течения особенно простое. Сказанное выше не должно оставить у читателя впечатление, что упомянутые течения наиболее интересны и что только они поддаются аналитическому решению.

5.8. Пограничный слой на плоской пластине

Одно из простых течений в установившемся двумерном пограничном слое наблюдается в случае, когда плоская пластина очень малой толщины, имеющая длину l и значительно большую чем l ширину, помещена в установившийся однородный поток жидкости (имеется в виду поток, скорость которого была бы постоянной в отсутствие пластины); поток направлен параллельно длине пластины и перпендикулярно ее кромке. Это течение особенно важно потому, что оно позволяет проводить стандартное сравнение величины поверхностного трения на плоских тонких телах, таких, как крылья самолетов, расположенные по потоку. В качестве удобной идеализации реальных условий будем считать толщину плоской пластины равной нулю. Таким образом, при отсутствии каких-либо эффектов вязкости пластина не будет вносить возмущений в поток и скорость жидкости будет постоянной, равной, скажем, U. Для реальной жидкости, в которой должно выполняться условие прилипания на пластине, жидкость вблизи пластины замедляется, или, что равносильно, происходит диффузия завихренности от пластины, а в результате этого формируется пограничный слой на пластине, в котором скорость жидкости отличается от U, а завихренность не равна нулю. В результирующем установившемся состоянии толщина пограничного слоя будет мала по сравнению с l при $lU/\nu \gg 1$. Вследствие замедления жидкости вблизи пластины линии тока вне пограничного слоя отклоняются в поперечном направлении; если рассматривать область невязкого течения, то картина будет такой, как если бы пластина имела некоторую толщину. Однако при условии, что толщина пограничного слоя всюду мала, будут малы и возмущения в распределении скорости в области невязкого течения и ими можно пренебречь в первом приближении

В этом приближении скорость на внешней границе пограничного слоя постоянна и равна U. Аналогичным образом давление на внешней границе пограничного слоя будет постоянным, и, следовательно, оно будет приближенно постоянным во всем пограничном слое; таким образом, уравнения пограничного слоя (5.7.1) и (5.7.2) с учетом предположения об установившемся характере течения приводятся к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.8.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{5.8.2}$$

Если положить $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, то второе из этих уравнений будет выполняться тождественно и тогда уравнение (5.8.1) будет содержать только одну зависимую переменную (ψ). Поместим начало координат на передней кромке пластины, так что задней кромке пластины будет соответствовать $x = l$, $y = 0$; граничные условия на обеих сторонах слоя

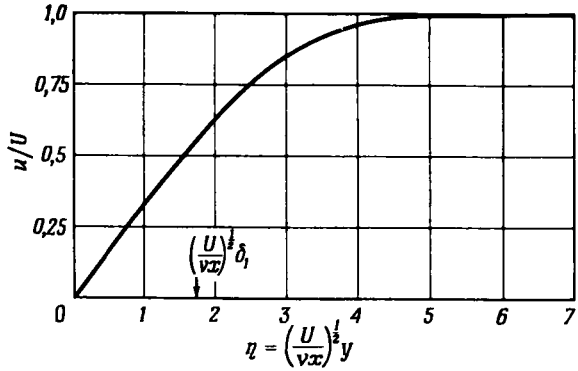
$$\left.\begin{array}{ll} u=v=0 & \text{при } y=0, \\ u\to U & \text{при } y/\delta_0\to\infty \end{array}\right\} \text{ для } 0\leqslant x\leqslant l,$$

а граничное условие для набегающего потока

$$u = U \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{для всех } y.$$

Итак, получена полная система уравнений и граничных условий.

Местная толщина пограничного слоя, скажем δ, вновь определяемая некоторым подходящим способом, зависит здесь от x. Очевидно, что толщина δ должна увеличиваться с расстоянием x от передней кромки пластины, так как сила трения, порождаемая каждым дополнительным участком поверхности пластины, вносит вклад в потерю количества движения жидкости, проходящей над этим участком поверхности. Поскольку время, в течение которого жидкая частица проходит пластину при движении с постоянной скоростью U, равно x/U, то из обычных соображений о диффузии завихренности приходим к заключению, что локальная толщина пограничного слоя увеличивается по x как $(\nu x/U)^{1/2}$. Имеется и другой способ получения этого важного вывода. Для этого следует заметить, что $\delta(x)$ не может зависеть от длины l, поскольку распределение скорости в пограничном слое в точке x определяется лишь вязкой диффузией в направлении y и конвекцией завихренности от лежащей *вверх по потоку* области течения и не может зависеть от существования твердой границы вниз по потоку (если не учитывать влияние ее на распределение скорости по внешней границе пограничного слоя; в данном случае такого влияния нет). Кроме того, из (5.7.4) следует, что величина δ_0, характеризующая



Р и с. 5.8.1. Распределение скорости в пограничном слое на плоской пластине.

многочисленные измерения распределения скорости u в пограничном слое на гладкой плоской пластине малой толщины, расположенной вдоль потока, которые показали хорошее соответствие с распределением скорости на рис. 5.8.1. Результаты измерений дали также хорошее подтверждение параболического роста толщины пограничного слоя в соответствии с (5.8.3).

Одно из полезных свойств полученного решения состоит в том, что оно позволяет оценить касательную силу, действующую со стороны жидкости на пластину. Сила трения на единицу площади пластины на расстоянии x от ее передней кромки равна

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho U^2 \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/2} f''(0) = 0{,}33\rho U^2 \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/2} \qquad (5.8.7)$$

в соответствии с численным решением; изменение этой силы по закону $x^{-1/2}$ обусловлено, конечно, увеличением толщины пограничного слоя по закону $x^{1/2}$, поскольку форма профиля скорости не зависит от x. Таким образом, сопротивление, оказываемое жидкостью с обеих сторон пластины единичной ширины и длины l, равно

$$D = 2\int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dx = 1{,}33\rho U^2 l \left(\frac{Ul}{\nu}\right)^{-1/2}. \qquad (5.8.8)$$

Эта оценка общего сопротивления трения приближенно применима к любому тонкому двумерному телу длины l, расположенному вдоль потока (§ 5.11).

Можно получить также и численное значение толщины пограничного слоя. Из рис. 5.8.1 видно, что величина u/U достигает значения 0,99 при $y = 4{,}9\,(\nu x/U)^{1/2}$. В качестве менее произволь-

ной меры толщины пограничного слоя служит *толщина вытеснения*, определяемая как

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \tag{5.8.9}$$

Толщину вытеснения можно представить себе как расстояние, на которое смещаются линии тока в поперечном направлении на внешней границе пограничного слоя вследствие замедления жидкости в пограничном слое. Согласно численному решению, имеем

$$\delta_1 = 1{,}72 \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2} \tag{5.8.10}$$

(см. рис. 5.8.1). Отсюда, например, при $U = 100$ см/сек и $x = 10$ см получаем значения δ_1, равные 0,21 и 0,06 см для воздуха и воды соответственно при нормальной температуре.

Следует напомнить, что приближенные уравнения пограничного слоя справедливы только при больших числах Рейнольдса, построенных по линейному размеру твердой границы, и при условии, что величина $\partial u/\partial x$ мала по сравнению с $\partial u/\partial y$. Эти условия выполняются для плоской пластины длины l при $Ul/\nu \gg 1$ с возрастающей точностью при $x \to \infty$ во всей области течения, за исключением окрестности передней кромки пластины при $x = 0$. В этой малой окрестности число Рейнольдса Ux/ν имеет порядок единицы, величина δ, определенная по (5.8.3), имеет порядок величины x, а изменения величин в направлении x не меньше соответствующих изменений в направлении y. В силу этого мы не можем ожидать, чтобы описанное выше течение имело место на расстояниях порядка ν/U от передней кромки пластины. Лучшие приближения для течения в этой области можно найти в специальных руководствах [1]).

Можно также получить улучшенное приближение для описания течения при значениях x, для которых $Ux/\nu \gg 1$, если учесть влияние пограничного слоя на распределение скорости вне его. При получении первого приближения для течения в пограничном слое мы пренебрегали этим влиянием и считали, что на внешней границе пограничного слоя скорость U не зависит от x. В этом приближении было установлено, что на плоской пластине образуется пограничный слой с толщиной вытеснения, определяемой выражением (5.8.10). Мы, очевидно, получим лучшее приближение для течения в невязкой области, если будем искать безвихревое обтекание параболического цилиндра полуширины $1{,}72\ (\nu x/U)^{1/2}$, помещенного в поток со скоростью U далеко впере-

[1]) См. монографию Rosenhead L. (ed.), Laminar Boundary Layers, Oxford University Press, 1963, в которой можно найти дополнительную общую информацию по материалу данной главы. [См. также книгу: Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, М., 1962.— *Ред.*]

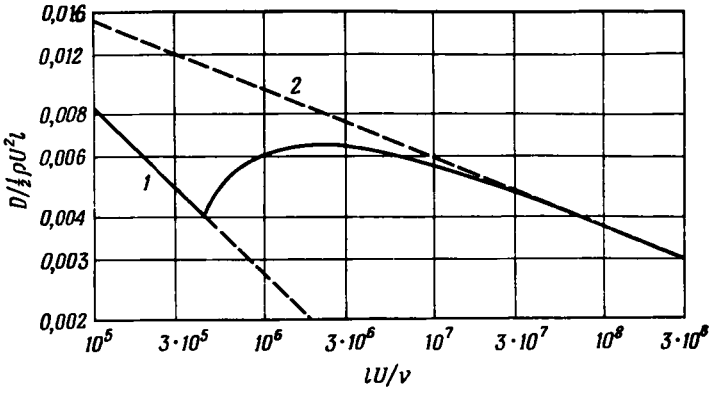
ди цилиндра. Соответствующее распределение касательной скорости на поверхности цилиндра можно будет тогда использовать (при новом интегрировании уравнений пограничного слоя) в качестве распределения скорости, к которому стремится u при $y/\delta \to \infty$.

Имеется очевидное сходство между рассмотренным выше установившимся течением вдоль плоской пластины, для которого пограничный слой растет как $(\nu x/U)^{1/2}$ при неизменном профиле скорости, и неустановившимся течением, возникающим при внезапном приведении в движение со скоростью U бесконечной пластины в ранее покоящейся жидкости. В последнем течении, описанном в § 4.3, «пограничный слой» растет как $(\nu t)^{1/2}$, а распределение скорости остается неизменным при всех t. Рэлей высказал предположение, что зависящее от времени течение для бесконечной пластины можно рассматривать как приближение к установившемуся обтеканию полубесконечной пластины, если t заменить на x/U (в обоих случаях оси координат фиксированы относительно пластины); это приближение иногда оказывается приемлемым (за неимением более точных решений) и в других задачах обтекания полубесконечных тел, для которых скорость вне пограничного слоя постоянна. Указанная аналогия между двумя видами течений чисто качественная, как это можно увидеть из сравнения сил трения на единицу площади плоской пластины, а именно: для бесконечной пластины сила трения равна $0{,}56\rho U^2\,(U^2t/\nu)^{-1/2}$, а для полубесконечной пластины она равна $0{,}33\rho U^2\,(Ux/\nu)^{-1/2}$. Различие между этими двумя течениями можно установить с использованием уравнения движения для течения с почти постоянным давлением и малыми изменениями параметров в направлении координаты x, т. е. уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В случае установившегося течения для полубесконечной пластины левая часть этого уравнения становится равной $u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y$, а в случае зависящего от времени течения для бесконечной пластины она равна $\partial u/\partial t$, или $U\,\partial u/\partial\tau$, если мы положим $\tau = Ut$. Выражение $u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y$ хорошо аппроксимируется членом $U\,\partial u/\partial\tau$ (при $\tau = x$) в случае течения, в котором скорость (u, v) близка к постоянной скорости $(U, 0)$ (это соображение было положено в основу при выводе уравнений Озеена (4.10.2), которые специально и предназначались для представления течения в области, далеко удаленной от тела, помещенного в однородный поток); однако обратное утверждение неверно.

Проведенное выше вычисление распределения скорости вблизи плоской пластины и соответствующие оценки силы трения и толщины вытеснения справедливы только тогда, когда течение



Р и с. 5.8.2. Полная сила трения D на единицу ширины гладкой плоской пластины длины l в потоке со скоростью U. Кривая линия перехода имеет форму, типичную для экспериментальных наблюдений, но ее положение на графике зависит от условий опыта. *1* — полностью ламинарный пограничный слой; *2* — полностью турбулентный пограничный слой.

в пограничном слое установившееся или «ламинарное» на всей поверхности плоской пластины. В действительности при локальных числах Рейнольдса $\delta_1 U/\nu$, превышающих значение ≈ 600, течение в пограничном слое становится неустойчивым. В этом случае возмущения в пограничном слое возрастают и на некотором расстоянии вниз по потоку происходит переход к другому типу течения. Наблюдения показывают, что этот новый режим течения характеризуется постоянной и случайной неустойчивостью, хотя распределение стационарной средней скорости имеет в общем ту же самую форму, что и в пограничном слое. Сила трения на стенке в таком турбулентном пограничном слое значительно превосходит соответствующую величину в ламинарном пограничном слое при одной и той же скорости внешнего потока; это обусловлено тем, что случайные поперечные движения в турбулентном пограничном слое переносят частицы жидкости с большой скоростью из внешних слоев в область вблизи стенки и тем самым обеспечиваются более быстрые процессы переноса в поперечном направлении по сравнению с молекулярной диффузией.

В этой книге мы не будем обсуждать турбулентное течение, однако ввиду важной роли полной силы трения на плоской пластине как стандартной величины при сравнении обтекания различных двумерных тонких тел желательно дать несколько замечаний об имеющихся данных. Из приведенного выше критерия устойчивости и выражения (5.8.10) следует, что при lU/ν, меньшем приблизительно $1{,}2\cdot10^5$, в пограничном слое на плоской пластине длины l всюду имеет место ламинарное течение (это соответствует пластинам длиной 180 и 13 см для воздуха и воды соответственно

при нормальной температуре и скорости 100 см/сек). Когда число Рейнольдса превосходит это значение, наблюдается переход к турбулентному течению сначала вблизи задней кромки пластины, а потом постепенно выше по потоку при соответствующем росте полной силы трения на пластине. На рис. 5.8.2 показано типичное изменение полного сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса, наблюдаемое в аэродинамической трубе или гидроканале. При очень большом числе Рейнольдса бóльшая часть пограничного слоя на плоской пластине становится турбулентной, а безразмерная полная сила трения снова уменьшается при увеличении числа Рейнольдса, хотя и не так быстро, как для полностью ламинарного слоя. Положение точки перехода от ламинарного течения к турбулентному в пограничном слое для фиксированного числа Рейнольдса может значительно изменяться при изменении степени возмущения набегающего потока. В зависимости от этого будет изменяться положение кривой на рис. 5.8.2, соединяющей две прямые полного сопротивления для полностью ламинарного и полностью турбулентного пограничных слоев; для сильно возмущенного внешнего потока первое отклонение измеренного сопротивления от прямой для полностью ламинарного слоя может произойти вблизи значения $lU/\nu = 10^5$, в то время как для очень спокойных потоков, получаемых в современных аэродинамических трубах, оно может не появляться вплоть до значения $lU/\nu = 4 \cdot 10^6$. На положение точки перехода к турбулентному течению в пограничном слое может также влиять степень шероховатости плоской пластины и форма ее передней кромки, особенно в случае набегающих потоков с очень низким уровнем возмущений.

5.9. Эффекты ускорения и замедления внешнего потока

Рассмотренное в § 5.5 установившееся двумерное течение в окрестности критической точки служит примером течения, в котором возникающая у твердой поверхности завихренность под действием конвекции сохраняется у поверхности и не диффундирует вдаль от нее. Результирующий слой с ненулевой завихренностью можно считать пограничным слоем для внешнего течения, имеющего скорость вида $U = kx$; это распределение скорости удовлетворяет как приближенному уравнению пограничного слоя (5.7.1), так и полному уравнению движения, поскольку опущенный в приближенном уравнении член $\partial^2 u/\partial x^2$ в точности равен нулю для данного случая. Как было установлено, толщина слоя ненулевой завихренности, определяемая противоположно направленными эффектами конвекции к стенке и вязкой диффузии от стенки, является постоянной, а сила трения на единицу площади у стенки увеличивается с увеличением x. В случае чисто сходя-

щегося течения в канале при большом числе Рейнольдса (§ 5.6) влияние конвекции завихренности к стенке становится даже преобладающим и толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением расстояния в направлении течения. Другой случай пограничного слоя на плоской стенке при постоянной скорости внешнего течения был проанализирован в § 5.8; конвекции завихренности в направлении по нормали к стенке здесь не было (если не считать небольшой поперечной скорости, обусловленной наличием самого пограничного слоя); что касается толщины пограничного слоя, то она увеличивалась с возрастанием x под действием только вязкой диффузии, а сила трения на стенке уменьшалась с увеличением x.

Третий возможный тип пограничного слоя, подобного которому мы еще не рассматривали, характеризуется тем, что скорость внешнего течения уменьшается с увеличением координаты x. Как следует из уравнения сохранения массы,

$$v(y) = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy, \tag{5.9.1}$$

в таких случаях (малая) нормальная компонента скорости направлена *от* стенки по крайней мере во внешней части пограничного слоя (где $\partial u/\partial x$ имеет, разумеется, тот же знак, что и $\partial U/\partial x$), а возможно, и по всей его толщине. При этом и конвекция, и диффузия совместно переносят завихренность от стенки и следует ожидать, что толщина пограничного слоя будет быстро увеличиваться с возрастанием x; при некоторых условиях скорость нарастания толщины слоя ненулевой завихренности, по-видимому, настолько велика, что формирования пограничного слоя не происходит вовсе (как в расходящемся течении в канале, см. § 5.6); в других же случаях, как мы сейчас увидим, большая скорость утолщения слоя служит причиной отрыва пограничного слоя, когда по достижении некоторой точки даже внешнее течение перестает быть приближенно параллельным границе тела. Эта возможность отрыва, вследствие которого радикально изменяется характер течения в целом, служит причиной того, почему особенно важен случай замедляющегося внешнего течения.

Для выяснения влияния ускорения или замедления внешнего течения на пограничный слой можно применить также и динамический подход. Поскольку давление приближенно постоянно по толщине пограничного слоя, то градиент давления, который вызывает ускорение внешнего течения, одинаково действует и на жидкость внутри пограничного слоя. Как следует из уравнения движения для невязкой жидкости, производная скорости жидкости q по длине s вдоль линии тока в установившемся течении

равна

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{1}{\rho q}\frac{\partial p}{\partial s},$$

и, следовательно, при заданном градиенте давления численное значение ее будет больше для медленно движущихся слоев вблизи стенки, чем для внешнего течения. Итак, отрицательный (или ускоряющий) градиент давления стремится уменьшить изменение скорости поперек пограничного слоя и уменьшить толщину слоя, в то время как положительный градиент давления оказывает противоположное действие. К этому эффекту градиента давления нужно добавить эффект вязкости и, в частности, влияние трения у стенки, связанное с непрерывным уменьшением количества движения в пограничном слое и приводящее к его утолщению. Для внешнего течения, скорость которого увеличивается пропорционально координате x, эти два эффекта в точности уравновешиваются на внешней границе пограничного слоя.

Автомодельное решение, когда скорость внешнего течения пропорциональна x^m

Семейство решений для установившегося двумерного течения, которое получили Фокнер и Скэн (1930), позволяет непосредственно выяснить, каким образом ускорение и замедление внешнего течения действуют на изменение вдоль границы толщины пограничного слоя и поверхностного трения. Как заметили Фокнер и Скэн, в случае, когда скорость внешнего течения имеет вид

$$U = cx^m, \tag{5.9.2}$$

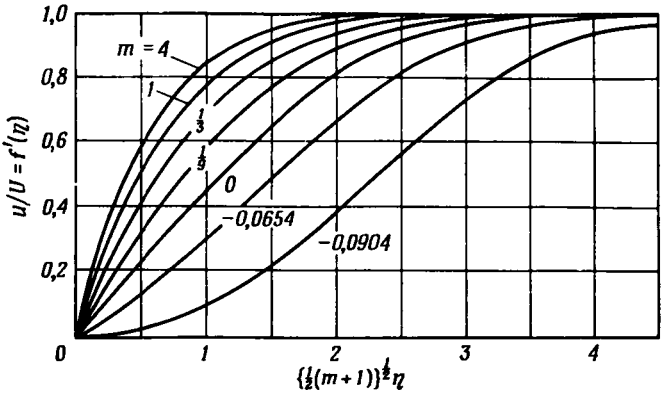
где c (>0) и m — константы, оказывается возможным получить решение уравнений пограничного слоя в форме

$$\psi = (\nu U x)^{1/2} f(\eta), \qquad \eta = (U/\nu x)^{1/2} y. \tag{5.9.3}$$

С учетом этих переменных и после исключения давления при помощи соотношения (5.7.8) для U и p уравнение пограничного слоя (5.7.1) принимает вид

$$mf'^2 - \frac{1}{2}(m+1) ff'' = m + f'''. \tag{5.9.4}$$

Это уравнение сводится при $m = 1$ к уравнению (5.5.13), описывающему течение в окрестности критической точки на плоской стенке, а при $m = 0$ — к уравнению (5.8.6) для плоской пластины, расположенной вдоль однородного потока. Как мы увидим в § 6.5, распределение скорости (5.9.2) осуществляется на поверхности клина с углом полураствора $\pi m/(m+1)$, помещенного симметрично в безвихревой поток невязкой жидкости (координата x изме-



Р и с. 5.9.1. Автомодельные распределения скорости в пограничном слое при скорости внешнего потока $U = cx^m$.

ряется от вершины клина). Тогда уравнение (5.9.4) можно считать описывающим течение в пограничном слое на поверхности некоторого клина с отрицательным значением m, которое соответствует течению на плоской пластине, наклоненной в сторону от потока; правда, при этом бесконечное значение U при $x = 0$ для $m < 0$ не может быть реализовано на практике. Однако важность задачи не всегда определяется возможностью приложения результатов.

Граничные условия на внутренней и внешней границах слоя таковы:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\eta) \to 1 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

При $x = 0$ нельзя наложить какие-либо условия, так как предполагаемая форма решения (5.9.3) такова, что изменение u по y имеет одинаковый вид при любых значениях x. Решения уравнения (5.9.4) при выписанных граничных условиях были получены численно Хартри (1937) для многих значений параметра m, а соответствующие профили скорости для нескольких из этих значений m показаны на рис. 5.9.1; в качестве абсциссы для этих графиков взята величина $\{(m + 1)/2\}^{1/2}\,\eta$, поскольку при численном интегрировании она оказалась более удобной переменной, чем η. Когда $m < 0$, решение неединственно, и на рис. 5.9.1 показаны те решения для отрицательных значений m, которые представляются физически «разумными» и которые гладко сопрягаются с решениями для положительных значений m [1]).

[1]) Стюартсон (1954) нашел второе семейство решений для $-0{,}0904 < m \leqslant 0$, которые гладко сопрягаются при $m = -0{,}0904$ с указанными выше, но которые при $m \to 0$ не приводят к решению пограничного слоя на плоской пластине (§ 5.8). Каждое из решений второго семейства дает область обратного течения вблизи стенки. Их физический смысл неясен.

Толщина вытеснения δ_1 и напряжение трения на стенке, скажем τ_0, являются двумя наиболее важными параметрами решения при каждом значении m. Из (5.9.3) мы имеем

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2} \int_0^\infty (1 - f')\, d\eta \sim x^{(1/2)(1-m)}, \qquad (5.9.5)$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho \left(\frac{\nu U^3}{x}\right)^{1/2} f_0'' \sim x^{(1/2)(3m-1)}. \qquad (5.9.6)$$

Эти соотношения явно показывают, каким образом толщина пограничного слоя и напряжение трения на стенке при определенном m зависят от показателя степени в распределении скорости ускоряющегося или замедляющегося внешнего течения. При $m = {}^1/_3$ оказывается, что напряжение на стенке постоянно; в этом случае эффект увеличения градиента скорости на стенке из-за ускорения внешнего потока в точности уравновешивается противоположным эффектом диффузии, приводящей к утолщению пограничного слоя.

Как следует из соотношений (5.9.5) и (5.9.6), в поведении величин δ_1 и τ_0 не происходит резких изменений при любых отрицательных значениях m; однако такие изменения имеются в профилях скорости, показанных на рис. 5.9.1. Видно, что профили для замедляющихся внешних течений ($m < 0$) имеют точку перегиба. Это свойство является общим, как можно убедиться, если взять уравнение движения на границе слоя в виде

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx -\frac{1}{2}\frac{dU^2}{dx}\ ; \qquad (5.9.7)$$

величина $\partial^2 u/\partial y^2$ для замедляющегося внешнего течения положительна на стенке, а так как $u \to U$ при $y \to \infty$, то $\partial^2 u/\partial y^2$ должна изменить знак при некотором значении y. При $U = \text{const}$ (т. е. $m = 0$) точка перегиба расположена на границе. По мере уменьшения m от нуля положительное значение $\partial^2 u/\partial y^2$ на стенке возрастает, а это вместе с ограничением $u \to U$ при $y \to \infty$ приводит к непрерывному уменьшению $(\partial u/\partial y)_{y=0}$. При $m = -0{,}0904$ (это наименьшее значение m, для которого было получено полное численное решение) градиент скорости на стенке обращается в нуль, что приводит к несколько необычному пограничному слою, в котором сила трения на стенке равна нулю при любом x.

Важный вывод из рассмотрения семейства решений Фокнера — Скэн состоит в том, что для скорости внешнего потока вида x^m его наибольшее замедление, при котором еще может быть получено автомодельное решение без обратного течения, соответствует величине $m = -0{,}0904$. При этом значении m направленная вперед сила трения, которая действует на внешние слои жидкости,

достаточна для предотвращения обратного движения слоя жидкости вблизи границы под действием положительного (или, как иногда говорят, обратного) градиента давления. Примечательно, что это критическое значение m близко к нулю.

Автомодельные решения уравнения пограничного слоя можно получить также для скорости внешнего потока в форме (5.9.2) при $c < 0$; в представлении (5.9.3) U должно быть заменено на $-U$, и это приведет к изменению знака члена f''' в уравнении (5.9.4). Внешний поток в этом случае течет к началу отсчета координаты x с ускорением при $m < 0$. Интересный побочный результат проведенного анализа состоит в том, что при $m = -1$ мы легко повторяем решение (5.6.12), найденное раньше для распределения скорости вблизи одной стенки сужающегося канала, в котором при большом числе Рейнольдса всюду существует установившееся радиальное течение.

О расчетах установившегося пограничного слоя на движущемся в жидкости теле

Теперь мы можем в общем виде рассмотреть, каким образом изменяется с расстоянием течение в пограничном слое на поверхности тела, движущегося в покоящейся на бесконечности жидкости при большом числе Рейнольдса (число Рейнольдса основано на скорости тела U_0 и линейном размере L). Можно считать, что этот пограничный слой «начинается» от точки, в которой разделяющаяся [1]) линия тока, приходящая из области вверх по потоку, пересекает поверхность тела, а особенности начального развития слоя зависят от местной формы поверхности тела. Если в окрестности этой точки поверхность можно считать локально плоской, то начальное развитие пограничного слоя будет подобно течению в окрестности критической точки, изученному в § 5.5; если же в этой точке поверхность имеет острую кромку, а разделяющаяся линия тока приходит на эту кромку, то пограничный слой будет вначале развиваться подобно одному из семейства решений (5.9.4) при $m \geqslant 0$; плоской пластине пренебрежимо малой толщины, расположенной по потоку, соответствует значение $m = 0$. Вниз по потоку от начального участка пограничного слоя скорость внешнего потока изменяется по-разному и это изменение зависит от формы поверхности тела в целом; при этом может происходить как ускорение, так и замедление течения с соответствующим изменением толщины пограничного слоя и распределения скорости в нем. На ограниченном участке поверхности тела распределение скорости в пограничном слое приближенно будет подобно распре-

[1]) Течение разделяется на две части, соответствующие двум различным сторонам тела, только в случае двумерного тела — наиболее простом случае, описываемом в общем виде. Пограничные слои на трехмерных телах имеют значительно более сложную структуру, если течение не осесимметричное.

делению, определяемому уравнением Фокнера — Скэн при подходящем выборе значения m в соответствии с локальными условиями; это не имеет места только при больших замедлениях внешнего потока.

Для определения развития пограничного слоя в зависимости от заданного установившегося распределения внешней скорости было разработано много численных методов [1]), причем все они основаны на том факте, что уравнение пограничного слоя (5.7.1) есть уравнение в частных производных второго порядка параболического типа (в отличие от полного уравнения движения, которое является эллиптическим по x и y) и допускает интегрирование вперед по x; условия при любом значении x определяются в общем случае предысторией пограничного слоя. Важная практическая цель таких вычислений состоит в нахождении толщины пограничного слоя и касательного напряжения на стенке; знание последнего необходимо при оценке полной силы, действующей на любое тело со стороны жидкости. Из уравнений пограничного слоя в безразмерной форме (5.7.9) и (5.7.11) следует, что для двумерного тела в потоке со скоростью U_0 толщина вытеснения пограничного слоя на расстоянии x вдоль поверхности тела от критической точки равна

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = L\,\mathrm{Re}^{-1/2} \int_0^\infty \left(1 - u'\frac{U_0}{U}\right) dy', \qquad (5.9.8)$$

где в качестве L может быть взята длина тела. Аналогичным образом локальное касательное напряжение на стенке равно

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho U_0^2\,\mathrm{Re}^{-1/2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)_{y'=0}. \qquad (5.9.9)$$

Помеченные штрихами величины в (5.9.8) и (5.9.9) безразмерны и не зависят от числа Рейнольдса, а численное интегрирование уравнений пограничного слоя позволяет определить численные значения величин

$$\int_0^\infty (1 - u'U_0/U)\, dy' \qquad \text{и} \qquad (\partial u'/\partial y')_{y'=0}$$

как функций переменной x'.

Хотя мы здесь не приводим описания различных численных методов для вычисления развития пограничного слоя, мы отметим интегральное соотношение, полученное впервые Карманом (1921), которое легло в основу многочисленных приближенных методов расчета. Это соотношение представляет собой частный случай

[1]) См. примечание на стр. 391.

уравнения количества движения в интегральной форме (§ 3.2), и его удобно получить путем интегрирования уравнения пограничного слоя (5.7.1) по y поперек слоя. Некоторые члены этого уравнения не обращаются в нуль на внешней границе пограничного слоя, однако мы можем результат интегрирования сделать не зависимым от области интегрирования путем вычитания из уравнения (5.7.1) соотношения (5.7.8), представляющего собой запись уравнения (5.7.1) на внешней границе пограничного слоя. Таким образом, мы получаем для интегрирования уравнение

$$\frac{\partial (u-U)}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (5.9.10)$$

а в качестве пределов интегрирования для y можно взять 0 и ∞, поскольку компонента u считается не зависящей от y и равной U на внешней границе пограничного слоя (как можно заметить, это предположение становится все более обоснованным по мере стремления числа Рейнольдса к бесконечности, если использовать при этом преобразованную поперечную координату $y' = \mathrm{Re}^{1/2}\, y/L$, введенную в § 5.7). В результате интегрирования находим

$$\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty (U-u)\,dy + \int_0^\infty \left\{(U-u)\frac{\partial U}{\partial x} + u\frac{\partial (U-u)}{\partial x} + v\frac{\partial (U-u)}{\partial y}\right\} dy =$$

$$= \frac{\partial (U\delta_1)}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}U\delta_1 + \int_0^\infty \left\{u\frac{\partial (U-u)}{\partial x} + (U-u)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} dy; \qquad (5.9.11)$$

при получении этого соотношения на последнем этапе было использовано уравнение сохранения массы. Величина

$$U^{-2}\int_0^\infty u\,(U-u)\,dy$$

представляет собой длину, аналогичную толщине вытеснения, которая обычно называется *толщиной потери импульса* и обозначается θ. Теперь (5.9.11) можно переписать иначе

$$\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial (U\delta_1)}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}U\delta_1 + \frac{\partial (U^2\theta)}{\partial x}. \qquad (5.9.12)$$

Один из простых приемов, который часто дает достаточно точные результаты, состоит в предположении, что распределение скорости по y имеет одну и ту же форму для всех нужных значений x; это распределение скорости выбирается так, чтобы

где $\eta = {}^1/_2 y/(\nu t)^{1/2}$. Это распределение относительной скорости жидкости (относительно границы) в точке x совпадает с распределением скорости, возникающим в жидкости, ограниченной твердой плоской стенкой, скорость которой в ее собственной плоскости внезапно возрастает от нулевой и поддерживается постоянной, равной $-U(x)$; в этом последнем случае эффекты конвекции и градиента давления одновременно равны нулю (§ 4.3).

Теперь мы можем использовать это первое приближение для оценки конвективных членов в (5.9.13). Итак, второе приближение для компоненты скорости, параллельной границе, локально равно $u = u_1 + u_2$, причем

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}; \qquad (5.9.15)$$

нормальная скорость v_1 в первом приближении получается из (5.9.14) с использованием уравнения сохранения массы (5.9.1). Граничные условия, которым должна удовлетворять величина u_2, таковы:

$$u_2(x,y,0) = 0, \qquad u_2(x,0,t) = 0, \qquad u_2(x,y,t) \to 0 \quad \text{при } y \to \infty.$$

Правую часть уравнения (5.9.15) можно представить в виде произведения $U(dU/dx)$ на произвольную функцию от η, так что частный интеграл уравнения (5.9.15) можно записать как $tU(dU/dx)f(\eta)$. Определение функции $f(\eta)$, удовлетворяющей уравнению (5.9.15) и приведенным выше граничным условиям, можно выполнить непосредственно [1]), поэтому в качестве второго приближения для скорости u имеем

$$u = U \operatorname{erf} \eta + tU \frac{dU}{dx} f(\eta). \qquad (5.9.16)$$

Указанная процедура может быть продолжена для улучшения приближения; после n приближений дополнительный член в выражении для скорости u имеет вид

$$t^{n-1} \times (\text{Функция от } x) \times (\text{Функция от } \eta).$$

Приближения (5.9.16) вполне достаточно для достижения поставленной нами цели, т.е. для обсуждения обратного течения в пограничном слое на участке замедления внешнего течения. Две функции $\operatorname{erf} \eta$ и $f(\eta)$ всюду неотрицательны, и отношение $f(\eta)$ к $\operatorname{erf} \eta$ имеет наибольшее значение при $\eta = 0$. Следовательно, обратное течение может возникать только для $dU/dx < 0$, и это достигается в первую очередь при $\eta = 0$, т. е. при $y = 0$ — вывод, который мы получили также и при изучении установившихся пограничных слоев. Время наступления обратного течения в любой точке x

[1]) См., например, Rosenhead L. (ed.), Laminar Boundary Layers, § VII.7.

есть значение t, при котором величина $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ обращается в нуль, и в соответствии с (5.9.16) и известным решением для $f(\eta)$ оно равно

$$-\frac{1}{dU/dx}\left\{\frac{d(\operatorname{erf}\eta)/d\eta}{df(\eta)/d\eta}\right\}_{\eta=0}=-\frac{0{,}70}{dU/dx}.$$

Точные значения времени и координаты, при которых начинается обратное течение, зависят от производной dU/dx, определяемой формой тела.

В качестве простого примера рассмотрим круговой цилиндр радиуса a, движущийся в безвихревом потоке, причем циркуляция вокруг цилиндра равна нулю; в этом случае скорость жидкости относительно поверхности цилиндра (см. (2.10.12))

$$U(x)=2U_0\sin(x/a),$$

где x измеряется вдоль поверхности от передней критической точки, а U_0 — скорость движения цилиндра относительно жидкости на бесконечности. Максимальное значение величины $-dU/dx$ достигается при этом в кормовой критической точке $x=\pi a$, и обратное течение начинается в момент времени, равный $0{,}35a/U_0$, т. е. когда цилиндр переместится на расстояние $0{,}35a$. (Третье приближение для скорости дает значение 0,32 вместо 0,35.) В последующие моменты времени обратное течение охватывает конечную область поверхности кормовой части цилиндра; так, например, в момент времени $0{,}50a/U_0$ обратное течение охватывает интервал $^3/_4\pi a<x\leqslant\pi a$, а при $t\to\infty$ эта область продвигается вперед вплоть до значения $x=\frac{1}{2}\pi a$. Однако маловероятно, чтобы первые несколько членов в разложении по степеням t дали точную оценку скорости u при значениях t, превышающих $\approx 0{,}50a/U_0$. Смысл расчета заключается в установлении того, что обратное течение возникает в пограничном слое на кормовой части тела по прошествии периода времени, обратно пропорционального максимальному значению величины $-dU/dx$ и не зависящего от вязкости. Установившиеся пограничные слои, в которых имелось бы обратное течение (и в которых $u/U<1$ для всех y), не были обнаружены ни теоретически, ни экспериментально; таким образом, это указывает на то, что установившееся течение на плохообтекаемом теле при наличии тонкого пограничного слоя на всей поверхности тела невозможно.

Мы можем также оценить время, требуемое для переноса завихренности вдаль от цилиндра. Вблизи кормовой критической точки безвихревого течения компонента скорости, нормальная к поверхности и направленная в сторону от нее, равна ky, где $k=2U_0/a$ для кругового цилиндра; когда слой ненулевой завихренности настолько толст, что перенос завихренности осуществляется в основном за счет конвекции, его толщина увели-

где $\eta = {}^1/_2 y/(\nu t)^{1/2}$. Это распределение относительной скорости жидкости (относительно границы) в точке x совпадает с распределением скорости, возникающим в жидкости, ограниченной твердой плоской стенкой, скорость которой в ее собственной плоскости внезапно возрастает от нулевой и поддерживается постоянной, равной $-U(x)$; в этом последнем случае эффекты конвекции и градиента давления одновременно равны нулю (§ 4.3).

Теперь мы можем использовать это первое приближение для оценки конвективных членов в (5.9.13). Итак, второе приближение для компоненты скорости, параллельной границе, локально равно $u = u_1 + u_2$, причем

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}; \qquad (5.9.15)$$

нормальная скорость v_1 в первом приближении получается из (5.9.14) с использованием уравнения сохранения массы (5.9.1). Граничные условия, которым должна удовлетворять величина u_2, таковы:

$$u_2(x,y,0) = 0, \qquad u_2(x,0,t) = 0, \qquad u_2(x,y,t) \to 0 \quad \text{при } y \to \infty.$$

Правую часть уравнения (5.9.15) можно представить в виде произведения $U(dU/dx)$ на произвольную функцию от η, так что частный интеграл уравнения (5.9.15) можно записать как $tU(dU/dx)f(\eta)$. Определение функции $f(\eta)$, удовлетворяющей уравнению (5.9.15) и приведенным выше граничным условиям, можно выполнить непосредственно [1]), поэтому в качестве второго приближения для скорости u имеем

$$u = U \operatorname{erf} \eta + tU \frac{dU}{dx} f(\eta). \qquad (5.9.16)$$

Указанная процедура может быть продолжена для улучшения приближения; после n приближений дополнительный член в выражении для скорости u имеет вид

$$t^{n-1} \times (\text{Функция от } x) \times (\text{Функция от } \eta).$$

Приближения (5.9.16) вполне достаточно для достижения поставленной нами цели, т.е. для обсуждения обратного течения в пограничном слое на участке замедления внешнего течения. Две функции $\operatorname{erf} \eta$ и $f(\eta)$ всюду неотрицательны, и отношение $f(\eta)$ к $\operatorname{erf} \eta$ имеет наибольшее значение при $\eta = 0$. Следовательно, обратное течение может возникать только для $dU/dx < 0$, и это достигается в первую очередь при $\eta = 0$, т. е. при $y = 0$ — вывод, который мы получили также и при изучении установившихся пограничных слоев. Время наступления обратного течения в любой точке x

[1]) См., например, Rosenhead L. (ed.), Laminar Boundary Layers, § VII.7.

есть значение t, при котором величина $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ обращается в нуль, и в соответствии с (5.9.16) и известным решением для $f(\eta)$ оно равно

$$-\frac{1}{dU/dx}\left\{\frac{d(\operatorname{erf}\eta)/d\eta}{df(\eta)/d\eta}\right\}_{\eta=0}=-\frac{0{,}70}{dU/dx}.$$

Точные значения времени и координаты, при которых начинается обратное течение, зависят от производной dU/dx, определяемой формой тела.

В качестве простого примера рассмотрим круговой цилиндр радиуса a, движущийся в безвихревом потоке, причем циркуляция вокруг цилиндра равна нулю; в этом случае скорость жидкости относительно поверхности цилиндра (см. (2.10.12))

$$U(x) = 2U_0 \sin(x/a),$$

где x измеряется вдоль поверхности от передней критической точки, а U_0 — скорость движения цилиндра относительно жидкости на бесконечности. Максимальное значение величины $-dU/dx$ достигается при этом в кормовой критической точке $x = \pi a$, и обратное течение начинается в момент времени, равный $0{,}35a/U_0$, т. е. когда цилиндр переместится на расстояние $0{,}35a$. (Третье приближение для скорости дает значение 0,32 вместо 0,35.) В последующие моменты времени обратное течение охватывает конечную область поверхности кормовой части цилиндра; так, например, в момент времени $0{,}50a/U_0$ обратное течение охватывает интервал $^3/_4\pi a < x \leqslant \pi a$, а при $t \to \infty$ эта область продвигается вперед вплоть до значения $x = {}^1/_2\pi a$. Однако маловероятно, чтобы первые несколько членов в разложении по степеням t дали точную оценку скорости u при значениях t, превышающих $\approx 0{,}50a/U_0$. Смысл расчета заключается в установлении того, что обратное течение возникает в пограничном слое на кормовой части тела по прошествии периода времени, обратно пропорционального максимальному значению величины $-dU/dx$ и не зависящего от вязкости. Установившиеся пограничные слои, в которых имелось бы обратное течение (и в которых $u/U < 1$ для всех y), не были обнаружены ни теоретически, ни экспериментально; таким образом, это указывает на то, что установившееся течение на плохообтекаемом теле при наличии тонкого пограничного слоя на всей поверхности тела невозможно.

Мы можем также оценить время, требуемое для переноса завихренности вдаль от цилиндра. Вблизи кормовой критической точки безвихревого течения компонента скорости, нормальная к поверхности и направленная в сторону от нее, равна ky, где $k = 2U_0/a$ для кругового цилиндра; когда слой ненулевой завихренности настолько толст, что перенос завихренности осуществляется в основном за счет конвекции, его толщина увели-

чивается как exp (kt). Однако в начальной стадии перенос завихренности от поверхности цилиндра обеспечивается действием сил вязкости; как показывает анализ размерностей, полное выражение для толщины слоя завихренности вблизи кормовой критической точки (где внешний поток определяется лишь величиной k) должно иметь вид

$$\text{const} \cdot (\nu/k)^{1/2}\, e^{kt}.$$

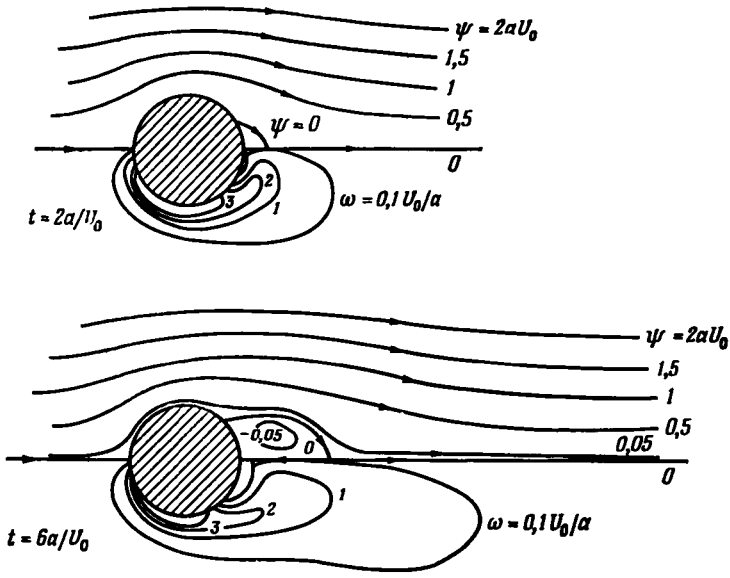
Отсюда следует, что толщина слоя может быть сравнима с радиусом кругового цилиндра по истечении времени порядка

$$k^{-1} \ln \frac{a^2 k}{\nu} \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{U_0} \ln \frac{aU_0}{\nu};$$

в реальных условиях это значение времени не очень сильно отличается от a/U_0.

Расчеты развития обтекания кругового цилиндра из первоначального безвихревого движения проводились также с использованием конечно-разностной аппроксимации производных по координатам и времени в полных уравнениях движения; последовательное интегрирование по времени уравнений движения во всей области течения осуществлялось с использованием быстродействующей ЭВМ. Этим методом Пейн (1958) численно проинтегрировал уравнение для завихренности (оно удобно по той причине, что вычисления выполнялись для ограниченной области вблизи цилиндра, в которой завихренность отлична от нуля); в качестве шага по времени он использовал величину 0,1 a/U_0; на рис. 5.9.2 показано полученное распределение завихренности ω и функции тока ψ в моменты времени $2a/U_0$ и $6a/U_0$ для кругового цилиндра, который внезапно приобретает постоянную скорость U_0, соответствующую числу Рейнольдса $2aU_0/\nu = 100$. Это число Рейнольдса не настолько велико для того, чтобы формировался тонкий пограничный слой (если бы сформировался тонкий слой, то возникли бы трудности при использовании метода конечных разностей), однако можно полагать, что механизм образования завихренности на кормовой части цилиндра и последующий перенос ее вниз по потоку во многом напоминает такой же процесс при бóльших числах Рейнольдса. По-видимому, быстрое увеличение толщины слоя ненулевой завихренности происходит в области замкнутых линий тока, соответствующих обратному течению вблизи поверхности цилиндра.

Этот быстрый рост слоя ненулевой завихренности можно наблюдать на кормовой части плохообтекаемого тела, движущегося из состояния покоя. На фото 5.9.3 показано течение жидкости на поверхности плохообтекаемого тела в последовательные моменты времени после начала движения тела; первый момент времени настолько близок к начальному, что пограничный слой еще не виден. На последующих фотографиях можно видеть появление



Р и с. 5.9.2. Линии тока относительно цилиндра и распределение завихренности ω при внезапном приведении его в движение с постоянной скоростью U_0 ($2aU_0/\nu = 100$) в моменты времени $2a/U_0$ и $6a/U_0$ (Пейн (1958)).

и усиление обратного течения в пограничном слое. (На них видна также характерная тенденция завихренности формироваться в виде отдельных круговых «вихрей» в утолщающемся пограничном слое, что, очевидно, служит проявлением локальной неустойчивости течения. Эти вихри связаны с довольно интенсивным обратным течением, как можно заметить по появлению на последних двух фотографиях вторичных вихрей противоположного направления в области вверх по потоку от основного вихря.) Вполне очевидно, что увеличение толщины слоя завихренности на кормовой части вскоре приводит к нарушению в этой области приближения пограничного слоя; таким образом, окончательно установившееся течение уже не будет таким течением, в котором жидкость в пограничном слое из передней части тела движется по поверхности тела к кормовой критической точке.

5.10. Отрыв пограничного слоя

Теперь мы переходим к обсуждению одного из свойств ламинарного течения при больших числах Рейнольдса, которое представляет наибольшие трудности для теоретического анализа.

Полезно сначала напомнить один из результатов § 4.12, согласно которому при установившемся обтекании тел в интервале чисел

Рейнольдса от 1 до 100 на кормовой части тела образуется характерное обратное течение, становящееся более заметным при увеличении числа Рейнольдса в этом интервале. На фото 4.12.1, 4.12.8 и 4.12.10 показано образование вихрей, стационарных относительно тела. Линии тока, проходящие вблизи передней части поверхности тела, отходят от нее в некоторой точке и огибают большие неподвижные вихри за телом. Числа Рейнольдса для течений, описанных в § 4.12, еще не настолько велики, чтобы на поверхности тела можно было отчетливо увидеть пограничный слой (для плоской пластины из выражения (5.8.10) находим $\delta_1/l = 0{,}17$ при $Ul/\nu = 100$).

Наблюдения за установившимся обтеканием тел при больших числах Рейнольдса, при которых толщина пограничного слоя на передней части тела мала по сравнению с размером тела, позволяют обнаружить такой же отход линий тока от поверхности на некоторой части боковой поверхности; при этом течение в следе у кормовой части тела обычно неустановившееся (вследствие неустойчивости стационарного течения), а присоединенные неподвижные вихри в виде регулярных замкнутых областей течения становятся все менее и менее заметными. На фото 5.10.1 показана подробная картина установившегося процесса отделения линий тока от поверхности сторон удлиненного тела вращения с затупленной кормовой частью; в данном случае толщина оторвавшейся части пограничного слоя очень мала.

Указанное явление отхода линий тока от поверхности тела вблизи его передней части и образование области медленного неустановившегося течения жидкости при обтекании затупленных тел с большими числами Рейнольдса служит примером *отрыва пограничного слоя*. Как мы увидим позже, отход линий тока от поверхности может произойти даже при числах Рейнольдса, близких к 10, однако это явление особенно важно при больших числах Рейнольдса, когда отходящие линии тока переносят значительное количество завихренности от поверхности тела. Отрыв пограничного слоя характерен не только для течений, возникающих при движении тел в бесконечной жидкости; например, он имеет место в том случае, когда текущая через короткий канал или трубу жидкость замедляется в расширяющемся сечении канала, как показано на фото 5.10.2 (канал или труба здесь считаются настолько короткими, что пограничный слой на стенке не распространяется до оси канала).

Было замечено из наблюдений, что отрыв пограничного слоя на плоской или закругленной твердой стенке без острых кромок происходит тогда, когда скорость эффективно невязкой жидкости на внешней границе пограничного слоя уменьшается в направлении течения достаточно быстро и на достаточно большую величину. Насколько быстрым и большим должно быть это уменьшение

скорости внешнего течения, точно установить невозможно, так как необходимо учитывать также и предысторию развития пограничного слоя; однако на практике установившийся пограничный слой обычно отделяется после весьма незначительного замедления внешнего течения. Правда, некоторые решения из семейства решений Фокнера — Скэн (§ 5.9) представляют пограничные слои, которые не отрываются от плоской стенки, несмотря на произвольное уменьшение скорости внешнего течения; однако на самом деле замедление течения здесь очень мало и начальный профиль скорости в слое должен иметь предсказываемую решением форму.

Два фото 5.10.3 позволяют наглядно продемонстрировать, что отрыв пограничного слоя существенно связан с наличием твердой границы, на которой выполняется условие прилипания жидкости и образуется завихренность. На первом фото показано двумерное течение в окрестности критической точки на плоской твердой стенке (вида, рассмотренного в § 5.5), а на втором показано, каким образом изменяется это течение, если в плоскости симметрии течения поместить дополнительно тонкую твердую пластинку. Эта пластинка совпадает с некоторой линией тока первоначального течения (на первом фото), так что если бы жидкость была невязкой и могла скользить по пластинке, то исходное течение не изменилось бы. В самом же деле на пластинке выполняется условие прилипания жидкости и должен формироваться пограничный слой. Кроме того, замедление жидкости в плоскости симметрии первоначального течения весьма неблагоприятно для возможности существования на пластинке установившегося тонкого пограничного слоя; все больше и больше завихренности накапливается в нарастающем пограничном слое, и, наконец, происходит отрыв около переднего края пластинки; поэтому набегающий безвихревой поток уже не протекает вблизи исходной твердой стенки.

Несмотря на то, что отрыв пограничного слоя повсеместно происходит в течениях жидкостей и оказывает огромное воздействие на поток в целом, до сих пор не достигнуто адекватного понимания этого явления и оно не получило аналитического описания. Отрыв пограничного слоя несомненно связан с опытным фактом, который состоит в том, что при наличии заметного падения скорости внешнего потока невозможно существование установившегося пограничного слоя, прилегающего к твердой границе. По-видимому, в тех случаях, когда заметное уменьшение скорости внешнего потока происходит в начальной фазе установления течения, завихренность переносится от стенки так быстро, что она уже не может локализоваться внутри тонкого слоя. В результате этого характер течения в целом изменяется, и оно принимает такую форму, что пограничный слой остается присоединенным к границе лишь в той области, для которой на внешней

границе пограничного слоя либо нет замедления жидкости, либо оно мало. Трудность состоит в том, что у нас не имеется никакого средства предсказать, какой будет окончательная форма течения.

В случае установившегося состояния, когда распределение давления на границе считалось известным, были предприняты попытки найти математическую зависимость между отрывом пограничного слоя и его предысторией вверх по потоку. Как отмечалось в § 5.9, обычная схема интегрирования уравнений пограничного слоя состоит в переходе от некоторого начального значения x, для которого известно распределение скорости по y (в качестве начального значения x может быть взята точка фактического начала пограничного слоя), к бóльшим значениям x, для которых задано распределение давления, или, что эквивалентно, скорости внешнего потока. Было установлено, что применение таких методов сопряжено с большими затруднениями в областях длительного замедления внешнего потока; при этом обычно возникают характерные для численных методов трудности, такие, как отсутствие сходимости итерационного процесса; вычислительные трудности быстро увеличиваются по мере приближения к точке, в которой напряжение трения на стенке равно нулю. В этой точке решение уравнений пограничного слоя имеет алгебраическую особенность, как было установлено в результате тщательного численного исследования пограничного слоя в частном случае со скоростью внешнего потока $U = U_0 - \alpha x$, где U_0 и α — постоянные (Хартри (1949); Лейф (1955)). Мы уже знаем одно регулярное решение, для которого $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$, а именно автомодельное решение Фокнера — Скэн при $m = -0{,}0904$ (§ 5.9); правда, это решение, по-видимому, нельзя считать характерным из-за того, что $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ для всех значений x.

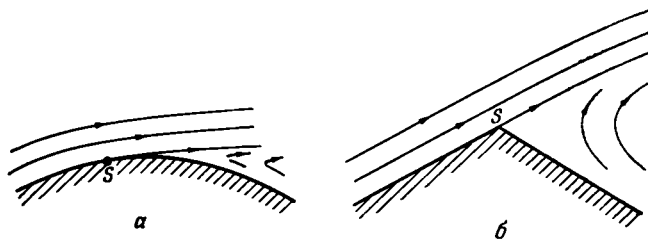
Если в некотором течении величина $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ изменяется гладко от положительных значений через нулевое значение к отрицательным при увеличении x, то та точка, в которой напряжение трения на стенке равно нулю, является точкой, в которой начинается обратное течение [1]). Можно считать, что уравнение двумерного движения (в точной форме или в приближении пограничного слоя) характеризует изменение завихренности жидкости в произвольной точке поля течения в результате диффузии завихренности и переноса ее вместе с жидкостью. Поэтому следует ожидать, что численное интегрирование вперед уравнений пограничного слоя, при котором условия в некоторой точке определяются по условиям в точке с меньшим значением x, окажется в общем случае успешным только тогда, когда скорость жидкости увеличивается в направлении x во всем интервале интегрирования:

[1]) Двумерное течение в очень малой окрестности точки на стенке (заведомо в пограничном слое), где $\partial u/\partial y$ изменяет знак, было рассмотрено в § 4.8 как течение с пренебрежимо малыми силами инерции.

если же в некоторой точке x_1 имеется обратное течение, то завихренность будет связана с конвекцией от точек с координатами x, *превышающими* x_1; тем самым она определяется не только условиями при $x < x_1$, что противоречит основному предположению вычислений.

Ситуация, таким образом, такова: во-первых, из наблюдений нам известно, что установившийся пограничный слой «отрывается» (отделяется) от твердой границы гладкой формы (или на малом расстоянии вниз по потоку от точки максимального значения скорости внешнего потока); и, во-вторых, при выполнении интегрирования уравнений пограничного слоя вперед в направлении внешнего потока имеются реальные трудности в окрестности точки нулевого напряжения трения на стенке. В литературе считается общепринятым мнение, не имеющее, правда, должного подтверждения, что точка отрыва совпадает с точкой нулевого напряжения трения на стенке. Согласно данным наблюдений, можно всего лишь утверждать, что эти две точки обычно весьма близки; экспериментальные наблюдения затруднены из-за неустойчивости течения вниз по потоку от точки отрыва, а иногда и из-за последующего присоединения пограничного слоя к стенке. На современном уровне знаний осторожная точка зрения состоит в том, что нулевое напряжение трения на стенке с необходимостью предшествует или сопутствует отрыву установившегося пограничного слоя, т. е. оно может быть в точке отрыва или выше ее по потоку. В любом случае из теории пограничного слоя следует важный вывод, что при неизменном распределении скорости внешнего потока положение точки нулевого трения на стенке не зависит от числа Рейнольдса; таким образом, обращение в нуль напряжения трения в некоторой точке и предположительно связанное с ним явление отрыва пограничного слоя существуют и в пределе при $\nu \to 0$.

Отвлекаясь от возможности существования особенности решения уравнения установившегося пограничного слоя в точке нулевого напряжения трения на стенке, одного априорного анализа пограничного слоя недостаточно для определения точки отрыва. Как было установлено выше, отрыв пограничного слоя объясняется отклонением от поверхности тела тех линий тока, которые лежали внутри пограничного слоя на передней части тела; отрыв пограничного слоя влияет на картину течения в целом и определяется как течением внутри и вне пограничного слоя, так и течением по обеим сторонам отделившегося пограничного слоя. Течение вне пограничного слоя описывается уравнением в частных производных эллиптического типа (в случае безвихревого течения это просто уравнение Лапласа) и зависит лишь от формы границы этой области течения, включая и ту часть границы, которая обусловлена отделившимся пограничным слоем. Следовательно,



Р и с. 5.10.4. Отрыв от гладкой твердой стенки (*а*) и от стенки с точкой излома (*б*).

отрыв влияет на распределение давления в прилегающем к телу участке пограничного слоя. Определение полного течения как внутри, так и вне пограничного слоя в случае установившегося потока с отрывом пограничного слоя составляет одну из главных нерешенных задач механики жидкости.

В случаях отрыва пограничного слоя на телах гладкой формы замечено, что близкие к поверхности линии тока отходят от нее почти по касательной, как показано на рис. 5.10.4, *а*; на рисунке масштаб тела имеет порядок единицы, а толщина пограничного слоя бесконечно мала. Если отходящая линия тока в точке отрыва S образует со стенкой вверх по потоку угол $<180°$, то легко показать (с учетом отмеченной выше интерпретации соотношения (5.9.2) как распределения скорости на клине в безвихревом течении), что скорость внешнего потока (по предположению безвихревого) должна быть равна нулю в точке S; следовательно, при подходе к точке S должно иметь место заметное замедление внешнего потока, и, как мы уже видели, это должно привести к появлению обратного течения и слишком большому накоплению завихренности внутри тонкого слоя. Иначе говоря, в установившемся течении отход линий тока от поверхности в пограничном слое возможен только по направлению касательной к поверхности тела.

Отрыв пограничного слоя на стенке с точкой излома имеет некоторые характерные особенности и заслуживает отдельного обсуждения. Для этого случая установлено, что пограничный слой всегда отрывается в точке излома поверхности (как это имеет место в течении, показанном на фото 4.12.10 при двух самых больших числах $\mathrm{Re} = 10$ и 250) и покидает поверхность по касательной к ее участку вверх по потоку (см. рис. 5.10.4, *б*). По-видимому, установившееся течение здесь невозможно, поскольку картина течения внутри и вне пограничного слоя в данном случае отличается от той, которая имеется в случае отрыва на гладкой поверхности; поток в целом перестраивается таким образом. что происходит отрыв указанного вида. Кроме того, установлено, что в отличие от пограничного слоя на гладкой поверхности скорость

невязкого потока на внешней границе пограничного слоя не уменьшается при приближении к точке отрыва. (Заметим, что интегрирование уравнений пограничного слоя вперед от некоторой точки, расположенной вверх по потоку, с наблюдаемым распределением скорости внешнего потока не дает никаких указаний на отрыв пограничного слоя в точке излома.)

В данном случае можно применить также анализ роста пограничного слоя на поверхности тела после начала его движения в покоящейся жидкости (см. § 5.9). При полностью безвихревом обтекании тела с точкой излома величина скорости жидкости в этой точке весьма велика (как будет показано в § 6.5, теоретическое значение равно бесконечности, если радиус кривизны в точке излома равен нулю). Таким образом, величина dU/dx, которая должна быть подставлена в соотношение (5.9.16), принимает большое отрицательное значение непосредственно вниз по потоку за точкой излома. Поэтому почти сразу же после начала движения тела в указанной области возникает обратное течение, причем довольно сильное. Здесь происходит формирование неподвижного вихря, а влияние этого вихря на набегающую жидкость приводит к образованию картины течения, показанной на рис. 5.10.4, *б*.

На фото 5.10.5 показана подробная картина развития отрыва почти непосредственно после начала движения тела с изломом; визуализация потока вблизи передней части тела была достигнута за счет выпуска пара с обтекаемой поверхности, которому соответствуют теневые участки при освещении мощной вспышкой. Распространение завихренности от точки излома происходит столь быстро, что некоторые частицы жидкости с завихренностью остаются на теле почти в первоначальном положении. На этих фотоснимках видна характерная спиралеобразная форма траекторий жидких частиц, которые движутся от точки излома; такая форма траекторий частиц вызвана индуцированной скоростью жидкости из-за распространения завихренности от излома. Видна также заметная неустойчивость вихревой пелены и ее волнистость, а в более поздние моменты времени вместо однородной пелены наблюдается скапливание пара (и, по-видимому, завихренности) через равные промежутки. Последние четыре фотоснимка сделаны, когда тело двигалось с предельной стационарной скоростью, однако большой вихрь, оторвавшийся от излома, еще не успел продвинуться достаточно далеко вниз по потоку, чтобы течение вблизи тела полностью достигло своей (статистически) установившейся формы, возможно за исключением передней половины поля течения.

На фото 5.10.6 менее подробно показана картина развития обтекания из состояния покоя модели дома с двускатной крышей. Существование малого замкнутого вихря сразу позади

острой вершины крыши можно наблюдать на фото 5.10.6, *б*; размеры этого вихря увеличиваются до тех пор, пока он не распадется на отдельные нерегулярные флуктуации завихренности (см. фото 5.10.6, *д*). На фото 5.10.6, *г* заметны два очень малых вихря у основания дома с наветренной и подветренной сторон; первый из них связан с отрывом пограничного слоя от поверхности земли из-за замедления внешнего потока, а второй, по-видимому, обусловлен аналогичной причиной из-за замедления потока в направлении к дому, индуцированного большим стационарным вихрем (правда, число Рейнольдса этого вторичного потока не настолько велико, чтобы там формировались ясно выраженные пограничные слои). На фото 5.10.6, *д* видно, что, когда твердая граница имеет резкий излом, форма окончательного статистически установившегося течения в значительной степени может зависеть от направления касательной к границе на наветренной стороне излома.

Необходимость отрыва пограничного слоя на границе с резким изломом и существенное влияние такого отрыва на форму течения в целом служат важными моментами в теории подъемной силы тел, движущихся в жидкости. Как мы увидим в § 6.7, тенденция пограничного слоя отрываться таким путем, чтобы почти устранить замедление внешнего потока на участке прилегания пограничного слоя в установившемся состоянии, может быть использована в различных задачах аэродинамики.

5.11. Течение при установившемся движении тел в жидкости

Основной задачей динамики жидкостей, имеющей большое практическое значение в различных технических приложениях, является определение поля течения при больших числах Рейнольдса, вызванного установившимся движением тела через покоящуюся на бесконечности жидкость, или, что то же самое, определение обтекания неподвижного тела установившимся и однородным на бесконечности потоком. Как было показано в предыдущем параграфе, при наличии отрыва пограничного слоя еще не получено теоретического решения для установившегося течения в целом; теоретический подход становится еще более затрудненным из-за неизбежного появления турбулентности в результате неустойчивости пограничных слоев и следов при больших числах Рейнольдса. Вследствие этого информация о течении вблизи плохообтекаемых тел получается в основном путем экспериментальных наблюдений и связана прежде всего с влиянием на число Рейнольдса характеристик течения в целом, а не с деталями распределения скорости.

Полная сила, действующая на тело в жидкости, представляет собой наиболее важную с практической точки зрения характеристику обтекания тела при поступательном движении его в покоящейся на бесконечности жидкости. Эта сила слагается из проинтегрированных по поверхности тела касательных напряжений и нормальных напряжений. Сила, обусловленная касательными напряжениями на поверхности тела, обычно имеет направление, почти противоположное направлению скорости тела, и называется *сопротивлением трения*, поскольку она возникает исключительно за счет вязкости или внутреннего трения в жидкости. Сила, обусловленная нормальными напряжениями на поверхности тела при установившемся движении, имеет более сложную природу; обычно принято различать следующие составляющие этой силы (в дополнение к силе плавучести, возникающей под действием силы тяжести на жидкость, см. § 4.1).

а) *Подъемная сила.* Она представляет собой компоненту полной силы в направлении, перпендикулярном направлению движения тела; для тел некоторой формы она имеет большую величину. Подъемная сила обязана своим появлением порождению завихренности на твердой поверхности, о чем будет сказано в § 6.7.

б) *Индуктивное сопротивление.* Возникновение подъемной силы на трехмерном теле сопровождается появлением вихрей, которые тянутся за телом вниз по потоку. По мере увеличения длины этих спутных вихрей тело непрерывно передает кинетическую энергию жидкости; эта энергия определяет сопротивление, известное как индуктивное сопротивление, и выражает ту работу, которую совершает тело для преодоления этой части полного сопротивления. Эта часть полного сопротивления обсуждается в § 7.8.

в) *Сопротивление формы* представляет собой компоненту результирующей сил давления, параллельную (и противоположно направленную) скорости тела, за вычетом индуктивного сопротивления. Это сопротивление сильно зависит от формы и положения тела в жидкости, и в отличие от индуктивного сопротивления оно может быть уменьшено путем подходящего конструирования тела (в тех случаях, когда уменьшение этого сопротивления желательно).

В качестве вступления к обсуждению сопротивления трения и сопротивления формы различных тел заметим, что в случае, когда обтекание тела полностью безвихревое при его установившемся поступательном движении в невязкой жидкости, полное сопротивление тела (исключая силу плавучести) равно нулю. Этот важный вывод следует из того факта, что полностью безвихревое течение при движении конечного трехмерного тела определяется единственным образом путем задания мгновенной скорости тела $\mathbf{U}$ (§ 2.9); в случае же движения цилиндра или двумерного тела оно определяется скоростью $\mathbf{U}$ и циркуляцией скорости

вокруг тела (§ 2.10). Когда скорость U постоянна (циркуляция вокруг цилиндра постоянна в любом случае по теореме Кельвина о циркуляции), картина течения жидкости просто переносится вместе с телом (относительно мгновенного положения тела) без изменения распределения скорости жидкости. Следовательно, полная кинетическая энергия жидкости остается постоянной [1]). Далее поскольку в невязкой жидкости не происходит никакого рассеяния энергии, а в несжимаемой жидкости не происходит никакого излучения энергии в бесконечность за счет звуковых волн или гравитационных волн (при отсутствии изменений плотности или свободной поверхности), то работа, совершаемая телом для преодоления ненулевого сопротивления, может привести только к увеличению кинетической энергии жидкости; а так как эта кинетическая энергия постоянна при установившемся движении тела, то в рассматриваемых условиях сопротивление жидкости движению тела должно быть равно нулю. (Это рассуждение, конечно, не относится к компоненте силы, нормальной к скорости U.)

Тот факт, что при безвихревом обтекании невязкой жидкостью твердого тела, движущегося стационарно и поступательно, оно не испытывает сопротивления со стороны жидкости, иногда называется *парадоксом Даламбера*, поскольку в действительности твердые тела при движении в реальной жидкости испытывают сопротивление. Этот результат находится в резком противоречии с наблюдениями движения плохообтекаемых тел, что и неудивительно, поскольку течение на кормовой части плохообтекаемого тела весьма отличается от предполагаемой безвихревой формы. Однако полученный результат вполне приемлем в случае движения тонких тел в реальной жидкости при больших числах Рейнольдса.

Течение без отрыва пограничного слоя

Сначала рассмотрим относительно простой случай, когда форма и положение в жидкости тела таковы, что в установившемся состоянии отрыва пограничного слоя не происходит. Различные линии тока, лежащие вблизи поверхности тела, следуют от некоторой точки (или точек) на передней части тела до некоторой точки (или точек) на кормовой части тела, где пограничный слой сходит с поверхности тела и становится «следом», толщина которого вблизи тела того же порядка, что и толщина пограничного слоя. Такое безотрывное обтекание может осуществляться лишь тогда, когда (как было показано в § 5.10) полное падение скорости

---

[1]) В случае двумерного тела с ненулевой циркуляцией вокруг него скорость жидкости на большом расстоянии от тела уменьшается как r^{-1}, так что полная кинетическая энергия жидкости теоретически бесконечна. Как мы увидим в § 6.4, приведенное в тексте рассуждение неприемлемо, хотя результат остается верным.

жидкости на внешней границе пограничного слоя мало. В частности, на кормовой части тела внешний поток не должен иметь критической точки, а для выполнения этого поверхность тела (двумерного или трехмерного) должна иметь острую кормовую кромку. Тело должно быть тонким и должно располагаться примерно по направлению потока на бесконечности, так как в противном случае будут иметь место заметные максимумы скорости на боковых сторонах тела с последующим большим уменьшением скорости внешнего потока в направлении к кормовой части тела.

На фото 5.11.1 показана картина обтекания профиля крыла (такие профили обычно используются в авиации); для визуализации потока использовались мельчайшие частицы, переносимые вместе с жидкостью, и короткая выдержка при фотографировании; пограничный слой на фото едва различим в виде коротких черточек на кормовой части тела. (Установившийся пограничный слой с небольшим замедлением основного потока, подобный пограничному слою на верхней части профиля (см. фото 5.11.1), обычно неустойчив и превращается в турбулентный слой; турбулентные пограничные слои менее подвержены отрыву, поскольку поперечные пульсации жидкости могут передавать количество движения от внешних слоев жидкости к медленно движущимся слоям у стенки, однако при определении отрыва турбулентного пограничного слоя качественно применимы те же самые общие соображения, что и для ламинарного слоя.)

В случае безотрывного обтекания возникающая на поверхности тела завихренность остается локализованной в тонком прилегающем к поверхности тела слое и в тонком следе, в котором завихренность переносится далеко вниз по потоку. Толщина пограничного слоя, как ламинарного, так и турбулентного, отнесенная к длине тела, уменьшается до нуля [1]) при стремлении числа Рейнольдса потока к бесконечности, причем для ламинарного слоя эта толщина стремится к нулевому значению быстрее. Следовательно, в пределе при бесконечном числе Рейнольдса течение всюду будет эффективно невязким и безвихревым, за исключением некоторых поверхностей тока, которые мы будем считать особыми, ибо касательная компонента скорости претерпевает разрыв при переходе через такие поверхности. Одна из них — поверхность тела (предельная форма пограничного слоя), а другая — поверхность, содержащая все линии тока, которые отходят вниз по потоку от точки (или точек) отрыва на кормовой части тела (это предельная форма следа за телом). Лишь в окрестности этих особых поверхностей градиент завихренности велик настолько,

[1]) Наличие небольшой шероховатости на поверхности тела может быть причиной того, что при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности толщина турбулентного пограничного слоя будет стремиться в пределе к малому, но ненулевому значению.

что при большом числе Рейнольдса эффекты вязкости становятся заметными.

В случае двумерного тела или цилиндра направление скорости жидкости должно быть непрерывным при переходе через особую поверхность, совпадающую с линией тока, которая идет вниз по потоку от точки отрыва на кормовой части тела; давление жидкости при переходе через эту поверхность, очевидно, непрерывно, а по теореме Бернулли (течение установившееся) заключаем, что непрерывна и величина скорости, так как линии тока по обе стороны от этой поверхности приходят из области далеко вверх по потоку, где условия однородны, и имеют одну и ту же константу в уравнении Бернулли. Эта особая поверхность, простирающаяся вниз по потоку, в данном случае является вырожденной, так как при переходе через нее все параметры течения непрерывны; константа Бернулли и величина скорости справа от особой поверхности меньше, чем где-либо еще; это в сущности и все, что остается от следа при бесконечном числе Рейнольдса, однако эта особенность не оказывает влияния на течение. Следовательно, мы можем рассчитать безвихревое течение, не учитывая существования особых поверхностей в жидкости. Пока не задана циркуляция вокруг цилиндра, безвихревое течение определяется, конечно, не единственным образом (§ 2.10). Наблюдения показывают, что имеется лишь одно значение этой циркуляции, при котором возможно установившееся (или статистически установившееся для турбулентного режима) течение в пограничном слое, а именно то значение, для которого кормовая критическая точка не лежит ни на верхней, ни на нижней частях поверхности двумерного тела и для которого вследствие этого жидкость с верхней и нижней частей тела сходит по касательной к заостренной кормовой кромке; более подробное обсуждение этого важного вопроса по определению циркуляции будет дано в § 6.7 при рассмотрении подъемной силы крыльев.

В случае трехмерных тел указанная выше особая поверхность тока, содержащая все линии тока, которые идут вниз по потоку от точек отрыва на теле, может оказаться не столь безобидной. В этом случае она может переносить возникающую на поверхности тела завихренность с ненулевой компонентой в локальном направлении течения, и это всегда происходит в действительности, когда на тело действует подъемная или боковая сила; в этих случаях имеет место скачок направления скорости при переходе через особую поверхность. Возникновение подъемной силы на теле требует специального рассмотрения, которое будет дано вкратце в § 7.8; здесь же нам достаточно отметить, что по заданной форме тела можно определить характер скачка направления скорости, и тем самым в принципе мы можем найти все безвихревые обтекания (правда, при этом могут возникнуть практически непреодо-

лимые трудности). Если на тело не действует подъемная сила, то на нем обычно не порождается завихренность, направленная вдоль потока, направление скорости жидкости при переходе через особую поверхность непрерывно, а особая поверхность имеет тот же вырожденный вид, что и для двумерного тела.

Таким образом, для всех тел, на которых не происходит отрыв, по заданной форме тела приближенно определяются безвихревое течение вне тела, тонкий пограничный слой и след позади тела (точность определения увеличивается с увеличением числа Рейнольдса, поскольку при использовании условия равенства нулю нормальной скорости на внутренней границе области безвихревого течения наличие пограничного слоя не учитывается). Некоторые аналитические методы для нахождения этого безвихревого течения будут изложены в гл. 6.

Если распределение скорости безвихревого течения на внешней границе пограничного слоя известно, то путем численного интегрирования уравнения пограничного слоя (см. § 5.9) можно вычислить касательное напряжение $\mu\,(\partial u/\partial y)_{y=0}$ в каждой точке поверхности тела. Вводя безразмерные переменные пограничного слоя, как это сделано в § 5.9, и интегрируя компоненту этой поверхностной силы в направлении потока по поверхности тела, мы находим, что для двумерного тела длины L, обтекаемого потоком со скоростью U_0, полное сопротивление трения F на единицу ширины тела по нормали к плоскости течения равно

$$F = k\rho U_0^2 L\,\mathrm{Re}^{-1/2}, \qquad (5.11.1)$$

где коэффициент k зависит только от формы тела, $\mathrm{Re} = LU_0/\nu$. Для трехмерных тел имеется аналогичная формула, в которую вместо L в (5.11.1) входит некоторая характерная площадь.

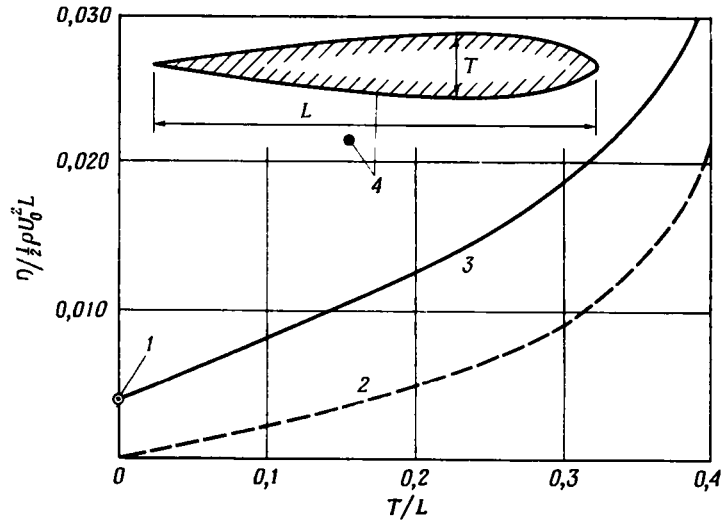
Для хорошообтекаемых тел изменения скорости внешнего потока довольно незначительны (исключая область вблизи передней критической точки, где происходит быстрое ускорение потока), так что развитие пограничного слоя на двумерном теле не сильно отличается от соответствующего развития для плоской полубесконечной пластины при том же числе Рейнольдса, основанном на длине вдоль поверхности тела; формула (5.8.8) для плоской пластины дает значение $k = 1{,}33$ в (5.11.1). Наблюдения показывают, что значение коэффициента k для двумерных тел малой толщины близко к 1,33 при условии, что число Рейнольдса не превышает некоторой величины; с увеличением толщины тела коэффициент k увеличивается; это увеличение частично происходит потому, что скорость на внешней границе пограничного слоя для большинства поверхностей превосходит значение U_0 на величину, которая возрастает с толщиной тела. Если число Рейнольдса, основанное на местной толщине пограничного слоя, превосходит определенное значение (для случая плоской пластины равное

$\approx$600), то, как было отмечено в § 5.8, течение в пограничном слое становится турбулентным и касательное напряжение на стенке значительно увеличивается.

Характер распределения скорости в пограничном слое на кормовой части тела, где происходит замедление внешнего потока, наиболее благоприятен для появления неустойчивости течения. Следовательно, увеличение толщины тонкого тела при заданном числе Рейнольдса и сопутствующее замедление внешнего потока могут быть причиной более раннего перехода к турбулентному режиму, что снова приводит к увеличению сопротивления трения.

В пределе при бесконечном числе Рейнольдса, когда толщина пограничного слоя и толщина следа равны нулю, тело имеет нулевое сопротивление формы, соответствующее полностью безвихревому потоку. При конечном значении числа Рейнольдса существование тонкого пограничного слоя и тонкого следа оказывает малое влияние на форму окружающего тело безвихревого потока и в соответствии с этим — малое влияние на распределение давления по поверхности тела. Линии тока безвихревого потока смещаются в боковом направлении по отношению к телу и к пограничному слою, а толщина пограничного слоя обычно увеличивается от передней кромки к кормовой; следовательно, можно ожидать, что увеличение скорости и падение давления на тех сторонах тела, где линии тока сгущаются, будет более заметно на кормовой части тела при наличии пограничного слоя, чем при его отсутствии; более сильное падение давления на кормовой части служит причиной того, что полное сопротивление тела под действием нормальных напряжений оказывается ненулевым и положительным. Давление в произвольной точке на поверхности тела отличается от соответствующего значения в полностью безвихревом потоке на величину, которая, очевидно, пропорциональна толщине вытеснения пограничного слоя, и, таким образом, сопротивление формы, как и сопротивление трения, пропорционально $\mathrm{Re}^{-1/2}$. Величина сопротивления формы зависит от формы тела; для плоской пластины при нулевом угле атаки она равна нулю, и обычно, чем толще тело, тем сопротивление формы больше; в случае безотрывного обтекания оно, как правило, значительно меньше сопротивления трения.

На рис. 5.11.2 показана экспериментальная зависимость полного сопротивления и сопротивления формы от толщины тела для типичного семейства двумерных профилей крыльев при нулевом угле атаки (эти профили по практическим соображениям имеют кормовую часть в виде тонкого клина); толщина некоторых из этих профилей настолько велика, что пограничный слой, конечно, отрывается. Ясно также, что для более толстых профилей течение в пограничном слое на участке поверхности вблизи кормового среза было турбулентным



Р и с. 5.11.2. Наблюдаемые экспериментально значения полного сопротивления и сопротивления формы для семейства симметричных профилей, подобных показанному на рисунке и расположенных в потоке под нулевым углом атаки; $U_0L/\nu=4\cdot10^5$ (Фейдж, Фокнер и Уолкер (1929)).
1 — значение для ламинарного обтекания плоской пластины; *2* — сопротивление формы; *3* — полное сопротивление; *4* — показанные симметричный профиль и круговой цилиндр имеют одно и то же полное сопротивление при равных скоростях обтекания.

Из энергетических соображений следует, что малое сопротивление при установившемся обтекании тонких тел должно сопровождаться соответствующей диссипацией кинетической энергии за счет вязких напряжений в жидкости. При больших значениях числа Рейнольдса пограничный слой на теле длины L имеет толщину порядка $L\mathrm{Re}^{-1/2}$, так что градиенты скорости в пограничном слое имеют порядок $U_0\mathrm{Re}^{1/2}/L$. Таким образом, скорость диссипации энергии на единицу объема в пограничном слое имеет порядок $\rho\nu U_0^2\mathrm{Re}/L^2$, а полная скорость диссипации энергии в пограничном слое на единицу площади поверхности тела имеет порядок

$$\frac{\rho\nu U_0^2\,\mathrm{Re}}{L^2}\,\delta \quad \text{или} \quad \rho U_0^3\,\mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{5.11.2}$$

(Имеется еще вклад в полную диссипацию от следа за телом, но он меньше, так как в той части течения, где условие прилипания не должно выполняться, градиенты скорости быстро уменьшаются; что касается вклада от области безвихревого течения, то он пренебрежимо мал, поскольку он изменяется линейно по μ и, следовательно, пропорционален Re^{-1}.) Эта оценка для скорости диссипации совпадает с той, которая получается при определении величины работы, совершаемой телом (движущимся со скоростью

U_0), для преодоления полного сопротивления порядка $\rho U_0^2 \mathrm{Re}^{-1/2}$ на единицу площади поверхности тела (ср. (5.11.1)).

Течение с отрывом

Вид течения совершенно изменяется, когда происходит отрыв пограничного слоя, как это бывает при обтекании недостаточно тонкого тела (см. фото 5.10.1) или при обтекании тонкого тела под большим углом атаки (см. фото 5.11.1, *б*). Для таких тел пограничный слой не может прилегать ко всей поверхности, поскольку на кормовой части тела следует ожидать значительного замедления внешнего потока, а это несовместимо с существованием установившегося пограничного слоя. В случае обтекания профиля крыла под большим углом атаки (фото 5.11.1, *б*) на верхней части поверхности довольно близко от передней кромки возникает значительный максимум скорости на внешней границе пограничного слоя и на небольшом расстоянии вниз по потоку от этой точки максимума скорости происходит отрыв; в этом случае пограничный слой лишь слегка соприкасается с верхней поверхностью профиля, и говорят, что крыло «срывается»; этот термин связан с резким падением подъемной силы крыла.

На фотографиях обтекания кругового цилиндра в различные моменты времени после внезапного начала движения (см. фото 5.11.3) показаны как начальные стадии обтекания, описанные в § 5.9, так и поздние, которые не поддаются аналитическому изучению и в которых рост слоя завихренности приводит к радикальному изменению области безвихревого течения. Картина на фото 5.11.3, *б*, по-видимому, получена в момент, близкий к тому, когда в пограничном слое начинается обратное течение. На фото 5.11.3, *в* пограничный слой отделяется и завихренность уносится от кормовой части цилиндра. Область, ограниченная отделившимися линиями тока, продолжает возрастать, и на фото 5.11.3, *д* она уже превосходит размеры цилиндра. Из-за неустойчивости течения его теперь нельзя рассматривать как установившееся. Два неподвижных вихря позади цилиндра приводят к развитию асимметричных колебаний жидкости, а некоторая часть вращающейся в больших вихрях жидкости в конечном счете покидает цилиндр и уносится вниз по потоку (указанные асимметричные колебания, по-видимому, возникают в результате усиления вихрями тех колебаний, которые развивались в следе на более ранних стадиях движения (см. § 4.12)). Унос такого большого количества завихренности из окрестности цилиндра оказывает влияние на течение вблизи цилиндра таким образом, что неподвижные вихри противоположного знака стремятся стать больше, теряют при этом некоторую часть вращающейся жидкости и т. д. При числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 2aU/\nu$), не превышающих ≈ 2500,

эти отделившиеся вихри становятся заметными вниз по потоку и на расстоянии в 4—5 диаметров от цилиндра наблюдаются в виде регулярной «вихревой дорожки»; на каждом из почти прямолинейных и параллельных рядов этой дорожки вихри имеют один и тот же знак. Было отмечено уже, что вихревая дорожка образуется в следе кругового цилиндра при числах Рейнольдса больше 70 (см. фото 4.12.6), а, как видно на фото 5.11.4, вихревая дорожка появляется в аналогичном поле течения при числе Рейнольдса, намного превышающем указанное. Некоторые периодические колебания потока вблизи цилиндра обнаруживаются вплоть до значений $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^5$, при которых пограничный слой на поверхности цилиндра становится турбулентным.

Аналитическое исследование течения на плохообтекаемом теле при его установившемся движении в жидкости становится невозможным из-за образования за телом крупномасштабной неустойчивости течения, как это видно на фото 5.11.1, *б* и 5.11.3, *е*. В то время как для хорошообтекаемого или тонкого тела возникающая вследствие неустойчивости течения турбулентность локализуется в прилегающем к поверхности пограничном слое и тонком следе, в данном случае результирующая турбулентность содержит много крупных вихрей и сопровождается флуктуациями скорости, которые охватывают широкую область следа между двумя отделившимися линиями тока. Эти крупные вихри оказывают заметное влияние на свойства среднего (по времени) потока, причем это влияние трудно выразить в аналитической форме; кроме того, отметим, что измерения параметров потока становятся трудно осуществимыми, а их интерпретация довольно неопределенной. Имеющиеся сведения о течениях такого вида главным образом эмпирические [1]). Как в случае плохообтекаемых тел, так и в случае хорошообтекаемых завихренность, возникающая на поверхности передней части тела, концентрируется в тонком пограничном слое, и вне этого слоя течение остается безвихревым; однако часть границы этой области безвихревого течения, образованная отделившимися линиями тока, имеет сложную меняющуюся со временем неизвестную форму, вследствие чего указанное безвихревое течение определить невозможно.

Хотя течение на плохообтекаемом теле практически неустановившееся, нет оснований сомневаться в существовании стационарного (неустойчивого) решения уравнений движения. Несмотря на чрезвычайную важность этого решения, его вид при больших числах Рейнольдса остается неизвестным. Исходя из общих соображений, можно полагать, что, подобно другим установившимся течениям при больших числах Рейнольдса, оно состоит из обшир-

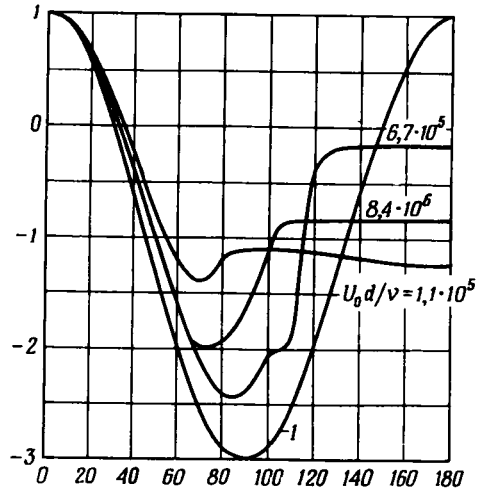
---

[1]) Некоторые экспериментальные результаты приведены в книге: Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I, II, ИЛ, М., 1948.

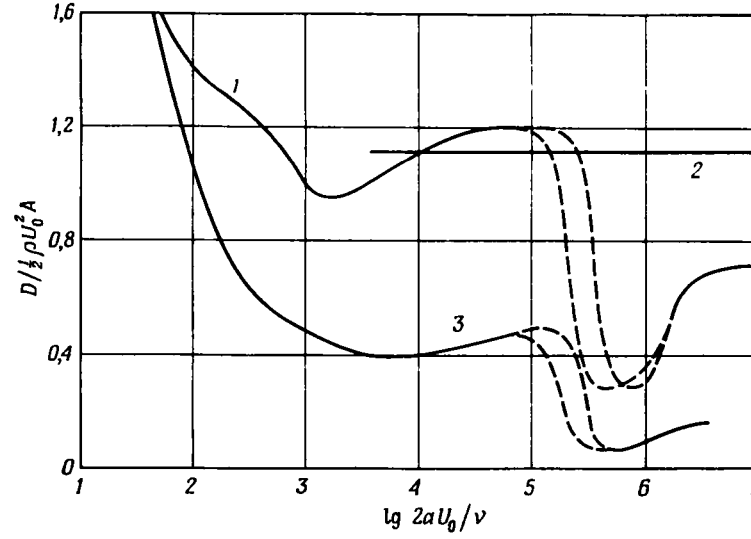
ных областей эффективно невязкого потока, отделенных друг от друга тонкими слоями, которые в пределе при $\mathrm{Re} \to \infty$ становятся особыми поверхностями тока и которые могут охватывать область (невязкого) потока с завихренностью. Основным неизвестным элементом такого течения является форма особой поверхности тока, простирающейся вниз по потоку от точек на теле, в которых происходит отрыв пограничного слоя; более того, неизвестно достоверно, увеличивается ли неограниченно область, охватываемая отделившимися линиями тока, при $\mathrm{Re} \to \infty$ или она принимает некоторую конечную форму. Одно предположение о форме предельного течения, высказанное впервые Кирхгофом (1869) и Рэлеем (1876), состоит в том, что жидкость внутри обширного следа, ограниченного линиями тока, выходящими из точек отрыва потока, находится в покое при постоянном давлении, равном давлению на бесконечности вверх по потоку. Следовательно, скорость жидкости в безвихревом течении по другую сторону от этих линий тока должна быть постоянной и равной значению скорости свободного потока (по теореме Бернулли), а ширина следа, как можно показать, увеличивается неограниченно с увеличением расстояния вниз по потоку. Эта модель течения, принадлежащая Кирхгофу, будет обсуждаться более подробно позже в § 6.13 в связи с задачей о течении воды при наличии газовых или паровых каверн; применительно к этой задаче предположения модели Кирхгофа, по-видимому, наиболее подходят.

Если для тонкого тела главный вклад в сопротивление дает сопротивление трения, то для плохообтекаемого тела наиболее важно сопротивление формы. Сопротивление трения для плохообтекаемого тела имеет в основном ту же величину на единицу площади поверхности, что и для тонкого тела, однако сопротивление формы плохообтекаемого тела во много раз превышает соответствующую величину для тонкого тела. Из приведенных на рис. 5.11.2 результатов видно, как изменяется сопротивление при значительном утолщении тонкого тела.

Когда пограничный слой отрывается от боковой поверхности плохообтекаемого тела, идущие вниз по потоку от точки отрыва линии тока охватывают широкую область, давление в которой изменяется незначительно, поскольку скорости жидкости в этой области намного меньше U_0. Величина этого приблизительно постоянного давления почти та же, что и в безвихревом течении на внешней границе отделившегося пограничного слоя. Таким образом, на большей части кормовой поверхности тела давление имеет столь же малую величину, что и на той стороне тела, на которой скорость превышает скорость свободного потока. На передней части поверхности тела в окрестности критической точки давление велико и вследствие этой продольной асимметрии распределения



Р и с. 5.11.5. Измеренное распределение давления на поверхности кругового цилиндра, помещенного в поток со скоростью U_0, при различных числах Рейнольдса; p_0 — давление на бесконечности.
1 — полностью безвихревой поток; по оси абсцисс — угол в градусах, отсчитываемый от передней критической точки; по оси ординат — $(p-p_0)/(1/2\rho U_0^2)$.



Р и с. 5.11.6. Измеренное сопротивление кругового цилиндра на единицу длины ($A = 2a$), сферы ($A = \pi a^2$) и кругового диска, нормального к потоку ($A = \pi a^2$); все тела имеют одинаковый радиус a. Штриховыми линиями показаны результаты, полученные в различных аэродинамических трубах.
1 — круговой цилиндр; *2* — круговой диск; *3* — сфера.

давления становится большим сопротивление формы. Кроме того, так как изменения давления на поверхности тела довольно существенны из-за изменений скорости того же порядка, что и U_0 (зависимость между ними, по крайней мере на передней части тела, дается уравнением Бернулли), мы можем полагать, что полное сопротивление формы будет иметь тот же порядок, что и произведение величины $^1/_2\rho U_0^2$ на площадь поперечного сечения тела ($^1/_2\rho U_0^2$ — превышение давления в критической точке над давлением на бесконечности). Таким образом, сопротивление плохообтекаемых тел принято обычно выражать в виде *коэффициента сопротивления*

$$C_D = \frac{D}{^1/_2\rho U_0^2 A},$$

где D — полное сопротивление тела в потоке со скоростью U_0 на бесконечности, A — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной потоку на бесконечности. В случае двумерных тел величины D и A относятся, как обычно, к единице ширины в направлении, нормальном к плоскости течения. Безразмерный коэффициент C_D может зависеть только от числа Рейнольдса (§ 4.7), если, конечно, не учитывать влияние шероховатости поверхности тела и флуктуации скорости окружающей тело жидкости; в случае же плохообтекаемых тел при числах Рейнольдса свыше 100 этот коэффициент удобен тем, что его величина имеет порядок единицы.

Приведенные общие соображения подтверждаются результатами измерений распределения давления на поверхности кругового цилиндра, показанными на рис. 5.11.5; мы замечаем, в частности, что на большей части кормового участка поверхности цилиндра давление почти постоянно в отличие от распределения давления при полностью безвихревом обтекании цилиндра. Вверх по потоку от этой области почти постоянного давления пограничный слой прилегает к поверхности цилиндра, а величину скорости U на внешней границе пограничного слоя можно найти по измеренному давлению с помощью теоремы Бернулли:

$$\frac{p - p_0}{^1/_2\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2. \qquad (5.11.3)$$

На рис. 5.11.6 показаны результаты измерений коэффициента сопротивления кругового цилиндра в широком интервале чисел Рейнольдса, который слегка перекрывается с интервалом на рис. 4.12.7. На передней стенке цилиндра при числах Рейнольдса свыше 100 формируется заметный пограничный слой; из графиков видно, что для высоких чисел Рейнольдса коэффициент сопротивления имеет порядок единицы, как об этом уже говорилось выше. Из сравнения сил сопротивления двумерного крылового профиля и кругового цилиндра виден поразительный результат о снижении

сопротивления тела, которое можно получить, придавая ему обтекаемую форму, т. е. такую, при которой не происходит отрыва пограничного слоя; так, на рис. 5.11.2 маленьким черным кружочком показан круговой цилиндр, полное сопротивление которого равно сопротивлению приведенного на рисунке профиля при одной и той же скорости (и при числе Рейнольдса профиля около $4 \cdot 10^5$), и это несмотря на то, что как объем, так и площадь поверхности профиля намного больше объема и площади цилиндра (при равной ширине).

Подобные рассуждения и измерения обычно применимы и к трехмерным телам. На рис. 5.11.6 показано измеренное сопротивление сферы в зависимости от числа Рейнольдса, а также сопротивление плоского кругового диска, расположенного под прямым углом к потоку. В этом последнем случае отрыв пограничного слоя происходит на острой кромке диска при любых числах Рейнольдса, а изменение числа Рейнольдса оказывает малое влияние на величину сопротивления. Коэффициент сопротивления диска близок к ожидаемой величине (единице) — тому значению, при котором давление на всей передней поверхности диска равно давлению в критической точке, а на тыловой поверхности равно давлению в набегающем потоке; фактически же давление на передней поверхности диска непрерывно уменьшается от давления торможения в центре до значения на кромке диска, а уменьшение давления на тыловой поверхности (относительно давления на бесконечности) больше, чем это нужно для компенсации указанного изменения давления на передней поверхности диска; в итоге коэффициент сопротивления диска превышает единицу.

На рис. 5.11.5 и 5.11.6 обнаруживается интересная закономерность. Как можно видеть из рис. 5.11.5, увеличение числа Рейнольдса свыше 10^5 приводит к значительному возрастанию приближенно постоянного давления в широкой области следа за кормовой частью цилиндра. Измерения коэффициента сопротивления кругового цилиндра показывают соответствующее большое падение его при увеличении числа Рейнольдса после достижения некоторого значения в интервале между 10^5 и $4 \cdot 10^5$, связанного с конкретной аэродинамической трубой, в которой проводились измерения. Для сферы подобное падение коэффициента сопротивления происходит почти при том же значении числа Рейнольдса; аналогичным образом изменяются коэффициенты сопротивления и для большинства плохообтекаемых тел, для которых положение точки отрыва не определяется наличием острой кромки. Во всех этих случаях скорость уменьшения коэффициента сопротивления при увеличении числа Рейнольдса сверх критического значения настолько велика, что полное сопротивление тела является убывающей функцией скорости U_0.

Прандтль (1914) высказал утверждение, что объяснение указанного факта связано с поведением пограничного слоя на поверхности цилиндра. Когда число Рейнольдса для тела превосходит некоторое значение, установившееся (ламинарное) течение в пограничном слое становится неустойчивым и может превратиться в турбулентное. В турбулентном пограничном слое скорость обмена количеством движения между различными слоями жидкости намного возрастает вследствие случайных поперечных движений элементов жидкости, и, таким образом, турбулентный пограничный слой препятствует появлению нулевого напряжения на стенке и отрыву при уменьшении скорости внешнего потока более эффективно, чем ламинарный. Следовательно, когда в пограничном слое происходит переход к турбулентному течению, точка отрыва слоя передвигается вниз по потоку. По данным распределения давления на рис. 5.11.5 для кругового цилиндра точка отрыва перемещается вниз по потоку от $\approx 80°$ до $120°$ (угол измеряется от передней критической точки) при увеличении числа Рейнольдса от 10^5 до $7 \cdot 10^5$. Для тела рассматриваемой формы любое смещение точки отрыва вниз по потоку обычно приводит к более узкому следу и меньшему сопротивлению формы. Тот факт, что критическое число Рейнольдса слегка изменяется для различных аэродинамических труб, есть следствие различных степеней турбулентности потоков в аэродинамических трубах; более возмущенному потоку соответствуют более низкие критические числа Рейнольдса, при которых в неустойчивом установившемся течении в пограничном слое развиваются настолько сильные колебания, что поток становится турбулентным до наступления отрыва.

Для демонстрации влияния внешнего возмущения пограничного слоя можно воспользоваться проволочкой или шероховатой полоской, устанавливаемыми на передней части тела; на фото 5.11.7 показано, что наличие проволочки на сфере приводит к затягиванию отрыва и к образованию более узкого следа. Так, в частности, с целью уменьшить сопротивление мяча для игры в гольф его поверхность делается рифленой, что приводит к турбулизации пограничного слоя.

Недавние измерения на круговом цилиндре при числах Рейнольдса в диапазоне между 10^6 и 10^7 (Рошко (1961)), приведенные на рис. 5.11.5 и 5.11.6, показали, что на кормовой части давление падает, а коэффициент сопротивления соответственно увеличивается вплоть до предельного значения $\approx 0{,}7$. В свете этих измерений можно полагать, что указанные изменения величин в интервале чисел Рейнольдса от $\mathrm{Re} = 10^5$ до $\mathrm{Re} = 7 \cdot 10^5$ обусловлены переходом к турбулентному режиму в *отошедшем* пограничном слое на участке вниз по потоку сразу за точкой отрыва с последующим обратным присоединением пограничного слоя (теперь уже турбулентного) к поверхности цилиндра; обратное присоединение

слоя связано с увеличением скорости перемешивания жидкости при турбулентном режиме течения. С этой точки зрения дальнейшие изменения в интервале чисел Рейнольдса от 10^6 до 10^7 следует интерпретировать как происходящие в результате перехода к турбулентному режиму; в прилегающем к поверхности цилиндра пограничном слое задержка отрыва будет при этом небольшой.

Известно, что процесс отрыва ламинарного пограничного слоя и переход к турбулентному течению в отошедшем слое с последующим его присоединением к поверхности тела происходит в некоторых случаях обтекания профилей крыльев, угол атаки которых настолько велик, что пограничный слой на верхней части поверхности отрывается очень близко от передней кромки (как, например, на фото 5.11.1, *б*). При этом на кормовом участке тела может происходить второй отрыв пограничного слоя; однако в любом случае присоединение отошедшего пограничного слоя предотвращает большое увеличение сопротивления тела (и, что более важно, большое уменьшение подъемной силы крыла).

Эти последние примеры показывают, как сильно течение в целом зависит от развития пограничного слоя и в частности от положения точки отрыва. Даже если теоретическое установившееся обтекание тела стремится к предельной форме при $\mathrm{Re} \to \infty$ (оно, вероятно, довольно близко приближается к этой асимптотической форме при $\mathrm{Re} \approx 10^3$ или 10^4), все же неустойчивость следа и отошедшие и прилегающие пограничные слои приводят к появлению многочисленных и важных изменений в реальном течении при еще больших числах Рейнольдса. Переход от ламинарного течения к турбулентному в различных частях поля течения оказывает воздействие на течение в целом; если к тому же учесть и изменение положения точки отрыва, то влияние этих факторов на полное сопротивление и подъемную силу может оказаться крайне неожиданным.

5.12. Струи, свободные слои смешения и следы

Обтекаемые жидкостью твердые стенки являются наиболее распространенным источником завихренности; при достаточно большом числе Рейнольдса на них образуются пограничные слои. Однако для применения идей и приближений теории пограничного слоя вовсе не обязательно наличие твердых стенок в рассматриваемой области жидкости. Имеются три вида установившихся течений, в которых, несмотря на отсутствие твердых стенок, могут быть относительно большие градиенты завихренности в поперечном направлении; сюда относятся: а) узкие струи, в которых значительные градиенты завихренности возникают при истечении из отверстия, а полное изменение скорости поперек

струи остается нулевым; б) свободные слои смешения (сдвига), которые представляют собой переходные слои на общей границе двух потоков жидкости при различных скоростях течения; в) следы, которые образуются под действием завихренности, переносимой вниз по потоку от обтекаемого тела; полное изменение скорости поперек следа снова равно нулю. Эти три вида течений, имеющих сходство с пограничным слоем, будут сейчас кратко обсуждены.

Узкие струи

В § 4.6 мы получили точное решение полного уравнения движения для установившейся струи, задаваемой особой точкой, в которой непрерывно образуется количество движения (не масса) жидкости. Это течение можно рассматривать как некоторую идеализацию реального истечения жидкости с большой скоростью из малого отверстия. В этом частном случае нет необходимости обращаться к приближенным уравнениям движения, а будет полезно кратко остановиться на том, каким образом указанное решение полных уравнений движения связано с решением, которое можно получить из уравнений пограничного слоя.

Для установившегося течения в осесимметричной струе, описываемого соотношениями (4.6.1), (4.6.2) и (4.6.10), соответствующее число Рейнольдса на заданном расстоянии r от отверстия равно

$$\frac{U_{\max} a}{\nu} = \left(\frac{df/d\theta}{\sin\theta}\right)_{\theta=0} \sin\theta_0 = \frac{4\sin\theta_0\cos\theta_0}{1-\cos\theta_0},$$

где $U_{\max}$ — максимальная радиальная скорость, a — полуширина струи, $\theta = \theta_0$ — половина угла раствора конической границы струи. Это число Рейнольдса не зависит от расстояния r (и соответствует числу Рейнольдса $(F/\rho\nu^2)^{1/2}$ из § 4.6 для течения непосредственно у отверстия при большом значении F), так что те следствия, которые получаются при большом числе Рейнольдса, применимы на любых расстояниях от отверстия. Указанное выше число Рейнольдса велико и в случае узкой струи имеет порядок θ_0^{-1}; это как раз те условия, при которых приближения пограничного слоя могут оказаться пригодными. Жидкость, окружающую узкую струю, можно считать приближенно покоящейся при постоянном давлении, так что подходящим уравнением движения типа уравнений пограничного слоя будет просто осесимметричный вариант уравнения (5.7.1), в котором нужно положить $\partial u/\partial t = 0$ и $\partial p/\partial x = 0$. Это уравнение фактически имеет решение (4.6.15), что было показано Шлихтингом (1933) еще до того, как стало известно, что (4.6.15) является асимптотической формой (при $\theta_0 \to 0$) решения полного уравнения движения.

Для установившегося двумерного движения жидкости, вытекающей из отверстия в форме длинной щели, еще не получено

решения полного уравнения движения, поэтому необходимо обратиться к приближенным уравнениям. Как и в случае осесимметричной струи, давление в окружающей жидкости близко к стационарному значению, жидкость однородна и уравнение пограничного слоя (5.7.1) принимает вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{5.12.1}$$

здесь положительное направление оси x совпадает с направлением полной силы, действующей на жидкость в начале координат. Для быстрых узких струй действующая сила определяется главным образом потоком количества движения через некоторую поверхность, окружающую начало координат. Выберем поверхность, которая пересекается с плоскостью (x, y) по прямой $x = \text{const}\ (>0)$, $-\infty < y < \infty$ и по полуокружности большого радиуса, лежащей в основном в области отрицательных значений x; тогда для силы F, действующей на жидкость в расчете на единицу длины щели, имеем

$$F \approx \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dy. \tag{5.12.2}$$

Этот интеграл не должен зависеть от x, поскольку выбор поверхности, окружающей щель, произволен.

Удобно ввести функцию тока ψ, положив $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, так что уравнение сохранения массы будет выполняться тождественно. Ввиду трудности решения дифференциальных уравнений в частных производных вида (5.12.1) мы выясним сначала, существуют ли решения уравнения (5.12.1), зависящие от некоторой комбинации двух независимых переменных. Подходящая гипотеза состоит в данном случае в том, что профили скорости в сечениях струи при различных значениях x имеют одну и ту же форму; это означает, что решение имеет автомодельную форму

$$\psi(x,y) \sim x^p f(y/x^q),$$

где p и q — неизвестные числа. Непосредственно из вида уравнения (5.12.1) следует, что $p + q = 1$, а в силу независимости интеграла (5.12.2) от x получаем $2p - q = 0$, так что мы должны взять

$$p=\frac{1}{3}, \qquad q=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, наша гипотеза сводится к тому, что

$$\begin{aligned} &\psi = 6\nu x^{1/3} f(\eta), \quad \eta = y/x^{2/3}, \\ &u = 6\nu x^{-1/3} f', \quad v = 2\nu x^{-2/3}(2\eta f' - f), \end{aligned} \tag{5.12.3}$$

где множитель 6ν введен для удобства выкладок в дальнейшем. Перепишем теперь уравнение (5.12.1) в виде

$$f''' + 2ff'' + 2f'^2 = 0 \qquad (5.12.4)$$

Проверка нашей гипотезы состоит в том, сможем ли мы найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$f'(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \mp\infty$$

и условию симметрии $f'(\eta) = f'(-\eta)$. Таким решением является

$$f(\eta) = \alpha \operatorname{th} \alpha\eta, \qquad (5.12.5)$$

где α — некоторая постоянная, определяемая из соотношения (5.12.2), которое теперь запишется так:

$$F = 36\rho\nu^2\alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sch}^4 \alpha\eta \, d\eta = 48\rho\nu^2\alpha^3. \qquad (5.12.6)$$

Как и для круглой струи, поток массы в особой точке течения равен нулю.

Таким образом находится решение для двумерной узкой струи с профилем скорости в виде $\operatorname{sch}^2 \alpha\eta$ и шириной, возрастающей как $x^{2/3}$, а единственное ограничение, состоящее в том, что решение имеет предполагаемую подобную форму, не позволяет использовать его для определения развития струи, имеющей заданный профиль скорости при некотором начальном значении x. Однако это не очень большой недостаток, если, как это часто бывает для автомодельных форм, полученное выше решение приближается асимптотически при $x \to \infty$ к решению при произвольном профиле скорости в некоторой начальной точке x. Справедливость этого была подтверждена измерениями Андраде (1939), который нашел, что распределение скорости в струе жидкости, вытекающей из узкой длинной щели под действием давления, подобно вычисленному по (5.12.5).

Число Рейнольдса для струи на расстоянии x от начала, определенное, как и выше, по максимальной скорости и ширине струи, равно

$$\frac{(6\nu x^{-1/3}\alpha^2) \times (x^{2/3}\alpha)}{\nu} = 6\alpha x^{1/3} = \left(\frac{9}{2}\frac{Fx}{\rho\nu^2}\right)^{1/3}. \qquad (5.12.7)$$

Это соотношение верно с точностью до множителя порядка единицы, зависящего от того, насколько точно определена ширина струи. Критерием применимости приближенных уравнений пограничного слоя для описания течения в струе является условие малости угла расширения струи, т. е. условие

$$\left(\frac{Fx}{\rho\nu^2}\right)^{1/3} \gg 1.$$

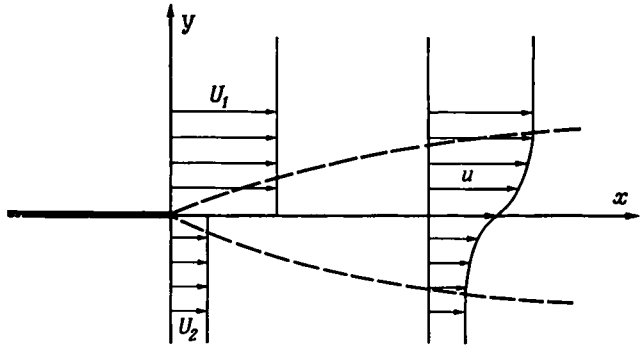
Таким образом, полученное решение становится более точным при возрастании x для заданного значения F, несмотря на то, что вблизи начала струи всегда существует область, в которой уравнения пограничного слоя непригодны. Непригодность решения вблизи $x = 0$ несущественна, поскольку профили скорости реальных струй вблизи отверстия в любом случае не похожи на профили, определяемые по (5.12.5). Когда профиль скорости струи при достаточно большом x принимает форму, соответствующую (5.12.5), дальнейшее развитие струи с расстоянием вниз по потоку будет происходить точно так же, как если бы она начинала развиваться от некоторой условной точки в соответствии с уравнениями пограничного слоя и имела автомодельный профиль скорости непосредственно у начала координат.

Как двумерные, так и трехмерные струи становятся неустойчивыми, если числа Рейнольдса превосходят некоторое критическое значение, и тогда ламинарное установившееся течение превращается в турбулентное, имеющее тот же струйный вид, правда, с большей скоростью расширения. Ввиду того что число Рейнольдса какой-либо части двумерной струи непрерывно увеличивается с возрастанием x, эта струя обязательно становится турбулентной на некотором расстоянии от отверстия; действительно, как показывает практика, лишь в очень малом интервале значений x двумерная струя устойчива и описывается уравнениями ламинарного пограничного слоя.

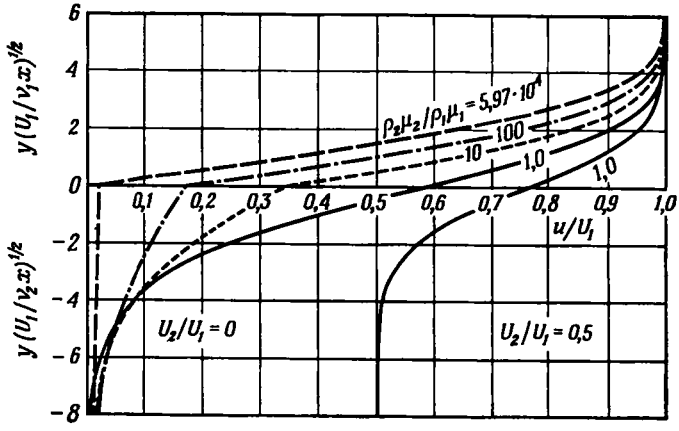
Свободные слои смешения

Простейшим примером переходного слоя между двумя однородными потоками является диффундирующая вихревая пелена (см. § 4.3). Скорость жидкости в плоскостях, параллельных вихревой пелене, постоянна, а развитие течения происходит в большей мере во времени t, чем в направлении координаты x, как это имеет место в установившихся пограничных слоях. Член $\nu\partial^2 u/\partial x^2$, который отбрасывается в уравнениях пограничного слоя, здесь тождественно равен нулю, а давление поперек рассматриваемого слоя равно постоянному значению; таким образом, приведенное в § 4.3 решение является также и решением уравнений пограничного слоя, причем довольно простым, поскольку в нем нет нелинейных членов.

Установившийся свободный слой смешения по определению изменяется вдоль координаты x, и, следовательно, уравнения пограничного слоя теперь применимы. Один довольно общий вид такого слоя возникает, когда два однородных потока одной и той же жидкости движутся в направлении увеличения координаты x с разными скоростями U_1 и U_2 ($< U_1$) и соприкасаются друг с другом при $x = 0$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$ (рис. 5.12.1). Если



Р и с. 5.12.1. Установившийся переходный слой между двумя параллельными потоками, приведенными в соприкосновение при $x = 0$.



Р и с. 5.12.2. Профили скорости в установившемся переходном слое между двумя параллельными потоками жидкостей с различными плотностями и вязкостями (Лок (1951)).

$U_2 = 0$, то мы имеем частный случай двумерного течения на границе широкой щели, через которую вытекает первоначально однородный поток жидкости.

Уравнением пограничного слоя в этом общем случае является уравнение (5.12.1), поскольку давление постоянно вне слоя, а следовательно, и внутри него; граничные условия таковы:

$$u \to U_1 \text{ при } y \to \infty, \qquad u \to U_2 \text{ при } y \to -\infty.$$

Легко можно показать, что существует автомодельное решение, удовлетворяющее этим граничным условиям с переходным слоем, толщина которого пропорциональна $(x\nu/U_1)^{1/2}$; правда, результирующее обыкновенное дифференциальное уравнение для профиля скорости должно решаться численно. Эти профили скорости зависят от отношения U_2/U_1, и они показаны на рис. 5.12.2 для

$U_2/U_1 = 0$ и 0,5. Ясно, что жидкость верхней области никак не может ускоряться за счет контакта с нижним потоком; аналогично жидкость в нижней области не может замедляться. Таким образом, на поверхности контакта этих двух областей ускорение всегда равно нулю и эта поверхность изображается линией тока, которая проходит через начало координат и на которой профиль скорости имеет точку перегиба.

Подобное решение можно получить также и для двух параллельных потоков различных жидкостей, имеющих неодинаковые плотности и вязкости и соприкасающихся указанным выше образом (Лок (1951)). В этом случае независимыми переменными будут: $\eta_1 = y\,(U_1/\nu_1 x)^{1/2}$ для верхней области и $\eta_2 = y\,(U_1/\nu_2 x)^{1/2}$ для нижней области (нельзя брать $\eta_2 = y\,(U_2/\nu_2 x)^{1/2}$, так как U_2 может быть равна нулю); уравнение, аналогичное уравнению (5.12.1), теперь нужно решать для каждой из областей с учетом условия непрерывности скорости и напряжения на поверхности контакта. Из непрерывности касательного напряжения $\mu\, \partial u/\partial y$ следует (при $\mu_1 \neq \mu_2$) разрывность производной $\partial u/\partial y$ на поверхности контакта, хотя вторая производная $\partial^2 u/\partial y^2$, как и раньше, стремится к нулю при подходе сверху и снизу к этой поверхности. В автомодельных переменных упомянутое условие для напряжений

$$(\rho_1\mu_1)^{1/2}\left(\frac{du}{d\eta_1}\right)_{\eta_1 \downarrow 0} = (\rho_2\mu_2)^{1/2}\left(\frac{du}{d\eta_2}\right)_{\eta_2 \uparrow 0}$$

показывает, что решение теперь зависит не только от U_2/U_1, но и от $(\rho_2\mu_2/\rho_1\mu_1)^{1/2}$.

Это решение можно использовать для представления течения воздуха над водой при условии, что ограничение автомодельной формы распределения скорости выполняется всюду с момента соприкосновения потоков. Свободный слой смешения в однородной жидкости обнаруживает заметную неустойчивость, однако для слоя смешения на поверхности контакта воздуха с водой неустойчивость оказывается меньше из-за демпфирующего влияния на эту поверхность силы тяжести. На рис. 5.12.2 показаны профили скорости для случая $U_2/U_1 = 0$ при $\rho_2\mu_2/\rho_1\mu_1 = 10$, 100 и $5{,}97 \cdot 10^4$; последнее значение соответствует течению воздуха над водой.

Следы

Понятие следа обычно относится к области жидкости с ненулевой завихренностью за кормовой частью тела, обтекаемого в остальном однородным потоком жидкости. Распределение скорости в следе вблизи тела должно быть довольно сложным даже в случае установившегося потока, как это можно заключить из рассмотренных в § 4.12 и 5.11 течений жидкости. Однако далеко вниз по по-

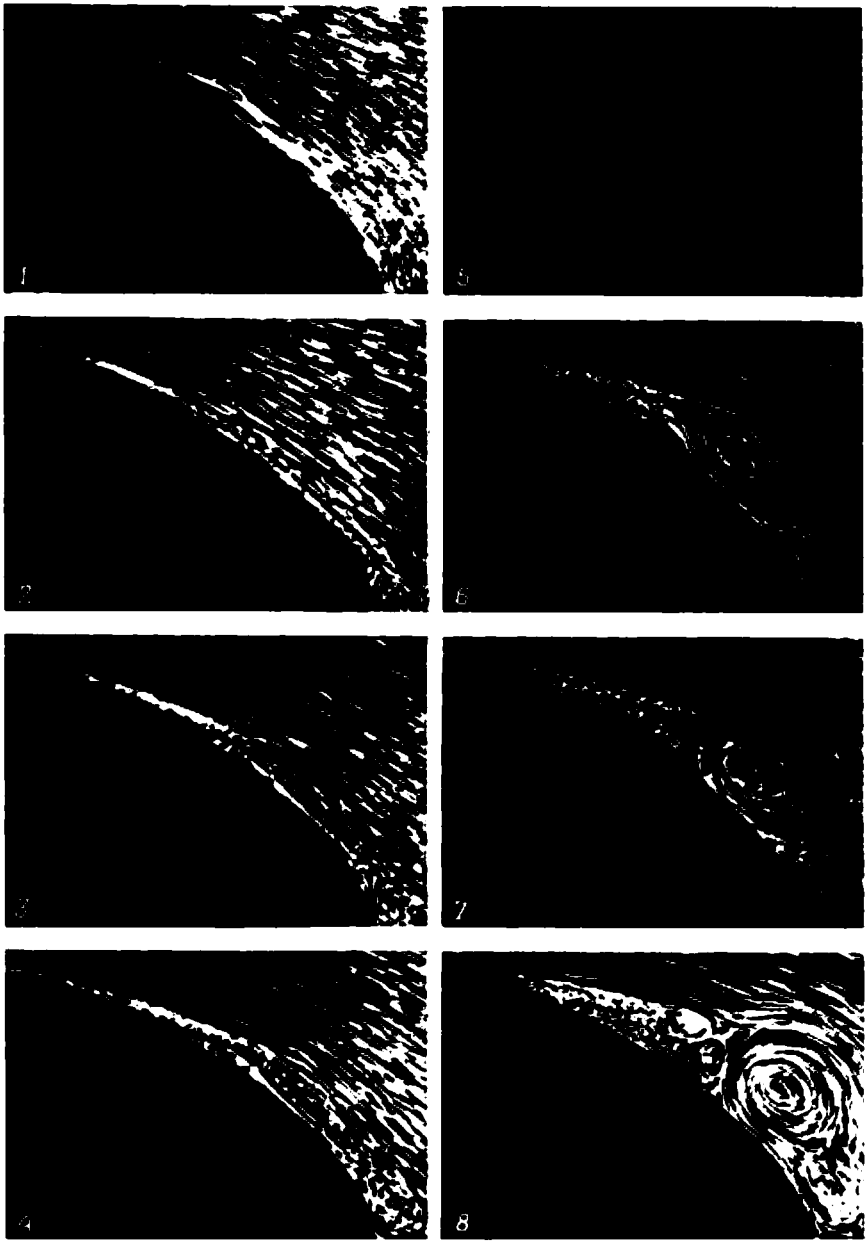
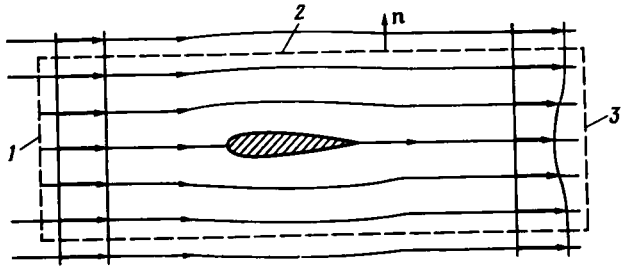


Фото 5.9.3. Последовательные стадии нарастания пограничного слоя на кормовой части плохообтекаемого тела, которое начало двигаться из состояния покоя. Наблюдатель неподвижен относительно тела; движение жидкости происходит слева направо (Прандтль и Титьенс (1935)).



Р и с. 5.12.3. Контрольная поверхность (штриховая линия), охватывающая жидкость, для которой вычисляется поток количества движения.
1 — грань 1, площадь A; *2* — поверхность S; *3* — грань 2, площадь A.

Здесь Q — постоянная, определяемая условиями при некотором начальном значении x с учетом того обстоятельства, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int (U-u)\,dy\,dz = Q \qquad (5.12.10)$$

не зависит от x; в этом можно убедиться, если проинтегрировать обе стороны соотношения (5.12.9). Соответствующее решение для двумерного следа отличается только тем, что оно не будет содержать члены с z в (5.12.8) — (5.12.10) и множитель $(U/4\pi\nu x)$ в (5.12.9) будет входить в степени 1/2. Таким образом, как для двумерного, так и для трехмерного случаев ширина следа, определяемого как область, в которой разность $U - u$ больше некоторой доли ее максимального значения, увеличивается с расстоянием вниз по потоку по параболическому закону.

Из сказанного следует возможность получить соотношение между постоянной Q и полным сопротивлением D тела, порождающего след, несмотря на то, что остается неизвестным соотношение между Q и условиями в следе вблизи тела, где уравнение (5.12.8) неприменимо. Мы воспользуемся уравнением количества движения в интегральной форме, применив тот же подход, что был объяснен в § 3.2 (и проиллюстрирован в § 5.15). В качестве контрольной поверхности выберем цилиндр с образующими, параллельными невозмущенному потоку, и плоскими основаниями площади A, нормальными потоку (рис. 5.12.3); боковая поверхность S цилиндра располагается достаточно далеко от тела, так что след находится внутри ее. На жидкость, содержащуюся в данный момент внутри этой контрольной поверхности, действуют силы, приложенные к самой поверхности, и силы, приложенные к поверхности тела; результирующая последних в направлении оси x равна $-D$. Приравнивая сумму x-компонент этих сил приращению потока количества движения в направлении оси x через

контрольную поверхность, имеем

$$D=\int (p_1+\rho u_1^2-p_2-\rho u_2^2)\,dA-\rho\int u\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS+F, \qquad (5.12.11)$$

где u_1, p_1 и u_2, p_2 — значения компоненты скорости $\mathbf{u}$ вдоль оси x и давление жидкости на основаниях контрольной поверхности вверх и вниз по потоку соответственно, F — силы вязкости, действующие на контрольную поверхность. Полный поток массы через контрольную поверхность должен быть нулевым, так что получаем дополнительное соотношение

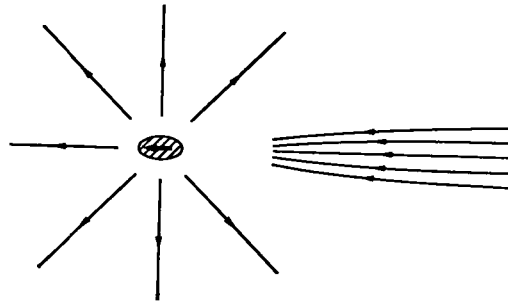
$$\int \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS+\int (u_2-u_1)\,dA=0. \qquad (5.12.12)$$

Мы можем считать, что все элементы контрольной поверхности удалены на большое расстояние от тела, чтобы можно было пренебречь действием сил вязкости на поверхность тела и приближенно определить величины u, u_1, u_2, p_1 и p_2 в (5.12.11). На криволинейной цилиндрической поверхности отклонение от условий свободного потока мало и можно положить $u=U$ во втором интеграле в (5.12.11). С помощью (5.12.12) находим

$$D=\int \{p_1+\rho u_1(u_1-U)-p_2-\rho u_2(u_2-U)\}\,dA. \qquad (5.12.13)$$

Отсюда видно, что наличие дефекта скорости $(u-U)$ в следе эквивалентно наложению на однородный поток некоторого добавочного течения, направленного к телу. Величина объемного расхода для этого течения равна Q из (5.12.10); относительно системы координат, фиксированной в жидкости на бесконечности, величина Q есть скорость, с которой объем жидкости переходит через стационарную плоскость позади тела. Это добавочное течение должно быть компенсировано, как это непосредственно следует из (5.12.12), равным по объему потоком жидкости, направленным в сторону от тела в область безвихревого течения вне следа. Таким образом, наличие следа позади тела связано с некоторым дополнительным потоком типа источника в безвихревом течении, а интенсивность эффективного источника равна Q; как показано в § 2.9, 2.10, такой источник не может вызвать вдали от тела большого отклонения от однородного потока. Очевидно, что течение на больших расстояниях r от тела представляет собой наложение однородного потока и некоторого движения, схематически показанного на рис. 5.12.4, а в области вне следа отклонение скорости от значения в однородном потоке убывает с расстоянием как r^{-2} в трехмерном случае и как r^{-1} — в двумерном. В этой же области применимо уравнение Бернулли, и поэтому подинтегральное выражение в (5.12.13) принимает вид

$$\tfrac{1}{2}\rho\{(u_1-U)^2-v_1^2-w_1^2-(u_2-U)^2+v_2^2+w_2^2\}; \qquad (5.12.14)$$



Р и с. 5.12.4. Течение на большом расстоянии от тела, которое движется справа налево в жидкости, покоящейся на бесконечности; оно состоит из течения в следе и компенсирующего его течения от источника.

отсюда следует, что интеграл по той части площади A, которая лежит вне следа, стремится к нулю по мере увеличения расстояния между телом и основаниями цилиндра.

Вдали от тела линии тока почти параллельны, а изменение давления поперек следа очень мало. Таким образом, предельная форма интеграла в (5.12.13), когда цилиндр становится бесконечно длинным, а значения u_1, u_2, p_1 и p_2 стремятся к значениям свободного потока (u_2 стремится медленнее других), имеет вид

$$D = \rho U \int (U - u_2)\, dA = \rho U Q, \qquad (5.12.15)$$

и величину Q можно теперь оценить посредством интегрирования по поперечной площади следа. Этим определяется постоянная, входящая в асимптотический профиль скорости в следе (5.12.9). Полученное соотношение (5.12.15) между сопротивлением тела и скоростью добавочного течения, обусловленного наличием следа, уже встречалось как следствие озеевского приближения уравнений обтекания сферы при малых числах Рейнольдса (§ 4.10). Данный здесь вывод соотношения (5.12.15) на основе общих уравнений сохранения количества движения показывает, что оно выполняется для любого тела, имеющего нулевую подъемную силу и движущегося стационарно в покоящейся жидкости при произвольном числе Рейнольдса.

Профиль скорости (5.12.9) также имеет много общего с распределением скорости, которое было вычислено в § 4.10 на основе уравнений Озеена для стационарно движущегося тела. Легко видеть, что функция тока (4.10.6), полученная для течения в области далеко вниз по потоку ($r/a \gg \mathrm{Re}^{-1}$) за движущейся сферой и внутри параболоида вращения с $(\pi - \theta)^2 r/a$ порядка 8/Re, дает то же самое распределение продольной скорости, что и соотношение (5.12.9); при этом постоянная Q в (5.12.9) должна определяться из (5.12.15) и соотношения $D = 6\pi a \mu U$, справедливого

при обтекании сферы с малыми числами Рейнольдса. Это совпадение двух распределений скорости в следе, полученных при явно различных условиях из уравнений, в которых нелинейный член $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ заменялся членом $\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}$ (здесь $\mathbf{u}$ — скорость жидкости относительно тела), можно объяснить двумя обстоятельствами. Во-первых, асимптотические ($r/a \gg \mathrm{Re}^{-1}$) функции тока (4.10.5) и (4.10.6), представляющие соответственно течение от источника, связанного со сферой, и добавочное течение к телу из-за наличия следа, зависят от формы тела *только* таким образом, что форма тела влияет лишь на величину объемного расхода добавочного течения, а она, как видно из (5.12.15), определяется полным сопротивлением. Во-вторых, члены, оставленные в первом из уравнений Озеена (4.10.2), но не в (5.12.8), становятся относительно малыми при увеличении расстояния вниз по потоку, так что решения этих двух уравнений совпадают при $x \to \infty$.

Значительные ограничения на применимость полученных выше выражений для распределения скорости возникают из-за неустойчивости установившихся течений в следе, хотя соотношение (5.12.15) остается справедливым и дает связь между средним сопротивлением и средним расходом добавочного течения в нерегулярном следе. Как уже отмечалось (см. фото 4.12.6 и 5.11.4), в следе за круговым цилиндром при числах Рейнольдса $2aU_0/\nu$ в диапазоне между $\approx$70 и 2500 формируется интересная периодическая цепочка вихрей, или «вихревая дорожка». Для чисел Рейнольдса свыше 2500 след позади кругового цилиндра становится турбулентным и имеет нерегулярные пульсирующие скорости; но даже и при более низких числах Рейнольдса на достаточно большом расстоянии вниз по потоку за вихревой дорожкой течение обычно оказывается турбулентным. Известно, что ширина турбулентного следа позади цилиндрического тела увеличивается как $x^{1/2}$, точно так же, как и для установившегося ламинарного течения, хотя коэффициенты пропорциональности имеют различные значения. Число Рейнольдса, основанное на ширине следа и характерной относительной скорости внутри следа (дефекте скорости), является решающим критерием, который определяет при заданном расстоянии вниз по потоку устойчивость следа и его турбулентность. Как для установившегося ламинарного, так и для турбулентного следов позади двумерных тел указанное число Рейнольдса не зависит от x, так что следы остаются либо ламинарными, либо турбулентными до бесконечности вниз по потоку. Таким образом, применимость соотношения (5.12.9) для двумерного случая ограничивается теми числами Рейнольдса для тела, при которых установившийся след устойчив; в случае кругового цилиндра требуемая величина $2aU_0/\nu$ должна быть меньше $\approx$40.

Условия неустойчивости следа позади трехмерного тела не изучены столь хорошо, хотя можно ожидать, что критическое

значение числа Рейнольдса для трехмерного тела выше, чем для цилиндра. Ширина турбулентного следа за трехмерным телом увеличивается как $x^{1/3}$, а максимальное значение дефекта средней скорости уменьшается как $x^{-2/3}$; таким образом, эффективное число Рейнольдса для определенного участка следа уменьшается как $x^{-1/3}$ и течение в следе перестает быть турбулентным на некотором расстоянии от тела. Поэтому можно ожидать, что профиль скорости (5.12.9) будет применимым в установившемся следе за трехмерным телом при числах Рейнольдса, достаточно малых для устойчивости, а также на достаточно большом расстоянии вниз по потоку от тела, след за которым первоначально был турбулентным.

5.13. Колеблющиеся пограничные слои

В многочисленных прикладных задачах при больших числах Рейнольдса скорость течения изменяется периодически со временем; часто это происходит вследствие вынужденного колебания твердой границы. Для некоторых периодических течений уравнения движения допускают линеаризацию, что позволяет получить ряд интересных результатов. Основное предположение, которое применяется здесь для потока со средней нулевой скоростью, имеет следующий вид:

$$|\,\partial\mathbf{u}/\partial t\,| \gg |\,\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,|. \tag{5.13.1}$$

Если скорость изменяется всюду по периодическому закону с частотой n и характерной амплитудой U_0 и если через L обозначить расстояние вдоль линии тока, на котором скорость u заметно изменяется, то величина $|\,\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,|$ имеет порядок U_0^2/L (т. е. поперек линий тока в пограничном слое имеются большие градиенты скорости u) и условие (5.13.1) будет выполняться при [1])

$$nL/U_0 \gg 1. \tag{5.13.2}$$

В случаях, когда периодическое изменение скорости жидкости вызвано поперечным колебанием твердой границы с амплитудой порядка ε, скорость U_0 имеет порядок $n\varepsilon$ и условие (5.13.2) эквивалентно условию

$$\varepsilon \ll L. \tag{5.13.3}$$

(Чтобы распределение скорости оставалось не зависящим от сжимаемости жидкости, как мы и будем предполагать здесь, должно выполняться условие $nL/c \ll 1$, где c — скорость распространения звуковых волн в жидкости; это условие обсуждалось в § 3.6.)

Как известно, завихренность возникает исключительно на границах тела, и если имеется чисто периодическое движение жидко-

[1]) Безразмерный параметр nL/U_0 представляет собой число Струхаля (см. § 4.7).

сти относительно границы, то возникающая завихренность будет попеременно положительной и отрицательной. В этих условиях разумно принять, по крайней мере в качестве приближения, что в течение одного цикла в сумме не порождается никакой завихренности и что завихренность равна нулю всюду, кроме узкой области вблизи границы, где чередующиеся слои отрицательной и положительной завихренности диффундируют одновременно и взаимно уничтожаются [1]). Время диффузии завихренности одного знака от границы равно $2\pi/n$, так что толщина слоя ненулевой завихренности δ имеет порядок $(\nu/n)^{1/2}$. Введем условие

$$\delta \ll L, \tag{5.13.4}$$

которое эквивалентно предположению о том, что число Рейнольдса L^2n/ν велико по сравнению с единицей. В случае твердой плоской границы, колеблющейся в собственной плоскости, в § 4.3 была получена явная оценка для глубины проникания завихренности, а именно $\delta \sim (\nu/n)^{1/2}$.

При $\delta \ll L$ течение почти всюду безвихревое, и, следовательно, зная мгновенные скорость и положение границы, можно определить потенциал скорости. В соответствии с этим безвихревым течением на границе должна существовать ненулевая касательная компонента скорости жидкости относительно этой границы; эту компоненту в случае синусоидального колебания можно записать как действительную часть выражения Ue^{int}, где комплексная величина U изменяется в зависимости от координаты на границе; указанная касательная скорость теперь служит скоростью «внешнего потока» по отношению к пограничному слою ненулевой завихренности. Таким образом, имея в виду, что приближение (5.13.1) справедливо как внутри, так и вне пограничного слоя, для течения в пограничном слое получаем уравнение (см. (5.7.1) и (5.7.8))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(Ue^{int}\right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.13.5}$$

где действительная часть комплексной величины u представляет собой компоненту скорости относительно границы, параллельную ей (направление этой скорости совпадает с направлением «внешнего потока»); через y обозначено расстояние по нормали к границе.

[1]) Отметим, что всегда существуют участки границы, где завихренность путем конвекции переносится в направлении от границы, и мы будем предполагать, что, пока скорость конвекции не изменила своего знака, завихренность не уносится вдаль от поверхности. Это предположение допустимо в том случае, когда не происходит отрыва пограничного слоя. Таким образом, тела с острыми кромками здесь рассматриваться не будут, поскольку для них отрыв пограничного слоя наступает почти сразу же после начала движения. Чем больше становится частота n колебаний, тем меньшего радиуса кривизны кромки тела можно исследовать. В § 5.9 мы видели, что если круговой цилиндр внезапно начинает двигаться с постоянной конечной скоростью, то обратное течение в пограничном слое возникает лишь после того, как цилиндр пройдет расстояние примерно в одну треть радиуса, а наступление отрыва происходит, по-видимому, еще позже; в случае колеблющегося кругового цилиндра, амплитуда движения которого мала по сравнению с радиусом, отрыв пограничного слоя едва ли возможен.

Граничные условия для u суть

$$u \to Ue^{int} \text{ при } y \to \infty$$

и условие на твердой стенке

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Из уравнения (5.13.5) и выписанных граничных условий следует, что зависимость $(Ue^{int} - u)$ от y и t в заданной точке на поверхности тела точно такая же, что и распределение скорости в покоящейся на бесконечности жидкости, ограниченной бесконечной плоской стенкой, скорость которой параллельна этой стенке и равна действительной части выражения Ue^{int}; таким образом, используя (4.3.16), имеем

$$u(y,t) = Ue^{int}\{1 - e^{-(1+i)y/\delta}\}, \tag{5.13.6}$$

где для удобства записи мы положили

$$\delta = \left(\frac{2\nu}{n}\right)^{1/2}. \tag{5.13.7}$$

Тот факт, что U изменяется в зависимости от координаты на границе, не влияет на местное распределение величины u, поскольку мы предполагали, что толщина пограничного слоя мала по сравнению с длиной L, на которой U заметно изменяется. Полученный внешний безвихревой поток и связанное с ним течение в пограничном слое (5.13.6) дают приближение для полного распределения скорости течения в предположениях (5.13.2) и (5.13.4).

Демпфирующая сила, действующая на колеблющееся тело

Как следует из (5.13.6), напряжение трения на границе представляется действительной частью выражения

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu(1+i)\frac{U}{\delta}e^{int}. \tag{5.13.8}$$

Трение на поверхности опережает по фазе на $\pi/4$ скорость внешнего потока Ue^{int} (т. е. оно проходит свой цикл раньше на одну восьмую периода колебаний); это связано с тем, что градиент давления, обусловленный колебаниями, действует на все слои жидкости одинаково и вследствие этого в замедленных слоях вблизи границы происходит более быстрое нарастание скорости в направлении ускорения, чем это происходит в удаленных от границы слоях. Из-за того, что это различие фаз не равно $\pi/2$, в случае колебания твердого тела относительно фиксированного положения на каждом цикле тело совершает отличную от нуля работу против напряжений трения и на тело действует *демпфирующая* сила. Зная форму тела и скорость внешнего безвих-

ревого течения Ue^{int} на границе, мы можем легко определить величину силы, действующей на колеблющееся в покоящейся на бесконечности жидкости тело, поступательная скорость которого равна действительной части выражения $U_0\mathbf{k}e^{int}$ (где U_0 — действительное число, а $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор); эта сила обусловлена касательным напряжением на поверхности тела, определяемым соотношением (5.13.8).

Однако имеется еще вклад нормального напряжения на поверхности в результирующую силу, действующую на тело. Давление на поверхности приближенно равно тому, которое было бы в случае полностью невязкой жидкости и всюду безвихревого течения; точность этого приближения увеличивается по мере стремления отношения δ/L к нулю, т. е. при $Ln^{1/2}/\nu^{1/2} \to \infty$. Следовательно, в качестве первого приближения для результирующей силы давления на поверхность тела можно взять полную силу, действующую на то же самое тело, колеблющееся в невязком потоке. Но безвихревое течение, возникшее в результате движения тела в невязкой жидкости, определяется единственным образом заданием его мгновенной скорости и должно периодически изменяться с той же самой частотой n, что и частота колебаний тела; аналогичным образом кинетическая энергия жидкости является чисто периодической величиной, а поскольку никакого накопления энергии здесь не происходит, то результирующая работа, выполненная телом за один цикл для преодоления нормальных напряжений, в безвихревом потоке равна нулю. (См. также § 6.4, где непосредственно показано, что сила сопротивления при ускоренном движении тела в невязкой жидкости имеет фазу, отличающуюся на $\pi/2$ от фазы скорости тела.) Таким образом, необходимо найти более подходящее приближение для давления на поверхности. Касательные силы на поверхности дают вклад в демпфирующую (безразмерную) силу порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$. Это определяется тем, как именно вязкость μ входит в выражение (5.13.8); вклад от нормальных напряжений должен иметь такой же порядок. Однако доказать это нелегко. Стокс (1881) сумел вычислить поле течения для случая малых колебаний сферы и цилиндра без использования каких-либо предположений о величине числа Рейнольдса; как можно увидеть из его результатов, при $\delta \ll L$ имеется вклад в давление на поверхности тела, обусловленный наличием пограничного слоя; поправка к давлению на поверхности в безвихревом потоке оказалась в точности такой, как если бы, во-первых, сферу или цилиндр заменили другими, радиусы которых превышают прежние на величину порядка δ, а, во-вторых, центры этих эффективно увеличенных тел сместили вниз по потоку от центров исходных тел на величину порядка δ; первое приводит к небольшому увеличению мгновенной результирующей силы, обусловленной нормальными напряжениями, а второе дает вклад в силу

давления, который находится в фазе со скоростью тела, т. е. это вклад в демпфирующую силу.

Для определения демпфирующей силы мы используем несколько иной (и более простой) метод. Как уже отмечалось, безвихревое течение и связанное с ним течение в пограничном слое (5.13.6) дают хорошую аппроксимацию распределения скорости во всем поле течения. Следовательно, мы располагаем всем необходимым, чтобы оценить полную скорость диссипации энергии в жидкости и тем самым определить среднюю скорость, с которой тело производит работу. Итак, полная скорость диссипации в пограничном слое (толщина которого δ, а скорость внешнего потока U_0) имеет порядок $\mu U_0^2/\delta^2$ на единицу объема жидкости или $\mu U_0^2 A/\delta$ в расчете на всю площадь A поверхности тела; вклад от области безвихревого течения имеет порядок $\mu U_0^2/L^2$ на единицу объема жидкости или $\mu U_0^2 A/L$ для всего поля течения; ясно, что последним вкладом можно пренебречь. Внутри пограничного слоя местная скорость жидкости почти параллельна границе, так что для скорости диссипации энергии на единицу объема в некоторой точке пограничного слоя из (5.13.6) получаем

$$\mu\left\{\mathscr{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}^2=\frac{2\mu U^2}{\delta^2}e^{-2y/\delta}\cos^2\left(nt+\frac{\pi}{4}-\frac{y}{\delta}\right), \qquad (5.13.9)$$

где через $\mathscr{R}$ обозначена действительная часть соответствующей комплексной величины; здесь величина U действительная, так как все области внешнего безвихревого потока совершают колебания в одной и той же фазе. Среднее значение за один цикл скорости диссипации энергии в пограничном слое на единицу площади поверхности тела для точки, где безвихревой поток колеблется с амплитудой U, таким образом, равно

$$\int_0^\infty \frac{\mu U^2}{\delta^2}e^{-2y/\delta}\,dy=\frac{\mu U^2}{2\delta}, \qquad (5.13.10)$$

а средняя полная скорость диссипации получается путем интегрирования по поверхности тела A. Теперь, если через $\mathbf{F}\mathbf{k}e^{int}$ обозначить демпфирующую силу, действующую на тело в фазе со скоростью тела $U_0\mathbf{k}e^{int}$, то средняя скорость, с которой тело совершает работу против приложенных к нему сил со стороны жидкости, равна $^1/_2\,U_0F$; следовательно,

$$\frac{1}{2}U_0F=\frac{\mu}{2\delta}\int U^2\,dA. \qquad (5.13.11)$$

Чтобы продвинуться дальше, нам нужно знать форму тела и по ней определить U. Для сферы из (2.9.28) (после подходящего изменения обозначений) находим

$$U=\tfrac{3}{2}U_0\sin\theta, \quad \int U^2\,dA=6\pi a^2U_0^2,$$

а для кругового цилиндра (на единицу длины) из (2.10.12) получаем

$$U = 2U_0 \sin\theta, \quad \int U^2\, dA = 4\pi a U_0^2,$$

где a — радиус, θ — полярный угол, причем направление $\theta = 0$ совпадает в обоих случаях с направлением вектора $\mathbf{k}$. Таким образом,

$F = 6\pi a^2 \mu U_0/\delta$ для сферы,

$F = 4\pi a \mu U_0/\delta$ для кругового цилиндра (на единицу длины).

Из (5.13.8) можно легко найти, что вклад в F от касательных напряжений на поверхности тела составляет 2/3 полной величины F для сферы и 1/2 — для цилиндра; остальная доля демпфирующей силы, очевидно, обусловлена действием нормальных напряжений, зависящих от наличия пограничного слоя. Выразим в безразмерных коэффициентах, как это обычно принято, полученные выше демпфирующие силы:

$$\frac{F}{\pi a^2 \cdot {}^1/_2 \rho U_0^2} = 12\frac{\mu}{\rho U_0 \delta} = 6\sqrt{2}\left(\frac{\nu}{U_0 \varepsilon}\right)^{1/2} \quad \text{для сферы,} \tag{5.13.12}$$

$$\frac{F}{2a \cdot {}^1/_2 \rho U_0^2} = 4\pi\frac{\mu}{\rho U_0 \delta} = 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{\nu}{U_0 \varepsilon}\right)^{1/2} \quad \text{для кругового цилиндра,} \tag{5.13.13}$$

где $\varepsilon = U_0/n$ — амплитуда колебаний центра тела. Изменение демпфирующей силы по закону $\mathrm{Re}^{-1/2}$ в случае безотрывного течения в пограничном слое нами уже отмечалось; новое состоит в том, что число Рейнольдса основано на амплитуде ε колебаний, а не на линейном размере тела.

Для свободно колеблющегося упругого кругового цилиндра плотности ρ_s, такого, как струна фортепиано, средняя полная энергия цилиндра равна ${}^1/_2 \pi a^2 \rho_s U_0^2$ на единицу длины и затухание колебаний под действием сил вязкости [1]) определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\pi a^2 \rho_s U_0^2\right) = -\frac{1}{2}U_0 F = -2\pi\frac{a\mu U_0^2}{\delta}.$$

Таким образом, $U_0^2 \sim e^{-\beta n t}$, и поэтому удельное уменьшение энергии цилиндра за один цикл приближенно равно

$$2\pi\beta = 8\pi\frac{\mu}{a\rho_s n\delta} = 4\pi\frac{\rho}{\rho_s}\left(\frac{2\nu}{na^2}\right)^{1/2}. \tag{5.13.14}$$

Измерения скорости потери энергии свободно колеблющегося кругового цилиндра за счет демпфирования жидкости показали,

[1]) Часть энергии колеблющегося цилиндра затрачивается также на прямую генерацию звуковых волн в жидкости, но она обычно намного меньше расходуемой на преодоление сил вязкости; что же касается косвенной потери энергии за счет акустического излучения резонатором, то она может и не быть малой.

что при больших значениях отношения a^2n/ν измеренная демпфирующая сила хорошо согласуется с полученной выше оценкой для колебаний с амплитудой ε, не превышающей $\approx 0{,}1\ a$.

Установившееся вторичное течение, обусловленное колеблющимся пограничным слоем

Интересные следствия связаны с другим свойством распределения скорости (5.13.6), а именно с быстрым изменением амплитуды колебаний поперек пограничного слоя. В этом случае, когда либо амплитуда, либо фаза скорости «внешнего потока» Ue^{int} в двумерном течении изменяется с изменением координаты x, направленной вдоль этого внешнего потока, из уравнения сохранения массы видно, что должна существовать ненулевая компонента скорости порядка $\delta dU/dx$, нормальная к границе пограничного слоя; в явном виде она выражается действительной частью от

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -e^{int}\frac{dU}{dx}\int_0^y \{1 - e^{-(1+i)\,y/\delta}\}\,dy =$$

$$= -e^{int}\frac{dU}{dx}\left\{y - \frac{\delta}{1+i} + \frac{\delta}{1+i}\,e^{-(1+i)\,y/\delta}\right\}. \qquad (5.13.15)$$

Если окажется, что действительные части величин u и v в некоторой точке изменяются с разностью фаз, отличной от $\pi/2$, так что среднее их произведения не равно нулю, то в течение одного цикла колебания должен происходить перенос x-компоненты количества движения через элемент поверхности, нормальный направлению y. Это эффективное напряжение, появляющееся в результате увеличения амплитуды скорости u с увеличением расстояния от границы, будет изменяться поперек пограничного слоя и, таким образом, будет приводить к возникновению ненулевой средней силы, действующей на жидкость. Получающееся в результате установившееся движение жидкости может оказаться слабым, но, поскольку оно приводит к перемещению значительного количества регулярно колеблющейся жидкости, его влияние иногда становится важным. Такое установившееся течение, по-видимому, возникает при любом колебательном движении, в котором имеется ненулевой средний поток количества движения через поверхности в жидкости; можно ожидать, что оно будет более значительным в том случае, когда существует пограничный слой, в котором имеется большой поперечный градиент амплитуды колебаний скорости (а также напряжения).

Для определения указанного установившегося течения вернемся к уравнению пограничного слоя, в котором сохранены нелинейные члены. С целью упрощения выкладок движение будем считать двумерным. Пусть u_1 и U_1 — действительные (не комплекс-

ные) скорости жидкости относительно границы, изменяющиеся по синусоидальному закону, соответственно внутри и на внешней границе пограничного слоя; u_1 и U_1 были выше определены линейной теорией; пусть $u_1 + u_2$ и $U_1 + U_2$ удовлетворяют полным нелинейным уравнениям, которые применимы как внутри пограничного слоя, так и на его границе соответственно. Тогда, поскольку $|u_2|$ и $|U_2|$ предположительно малы по сравнению с $|u_1|$ и $|U_1|$, получаем приближенное уравнение для u_2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{\partial U_2}{\partial t} = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}. \quad (5.13.16)$$

Выражения для u_2 и U_2, очевидно, состоят из членов, пропорциональных $\sin 2nt$ и $\cos 2nt$, и постоянных. Последние и представляют искомое установившееся течение; выполнив осреднение всех членов уравнения (5.13.16) по одному циклу, получим

$$-\nu \frac{\partial^2 \overline{u_2}}{\partial y^2} = \overline{U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}} - \overline{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}} - \overline{v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}}. \quad (5.13.17)$$

Так как скорость U_1 есть действительная часть выражения $U(x)\, e^{int}$ (где U — в общем случае комплексная величина), то можно записать

$$U_1 = \frac{1}{2}(Ue^{int} + U^* e^{-int}),$$

где звездочкой обозначена сопряженная комплексная величина; далее,

$$\overline{U_1^2} = \frac{1}{2} UU^*.$$

Скорости u_1 и v_1 — действительные части комплексных величин u и v, определяемых соотношениями (5.13.6) и (5.13.15), так что их можно записать аналогичным образом. Исключая теперь эти три скорости из правой части уравнения (5.13.17), получаем

$$-\nu \frac{\partial^2 \overline{u_2}}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \frac{d(UU^*)}{dx} \{1 - (1 - e^{-\alpha y})(1 - e^{-\alpha^* y})\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathscr{R} \left\{ U^* \frac{dU}{dx} \frac{\alpha^*}{\alpha} e^{-\alpha^* y} (\alpha y - 1 + e^{-\alpha y}) \right\} \equiv G(x, y), \quad (5.13.18)$$

где $\alpha = (1 + i)/\delta$. Искомая скорость $\overline{u_2}$ определяется этим уравнением с учетом граничного условия на твердой стенке

$$\overline{u_2} = 0 \text{ при } y = 0$$

и условия, выражающего тот факт, что при $y/\delta \to \infty$ скорость $\overline{u_2}$ стремится к постоянной.

Уравнение (5.13.18) формально определяет скорость $\overline{u_2}$ установившегося течения, которое имеет эффективно неизменное

направление и возникло под действием массовой силы G, направленной вдоль x; эта сила определяется просто приращением количества движения в направлении оси x в единицу времени, обусловленным малыми колебательными движениями жидкости в направлении оси y. Функция $G(x, y)$ медленно изменяется по x, но быстро по y и обращается в нуль вне пограничного слоя; это свидетельствует о том, что все поле рассматриваемого установившегося течения обусловлено эффективной касательной силой, действующей на жидкость в тонком слое вблизи границы. Поскольку G быстро изменяется поперек пограничного слоя, величина $\overline{u}_2$ также должна быстро изменяться по y; это означает, что распределение скорости $\overline{u}_2$ имеет характерный для пограничного слоя вид. Следует отметить, что мы не предполагали, что число Рейнольдса вторичного установившегося движения велико и что вязкая диффузия завихренности, связанной с этим течением, является пренебрежимо малой везде, кроме окрестности границы. Скорость u_1 быстро изменяется поперек тонкого слоя вблизи границы, что следует из обычных рассуждений, а быстрое изменение величины $\overline{u}_2$ поперек того же слоя обусловлено исключительно характером распределения эффективной массовой силы G.

Если ограничиться первым приближением скорости, т. е. u_1, то распределение скорости в пограничном слое определяется течением вне его. Однако для «поправочного» члена $\overline{u}_2$ справедливо обратное утверждение. При интегрировании уравнения (5.13.18) величина $\overline{U}_2$ неизвестна, и мы вынуждены взять в качестве внешнего граничного условия

$$\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial y} \to 0 \quad \text{при } y \to \infty,$$

что соответствует отсутствию причины быстрого изменения скорости установившегося течения вне пограничного слоя.

Решение уравнения (5.13.18) при этих граничных условиях было найдено Шлихтингом (1932), и оно сложным образом зависит от y. Наиболее интересное свойство этого решения состоит в том, что при $y \to \infty$ величина $\overline{u}_2$ отлична от нуля; сейчас мы убедимся в этом. Из (5.13.18) и приведенных выше граничных условий имеем

$$\nu \overline{u}_2 = \int_0^y \left\{ \int_{y''}^{\infty} G(y')\, dy' \right\} dy'';$$

отсюда находим, что $\overline{u}_2 \to \overline{U}_2$ при $y \to \infty$, где

$$\overline{U}_2 = \frac{2}{\delta^2 n} \int_0^{\infty} yG(y)\, dy. \tag{5.13.19}$$

Подставим в (5.13.19) выражение для $G(y)$ из (5.13.18); после некоторых преобразований, положив $U = Ae^{i\gamma}$, где амплитуда A и фазовый угол γ зависят только от x, получим

$$\overline{U_2} = \frac{3}{8n}\left\{-\frac{d(UU^*)}{dx} + i\left(U^*\frac{dU}{dx} - U\frac{dU^*}{dx}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{3}{8n}\left(\frac{dA^2}{dx} + 2A^2\frac{d\gamma}{dx}\right). \qquad (5.13.20)$$

Это выражение определяет в точках на границе пограничного слоя величину средней скорости, которая обусловлена балансом между эффективной массовой силой G, действующей на жидкость вблизи границы, и силами вязкости, возникающими за счет изменения $\overline{u}_2$ в поперечном направлении. Отношение $\overline{U}_2$ к U_0 (амплитуде флуктуаций скорости) имеет порядок U_0/nL, т. е. мало по сравнению с единицей. Примечательно, что величина $\overline{U}_2$ не зависит от вязкости жидкости.

Теперь мы можем, вообще говоря, определить распределение средней скорости во всей области вне пограничного слоя, используя в качестве граничного условия для этого распределения соотношение (5.13.20). Если вне пограничного слоя течение в точности безвихревое, то в нем не может существовать какое-либо установившееся течение, поскольку безвихревое движение полностью определяется нормальной компонентой мгновенной скорости границ и должно быть колебательным, как и движение границы. Однако имеет место медленный перенос завихренности от установившегося течения вблизи границы, и в конечном счете по прошествии некоторого промежутка времени после начала движения из состояния покоя во всей жидкости должна появиться установившаяся завихренность второго порядка малости. Вид уравнения, которому удовлетворяет средняя скорость в области вне пограничного слоя, зависит от эффективного числа Рейнольдса $\overline{U}_2 L/\nu$ установившегося течения. С учетом (5.13.20) это число Рейнольдса можно записать как

$$U_0^2/n\nu \quad \text{или} \quad \varepsilon^2/\delta^2,$$

где ε, как и выше, представляет собой амплитуду колебаний твердого тела в тех случаях, когда эти колебания служат источником движения; выписанные величины могут быть либо меньше, либо больше единицы в соответствии с налагаемыми условиями (5.13.4) и (5.13.2) (или (5.13.3)). В первом случае перенос завихренности, связанной с установившимся течением, происходит главным образом за счет вязкой диффузии, а во втором случае всюду преобладает конвекция, за исключением некоторых тонких слоев, один из которых расположен на твердой границе и имеет толщину, намного большую толщины пограничного слоя первичного коле-

блющегося течения. Соответствующие приближенные уравнения для описания этих двух случаев и решение этих уравнений мы здесь обсуждать не будем [1]).

Приложения теории установившегося вторичного течения

Как было отмечено ранее, рассмотренное выше установившееся течение представляет особый интерес по той причине, что оно вызывает повсеместное перемещение элементов жидкости. Это перемещение связано со средней скоростью данного жидкого элемента, которая может отличаться от средней скорости жидкости в точке; попытаемся найти зависимость между этими скоростями. Пусть $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, t)$ — скорость в момент t элемента жидкости, который в предыдущий момент t_0 находился в точке $\mathbf{x}_0$, и пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — скорость жидкости в момент t в точке $\mathbf{x}$. Тогда без каких-либо приближений получаем

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{u}\left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{w}\, dt,\ t\right).$$

Для значений $t - t_0$ порядка периода колебаний перемещение элемента жидкости мало по сравнению с L, так что приближенно

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \left\{\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{w}\, dt\right)\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\right\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \qquad (5.13.21)$$

и скорость $\mathbf{w}$ в правой части (5.13.21) можно с достаточной точностью заменить на $\mathbf{u}$. Теперь можно получить второе приближение для скорости вторичного течения; с этой целью нужно воспользоваться первым приближением для оценки нелинейного члена, т. е. тем же способом, который применялся при выводе уравнения (5.13.16). Взяв среднее за один цикл и снова положив $U = Ae^{i\gamma}$, мы найдем среднюю скорость элементов жидкости на границе пограничного слоя (где $\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}$ приближенно параллельны твердой границе)

$$\overline{W}_2 = \overline{U}_2 + \frac{i}{4n}\left(U^*\frac{dU}{dx} - U\frac{dU^*}{dx}\right) = U_2 - \frac{A^2}{2n}\frac{d\gamma}{dx}. \qquad (5.13.22)$$

Таким образом, средняя скорость элемента жидкости, находившегося в точке $\mathbf{x}_0$, и средняя скорость жидкости в точке $\mathbf{x}_0$ различаются по кинематическим причинам всякий раз, когда фаза γ флуктуаций скорости изменяется в зависимости от расстояния x по направлению скорости; это различие, не зависящее непосредственно от вязкости, имеет тот же вид, что и один из двух членов в (5.13.20), обусловленных влиянием вязкости у твердой границы.

---

[1]) Этой задаче посвящены статьи Лонге-Хиггинса (1953) и Стюарта (1966).

Многие колебательные движения жидкости имеют вид либо «стоячей волны», когда фаза γ колебаний не зависит от координаты, либо вид «прогрессивной волны», когда амплитуда A не зависит от координаты. Движение первого типа возникает в том случае, когда твердое тело колеблется около некоторого среднего положения; для этого движения сразу вне пограничного слоя, согласно (5.13.20) и (5.13.22), имеем

$$\overline{U_2} = \overline{W_2} = -\frac{3}{8n}\frac{dA^2}{dx}; \qquad (5.13.23)$$

отсюда видно, что элементы жидкости перемещаются в те области, где амплитуда A колебаний минимальна. В случае колебаний кругового цилиндра (радиуса a), скорость центра которого в направлении $\theta = 0$ по нормали к оси равна действительной части от $U_0 e^{int}$, мы имеем

$$U = A = 2U_0 \sin\theta,$$

так что скорость смещения элементов жидкости сразу вне пограничного слоя равна

$$\overline{U_2} = \overline{W_2} = -\frac{3U_0^2}{2na}\sin 2\theta \qquad (5.13.24)$$

(положительное значение скорости соответствует увеличению угла θ). Это смещение жидкости вокруг поверхности цилиндра по направлениям к передней и кормовой критическим точкам приводит к возникновению циркуляции жидкости как целого внутри каждого квадранта; качественно такую картину можно наблюдать при колебании кругового цилиндра в баке с водой, поверхность которой покрыта блестящими частицами.

Колебания жидкости типа стоячей волны возникают также в том случае, когда неподвижное твердое тело погружено в жидкость, через которую проходят плоские звуковые волны, при условии, что длина звуковой волны больше размера тела [1]); получающееся в результате установившееся вторичное движение называют «акустическим течением». Другое акустическое явление, которое можно объяснить рассмотренными выше эффектами колебаний вязкой жидкости, состоит в том, что мелкие частицы пыли стремятся скапливаться в узловых точках (скорости) на стенках трубы, в которой поддерживается стоячая звуковая волна (так называемая трубка Кундта). В этом случае снова применим анализ для несжимаемой жидкости, если $\lambda \gg \delta$, где λ — длина звуковой волны. Поскольку здесь $A = A_0 \sin(2\pi x/\lambda)$, то из (5.13.23) получаем

$$\overline{U_2} = \overline{W_2} = -\frac{3A_0^2}{8c}\sin\frac{4\pi x}{\lambda}, \qquad (5.13.25)$$

[1]) Из акустической теории известно, что при выполнении этого условия относительное течение вблизи тела приближенно будет тем же самым, как если бы жидкость была несжимаемой; поэтому здесь применимы полученные выше результаты.

где $c = n\lambda/2\pi$ — скорость распространения звуковой волны. Во внутренней области жидкости возникает циркуляция, соответствующая этому установившемуся течению по направлению к узловым точкам $x = 0, {}^1/_2\lambda, \lambda, \ldots$ сразу вне пограничного слоя; при этом над пучностями жидкость притекает к стенке трубы, а над узлами течет от стенок; поле установившегося течения в этом случае (без учета приближения пограничного слоя к исходному движению вблизи стенки) было вычислено Рэлеем (1883). Мелкие частицы пыли могут скапливаться на стенке в таких местах, в которых они не испытывают возмущений от исходного периодического движения, т. е. в узловых точках скорости, и они переносятся в такие места под действием вторичного установившегося течения.

Периодические течения, возникающие в воде постоянной глубины при прохождении фронта прогрессивной волны, служат примером течений другого вида, в которых фаза γ изменяется с координатой. Смещение жидких элементов в таких течениях может иметь важные практические приложения, такие, как перенос осадочных пород вблизи дна. Амплитуда синусоидальных колебаний жидкости сразу вне пограничного слоя на горизонтальном твердом дне не зависит от положения на нем, так что из (5.13.20) и (5.13.22) имеем

$$\overline{U_2} = -\frac{3A^2}{4n}\frac{d\gamma}{dx}, \quad \overline{W_2} = -\frac{5A^2}{4n}\frac{d\gamma}{dx} \tag{5.13.26}$$

Кроме того, мы имеем здесь $\gamma = -2\pi x/\lambda$ (направление распространения фронта волны соответствует увеличению координаты x), где λ — длина волны. Таким образом, сразу вне пограничного слоя на твердом дне получаем средние скорости жидкости в точках и скорости жидких элементов соответственно

$$\overline{U_2} = \frac{3A^2}{4c}, \quad \overline{W_2} = \frac{5A^2}{4c}, \tag{5.13.27}$$

где c — скорость распространения фронта волны. Известно, что амплитуда A колебаний уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону, а дополнительная скорость смещения жидкости, обусловленная влиянием вязкости, имеет заметную величину только на расстоянии от дна, не превышающем примерно одну длину волны. Наблюдения обнаруживают повсеместное установившееся смещение малых твердых частиц вблизи дна в направлении распространения волны, причем скорость смещения близка к теоретическому значению $5A^2/4c$.

Как мы увидим в следующем параграфе, имеется еще «пограничный слой» на свободных поверхностях, который также приводит к смещению жидкости вблизи поверхности при прохождении фронта волны (Лонге-Хиггинс (1953)).

5.14. Течения со свободными поверхностями

Пограничный слой на свободной поверхности

Хотя твердые границы являются наиболее общим источником завихренности, а следовательно, и пограничных слоев в течениях при больших числах Рейнольдса, случай границы с нулевым касательным напряжением позволяет выявить интересные особенности и заслуживает обсуждения. Так, на «свободной» поверхности жидкости (§ 3.3) нормальная компонента напряжения равна сумме постоянного члена и зависящего от поверхностного натяжения, а касательная компонента равна нулю.

Следуя порядку изложения в предыдущих параграфах, полезно рассмотреть течение жидкости, которое возникает из состояния покоя, если всем границам придать заданные скорости движения. Непосредственно после начала движения границ движение жидкости будет всюду безвихревым. Нам нужно выяснить, может ли такое движение удовлетворить полным граничным условиям; если ответ утвердительный, то безвихревое движение сохранится и установившимся состоянием всюду будет одно из безвихревых течений. Далее, если форма свободной границы была задана заранее, то безвихревое течение было бы полностью определено, а условия для нормальной и касательной компонент напряжений на свободной границе остались бы в общем случае неудовлетворенными. В действительности форма свободной границы изменяется при движении жидкости и принимает тот или иной вид в соответствии с граничными условиями. Одно из двух граничных условий удовлетворяется первоначальным безвихревым течением — это условие для нормальной компоненты напряжения; действительно, любое отклонение нормального напряжения на поверхности жидкости от заданного значения повлечет за собой возникновение бесконечного ускорения частиц жидкости на границе в направлении по нормали к ней и, таким образом, произойдет быстрое изменение формы свободной границы. Следовательно, мы можем предположить, что во все моменты времени форма свободной границы такова, что нормальное напряжение на границе равно сумме постоянной и некоторого скачка давления, обусловленного поверхностным натяжением. В общем случае этим полностью определяется начальное безвихревое движение и форма свободной границы.

Остается еще условие равенства нулю касательного напряжения на границе, которое в общем случае не может быть удовлетворено начальным безвихревым движением. При любом отклонении касательного напряжения в безвихревом течении от нулевого значения в точках вблизи свободной границы на границе возникает бесконечное ускорение жидкости, параллельное границе и направленное так, чтобы касательное напряжение в жидкости приблизи-

лось к нулевому. Это ускорение жидкости под действием сил вязкости порождает на границе завихренность, которая затем диффундирует в жидкость обычным образом. Однако если в случае твердой границы требуется ненулевой скачок скорости на границе и, следовательно, возникает слой (первоначально) бесконечной завихренности, то в случае свободной границы требуется ненулевой скачок *производных* скорости и порождается конечная завихренность. Точная величина возникающей на свободной границе завихренности может быть легко вычислена следующим путем.

Выберем систему ортогональных криволинейных координат (ξ, η, ζ), такую, чтобы свободная поверхность в данный момент совпадала с одной из поверхностей $\zeta = \text{const}$. Обозначим через u, v, w соответствующие компоненты скоростей в нашей системе координат, а через h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламе. Тогда для ξ-компоненты завихренности (см. приложение 2) имеем

$$\omega_\xi = \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial (h_3 w)}{\partial \eta} - \frac{\partial (h_2 v)}{\partial \zeta}\right),$$

что можно переписать как

$$\omega_\xi = -\left\{\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial (v/h_2)}{\partial \zeta} + \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial (w/h_3)}{\partial \eta}\right\} + \frac{2}{h_2}\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{2v}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \zeta}. \qquad (5.14.1)$$

Выражение внутри фигурных скобок равно удвоенной величине одного из внедиагональных элементов тензора скоростей деформации (см. приложение 2); этот элемент должен быть равен нулю на свободной поверхности, чтобы обеспечить на ней равенство нулю соответствующей касательной компоненты тензора напряжений. Нормальная компонента w скорости, так же как и $\partial w/\partial \eta$, должна быть непрерывной при переходе через тонкий слой у свободной поверхности; кроме того, требуется, чтобы касательная компонента v скорости не имела скачка, так что последние два члена в (5.14.1) можно считать непрерывными. Таким образом, скачок завихренности ω_ξ в тонком пограничном слое, формирующемся на свободной поверхности, равен просто значению выражения в фигурных скобках из (5.14.1) на границе области исходного безвихревого течения, т. е.

$$\Delta\omega_\xi = -\left\{\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)}{\partial \zeta} + \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)}{\partial \eta}\right\}_{\text{погр. слой}}, \qquad (5.14.2)$$

где φ — потенциал скорости безвихревого течения. Для скачка завихренности ω_η можно выписать соответствующее выражение, а скачок завихренности ω_ζ равен нулю.

В тех случаях, когда свободная поверхность стационарна или может быть сделана таковой путем подходящего выбора поступательной и вращательной скоростей системы координат (при таких движениях системы координат тензор скоростей деформа-

ции остается неизменным), мы имеем $\partial\varphi/\partial\zeta = 0$ во всех точках свободной границы и (5.14.2) можно записать в виде

$$\Delta\omega_\xi = \left(\frac{2}{h_2^2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{\text{погр. слой}} = \left(\frac{2\varkappa_\eta}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{\text{погр. слой}}, \qquad (5.14.3)$$

где $\varkappa_\eta$ — кривизна линии пересечения свободной поверхности плоскостью, нормальной к координатной линии ξ. Отсюда, в частности, следует, что для плоской свободной поверхности скачок завихренности равен нулю. Это связано с тем, что в прямоугольной системе координат $\partial v/\partial\zeta = \partial w/\partial\eta$ для безвихревой области течения, и если $w = 0$ во всех точках свободной поверхности, то имеем также $\partial v/\partial\zeta = 0$, а это показывает, что в безвихревом потоке касательное напряжение на свободной поверхности равно нулю. Таким образом, в случае стационарной плоской свободной поверхности, такой, как в баке с водой или в бассейне, когда движения воды настолько спокойны, что форма свободной поверхности не изменяется, безвихревое движение воды удовлетворяет *всем* граничным условиям на свободной поверхности, образования завихренности у свободной поверхности не происходит и пограничный слой на ней не возникает. Что касается стационарной криволинейной свободной поверхности, то одну из координатных линий на ней можно направить параллельно вектору $\nabla\varphi$ в каждой точке; тогда будет ясно, что скачок завихренности представляет собой вектор, лежащий в касательной плоскости к свободной поверхности и перпендикулярной к линии тока в каждой точке, а величина его равна

$$\Delta\omega = (2\varkappa q)_{\text{погр. слой}}, \qquad (5.14.4)$$

где $\varkappa$ — кривизна линии пересечения свободной поверхности плоскостью, нормальной ей и параллельной вектору $\nabla\varphi$, а $q = |\nabla\varphi|$.

Таким образом, в формирующемся на свободной поверхности пограничном слое завихренность диффундирует за счет вязкости и переносится потоком (подобно тому как она изменяется в трехмерных течениях за счет вращения и растяжения вихревых линий); завихренность на свободной поверхности всегда больше завихренности сразу вне пограничного слоя на величину, определяемую соотношениями (5.14.2) или (5.14.4), в тех случаях, когда они применимы (или слегка измененным вариантом соотношения (5.14.2), если движение вне пограничного слоя не является безвихревым). Скачок скорости при переходе через пограничный слой, очевидно, имеет порядок $\delta\Delta\omega$, где δ — толщина пограничного слоя, и, таким образом, изменяется как $\mathrm{Re}^{-1/2}$ в тех многочисленных случаях, когда диффузия завихренности приводит именно к такому закону изменения толщины δ пограничного слоя.

Столь малое изменение скорости поперек пограничного слоя имеет три важных следствия.

а) Уравнения движения в пограничном слое могут быть линеаризованы, если их записать для отклонения скорости от ее значения сразу вне пограничного слоя. Например, для двумерного пограничного слоя с использованием обозначений из § 5.7 уравнение сохранения массы (5.7.2) дает

$$v \approx -y\,\partial U/\partial x, \tag{5.14.5}$$

а из уравнений (5.7.1) и (5.7.8) с достаточной точностью получается

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial u'}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \tag{5.14.6}$$

где $u' = u - U$. Если течение установившееся, а U — известная функция от x, то полученное линейное уравнение для u' можно решить стандартными методами.

б) Известная тенденция к возникновению обратного течения в пограничном слое при замедлении внешнего потока оказывается намного слабее на свободной поверхности, чем на твердой стенке, и отрыв пограничного слоя едва ли произойдет, за исключением случая очень большой кривизны свободной границы в какой-либо точке.

в) Поскольку градиенты скорости внутри пограничного слоя по порядку величины не больше градиентов скорости вне пограничного слоя, то скорость диссипации энергии на единицу объема жидкости будет одного и того же порядка во всей жидкости. Таким образом, полная скорость диссипации энергии обусловлена главным образом более обширной областью безвихревого течения; этот вывод противоположен выводу для течения с пограничным слоем на твердой границе, для которого часть полной диссипации в области безвихревого течения мала.

Ниже мы остановимся на двух примерах применения этих результатов к течению жидкости с большими числами Рейнольдса при наличии свободной поверхности.

Сопротивление сферического газового пузырька при его установившемся всплывании в жидкости

В § 4.9 было исследовано свободное всплывание в жидкости газового пузырька, имеющего настолько малый диаметр, что силы вязкости становятся основными. Число Рейнольдса такого течения быстро возрастает с увеличением размера пузырька, и было бы интересно рассмотреть течение при таких числах Рейнольдса (определенных по скорости всплывания и диаметру пузырька), при которых применимо приближение пограничного слоя. Мы будем считать, однако, пузырек настолько малым, что под действием поверхностного натяжения он остается приближенно сферическим. Изменения давления в жидкости на границе пузырька, обу-

словленные его движением, стремятся изменить форму пузырька, однако наблюдения показывают, что это изменение невелико для пузырьков радиуса вплоть до $\approx 0{,}05$ см (или объема вплоть до $6 \cdot 10^{-4}$ см^3), движущихся в чистой воде; для пузырьков, имеющих размеры, близкие к указанному предельному значению, число Рейнольдса, несомненно, намного превышает единицу. Кроме того, на основе проведенного выше обсуждения мы предположим, что пограничный слой не отрывается от поверхности пузырька. Наблюдения течения вблизи поднимающихся пузырьков подходящих размеров подтвердили, что фактически при любой скорости движения в чистой жидкости обратного течения не возникает (Хартунян и Сирс (1957)). (Известно, что пузырьки объемом более ≈ 5 см^3 принимают в воде форму, подобную сферическому сегменту, и на остром краю получающейся сферической чашечки пограничный слой отрывается (см. § 6.11); такие пузырьки мы здесь не будем рассматривать.) Наконец, мы предположим, что движение газа внутри пузырька не оказывает влияния на движение жидкости.

В принятых предположениях завихренность должна локализоваться в тонком пограничном слое на поверхности пузырька и в узком осесимметричном следе, а безвихревое течение вне пограничного слоя и следа приближенно будет таким же, как если бы жидкость была невязкой. Таким образом, для сферического пузырька радиуса a, движущегося со скоростью U в покоящейся на бесконечности жидкости, течение вне пограничного слоя и следа приближенно задается (см. (2.9.26)) потенциалом скорости

$$\varphi = -\frac{1}{2} U a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{5.14.7}$$

где r и θ — сферические координаты с началом отсчета в мгновенном положении центра сферы.

Чтобы оценить сопротивление D пузырька при установившемся движении, нет необходимости анализировать течение в пограничном слое, поскольку скорость, с которой силы плавучести пузырька совершают работу, а именно величина UD, должна быть равна полной скорости диссипации энергии в жидкости, и, таким образом, мы видим, что сопротивление D можно приближенно определить, зная только безвихревое течение. Общее выражение для скорости диссипации энергии в несжимаемой жидкости (4.1.5) в случае безвихревого течения в объеме V жидкости принимает вид

$$\Phi = 2\mu \int \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} dV = \mu \int \frac{\partial^2 q^2}{\partial x_i \partial x_i} dV = \mu \int \mathbf{n} \cdot \nabla q^2 \, dA, \tag{5.14.8}$$

где $q^2 = (\partial\varphi/\partial x_i)^2$, а последний из интегралов берется по поверхности A, ограничивающей объем V (нормаль $\mathbf{n}$ направлена наружу из объема V). Итак, сопротивление газового пузырька определяет-

ся соотношением

$$UD = -\mu \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial q^2}{\partial r}\right)_{r=a} 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta;$$

вычисление этого интеграла для рассматриваемого течения (5.14.7) дает

$$D = 12\pi\mu a U. \tag{5.14.9}$$

Отсюда получаем коэффициент сопротивления [1])

$$C_D = \frac{D}{\pi a^2 \, {}^1/_2 \rho U^2} = \frac{48}{\mathrm{Re}}, \tag{5.14.10}$$

где $\mathrm{Re} = 2aU\rho/\nu$. Коэффициент сопротивления твердого тела при безотрывном обтекании пропорционален $\mathrm{Re}^{-1/2}$ (§ 5.11), а для «тела» со свободной поверхностью он имеет меньший порядок, поскольку свободная поверхность замедляет жидкость в пограничном слое не так сильно, как твердая.

Если учесть диссипацию энергии в пограничном слое на поверхности пузырька и в следе, то можно получить более точную оценку величины сопротивления пузырька (Мур (1963)):

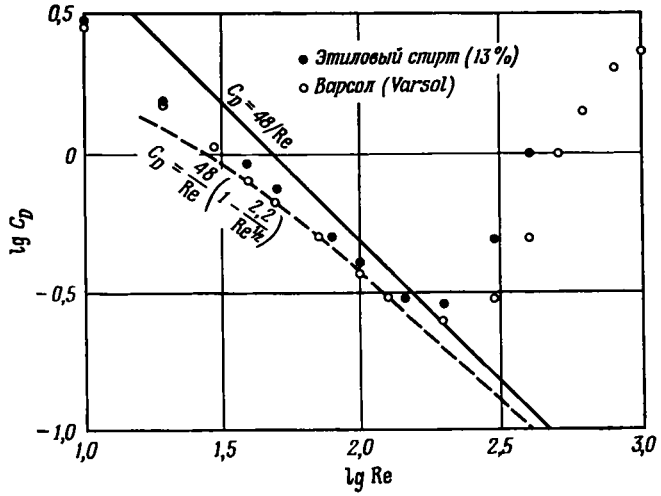
$$C_D = \frac{48}{\mathrm{Re}} \left(1 - \frac{2{,}2}{\mathrm{Re}^{1/2}}\right). \tag{5.14.11}$$

Теперь можно определить предельную скорость всплывания V пузырька, движущегося только под действием силы тяжести; для этого надо приравнять силу сопротивления силе плавучести пузырька объема ${}^4/_3\pi a^3$. С использованием первого приближения для силы сопротивления (5.14.9) имеем

$$V = \frac{1}{9} \frac{ga^2}{\nu}. \tag{5.14.12}$$

---

[1]) Чтобы получить потенциальное обтекание тела вязкой жидкостью, следует предположить, что оно имеет «активную» подвижную поверхность, поддерживающую потенциальное течение, которое в противном случае превратилось бы в вихревое (это относится как к твердому телу, так и к пузырю или каверне). Полная сила, действующая на сферу в потенциальном потоке вязкой жидкости, определяется интегралом (4.7.5) с учетом сохранения в таком потоке константы Бернулли (см. прим. ред. на стр. 208). Как показывает простой расчет, эта сила слагается из силы сопротивления, результирующей нормальных к сфере сил вязкости, $D_1 = 8\pi\mu a U$, и, как это ни удивительно, из силы тяги, получающейся за счет касательных сил на подвижной обтекаемой поверхности. Эти две силы уравновешиваются, и полная сила, действующая на тело в потенциальном (бесциркуляционном) потоке вязкой жидкости, в точности равна нулю. (Этот результат, в определенном смысле обобщающий парадокс Даламбера, почти очевиден также из рассмотрения тензора напряжений на бесконечно удаленной сфере и применения теоремы о количестве движения к объему жидкости, ограниченному этой сферой и поверхностью тела.) В то же время, как нетрудно проверить, диссипация механической энергии (5.14.8), происходящая в этом потоке, равна работе за единицу времени касательных сил на границе жидкости. Таким образом, принятое условие $UD = \Phi$, которое, следуя В. Г. Левичу (1960), использует автор, в потенциальном потоке не выполняется. (Можно указать и другие противоречащие примеры.) Вопрос о возможности приближенного определения силы сопротивления пузыря в реальном потоке как «диссипативной» силы и использования при этом модели потенциального потока для получения таким способом приближенных формул (5.14.9) и (5.14.11) требует более подробного изучения в связи с известной проблемой асимптотического поведения решения уравнений Навье–Стокса.— *Прим. ред.*



Р и с. 5.14.1. Коэффициент сопротивления газовых пузырьков, поднимающихся в различных жидкостях. Экспериментальные данные для двух жидкостей взяты по экспериментальным кривым Хабермана и Мортона (1953).

Были проведены наблюдения скоростей всплывания пузырьков различных размеров в разных жидкостях, свободных от примесей; на рис. 5.14.1 показаны значения предельных коэффициентов сопротивления для двух жидкостей в зависимости от числа Рейнольдса (в котором в качестве длины a взят радиус сферы, имеющей тот же объем, что и пузырек). Для чисел Рейнольдса, превышающих ≈ 20 и меньших критического значения, при котором начинается резкое возрастание коэффициента сопротивления, согласование наблюдаемых значений с расчетными данными по (5.14.10) удовлетворительное, а с расчетными данными по (5.14.11) довольно хорошее. Критические значения числа Рейнольдса для различных жидкостей различны, и, по-видимому, они связаны с началом искажения сферической формы пузырька. Перепад давления воды на поверхности пузырька, всплывающего с постоянной скоростью U, приближенно равен ρU^2, и пузырек можно считать сферическим под действием поверхностного натяжения с коэффициентом γ только в том случае, когда $\rho U^2 \ll \gamma/a$, или, принимая в качестве U предельную скорость движения (5.14.12), когда

$$\frac{\rho g^2 a^5}{\nu^2 \gamma} \ll 81$$

Для чистой воды отсюда получается ограничение на радиус пузырька

$$a \ll (6{,}1 \cdot 10^{-7})^{1/5} \text{ см} = 0{,}06 \text{ см};$$

это значение в действительности близко к тому значению радиуса воздушного пузырька в чистой воде, при котором впервые наблюдается его несферичность.

Когда перепад давления впервые становится сравнимым с поверхностным натяжением, пузырек принимает форму эллипсоида, сплющенного в направлении от передней критической точки к кормовой под действием давления торможения. Можно было бы вычислить полную диссипацию энергии в безвихревом течении, вызванном движением сплющенного эллипсоида, и получить новую оценку предельной скорости пузырька, но результат вычислений будет, вероятно, иметь меньшее практическое значение, так как форма пузырька и предельная скорость зависят теперь также от поверхностного натяжения, а движение пузырька становится неустойчивым и он поднимается зигзагообразно или по спирали. Однако приведенная теория все же хорошо описывает наблюдаемый минимум коэффициента сопротивления в зависимости от объема пузырька.

Затухание волн на поверхности тяжелой жидкости

Вопрос о волнах на поверхности тяжелой жидкости не входит в круг рассматриваемых в этой книге, однако здесь будет уместно привести некоторые замечания относительно влияния пограничных слоев, образующихся на свободной поверхности. Мы рассмотрим только простой случай, в котором скорость жидких частиц изменяется по синусоидальному закону (помимо слабого ее затухания) с частотой n, обусловленной прохождением волны, и в котором движение безвихревое в тех областях, где вязкостью можно пренебречь.

Если в канале с твердыми стенками или в жидкости глубиной, меньшей одной длины волны, на поверхности возникает волна (стоячая или прогрессивная) и если частота достаточно велика, то на каждой из твердых стенок формируется колеблющийся пограничный слой, подобный рассмотренному в предыдущем параграфе; если к тому же частота и амплитуда волнового движения удовлетворяют условию (5.13.2), то, используя описанные выше методы, можно получить оценки как для затухания волн под действием диссипации энергии в пограничном слое, так и для скорости установившегося вторичного потока сразу вне пограничного слоя. Однако, если влиянием боковых стенок можно пренебречь, а глубина превосходит одну длину волны, то только пограничный слой будет оказывать (очень слабое) влияние на свободную поверхность. Можно показать, что колеблющийся пограничный слой на свободной поверхности приводит к возникновению установившегося вторичного движения и может оказаться, что это вторичное течение не будет локализовано в пограничном слое; однако в то

время, как для твердой границы скорость указанного течения на внешней границе пограничного слоя стремится к определенному значению, зависящему только от местных условий, в случае свободной поверхности к определенному значению стремится величина нормального градиента скорости установившегося течения (Лонге-Хиггинс (1953, 1960)). Наличие пограничного слоя на свободной поверхности служит, кроме того, причиной малого изменения фазы нормального напряжения на границе области безвихревого течения; в результате работа этого нормального напряжения в течение одного периода подъема и опускания свободной поверхности оказывается отличной от нуля и отрицательной. Таким образом, амплитуда волнового движения медленно уменьшается; скорость этого уменьшения можно определить для прогрессивной волны следующим простым способом.

Потеря полной энергии жидкости (кинетической и потенциальной) за один период равна скорости вязкой диссипации энергии за один период при условии, что в объеме рассматриваемой жидкости суммарный поток энергии равен нулю. Эта диссипация происходит главным образом в области безвихревого течения и, таким образом, может быть определена, если известен его потенциал; этот способ позволяет вычислить затухание волн, не обращаясь непосредственно к рассмотрению течения в пограничном слое на свободной поверхности. Предположим, что скорость жидкости изменяется по синусоидальному закону вдоль одной из горизонтальных координат, скажем, x (с волновым числом k), и лежит в плоскости (z, x), где z — вертикальная координата, отсчитываемая вниз от среднего положения свободной поверхности. Таким образом, в области безвихревого течения

$$\varphi = A\,(t)\sin(kx - nt)\,e^{-kz}; \qquad (5.14.13)$$

множитель, зависящий от z, обеспечивает выполнение уравнения Лапласа для потенциала φ; амплитуда A медленно изменяется по мере уменьшения энергии волны. Для определения скорости диссипации энергии мы можем снова воспользоваться соотношением (5.14.8) и найти, что скорость диссипации энергии движения в целом на единицу площади горизонтальной плоскости равна $2\mu k^3 A^2(t)$, если амплитуда волны мала по сравнению с длиной волны (интеграл в соотношении (5.14.8) вычисляется в плоскости невозмущенной свободной поверхности $z = 0$).

Теперь полная кинетическая энергия жидкости на единицу площади горизонтальной плоскости, осредненная за один период, равняется $^1/_4\,\rho k A^2(t)$. Жидкость обладает еще и потенциальной энергией, а поскольку все материальные частицы совершают малые колебания под действием силы тяжести и взаимодействий между собой, то средняя полная потенциальная энергия равна средней полной кинетической энергии. Следовательно, получаем уравнение

постепенного уменьшения энергии

$$d\,(^1/_2\rho k A^2)/dt = -2\mu k^3 A^3,$$

показывающее, что амплитуда A убывает как $e^{-\beta n t}$, где

$$\beta = 2\nu k^2/n. \qquad (5.14.14)$$

Из теории поверхностных волн известно, что частота волн длиной $2\pi/k$ на глубокой воде

$$n = (gk)^{1/2},$$

так что демпфирование уменьшает амплитуду волн за один период на $\exp\{-4\pi\nu\,(k^3/g)^{1/2}\}$ часть ее величины.

Длину $(\nu/n)^{1/2}$ следует рассматривать в свете рассуждений предыдущего параграфа как меру толщины колеблющегося пограничного слоя. Проведенное обсуждение пригодно только в случае, когда эта толщина мала по сравнению с длиной $2\pi/k$, характеризующей поле течения в целом, т. е. когда

$$\left(\frac{\nu k^{3/2}}{4\pi^2 g^{1/2}}\right)^{1/2} \ll 1;$$

выполнение этого условия обеспечивает, таким образом, малое изменение амплитуды волны в течение одного периода.

В качестве числового примера рассмотрим волну длиной 10 см; тогда период будет равен $\approx 0{,}25$ сек, длина $(\nu/n)^{1/2}$, характеризующая толщину пограничного слоя, будет равна $\approx 0{,}02$ см для воды, а амплитуда будет уменьшаться за один период на 0,0022 часть своей величины. На практике не часто случается, чтобы пограничный слой на свободной поверхности был основной причиной затухания поверхностных волн и чтобы была приемлемой полученная выше оценка для β; в самом деле, для случая волн в лабораторных условиях диссипация энергии в пограничном слое на твердых стенках, как правило, будет основной, а в случае волн на озерах или на море случайные возмущения воды под действием ветра служат обычно более сильной причиной диссипации энергии волнового движения.

5.15. Примеры применения теоремы о количестве движения

Как упоминалось в § 3.2, существуют условия, при которых можно получить полезные и вполне точные результаты для установившихся течений путем применения теоремы о количестве движения, т. е. уравнения количества движения в интегральной форме (3.2.4). Успех зависит от того, удастся ли выбрать контрольную поверхность таким образом, чтобы непосредственно по доступным данным можно было вычислить поток количества движения и на-

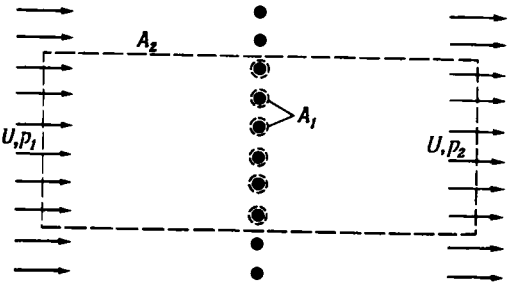


Рис. 5.15.1. Использование теоремы о количестве движения для определения силы, действующей на решетку твердых тел.

пряжения во всех точках контрольной поверхности. Приводимые в этом параграфе два примера применения теоремы о количестве движения связаны с переходом одного однородного потока в другой; такой вид течения, по-видимому, наиболее пригоден для применения указанной теоремы.

Сила, действующая на периодическую решетку твердых тел в потоке

В первом довольно простом примере поток жидкости, имеющий постоянную скорость U, набегает на решетку одинаковых твердых тел, распределенных периодически в плоскости, нормальной потоку (рис. 5.15.1); эти твердые тела имеют малые линейные размеры и расположены близко друг от друга, как, например, проволочки в сетке, а поток ограничен в поперечном направлении стенками, параллельными потоку. Установлено, что в условиях, близких к рассматриваемым, скорость жидкости снова становится постоянной на некотором расстоянии вниз по потоку и принимает то же самое значение U в соответствии с законом сохранения массы (если плотность жидкости не изменяется заметным образом). Жидкость действует на решетку с силой, которая направлена вниз по потоку, если твердые тела симметричны относительно нормали к решетке; мы выясним сейчас, можно ли по условиям вверх и вниз по потоку определить среднюю силу, действующую на единицу площади плоскости решетки.

Выберем контрольную поверхность так, как указано штриховой линией на рис. 5.15.1; она содержит систему внутренних границ A_1 и внешнюю границу A_2 в виде прямоугольной призмы, поперечное сечение которой (показано штриховой линией) достаточно велико, чтобы можно было охватить большое число элементов решетки и применить соотношение (3.2.4); мы не будем учитывать член, обусловленный действием силы тяжести, так как его можно включить в модифицированное давление жидкости. Резуль-

тирующий поток количества движения из области, ограниченной поверхностями A_1 и A_2, равен нулю, и, таким образом, i-компонента полной силы на участке решетки, охватываемом поверхностью A_1, равна

$$-\int \sigma_{ij} n_j \, dA_1 = \int \sigma_{ij} n_j \, dA_2,$$

где нормаль n направлена наружу для всех участков границы. Напряжение σ_{ij} равно нормальному на передней и задней гранях призмы A_2, где скорость течения постоянна, а давление равно p_1 в области далеко вверх по потоку и p_2 — вниз по потоку; это напряжение равно нормальному и на боковых гранях призмы, исключая окрестность решетки. Следовательно, если вклад в интеграл от касательного напряжения на боковых гранях призмы сделать относительно малым путем выбора достаточно большого поперечного сечения призмы, то средняя сила, действующая на единицу площади плоскости решетки, равна

$$p_1 - p_2. \tag{5.15.1}$$

Таким образом, нормальная сила, действующая со стороны жидкости на решетку, может быть определена без какого-либо теоретического или экспериментального изучения течения вблизи тел, образующих решетку.

Результат (5.15.1) остается, конечно, справедливым и в том случае, когда набегающий поток не перпендикулярен плоскости решетки или когда тела решетки несимметричны, так как и набегающий, и сходящий потоки остаются однородными достаточно далеко от решетки; при этом приведенные выше рассуждения остаются в силе для нормальной компоненты скорости течения по обеим сторонам решетки и для нормальной компоненты силы, действующей на тела решетки. В каждом из этих новых случаев жидкость действует на решетку тел с силой, имеющей компоненту в плоскости решетки, и, следовательно, в окрестности решетки имеется соответствующее отклонение потока.

Внезапное расширение трубы

Другой пример этого параграфа связан с влиянием внезапного увеличения площади поперечного сечения короткой трубы, через которую течет жидкость с почти постоянной скоростью U_1 (рис. 5.15.2). При обычных условиях, когда $U_1 d/\nu \gg 1$, где d — характерный линейный размер поперечного сечения трубы, наблюдается следующая картина. Поток в виде прямой струи втекает в широкий участок трубы (подобно тому, как показано на фото 5.10.2), на боковой поверхности струи развивается нерегулярное вихревое движение, окружающая струю жидкость постепенно

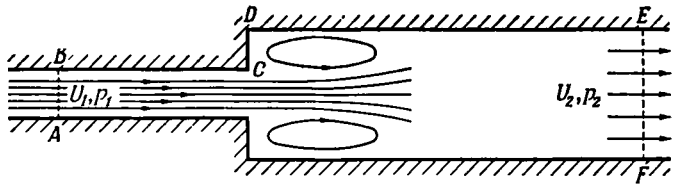


Рис. 5.15.2. Однородный поток в трубе при внезапном увеличении ее поперечного сечения.

захватывается и смешивается со струей и, наконец, поток снова становится приближенно однородным со скоростью, скажем, U_2. Подробная картина этого процесса неустановившегося перемешивания сложна и не поддается точному расчету; возникает вопрос: можно ли что-либо сказать об условиях далеко вниз по потоку, не зная течения вблизи места внезапного расширения трубы? Скорость U_2 определяется законом сохранения массы (снова в предположении постоянной плотности), а следовательно, мы можем найти также и давление p_2 далеко вниз по потоку, зная давление p_1 вверх по потоку от места внезапного расширения трубы.

Для этой цели можно использовать интегральную теорему о количестве движения, заметив, что модифицированное давление приближенно постоянно поперек трубы при внезапном ее расширении ввиду отсутствия заметной поперечной скорости жидкости в области расширения; этот факт легко подтверждается непосредственным наблюдением. В качестве контрольной поверхности мы выбираем поверхность, ограниченную поперечными сечениями, отмеченными на рис. 5.15.2 штриховыми линиями, и стенками трубы между этими сечениями; обозначим через S_1 поперечное сечение вверх, а через S_2 — вниз по потоку. В области вниз по потоку от места расширения трубы скорость и давление жидкости флуктуируют в результате происходящего там неустановившегося процесса перемешивания, однако флуктуации происходят относительно установившихся средних значений; поэтому мы можем предположить, что соотношение (3.2.3) осреднено по длительному промежутку времени, и получить соотношение между осредненными величинами, подобное (3.2.4). Тем не менее поперечные сечения AB и EF удобнее выбрать вне области флуктуаций, и, таким образом, наличие флуктуаций не будет сказываться в рассматриваемом примере.

Поток количества движения в направлении слева направо (рис. 5.15.2) через контрольную поверхность равен

$$\rho U_2^2 S_2 - \rho U_1^2 S_1 = \rho U_2 S_2 (U_2 - U_1).$$

На участках AB и CD контрольной поверхности напряжения равны нормальным и определяются давлением p_1, а на участке EF — соответственно p_2. На участках BC и DE стенки трубы формируют-

ся пограничные слои; число Рейнольдса течения предполагается настолько большим, что соответствующие касательные компоненты напряжения становятся пренебрежимо малыми, если их представить в безразмерном виде с использованием величин ρ, d и U_1 (это эквивалентно сделанному выше предположению о том, что скорость в трубе остается приближенно постоянной до участка BC). Из уравнения количества движения

$$\rho U_2 S_2 (U_2 - U_1) = p_1 S_1 + p_1 (S_2 - S_1) - p_2 S_2$$

находится давление однородного течения в области вниз по потоку

$$p_2 = p_1 + \rho U_2 (U_1 - U_2). \qquad (5.15.2)$$

Это увеличение давления при внезапном расширении трубы можно сравнить с соответствующей величиной при постепенном увеличении площади ее поперечного сечения от S_1 до S_2. В последнем случае течение всюду установившееся и вязкость оказывает пренебрежимо малое влияние, исключая тонкий слой на стенках трубы, так что мы можем использовать теорему Бернулли для эффективно несжимаемой жидкости (см. (3.5.16)) и найти

$$p_2 = p_1 + {}^1/_2 \rho (U_1^2 - U_2^2), \qquad (5.15.3)$$

где p_1 и p_2 — модифицированные давления. Таким образом, окончательное давление в трубе при внезапном расширении меньше, чем при постепенном расширении, на величину

$$\frac{1}{2} \rho (U_1 - U_2)^2 = \frac{1}{2} \rho U_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \qquad (5.15.4)$$

Иначе говоря, мы можем утверждать, что при постепенном расширении трубы константа Бернулли не изменяется, в то время как при внезапном расширении происходит вихревое перемешивание течения, сопровождаемое падением константы Бернулли на величину (5.15.4). Из того факта, что константа Бернулли измеряет полную механическую энергию единицы массы жидкости, мы можем заключить, что вихреобразование за счет появления струйного течения при внезапном расширении трубы связано с диссипацией механической энергии (за счет внутреннего трения в жидкости). Подробный механизм диссипации далеко не очевиден, однако теорема о количестве движения позволяет заключить, что полная потеря энергии за счет диссипации в каждом единичном объеме жидкости определяется общими условиями задачи.

Результат (5.15.4) допускает полезное применение к течениям, подобным рассмотренному в первом примере этого параграфа; дело в том, что некоторые виды решеток твердых тел можно представить как периодически расположенные узкие щели, через которые жидкость должна пройти, прежде чем произойдет внезапное расширение сечения. Рассмотрим, например, плоскую твердую

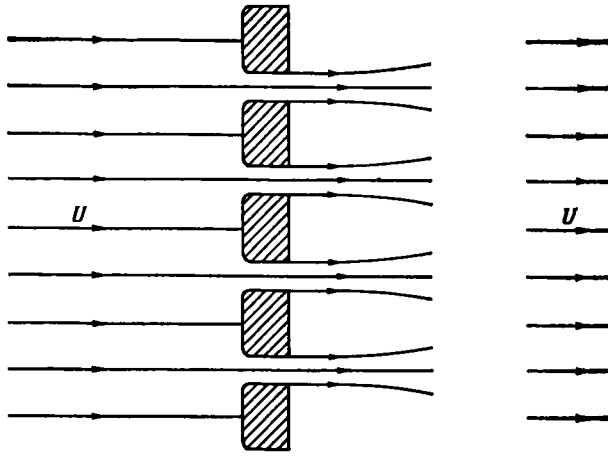


Рис. 5.15.3. Расчет сопротивления перфорированной пластины в однородном потоке.

пластину, в которой высверлены отверстия диаметра, сравнимого с ее толщиной, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 5.15.3). Если такую пластину поместить под прямым углом к установившемуся потоку со скоростью U, то на тыльной стороне пластины жидкость будет вытекать в виде множества струй; эти струи смешиваются с окружающей жидкостью, вовлекаемой в нерегулярное вихревое движение, а в конечном счете снова образуется однородный поток со скоростью U. Таким образом, здесь применим анализ внезапного расширения трубы, и, следовательно, вытекание жидкости из отверстий в плоской пластине сопровождается общим уменьшением константы Бернулли на величину

$$\frac{1}{2}\rho U^2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (5.15.5)$$

где α — отношение площади отверстий в пластине к площади пластины. С другой стороны, течение вверх по потоку от пластины и в отверстиях таково, что, как мы уже видели в этой главе, вязкость в нем не играет важной роли (если диаметр отверстий не слишком мал) и, как правило, для него применима теорема Бернулли. Следовательно, величина (5.15.5) равна разности между значением констант Бернулли для областей далеко вверх и далеко вниз по потоку от пластины; но так как скорости потока в обеих этих областях равны U, то величина (5.15.5) равна также разности давлений в них. Таким образом, с учетом (5.15.1) заключаем, что средняя сила сопротивления в расчете на единицу площади пластины также определяется величиной (5.15.5). Этот теоретический результат согласуется с наблюдаемыми перепадами полного давления на таких пластинах.

Можно разработать подобную простую теорию для нахождения силы, действующей на другие виды перфорированных пластин или на решетку цилиндров, либо других тел. Такие теории будут более точными в тех случаях, когда площадь поперечного сечения каждой струи, вытекающей из отверстий в пластине или из решетки, хорошо определена формой границ потока, как это было, например, в рассмотренном выше случае пластины с просверленными отверстиями.

Дальнейшие приложения уравнения количества движения в интегральной форме будут описаны в § 6.3 и 6.8 при обсуждении течений, для которых влиянием вязкости можно пренебречь. В этих случаях теорема о количестве движения позволяет получить полезные результаты наиболее коротким и точным путем; что же касается случаев, подобных рассмотренным в настоящем параграфе, то эффекты вязкости играют в них существенную роль (правда, они могут не появиться в явном виде при использовании теоремы о количестве движения — в этом и состоит ее главное достоинство); непосредственное вычисление поля течения с учетом эффектов вязкости обычно невыполнимо, а применение теоремы о количестве движения, если оно позволяет получить результаты, оказывается весьма ценным.

Очевидно, что иногда можно использовать интегральные соотношения не для количества движения, а для других величин, таких, например, как энергия или момент количества движения; последний особенно удобен при изучении действия насосов, турбин и других машин, имеющих вращающиеся части.

Литература к главе 5

Прандтль Л., Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, М.— Л., т. 1, 1933, т. 2, 1935.

Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I, II, ИЛ, М., 1948.

Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, М., 1951.

Rosenhead L. (ed.), Laminar Boundary Layers, Oxford University Press, 1963.

Упражнения к главе 5

1. Длинный твердый цилиндр помещен в установившийся однородный поток жидкости таким образом, что его образующие составляют со скоростью потока угол α (элемент стреловидного крыла). Линии тока охватывают поперечное сечение цилиндра и отрыва пограничного слоя не происходит. Покажите, что компонента скорости $\mathbf{u}$ в плоскости, нормальной к образующим цилиндра, имеет одно и то же распределение при любых углах α (кроме значений вблизи 0 и π); это касается как области вне пограничного слоя, так и внутри него. Покажите также, что в пограничном слое уравнение для компоненты скорости w, параллельной образующим цилиндра, имеет вид

$$\mathbf{u}\cdot\nabla w = \nu\partial^2 w/\partial y^2,$$

где y — расстояние по нормали от боковой поверхности цилиндра.

2. Тонкая установившаяся двумерная струя жидкости набегает на плоскую твердую стенку; вдали от стенки жидкость покоится. Используя уравнения пограничного слоя, покажите, что величина

$$\int_0^\infty u \left\{ \int_y^\infty u^2 \, dy \right\} dy \equiv P$$

не зависит от расстояния x вдоль стенки. Покажите, что автомодельная форма распределения скорости, которая зависит только от P и ν, дается соотношениями

$$\psi = (P\nu x)^{1/4} f(\eta), \quad \eta = (P/\nu^3 x^3)^{1/4} y, \quad 4f''' + ff'' + 2f'^2 = 0.$$

Кроме того, покажите, что в аналогичном осесимметричном случае скорость радиального расширения струи и ее толщина изменяются как $x^{-3/2}$ и $x^{5/4}$, а распределение скорости в струе то же самое, что и в плоском случае (Глауэрт (1956)).

3. Трехмерное тело неподвижно в потоке, имеющем постоянную скорость U в направлении оси x; на тело действует сила сопротивления D, а также подъемная сила L в направлении оси y. Покажите, что далеко вниз по потоку компоненты скорости приближенно выражаются следующим образом:

$$u = U - \frac{D}{4\pi\mu x} e^{-\eta^2}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{L}{4\pi\mu x} e^{-\eta^2}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где

$$\varphi = \frac{L}{8\pi\mu x} \frac{y}{\eta^2} (1 - e^{-\eta^2}), \quad \eta^2 = \frac{(y^2 + z^2) U}{4\nu x}.$$

Выясните, что в следе за телом имеется компонента завихренности вдоль направления потока и безвихревое движение в плоскости (y, z) вне следа то же самое, что и движение от точечного вихревого диполя напряженности $L/\rho U$, параллельного оси z и помещенного в начало координат плоскости (y, z).

6

ТЕОРИЯ БЕЗВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Роль теории течения невязкой жидкости

Изучение основных эффектов вязкости жидкости мы закончили, и теперь можно воспользоваться тем, что коэффициенты вязкости наиболее распространенных жидкостей — воздуха и воды — весьма малы. Обычно число Рейнольдса $\rho LU/\mu$ (в обозначениях, принятых в § 4.7) представляет собой меру отношения характерных величин сил инерции и сил вязкости; если это число велико по сравнению с единицей, то силы вязкости часто играют малую роль в уравнении движения почти во всем поле течения. Во многих случаях, в которых отрыва пограничного слоя от твердой границы не происходит, поле течения стремится к предельной форме, соответствующей течению невязкой жидкости при $\rho LU/\mu \to \infty$ во всей области, занимаемой жидкостью; тот факт, что силы вязкости остаются значительными в некоторых тонких слоях жидкости, каким бы большим ни было число Рейнольдса, во многих отношениях почти не имеет значения. Однако в тех случаях, когда пограничный слой отрывается от твердой границы, стремление к предельной форме становится сингулярным и, хотя размер области жидкости, в которой силы вязкости оказываются значительными, стремится к нулю, по мере того как $(\rho LU/\mu) \to \infty$, предельная форма поля течения не совпадает с полем течения, полностью соответствующим, с математической точки зрения, невязкой жидкости. Такое сингулярное предельное поведение течения возможно из-за того, что величина вязкости входит в уравнение движения как коэффициент при производной высшего порядка и что вязкая жидкость должна удовлетворять дополнительному условию прилипания на твердой границе, какой бы малой ни была сама вязкость.

Таким образом, теоретические результаты для течений невязкой жидкости можно непосредственно применить к классу течений вязкой жидкости, в которых не происходит отрыва пограничного слоя [1]); в данном случае теория невязкой жидкости дает хорошее приближение к течению реальной жидкости при большом числе Рейнольдса (при одних и тех же начальных и граничных условиях)

[1]) Отсутствие отрыва пограничного слоя является необходимым, но, возможно, еще не вполне достаточным условием для того, чтобы предельная форма поля течения была такой же, как и для невязкой жидкости. Трудно сделать общие выводы, которые были бы одновременно полезными и надежными.

во всей области течения, за исключением тонких слоев, толщина которых стремится к нулю при $\rho LU/\mu \to \infty$ и положение которых известно из решения для невязкой жидкости. Анализ течения невязкой жидкости математически намного проще, чем анализ течения вязкой жидкости, и поэтому крайне важно знать, применима ли теория невязкого течения; мы должны уметь это предсказать на основании наблюдения или с помощью общих результатов, а не путем проведения подробного расчета. Точнее говоря, мы должны уметь сказать на основании наблюдения, будет ли течение реальной жидкости при заданных начальных и граничных условиях сопровождаться отрывом пограничного слоя. Если отрыв не возникает, то можно применить многочисленные результаты теории невязкой жидкости. Такая необходимость в предварительном знании того, как повела бы себя жидкость с ненулевой вязкостью в данных условиях, требует глубокого понимания свойств течения вязкой жидкости, прежде чем можно будет выяснить уместность и полезность теории невязкой жидкости; по этой причине теория невязкой жидкости, несмотря на ее простоту, расположена в книге после изучения течения вязкой жидкости.

Даже в тех течениях реальной жидкости, в которых возникает отрыв пограничного слоя, в потоке существуют большие области, в которых вязкость жидкости локально не оказывает большого влияния и к которым может быть применена теория невязкой жидкости. Однако в этих случаях существует трудность, заключающаяся в том, что положение и форма оторвавшегося пограничного слоя в течении реальной жидкости, как правило, неизвестны, так что, хотя локально влияние вязкости всюду пренебрежимо мало, за исключением окрестности некоторых сингулярных поверхностей (часть из которых расположена внутри жидкости), форма границы области эффективно невязкого течения неизвестна и вообще не может быть определена исходя из рассмотрения полностью невязкой жидкости. Поэтому возможности приложения теории невязкой жидкости в этих случаях ограничены. Более того, как уже упоминалось ранее, оторвавшиеся пограничные слои всегда неустойчивы по отношению к малым возмущениям и в течении появляются турбулентные пульсации. Влияние турбулентных пульсаций скорости может и не распространяться непосредственно на все течение (так, например, течение вблизи передней критической точки на плохообтекаемом теле, движущемся с постоянной скоростью через жидкость и образующем за собой турбулентный след, может быть вполне установившимся), хотя именно ненулевой средний поток количества движения, обусловленный турбулентностью, влияет на конфигурацию течения в целом; при этом остается справедливым замечание о том, что определенные области течения стационарны и в них вязкость жидкости локально не оказывает никакого влияния, хотя посредством строгого расче-

та невозможно определить форму границ ни одной из этих областей и условия на этих границах, и часто приходится прибегать к различным предположениям и накопленному опыту.

В этой и следующей главах будут изучаться различные свойства течения жидкости в предположении, что она является полностью невязкой [1]) (и несжимаемой). Получаемые при этом результаты имеют значение только в связи с тем, что они представляют собой некоторое приближение к свойствам течения реальной жидкости при больших числах Рейнольдса, и ограничения, налагаемые на каждый результат, следует рассматривать как такую же важную информацию, как и сам результат.

Эта глава посвящена частному случаю безвихревого течения. Хотя может показаться, что свойство течения быть безвихревым весьма специфично, оно приобретает большое практическое значение благодаря следствию из теоремы Кельвина о циркуляции (§ 5.3), состоящему в том, что элементы однородной жидкости, приведенные в движение из состояния покоя, движутся далее без вращения до тех пор, пока они не попадут в область, где силы вязкости оказываются существенными. Надлежащее понимание теории безвихревого течения и оценка ее многочисленных приложений необходимы во всех разделах гидродинамики. Глава 7 посвящена более общей ситуации, в которой существенную роль играет либо локализованная, либо распределенная завихренность. Примеры полей течения без твердых границ приводятся в обеих главах, поскольку такие поля дают широкий простор для приложения теории невязкой жидкости. Рассматриваются также безвихревые течения со свободной поверхностью, хотя вопрос о волнах на тяжелой жидкости, требующий отдельного подхода, в книге опущен. Теория подъемной силы, создаваемой тонкими телами, движущимися в жидкости, — одна из научных основ аэронавтики, — излагается в § 6.7 и 7.8; в них применение теории невязкой жидкости становится возможным благодаря использованию простых правил, основанных на соображениях из гл. 5 относительно возникновения и последующего влияния отрыва линий тока на поверхности тела. Специфические динамические свойства жидкости при ее вращении как целого описаны в гл. 7 наряду с некоторыми проявлениями их в геофизике.

Наконец, вспомним уравнения, которые описывают движение невязкой жидкости и на которых будет основан материал, излагаемый в гл. 6 и 7.

Мы будем по-прежнему считать жидкость несжимаемой (условия справедливости этого предположения были рассмотрены

[1]) В ряде случаев тем не менее будет предполагаться в качестве части условий при формулировке задачи существование определенных свойств течения, происхождение которых связано с влиянием вязкости. Так, например, окажется целесообразным предположить, что «невязкая» жидкость после прохождения через отверстие в тонкой пластине вытекает из него в виде концентрированной струи с вихревой пеленой на ее границе.

в § 3.6), так что уравнение сохранения массы имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{6.1.1}$$

и будем предполагать, что плотность ρ одинакова всюду в жидкости.

Будем считать, что массовая сила, действующая на жидкость, есть сила тяжести, так что $\mathbf{F} = \mathbf{g}$. В некоторых полях течений жидкость будет иметь свободную поверхность, и в таких течениях сила тяжести влияет на распределение скорости.

Для невязкой жидкости касательные напряжения всюду в жидкости равны нулю, тензор напряжений сводится к $-\rho\delta_{ij}$, а уравнение движения записывается в виде

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{6.1.2}$$

Если задана величина ρ, то две переменные $\mathbf{u}$ и p находятся как функции x и t из уравнений (6.1.1) и (6.1.2).

6.2. Общие свойства безвихревого течения

Многие общие кинематические свойства безвихревого течения несжимаемой жидкости уже были указаны в § 2.7—2.10 при обсуждении соленоидальной и безвихревой части произвольного распределения скорости. Результаты, изложенные ниже, дополняют это обсуждение.

Если поле скоростей $\mathbf{u}$ безвихревое, то, как объяснялось в § 2.7, можно ввести потенциал скорости φ, а именно

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi; \tag{6.2.1}$$

тогда из уравнения сохранения массы для несжимаемой жидкости следует, что

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{6.2.2}$$

Хотя уравнение движения (6.1.2) нелинейно относительно $\mathbf{u}$, распределение скоростей безвихревого потока полностью определяется линейным уравнением, соответствующим дополнительному условию (6.2.1) и уравнению сохранения массы. Эта линейность представляет собой характерное свойство безвихревого течения, которое позволяет применить многие мощные математические методы. Нелинейное уравнение движения нужно только для расчета давления, после того как будет определено распределение скорости; как мы увидим, уравнение движения можно проинтегрировать и найти явное выражение для давления.

Поскольку уравнение (6.2.2) линейно, то путем наложения различных решений для потенциала скорости φ можно построить новое решение. Соответствующее распределение скоростей также находится путем суперпозиции, однако этого нельзя сделать для распределения давлений из-за нелинейной зависимости p от $\mathbf{u}$.

В частности, можно построить новые безвихревые поля путем наложения потенциалов скорости, связанных (см. § 2.5 и 2.6) с некоторыми сингулярными распределениями дивергенции Δ и завихренности $\boldsymbol{\omega}$ (такими, что Δ и $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю всюду, кроме одной точки, линии или поверхности, где они имеют бесконечную величину). Как было установлено, в случае точечной или линейной особенностей в распределении Δ и $\boldsymbol{\omega}$ «индуцированная» скорость в точке $\mathbf{x}$ неограниченно возрастает при приближении $\mathbf{x}$ к данной точке или линии; очевидно, что это справедливо и для полной величины индуцированной скорости, связанной с несколькими наложенными сингулярными распределениями Δ и $\boldsymbol{\omega}$. Так, например, распределение скорости безвихревого течения, связанное с точечным источником интенсивности m' в точке $\mathbf{x}'$ и точечным источником интенсивности m'' в точке $\mathbf{x}''$, вычисляется по формуле (см. (2.5.2)):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{m'}{4\pi}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{s'^3} + \frac{m''}{4\pi}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}''}{s''^3},$$

где $s'^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2$ и $s''^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{x}'')^2$; основной вклад в это поле скоростей вносит источник интенсивности m', когда $\mathbf{x}$ близка к $\mathbf{x}'$, и источник интенсивности m'', когда $\mathbf{x}$ близка к $\mathbf{x}''$.

Точечные или линейные особенности в распределениях Δ и $\boldsymbol{\omega}$, рассмотренные в § 2.5 и 2.6, приводят к особенности потенциала скорости φ на границе области соленоидального безвихревого течения. Например, если точечный источник интенсивности m расположен в точке $\mathbf{x}'$, то область соленоидального безвихревого течения не включает эту точку и ее нужно рассматривать окруженной замкнутой поверхностью, объемный поток m через которую известен; поскольку же скорость вблизи $\mathbf{x}'$ определяется главным образом индуцированной скоростью от источника в точке $\mathbf{x}'$, то граничное условие состоит в том, что во всех точках $\mathbf{x}$ на замкнутой поверхности бесконечно малых линейных размеров, окружающей точку $\mathbf{x}'$, должно быть

$$\mathbf{u} \sim \frac{m'}{4\pi}\frac{\mathbf{s}}{s^3} \quad \text{или} \quad \varphi \sim -\frac{m'}{4\pi s},$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Аналогично для диполя источников интенсивности $\boldsymbol{\mu}$ соответствующее условие на границе области соленоидального безвихревого течения (см. (2.5.3))

$$\varphi \sim \frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{s}}{4\pi s^3}$$

выполняется во всех точках $\mathbf{x}$ замкнутой поверхности бесконечно малых линейных размеров, окружающей диполь в точке $\mathbf{x}'$. Согласно известному общему свойству дифференциального уравнения (6.2.2), потенциал скорости φ и все его производные по $\mathbf{x}$ конечны и непрерывны во всех *внутренних* точках области соленоидального безвихревого течения.

Условия, при которых существует не более одного решения для скорости $\nabla\varphi$, были указаны в § 2.7—2.10. Наиболее важный из полученных результатов состоит в том, что в односвязной области течения, которая может простираться в бесконечность во всех направлениях, если жидкость находится там в состоянии покоя, решение $\nabla\varphi$ определяется единственным образом при заданной величине нормальной компоненты скорости $\mathbf{u}$ во всех точках границы. Единственность решения для односвязной области обеспечивается также, если задана величина φ во всех точках границы, а когда жидкость простирается до бесконечности и находится там в состоянии покоя, то еще должен быть известен ее полный объемный поток через внутреннюю границу. Если область соленоидального безвихревого течения не односвязна, то к упомянутым условиям единственности решения нужно добавить условия нахождения циклических постоянных течения.

Интегрирование уравнения движения

Векторное тождество

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$$

позволяет записать уравнение (6.1.2) в форме

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega} = -\nabla\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}\right), \tag{6.2.3}$$

где $q^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. Когда $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ и $\boldsymbol{\omega} = 0$, из уравнения (6.2.3) следует

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}\right) = 0. \tag{6.2.4}$$

Из выражения (6.2.4) видно, что величина в скобках должна быть функцией только одного t; обозначим ее, например, $F(t)$. Вид этой неизвестной функции не имеет значения, так как можно определить такой новый потенциал скорости φ', что

$$\varphi' = \varphi - \int F(t)\,dt, \quad \nabla\varphi' = \nabla\varphi.$$

и тем самым избавиться от функции $F(t)$, не нарушая распределения скоростей. Обычно произвольную функцию $F(t)$ не учитывают и пишут интеграл уравнения движения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} = \text{const}, \tag{6.2.5}$$

справедливый во всей жидкости [1]).

---

[1]) Интеграл (6.2.5) иногда называют интегралом Коши — Лагранжа. В более общем случае *баротропной* сжимаемой жидкости он имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} = \text{const}$$

(см. также прим. ред. на стр. 208).— *Прим. ред.*

Когда безвихревое течение установившееся, левая часть интеграла (6.2.5) сводится к величине, обозначенной ранее H, и она постоянна во всей жидкости. Этот результат можно было бы ожидать исходя из теоремы Бернулли (см. § 5.1): в установившемся течении величина H постоянна вдоль любой линии тока и вдоль любой вихревой линии, и если, кроме того, $\omega = 0$, то H должна быть постоянной всюду в жидкости.

Соотношение (6.2.5) дает явное выражение для давления, если известно распределение скорости. Оно обычно используется именно для этой цели, так как потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и определяется однозначно определенными граничными условиями, налагаемыми на φ или на $\nabla\varphi$, т. е. независимо от давления.

Выражения для кинетической энергии через интегралы по поверхности

Бóльшая часть анализа данного вопроса также была проведена в § 2.7—2.10. Для течения в односвязной области, ограниченной изнутри и извне, из (2.7.6) видно, что полная кинетическая энергия жидкости

$$T = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_2\, dA_2 - \frac{1}{2}\rho \int \varphi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_1\, dA_1, \tag{6.2.6}$$

где интегралы берутся по всей внутренней границе A_1 и внешней границе A_2, а обе единичные нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ направлены во внешнюю часть соответствующих замкнутых поверхностей. Если жидкость не ограничена извне, а простирается в бесконечность во всех направлениях и находится там в состоянии покоя, то из (2.9.17) следует

$$T = \frac{1}{2}\rho \int (C - \varphi)\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA, \tag{6.2.7}$$

где A — внутренняя граница и C — постоянная величина, к которой стремится на бесконечности потенциал скорости φ. Если объемный поток через внутреннюю границу равен нулю, то (6.2.7) сводится к выражению

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int \varphi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA. \tag{6.2.8}$$

Если область течения двусвязна и потенциал скорости φ содержит циклическую постоянную $\varkappa$, то, как показывает формула (2.8.8), выражение (6.2.6) для течения, ограниченного изнутри и извне, нужно дополнить слагаемым

$$\frac{1}{2}\rho\varkappa \int \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{6.2.9}$$

в котором интеграл берется по всей (топологической) перегородке S. В случаях, в которых на границе области задается нормальная компонента $\mathbf{u}$, следует применять формулу (2.8.10), содержащую две части потенциала скорости φ, а именно: однозначную и многозначную с соответствующей циклической постоянной. Если жидкость извне не ограничена, а простирается в бесконечность во всех направлениях в трехмерном пространстве и находится там в покое, то выражения (6.2.7) или (6.2.8) остаются применимыми. Однако в случае жидкости, простирающейся до бесконечности в двумерном пространстве, необходимо действовать осторожнее, так как при больших значениях $|\mathbf{x}|$ величина скорости в общем случае имеет порядок $|\mathbf{x}|^{-1}$ и тогда интеграл в выражении кинетической энергии не сходится. К обсуждению этого случая мы вернемся в § 6.4.

Теорема Кельвина о минимуме энергии

Единственность решения для однозначного потенциала скорости с заданной величиной нормальной компоненты $\nabla\varphi$ в каждой точке границы связана с минимумом полной кинетической энергии, как показывает результат, полученный Кельвином (1849).

Пусть $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{u}_1(x)$ — два соленоидальных распределения скоростей в данной области, занятой жидкостью, с одинаковыми значениями их нормальных компонент в каждой точке границы области (если жидкость простирается в бесконечность, то там эти значения равны нулю); предположим далее, что $\mathbf{u}$ — скорость безвихревого течения с однозначным потенциалом φ. Тогда разность между полными кинетическими энергиями, соответствующими этим двум распределениям скоростей, равна

$$T_1 - T = \frac{1}{2}\rho\int(\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}^2)\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})^2\,dV - \rho\int(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\,dV. \qquad (6.2.10)$$

Для второго интеграла по объему имеем

$$\int(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})\cdot\nabla\varphi\,dV = \int\nabla\cdot\{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})\,\varphi\}\,dV - \int\varphi\nabla\cdot(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})\,dV =$$

$$= \int\varphi\,(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,dA,$$

где интеграл по поверхности берется по всей границе жидкости и поэтому равен нулю (часть этого интеграла по гипотетической бесконечно удаленной границе, если жидкость простирается в бесконечность, равна нулю). Таким образом, имеем $(T_1 - T) > 0$ при $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}$, откуда и следует, что никакое другое движение с данными нормальными компонентами скоростей на той же границе не

может иметь кинетическую энергию меньше кинетической энергии единственного возможного безвихревого движения.

В случае многозначного потенциала с заданными в каждой точке границы нормальными компонентами скорости очевидно, что доказанная теорема применима только к однозначной части потенциала φ_1, введенной в конце § 2.8.

Точки максимума скорости q и минимума давления p

Покажем сначала, что функция φ не может иметь локальный максимум или минимум во внутренней точке жидкости. Из уравнения (6.2.2) следует, что

$$\int \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi\, dA = 0$$

по любой замкнутой поверхности A, окружающей область, полностью занятую соленоидальным безвихревым течением жидкости. Следовательно, подинтегральная функция $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$ не может быть постоянного знака на любой такой поверхности, и поэтому экстремум функции φ в какой-либо точке с некоторым другим и постоянным значением φ по малой замкнутой поверхности, окружающей эту точку, невозможен.

В этом рассуждении используется только то свойство функции φ, что она удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, такое же заключение справедливо и для производной $\partial\varphi/\partial x$, а из этого следует, что вблизи любой внутренней точки P жидкости можно отыскать другую точку P', такую, что

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right|_{P'} > \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right|_{P}.$$

Мы можем выбрать направление оси x прямоугольной системы координат параллельно вектору $\nabla\varphi$ в точке P; в таком случае заведомо

$$(\nabla\varphi)^2_{P'} > (\nabla\varphi)^2_P, \quad \text{или} \quad q_{P'} > q_P.$$

Следовательно, максимум величины скорости q может появиться только в точке на границе. Появление минимума скорости q во внутренней точке не исключается; в действительности критические точки, в которых скорость q принимает наименьшее возможное значение, иногда возникают внутри жидкости.

Аналогичный результат можно получить для давления p. Из соотношения (6.2.5) следует, что

$$\nabla^2 p = -\frac{1}{2}\rho\nabla^2 q^2 = -\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{6.2.11}$$

и, следовательно,

$$\int \mathbf{n}\cdot\nabla p\, dA = -\rho\int \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dV < 0 \tag{6.2.12}$$

для любой замкнутой поверхности A, окружающей область, полностью занятую жидкостью. Если бы давление p принимало минимальное значение в некоторой внутренней точке жидкости, то произведение $\mathbf{n}\cdot\nabla p$ было бы положительным во всех точках некоторой малой замкнутой поверхности, окружающей эту точку, и значение интеграла $\int \mathbf{n}\cdot\nabla p\, dA$, взятого по той же самой поверхности, было бы положительным; согласно же равенству (6.2.12), это невозможно. Следовательно, любая точка, в которой давление p принимает минимальное значение, должна лежать на границе, хотя максимум может возникнуть и во внутренней точке. Положение минимума p в общем случае не совпадает с положением максимума q; такое совпадение имеет место, если течение установившееся и изменение произведения $\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ пренебрежимо мало.

Эти результаты имеют качественное приложение в тех случаях, когда некоторые физические процессы происходят в том месте жидкости, где ее давление минимально или скорость максимальна. Так, например, кавитация возникает в воде в том случае, когда абсолютное давление падает ниже его критического значения, и мы приходим к выводу, что для данных границ (безвихревого) течения, по мере того как давление везде понижается, кавитация будет начинаться в определенной точке границы. Подобным же образом появление ударных волн, как известно, связано с локальными скоростями жидкости, превосходящими скорость звука. Для заданных границ течения максимальная скорость достигается в некоторой точке на границе, когда скорости жидкости всюду достаточно малы, чтобы жидкость можно было считать несжимаемой, и при увеличении скорости ударные волны появятся сначала (в предположении, что сжимаемость среды не изменяет положение максимума) вблизи границы.

Локальное изменение величины скорости

Некоторые простые, но полезные результаты следуют непосредственно из выражения для локальной завихренности в прямоугольной системе координат с осями, параллельными локальным направлениям скорости $\mathbf{u}$, главной нормали к линии тока (направленной к ее центру кривизны) и бинормали. Если (s, n, b) — координаты вдоль этих трех направлений соответственно, а (u, v, w) — соответствующие компоненты вектора скорости, то локально

$$v = w = 0, \qquad u = q, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{q}{R}, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0,$$

где R — локальный радиус кривизны линии тока. Тогда локальные компоненты завихренности имеют выражения

$$\omega_s = \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial b}, \qquad \omega_n = \frac{\partial u}{\partial b}, \quad \omega_b = \frac{u}{R} - \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Далее, поскольку локально справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial b}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial b}\right) q,$$

то для безвихревого течения

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{q}{R}, \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0. \tag{6.2.13}$$

Первое из равенств (6.2.13) показывает, что, когда линии тока искривлены, скорость q на внутренней стороне изгиба больше, чем на внешней. Когда вода, протекающая по прямой длинной трубе с приблизительно одинаковой скоростью в ее поперечном сечении, встречает на своем пути изгиб, максимум скорости, а следовательно, минимум давления и первое проявление кавитации возникают на внутренней стороне изгиба стенки трубы. Аналогично этому, когда жидкость обтекает выступ, максимальная скорость возникает на его вершине, если только течение вблизи выступа можно считать приближенно безвихревым; поэтому жидкость на границе выступа вниз по потоку замедляется, что приводит к отрыву пограничного слоя (и, следовательно, к образованию нового режима течения без максимума скорости на вершине выступа), как уже отмечалось в § 5.10.

6.3. Установившееся течение; некоторые приложения теоремы Бернулли и теоремы о количестве движения

В частном случае установившегося течения невязкой жидкости мы имеем теорему Бернулли (§ 3.5 и 5.1) и уравнение количества движения в интегральной форме (§ 3.2). Если общий характер поля течения известен из независимых соображений, как в описанных ниже случаях безвихревого течения, этих соотношений часто достаточно для определения тех свойств течения, которые важны на практике. Ни одно из этих двух соотношений не требует знания детального характера течения, и целесообразно рассмотреть их использование на нескольких простых примерах, прежде чем переходить к более сложным методам исследования.

Теорема Бернулли для несжимаемой невязкой жидкости постоянной плотности, на которую действует сила тяжести, гласит, что величина

$$H = \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} \tag{6.3.1}$$

постоянна на любой линии тока установившегося течения, где, как и раньше, $q^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. В рассматриваемом здесь *безвихревом* установившемся течении величина H, как отмечалось в § 6.2, постоянна во всей жидкости. В случаях, когда абсолютное давление не входит в условия, которые должны удовлетворяться на гра-

нице жидкости (т. е. если жидкость не имеет свободной поверхности), разность $p - \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ будем называть «модифицированным давлением», как отмечалось в § 4.1, и обозначать буквой p, так что гравитационный член в (6.3.1) исключается.

Интегральная форма уравнения количества движения для несжимаемой невязкой однородной жидкости в установившемся движении (см. (3.2.4)) имеет вид

$$\rho \int \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA = \int (\rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} - p)\,\mathbf{n}\, dA, \tag{6.3.2}$$

где $\mathbf{n}\delta A$ — элемент произвольно выбираемой контрольной поверхности, которая ограничивает объем V, полностью занятый жидкостью, а нормаль $\mathbf{n}$ направлена во внешнюю часть пространства по отношению к объему V. В члене, содержащем $\mathbf{g}$, можно вернуться к интегралу по объему и получить соотношение

$$\rho \int \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA = \rho V \mathbf{g} - \int p\mathbf{n}\, dA, \tag{6.3.3}$$

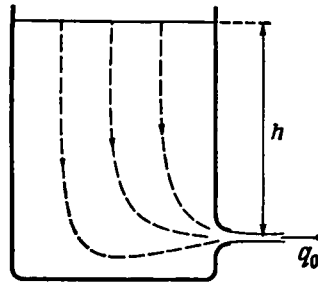
из которого видно, что силой тяжести можно пренебречь, если рассматриваются компоненты потока количества движения и результирующая сила в горизонтальной плоскости.

Примеры использования теоремы количества движения, приведенные в § 5.15, касались установившихся полей течения, в которых силы вязкости играли существенную роль, хотя в них оказалось возможным выбрать такие контрольные поверхности, на которых напряжения трения малы, и тем самым избежать подробного рассмотрения эффектов вязкости. Даже если силы вязкости не имеют существенного значения и ими всюду можно пренебречь, как в приведенных ниже примерах, иногда все же удобно использовать уравнение количества движения в интегральной форме. Те же результаты обычно могут быть получены путем детального решения задачи для поля течения невязкой жидкости, хотя если интегральный подход возможен, то его надо использовать как более быстрый и экономичный.

Истечение из круглого отверстия в открытом сосуде

Если сосуд с водой в одной из своих стенок имеет малое отверстие, то вода вытекает из него равномерно в виде гладкой струи. В случае *круглого* отверстия струя становится цилиндрической на некотором весьма малом расстоянии от отверстия и остается такой до тех пор, пока она не отклонится или не ускорится под влиянием силы тяжести [1]). Потоку жидкости через отверстие соот-

[1]) Если отверстие некруглое, то сближение линий тока приводит к сложным изменениям формы поперечного сечения струи; например, сближение линий тока в углах квадратного отверстия больше, чем в середине его сторон, и поперечное сечение струи принимает вид креста, так как линии тока из углов квадрата входят внутрь струи. Под влиянием поверхностного натяжения поперечное сечение струи из некруглого отверстия вниз по потоку периодически изменяется.



Р и с. 6.3.1. Истечение из отверстия в открытом сосуде.

ветствует медленное понижение уровня свободной поверхности воды в сосуде. Все линии тока, проходящие через отверстие, должны начинаться на свободной поверхности, где скорость пренебрежимо мала, а давление постоянно и равно атмосферному давлению p_0 (для открытого сосуда); постоянная H в уравнении Бернулли имеет одно и то же значение для всех линий тока, за исключением приходящих из пограничного слоя на стенке сосуда, которым мы будем пренебрегать.

Теперь можно воспользоваться теоремой Бернулли и определить скорость q_0 в цилиндрическом сечении струи, где давление обязательно постоянно (ускорения и силы вязкости пренебрежимо малы) и равно p_0. Сравнение выражений H в точке на свободной поверхности и в точке внутри струи дает

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} q_0^2 - gh,$$

где h — расстояние по вертикали между этими двумя точками (рис. 6.3.1) и, следовательно,

$$q_0 = \sqrt{2gh}. \tag{6.3.4}$$

Это как раз та скорость, которую приобрел бы каждый элемент воды в свободном падении с высоты h, что и можно было ожидать по энергетическим соображениям; роль, которую играет в данном случае давление жидкости, заключается в том, чтобы заставить струю вытекать в направлении, перпендикулярном стенке сосуда, не оказывая влияния на ее скорость. Формулу (6.3.4) часто называют *формулой Торричелли* (Торричелли получил ее задолго до работы Бернулли).

В практических задачах хотелось бы использовать полученное выражение для скорости q_0 при определении массового расхода через круглое отверстие. Тогда возникает еще одна задача, которая не может быть разрешена одной только теоремой Бернулли,— задача нахождения величины поперечного сечения струи в области, где она остается цилиндрической, а скорость воды равна q_0.

Исследование струи, вытекающей из круглого отверстия, показывает, что сближение линий тока к отверстию продолжает сохраняться на расстоянии нескольких диаметров за ним и что площадь поперечного сечения струи, если она цилиндрическая, меньше площади поперечного сечения отверстия. Коэффициент сжатия α зависит только от формы твердой границы вблизи отверстия, и из опытов установлено, что в простейшем случае круглого отверстия в тонкой плоской стенке он имеет величину 0,61—0,64. Из теоремы о количестве движения мы увидим, что величина коэффициента α лежит в пределах между $^1/_2$ и 1 для всех отверстий, исключая, быть может, некоторые весьма специальные формы границ. Для некоторых простых границ и двумерного течения величина α и форма вытекающей струи могут быть подробно изучены методами, изложенными в § 6.13.

Используем теперь теорему о количестве движения. Истечение воды из отверстия сосуда сопровождается потоком количества движения в направлении оси струи (которая предполагается горизонтальной), и это указывает на существование горизонтальной силы, действующей на сосуд. Результирующая сила, приложенная к сосуду со стороны соприкасающейся с ним жидкости, развиваемая как водой на смоченной поверхности A', где имеется давление p, так и воздухом на остальной, несмоченной поверхности A'', где давление принимает постоянное значение p_0, равна

$$\mathbf{R} = \int p\mathbf{n}\, dA' + \int p_0\mathbf{n}\, dA'',$$

где нормаль $\mathbf{n}$ всегда направлена во внешнюю по отношению к жидкости часть пространства. Поскольку сумма $A' + A''$ представляет собой замкнутую поверхность, а интеграл от постоянной по всей замкнутой поверхности равен нулю, имеем

$$\mathbf{R} = \int (p - p_0)\,\mathbf{n}\, dA'. \tag{6.3.5}$$

Вертикальная компонента вектора $\mathbf{R}$ равна весу жидкости, содержащейся в сосуде, и здесь она нас не интересует; горизонтальная компонента определяет реакцию струи, которую мы вычислим с помощью теоремы о количестве движения.

Выберем контрольную поверхность A, состоящую из: 1) свободной поверхности воды в сосуде; 2) смоченной поверхности A' сосуда; 3) поверхности, ограничивающей часть струи между отверстием и каким-либо сечением, где она стала цилиндрической; 4) этого поперечного сечения струи. На части 1), 3) и 4) контрольной поверхности действует давление p_0, так что

$$\int p\mathbf{n}\, dA = \int (p - p_0)\,\mathbf{n}\, dA' = \mathbf{R}. \tag{6.3.6}$$

Рассмотрение компонент членов векторного уравнения (6.3.3) в направлении вектора $\mathbf{k}$ вдоль оси струи показывает, что

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} = -\rho q \beta \alpha S = -2\rho g h \alpha S, \qquad (6.3.7)$$

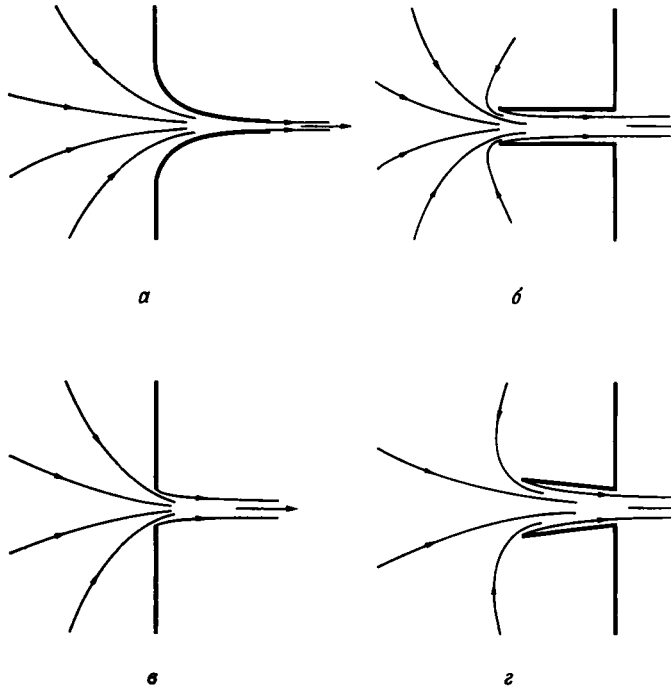
где S — площадь круглого отверстия и αS — площадь поперечного сечения цилиндрической части струи.

В тех точках, которые расположены в той же самой горизонтальной плоскости, что и ось струи, но не вблизи отверстия, скорость воды пренебрежимо мала и давление равно $p_0 + \rho g h$. Поэтому часть реакции (6.3.7), обусловленная тем, что на одной стороне сосуда имеется отверстие площади S, а на другой стороне, прямо противоположной,— равная ему площадь стенки, на которую действует избыточное давление, равна $-\rho g h S$. Другая часть этой реакции получается за счет падения давления (относительно его статической величины в жидкости $p_0 + \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$) на стенке сосуда в окрестности отверстия; давление падает в связи с увеличением скорости по мере того, как вода приближается к отверстию. Величина этой части реакции зависит от точной формы стенки сосуда вблизи отверстия и в общем случае не может быть определена из соображений приведенного выше характера. Из равенства (6.3.7) видно, что расчет второй части реакции по существу сводится к вычислению коэффициента сжатия α.

Для двух отверстий частного вида значение α удается получить сразу. Одно из них представляет собой длинный плавно сужающийся насадок, в котором линии тока становятся прямыми и параллельными еще до выхода из сосуда (рис. 6.3.2, *а*). Очевидно, что в этом случае $\alpha = 1$, и тогда равенство (6.3.7) показывает, что часть реакции, действующая на сосуд вследствие падения давления на стенке вблизи отверстия, имеет точно такую же величину, как и часть от неуравновешенного давления на площади S части стенки, противоположной отверстию. Другой специальный случай представляет собой насадок, называемый *насадком Борда*, который состоит из цилиндрической трубки (с внутренней площадью поперечного сечения S), вдвинутой внутрь сосуда (рис. 6.3.2, *б*). Область, в которой скорость воды значительна, располагается вблизи входной части трубки, и давление приблизительно равно статическому давлению жидкости $p_0 + \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ во всех точках стенки сосуда, за исключением трубки. Давление на трубке никак не входит в компоненту вектора $\mathbf{R}$ в направлении оси трубки, поэтому прямое вычисление интеграла в формуле (6.3.5) дает [1])

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} = -\rho g h S. \qquad (6.3.8)$$

[1]) Как это ни странно, при обтекании безвихревым потоком острой кромки (внешнего угла 2π) бесконечно большая скорость и бесконечно большое разрежение на кромке дают ненулевую (подсасывающую) силу на ее границе (см. § 6.5); однако в рассматриваемом сейчас случае предполагается, что благодаря отрыву струи от острого края кромки угловые размеры области жидкости вблизи кромки меньше 2π и сила, действующая на границе в направлении оси трубки, равна нулю.



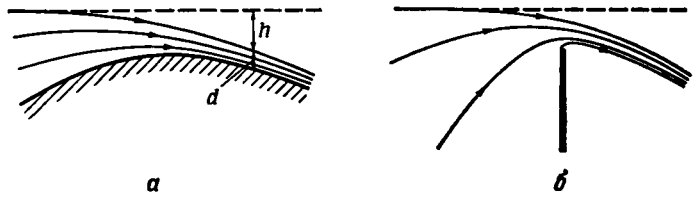
Р и с. 6.3.2. Истечение из круглого отверстия: *а*—плавно сужающийся насадок, $\alpha=1$; *б* — насадок Борда, $\alpha = 1/2$; *в* — отверстие в плоской стенке, $\alpha \approx 0{,}6$ (эксперимент); *г* — насадок, для которого $\alpha < 1/2$.

Сравнение с равенством (6.3.7) показывает, что в этом случае $\alpha = 1/2$.

Для большинства других форм отверстия коэффициент α изменяется в пределах между $1/2$ и 1, так как отклонение давления от его статической величины в жидкости на стенке сосуда вблизи отверстия может быть только разряжением, а все остальное зависит только от геометрической формы стенки и насадка. В случае насадка необычной формы, показанного на рис. 6.3.2, *г* (его площадь S соответствует внутреннему, более широкому концу конического насадка), относительное разрежение на смоченной стороне насадка дает добавок к величине реакции на сосуд, направленный вдоль струи, а не в противоположном направлении, как это бывает обычно, так что в данном случае из равенства (6.3.7) видно, что коэффициент α должен быть немного меньше $1/2$.

Водослив через плотину

Инженерам-гидравликам часто нужно измерить расход воды, равномерно протекающей по открытому каналу или через слив



Р и с. 6.3.3. Установившееся течение над гребнем плотины.
а — плотина с закругленным широким гребнем; *б* — плотина с острым гребнем.

резервуара. Простой путь приближенного получения этой информации сводится к преграждению потока воды в некотором месте канала или слива погруженным препятствием или «плотиной» и наблюдению подъема уровня поверхности запруженной, медленно движущейся воды впереди препятствия.

Обычный тип плотины с широким гребнем показан на рис. 6.3.3, *а*. Наклоны как плотины, так и свободной поверхности воды в данном случае малы, и можно считать, что скорость воды q поперек потока над плотиной приблизительно постоянна. Тогда если d — глубина этого потока, то расход воды на единицу ширины плотины в направлении к плоскости чертежа равен

$$Q = qd. \tag{6.3.9}$$

Кроме того, из теоремы Бернулли для линии тока на поверхности плотины следует, что

$$\frac{q^2}{2} - gh = 0; \tag{6.3.10}$$

здесь h — понижение уровня воды на плотине по сравнению с таким местом вверх по потоку, где скорость пренебрежимо мала. Таким образом, расход равен

$$Q = d\sqrt{2gh} \tag{6.3.11}$$

и его можно вычислить по измеренным величинам h и d в любой точке.

Дополнительную информацию можно получить на основе замечания, что расстояние по вертикали любой точки плотины от поверхности уровня воды перед плотиной, а именно

$$d + h = \frac{Q}{q} + \frac{q^2}{2g}, \tag{6.3.12}$$

при $Q = \text{const}$ имеет минимум по переменной q. Следовательно, если условия вверх и вниз по потоку таковы, что скорость элемента жидкости, по мере того как он проходит над плотиной, возрастает от нуля в резервуаре до значения, большего, чем $\sqrt[3]{gQ}$, то скорость $\sqrt[3]{gQ}$ наблюдается в том месте, где расстояние $d + h$

минимально, т. е. в наивысшей точке плотины [1]). При этих условиях значения h, d и q в наивысшей точке плотины равны соответственно

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{Q^2/g}, \qquad d_1 = \sqrt[3]{Q^2/g}, \qquad q_1 = \sqrt[3]{gQ}. \tag{6.3.13}$$

Таким образом, измерение h_1 или d_1 (или, что более удобно, суммы $h_1 + d_1$, так как эту величину можно измерить в точке, где вода почти неподвижна) достаточно для определения расхода Q.

Формулы вида (6.3.13) справедливы не только для плотин с широким гребнем (это следует и из соображений размерности), хотя числовые коэффициенты будут другими. Иногда применяются плотины с острым гребнем, как показано на рис. 6.3.3, *б*; путем наблюдения установлено, что для них

$$Q = c\,(g)^{1/2}\,(h_1 + d_1)^{3/2}, \tag{6.3.14}$$

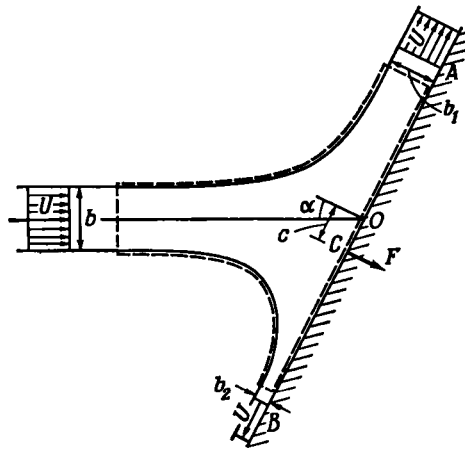
где c приблизительно на 5% больше теоретической величины $(2/3)^{3/2}$ для плотины с широким гребнем. Необходимо, чтобы воздух имел свободный доступ к области, расположенной под истекающей струей, так как из закрытой области воздух постепенно подхватывается и уносится струей, и она подсасывается вниз.

Удар струи жидкости о плоскую стенку

Если установившаяся цилиндрическая струя воды, окруженная воздухом, ударяется о наклонную плоскую твердую стенку, то струя превращается в слой воды, прилегающий к стенке, в котором течение всюду направлено от точки удара. Предположим, что скорость U струи постоянна и имеет достаточно большую величину, чтобы влияние силы тяжести было малым. Тогда везде на свободной поверхности, согласно теореме Бернулли, скорость равна U. Скорость внутри слоя на некотором расстоянии от точки удара также должна быть приблизительно постоянной (за исключением тонкого пограничного слоя вблизи стенки), так как скорость в слое имеет одинаковое направление, и, следовательно, давление поперек слоя постоянно. Таким образом, остается узнать только распределение толщины слоя в зависимости от направления потока вдали от точки удара. Полный массовый расход в слое равен, конечно, расходу в струе, однако остается неизвестным его распределение в разных направлениях.

Струи круглого поперечного сечения представляют особый интерес, поскольку они могут быть легко воспроизведены в лабо-

[1]) Физический смысл скорости $\sqrt[3]{gQ}$ состоит в том, что она представляет собой максимальную скорость распространения поверхностных волн малой амплитуды, когда глубина равна d_1; возмущения могут распространяться внутрь резервуара из любой точки, расположенной вверх по потоку от наивысшей точки плотины — именно поэтому плотина задерживает воду,— но не от любой точки вниз по потоку от нее, так как скорость воды там больше чем $\sqrt[3]{gQ}$.



Р и с. 6.3.4. Струя жидкости, ударяющаяся о наклонную плоскую стенку (двумерный случай).

ратории. При этом плоская твердая стенка может быть заменена некоторой плоскостью симметрии, а именно две круглые струи можно направить так, чтобы их оси пересекались. В получаемом таким путем слое воды исключено влияние трения на твердой стенке, и слой распространяется в радиальных направлениях до тех пор, пока его толщина (изменяющаяся в соответствии с законом сохранения массы обратно пропорционально расстоянию вдоль радиуса) не станет столь малой, что под влиянием поверхностного натяжения слой распадется на отдельные капли.

Очевидно, что уравнение количества движения налагает ограничение на разделение струи стенкой. Поскольку результирующей сил воздействия границ на воду в направлениях, параллельных стенке, нет, количество движения слоя равно компоненте количества движения струи в плоскости стенки. Это дополнительное соотношение вообще не дает возможности определить распределение толщины слоя в любом направлении, но его достаточно в случае двумерной струи, которая создает слой, распределение толщины которого вполне определяется только двумя величинами, одной для каждого из двух потоков, движущихся от точки удара. Поэтому перейдем к рассмотрению удара двумерной струи как еще одного примера использования уравнения количества движения в интегральной форме, несмотря на ограниченное значение этого случая с физической точки зрения.

На рис. 6.3.4 показана двумерная струя ширины b, ударяющаяся о стенку под углом α к ее нормали и разделяющаяся на два потока, ширина каждого из которых постепенно становится постоянной и равной b_1 и b_2 соответственно. Выберем контрольную

поверхность, которая показана на рисунке штриховой линией и на которой скорость равна U, а давление равно давлению p_0 в окружающем струю воздухе, за исключением окрестности центральной точки удара O на стенке. Векторное уравнение (6.3.3) в проекции на направление, параллельное стенке, принимает вид

$$\rho U^2 (-b \sin \alpha + b_1 - b_2) = 0. \tag{6.3.15}$$

Из закона сохранения массы

$$b_1 + b_2 = b \tag{6.3.16}$$

и из (6.3.15) получаем

$$b_1 = \frac{1}{2} b (1 + \sin \alpha), \qquad b_2 = \frac{1}{2} b (1 - \sin \alpha). \tag{6.3.17}$$

Кроме того, можно получить некоторую информацию о распределении давления на стенке вблизи точки O. Уравнение (6.3.3) в проекции на направление нормали к стенке принимает вид

$$\rho U^2 b \cos \alpha = \int (p - p_0)\, dA_w = F, \tag{6.3.18}$$

где интеграл берется по поверхности стенки, и F — величина нормальной силы давления струи на стенку (на единицу толщины по нормали к плоскости чертежа). Далее, рассмотрение момента количества движения относительно точки O, поступающего в контрольную поверхность и выходящего из нее, и сил, действующих на жидкость внутри контрольной поверхности, показывает, что центр давления C (т. е. точка, в которой равнодействующая нормальная сила F, действующая на стенку, имеет момент относительно точки O, равный моменту всех сил давления на стенку) есть точка, расположенная в направлении против часовой стрелки от нормали и на расстоянии c от точки O, определяемом уравнением

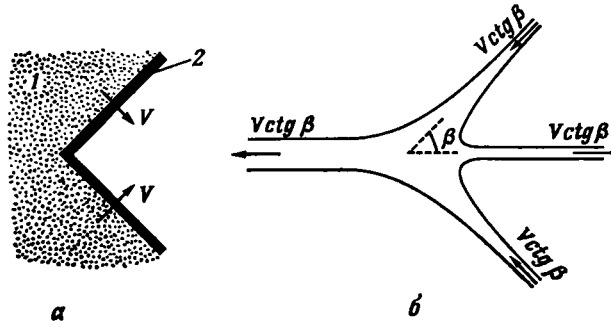
$$cF = \frac{1}{2} \rho U^2 b_1^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 b_2^2.$$

Следовательно,

$$c = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \alpha. \tag{6.3.19}$$

Таким образом, если бы твердая стенка была шарнирно закреплена в точке O, то она стремилась бы установиться под прямым углом по отношению к струе.

Этот последний вывод качественно справедлив также в случае твердой плоской пластины конечной ширины, шарнирно закрепленной по одной из линий, делящей ее пополам, и помещенной в поток большой ширины; аналогично этому пластины прямоугольной формы падают через бесконечную жидкость таким образом, что они поворачиваются своей широкой стороной в направлении падения. Объяснение этих фактов следует искать в расположении на стенке или на пластине критической точки, в которой

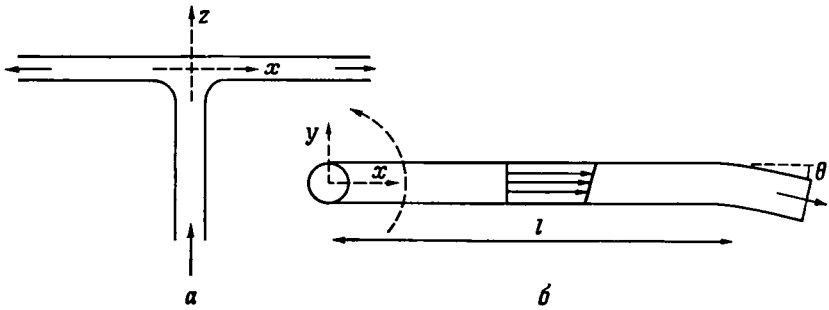


Р и с. 6.3.5. Конический кумулятивный заряд. Справа скорости изображены в осях, движущихся вместе с вершиной конуса.
1 — взрывчатое вещество; *2* — полый металлический конус.

давление максимально. По мере того как угол α возрастает от нуля, критическая точка удаляется от центральной точки O в сторону точки B (рис. 6.3.4) по двум причинам. Первая состоит в том, что в набегающей струе больше жидкости движется в сторону точки A, так что разделяющая линия тока в струе (которая позже проходит через критическую точку) отклоняется от оси струи в сторону точки B. Вторая причина заключается в том, что разделяющая линия тока должна подходить к критической точке под прямым углом к пластине (поскольку любая линия тока, проходящая через критическую точку, в безвихревом течении должна быть параллельна главной оси локального тензора скоростей деформации, а линия тока на поверхности пластины является одной из главных осей) и для этого линия тока по мере своего приближения к пластине должна поворачиваться в сторону точки B.

Специальный случай осесимметричной струи, для которой уравнение количества движения как раз дает наибольшую часть требуемой информации, возникает в теории «кумулятивных зарядов»[1]). Типичный кумулятивный заряд состоит из полого металлического конуса с открытым основанием и взрывчаткой, прилегающей к внешней части конуса, как изображено на рис. 6.3.5, *а*. Когда происходит взрыв (более или менее одновременно во всем взрывчатом веществе), металлическая стенка конуса вынуждена двигаться внутрь его под влиянием большого давления; при этом под действием очень больших напряжений она становится пластичной и способной течь подобно жидкости. Каждая часть стенки конуса движется сначала в направлении внутренней нормали, так что металлический слой продолжает сохранять форму конуса (хотя и с увеличивающейся толщиной стенки), за исключением области

[1]) Такие заряды разработаны во время второй мировой войны для использования их в противотанковом и фугасном оружии, предназначенном для пробивания толстой брони. [Излагаемая ниже теория была впервые развита М. А. Лаврентьевым — *Ред.*]



Р и с. 6.3.6. Течение в колене трубы, вращающейся относительно оси z.

что константа Бернулли H, видоизмененная с учетом действия центробежной силы, тем не менее постоянна во всей области установившегося течения.

Когда все величины, характеризующие поле течения, отнесены к вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω системе координат, уравнение движения (6.2.3) с включенной в него массовой силой инерции (3.2.10) записывается в форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) = -\nabla \left\{ \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \right\},$$

Следовательно, если течение по отношению к этой системе координат установившееся и имеет завихренность $-2\boldsymbol{\Omega}$ (соответствующую нулевой завихренности абсолютного течения), то величина

$$H = \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \qquad (6.3.21)$$

постоянна всюду в поле течения. Таким образом, получается простое явное выражение для давления через скорость, и оно может быть применено во многих других задачах.

В качестве наглядного примера рассмотрим систему труб, изображенную на рис. 6.3.6, *а*. Жидкость выталкивается по вертикальной трубе и разделяется на два потока в соединенной с ней горизонтальной трубе, которая вращается относительно вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью Ω. Предположим, что скорость постоянна в каждом поперечном сечении вертикальной трубы, так что абсолютное течение везде безвихревое. По отношению к осям x и y, которые вращаются вместе с горизонтальной трубой, завихренность равна -2Ω и параллельна оси z, так что когда все скорости в горизонтальной трубе на некотором расстоянии от места соединения труб становятся одного направления, их компоненты вдоль оси x равны

$$u = U + 2\Omega y;$$

отсюда заключаем, что жидкость движется быстрее на передней по вращению стороне трубы. Тогда, согласно теореме Бернулли в приведенной выше форме, для давления во вращающейся трубе имеем

$$\frac{p}{\rho} = H - \frac{1}{2}(U + 2\Omega y)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2), \qquad (6.3.22)$$

причем влияние силы тяжести не учитывается. Как и ожидалось интуитивно, давление больше на той стороне, вдоль которой жидкость движется медленнее, и к трубе нужно приложить крутящий момент, чтобы поддерживать ее вращение и сообщать потоку жидкости момент количества движения относительно оси z. Если вращающаяся труба имеет круглое сечение радиуса a, то крутящий момент, который должен быть приложен к прямому участку трубы длиной $2l$, чтобы сохранить ее вращение, легко определяется из выражения (6.3.22) и равен

$$2\int_0^l 2\pi\rho U\Omega a^2 x\, dx = 2\pi\rho U\Omega a^2 l^2.$$

Оба конца вращающейся трубы могут быть открыты в атмосферу, где давление равно p_0. Если длина трубы велика по сравнению с ее радиусом, то средняя скорость, с которой жидкость выбрасывается из двух ее открытых концов в направлении оси вращающейся трубы, определяется формулой

$$U^2 = 2\left(H - \frac{p_0}{\rho}\right) + \Omega^2 l^2, \qquad (6.3.23)$$

где величину H — полную энергию на единицу массы воды, подаваемой по вертикальной трубе — можно считать заданной. Даже если жидкость подается из резервуара, где ее скорость очень мала, а давление меньше p_0 (не считая перепада давлений, обусловленного силой тяжести), так что $H < p_0/\rho$, жидкость еще можно откачивать из резервуара с помощью такого устройства.

В этом состоит принцип действия центробежного насоса.

Если участки вращающейся трубы вблизи двух открытых ее концов слегка отклонены от оси вращения, то реакция вытекающих струй может быть использована, чтобы заставить трубу вращаться подобно водяной форсунке или «огненному колесу» фейерверка. В простом случае, изображенном на рис. 6.3.6, *б*, две струи вытекают под углом θ к оси x со средней скоростью U (относительно вращающихся осей), и момент силы относительно оси вращения, действующей на колено трубы, приближенно равен величине $lU\sin\theta$, умноженной на массу жидкости $2\pi\rho a^2 U$, вытекающей из трубы в одну секунду. Приравнивая этот момент моменту, требуемому для поддержания вращения трубы с угловой скоростью

Ω, находим, что

$$\Omega l = U \sin \theta.$$

Следовательно, скорость вытекающей жидкости относительно неподвижной системы координат направлена строго по радиусу, что и следовало ожидать при отсутствии приложенного к ней момента. Тогда из (6.3.23) следует

$$\Omega l = U \sin \theta = \sqrt{2\left(H - \frac{p_0}{\rho}\right)}\, \operatorname{tg} \theta.$$

Проекция скорости вытекающей жидкости на направление прямой, проходящей через ось вращения, равна

$$U \cos \theta = \sqrt{2\left(H - \frac{p_0}{\rho}\right)};$$

полученное выражение показывает (это можно было ожидать и по другим соображениям), что площадь участка земли, который можно полить водой из такой форсунки, не зависит от θ.

Упражнение

Цилиндрический столб жидкости длиной l и плотности ρ движется в направлении, параллельном образующим, и ударяется о твердую стенку с достаточно большой скоростью, чтобы заставить материал стенки вести себя локально как жидкость с плотностью ρ_s. Покажите, что глубина проникновения струи в стенку приближенно равна $l(\rho/\rho_s)^{1/2}$.

6.4. Общие свойства безвихревого течения, обусловленного движущимся твердым телом

Соленоидальное безвихревое течение, вызываемое твердым телом, движущимся в жидкости, которая простирается во всех направлениях до бесконечности и покоится там, возникает часто как в теоретических, так и практических задачах и имеет особое значение. Результаты расчета такого течения можно непосредственно применить к течениям при большом числе Рейнольдса, когда отрыв пограничного слоя не происходит (к ним относятся обтекание тонких тел, движущихся параллельно своей оси, и тел произвольной формы, начинающих ускоренное движение из состояния покоя или совершающих поступательные или вращательные колебания малой амплитуды относительно неподвижной точки); в ряде случаев эти результаты используются также косвенно. Соответствующая математическая теория достаточно хорошо развита, и имеется большое число как аналитических, так и численных методов для определения поля течения [1]). В этом и несколь-

[1]) Обстоятельное изложение аналитических методов и результатов можно найти в книге: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947 (а также в книге: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, изд. 6, Физматгиз, М. 1963 — *Ред.*).

ких последующих параграфах мы рассмотрим основные характерные свойства задачи и некоторые разъясняющие ее существо специальные случаи.

В данном параграфе приводятся некоторые результаты, касающиеся асимптотической формы распределения скорости на достаточном удалении от тела, полной энергии жидкости и результирующей силы, действующей на тело при его поступательном движении, без явного учета формы тела, за исключением того, что оно считается занимающим односвязную область. Общность этих результатов имеет особое значение.

Большие различия между свойствами двумерных и трехмерных течений, вызванных движущимися телами, обусловлены тем, что область, занятая жидкостью, обязательно двусвязна в первом случае и односвязна во втором; поэтому рассуждения и результаты в основном приходится формулировать по отдельности для каждого из них. Трехмерное поле течения обычно имеет более простые свойства и оно будет рассматриваться первым.

Скорость на больших расстояниях от тела

Предварительно напомним (см. § 2.9), что в трехмерном поле, в котором градиент $\nabla\varphi$ на бесконечности равен нулю, потенциал скорости по отношению к сферической поверхности, окружающей внутреннюю границу, можно записать в виде бесконечного ряда по объемным сферическим функциям отрицательной степени. Точнее говоря, в этой области

$$\varphi(\mathbf{x}) - C = \frac{c}{r} + c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots, \qquad (6.4.1)$$

где $r = |\mathbf{x}|$ и коэффициенты c, c_i, c_{ij}, ... суть тензоры, которые определяются по формулам (2.9.20) через интегралы от φ и $\nabla\varphi$ по внутренней границе области безвихревого течения. В рассматриваемом здесь случае внутренняя граница представляет собой поверхность тела и результирующий объемный поток через внутреннюю границу равен нулю; вследствие этого, как отмечалось в § 2.9, $c = 0$. Таким образом, в общем случае на больших расстояниях от тела

$$\varphi(\mathbf{x}) - C \sim \mathbf{c}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}}{r^3}, \qquad (6.4.2)$$

где

$$4\pi\mathbf{c} = \int (\mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi - \mathbf{n}\varphi)\, dA, \qquad (6.4.3)$$

а интеграл берется по всей поверхности тела A с внешней к ней нормалью $\mathbf{n}$. На больших расстояниях от тела распределение скорости совпадает с распределением скорости от диполя интенсивности $4\pi\mathbf{c}$, расположенного в начале координат, а величина

скорости имеет порядок r^{-3}. В частном случае сферы с центром, помещенным в данный момент времени в начале координат, c_i оказывается единственным ненулевым коэффициентом в разложении (6.4.1) ($c_i = {}^1/_2\, a^3 U_i$, где a — радиус сферы, а U — мгновенная скорость), так что в этом случае выражение (6.4.2) применимо во всей жидкости.

Аналогичные результаты имеются для течения, обусловленного движением твердого тела в безграничной жидкости в двумерном поле течения, если только правильно выбрать циклическую постоянную, т. е. циркуляцию $\varkappa$ вокруг тела. Вместо разложения (6.4.1) справедливо разложение (2.10.6), а именно

$$\varphi(\mathbf{x}) - C = \frac{\varkappa}{2\pi}\theta + c\ln r + c_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln r) + c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\ln r) + \ldots, \qquad (6.4.4)$$

в котором коэффициенты c, c_i, c_{ij}, ... определяются интегралами по всей поверхности тела уже не от φ и $\nabla\varphi$, а от $\varphi - (\varkappa/2\pi)\,\theta$ и $\nabla\{\varphi - (\varkappa/2\pi)\theta\}$. Этот ряд применим в области вне круга с центром в начале координат, содержащего внутреннюю границу течения. Так как первый коэффициент c снова пропорционален результирующему объемному потоку через внутреннюю границу (на единицу толщины по нормали к плоскости движения), а он в данном случае равен нулю, то асимптотическое выражение φ при $r \to \infty$, соответствующее выражению (6.4.2), имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) - C - \frac{\varkappa}{2\pi}\theta \sim \mathbf{c}\cdot\nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}}{r^2}, \qquad (6.4.5)$$

где

$$-2\pi\mathbf{c} = \int\left\{\mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\nabla\left(\varphi - \frac{\varkappa\theta}{2\pi}\right) - \mathbf{n}\left(\varphi - \frac{\varkappa\theta}{2\pi}\right)\right\} dA. \qquad (6.4.6)$$

На больших расстояниях от тела основной член в распределении скорости имеет порядок r^{-1} и он соответствует точечному вихрю интенсивности $\varkappa$, расположенному в начале координат; если же $\varkappa = 0$, то основной член имеет порядок r^{-2} и соответствует диполю интенсивности $-2\pi\mathbf{c}$ в начале координат. В случае движущегося кругового цилиндра с центром, расположенным в данный момент в начале координат, единственным ненулевым коэффициентом будет c_i ($c_i = -a^2 U_i$) и асимптотическое выражение (6.4.5) справедливо во всей жидкости.

Интересное свойство интегралов в формулах (6.4.3) и (6.4.6), определяющих интенсивность эффективного диполя, который представляет тело на больших расстояниях, состоит в том, что эти интегралы с одинаковым успехом можно вычислить по любой замкнутой жидкой поверхности S, охватывающей тело в данный

момент времени. Действительно, имеем

$$\int (\mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi - \mathbf{n}\varphi)\,dA = \int \{\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{x}\varphi) - 2\mathbf{n}\varphi\}\,dA =$$
$$= -\int \{\nabla^2(\mathbf{x}\varphi) - 2\nabla\varphi\}\,dV + \int \{\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{x}\varphi) - 2\mathbf{n}\varphi\}\,dS =$$
$$= \int (\mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi - \mathbf{n}\varphi)\,dS,$$

и аналогично для разности $\varphi - (\varkappa/2\pi)\theta$, заменяющей потенциал скорости φ в случае двумерного поля. Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль как к поверхности A, так и к поверхности S, а объемный интеграл берется по объему жидкости, ограниченному поверхностями A и S.

Распределение скорости определяется однозначно, если в каждой точке поверхности тела задана величина $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$, а также циркуляция вокруг тела в двумерном поле. Мгновенное движение тела определяется в общем случае его угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ и скоростью $\mathbf{U}$ некоторой точки тела, в качестве которой для удобства выберем центр объема тела, мгновенное положение которого определяется вектором $\mathbf{x}_0$; при этом внутреннее граничное условие во всех точках поверхности A задается равенством

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi = \mathbf{n}\cdot\{\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}. \qquad (6.4.7)$$

Тогда в случае тела в трехмерном поле величина $4\pi\mathbf{c}$ определяется с использованием (6.4.3) по формуле

$$4\pi\mathbf{c} = \int \mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}\,dA - \int \varphi\mathbf{n}\,dA =$$
$$= \int \{\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}\cdot\nabla\mathbf{x}\,dV - \int \varphi\mathbf{n}\,dA,$$

где первый интеграл берется по объему тела V_0. Следовательно,

$$4\pi\mathbf{c} = V_0\mathbf{U} - \int \varphi\mathbf{n}\,dA; \qquad (6.4.8)'$$

в двумерном поле соответствующее выражение имеет вид

$$-2\pi\mathbf{c} = V_0\mathbf{U} - \int \left\{\mathbf{n}\left(\varphi - \frac{\varkappa\theta}{2\pi}\right) + \mathbf{x}\mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{\varkappa\theta}{2\pi}\right)\right\} dA. \qquad (6.4.8)''$$

В частном случае тела, которое симметрично относительно каждой из трех ортогональных плоскостей в трехмерном поле и которое вращается относительно линии пересечения любых двух из этих плоскостей (так что $\mathbf{U} = 0$), значения потенциала скорости φ в двух точках на поверхности A на концах прямой, проходящей через центр объема тела, обязательно равны, и векторы единичной нормали антипараллельны; таким образом, интеграл $\int \varphi\mathbf{n}\,dA$ и постоянная $\mathbf{c}$ равны нулю, а скорость на больших расстояниях

от тела имеет порядок r^{-4}. В случае тела, симметричного относительно каждой из двух ортогональных плоскостей в двумерном поле и при $\mathbf{U} = 0$, аналогично имеем $\mathbf{c} = 0$.

Дополнительная информация о зависимости потенциала скорости φ, а следовательно, также и вектора $\mathbf{c}$ от $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и $\varkappa$ содержится в выражениях, подобных (2.9.23) и (2.10.13). Потенциал скорости можно записать в виде $\varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — однозначный потенциал скорости, удовлетворяющий заданному внутреннему граничному условию (в данном случае условию (6.4.7)), а φ_2 — многозначный потенциал скорости с циклической постоянной $\varkappa$ (которая отлична от нуля только для двумерного течения), удовлетворяющий условию $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_2 = 0$ на поверхности A. Потенциал скорости φ_1 в свою очередь можно представить в виде суммы двух однозначных потенциалов скорости, нормальная производная от одного из них на поверхности A равна величине $\mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$, и, следовательно, он имеет выражение (2.9.23); нормальная производная от другого потенциала скорости на поверхности A имеет значение $\mathbf{n}\cdot\{\boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\}$, и поэтому он линеен относительно вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Потенциал скорости φ_2 не зависит от $\mathbf{U}$ или $\boldsymbol{\Omega}$, но обязательно линейно зависит от $\varkappa$ и, как отмечалось в § 2.10, имеет выражение

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varkappa\left(\frac{\theta}{2\pi} + \Psi\right), \tag{6.4.9}$$

где Ψ — однозначный потенциал скорости, зависящий только от разности $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ и от формы тела. Следовательно, для полного потенциала скорости (в случае трехмерного течения $\varkappa = 0$) имеем

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Theta} + \varkappa\left(\frac{\theta}{2\pi} + \Psi\right). \tag{6.4.10}$$

Здесь $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Theta}$ и Ψ — все функции от $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, зависящие от формы тела и не зависящие от $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и $\varkappa$, а $\boldsymbol{\Theta}$, как и $\boldsymbol{\Omega}$, — аксиальный вектор, который в случае двумерного поля направлен по нормали к плоскости движения. Подставляя выражение (6.4.10) в граничное условие (6.4.7) и используя тот факт, что эти два соотношения справедливы для всех $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, находим внутренние граничные условия для $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Theta}$ во всех точках поверхности A:

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}\cdot\nabla\boldsymbol{\Theta} = -\mathbf{n}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{6.4.11}$$

В результате подстановки выражения (6.4.10) в (6.4.8) получается, что $\mathbf{c}$ представляет собой линейную функцию от $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и $\varkappa$; в трехмерном поле

$$4\pi c_i = U_j\left(V_0\delta_{ij} - \int \Phi_j n_i\, dA\right) - \Omega_j \int \Theta_j n_i\, dA, \tag{6.4.12'}$$

а в двумерном поле

$$-2\pi c_i = U_j\left(V_0\delta_{ij} - \int \Phi_j n_i\, dA\right) - \Omega_j \int \Theta_j n_i\, dA - \\ -\varkappa\int\left[\Psi n_i + x_i\mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{\varkappa\theta}{2\pi}\right)\right] dA. \tag{6.4.12''}$$

Важное свойство тензора второго порядка, являющегося в данном случае коэффициентом при U_j, состоит в том, что он симметричен по индексам i и j; действительно, из граничных условий (6.4.11) следует, что разность интегралов

$$\int \Phi_j n_i \, dA - \int \Phi_i n_j \, dA = \int \left(\Phi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right) n_k \, dA =$$

$$= \int \left(\Phi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right) n_k \, dS - \int (\Phi_j \nabla^2 \Phi_i - \Phi_i \nabla^2 \Phi_j) \cdot dV = 0.$$

Интеграл по объему обращается в нуль, поскольку Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, а интеграл по поверхности S обращается в нуль, если в качестве поверхности S выбрать сферу (в двумерном случае — окружность бесконечно большого радиуса).

Кинетическая энергия жидкости

Выражения для кинетической энергии жидкости через интегралы по поверхности были приведены в § 6.2. Здесь мы применим эти выражения к случаю, в котором жидкость ограничена изнутри твердым телом, имеющим заданное движение. Для тел, движущихся поступательно, можно получить неожиданно простое соотношение между кинетической энергией и коэффициентами c_i в разложениях (6.4.1) или (6.4.4).

Возьмем сначала тело, занимающее односвязную область и движущееся в трехмерном поле, или тело в двумерном поле с нулевой циркуляцией вокруг него. Тогда потенциал скорости φ будет однозначной функцией, и общее выражение для кинетической энергии жидкости (см. (6.2.8)) дает

$$T = -\frac{1}{2} \rho \int \varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

где интеграл берется по поверхности тела. В случае тела, совершающего как поступательное, так и вращательное движения, значение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ на поверхности тела определяется граничным условием (6.4.7), и, следовательно,

$$T = -\frac{1}{2} \rho \int \varphi \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, dA - \frac{1}{2} \rho \int \varphi \, [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \cdot \mathbf{n} \, dA. \quad (6.4.13)$$

Подстановка общего выражения (6.4.10) (при $\varkappa = 0$) показывает, что кинетическая энергия жидкости T, как и кинетическая энергия твердого тела, оказывается квадратичной функцией $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, и она может быть написана в виде

$$T = \frac{1}{2} \rho V_0 (\alpha_{ij} U_i U_j + \beta_{ij} U_i \Omega_j + \gamma_{ij} \Omega_i \Omega_j), \quad (6.4.14)$$

где V_0, как и раньше,— объем тела, а тензорные коэффициенты α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij} зависят от формы и размера тела. Коэффициент α_{ij}

безразмерен, зависит только от формы тела и определяется интегралом

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{2V_0}\int (\Phi_j n_i + \Phi_i n_j)\, dA = -\frac{1}{V_0}\int \Phi_j n_i\, dA, \quad (6.4.15)$$

поскольку, как было отмечено, написанные интегралы симметричны по i и j.

Можно продвинуться дальше в простом, но тем не менее важном случае тела, движущегося без вращения (по-прежнему при $\varkappa = 0$). В этом случае

$$T = -\frac{1}{2}\rho U_i \int \varphi n_i\, dA = \frac{1}{2}\rho V_0 \alpha_{ij} U_i U_j. \quad (6.4.16)$$

Итак, кинетическая энергия жидкости, возникающая при поступательном движении тела, равна произведению величин $^1/_2\rho V_0 |\mathbf{U}|^2$ и $\alpha_{ij}U_iU_j/|\mathbf{U}|^2$, из которых вторая зависит от формы тела и от направления его движения. Уже известные выражения Φ для сферы и кругового цилиндра показывают, что для них α_{ij} равно $^1/_2\delta_{ij}$ и δ_{ij} соответственно. Другие частные значения будут указаны в этой главе позже. В случае осесимметричного тела главными осями тензора α_{ij} будут ось симметрии тела и любые две ортогональные ей оси.

Еще один результат при $\Omega = 0$ и $\varkappa = 0$ получается из сравнения выражений (6.4.10) и (6.4.8); для трехмерного поля имеем

$$T = \frac{1}{2}\rho\,(4\pi \mathbf{U}\cdot\mathbf{c} - V_0 \mathbf{U}\cdot\mathbf{U}); \quad (6.4.17)$$

для двумерного поля получается аналогичное выражение с заменой $4\pi c$ на $-2\pi c$. Очевидно, что имеется связь, хотя она и не простая, между объемом тела и величиной возмущения, которое обнаруживается в жидкости на больших расстояниях; величина компоненты в направлении $\mathbf{U}$ интенсивности диполя источников, изображающего влияние тела на больших расстояниях, не может быть меньше, чем произведение $V_0|\mathbf{U}|$ (как в двумерном, так и в трехмерном поле). Другое выражение для этого соотношения между T и c при $\Omega = 0$, $\varkappa = 0$ получается из выражений (6.4.12) и (6.4.15); для трехмерного поля имеем

$$4\pi c_i = V_0 U_j\,(\delta_{ij} + \alpha_{ij}), \quad (6.4.18)$$

а для двумерного поля $4\pi c_i$ заменяется на $(-2\pi c_i)$.

В случае двумерного поля с ненулевой циркуляцией вокруг тела скорость жидкости на больших расстояниях от тела имеет порядок r^{-1} и теоретически течение обладает бесконечной кинетической энергией. Значение этого факта для реальной жидкости состоит в том, что на величину кинетической энергии в жидкости оказывают влияние положение и форма удаленной внешней границы. Разделение потенциала скорости на две части, описанное в конце § 2.8, полезно, поскольку однозначная часть потенциала

скорости φ_1 вносит конечный вклад в величину кинетической энергии. Из равенства (2.8.10) (в котором нормаль к поверхности A направлена от жидкости) имеем

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int \varphi_1 \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_1\, dA + T_2, \tag{6.4.19}$$

где T_2 — кинетическая энергия, связанная с циркуляцией $\varkappa$ при нулевой нормальной компоненте скорости на границе и имеющая бесконечно большое значение независимо от значения первого члена и величин $\mathbf{U}$ и $\mathbf{\Omega}$. Первый член в правой части выражения (6.4.19) представляет собой кинетическую энергию движения, соответствующую данным значениям $\mathbf{U}$ и $\mathbf{\Omega}$ при $\varkappa = 0$, и, следовательно, к нему непосредственно применимы все сделанные выше замечания.

Сила, действующая на тело при его поступательном движении

Рассмотрим полную силу $\mathbf{F}$, действующую в данный момент со стороны окружающей жидкости на тело, движущееся без вращения. Эта сила возникает от давления на поверхности тела, и с помощью интеграла (6.2.5) можно написать

$$\mathbf{F} = -\int p\mathbf{n}\, dA = \rho\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathbf{n}\, dA + \frac{1}{2}\rho\int q^2\mathbf{n}\, dA - \rho\int \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}\mathbf{n}\, dA, \tag{6.4.20}$$

где интегралы берутся по неподвижной поверхности A, которая в данный момент времени совпадает с поверхностью тела. Последний интеграл в (6.4.20) представляет собой силу плавучести (архимедову силу), действующую на тело (§ 4.1), и в дальнейшем мы будем им пренебрегать.

Производная $\partial\varphi/\partial t$ отлична от нуля и для тела в установившемся поступательном движении, поскольку используется система координат, неподвижная в жидкости на бесконечности, и положение тела изменяется относительно нее. Функции Φ и Ψ в выражении (6.4.10) — неизвестные функции от $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0$ — мгновенный радиус-вектор некоторой точки тела, так что

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{U}. \tag{6.4.21}$$

Скорость $\mathbf{U}$ может зависеть от t, хотя зависимость $\varkappa$ от времени t в полностью безвихревом течении, согласно теореме Кельвина о циркуляции, исключается. Тогда из выражения (6.4.10) следует, что при $\mathbf{\Omega} = 0$ скорость изменения потенциала φ в точке, фиксированной по отношению к жидкости на бесконечности, равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{\Phi} + \frac{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\partial t}\cdot\nabla\varphi = \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{\Phi} - \mathbf{U}\cdot\mathbf{u}, \tag{6.4.22}$$

где $(\dot{\mathbf{U}} = d\mathbf{U}/dt)$.

Теперь выражение для силы (6.4.20) (без учета силы плавучести) записывается так:

$$F_i = \rho \dot{U}_j \int \Phi_j n_i \, dA + \rho \int \left(\frac{q^2}{2} - U_j u_j \right) n_i \, dA. \qquad (6.4.23)$$

Первый из двух членов в правой части отличен от нуля только при $\dot{\mathbf{U}} \neq 0$, в то время как значение второго члена от изменения $\mathbf{U}$ не зависит. Таким образом, первый член можно назвать *реакцией на ускорение тела*, а второй член представляет собой силу, действующую на тело в установившемся движении. Обсуждение первого члена на некоторое время отложим.

Чтобы получить определенные выводы о силе, которая остается при постоянной скорости поступательного движения, проведем в жидкости поверхность S, которая охватывает тело в данный момент времени, и свяжем интегралы по замкнутым поверхностям A и S с интегралами по объему V, ограниченному этими поверхностями. Тогда, обозначив через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к обеим поверхностям, имеем

$$\int \frac{1}{2} q^2 n_i \, dA = \int \frac{1}{2} q^2 n_i \, dS - \int \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right)}{\partial x_i} \, dV,$$

и поскольку $\mathbf{u}$ есть скорость безвихревого соленоидального потока, то

$$\int \frac{1}{2} q^2 n_i \, dA = \int \frac{1}{2} q^2 n_i \, dS - \int \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \, dV =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} q^2 n_i - u_i u_j n_j \right) dS + \int u_i u_j n_j \, dA.$$

Величина скорости q в трехмерном поле имеет по крайней мере порядок r^{-3}, а в двумерном — порядок r^{-1}, когда r велико; следовательно, специальный выбор поверхности S в виде сферы или окружности достаточно большого радиуса показывает, что интеграл по поверхности S в правой части тождественно равен нулю. Следовательно,

$$\int \frac{1}{2} \, q^2 n_i dA = U_j \int u_i n_j dA, \qquad (6.4.24)$$

и на тело в установившемся движении действует сила

$$F_i = \rho U_j \int (u_i n_j - u_j n_i) \, dA = \rho U_j \int (u_i n_j - u_j n_i) \, dS, \qquad (6.4.25)$$

где S по-прежнему произвольная поверхность в жидкости, окружающая тело.

Очевидно, что $U_i F_i = 0$, т. е. жидкость не оказывает сопротивления установившемуся поступательному движению тела; таким

образом, имеем результат (парадокс Даламбера), уже полученный в § 5.11 из энергетических соображений с меньшей степенью общности.

Существование компоненты силы **F** по нормали к скорости **U** в случае твердого тела конечных размеров в трехмерном поле также можно исключить, поскольку на больших расстояниях от тела q имеет порядок r^{-3} и специальный выбор поверхности S в виде сферы большого радиуса показывает, что выражение (6.4.25) в целом равно нулю.

В двумерном поле на больших расстояниях от тела и при ненулевой циркуляции вокруг него q имеет порядок r^{-1}, интегралы в (6.4.25) могут не обращаться в нуль; выбирая поверхность S в виде окружности большого радиуса и используя на ней асимптотическое выражение

$$\nabla\varphi \sim \frac{\varkappa}{2\pi}\nabla\theta,$$

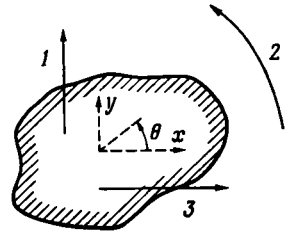
получим формулу для компоненты силы **F** в направлении оси y (вектор **U** имеет величину U и направлен параллельно оси x, рис. 6.4.1):

$$F_y = \rho U \frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta\right) r\,d\theta = \rho U\varkappa. \qquad (6.4.26)$$

Эта замечательная формула для боковой (или подъемной) силы, действующей на тело, которая возникает из объединенного эффекта поступательного движения тела и циркуляции вокруг него и которая явно не зависит от размера, формы и ориентации тела, лежит в основе теории подъемной силы крыльев самолетов. Формула (6.4.26) связана с именами Кутта (1910) и Жуковского — пионеров научного исследования в аэронавтике [1]). Следует отметить (см. рис. 6.4.1), что направление результирующей силы, действующей на тело, получается путем вращения вектора скорости тела относительно жидкости на бесконечности на 90° в направлении циркуляции скорости.

Мы получим более глубокое представление о механизме этой боковой силы путем применения теоремы о количестве движения, которую фактически использовал Жуковский при установлении формулы (6.4.26). Предположим, что тело движется равномерно, и чтобы получить установившееся течение (это удобно для применения теоремы о количестве движения), выберем оси координат, движущиеся вместе с телом и с началом координат внутри него. Скорость в любой точке жидкости относительно этих новых осей равна $-\mathbf{U} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, как и раньше,— скорость по отношению к жидкости на бесконечности. Контрольная поверхность

[1]) Кутта получил формулу (6.4.26) в частном случае обтекания пластины, **Н.** Е. Жуковский сформулировал ее в 1911 г. как теорему для крыла любого профиля.— *Прим. ред.*



Р и с. 6.4.1. Схема к расчету силы, действующей на тело в установившемся поступательном движении при двумерном поле скоростей.
1 — направление результирующей силы, действующей на тело; *2* — направление циркуляции скорости вокруг тела; *3* — направление движения тела.

состоит из границы тела A и окружности S большого радиуса с центром в начале координат с внешней нормалью $\mathbf{n}$ к обеим замкнутым кривым. Полная величина количества движения жидкости внутри контрольной поверхности постоянна, так что сила, действующая на тело, определяется формулой

$$\mathbf{F} = -\int \rho(-\mathbf{U}+\mathbf{u})(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dS - \int p\mathbf{n}\,dS, \quad (6.4.27)$$

в которой первый интеграл представляет собой поток количества движения через контрольную поверхность в направлении внешней нормали. Давление в потоке определяется интегралом Бернулли

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\{U^2 - (-\mathbf{U}+\mathbf{u})\cdot(-\mathbf{U}+\mathbf{u})\}.$$

Поскольку на больших расстояниях от начала координат $|\mathbf{u}|$ имеет порядок r^{-1}, то под интегралами в выражениях (6.4.27) нет необходимости сохранять квадратичные по u члены; кроме того, $\int \mathbf{n}\,dS = 0$ и $\int \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$. Следовательно,

$$F_i = \rho U_j \int u_i n_j\,dS - \rho U_j \int u_j n_i\,dS,$$

что повторяет формулу (6.4.26). Из вычислений при выводе этой формулы видно, что боковая сила, испытываемая цилиндром, определяется в жидкости на достаточном удалении от тела наполовину потоком количества движения и наполовину распределением давления.

Следует напомнить, что все полученные результаты о силе, действующей на тело в установившемся поступательном движении, применимы в равной мере ко второй из двух частей общего выражения (6.4.23) для силы, действующей на тело, скорость которого изменяется.

Аналогичный анализ можно провести для момента силы, приложенного со стороны жидкости к телу, которое вращается вокруг неподвижной точки. Основной результат состоит в том, что, когда угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ постоянна, компонента момента, параллельная вектору $\boldsymbol{\Omega}$ (это его единственная компонента в случае двумерного поля), равна нулю; этот результат следует ожидать на основании, что при постоянной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ кинетическая энергия жидкости не изменяется, хотя это последнее рассуждение не вполне удовлетворительно, поскольку при ненулевой циклической постоянной кинетическая энергия теоретически бесконечна. Случай сложного поступательного и вращательного движений тела более труден из-за непрерывного изменения направления скорости $\mathbf{U}$ относительно тела.

Реакция на ускорение

Возвратимся теперь к первому члену правой части формулы (6.4.23), к реакции $\mathbf{G}$ от ускорения при поступательном движении, определяемой как

$$G_i = \rho \dot{U}_j \int \Phi_j n_i \, dA = -\rho V_0 \alpha_{ij} \dot{U}_j \qquad (6.4.28)$$

с безразмерным (симметричным) тензором α_{ij} (6.4.15). Поскольку сила, действующая на твердое тело при его поступательном ускоренном движении через окружающую жидкость, выражается линейной функцией от компонент ускорения, то естественно рассматривать множитель при $-\dot{U}_j$ в (6.4.28), а именно $\rho V_0 \alpha_{ij}$, как тензор присоединенной массы, который должен быть добавлен к реальной массе тела, когда находится его реакция на приложенную силу. Величина ρV_0 — масса жидкости, вытесняемой телом, и α_{ij} можно назвать (тензорным) *коэффициентом присоединенной массы*. Оказывается, что при поступательном движении с нулевой циклической постоянной скорость на больших расстояниях от тела, полная кинетическая энергия жидкости и присоединенная масса определяются объемом тела V_0, скоростью $\mathbf{U}$ и коэффициентом α_{ij}.

Реакция жидкости на ускорение тела, очевидно, связана с тем фактом, что при изменении скорости тела изменяется и полная кинетическая энергия жидкости. Часть этой кинетической энергии, возникающая вследствие поступательного движения тела (но не циркуляции скорости вокруг него, которая может и существовать!), представляет собой квадратичную функцию от компонент скорости $\mathbf{U}$ в любой момент времени (см., например, (6.4.14)) и, следовательно, она представима кинетической энергией определенного добавка к массе тела (причем масса рассматривается как тензор второго порядка). Когда скорость тела изменяется,

производная по времени от кинетической энергии жидкости, связанной с поступательным движением тела, равна

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho V_0 \alpha_{ij} U_i U_j\right) = \rho V_0 \alpha_{ij} U_i \dot{U}_j = -U_i G_i.$$

Таким образом, полная работа, совершаемая телом против реакции на ускорение, превращается в кинетическую энергию жидкости, связанную с поступательным движением тела; кинетическая энергия в двумерном потоке, связанная с циркуляцией скорости вокруг тела, хотя и бесконечна, но при движении тела с ускорением может, очевидно, считаться постоянной. Следует заметить, что когда скорость тела периодически изменяется с течением времени, среднее значение произведения $\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}$ на протяжении одного цикла обращается в нуль, подтверждая то, что никакой суммарной работы телом не совершается, как было показано в § 5.13 на основании энергетических соображений.

Аналогичное толкование реакции на ускорение можно в принципе дать через полную величину количества движения жидкости, которая, как можно ожидать, будет линейной функцией компонент скорости $\mathbf{U}$. Однако непосредственное вычисление скорости изменения величины количества движения жидкости невозможно вследствие того, что при стремлении объема V к бесконечности интеграл $\rho \int \mathbf{u}\, dV$ в общем случае не является абсолютно сходящимся; для больших r модуль скорости $|\mathbf{u}|$ имеет порядок r^{-3} и r^{-2} в трех и двух измерениях соответственно (мы не рассматриваем здесь вопрос о циркуляции), и, хотя никакой расходимости логарифмического типа не возникает, величина интеграла зависит от формы внешней границы, линейные размеры которой увеличиваются. Трудность состоит в том, что вдали от тела в движении типа диполя, которое возникает в жидкости под влиянием градиентов давления при ускорении тела, получаются бесконечно большие величины количества движения как в жидкости, движущейся вперед, так и в жидкости, движущейся назад. Однако можно сказать, что скорость, с которой тело сообщает жидкости количество движения, равна $-\mathbf{G}$ и, следовательно, что i-я компонента полной величины количества движения, переданной жидкости при изменении скорости тела от нуля до $\mathbf{U}$, равна

$$P_i = -\int G_i\, dt = \rho V_0 \alpha_{ij} U_j = \rho\,(4\pi c_i - V_0 U_i). \qquad (6.4.29)$$

Неважно, передается ли это количество движения жидкости постепенно или сразу, и величину $\mathbf{P}$ можно назвать *импульсом жидкости*, означающим импульс, который тело должно сообщить жидкости для того, чтобы создать из состояния покоя безвихревое течение, обусловленное поступательным движением тела со скоростью $\mathbf{U}$.

Сила, действующая на тело при ускорении жидкости

Некоторые из предшествующих формул можно обобщить с учетом ускорения жидкости, через которую движется тело. Пусть масса жидкости, которая окружает тело, имеет постоянное ускорение $\mathbf{f}$ относительно инерциальной системы отсчета. Тогда удобно выбрать движущиеся оси координат так, чтобы скорость жидкости на достаточном удалении от тела (или, что равносильно, скорость жидкости в отсутствие тела) была равна нулю и оставалась все время такой. Уравнение движения жидкости относительно этих ускоренно движущихся осей координат должно включать постоянную массовую силу инерции $-\mathbf{f}$ на единицу массы. Следовательно, возникает дополнительный добавок $-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}$ к давлению и дополнительный добавок $\rho V_0\mathbf{f}$ (эффективная сила плавучести, аналогичная силе, возникающей при действии на жидкость силы тяжести) к полной силе, действующей на тело.

Если теперь предположить, что тело совершает поступательное движение с ускорением $\dot{\mathbf{U}}(t)$ по отношению к инерциальной системе координат, то картина линий тока будет зависеть только от мгновенной скорости движения тела относительно жидкости на бесконечности (и также от циркуляции скорости вокруг тела в случае двумерного поля скоростей), однако результирующая сила, действующая на тело, будет зависеть еще и от ускорения жидкости. Во-первых, ускорение тела по отношению к жидкости на бесконечности равно $\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{f}$, так что реакция ускорения (6.4.28) принимает вид

$$-\rho V_0 \alpha_{ij} (\dot{U}_j - f_j).$$

Во-вторых, существует новый, упомянутый выше добавок $\rho V_0\mathbf{f}$. Таким образом, оставляя в стороне боковую силу, обусловленную циркуляцией скорости, и силу плавучести, связанную с силой тяжести, мы получим следующее выражение i-компоненты силы, действующей на тело:

$$-\rho V_0 \alpha_{ij}\dot{U}_j + \rho V_0 f_i (\alpha_{ij} + \delta_{ij}). \qquad (6.4.30)$$

Применение этой формулы в случае сферы, взвешенной в жидкости, дано в § 6.8.

Упражнение

Покажите, что для тела при поступательном и вращательном движениях ($\varkappa = 0$)

$$P_i = \partial T/\partial U_i, \qquad Q_i = \partial T/\partial \Omega_i,$$

где $\mathbf{Q}$ — момент количества движения жидкости относительно точки тела, скорость которой равна $\mathbf{U}$, а остальные обозначения уже были пояснены в тексте.

6.5. Использование комплексного потенциала в случае двумерного безвихревого течения

В § 2.7 отмечалось, что потенциал скорости φ и функция тока ψ в двумерном безвихревом течении несжимаемой жидкости обладают некоторыми замечательными свойствами сопряженности. Эти свойства сводятся к утверждению, что комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ представляет собой *аналитическую* функцию от $z = x + iy$ в области плоскости переменной z, занятой потоком жидкости, что w имеет единственную производную по z в каждой точке этой области. И, наоборот, любая аналитическая функция от z может рассматриваться как комплексный потенциал некоторого поля течения. Таким образом, путем простого выбора различных функций $w(z)$ мы получаем возможные виды функций φ и ψ, хотя вполне может случиться так, что не все поля течений, которым соответствуют эти функции, интересны с физической точки зрения.

Более прямой путь определения безвихревого поля течения связан с методом конформного отображения функций комплексного переменного. В данном параграфе мы поясним эти прямые и непрямые методы, а также другие применения комплексного потенциала.

Предварительно полезно отметить вид комплексного потенциала w для нескольких простых безвихревых течений с уже известными функциями φ и ψ.

Равномерное течение со скоростью (U, W):

$$w = (U - iV)\, z.$$

Простой источник интенсивности m в точке z_0 (§ 2.5):

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln (z - z_0).$$

Диполь источников в точке z_0 интенсивности μ с осью, параллельной оси x,

$$w = -\frac{\mu}{2\pi (z - z_0)}.$$

Такой же диполь с осью, параллельной оси y,

$$w = -\frac{i\mu}{2\pi (z - z_0)}.$$

Точечный вихрь в точке z_0 интенсивности $\varkappa$ (§ 2.6):

$$w = -\frac{i\varkappa}{2\pi} \ln (z - z_0).$$

Вихревой диполь в точке z_0 интенсивности λ с осью, параллельной оси x,

$$w = \frac{i\lambda}{2\pi (z - z_0)}.$$

Течение, вызванное круговым цилиндром радиуса a, движущимся со скоростью (U, V) и циркуляцией $\varkappa$ вокруг него, центр которого в данный момент времени находится в точке z_0 (§ 2.10):

$$w = -\frac{i\varkappa}{2\pi} \ln (z - z_0) - \frac{a^2 (U + iV)}{z - z_0}.$$

Произвольное течение вне круга с центром в точке z_0, который охватывает все границы в жидкости, покоящейся на бесконечности (ряд Лорана, § 2.10):

$$w = \frac{m - i\varkappa}{2\pi} \ln (z - z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^{-n}.$$

Течение вблизи критической точки, расположенной в начале координат (§ 2.7):

$$w = \frac{1}{2} kz^2.$$

Поля течений, получаемые при специальном выборе функции $w(z)$

Простейшей математической формой комплексного потенциала w можно считать функцию

$$w(z) = Az^n, \tag{6.5.1}$$

в которой A и n — действительные постоянные. Если r, θ — полярные координаты в плоскости z, то $z = re^{i\theta}$ и

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \qquad \psi = Ar^n \sin n\theta. \tag{6.5.2}$$

Любое математическое решение для безвихревого течения представляет физический интерес в зависимости от того, удовлетворяет ли оно граничным условиям, которые могут встречаться на практике. Самое распространенное граничное условие состоит в том, что объемный поток через каждый элемент заданной поверхности равен нулю; оно возникает по той причине, что либо существует определенная симметрия при переходе через поверхность (когда, например, две одинаковые струи воды сталкиваются в плоскости симметрии), либо же заданная поверхность служит границей твердого тела (в этом случае еще нужно проверять, является ли распре-

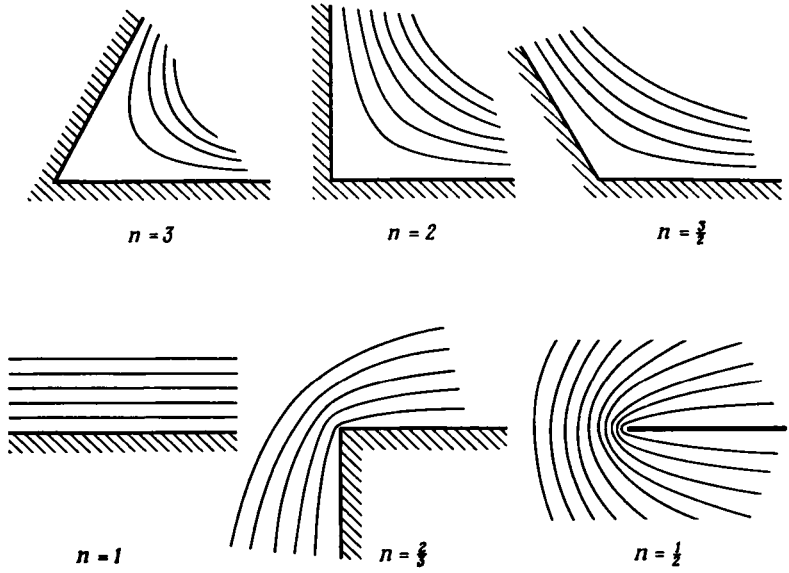


Рис. 6.5.1. Безвихревое течение в области между двумя прямолинейными твердыми границами, пересекающимися под углом π/n.

деление скоростей безвихревого течения таким, что в реальной жидкости оно не вызывает отрыва пограничного слоя от поверхности тела). На неподвижной границе с нулевым потоком нормальная компонента скорости равна нулю (условие непротекания); в рассматриваемом двумерном течении граница представляет собой кривую в плоскости (x, y). Это условие непротекания удовлетворяется на каждой линии тока течения, поэтому можно рассматривать любую линию из семейства линий тока, определяемого выражением (6.5.2), как неподвижную границу с нулевым потоком через нее. На практике часто встречаются границы простой геометрической формы, а из них наиболее распространены плоские границы. Поэтому среди семейств линий тока нам нужно обращать особое внимание на любые прямые.

Величина ψ в (6.5.2) при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/n$ постоянна и равна нулю для всех r. Поэтому выражения (6.5.1) и (6.5.2) соответствуют безвихревому течению в области между двумя прямыми границами, пересекающимися под углом π/n. При различных показателях n получаются частные случаи, причем некоторые из них имеют интересные свойства (рис. 6.5.1). Заметное изменение в характере течения вблизи точки пересечения границ наблюдается при переходе n через единицу, поскольку

$$q = \left|\frac{dw}{dz}\right| = |nA|\, r^{n-1} \qquad (6.5.3)$$

и при $r \to 0$ величина q стремится к нулю, к $|A|$ или к бесконечности в зависимости от того, каково n: больше, равно или меньше единицы. При $n > 1$ прямые границы образуют угол, меньший π; при $n = 2$ получается течение в области, ограниченной прямым углом, с линиями тока в виде равносторонних гипербол, которое, как уже было установлено (в § 2.7), представляет собой половину области безвихревого течения вблизи критической точки на плоской границе. Случай $n = 1$ соответствует однородному потоку, параллельному одной прямолинейной границе. Значения n между 1 и $1/2$ дают течения около выступающего угла с особенностью распределения скорости в его вершине.

Крайний случай $n = 1/2$ представляет особый интерес, так как он соответствует течению около кромки тонкой пластины. Необычное свойство безвихревого течения в этом случае заключается в том, что весьма низкое давление вблизи острой кромки пластины вызывает ненулевую полную силу на границе. Это можно выяснить путем расчета силы на границе, совпадающей с линией тока $\psi = \psi_0 \neq 0$ (которая представляет собой параболу), и последующего перехода к пределу при $\psi_0 \to 0$. Полная сила, развиваемая жидкостью на конечной части этой границы, лежащей, например, внутри окружности радиуса $r = R$, в силу симметрии параллельна оси x ($\theta = 0$), и ее проекция на эту ось есть

$$F_x = \int p\, dy,$$

где интеграл берется по части кривой, определяемой уравнением

$$\psi_0 = A\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \text{т. е.} \quad y = 2\left(\frac{\psi_0}{A}\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

которая расположена между $\theta = \varepsilon$ и $\theta = 2\pi - \varepsilon$; здесь $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \psi_0/A\sqrt{R}$. Заменяя давление p на $p_0 - \rho\partial\varphi/\partial t - 1/2\rho q^2$ (см. (6.2.5) в пренебрежении силой тяжести), имеем

$$F_x = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left(p_0 - \rho\frac{dA}{dt}\frac{\psi_0}{A}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \rho\frac{A^4}{8\psi_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{\psi_0}{A^2}\csc^2\frac{\theta}{2}\,d\theta;$$

отсюда при $\psi_0 \to 0$ имеем

$$F_x \to -\frac{1}{4}\pi\rho A^2. \tag{6.5.4}$$

Предельное значение F_x не зависит от радиуса окружности R и представляет собой подсасывающую силу, сконцентрированную на острой кромке и направленную параллельно пластине. Эта ненулевая сила на острой кромке не имеет прямого практического значения, так как реальная жидкость в установившемся движении будет отрываться от кромки, и очень низкие давления вблизи

кромки не возникают; однако ясное понимание свойств безвихревого течения при наличии пластин с острой кромкой можно использовать косвенно в связи с возможностью преобразования поля течения, имеющего границу с острой кромкой, в поле течения с границей другой формы.

Все свойства этих частных случаев безвихревого течения в области между двумя прямолинейными пересекающимися границами имеют более общее значение в связи с тем, что они справедливы в окрестности точек пересечения двух прямолинейных границ конечной длины, независимо от формы остальной части течения. Доказательство этого будет приведено в этом параграфе позже. Таким образом, в любом безвихревом течении скорость в точке границы с нулевым потоком в том месте, где имеется разрыв в направлении касательной к границе, равна нулю в том случае, когда угол, занимаемый жидкостью, меньше π, и равна бесконечности, когда этот угол больше π. В первом случае, когда угол меньше π, поверхностная линия тока в реальной жидкости вследствие замедления потока будет отрываться (во всяком случае, в установившемся течении) от твердой границы еще *до точки разрыва*, создавая внутри угла стационарное вихревое течение; в случае угла, большего π, поверхностная линия тока оторвется *в вершине угла*, если изменение в направлении касательной не слишком мало.

Когда $^1/_2 > n > -\,^1/_2$, угол между двумя прямолинейными пересекающимися линиями тока, на которых $\psi = 0$, больше 2π, и уже теперь нельзя считать, что обе эти линии тока представляют собой непроницаемые границы в поле течения; когда же $n < 0$, как потенциал скорости φ, так и функция тока ψ становятся бесконечными при $r \to 0$. Для указанных значений n возможность нахождения интересных полей течения путем выделения определенных линий тока в качестве границ меньше.

При подобном косвенном исследовании полей течения можно применить также тригонометрические функции. Предположим, например, что выбрано выражение комплексного потенциала

$$w(z) = A \sin kz, \tag{6.5.5}$$

где A и k — действительные постоянные; соответствующие выражения для φ и ψ имеют вид

$$\varphi = A \sin kx \operatorname{ch} ky, \qquad \psi = -A \cos kx \operatorname{sh} ky \tag{6.5.6}$$

и определяют поле течения, периодическое в направлении оси x. Неограниченное возрастание скорости при $y \to \mp \infty$ препятствует практическому использованию этого выражения $w(z)$. Однако можно получить поле течения, в котором скорость в одном направлении стремится к нулю; для этого надо сложить два аналогичных выражения; так, при

$$w(z) = A(\sin kz + i \cos kz)$$

имеем

$$\varphi = Ae^{ky} \sin kx, \qquad \psi = Ae^{ky} \cos kx. \tag{6.5.7}$$

Как известно, эти выражения применяются в теории поверхностных волн, чтобы описать мгновенное движение полубесконечной жидкости со свободной поверхностью, которая в равновесном состоянии занимает положение $y = 0$ и по которой в результате действия сил тяжести или сил поверхностного натяжения (или их обеих вместе) распространяется синусоидальная волна малой амплитуды с длиной волны $2\pi/k$.

Конформное преобразование плоскости течения

Если комплексная переменная $\zeta = \xi + i\eta$ является аналитической функцией от $z = x + iy$, заданной в явном виде $\zeta = F(z)$, то существует связь между формой кривой в плоскости z и формой кривой, определяемой соответствующим множеством точек в плоскости ζ. Эта связь есть следствие того свойства аналитической функции от z, что значение производной $\lim\limits_{\delta z \to 0} (\delta\zeta/\delta z)$ не зависит от способа, по которому приращения δx и δy стремятся к нулю по отдельности. Если $\delta z'$ и $\delta z''$ — два различных малых приращения переменной z, а $\delta\zeta'$ и $\delta\zeta''$ — соответствующие приращения переменной ζ, то

$$\zeta + \delta\zeta' = F(z + \delta z'), \qquad \zeta + \delta\zeta'' = F(z + \delta z'').$$

Два коротких отрезка прямой, соединяющих точки $z + \delta z'$ и $z + \delta z''$ с точкой z в комплексной плоскости z, имеют длины, отношение которых равно $|\delta z'/\delta z''|$, и пересекаются друг с другом под углом

$$\arg \delta z' - \arg \delta z'' = \arg (\delta z'/\delta z'')$$

(как обычно принято в теории функций комплексного переменного, через $\arg z$ обозначается угол, тангенс которого равен отношению мнимой и действительной частей z). Два коротких отрезка, соединяющие соответствующие точки $\zeta + \delta\zeta'$ и $\zeta + \delta\zeta''$ с точкой ζ в плоскости ζ, имеют длины, отношение которых определяется модулем $|\delta\zeta'/\delta\zeta''|$, и они пересекаются под углом $\arg (\delta\zeta'/\delta\zeta'')$. Однако

$$\delta\zeta' = \delta z' \frac{d\zeta}{dz} + O(\delta z'^2), \qquad \delta\zeta'' = \delta z'' \frac{d\zeta}{dz} + O(\delta z''^2),$$

так что с точностью до величин первого порядка малости будут равны как величины $|\delta z'/\delta z''|$ и $|\delta\zeta'/\delta\zeta''|$, так и углы $\arg (\delta z'/\delta z'')$ и $\arg (\delta\zeta'/\delta\zeta'')$.

Таким образом, некоторой замкнутой кривой малых линейных размеров из плоскости z соответствует замкнутая кривая малых линейных размеров *такой же формы* (с точностью до линейных

размеров первого порядка малости) в плоскости ζ. Соответственно две бесконечно малые фигуры имеют вообще различные ориентации и различные размеры, но подобны. Преобразование такого вида из плоскости z в плоскость ζ посредством аналитической функции двух комплексных переменных называется *конформным отображением*. Конечно, формы двух соответствующих фигур конечных линейных размеров в плоскостях z и ζ могут различаться, но если мысленно представить эти фигуры разделенными на большое число элементов малых линейных размеров, то соответствующее множество приближенно подобных элементов в другой плоскости будет составлять соответствующую фигуру конечного размера.

Соотношение между размерами двух малых соответствующих фигур в плоскостях z и ζ зависит от вида функции F. Любой короткий отрезок прямой при преобразовании из плоскости z в отрезок плоскости ζ имеет длину в $|d\zeta/dz|$ раз больше исходного, и, следовательно, площадь малой фигуры при преобразовании из плоскости z в плоскость ζ увеличивается в $|d\zeta/dz|^2$ раз. В любой точке плоскости z, где производная $d\zeta/dz$ равна нулю или бесконечности, сделанные замечания, очевидно, неприменимы; такие точки представляют собой сингулярные (особые) точки преобразования, в которых конформность отображения нарушается.

Указанные свойства конформного отображения имеют прямое отношение к теории безвихревого течения в двух измерениях. Если $w(z)$ — комплексный потенциал безвихревого течения в некоторой области плоскости z и если z представляет собой аналитическую функцию $z = f(\zeta)$ другой комплексной переменной, то тогда w также можно рассматривать как аналитическую функцию от ζ; действительно, отношение приращений, из которого получается производная w по ζ, можно записать в виде

$$\frac{\delta w}{\delta \zeta} = \frac{\delta w}{\delta z}\frac{\delta z}{d\zeta},$$

и оба сомножителя в правой части равенства стремятся к единственному пределу при δx и δy, а также $\delta\xi$ и $\delta\eta$, стремящихся к нулю независимо друг от друга. Таким образом, функция $w(f(\zeta))$ представляет собой комплексный потенциал безвихревого течения в некоторой области плоскости ζ; при этом говорят, что течение из плоскости z отображено на течение в плоскости ζ. Семейства эквипотенциальных линий и линий тока из плоскости z, определяемые равенствами $\varphi(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$, преобразуются в семейства кривых в плоскости ζ, на которых потенциал скорости φ и функция тока ψ также постоянны и которые являются эквипотенциальными линиями и линиями тока течения в плоскости ζ, причем, как и в плоскости z, оба семейства ортогональны в плоскости ζ, исключая особые точки преобразования. Компоненты скорости в каждой точке течения в плоскости ζ определяются

равенством (см. (2.7.13))

$$u_\xi - iu_\eta = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta}. \tag{6.5.8}$$

Между прочим, это равенство показывает, что модуль скорости изменяется при преобразовании из плоскости z в плоскость ζ с множителем, обратным тому, с которым изменяются линейные размеры малых фигур; таким образом, кинетическая энергия жидкости, содержащейся внутри замкнутой кривой (как малых, так и конечных линейных размеров) в плоскости z, равна кинетической энергии соответствующего течения в области, окруженной преобразованной кривой в плоскости ζ.

В некоторых полях движение жидкости связано с наличием особенностей типа источника и вихря, описанных в гл. 2. Можно сказать, что особенности вполне определенного типа и интенсивности располагаются (одновременно) в некоторых точках плоскости z, и задача состоит в том, чтобы определить безвихревое течение, которое совместимо с этими особенностями и границей данной формы. Поэтому нужно рассмотреть соотношение между течением вблизи особенности в плоскости z и течением вблизи соответствующей точки в плоскости ζ. Вблизи особенности типа источника или вихря функции φ и ψ принимают очень большие значения и в основном определяются вкладом от этой особенности. Таким образом, если в точке $z = z_0$ расположена особенность типа источника интенсивности m и одновременно особенность типа вихря интенсивности $\varkappa$ (другие особенности более сложного вида можно построить на основании простого источника и простого вихря способом, описанным в § 2.5, 2.6), то в окрестности этой точки

$$w(z) \sim \frac{m - i\varkappa}{2\pi} \ln(z - z_0) \tag{6.5.9}$$

независимо от характера остального течения. В то же время если точка $z = z_0$ не является особой точкой преобразования $\zeta = F(z)$, то вблизи нее имеем

$$\zeta - \zeta_0 \sim (z - z_0)\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z_0},$$

так что приближенное выражение для w вблизи точки $\zeta = \zeta_0$ (6.5.9) можно переписать в виде

$$w(\zeta) \sim \frac{m - i\varkappa}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0).$$

Следовательно, безвихревое течение в плоскости ζ имеет аналогичную особенность, расположенную в соответствующей точке ζ_0 и с той же самой интенсивностью источника и вихря; можно сказать, что точечный источник в плоскости z преобразуется

в точечный источник в плоскости ζ; аналогичное утверждение справедливо и для точечного вихря.

Соответствующие результаты можно получить для более сложных точечных особенностей, отмечая способ, которым они составляются из источников или вихрей. Два источника, которые вместе образуют диполь, из плоскости z преобразуются в идентичные источники в соответствующих близких точках плоскости ζ, и поскольку при отображении бесконечно малое расстояние между двумя точками изменяется в $|d\zeta/dz|$ раз, то в результате отображения интенсивность диполя из источников умножается на ту же величину (кроме того, конечно, может измениться направление диполя). Очевидно, что мультиполь, составленный из 2^n простых источников или вихрей, преобразуется в особенность того же самого вида в соответствующей точке плоскости ζ с интенсивностью, измененной в $|d\zeta/dz|^n$ раз.

Тот результат, что источнику или вихрю из плоскости z соответствует идентичный источник или вихрь в плоскости ζ, иначе можно рассматривать как следствие того, что если функция w многозначна в плоскости z (это возможно, когда наличие внешних границ или особенностей делает область безвихревого течения многосвязной), то функция w в соответствующих точках в плоскости ζ также должна быть многозначной. Если через точку в плоскости z провести нестягиваемую замкнутую кривую (например, в двусвязной области безвихревого течения в плоскости z), то при движении вдоль этой кривой значение функции φ изменяется и, когда точка возвратится в свое исходное положение, оно становится больше на величину циклической постоянной $\varkappa$; подобным же образом значение ψ возрастает на величину, равную результирующему объемному потоку m через замкнутую кривую. Точно такие же изменения, по мере того как соответствующая кривая вычерчивается в плоскости ζ, должны происходить в значениях функций φ и ψ (если, конечно, существует взаимно однозначное соответствие между точками в соответствующих областях плоскостей z и ζ).

Полезность конформного отображения как метода в теории безвихревого течения состоит в возможности преобразования данного поля течения неизвестной формы в поле течения, которое можно легче определить. Трудность нахождения функций φ и ψ данного поля течения зависит главным образом от геометрической формы границ, на которых должны удовлетворяться определенные условия. Если граница представляет собой бесконечную прямую линию или окружность, то имеется много стандартных методов для определения φ и ψ; в случае границы более сложной геометрической формы может оказаться, что нет никакого прямого метода решения (кроме численного метода с использованием вычислительной машины).

Конформное преобразование может сделать задачу о безвихревом обтекании легче поддающейся решению путем превращения границы неудобной геометрической формы в более простую границу. Метод до некоторой степени зависит от характера данного поля течения, и позже мы рассмотрим два основных вида преобразования. Преобразование может оказать влияние на граничные условия, а также на форму границы. Во многих обычных случаях граничное условие в исходном (данном) поле течения состоит в том, что нормальная скорость всюду на границе равна нулю, т. е. на ней функция ψ постоянна. Другая возможность заключается в том, что твердое тело, погруженное в жидкость в исходном поле течения, имеет заданный в данный момент времени закон движения, например угловую скорость Ω и компоненты скорости (U, V) центра объема тела, который в данный момент расположен в точке (x_0, y_0). В этом случае на границе (см. (6.4.7)) имеем условие

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial s}=n_1U+n_2V+\Omega\{(x-x_0)\,n_2-(y-y_0)\,n_1\}, \quad (6.5.10)$$

где s — расстояние вдоль граничной кривой (в направлении против часовой стрелки), а (n_1, n_2) — компоненты единичной внешней нормали к границе. Поскольку же

$$n_1=\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad n_2=-\frac{\partial x}{\partial s},$$

то условие на границе можно представить в виде

$$\psi-\psi_0=Uy-Vx-\frac{1}{2}\Omega\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}. \quad (6.5.11)$$

Это условие можно превратить в соотношение между функцией тока ψ и координатами ξ и η на границе в плоскости ζ, когда известно преобразование z в ζ.

Завершим наше изложение двумя замечаниями общего характера. Первое из них заключается в том, что метод конформного отображения оказывает помощь в построении безвихревых течений, связанных с простыми границами, такими, например, как окружность и эллипс, и эти течения оказываются потенциально полезными и в другом отношении. Одно безвихревое поле течения может быть преобразовано в другое посредством аналитического соотношения между двумя комплексными координатами z и ζ, и, хотя может случиться, что появление отрыва потока мешает реализовать на практике первое поле течения, второе поле течения может быть вполне реальным; следовательно, несоответствующее действительности первое течение может быть полезным в качестве вспомогательного математического средства для достижения цели в безвихревых полях течения, представляющих непосредственный физический интерес. Второе замечание состоит в том, что исполь-

зование конформного отображения в качестве рабочего средства имеет свои тонкости и трудности и требует практики на большем числе примеров, чем будет здесь описано [1]).

Преобразование границы в бесконечную прямую

В случаях безвихревого течения с непроницаемой внешней или внутренней границей и с неподвижной в бесконечности жидкостью часто бывает удобно преобразовать поле течения таким образом, чтобы граница преобразовалась в бесконечную прямую, а область течения — в полуплоскость. Предположим, например, что нужно определить безвихревое течение в области плоскости z, ограниченной двумя прямыми стенками, пересекающимися под углом π/n; кроме того, могут быть еще какая-нибудь граница и какое-нибудь движение на большом расстоянии от вершины угла, которые сейчас нет необходимости точно определять. Преобразование $\zeta = z^n$ «раскрывает» область в виде угла $0 < \theta < \pi/n$ между двумя пересекающимися стенками плоскости z в верхнюю полуплоскость $\eta > 0$ плоскости ζ (отметим особенность преобразования в точке пересечения сторон угла π/n, преобразуемого в угол π), после чего сразу определяется соответствующее течение в плоскости ζ. Единственным возможным безвихревым течением в верхней полуплоскости ζ, обусловленным действием удаленного источника движения, в том смысле, что любая неоднородность течения вблизи точки $\zeta = 0$ вызывается исключительно неоднородностью границы, является равномерный поток, параллельный границе $\eta = 0$, с комплексным потенциалом

$$w = A\zeta,$$

где A — действительная постоянная; тогда искомое безвихревое течение в плоскости z имеет потенциал

$$w = Az^n, \tag{6.5.12}$$

что уже было установлено обратным способом.

Случаи безвихревого течения в области, ограниченной извне замкнутым многоугольником, у которого одна или несколько вершин могут быть расположены на бесконечности, всегда можно изучить с помощью теоремы Кристоффеля—Шварца, которая гласит, что граница в виде многоугольника в плоскости z с внутренними углами α, β, γ, ... отображается на действительную ось $\eta = 0$ плоскости ζ с помощью преобразования

$$\frac{d\zeta}{dz} = K(\zeta - a)^{1-(\alpha/\pi)}(\zeta - b)^{1-(\beta/\pi)}(\zeta - c)^{1-(\gamma/\pi)}\ldots, \tag{6.5.13}$$

[1]) Большое число решенных примеров можно найти в книгах, посвященных главным образом невязким жидкостям, см., например: Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, «Мир», М., 1964 [а также: Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Физматгиз, М., 1966.— *Ред.*].

где K — постоянная, а параметры a, b, c — (действительные) значения $\zeta = \eta$, соответствующие вершинам многоугольника. Получающаяся область течения в плоскости ζ представляет собой верхнюю полуплоскость $\eta > 0$, и снова можно при известных причинах движения записать выражение для комплексного потенциала через ζ.

Если одна вершина многоугольника находится в бесконечности, то связанный с ней внешний угол, например α, равен нулю; в таком случае без потери общности можно считать, что соответствующая точка $\zeta = a$ также расположена в бесконечности, так что сомножитель $(\zeta - a)$ в (6.5.13) по существу постоянен и его можно включить в новую постоянную K'. Например, полубесконечная полоса в плоскости z ($\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/2$) отображается на верхнюю полуплоскость плоскости ζ с помощью преобразования

$$\frac{d\zeta}{dz} = K'(\zeta - b)^{1/2}(\zeta - c)^{1/2}$$

или

$$\zeta = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b-c)\operatorname{ch}\{K'(z-z_0)\}. \qquad (6.5.14)$$

Точки $\zeta = b$ и $\zeta = c$ соответствуют вершинам «треугольника» $z = z_0$ и $z = z_0 + i\pi/K'$ в плоскости z, причем постоянные z_0 и K' можно определить по положению и ширине заданной полубесконечной полосы; постоянные b и c определяют положение действительной оси и линейный масштаб в плоскости ζ и могут быть выбраны произвольными. Общий случай с двумя вершинами многоугольника в плоскости z, расположенными на бесконечности, более труден, хотя, если эти вершины единственные, что дает бесконечную полосу, требуемое преобразование следует либо непосредственно из выражения (6.5.13) при $\alpha = \beta = 0$ и $(\zeta - a)/a \to -1$, $Ka \to -K'$, либо косвенно, принимая, что в (6.5.14)

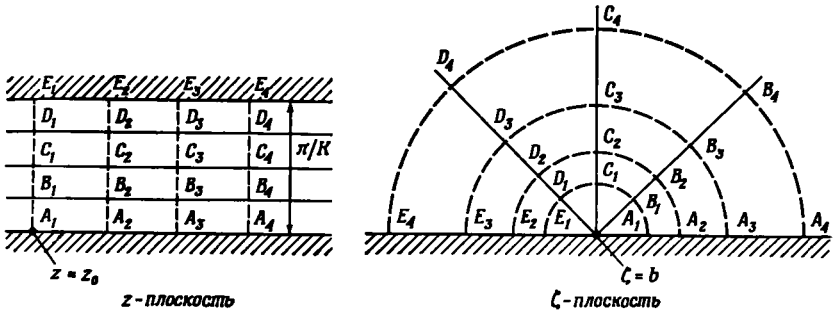
$$\mathscr{R}(K'z_0) \to -\infty, \qquad b-c \to 0, \qquad {}^1/_4(b-c)e^{-K'z_0} \to e^{-K'z_0'}.$$

Так или иначе получаем

$$\zeta = b + e^{K'(z-z_0')}. \qquad (6.5.15)$$

Ширина полосы, как и раньше, равна $|\pi/K'|$. Соответствие между некоторыми линиями в плоскостях z и ζ для этого простого и полезного преобразования показано на рис. 6.5.2 (на котором штрихи в обозначениях опущены).

Указанные преобразования поля течения с внешней границей многоугольной формы сами по себе не имеют большого практического значения, поскольку эти границы редко встречаются, однако такие преобразования часто полезны как промежуточные. Один пример подобного их применения будет дан в § 6.13 в теории некоторых интересных течений со «свободными» линиями тока.



Р и с. 6.5.2. Конформное отображение бесконечной полосы в плоскости z на верхнюю полуплоскость ζ с помощью функции $\zeta = b + e^{K(z-z_0)}$, где K — действительная положительная постоянная.

Преобразование замкнутой границы в окружность

Другой метод решения состоит в отыскании преобразования, которое отображало бы область вне данной замкнутой кривой из плоскости z в область вне окружности в плоскости ζ. Наиболее важное применение этого метода относится к течениям, вызванным твердым цилиндром, движущимся через покоящуюся на бесконечности жидкость, и он будет описан применительно к этому случаю. Так как общая цель состоит в том, чтобы получить новое более простое течение, то желательно использовать преобразование, которое превращало бы простое движение на бесконечности в плоскости z в такое же простое движение в некоторой части плоскости ζ; очевидно, что задача состоит в нахождении такой аналитической функции $\zeta = F(z)$, чтобы

$$\zeta \sim z \text{ при } |z| \to \infty, \tag{6.5.16}$$

так что жидкость в плоскости ζ также простирается в бесконечность и имеет там такое же движение, как и в плоскости z. Основной результат преобразования сводится к изменению формы внутренней границы и к изменению течения в ее окрестности.

Полный потенциал течения в плоскости ζ должен удовлетворять условию отсутствия движения на бесконечности и условию непроницаемости (6.5.11), выраженному в координатах ξ и η на окружности; кроме того, если течение в плоскости z циклическое, то в плоскости ζ, как объяснялось выше, оно тоже циклическое с той же постоянной $\varkappa$. Успех метода зависит от выражения (6.5.11) в плоскости ζ. Теперь, когда $\Omega = 0$, использование осей, связанных с телом, приводит к замене условия на внутренней границе в плоскости z условием $\psi = \psi_0$ (= const), а на внешней границе — условием

$$w(z) \sim -(U - iV)\, z \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

Соответствующие условия в плоскости ζ таковы: на внутренней границе в форме окружности $\psi = \psi_0$, а на внешней границе

$$w(\zeta) \sim -(U - iV)\zeta \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty;$$

иначе говоря, течение в плоскости ζ представляет собой обтекание неподвижного кругового цилиндра потоком с постоянной скоростью $(-U, -V)$ на бесконечности и с циркуляцией $\varkappa$ вокруг него. Комплексный потенциал такого течения известен. При желании мы могли бы воспользоваться системой координат в плоскости ζ, относительно которой жидкость на бесконечности находится в состоянии покоя; в этом случае условием на внутренней границе (на окружности) было бы

$$\psi - \psi_0 = U\eta - V\xi \tag{6.5.17}$$

для поступательного движения со скоростью (U, V) кругового цилиндра в плоскости ζ. Однако следует отметить, что два соответствующих течения с общим комплексным потенциалом обычно записываются относительно осей координат, связанных с внутренними границами, а не с неподвижной на бесконечности жидкостью. Только когда внутренняя граница представляет собой линию тока, эти течения в двух плоскостях соответствуют друг другу; соответствие нарушается, если движение относится к другой системе координат, так как однородный поток в одной плоскости соответствует течению в другой плоскости, однородному только на бесконечности.

Таким образом, для любого преобразования, удовлетворяющего условию (6.5.16), течение в плоскости ζ, которое соответствует обтеканию тела однородным потоком с постоянной скоростью $(-U, -V)$ на бесконечности в плоскости z, представляет собой обтекание преобразованного тела потоком с той же постоянной скоростью на бесконечности. Такое рассуждение и его вывод неприменимы к вращению тела в плоскости k, так как выбор системы координат, связанный с телом, приводит к вращательному движению жидкости. Исследование течения, вызванного вращающимся цилиндром, требует применения более специальных методов [1]), и ниже мы рассматриваем только поступательное движение.

Метод определения течения, вызванного цилиндром данной формы в поступательном движении, требует, следовательно, знания а) комплексного потенциала обтекания кругового цилиндра, помещенного в поток с заданной скоростью и при заданной циркуляции скорости, и б) аналитической зависимости между z и ζ, обеспечивающей отображение внешности цилиндра из плоскости z на внешность круга в плоскости ζ при выполнении условия

[1]) См., например, Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М., 1947 [а также: Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», М., 1966.— *Ред.*].

на бесконечности (6.5.16). Что касается пункта а), то необходимо только вспомнить результаты, полученные в § 2.10. Из выражения потенциала скорости (2.10.12) однозначная часть потенциала скорости φ течения в плоскости ζ, вызванного круговым цилиндром радиуса c, помещенным в поток с постоянной скоростью $(-U, -V)$ на бесконечности и имеющим центр в точке ζ_0 (обобщение, которое потребуется позже), равна

$$-\{U(\xi-\xi_0)+V(\eta-\eta_0)\}\left\{1+\frac{c^2}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}\right\}.$$

Влияние циркуляции сводится к прибавлению к потенциалу скорости φ члена (см. (2.10.15))

$$(\varkappa/2\pi)\operatorname{arctg}[(\eta-\eta_0)/(\xi-\xi_0)].$$

Соответствующий комплексный потенциал (аналитическая функция от ζ), действительная часть которого равна φ, имеет вид

$$w(\zeta)=-(U-iV)(\zeta-\zeta_0)-(U+iV)\frac{c^2}{\zeta-\zeta_0}-\frac{i\varkappa}{2\pi}\ln\frac{\zeta-\zeta_0}{c} \qquad (6.5.18)$$

(при $\psi=0$ на внутренней границе).

Что касается пункта б), то детали расчета зависят от формы цилиндра, хотя можно сделать одно общее замечание об указанном отображении. Поскольку зависимость между z и ζ аналитическая всюду в области на плоскости ζ вне круга радиуса c и удовлетворяет условию (6.5.16) на больших расстояниях от начала координат, то можно представить z как функцию от ζ в виде ряда Лорана

$$z=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\zeta^n}, \qquad (6.5.19)$$

в котором комплексные коэффициенты B_1, B_2, ... зависят от формы цилиндра. Опуская постоянный член B_0, мы выбираем начало координат в плоскости ζ так, что при наложении одной плоскости на другую с совпадением бесконечно удаленных точек оно совпадает с началом координат в плоскости z; при этом положение центра круга в плоскости ζ не произвольно. Ряд (6.5.19) можно обратить и получить ряд

$$\zeta=z-\frac{B_1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n'}{z^n}, \qquad (6.5.20)$$

справедливый для достаточно больших значений $|z|$, коэффициенты которого B_n' $(n\geqslant 2)$ отличаются от коэффициентов B_n;

это — общее выражение, принимаемое аналитической функцией $\zeta = F(z)$ при достаточно больших значениях z. Комплексный потенциал $w(z)$ обтекания данного цилиндра в плоскости z получается путем подстановки функции $\zeta = F(z)$ в выражение для $w(z)$ (6.5.18), и оказывается, что на достаточно больших расстояниях от цилиндра функцию $w(z)$ можно представить в виде (ср. (2.10.7))

$$w(z) = -(U - iV)z - \frac{i\varkappa}{2\pi}\ln\frac{z}{c} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{z^n}, \qquad (6.5.21)$$

где

$$A_0 = (U - iV)\zeta_0, \qquad A_1 = B_1(U - iV) - c^2(U + iV) + \frac{i\varkappa\zeta_0}{2\pi}. \qquad (6.5.22)$$

Примеры приложений этого метода конформного отображения для определения течения, вызванного движущимися телами, будут приведены в следующих двух параграфах.

Теорема об окружности

Знание аналитической функции, преобразующей область вне замкнутой кривой данной формы в область вне круга, полезно дополнить одним общим результатом, важным в случаях, когда в жидкости вне замкнутой границы имеются особенности течения.

Этот результат, известный как теорема об окружности (Милн-Томсон (1940)), касается комплексного потенциала, представляющего движение жидкости безграничной протяженности при наличии одной внутренней границы в виде окружности. Предположим сначала, что в отсутствие кругового цилиндра существует течение с комплексным потенциалом

$$w = f(z)$$

и что функция $f(z)$ не имеет особенностей в области $|z| \leqslant a$, где a — действительная длина. Если теперь внести в жидкость неподвижный круговой цилиндр радиуса a с центром в начале координат, то течение изменится; каждой особенности функции $f(z)$ соответствует ее отражение (инверсия) относительно окружности, так что суммарное течение, вызванное особенностью и ее отражением, сохраняет окружность $|z| = a$ как линию тока. Общее выражение для присоединенной системы особенностей получим с учетом того, что на окружности

$$a^2 = zz$$

(черточкой отмечена комплексно-сопряженная величина), поэтому

$$f(z)+\bar{f}(a^2/z) \qquad (6.5.23)$$

должна быть действительной величиной на окружности $|z| = a$. Следовательно, комплексный потенциал в виде (6.5.23) имеет среди линий тока окружность $|z| = a$; его особенности вне этой окружности те же, что и функции $f(z)$, так как если точка z лежит вне круга $|z| > a$, то точка a^2/z располагается внутри этого круга, где функция $f(z)$ по предположению особенностей не имеет. Следовательно, дополнительный член $\bar{f}(a^2/z)$ в сумме (6.5.23) полностью отражает изменение комплексного потенциала, вызванное наличием в потоке кругового цилиндра. Следует напомнить, что рассматриваемые комплексные потенциалы как при наличии, так и при отсутствии кругового цилиндра относятся к течению в такой системе координат, в которой цилиндр неподвижен.

Простейшее из возможных приложение теоремы об окружности относится к неподвижному круговому цилиндру, помещенному в поток, скорость которого на бесконечности имеет компоненты $(-U, -V)$. В отсутствие цилиндра комплексный потенциал имеет вид $-(U-iV)z$, и теорема об окружности показывает, что при наличии цилиндра

$$w(z) = -(U-iV)z-(U+iV)\frac{a^2}{z},$$

что нам уже известно. Другой простой случай, который иначе изучается не так просто, представляет собой течение, обусловленное точечным вихрем интенсивности $\varkappa$ в точке $z = z_0$, с комплексным потенциалом $-(i\varkappa/2\pi)\ln(z-z_0)$. При наличии в этом потоке кругового цилиндра радиуса $a < |z_0|$ комплексный потенциал принимает вид

$$w(z) = -\frac{i\varkappa}{2\pi}\ln\left\{\frac{(z-z_0)z}{a^2-z\bar{z}_0}\right\}.$$

В этом случае присоединенная система состоит из точечного вихря интенсивности $\varkappa$ в начале координат и точечного вихря интенсивности $-\varkappa$ в точке $z = a^2/\bar{z}_0$, инверсной по отношению к положению исходного вихря.

Если внутренняя граница жидкости не имеет формы окружности, то предварительное конформное отображение области, внешней по отношению к этой границе, на внешность круга дает новую задачу о течении с внутренней границей в виде окружности с новой системой особенностей. Соответствие между особенностями течения в двух этих плоскостях, связанных конформным отображением, было рассмотрено ранее, так что последующее нахождение комплексного потенциала сводится к применению теоремы об окружности.

6.6. Двумерное безвихревое течение, вызванное движущимся цилиндром с циркуляцией

Одна из целей этого параграфа состоит в том, чтобы исследовать влияние на поле течения циркуляции скорости вокруг цилиндра. Мы видели в § 6.4, что один важный эффект циркуляции в сочетании с поступательным движением цилиндра сводится к появлению боковой силы, действующей на цилиндр. Будет полезно подробнее изучить одно или два таких течения частного вида, чтобы выяснить природу этой боковой силы. Начнем с обсуждения простого и фундаментального случая обтекания кругового цилиндра, поле течения вокруг которого уже было описано.

Круговой цилиндр

Мгновенное движение твердого кругового цилиндра полностью определяется скоростью его центра и угловой скоростью вращения цилиндра; вращение не оказывает влияния на невязкую жидкость и им мы пренебрежем. Мы начнем с рассмотрения формы линий тока, важность чего будет легко понять, если отнести движение к системе координат, связанной с неподвижным цилиндром; дело в том, что поверхность цилиндра при этом сама оказывается линией тока. Нам нужны потенциал скорости и функция тока, описывающие безвихревое обтекание кругового цилиндра радиуса a потоком со скоростью $(-U, -V)$ на достаточном удалении от цилиндра и с циркуляцией $\varkappa$ вокруг него. Известно (см. (6.5.18)), что комплексный потенциал имеет вид

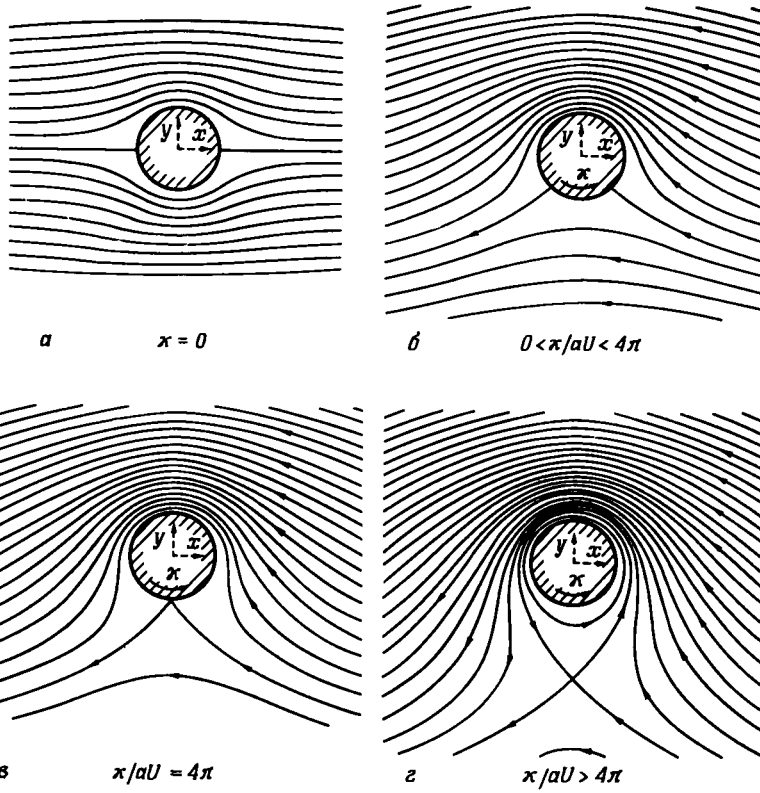
$$w(z) = -(U - iV)\, z - (U + iV)\, \frac{a^2}{z} - \frac{i\varkappa}{2\pi} \ln \frac{z}{a}. \qquad (6.6.1)$$

В данном случае тела с границей в виде окружности, поскольку речь идет о мгновенном движении, без потери общности задачи скорость V можно положить равной нулю, т. е. допустить, что на бесконечности движение жидкости относительно цилиндра происходит параллельно оси x. Тогда потенциал скорости и функция тока определяются формулами

$$\varphi = -U \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta + \frac{\varkappa\theta}{2\pi}, \qquad (6.6.2)$$

$$\psi = -U \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\varkappa}{2\pi} \ln \frac{r}{a}, \qquad (6.6.3)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$ и $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$. Существует однопараметрическое семейство полей течения, соответствующих различным значениям $\varkappa/aU$. Картина линий тока для случая $\varkappa/aU = 0$, единственного, для которого она симметрична относительно оси x, представлена на рис. 6.6.1, *а*.



Р и с. 6.6.1. Линии тока безвихревого обтекания кругового цилиндра потоком с постоянной скоростью $(-U, 0)$ на бесконечности и с циркуляцией скорости $\varkappa$ (в направлении против часовой стрелки).

Оценим эффект изменения значения $\varkappa/aU$, замечая, что скорость жидкости на поверхности цилиндра равна

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a} = 2U\sin\theta + \frac{\varkappa}{2\pi a} \qquad (6.6.4)$$

и обращается в нуль в двух критических точках, в которых

$$\sin\theta = -\frac{\varkappa}{4\pi aU}.$$

Они расположены в передней и задней точках цилиндра, когда $\varkappa = 0$; при увеличении отношения $\varkappa/aU$ обе точки смещаются вниз и совпадают при $\theta = -\pi/2$, когда $\varkappa/aU = 4\pi$. Линии тока для $0 < \varkappa/aU < 4\pi$ показаны на рис. 6.6.1, *б*, а линии тока в частном случае $\varkappa/aU = 4\pi$ — на рис. 6.6.1, *в*. При значениях $\varkappa/aU$, больших 4π, скорость отлична от нуля и направлена в сторону возрастания угла θ во всех точках поверхности цилиндра.

Критическая точка при этом переместилась с поверхности цилиндра вдоль линии $\theta = -\pi/2$ и заняла вне его положение, определяемое одним из корней следующего уравнения (другой корень относится к критической точке внутри цилиндра):

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\varkappa}{2\pi r}=0,$$

так как $(\partial\varphi/\partial r) = 0$ на этой линии в силу симметрии. Из рис. 6.6.1, *г* видно, что часть жидкости совершает циркуляционное движение вокруг цилиндра и остается вблизи него.

Нет необходимости рассматривать отрицательные значения $\varkappa$, так как изменение знака $\varkappa$ должно привести только к отражению линий тока относительно оси x.

Очевидно, что возрастание отношения $\varkappa/aU$ от нуля должно вызывать все более заметное различие между областями течения на обеих сторонах оси x, и, в частности, появление больших скоростей на верхней части поверхности цилиндра и малых — на ее нижней части. Вспоминая, что в установившемся безвихревом течении величина $p + (1/2)\rho q^2$ постоянна (влияние силы тяжести не учитывается), мы видим, что большее давление получается на нижней части поверхности, что и приводит к ненулевой боковой силе, действующей на цилиндр. В этом простом случае кругового цилиндра боковую силу можно вычислить непосредственно и в явном виде. Из выражения (6.6.4) и из теоремы Бернулли следует, что при установившемся течении давление в некоторой точке на поверхности цилиндра [1]) равно

$$p_{r=a} = \rho H - \frac{1}{2}\rho\left(2U\sin\theta+\frac{\varkappa}{2\pi a}\right)^2, \qquad (6.6.5)$$

и тогда компонента по оси y силы, действующей на цилиндр (компонента по оси x из-за симметрии равна нулю), определяется интегралом

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p_{r=a}\, a\sin\theta\, d\theta = \rho U\varkappa, \qquad (6.6.6)$$

как было получено в § 6.4 для цилиндра произвольной формы. Положительный знак этой силы в направлении оси y связан с положительной (в направлении против часовой стрелки) циркуляцией и положительной компонентой скорости цилиндра вдоль оси x относительно жидкости на бесконечности. Запоминание знаков иногда облегчается наблюдением, что подрезанный мяч при игре в теннис или в гольф стремится подняться выше, хотя

[1]) Как отмечалось в § 6.4, боковая сила, которая действует при постоянной скорости поступательного движения цилиндра, продолжает действовать и при переменной скорости U, но только тогда эта сила уже не остается единственной.

на самом деле эти явления не связаны тесно друг с другом; в трехмерном поле течения нет аналога циклической постоянной, и подъем вращающегося мяча связан с различными положениями линий отрыва пограничного слоя на его верхней и нижней поверхностях и возникающим в результате этого различием в распределении скорости и давления на этих поверхностях. Лучший метод запоминания направления действия боковой силы состоит в том, чтобы представить спектр линий тока обтекания цилиндра и учесть, что боковая сила действует в сторону бóльших скоростей, на которой скорости от циркуляции и от однородного потока суммируются (см. также рис. 6.4.1).

Тот факт, что при $\varkappa/aU > 4\pi$ скорость жидкости всюду на поверхности цилиндра имеет одинаковое окружное направление, указывает на возможность получения такого же распределения скорости безвихревого течения в установившемся течении реальной жидкости при больших числах Рейнольдса. Если твердый цилиндр заставить вращаться с угловой скоростью $\Omega = \varkappa/2\pi a^2$, то относительные скорости жидкости и поверхности твердого цилиндра направлены по вращению в одних местах и против — в других; в свою очередь в различных местах пограничного слоя приблизительно в одинаковых количествах возникает положительная и отрицательная завихренность, так что отрыва можно избежать. Максимальные и минимальные значения относительной скорости на поверхности цилиндра (см. (6.6.4)) при этом равны $2U$ и $-2U$, а относительная скорость в точке поверхности твердого цилиндра периодически изменяется с частотой $\Omega/2\pi = \varkappa/(2\pi a)^2$; в течение одного периода относительное смещение жидкости и твердого цилиндра составляет величину порядка $a^2U/\varkappa$, и если это перемещение мало по сравнению с a (ср. результаты из § 5.9 для кругового цилиндра, движущегося из состояния покоя, а также см. § 5.13), то отрыв пограничного слоя будет подавлен. Поэтому можно ожидать, что если $aU/\nu \gg 1$, $\varkappa/aU \gg 1$ и если цилиндр вращается с подходящей угловой скоростью, то в реальной жидкости течение станет всюду безвихревым, за исключением тонкого слоя на поверхности цилиндра.

Циркуляция скорости вокруг цилиндра, конечно, не является контролируемой величиной в эксперименте, однако она определяется угловой и поступательной скоростями движения цилиндра. Подходящее значение циркуляции может быть вычислено, во всяком случае в принципе, на основе предположения, что движение устанавливается в два этапа. Сначала цилиндру в покоящейся жидкости сообщается постоянная угловая скорость вращения Ω; как установлено в § 4.5, завихренность генерируется в жидкости и диффундирует в бесконечность, сохраняя установившееся безвихревое движение с циркуляцией $2\pi a^2\Omega$. Затем цилиндр заставляют двигаться с поступательной скоростью U. Если скорость U

достаточно мала по сравнению с $a\Omega$, то отрыва пограничного слоя не происходит, завихренность сосредоточена в тонком пограничном слое на поверхности цилиндра и циркуляция остается постоянной и равной $2\pi a^2\Omega$. Если же скорость U не мала по сравнению с $a\Omega$, то происходит отрыв и сходство с картиной безвихревого течения теряется.

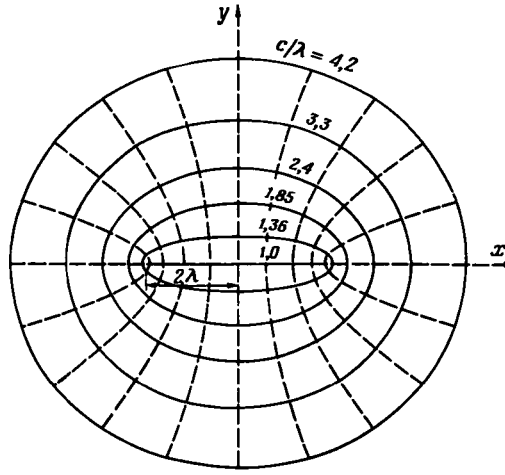
При некоторых значениях отношения $U/a\Omega$ порядка единицы вполне возможно, что отрыв не возникает, но завихренность накапливается вблизи цилиндра, диффундирует через граничную линию тока и сносится вниз по потоку, создавая циркуляцию скорости вокруг цилиндра, незначительно отличающуюся от ее величины $2\pi a^2\Omega$ в установившемся состоянии [1]). На фото 6.6.2 приведены некоторые картины линий тока реального течения, создаваемого вращающимся с угловой скоростью Ω цилиндром в потоке постоянной скорости U для нескольких значений отношения $a\Omega/U$; циркуляция в каждом случае неизвестна, но оказывается, что, когда $a\Omega/U \gg 4$, получается качественное соответствие с полями течений, изображенными на рис. 6.6.1, *в* и *д*, хотя при этом теоретическое значение циркуляции $\varkappa$, используемой на рис. 6.6.1, не равно $2\pi a^2\Omega$.

Из фото 6.6.2 видно, что скорость жидкости на верхней стороне цилиндра вообще выше, а давление соответственно ниже, чем на его нижней стороне, всякий раз, когда имеется заметная угловая скорость цилиндра, независимо от того, достаточно ли она велика, чтобы предотвратить отрыв пограничного слоя и образование больших областей ненулевой завихренности. Существование боковой силы, действующей на круговой цилиндр, который вращается и одновременно движется вперед, а также и на сферу, обычно называется *эффектом Магнуса*, по имени исследователя, который провел первые относящиеся к этому явлению лабораторные эксперименты (Магнус (1853)).

Поступательное движение эллиптического цилиндра

Выражение комплексного потенциала, описывающего течение, вызванное поступательным движением эллиптического цилиндра, можно получить посредством конформного отображения области вне эллипса из плоскости z на область вне круга в плоскости ζ способом, изложенным в § 6.5. Нам потребуется преобразование, дающее линейные соотношения между ξ и x и между η и y для точек окружности в плоскости ζ, так как при этом круг превращается в эллипс. Кроме того, учитывая необходимость совпадения $\zeta \sim z$ при $|z| \to \infty$, искомое преобразование, очевидно,

[1]) Циркуляция, совместимая в этом случае с установившимся течением, может быть найдена путем расчета пограничного слоя на поверхности цилиндра (Глауэрт (1957)); она оказалась меньше чем $2\pi a^2\Omega$.



Р и с. 6.6.3. Семейство софокусных эллипсов в плоскости z, соответствующих окружностям $|\zeta| = c$ в плоскости ζ при преобразовании $z = \zeta + \lambda^2/\zeta$ с различными величинами c. Штриховыми линиями показано ортогональное семейство софокусных гипербол, которые соответствуют радиальным прямым в плоскости ζ.

следует задать равенством

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}, \tag{6.6.7}$$

где λ — действительная постоянная, поэтому

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda^2}{|\zeta|^2}\right), \qquad y = \eta\left(1 - \frac{\lambda^2}{|\zeta|^2}\right). \tag{6.6.8}$$

Функция (6.6.7) преобразует окружность радиуса c с центром в начале координат из плоскости ζ в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в плоскости z, где

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad \lambda = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{2}. \tag{6.6.9}$$

Эллипсы различной формы с разными значениями отношения полуосей b/a получаются путем выбора различных значений отношения c/λ. Некоторые из этого семейства софокусных эллипсов, включая предельный случай плоской пластины ($b = 0$, $c/\lambda = 1$), показаны на рис. 6.6.3.

Преобразование (6.6.7) можно также использовать для отображения тонких тел с заостренной кормовой частью (профилей) из плоскости z в круг на плоскости ζ, как будет объяснено в § 6.7; это впервые было сделано Жуковским (1910).

Комплексный потенциал, описывающий течение в плоскости ζ, вокруг кругового цилиндра радиуса c с центром в начале координат, обтекаемого потоком со скоростью $(-U, -V)$ на бесконечности и с циркуляцией $\varkappa$ вокруг цилиндра, имеет вид

$$w(\zeta) = -(U - iV)\zeta - (U + iV)\frac{c^2}{\zeta} - \frac{i\varkappa}{2\pi}\ln\frac{\zeta}{c}. \qquad (6.6.10)$$

Теперь соотношения (6.6.10) и (6.6.7) совместно определяют в параметрическом виде требуемый комплексный потенциал $w(z)$ обтекания эллиптического цилиндра потоком с той же скоростью $(-U, -V)$ на бесконечности и с той же циркуляцией $\varkappa$ вокруг цилиндра.

Комплексный потенциал течения в плоскости z относительно осей координат, связанных с жидкостью на бесконечности, может быть получен путем добавления к приведенному выше комплексному потенциалу члена $(U - iV)z$ и, следовательно, определяется выражением

$$w(\zeta) = (U - iV)\frac{\lambda^2}{\zeta} - (U + iV)\frac{c^2}{\zeta} - \frac{i\varkappa}{2\pi}\ln\frac{\zeta}{c} \qquad (6.6.11)$$

совместно с преобразованием (6.6.7).

Рассмотрим теперь свойства течения в плоскости z. С этой целью удобно ввести полярные координаты (σ, ν) в плоскости ζ так, чтобы

$$\zeta = \xi + i\eta = \sigma e^{i\nu} \qquad (6.6.12)$$

и

$$x = \sigma\left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)\cos\nu, \quad y = \sigma\left(1 - \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)\sin\nu. \qquad (6.6.13)$$

Кроме того, примем [1])

$$U + iV = We^{-i\alpha}. \qquad (6.6.14)$$

Тогда соотношение (6.6.10) принимает вид

$$w(\zeta) = -W\sigma e^{i(\nu+\alpha)} - \frac{Wc^2}{\sigma}e^{-i(\nu+\alpha)} - \frac{i\varkappa}{2\pi}\left(\ln\frac{\sigma}{c} + i\nu\right) \qquad (6.6.15)$$

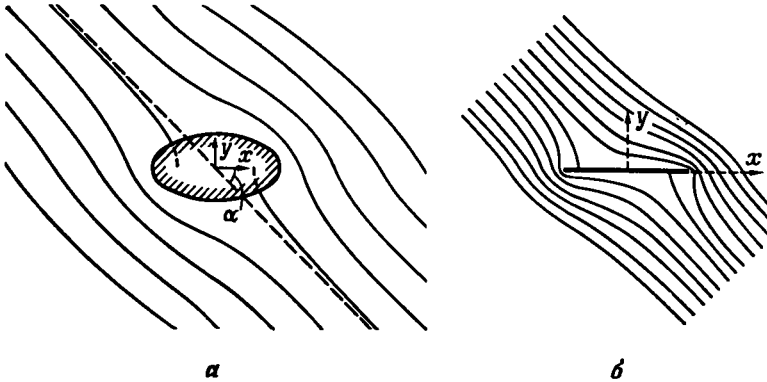
и соответствующий потенциал скорости и функция тока находятся по формулам

$$\varphi = -W\left(\sigma + \frac{c^2}{\sigma}\right)\cos(\nu + \alpha) + \frac{\varkappa}{2\pi}\nu, \qquad (6.6.16)$$

$$\psi = -W\left(\sigma - \frac{c^2}{\sigma}\right)\sin(\nu + \alpha) - \frac{\varkappa}{2\pi}\ln\frac{\sigma}{c}. \qquad (6.6.17)$$

Отметим, между прочим, форму членов, содержащих циркуляцию $\varkappa$, которая характеризует чисто циркуляционное течение

[1]) Основание для определения угла, который скорость тела составляет с осью x, посредством отрицательной величины $(-\alpha)$ заключается в том, что в теории несущих тел, излагаемой в следующем параграфе, более естественно считать, что ось длинного тонкого тела наклонена под положительным углом α к направлению его движения



а *б*

Р и с. 6.6.4. Линии тока при обтекании эллиптического цилиндра потоком с постоянной скоростью на бесконечности при $\alpha = 45°$ и с нулевой циркуляцией вокруг цилиндра; (*а*) $b/a = 0{,}53$, $c/\lambda = 1{,}80$; (*б*) $b/a = 0$, $c/\lambda = 1$.

вокруг цилиндра с круговыми линиями тока в плоскости ζ. Соответствующие линии тока в плоскости z представляют собой семейство софокусных эллипсов, некоторые из которых приведены на рис. 6.6.3; любой из этих эллипсов может представлять внутреннюю границу. В сопряженном поле течения, для которого члены, содержащие циркуляцию $\varkappa$ в формулах (6.6.16) и (6.6.17), следует поменять местами (и оба они имеют положительные знаки), эллипсы на рис. 6.6.3 становятся эквипотенциальными линиями, а линии тока превращаются в ортогональные к ним гиперболы, изображенные штриховыми линиями. Любую из этих гипербол можно рассматривать как границу, и если выбрать предельную гиперболу с $\nu = 0$, то получится картина безвихревого течения через щель в плоской стенке.

Теперь просто рассчитать линии тока и другие параметры течения, исходя из формул (6.6.16) и (6.6.17) и используя σ и ν в качестве параметрических координат. Форма линий тока зависит от отношения b/a полуосей эллиптической границы, от направления движения тела, характеризуемого углом α, и от относительной величины циркуляции, определяемой отношением $\varkappa/(cW)$.

Рассмотрим сначала случай, когда циркуляция равна нулю. Линии тока для обтекания одного сравнительно толстого эллипса и предельной плоской пластины (в обоих случаях $\alpha = 45°$) показаны на рис. 6.6.4. Линия тока, которая разделяет части потока, проходящие по различным сторонам от цилиндра, пересекает цилиндр, на контуре которого $\sigma = c$, и на ней $\psi = 0$. Ветви этой разделяющей линии тока вверх и вниз по потоку определяются условиями $\nu = -\alpha$, $\nu = \pi - \alpha$ и представляют собой гиперболы, ортогональные к эллиптической границе и софокусные с ней; эти ветви асимптотически приближаются к прямой

$Uy = Vx$; кроме того, они одинаковы для всего семейства эллиптических границ, представленного на рис. 6.6.3 (для данного α), так как они зависят только от разности $a^2 - b^2$ (или от λ).

Кинетическая энергия (на единицу длины цилиндра) жидкости в системе координат, неподвижной по отношению к жидкости на бесконечности, при $\varkappa = 0$ может быть вычислена различными способами; простейший путь состоит в использовании формулы

$$T = -\frac{1}{2}\rho \oint \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi \, dA = -\frac{1}{2}\rho \oint \left(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)_{\sigma=c} d\nu. \quad (6.6.18)$$

Выражения φ и ψ, которые следует подставить в подинтегральное выражение, равны действительной и мнимой частям выражения (6.6.11). В результате прямого вычисления находим

$$T = \frac{1}{2}\pi\rho\,(a^2V^2 + b^2U^2). \quad (6.6.19)$$

Следовательно, для эллиптического цилиндра с большой осью, параллельной оси $x_1 = x$, и малой осью, параллельной оси $x_2 = y$, тензор α_{ij}, введенный в § 6.4 и определяемый равенством (6.4.15), имеет компоненты

$$\alpha_{11} = b/a, \qquad \alpha_{22} = a/b, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \quad (6.6.20)$$

Данные о скорости на достаточном удалении от движущегося цилиндра и о реакции жидкости на его ускорение тоже содержатся в выражении (6.4.19), как объяснялось в § 6.4.

Полезная дополнительная информация получается из распределения скорости на границе цилиндра в плоскости z, которое (возвращаясь к системе координат, неподвижной относительно цилиндра) определяется формулой

$$(u - iv)_{\text{гран}} = \left(\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\sigma=c} = \frac{-2iW\sin(\nu+\alpha) - i\varkappa/2\pi c}{e^{i\nu} - (\lambda^2/c^2)\,e^{-i\nu}}. \quad (6.6.21)$$

Когда $\varkappa = 0$, на цилиндре имеются критические точки при $\nu = -\alpha$ и $\nu = \pi - \alpha$, расположенные на разделяющей линии тока. Они же являются точками максимального давления в установившемся течении, и их положение (см. рис. 6.6.4) дает возможность предположить, что существует пара сил, действующая на цилиндр и стремящаяся развернуть его длинной осью поперек потока; момент этой пары можно было бы вычислить, исходя из формулы (6.6.21) и теоремы Бернулли, однако позже в этом параграфе будет указан более общий метод.

Когда $\varkappa \neq 0$, в семействе линий тока больше нет никакой симметрии и перемещение точек минимума и максимума скорости на границе относительно их положения при $\varkappa = 0$ не будет одним и тем же на верхней и нижней поверхностях цилиндра. Следовательно, в то время как при $\varkappa = 0$ полная сила, приложенная

к телу в установившемся течении, обязательно равна нулю из-за симметрии линий тока относительно начала координат, она будет отлична от нуля, когда циркуляция скорости ненулевая.

Силу, действующую на цилиндр, можно рассчитать и непосредственно, зная скорость на поверхности цилиндра, как это было сделано для кругового цилиндра, хотя нам уже известно из общего обсуждения в § 6.4, что сила имеет величину $\rho\varkappa W$, а ее направление составляет угол 90°, измеряемый в сторону циркуляции, с направлением вектора скорости цилиндра (U, V). Общее влияние возрастания циркуляции на две критические точки на поверхности цилиндра сводится к сближению их на той стороне цилиндра, на которой добавки к скорости жидкости (относительно цилиндра) от потока на бесконечности и от циркуляции имеют противоположные знаки. Значение $\varkappa$, для которого две критические точки совпадают, должно обращать правую часть равенства (6.6.21) в нуль при минимуме $\sin(\nu + \alpha) = -1$, и тогда $\varkappa = 4\pi cW$. При бо́льших значениях $\varkappa$ две совпадающие критические точки сходят с поверхности цилиндра, в результате чего около цилиндра остается объем жидкости, которая в установившемся течении непрерывно циркулирует вокруг него так же, как и в случае кругового цилиндра.

Плоская пластина, получающаяся при $b = 0$ или $c = \lambda = {}^1/_2 a$, представляет собой вырожденный случай семейства эллипсов, поскольку скорость бесконечна (см. (6.6.21)) в общем случае на ее обеих кромках, определяемых значениями $\nu = 0$ $(x = a, y = 0)$ и $\nu = \pi$ $(x = -a, y = 0)$, что и следовало ожидать на основании результатов, полученных ранее для обтекания выступающего в поток угла. Свойства течения вокруг плоской пластины будут обсуждены в следующем параграфе в связи с профилями, имеющими заостренную кормовую часть. Может вызвать удивление, что при $\varkappa \neq 0$ распределение давления на плоской пластине в установившемся движении дает результирующую силу, которая не перпендикулярна пластине. Объяснение связано с тем фактом, что бесконечно низкое давление, которое возникает на острых кромках (за исключением того случая, когда с кромкой совпадает критическая точка — см. § 6.7), приводит к появлению ненулевой компоненты силы, параллельной пластине, как уже было показано в § 6.5.

Сила и момент, действующие на цилиндр в установившемся поступательном движении

Сила и момент, действующие на (единицу длины) движущегося цилиндра произвольного поперечного сечения, могут быть определены методами теории функций комплексного переменного, и хотя результаты, касающиеся результирующей силы, действую-

щей на твердое тело, известны из § 6.4, мы обратимся к этому вопросу еще раз, учитывая его важность и интерес, проявляемый к нему в специальных методах исследования двумерных течений. Мы будем рассматривать только установившееся поступательное движение тела; когда скорость тела переменна, к получаемым ниже выражениям следует добавлять силы и моменты, возникающие вследствие реакции жидкости на ускорение.

Обозначим компоненты силы, действующей на тело через (X, Y), и приступим к построению комплексной величины

$$X - iY = -\oint_B p\,(dy + i\,dx) = -i\oint_B p\,d\bar{z},$$

где B — замкнутая кривая интегрирования, совпадающая с поверхностью тела, а черточкой отмечена комплексно-сопряженная величина. Скорость с компонентами (u, v) по отношению к телу постоянна, и можно воспользоваться теоремой Бернулли (пренебрегая силой тяжести), чтобы заменить давление p на величину $\rho H - \frac{1}{2}\rho\,(u^2 + v^2)$, первый член которой не влияет на результат интегрирования. Далее, если течение безвихревое, то имеем

$$u^2 + v^2 = \frac{dw}{dz}\,\overline{\frac{dw}{dz}},$$

а так как на поверхности тела как $\overline{dw/dz} = u + iv$, так и элемент пути интегрирования δz представляют собой комплексные величины с одинаковыми аргументами, то произведение $(\overline{dw/dz})\delta\bar{z}$ будет действительно числом и его можно записать как $(dw/dz)\,\delta z$. Отсюда следует, что

$$X - iY = \frac{1}{2}\,i\rho\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad (6.6.22)$$

Аналогично результирующий момент нормальных напряжений (в направлении против часовой стрелки) относительно начала координат, приложенный к цилиндру, равен

$$M_0 = \oint_B p\,(x\,dx + y\,dy) = -\frac{1}{2}\rho\oint_B \frac{dw}{dz}\,\overline{\frac{dw}{dz}}\,\mathcal{R}\,(z\,d\bar{z}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho\,\mathcal{R}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz. \qquad (6.6.23)$$

Путь интегрирования в выражениях (6.6.22) и (6.6.23) был взят по поверхности тела. Однако теорема Коши [1]) гласит, что если функция $f(z)$ является аналитической в области между двумя

[1]) См. Copson E. T., Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford, 1935 [а также: Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.— *Ред.*].

контурами C_1 и C_2, то

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz, \tag{6.6.24}$$

так что в качестве пути интегрирования в выражениях (6.6.22) и (6.6.23) может быть выбрана любая замкнутая кривая, окружающая тело (если только, конечно, нет никаких особенностей функции w в области между телом и выбранной замкнутой кривой). Очевидно, что полезно специально выбрать окружность большого радиуса, когда известно выражение для $w(z)$ на больших расстояниях от тела.

Формулы (6.6.22) и (6.6.23), полученные Блазиусом (1910) [1], применимы к любому установившемуся безвихревому течению в жидкости, окружающей тело. В дальнейшем они понадобятся нам в случае, в котором жидкость простирается до бесконечности и имеет там постоянную скорость $(-U, -V)$. С этой целью воспользуемся рядом Лорана (2.10.7) для комплексного потенциала в области, расположенной вне круга, охватывающего тело, с центром в начале координат (с дополнительным слагаемым $-(U-iV)z$, как и в выражении (6.5.21), поскольку выражение (2.10.7) относится к течению в системе координат, неподвижной относительно жидкости на бесконечности). Тогда из выражения (6.6.22) получим

$$X - iY = \frac{1}{2} i\rho \oint_C \left(-U + iV + \frac{m - i\varkappa}{2\pi z} - \frac{A_1}{z^2} - \frac{2A_2}{z^3} + \dots\right)^2 dz, \tag{6.6.25}$$

где коэффициенты A_1, A_2, ... зависят от U, V, m и $\varkappa$, а также от размера, формы и ориентации тела (в нашем случае параметр $m = 0$, но мы временно сохраним его под знаком интеграла), а интеграл берется по любому замкнутому контуру C, содержащему внутри себя окружность, охватывающую тело. Интеграл можно вычислить непосредственно, выбирая контур C в виде окружности бесконечно большого радиуса или же замечая с точки зрения теории функций комплексного переменного, что подинтегральное выражение имеет полюс в начале координат; согласно любому из этих двух способов, интеграл равен произведению $2\pi i$ на коэффициент при z^{-1} в подинтегральном выражении (вычет), и поэтому

$$X = \rho m U - \rho\varkappa V, \quad Y = \rho m V + \rho\varkappa U. \tag{6.6.26}$$

Таким образом, сочетание поступательного движения тела и циркуляции скорости вокруг него приводит к появлению боковой силы, нормальной к вектору скорости тела (U, V), как было уже установлено ранее; если же результирующий объемный поток m через поверхность тела будет ненулевым и положитель-

[1] И независимо С. А. Чаплыгиным тоже в 1910 г.— *Прим. ред.*

ным, то этот поток в сочетании с поступательным движением приведет к появлению силы тяги или отрицательной силы сопротивления, параллельной вектору скорости (U, V).

Аналогично для результирующего момента, действующего на тело относительно начала координат, получим

$$M_0 = -\frac{1}{2}\rho\,\mathscr{R}\oint_C\left(-U+iV+\frac{m-i\varkappa}{2\pi z}-\frac{A_1}{z^2}-\frac{2A_2}{z^3}+\ldots\right)^2 z\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho\,\mathscr{R}\left\{2\pi i\left(\frac{m-i\varkappa}{2\pi}\right)^2-4\pi i A_1(-U+iV)\right\} =$$

$$= -\frac{\rho m\varkappa}{2\pi}+2\pi\rho\{U\,\mathscr{J}(A_1)-V\,\mathscr{R}(A_1)\}. \qquad (6.6.27)$$

В отличие от силы момент зависит от формы тела.

В случае цилиндра произвольной формы его граница из плоскости z преобразуется в окружность радиуса c с центром в точке ζ_0 в плоскости ζ с помощью общего разложения (6.5.19) или (6.5.20), согласно которому $z \sim \zeta$ при больших $|z|$; коэффициент A_1 определяется выражением (6.5.22). В этом случае момент, действующий на цилиндр, равен

$$M_0 = 2\pi\rho\left[(-2UV)\,\mathscr{R}(B_1)+(U^2-V^2)\,\mathscr{J}(B_1)+\frac{\varkappa}{2\pi}(U\xi_0+V\eta_0)\right]. \qquad (6.6.28)$$

Для эллиптического цилиндра с полуосями a и b соответствующее преобразование задается формулой (6.6.7) и

$$\zeta_0 = 0, \qquad B_1 = \lambda^2 = \frac{1}{4}(a^2-b^2).$$

Поэтому момент относительно начала координат, действующий на цилиндр, равен

$$M_0 = -\pi\rho UV\,(a^2-b^2). \qquad (6.6.29)$$

Направление момента против часовой стрелки подтверждает вывод, сделанный ранее исходя из вида линий тока, что распределение давления по поверхности эллипса стремится развернуть его относительно центра большей осью поперек потока.

6.7. Двумерные профили

Тот факт, что в двумерном безвихревом потоке на тело, вокруг которого имеется циркуляция скорости, действует боковая сила, а не сила сопротивления, используется в технике. Эта сила может быть использована, например, для поддержания самолета в воздухе или для создания определенной реакции жидкости, когда тело представляет собой лопасть вращающегося винта или тур-

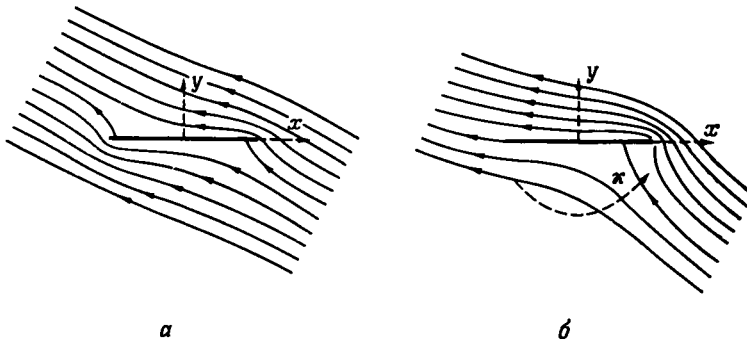
бины. Крылья самолета и лопасти винта не являются бесконечно длинными цилиндрами, и влияния конечной длины крыла и изменений площади поперечного сечения вдоль их длины, как будет показано в гл. 7, играют важную роль в теории подъемной силы; тем не менее рассмотрение несущего крыла как бесконечно длинного цилиндра подходящего поперечного сечения, движущегося в направлении нормали к образующим (это сечение обычно называется профилем), существенно для предварительного исследования.

Практические требования, предъявляемые к профилям

Основные требования, предъявляемые на практике к профилю, заключаются в том, что при движении через жидкость к нему должна быть приложена боковая сила, а сила сопротивления, которую нужно компенсировать какой-либо силовой установкой и которая приводит к затратам ее мощности, должна быть по возможности малой. Оба эти требования выполняются в потоке, всюду безвихревом, за исключением тонкого пограничного слоя и следа, если только вокруг профиля устанавливается циркуляция. Таким образом, одна задача состоит в том, чтобы избежать отрыва пограничного слоя в установившемся движении профиля, а другая — в нахождении циркуляции вокруг него. В гл. 5 показано, что отрыва пограничного слоя от поверхности тела можно избежать только тогда, когда не происходит заметного замедления жидкости непосредственно вне пограничного слоя. Положение критической точки в кормовой части тела в двумерном течении представляет собой источник затруднений; вблизи кормовой кромки тела с конечной кривизной неизбежен отрыв потока. Естественно использовать тонкий профиль с острой кормовой кромкой в виде точки возврата и установить его приближенно параллельно направлению движения.

Фотография линий тока течения относительно профиля (см. фото 5.11.1,*а*) показывает, что при этом удается избежать отрыва. На практике трудно сделать кромки с точкой возврата, но пограничный слой и след оттесняют безвихревой поток от профиля на малое расстояние, отличное от нуля вблизи острой кромки, и внутренняя граница области безвихревого течения становится похожей на кривую с точкой возврата, даже если кормовая кромка действительного профиля представляет собой клин с малым углом раствора.

Конечно, вовсе не обязательно, чтобы в безвихревом обтекании тонкого тела с острой кормовой кромкой потоки жидкости на обеих его сторонах двигались к острой кромке и затем плавно соединялись. Это ясно из анализа двумерного безвихревого обтекания пластины с постоянной скоростью на бесконечности ($-U$, $-V$),



а *б*

Рис. 6.7.1. Линии тока при обтекании пластины потоком с постоянной скоростью на бесконечности при $\alpha = 26°$;
а — течение с нулевой циркуляцией; *б* — течение, в котором циркуляция выбрана так, что происходит плавный сход потока с обеих сторон кормовой кромки пластины.

проведенного в § 6.6. Вообще на поверхности пластины имеется две критические точки (см. рис. 6.6.4, *б*), и жидкость обтекает две острые кромки с бесконечной скоростью на них. Бесконечные скорости исчезают только в специальном случае $\varkappa = 0$ и $\alpha = 0$, когда скорость жидкости всюду равна $(-U, 0)$. В этом случае каждая критическая точка смещается на острую кромку и «гасит» там бесконечную скорость. Поэтому для данного ненулевого α (или $\varkappa$) попытаемся выяснить, можно ли специальным выбором $\varkappa$ (или α) заставить потоки на обеих сторонах пластины плавно обтекать кормовую кромку пластины так, чтобы кормовая критическая точка располагалась на этой кромке. Из формулы (6.6.21) следует, что скорость на поверхности пластины ($b = 0$ и $c = \lambda = a/2$) равна

$$u = \frac{-W \sin(\nu + \alpha) - \varkappa/2\pi a}{\sin \nu}, \qquad v = 0.$$

Скорость на кормовой кромке $\nu = \pi$ конечна, если

$$\varkappa = 2\pi a W \sin \alpha, \tag{6.7.1}$$

и тогда скорость на поверхности пластины равна

$$u = -W \frac{\sin(\nu/2 + \alpha)}{\sin \nu/2}, \qquad v = 0. \tag{6.7.2}$$

На рис. 6.7.1 показано изменение формы линий тока при обтекании плоской пластины ($\alpha = 26°$), вызванном наложением циркуляции найденной величины. Существует еще передняя критическая точка при $\nu = -2\alpha$, т. е. при $x = a \cos 2\alpha$, $y = -0$, а скорость на передней кромке ($\nu = 0$) бесконечна; однако это не должно беспокоить нас, так как жидкость на поверхности пластины вблизи передней критической точки ускоряется, а максимум

скорости можно исключить почти полностью, придавая пластине некоторую толщину и скругляя ее переднюю кромку.

Итак, оказывается, что если нужно получить боковую силу на тонком теле с острой кормовой кромкой при его поступательном движении и если нужно избежать отрыва пограничного слоя, то не только должна быть создана *некоторая* циркуляция, но она должна иметь вполне определенную величину, зависящую от положения тела относительно направления его движения. Циркуляция должна иметь такое значение, для которого при данном положении тела кормовая критическая точка располагается на острой кормовой кромке; при этом скорость на ней становится конечной и отличной от нуля. Примечателен тот факт, что в действительности циркуляция создается вокруг профиля благодаря уносу ненулевого количества завихренности от кормовой кромки профиля в начальной стадии движения, и если профиль совершает установившееся движение, то вокруг него устанавливается циркуляция как раз указанной специальной величины (см., например, фото 5.11.1, *а*). Это счастливое обстоятельство, заключающееся в том, что действие вязкости в пограничном слое в начальный момент времени вызывает появление циркуляции именно такой величины, которая в последующем установившемся движении позволяет пренебречь влиянием вязкости (так как при этом не происходит отрыва пограничного слоя), называется обычно *гипотезой Жуковского*. В развитии теории профиля она использовалась как эмпирическое правило, однако современные данные о пограничных слоях позволяют дать объяснение, по крайней мере качественное, явлению установления циркуляции вполне определенной величины.

Возникновение циркуляции вокруг профиля и обоснование гипотезы Жуковского

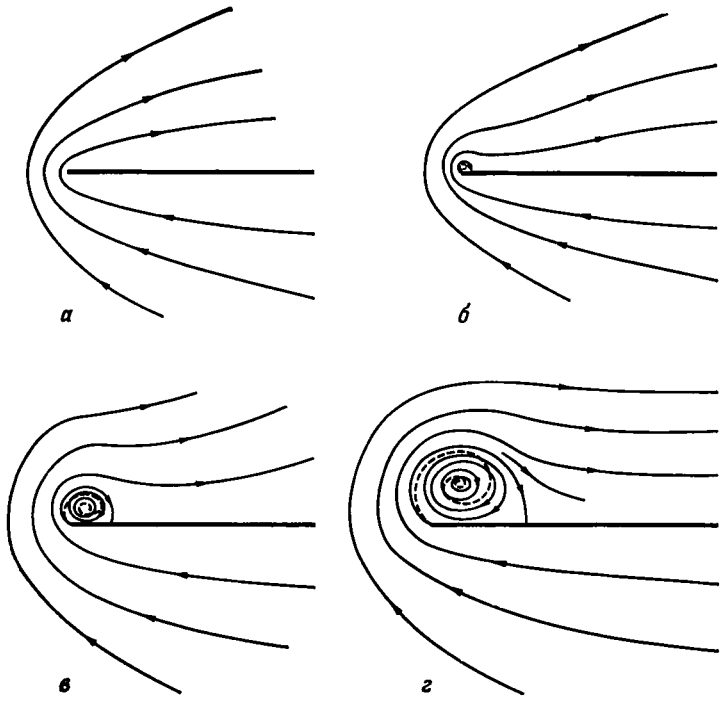
Отклонимся немного от обсуждения полностью безвихревого течения, чтобы рассмотреть влияние, оказываемое на циркуляцию острой кормовой кромкой профиля.

Из наблюдений известно, что циркуляция вокруг профиля со скругленной передней кромкой и острой кормовой кромкой в установившемся поступательном движении не зависит от предыстории течения, и для наших целей можно предположить, что движение возникло из состояния покоя и профиль мгновенно приобрел конечную постоянную скорость без изменения направления своего движения. В начале движения профиля течение жидкости всюду безвихревое, так как перенос завихренности от поверхности профиля (где она возникает) происходит путем диффузии в вязкой жидкости, а также и конвективным путем и, следовательно, с конечной скоростью. Такое начальное безвих-

ревое движение характеризуется нулевой циркуляцией (согласно теореме Кельвина), и существует вполне определенное положение кормовой критической точки, которое зависит от заданной ориентации профиля по отношению к направлению его движения. Начальное положение кормовой критической точки в общем случае не совпадает с положением острой кормовой кромки, и в результате происходит обтекание этой кромки с бесконечной скоростью; течение вблизи нее вначале напоминает течение около плоской пластины, изображенное на рис. 6.7.1, *а*. Исключительно сильное замедление жидкости, движущейся в окрестности кормовой кромки в направлении к кормовой критической точке, немедленно приводит к развитию обратного течения в пограничном слое (который на этой стадии процесса еще очень тонок) и к его отрыву от этой кромки.

В следующей фазе движения завихренность, сходящая с кормовой кромки в оторвавшемся пограничном слое, воздействует на безвихревое течение вблизи кромки и изменяет его так, что скорость схода завихренности уменьшается. Такой процесс возникает вблизи любой острой кромки, и мы можем представить себе течение вблизи кормовой кромки в данный момент времени изолированно от остальной части жидкости. Форма и положение оторвавшегося пограничного слоя, сходящего с помещенной в потоке острой кромки сразу после начала ее движения, показаны на ряде фотографий (см. фото 5.10.5); дополнительные сведения о линиях тока с обеих сторон пограничного слоя даны на фото 6.7.2. До тех пор пока завихренность не уносится движущейся жидкостью от острой кромки, безвихревое течение локально имеет форму, описываемую комплексным потенциалом (6.5.2) при $n = 1/2$, если эта кромка представляет собой точку возврата кривой (см. также рис. 6.5.1), а в последующие моменты времени завихренность, сходящая с кромки, видоизменяет это безвихревое течение в некоторой области вблизи кромки; размеры этой области непрерывно увеличиваются.

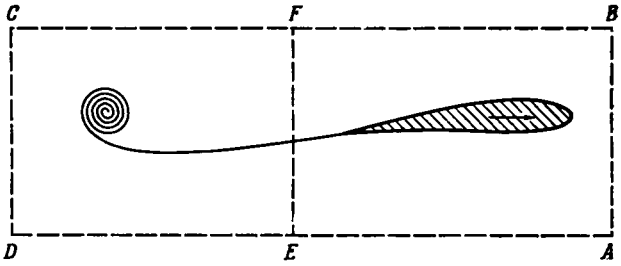
На рис. 6.7.3 сделана попытка схематично изобразить процесс развития течения вблизи кромки пластины и свертывания в спираль оторвавшегося пограничного слоя под влиянием индуцированной им скорости. Сходящая завихренность уносится от кромки движущейся жидкостью и поэтому необходимо ее постоянное пополнение за счет новой завихренности, стекающей с кромки, чтобы индуцировать такую скорость вблизи кромки, которая полностью погашала бы скорость, вызванную основным безвихревым течением с комплексным потенциалом $w = Az^{1/2}$. Представляется возможным, что форма отделившегося от кромки пограничного слоя и линий тока остается приближенно подобной (автомодельной) с увеличивающимся со временем масштабом и с постоянной A в качестве единственного параметра, характери-



Р и с. 6.7.3. Схема линий тока при обтекании острой кромки пластины на различных стадиях после начала движения; *а* — полностью безвихревое течение, определяемое комплексным потенциалом $w(z) = Az^{1/2}$; *б*, *в*, *г* — то же безвихревое течение, измененное наличием в нем спиральной вихревой пелены (штриховая линия), которая содержит завихренность, сходящую с пограничных слоев на обеих поверхностях пластины (преобладает отрицательная завихренность с нижней поверхности пластины).

зующего течение, до тех пор пока область завихренности не становится столь большой, что она не может больше рассматриваться как наложение ее на безвихревое течение с комплексным потенциалом в форме $w = Az^{1/2}$.

В третьей фазе интенсивная завихренность, сошедшая с кормовой кромки в начале движения, сносится вниз по потоку. Направление сошедшей завихренности совпадает с направлением течения вокруг выходной кромки в первоначально полностью безвихревом потоке (т. е. в направлении часовой стрелки на рис. 6.7.1, *а*), и очевидно, что вокруг профиля должна остаться циркуляция противоположного знака. Действительно, рассмотрим жидкий контур $ABCD$ на рис. 6.7.4, достаточно большой, чтобы охватить как начальное положение профиля (которое приближенно совпадает с положением сошедшей с профиля завихренности), так



Р и с. 6.7.4. Схема, показывающая, что циркуляция скорости вокруг профиля при установившемся движении равна по величине и противоположна по знаку потоку завихренности, сходящей с профиля.

и профиль в данный момент времени. Циркуляция по контуру $ABCD$ вначале была равна нулю, и, следовательно, она остается равной нулю в данный момент времени. Таким образом, циркуляция по контуру $ABFE$ равна по величине и противоположна по знаку потоку завихренности через площадь $EFCD$, в которой практически содержится вся завихренность, сошедшая с профиля вплоть до рассматриваемого момента времени. Фотографии, подобные приведенным на фото 6.7.5, показывают, что унос вихрей фактически заканчивается после того, как профиль продвинулся вперед на расстояние одной или двух его длин в направлении потока, после того как его скорость стала постоянной. Поскольку жидкость, окруженная контуром $ABFE$, находится всюду в состоянии безвихревого движения (за исключением тонкого пограничного слоя и следа, которые в установившемся движении содержат нулевой результирующий поток завихренности), то установившаяся циркуляция по контуру $ABFE$ равна циркуляции вокруг профиля.

Таким путем устанавливается режим течения, в котором циркуляция вокруг профиля в установившемся движении отлична от нуля. Направление возникающей циркуляции (против часовой стрелки для профилей на рис. 6.7.1, 6.7.4 и фото 6.7.5) противоположно обтеканию острой кормовой кромки в начальном полностью безвихревом движении, и поэтому оно оказывается таким, чтобы вызвать смещение кормовой критической точки в направлении к острию кромки. Мы не можем определить точное значение циркуляции, возникающей вокруг профиля, путем анализа процесса уноса вихрей, но можем утверждать, что *любое* постоянное значение циркуляции, кроме значения, которое соответствует совпадению кормовой критической точки с острием кромки, немедленно приведет к описанной последовательности изменения в вихревом следе и вызовет дальнейшее изменение циркуляции всегда в таком направлении, чтобы совместить кормовую крити-

ческую точку с острием кромки. Таким образом, циркуляция, определяемая гипотезой Жуковского, представляется единственно возможной величиной циркуляции для профиля при его установившемся движении.

Очевидно, что циркуляция, требуемая гипотезой Жуковского, зависит от скорости установившегося движения профиля, и поскольку эта гипотеза требует взаимного погашения двух слагаемых скорости обтекания острой кромки — от циркуляции и от движения самого профиля,— то эта циркуляция *пропорциональна* скорости профиля. (Равенство (6.7.1) показывает это в явном виде для случая пластины.) Из сказанного следует, что завихренность должна сходить с профиля всякий раз, когда его скорость изменяется, а не только когда он начинает движение из состояния покоя. На фото 6.7.6 видны замечательные эффекты начала движения профиля из состояния покоя и его мгновенной остановки вскоре после этого. Завихренность, сходящая в результате быстрого изменения скорости, обычно становится концентрированной, и удобнее говорить о «разгонном» вихре и, как на фото 6.7.6, о «тормозном» вихре. Разгонный и тормозной вихри в данном случае имеют равные по величине и противоположные по знаку интенсивности, и если профиль остается в состоянии покоя, то они впоследствии движутся под взаимным влиянием друг на друга с приближенно равными скоростями в направлении нормали к соединяющей их линии. Разгонный и тормозной вихри можно также легко продемонстрировать, погружая широкое лезвие ножа нормально к поверхности воды в сосуде и двигая его поперек плоскости лезвия, причем существование вихрей становится заметным по снижению поверхности воды в их центре.

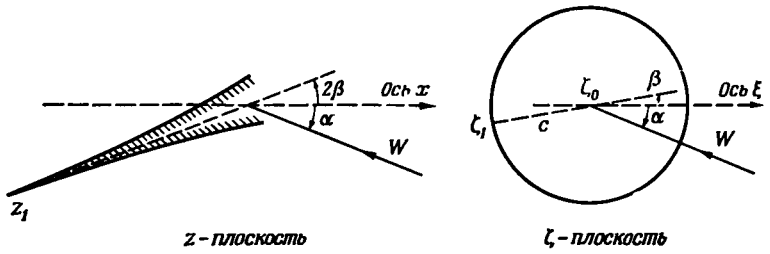
Если c — характерный размер профиля, то циркуляция, требуемая по гипотезе Жуковского, должна иметь вид

$$\varkappa \sim cW; \tag{6.7.3}$$

коэффициент пропорциональности может зависеть только от формы профиля и его ориентации, определяемой углом α между направлением его движения и некоторой линией, фиксированной на профиле. Определение коэффициента пропорциональности и его зависимость от угла α (которая имеет отношение к управлению подъемной силой профиля с изменением режима полета) являются теперь полностью задачей теории безвихревого течения.

Профили, получаемые преобразованием окружности

Определение безвихревого течения при поступательном движении тонкого профиля с острой кромкой, полученного путем преобразования окружности, является хорошим упражнением для общего метода, описанного в конце § 6.5. На начальном этапе



Р и с. 6.7.7. Схема к получению профиля из окружности с помощью конформного отображения.

развития аэронавтики отдавалось предпочтение профилям, для которых соответствующие характеристики течения (в частности, распределение давления на крыле) могут быть получены аналитически; теперь же имеется много других путей получения нужных сведений и больше нет каких-либо оснований для выбора именно таких профилей. Простой метод, который будет здесь описан, с практической точки зрения имеет тот недостаток, что он не прямой, т. е. дает профили специального вида с известными характеристиками течения, но не позволяет рассчитать характеристики профиля заданной формы.

Отличительной чертой профиля является его острая кромка, относительно которой будем считать, что она является точкой возврата кривой. Наклон касательной к поверхности профиля претерпевает разрыв на острой кромке, и замкнутая кривая с таким свойством в плоскости z может соответствовать окружности в плоскости $\zeta = F(z)$ только в том случае, когда преобразование имеет особенность в точке $z = z_1$, в которой расположена острая кромка. В этой точке преобразование должно переводить внешний угол 2π между двумя сторонами кромки в плоскости z в угол π в соответствующей точке $\zeta = \zeta_1$ плоскости ζ, а для этого, как объяснялось в § 6.5 в связи с преобразованием пересекающихся прямых в одну прямую, требуется, чтобы между ζ и z существовала аналитическая зависимость

$$\zeta - \zeta_1 \sim (z - z_1)^{1/2}. \tag{6.7.4}$$

(В случае острой кромки в форме клина с внутренним углом раствора γ степень разности $(z - z_1)$ в правой части будет $(1/2)(1 - \gamma/2\pi)^{-1}$.) Поэтому можно написать

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{f(z)}{(z - z_1)^{1/2}}, \tag{6.7.5}$$

где функция $f(z)$ конечна и отлична от нуля в точке $z = z_1$ и в любой точке поверхности профиля, если только нет второй

острой кромки, и в любой точке плоскости z вне профиля (так как особенности не могут возникать внутри жидкости).

Первый шаг преобразования схематически показан на рис. 6.7.7. На этом этапе положение кривой с точкой возврата (профиля) задано произвольным углом $\pi + 2\beta$ с осью x. Таким образом, аргумент $(z - z_1)$ точек верхней поверхности профиля в окрестности его кромки равен 2β, а аргумент точек нижней поверхности при подходе к ним извне профиля равен $(2\beta + 2\pi)$. Очевидно, что аргумент точек $(\zeta - \zeta_1)$ на окружности в плоскости ζ, соответствующих точкам верхней поверхности профиля вблизи острой кромки, с учетом выражения (6.7.5) должен быть равен $\arg\{f(z_1)\} + \beta$. Мы можем выбрать функцию $f(z_1)$ мнимой, и тогда аргумент разности $(\zeta_1 - \zeta_0)$ (ζ_0 — центр окружности) равен просто $(\pi + \beta)$, как изображено на рис. 6.7.7. Радиус окружности в плоскости ζ, соответствующий профилю в плоскости z, был принят равным c. Кроме того, как было объяснено в § 6.5, зависимость между ζ и z должна быть такой, что $\zeta \approx z$ при $|z| \to \infty$, чтобы в обеих плоскостях скорость на бесконечности была равна $(-U, -V)$.

Хотя это может показаться странным, но всего сказанного вполне достаточно, чтобы определить зависимость циркуляции, требуемой по гипотезе Жуковского, а затем и зависимость подъемной силы профиля от направления скорости жидкости на бесконечности (которое составляет с осью x, как и в § 6.6, угол $(\pi - \alpha)$). Комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра в плоскости ζ с произвольной циркуляцией определяется выражением (6.5.18), и комплексная скорость жидкости в произвольной точке плоскости z равна

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}.$$

На кромке профиля $(z = z_1)$ модуль производной $|d\zeta/dz|$ обращается в бесконечность и, следовательно, обращается в бесконечность и $|dw/dz|$, если только циркуляция не равна такой величине, что $|dw/d\zeta|$ имеет в точке $\zeta = \zeta_1$ нуль достаточно высокого порядка. Таким образом, по гипотезе Жуковского требуется циркуляцию $\varkappa$ выбрать так, чтобы критическая точка находилась в точке $\zeta = \zeta_1$ на поверхности кругового цилиндра в потоке на плоскости ζ, и уравнение, определяющее $\varkappa$, имеет вид

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1} = -(U - iV) + (U + iV)\frac{c^2}{(\zeta_1 - \zeta_0)^2} - \frac{i\varkappa}{2\pi(\zeta_1 - \zeta_0)} = 0.$$

Тогда, поскольку

$$\zeta_1 - \zeta_0 = ce^{i(\pi+\beta)}, \quad U + iV = We^{-i\alpha}, \tag{6.7.6}$$

получаем

$$\varkappa = 4\pi Wc \sin(\alpha + \beta). \tag{6.7.7}$$

Теперь мы можем проверить, что скорость на кромке в плоскости z действительно конечна, если циркуляция $\varkappa$ принимает полученное значение, замечая на основании (6.5.18), что вблизи точки $\zeta = \zeta_1$ комплексный потенциал

$$\frac{dw}{d\zeta} \approx (\zeta - \zeta_1)\left(\frac{d^2w}{d\zeta^2}\right)_{\zeta=\zeta_1} = \frac{2W}{c}\cos(\alpha+\beta)\, e^{-2i\beta}\,(\zeta-\zeta_1).$$

Кроме того, вблизи точки $z = z_1$ имеем

$$\frac{d\zeta}{dz} \sim \frac{f(z_1)}{(z-z_1)^{1/2}} \sim \frac{2\{f(z_1)\}^2}{\zeta-\zeta_1},$$

так что предел

$$\lim_{z\to z_1}\left(\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\right) = \frac{4W}{c}\, e^{-2i\beta}\{f(z_1)\}^2\cos(\alpha+\beta) \qquad (6.7.8)$$

принимает конечное ненулевое значение. Читатель может сам проверить, что конечная скорость на кромке плоской пластины, определяемая по формуле (6.7.2), и скорость, полученная в результате преобразования (6.6.7), находятся в соответствии с общим выражением (6.7.8).

Боковая (или подъемная) сила (на единицу длины по нормали к плоскости движения) профиля с тонкой кормовой кромкой (рис. 6.7.7) равна

$$L = \rho W\varkappa = 4\pi\rho W^2 c\sin(\alpha+\beta). \qquad (6.7.9)$$

Пропорциональность подъемной силы величине ρW^2 можно было ожидать по соображениям размерностей, так как ρ — единственный определяющий параметр, содержащий размерность массы, а W — единственный параметр, содержащий размерность времени (в циркуляцию $\varkappa$ тоже входит время, но она сама по гипотезе Жуковского определяется через W). Кроме того, в правую часть равенства (6.7.9) должна входить величина с размерностью длины, чтобы получилась размерность подъемной силы L, и c остается единственным таким параметром. Нам пока еще неизвестна связь между c и размером профиля, а также между углом β и формой профиля, однако выражение (6.7.9) дает полезную информацию о зависимости подъемной силы L от угла α. Для значений α, таких, что $\sin(\alpha+\beta)$ можно приближенно заменить на $(\alpha+\beta)$ (профили, обычно используемые на практике, отклоняются как раз в пределах нескольких градусов от положения их нулевой подъемной силы), имеем

$$L \sim \alpha + \beta. \qquad (6.7.10)$$

Угол α между направлением движения профиля и фиксированной на профиле линией называется *углом атаки*. Частное значение угла α, при котором $L = 0$, а именно $\alpha = -\beta$, оказывается следствием нашего выбора $f(z_1)$ как чисто мнимой вели-

чины и не имеет никакого значения до тех пор, пока форма профиля не определена. Мы показали в весьма общем виде, что подъемная сила профиля с острой кромкой приблизительно пропорциональна углу поворота профиля, отсчитываемого от положения нулевой подъемной силы; этот результат имеет большое значение, так как он делает возможным непрерывное управление подъемной силой профиля путем изменения его положения.

Измерение подъемной силы части цилиндрического крыла, расположенного между двумя параллельными стенками аэродинамической трубы, показывает, что зависимость (6.7.10) остается справедливой для всех обычных профилей при достаточно малых значениях $(\alpha + \beta)$. Когда $(\alpha + \beta)$ превосходит некоторое критическое значение, которое зависит от формы профиля и для многих обычно используемых форм находится в пределах от 10 до 20°, подъемная сила перестает возрастать, и при дальнейшем увеличении угла $(\alpha + \beta)$ может даже резко уменьшиться, что связано со срывом потока с профиля. Объяснение указанного нарушения соотношений (6.7.9) и (6.7.10) кроется в поведении пограничного слоя на верхней или «подсасывающей» части профиля. Когда тонкое тело наклоняется на любой малый угол к набегающему потоку, имеется явно выраженный максимум скорости на верхней поверхности приподнятого носика профиля (величину этого максимума можно уменьшить, придавая носику профиля утолщенную и плавно скругленную форму, но только в узких пределах, поскольку профиль должен оставаться тонким), а следующее за этим замедление жидкости вне пограничного слоя приводит к его отрыву. Линии тока при обтекании профиля со срывом потока представлены на фото 5.11.1, *б* и обсуждались ранее, когда рассматривалось влияние пограничного слоя на течение, вызванное движущимися телами.

Профили Жуковского

Для получения более подробных данных о форме профилей, получаемых из окружности с помощью конформного отображения, и о распределении давления на них мы должны рассмотреть преобразования частного вида. В качестве примера вкратце рассмотрим преобразование Жуковского, уже применявшееся для определения течения, вызванного движущимися эллиптическими цилиндрами, имея в виду его относительную простоту и историческую значимость. Более полное описание профилей, полученных этим и другими преобразованиями, имеется во многих учебниках [1]).

[1]) См., в частности, Глауэрт Г., Основы теории крыла и винта, 1931; более современное изложение теории профиля имеется в книге: Thwaites B. (ed.), Incompressible Aerodynamics, Oxford University Press, 1960 [см. также: Голубев В. В., Лекции по теории крыла, Гостехиздат, М., 1949.— *Ред.*].

Преобразование Жуковского определяется функцией

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}, \tag{6.7.11}$$

в которой λ — действительная постоянная с размерностью длины и которая имеет особенности при

$$\zeta = \lambda \ (z = 2\lambda) \quad \text{и} \quad \zeta = -\lambda \ (z = -2\lambda).$$

Так как равенство (6.7.11) можно написать в виде

$$z \mp 2\lambda = (\zeta \mp \lambda)^2 \frac{1}{\zeta}, \tag{6.7.12}$$

то преобразование вблизи обеих особых точек имеет общий вид (6.7.4), и любую из двух особых точек можно использовать для построения профиля с точкой возврата в плоскости z, исходя из кривой с конечной кривизной в плоскости ζ. Можно было бы использовать обе точки и получить профиль с двумя точками возврата наподобие плоской пластины, однако практически используемый профиль должен иметь только одну острую кромку. Выберем особенность в точке $\zeta = -\lambda$ для того, чтобы получить профиль с гладкой передней кромкой в направлении положительной оси x, и, таким образом, в использованных ранее в этом параграфе обозначениях имеем $\zeta_1 = -\lambda$, $z_1 = -2\lambda$. Тогда

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - \lambda^2} = \frac{1}{2} + \frac{z/2}{(z^2 - 4\lambda^2)^{1/2}},$$

и поскольку функция $f(z)$, определенная в равенстве (6.7.5), равна произведению $(2\lambda + z)^{1/2}$ на $d\zeta/dz$, то значение

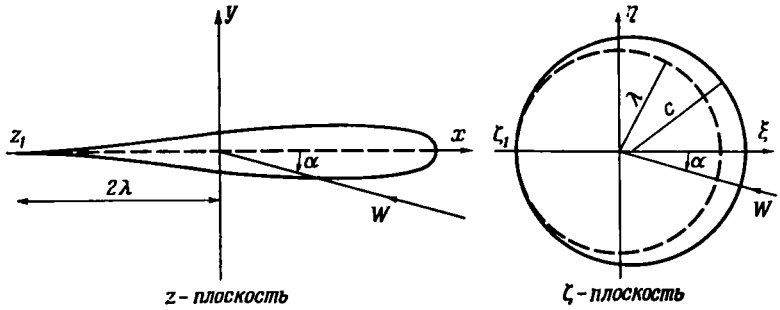
$$f(z_1) = \frac{1}{2} i\lambda^{1/2}$$

является мнимой величиной, что и было предположено ранее.

Окружность радиуса c в плоскости ζ должна проходить через точку

$$\zeta = \zeta_1 = -\lambda,$$

соответствующую кормовой кромке профиля, и обходить другую особую точку $\zeta = \lambda$ (в предельном случае окружность может пройти через эту точку, тогда на профиле будет две острые кромки). Предположим сначала, что центр окружности расположен на оси ξ в точке $\zeta = c - \lambda$, где $c \geqslant \lambda$; тогда в силу симметрии преобразования относительно оси x следует, что соответствующий профиль симметричен относительно оси x и что $\beta = 0$. Если $c = \lambda$, то соответствующий профиль в плоскости z представляет собой плоскую пластину длиной 4λ, тогда как в случае $c > \lambda$ мы



Р и с. 6.7.8. Преобразования круга в пластину (штриховая линия) и в симметричный профиль Жуковского (сплошная линия).

получим профиль, который касается пластины в общей с ней заостренной кормовой кромке (рис. 6.7.8) и всюду охватывает ее. Кроме того, если

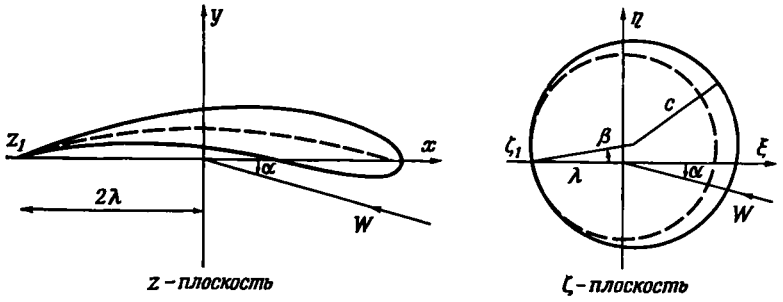
$$\frac{c-\lambda}{\lambda} \ll 1,$$

то профиль не может заметно отличаться от плоской пластины и его можно считать тонким. Теперь остается воспользоваться формулой (6.7.11), чтобы вычислить координаты точек на профиле, соответствующие при известной величине отношения $(c - \lambda)/\lambda$ заданным точкам окружности; типичный симметричный профиль Жуковского, полученный таким путем, приведен на рис. 6.7.8. Длина профиля в направлении потока, называемая *хордой профиля*, равна

$$2\lambda + (z)|_{\zeta=2c-\lambda} = \lambda + 2c + \frac{\lambda^2}{2c-\lambda} \approx 4\lambda \left\{1 + \left(\frac{c-\lambda}{\lambda}\right)^2\right\};$$

последнее равенство справедливо при $(c - \lambda)/\lambda \ll 1$. Общее выражение для максимальной толщины профиля не получается столь простым, но если $(c - \lambda)/\lambda \ll 1$, то можно найти, что она приближенно равна $3\sqrt{3}\,(c - \lambda)$ и располагается на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки. Когда $(c - \lambda)/\lambda = 0{,}1$, отношение максимальной толщины к хорде имеет величину около 0,13, и так как на практике это значение редко превышается, то очевидно, что обычно хорда достаточно точно характеризуется величиной 4λ. При этом подъемная сила тонкого симметричного профиля, которую удобнее всего выразить через коэффициент подъемной силы C_L, аналогичный коэффициенту лобового сопротивления C_D (см. § 5.11), определяется по формуле (см. (6.7.9))

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho W^2 \times (\text{Хорда})} \approx \frac{2\pi c}{\lambda}\sin\alpha \approx 2\pi \sin\alpha \left[1 + 0{,}77\ \frac{\text{Толщина}}{\text{Хорда}}\right]. \tag{6.7.13}$$



Р и с. 6.7.9. Преобразования круга в дугу окружности (штриховая линия) и в изогнутый профиль Жуковского (сплошная линия).

Иногда целесообразно использовать профиль, на котором начало срыва при больших углах атаки задерживается и для которого максимально возможный коэффициент подъемной силы больше, чем для симметричного профиля упомянутого выше типа. Затупление носика профиля позволяет только частично достичь эту цель, и оказывается, что более эффективен *изгиб профиля*, т. е. искривление его средней линии, выпуклостью вверх, так чтобы передняя кромка была направлена приближенно навстречу потоку, а основная часть профиля наклонена к нему. Преобразование Жуковского можно использовать и для построения изогнутых профилей, выбирая положение центра окружности в плоскости ζ вне оси ξ. Предельный случай тонкого профиля с двумя точками возврата и всюду с нулевой толщиной, наподобие плоской пластины, получается путем расположения центра круга на оси η при $\xi = 0$, $\eta = \lambda \operatorname{tg} \beta$, при этом угол β имеет тот же самый смысл, что и ранее. Радиус окружности (см. рис. 6.7.9) равен тогда $c = \lambda \sec \beta$. Далее, из (6.7.12) следует, что

$$\arg(z - 2\lambda) - \arg(z + 2\lambda) = 2\{\arg(\zeta - \lambda) - \arg(\zeta + \lambda)\};$$

правая часть написанного равенства постоянна и равна $2(\pi/2 - \beta)$ для точек, расположенных на дуге окружности выше оси ξ, и постоянна и равна $2(-\pi/2 - \beta)$ для точек на дуге ниже оси ξ; поэтому в плоскости z соответствующие этим двум дугам кривые должны быть двумя совпадающими дугами окружности с радиусом $2\lambda \csc 2\beta$.

Подъемная сила, действующая на эту дугу окружности, при циркуляции, обеспечивающей конечную скорость на кормовой кромке, находится по формуле (6.7.9). Хорда профиля в точности равна 4λ, так что

$$C_L = 2\pi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \qquad (6.7.14)$$

Теперь можно получить изогнутый профиль с конечной толщиной, комбинируя описанные выше операции, т. е. выбирая

Движение системы точечных вихрей

Полученные выше интегральные инварианты принимают более простую форму, когда завихренность сосредоточена в отдельных точках. Предположим, что в некоторый момент времени в жидкости имеются точечные вихри с интенсивностями $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, расположенные в точках

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_n,y_n)$$

соответственно, а всюду, кроме этих точек, завихренность равна нулю. Интенсивности вихрей остаются постоянными, а положение их изменяется так, что величины X, Y и D остаются постоянными, причем

$$X\sum_i \varkappa_i = \sum_i \varkappa_i x_i, \quad Y\sum_i \varkappa_i = \sum_i \varkappa_i y_i, \tag{7.3.10}$$

$$D^2\sum_i \varkappa_i = \sum_i \varkappa_i\{(x_i-X)^2+(y_i-Y)^2\}; \tag{7.3.11}$$

суммирование здесь производится по i от 1 до n.

Выражение для функции тока (7.3.2) принимает вид

$$\psi(x,\ y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_i \varkappa_i \ln\{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\}. \tag{7.3.12}$$

Скорость движения вихря интенсивности $\varkappa_j$ равна скорости жидкости в точке $(x_j,\ y_j)$, обусловленной действием всех *остальных* вихрей, поскольку точечный вихрь самоиндуцированной скорости не имеет. Следовательно,

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i(\neq j)} \frac{\varkappa_i(y_j-y_i)}{r_{ij}^2}, \quad \frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{i(\neq j)} \frac{\varkappa_i(x_j-x_i)}{r_{ij}^2} \tag{7.3.13}$$

для всех j от 1 до n, где

$$r_{ij}^2 = (x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2.$$

Существует еще один инвариант, определяемый формулой (7.3.9), но его нужно видоизменить, поскольку изолированный точечный вихрь имеет бесконечную кинетическую энергию. Поступая, как и прежде, рассмотрим полную кинетическую энергию T жидкости, ограниченной снаружи окружностями большого радиуса R, а изнутри окружностями малого радиуса ε с центрами в каждом точечном вихре; имеем

$$T + \frac{\rho}{4\pi}\sum_{\substack{i\\(i\neq j)}}\sum_j \varkappa_i\varkappa_j \ln r_{ij} + \frac{\rho}{4\pi}\left(\sum_i \varkappa_i^2\right)\ln\varepsilon - \frac{\rho}{4\pi}\left(\sum_i \varkappa_i\right)^2 \ln R \to 0$$

при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Таким образом, величина

$$W = -\frac{\rho}{4\pi}\sum_{\substack{i\\(i\neq j)}}\sum_j \varkappa_i\varkappa_j \ln r_{ij} \tag{7.3.14}$$

и возрастание лобового сопротивления при углах атаки, близких к 9°, указывает на начало отрыва пограничного слоя от верхней поверхности профиля. При более высоких значениях α поток срывается с профиля.

Для профиля Жуковского момент нормальных сил относительно начала координат находим по формуле (6.6.28), в которой $\varkappa$ определяется выражением (6.7.7), коэффициент B_1 представляет собой комплексное число, которое в данном случае равно λ^2 (см. (6.5.19) и (6.7.11)), и

$$\xi_0 = c\cos\beta - \lambda,\ \eta_0 = c\sin\beta,\ U = W\cos\alpha,\ V = -W\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$M_0 = 2\pi\rho W^2\{\lambda^2\sin 2\alpha + c^2\sin 2(\alpha+\beta) - 2\lambda c\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)\}, \tag{6.7.15}$$

или в предположении, что все параметры α, β и отношение $(c-\lambda)/\lambda$ малы по сравнению с единицей (в этом случае циркуляция влияет незначительно), имеем

$$M_0 \approx 4\pi\rho W^2\lambda^2\alpha. \tag{6.7.16}$$

Для практических целей удобнее момент относительно передней кромки профиля, приближенно определяемый равенством

$$M_{\text{п. кр}} = M_0 - 2\lambda L.$$

Общепринято выражать момент профиля через безразмерный коэффициент

$$(C_M)_{\text{п. кр}} = \frac{M_{\text{п. кр}}}{(1/2)\rho W^2\times(\text{Хорда})^2} \approx (C_M)_0 - \frac{C_L}{2} \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\pi\alpha - \pi(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}\pi(\alpha+2\beta). \tag{6.7.17}$$

Было установлено, что эта формула находится в соответствии с наблюдаемыми значениями момента.

Очевидно, что подъемную силу на профиле можно считать приложенной в точке, называемой *центром давления* и расположенной на некотором расстоянии от передней кромки, равном (в долях хорды)

$$-\frac{(C_M)_{\text{п. кр}}}{C_L} \approx \frac{\alpha+2\beta}{4(\alpha+\beta)}. \tag{6.7.18}$$

Основная конструктивная опора для профиля должна быть расположена вблизи центра давления, и поэтому желательно, чтобы положение центра давления не менялось бы сильно в обычном рабочем диапазоне значений угла атаки α. В случае симметричных профилей Жуковского, для которых $\beta = 0$, центр давления теоретически остается в точке, расположенной на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки.

6.8. Осесимметричное безвихревое течение, вызванное движением тела

Теория функций комплексного переменного дает мощные общие методы определения безвихревого течения, вызванного движущимся телом в двумерном поле. К сожалению, в соответствующей трехмерной задаче нет никакого аналога теории функций комплексного переменного и приходится иметь дело с довольно ограниченным числом специальных методов. Теоретический анализ менее труден в частном случае безвихревого течения, вызванного осесимметричным твердом телом, движущимся в направлении своей оси без вращения, поскольку тогда все поле течения будет осесимметричным и здесь мы рассмотрим только этот случай.

Общие сведения

В § 2.9 отмечалось, что два фундаментальных решения уравнения Лапласа в трехмерном поле имеют вид $r^n S_n$ и $r^{-n-1}S_n$, где $r = |\mathbf{x}|$, а S_n — поверхностная сферическая функция степени n (положительное целое число), определяемая как

$$S_n = r^{n+1}\frac{\partial^n (1/r)}{\partial x_i\, \partial x_j \ldots}.$$

Если поле течения осесимметрично, то в выражение потенциала скорости могут входить только осесимметричные сферические функции, т. е. только те функции, для которых все индексы $i, j, \ldots$ имеют значение, соответствующее направлению оси симметрии. Таким образом, если ось x совпадает с осью симметрии течения, подходящие сферические функции степени n имеют вид

$$S_n = r^{n+1}\frac{\partial^n (1/r)}{\partial x^n}. \tag{6.8.1}$$

Это выражение представляет собой функцию только величины $\mu = \cos\theta = x/r$, и оно пропорционально полиному Лежандра $P_n(\mu)$ (или функции Лежандра, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра *целого* порядка n) в том виде, в котором он обычно определяется [1]). Применяется также другое выражение для $P_n(\mu)$ через производные по μ (называемое формулой Родригеса)

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{n!}\, r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n. \tag{6.8.2}$$

В частных случаях формула (6.8.2) дает

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2-1). \tag{6.8.3}$$

[1]) См. Джеффрис Г., Свирлс Б., Методы математической физики, т. 1—3, «Мир», 1971 [а также: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3,4.2, «Наука», М., 1967.— *Ред.*].

Во многих случаях осесимметричного течения в качестве независимой переменной удобно использовать функцию тока Стокса ψ. Как показано в § 2.2, компоненты скорости в сферических координатах r и θ таковы:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (6.8.4)$$

Таким образом, выражения для функции тока ψ, соответствующие объемным сферическим функциям, когда

$$\varphi = r^n P_n(\mu) \quad \text{или} \quad \varphi = r^{-n-1} P_n(\mu),$$

имеют вид

$$\psi = \frac{1}{n+1} r^{n+1}(1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}, \qquad -\frac{1}{n} r^{-n}(1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}. \quad (6.8.5)$$

Фундаментальное решение другого вида, которое иногда может быть полезно, получается из уравнения Лапласа для потенциала скорости в цилиндрических координатах (x, $\sigma = \sqrt{r^2 - x^2}$ и азимутальный угол) в предположении, что

$$\varphi = e^{\mp kx} F(\sigma).$$

Функция F удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка, которое имеет конечное при $\sigma = 0$ решение $J_0(k\sigma)$ в обычных обозначениях. Путем сравнения двух возможных выражений для компонент скорости как производных от φ или ψ легко найти, что двум решениям

$$\varphi = e^{\mp kx} J_0(k\sigma) \quad (6.8.6)$$

соответствуют выражения функции тока

$$\psi = \pm \sigma e^{\mp kx} J_0'(k\sigma), \qquad \psi = \mp \sigma e^{\mp kx} J_1(k\sigma). \quad (6.8.7)$$

Связь между решениями (6.8.6) и объемными сферическими функциями, а также использование их для построения безвихревых течений, имеющих физический смысл, читатель найдет в более исчерпывающих источниках [1]).

Все приведенные выражения ψ представляют собой решения дифференциального уравнения относительно функции тока ψ, полученного для безвихревого течения. Условие отсутствия вихрей требует, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} = 0;$$

после подстановки в него выражений u_r и u_θ из (6.8.4) получим дифференциальное уравнение для функции тока ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = 0. \quad (6.8.8)$$

[1]) См. Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М.— Л., 1947.

В цилиндрических координатах x, σ аналогично находим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}=0. \tag{6.8.9}$$

Интересна близость по форме этих уравнений и уравнений, которым удовлетворяет функция φ, а именно [1])

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}=0 \tag{6.8.10}$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=0, \tag{6.8.11}$$

хотя в осесимметричном течении функции φ и ψ имеют совершенно разный смысл, а также и разную размерность.

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция φ, когда жидкость покоится на бесконечности, состоят в том, как установлено ранее, что

$$\varphi\to C=\text{const}\quad\text{при}\quad r\to\infty$$

и на поверхности обтекаемого тела

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{U},$$

где $\mathbf{U}$ — мгновенная скорость тела, параллельная его оси симметрии. Когда тело занимает односвязную область пространства, этим граничным условиям может удовлетворять одно-единственное распределение скорости безвихревого течения жидкости.

Нужно также определить граничные условия для функции тока ψ, чтобы использовать их в тех случаях, когда в качестве основного уравнения движения берется уравнение (6.8.8) или (6.8.9). Очевидно, что если жидкость покоится на бесконечности, то внешнее граничное условие, согласно (6.8.4), имеет вид

$$\frac{1}{r}|\nabla\psi|\to 0\quad\text{при}\quad r\to\infty.$$

На поверхности тела нормальная компонента скорости $\mathbf{u}$, записанная в виде производной от функции тока ψ, должна быть равна $\mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$. Это последнее условие может быть представлено в удобной аналитической форме, если заметить, что во второй системе координат, движущейся с постоянной скоростью, равной скорости $\mathbf{U}$ в рассматриваемый момент времени, тело неподвижно (возможно, только мгновенно), и линия пересечения поверхности тела и осевой плоскости представляет собой линию тока, на которой функция тока ψ постоянна и может быть принята равной нулю. Поля скоростей относительно этих двух систем координат отличаются лишь на постоянную скорость $\mathbf{U}$, параллельную оси тела, и две

[1]) См. выражения для оператора $\nabla^2\varphi$ в сферических или цилиндрических координатах в приложении 2.

соответствующие функции тока отличаются на член $\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$ или на $\frac{1}{2}U\sigma^2$. Следовательно, внутреннее граничное условие на поверхности тела, которому должна удовлетворять функция ψ в системе координат, фиксированной в жидкости на бесконечности, имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \quad \text{или} \quad \psi = \frac{1}{2}U\sigma^2. \tag{6.8.12}$$

Метод построения полей течения подсказывается формой условия (6.8.12). Если мы заменим в условии (6.8.12) функцию ψ любой функцией от r и θ (или от x и σ), удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.8.8) (или (6.8.9)), а также внешнему граничному условию, то получим соотношение между r и θ, определяющее меридианные кривые семейства поверхностей, каждая из которых, будучи твердой, могла бы создавать течение с принятой функцией тока при движении со скоростью U параллельно своей оси. Однако не все решения уравнения (6.8.8), используемые таким образом, дают замкнутые поверхности, которые можно рассматривать как твердые тела.

Движущаяся сфера

В простом случае сферы радиуса a, движущейся со скоростью $\mathbf{U}$ в направлении $\theta = 0$, внутренним граничным условием является

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = U\cos\theta \quad \text{при} \quad r = a.$$

Очевидно, что это условие может выполняться для всех θ, если φ пропорционально осесимметричной сферической функции или полиному Лежандра первого порядка (см. (6.8.2) и (6.8.3)), и что решение

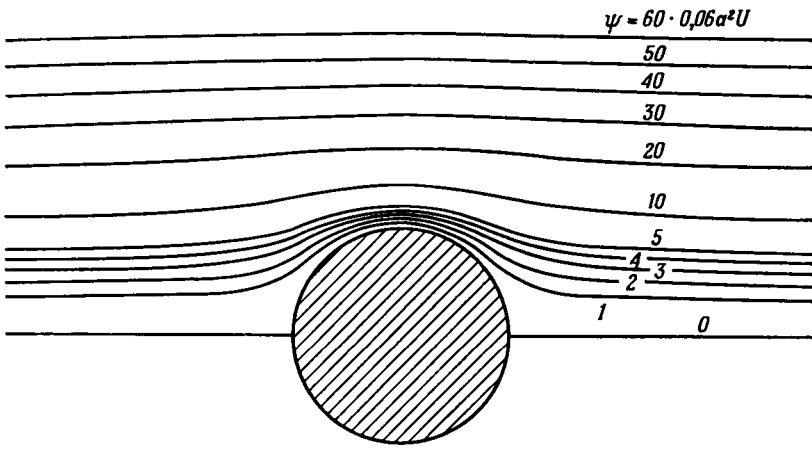
$$\varphi = -\frac{1}{2}Ua^3\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{6.8.13}$$

удовлетворяет внутреннему и внешнему граничным условиям и согласуется с решением, найденным в § 2.9 другим путем. Это решение применимо в момент времени, когда центр сферы находится в начале координат, а в любой другой момент, когда сфера находится в точке $\mathbf{x}_0$,

$$\varphi = -\frac{1}{2}a^3\frac{\mathbf{U}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3}. \tag{6.8.14}$$

Функция тока ψ, соответствующая потенциалу скорости (6.8.13), определяется выражением

$$\psi = \frac{1}{2}Ua^3\frac{1-\mu^2}{r}\frac{dP_1(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2}Ua^3\frac{\sin^2\theta}{r}. \tag{6.8.15}$$



Р и с. 6.8.1. Линии тока в осевой плоскости безвихревого обтекания неподвижной сферы в потоке с постоянной скоростью на бесконечности.

Это выражение совпадает с функцией тока диполя источников, расположенного в начале координат и имеющего ось, параллельную направлению $\theta = 0$ (см. (2.5.5)). Функция тока течения в системе координат, движущейся вместе со сферой, получается путем добавления слагаемого $-\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$ в правой части равенства (6.8.15):

$$\psi = -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right); \qquad (6.8.16)$$

соответствующие этому течению линии тока представлены на рис. 6.8.1. Продольная симметрия спектра линий тока не воспроизводится на практике, когда сфера движется с постоянной скоростью (ср. с фото 5.11.7), однако, как уже объяснялось ранее, она отражает реальные свойства течения, возникающего сразу после начала движения сферы из состояния покоя, или же течения, обусловленного быстрым колебательным движением сферы относительно стационарного среднего положения.

Кинетическая энергия жидкости, обусловленная движением сферы, находится с использованием решения (6.8.13):

$$T = -\frac{1}{2}\rho U_i\int(\varphi)_{r=a}\,n_i\,dA = \frac{1}{3}\pi\rho a^3U^2. \qquad (6.8.17)$$

Следовательно, тензорные коэффициенты α_{ij}, определяемые равенствами (6.4.15) и (6.4.16), таковы:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}. \qquad (6.8.18)$$

Из формулы (6.4.28) следует, что реакция на ускорение сферы

направлена параллельно (и противоположно) вектору $\dot{\mathbf{U}}$, независимо от направления самой скорости $\mathbf{U}$, и что влияние жидкости на движение сферы под действием приложенных к ней сил оказывается таким же (без учета силы плавучести), как если бы масса сферы увеличилась на половину массы вытесненной жидкости.

Обтекание сферы жидкостью встречается во многих практических задачах о движении твердых или жидких сфер в газообразных средах либо твердых сфер или сферических пузырей в жидкости, и приведенные выше формулы имеют широкое применение, несмотря на ограничения, связанные с предположением о безвихревом течении. Отметим вкратце существо некоторых приложений, касающихся свободно движущихся сфер.

Рассмотрим сначала уравнение движения сферы массы M, находящейся в безвихревом движении со скоростью $\mathbf{U}$ в безграничной жидкости под действием приложенной силы $\mathbf{X}$ и с учетом силы тяжести, действующей непосредственно на сферу и косвенно — на силу плавучести, а именно

$$M\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{X} - \frac{1}{2} M_0 \dot{\mathbf{U}} + M\mathbf{g} - M_0\mathbf{g}, \tag{6.8.19}$$

где $M_0 = (4/3)\pi a^3\rho$ — масса жидкости, вытесненной сферой. Особый интерес представляет движение сферы под влиянием одной только силы тяжести, при котором имеем

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{M - M_0}{M + M_0/2}\,\mathbf{g}. \tag{6.8.20}$$

Эта формула справедлива в ограниченный период времени с момента начала ускоренного движения сферы из состояния покоя в неподвижной жидкости. При $M \gg M_0$ жидкость оказывает малое влияние на начальное ускорение сферы; но если $M \ll M_0$, то

$$\dot{\mathbf{U}} \approx -2\mathbf{g}. \tag{6.8.21}$$

Таким образом, сферический газовый пузырек в воде движется из состояния покоя с направленным вверх ускорением $2\mathbf{g}$, и так как в этом случае отрыв пограничного слоя, по-видимому, не происходит (в жидкости без примесей), то пузырек сохраняет это ускорение до тех пор, пока он не деформируется или пока скорость не станет сравнимой с предельной скоростью, рассмотренной в § 5.14.

Представляют интерес задачи, в которых сфера приводится в движение относительно жидкости при прохождении через жидкость звуковой волны. Предположим, что радиус сферы мал по сравнению с длиной звуковой волны и что жидкость в окрестности сферы при ее отсутствии имеет скорость $\mathbf{V}$. Ускорение этой жидкости (также при отсутствии сферы) равно приближенно $\dot{\mathbf{V}}$, причем для звуковой волны конвективный член $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}$ прене-

брежимо мал. Выберем теперь систему координат, движущуюся со скоростью $\mathbf{V}$ и ускорением $\dot{\mathbf{V}}$, учитывая, что в уравнении движения жидкости появится сила инерции $-\dot{\mathbf{V}}$, и что она приведет к силе плавучести $M_0\dot{\mathbf{V}}$, как объяснялось в § 6.4. При безвихревом движении жидкости уравнение свободного движения сферы в отсутствие других приложенных сил и без учета силы тяжести записывается в виде

$$M\dot{\mathbf{U}} = -\frac{1}{2}M_0(\dot{\mathbf{U}}-\dot{\mathbf{V}}) + M_0\dot{\mathbf{V}}, \tag{6.8.22}$$

где $\mathbf{U}$ — скорость сферы в системе координат, движущейся без ускорения; это, конечно, просто частный случай общего уравнения (6.4.30). Интегрирование уравнения (6.8.22) дает

$$\mathbf{U} = \frac{(3/2)M_0}{M+M_0/2}\mathbf{V}, \tag{6.8.23}$$

причем постоянная интегрирования принята равной нулю в предположении, что не происходит дрейфа сферы через жидкость. Выражение (6.8.23) применимо к колебаниям малой сферы, взвешенной в жидкости, через которую проходит звуковая волна, если частота колебаний достаточно велика, чтобы толщина завихренного пограничного слоя была малой (см. § 5.13). Если плотность сферы больше плотности жидкости, то амплитуда колебаний сферы будет меньше, чем амплитуда колебаний окружающей ее жидкости; если сфера легче жидкости, то она будет совершать колебания с большей амплитудой, чем жидкость.

Один из способов визуализации движения частиц воды в большом баке со свободной поверхностью, через которую выстреливается снаряд, заключается в предварительном распределении по всему объему жидкости малых пузырьков воздуха и в фотографировании процесса их импульсивного движения. Пузырьки воздуха получаются на фотографии в виде полосок, направление которых совпадает с направлением локального смещения воды, и выражение (6.8.23) показывает, что длина полосок должна быть приблизительно в три раза больше смещения частиц воды.

Дальнейшее приложение изложенных выше идей связано с задачей о сближении и слиянии газовых пузырьков в жидкости, когда они совершают колебания в одной фазе. Каждый колеблющийся пузырек порождает в окружающей его жидкости ускоренное движение в радиальном направлении, и два соседних пузырька влияют на движение друг друга.

В данном случае нам нужна более общая форма уравнения (6.8.22), в которой учитывается изменение присоединенной массы

M_0, а именно

$$M\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d\{M_0(\mathbf{U}-\mathbf{V})\}}{dt} + M_0\frac{d\mathbf{V}}{dt}. \qquad (6.8.24)$$

В случае пузырька газа в жидкости $M \ll M_0$, поэтому

$$\dot{\mathbf{U}} \approx 3\dot{\mathbf{V}} - (\mathbf{U}-\mathbf{V})\frac{\dot{M}_0}{M}.$$

Таким образом, если скорость $\mathbf{V}$ периодична при нулевом среднем значении, а M_0 периодична с относительно малой пульсационной частью, то пульсация $\mathbf{U}$ приближенно равна $3\mathbf{V}$ и среднее значение ускорения пузырька $\dot{\mathbf{U}}$ за один цикл равно величине

$$-2\,(\mathbf{V}\dot{M}_0)_{\text{средн}}/(M_0)_{\text{средн}},$$

которая может быть отличной от нуля. В частности, если два сферических пузырька, расположенных на расстоянии r друг от друга, вытесняют массы жидкости плотности ρ, равные соответственно

$$\rho(v_1 + v_1' \sin nt) \quad \text{и} \quad \rho(v_2 + v_2' \sin nt),$$

где $v_1' \ll v_1$ и $v_2' \ll v_2$, то первый пузырек в месте расположения второго вызывает приблизительно однородную скорость $mv_1' \cos(nt)/4\pi r^2$, и поэтому среднее ускорение второго пузырька вдоль соединяющей их прямой равно

$$-n^2 v_1' v_2'/4\pi r^2 v_2, \qquad (6.8.25)$$

причем отрицательный знак указывает, что ускорение направлено к первому пузырьку. Такое притяжение между двумя пузырьками (или между одним пузырьком и плоской границей) приводит в конце концов к установившейся скорости дрейфа каждого пузырька, поскольку силы вязкости препятствуют их перемещению. Сила притяжения обычно очень мала, хотя благодаря ее появлению можно использовать ультразвуковые колебания жидкости для очистки жидкости от малых пузырьков газа.

Эллипсоиды вращения

Простейшим осесимметричным телом, более сложным по форме, чем сфера, является эллипсоид вращения. Первый шаг, который оказывается полезным в данном случае, состоит в преобразовании независимых переменных (x, σ) в основных уравнениях движения (6.8.9) или (6.8.11) к эллиптическим координатам (ξ, η) так, чтобы координата ξ оставалась постоянной на эллипсе в плоскости, проходящей через ось симметрии, и на любом софокусном эллипсе,

а координата η монотонно изменялась от 0 до 2π на любом из этих эллипсов $\xi = \text{const}$. Соответствие между «плоскостями» (x, σ) и (ξ, η) *конформно* (см. § 6.5, 6.6) и, хотя несколько неожиданно, что общие свойства конформных отображений играют некоторую роль в этом анализе, мы примем, что зависимость между (x, σ) и (ξ, η) имеет вид

$$x + i\sigma = f(\xi + i\eta). \tag{6.8.26}$$

Чтобы получить уравнение движения в координатах (ξ, η), мы воспользуемся выражениями компонент скоростей в осевой плоскости через функции φ и ψ:

$$u_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{\sigma h_\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \qquad u_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{\sigma h_\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}. \tag{6.8.27}$$

Здесь $h_\xi\delta\xi$ и $h_\eta\delta\eta$ суть длины линейных элементов, соответствующих малым изменениям только переменных ξ и η соответственно, и можно по обычным формулам определить

$$h_\xi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right)^2, \qquad h_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right)^2;$$

кроме того, так как $(x + i\sigma)$ представляет собой аналитическую функцию от $(\xi + i\eta)$, то из условий Коши — Римана для переменных (x, σ) и (ξ, η) следует, что $h_\xi = h_\eta$. Если теперь переменные (ξ, η) и азимутальный угол (для которого соответствующий параметр h равен σ) рассматривать в качестве новых ортогональных криволинейных координат, то выражения операторов $\nabla\cdot\mathbf{u}$ и $\nabla\times\mathbf{u}$ в этих координатах (см. приложение 2) совместно с равенствами (6.8.27) дают уравнения движения для φ и ψ соответственно. Функция тока ψ оказывается более удобной, чем φ, так как она удовлетворяет более простому соотношению на внутренней границе. Приравнивая нулю азимутальную компоненту завихренности, получаем

$$\frac{\partial(h_\eta u_\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial(h_\xi u_\xi)}{\partial\eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{6.8.28}$$

где переменная σ связана с переменными ξ и η формулой преобразования (6.8.26).

В случае *вытянутого* эллипсоида, который получается путем вращения эллипса с полуосями $a > b$ вокруг его большой оси, это преобразование имеет вид

$$x + i\sigma = \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{ch}\,(\xi + i\eta),$$

причем постоянное значение $\xi = \xi_0$ на эллипсоиде определяется (см. (6.6.13)) уравнением

$$e^{\xi_0} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Условие (6.8.12), которому должна удовлетворять функция ψ на внутренней границе, заключается в том, что при $\xi = \xi_0$ функция тока

$$\psi = \frac{1}{2} U (a^2 - b^2) \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta.$$

Это наводит на мысль, что решение уравнения (6.8.28) можно искать в форме

$$\psi = F(\xi) \sin^2 \eta. \tag{6.8.29}$$

После подстановки этой функции ψ в уравнение (6.8.28) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $F(\xi)$; путем его интегрирования и выбора двух постоянных на основании внутреннего и внешнего граничных условий можно получить искомое решение

$$\psi = \frac{\frac{1}{2} U b^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \eta}{a (a^2 - b^2)^{1/2} + b^2 \ln \left\{ \frac{a - (a^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right\}} (\operatorname{ch} \xi + \operatorname{sh}^2 \xi \ln \operatorname{th} \xi/2). \tag{6.8.30}$$

Чтобы получить течение, вызванное *сплюснутым* эллипсоидом вращения, движущимся вдоль оси симметрии, нужно начать с преобразования к эллиптическим координатам, определяемого функцией

$$x + i\sigma = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} (\xi + i\eta);$$

координата ξ в данном случае постоянна и равна ξ_0 на поверхности эллипсоида, полученного вращением эллипса с полуосями a и b соответственно относительно его малой оси b. Выражение (6.8.29) для функции тока снова дает решение, соответствующее (поскольку речь идет о зависимости от η) внутреннему граничному условию, и, действуя таким же способом, как и раньше, мы получаем искомое решение

$$\psi = \frac{(1/2) U a^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \eta}{b (a^2 - b^2)^{1/2} - a^2 \operatorname{arc\,cos}\, b/a} (\operatorname{sh} \xi - \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{arc\,ctg} \operatorname{sh} \xi). \tag{6.8.31}$$

Теперь можно без труда найти потенциалы скорости, пользуясь любым из двух соотношений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Однако мы не будем приводить их здесь; очевидно, что потенциал скорости φ пропорционален $\cos \eta$.

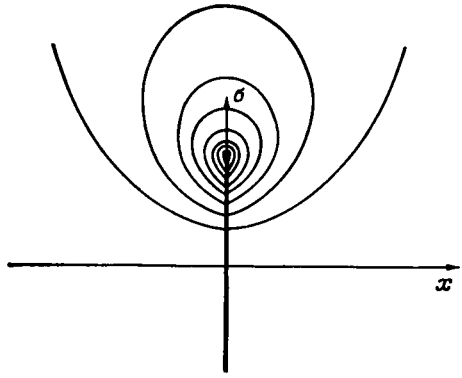


Рис. 6.8.2. Линии тока в осевой плоскости (приращения функции тока ψ одинаковы) в случае безвихревого течения, вызванного круговым диском, движущимся по нормали к своей плоскости.

Когда $(a-b)/a \to 0$ (что эквивалентно $\xi_0 \to \infty$), оба эллипсоида становятся сферами радиуса a, и можно показать, что оба решения (6.8.30) и (6.8.31) сводятся к уже определенной ранее функции тока (6.8.15) для сферы. Другой предельный случай решения (6.8.31) при $b = 0$ ($\xi_0 = 0$) дает безвихревое течение, вызванное круговым диском радиуса a, движущимся по нормали к своей плоскости. В этом случае функция тока

$$\psi = -\frac{a^2 U}{\pi}(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{ch}^2\xi \operatorname{arc\,ctg}\operatorname{sh}\xi)\sin^2\eta, \qquad (6.8.32)$$

а линии тока изображены на рис. 6.8.2. Потенциал скорости на поверхности диска, найденный указанным выше способом, сводится к

$$\varphi = -\frac{2aU}{\pi}\cos\eta,$$

и поэтому кинетическая энергия жидкости

$$T = -\frac{1}{2}\rho U_i \int (\varphi)_{\xi=0}\, n_i\, dA =$$

$$= -\pi\rho U \int_0^a \{(\varphi)_{\substack{\xi=0 \\ 0<\eta<\pi/2}} - (\varphi)_{\substack{\xi=0 \\ \pi/2<\eta<\pi}}\}\,\sigma\, d\sigma =$$

$$= 4\rho a^3 U^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\eta \sin\eta\, d\eta = \frac{4}{3}\rho a^3 U^2.$$

Таким образом, присоединенная масса диска в направлении его движения равна $(8/3)\,\rho a^3$. Скорость жидкости бесконечна на кромке диска, и сильное уменьшение величины скорости после обтекания

кромки делает это безвихревое течение малопригодным для приложения к реальным течениям; однако решения для безвихревого течения имеют обыкновение неожиданно появляться при разных обстоятельствах, и в § 6.10 мы увидим, что это частное решение применимо к движению, возникающему при ударе плоского круглого диска по поверхности воды.

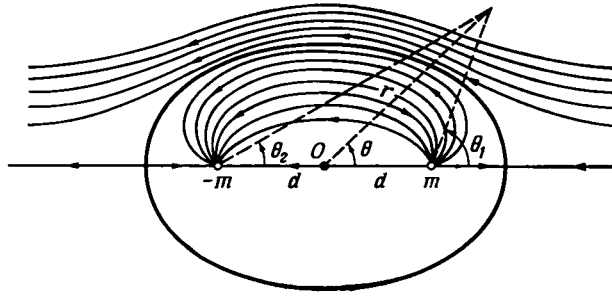
Тела, образуемые источниками на оси симметрии

Свойства особенностей типа точечного источника, рассмотренные в § 2.5, могут быть использованы для построения осесимметричных течений частного вида, которые могли бы вызываться движущимся телом, хотя форму тела нельзя выбирать произвольно (за исключением тонких тел, см. § 6.9). Основа метода состоит в следующем. Если некоторое число точечных источников и стоков (возможно также их непрерывное распределение) расположено на оси симметрии в жидкости, покоящейся на бесконечности, а их суммарная интенсивность равна нулю, то все линии тока, выходящие из источников, оканчиваются в стоках. В некоторых обстоятельствах (которые не так просто сформулировать в общем виде) это свойство сохраняется также тогда, когда на течение от источников и стоков наложено равномерное течение, параллельное оси. Тогда в осевой плоскости суммарного течения будет одна замкнутая линия тока, которая окружает источники и стоки и которая отделяет линии тока, выходящие из источников, от линий тока, приходящих из бесконечности, где скорость постоянна; можно считать, что эта линия тока образует поверхность неподвижного твердого тела вращения, обтекаемого однородным потоком, а распределение скоростей можно определить как результирующую индуцированных скоростей всех источников и стоков и однородного потока.

Если в простейшем случае поместить на оси один источник интенсивности m и один сток интенсивности $-m$ (источник вверх по потоку от стока), то очевидно, что никакая из линий тока, приходящая из бесконечности, не попадет в сток, а разделяющая линия тока будет замкнутой. Функция тока течения от источника интенсивности m в начале координат есть $-(m/4\pi)\cos\theta$. Следовательно, для источника интенсивности m при $r = d$, $\theta = 0$, для стока интенсивности $-m$ при $r = d$, $\theta = \pi$ и для однородного потока со скоростью U в направлении $\theta = \pi$ (при этом в системе отсчета, связанной с жидкостью на бесконечности, тело движется в направлении $\theta = 0$) получается

$$\psi = -\frac{m}{4\pi}\cos\theta_1 + \frac{m}{4\pi}\cos\theta_2 - \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta. \qquad (6.8.33)$$

Принятые обозначения указаны на рис. 6.8.3, на котором изображены также линии тока для одного частного случая. Замкнутая



Р и с. 6.8.3. Линии тока течения в осевой плоскости, возникающего в результате наложения течений от точечного источника, от точечного стока равной интенсивности и однородного потока.

линия тока, которая изображает поверхность тела, имеет другую ветвь на оси симметрии вверх и вниз по потоку от тела, где $\psi = 0$, поэтому профиль тела определяется уравнением

$$\cos\theta_2 - \cos\theta_1 = \frac{2\pi U d^2}{m}\frac{r^2}{d^2}\sin^2\theta. \qquad (6.8.34)$$

Итак, получено семейство возможных форм тел, известных как *овоиды Рэнкина* (Рэнкин (1871)), соответствующих различным значениям безразмерного параметра Ud^2/m. По мере того как параметр Ud^2/m убывает от больших до малых по сравнению с единицей значений, форма тела плавно меняется от длинной узкой сигарообразной формы до несколько сплюснутой сферы. Когда $Ud^2/m \ll \ll 1$, поверхность тела приближается к сфере радиуса $(md/\pi U)^{1/3}$, который велик по сравнению с d; совместное влияние источника и стока в точках вне поверхности тела приближенно такое же, как диполя источников (см. § 2.5) интенсивности $2md$ в начале координат, расположенного вдоль оси симметрии, о чем уже можно было догадаться при сравнении выражений (2.5.3) и (2.9.26).

Некоторые общие результаты можно установить в случаях, в которых наличие тела в потоке можно заменить непрерывным распределением источников вдоль части оси симметрии. Предположим, что интенсивность источника на отрезке оси от x до $x + \delta x$ равна $m(x)\delta x$ и $m(x) = 0$ вне определенной конечной области значений x. Тогда потенциал скорости течения есть

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m(x')\,dx'}{(r^2 + x'^2 - 2rx'\cos\theta)^{1/2}}, \qquad (6.8.35)$$

его же можно записать на основании известных свойств полиномов Лежандра в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n r^{-n-1} P_n(\mu). \qquad (6.8.36)$$

Коэффициенты ряда K_n определяются интегралом

$$K_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^n m(x)\,dx.$$

Из выражения (6.8.2) следует, что этот ряд есть частный случай для осесимметричного течения из общего разложения (6.4.1) по сферическим функциям. Коэффициент K_n ряда (6.8.36) равен величине $(-1)^n n!$, умноженной на тензорный коэффициент n-го порядка $c_{ij},\ldots$ в разложении (6.4.1), при этом все индексы $i, j,\ldots$ принимают одинаковое значение, например 1, что соответствует направлению оси симметрии. Первым ненулевым коэффициентом является K_1, так как поток массы через поверхность равен нулю, а

$$c_1 = -K_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} xm(x)\,dx. \qquad (6.8.37)$$

Теперь можно использовать выражения кинетической энергии жидкости и присоединенной массы, полученные в § 6.4, и вычислить эти величины для поступательного движения осесимметричного тела в зависимости от коэффициента c_1.

Полубесконечные тела

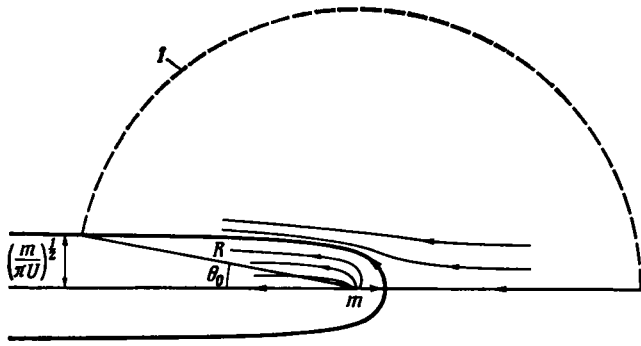
Когда источник и сток на рис. 6.8.3 расположены достаточно далеко друг от друга (точнее говоря, когда $Ud^2/m \gg 1$), линии тока всюду приближенно параллельны оси симметрии, исключая области вблизи источника и стока; соответствующая поверхность тела, определяемая уравнением (6.8.34), аппроксимирует цилиндр со скругленными концами. Определим более подробно течение вблизи передней части тела (это единственная область установившегося обтекания тела с продольной симметрией, которая является безвихревой на практике), предполагая, что источник расположен на бесконечности вниз по потоку и тело имеет полубесконечную длину. Целесообразно совместить начало координат с источником, и тогда

$$\psi = -\frac{m}{4\pi}\cos\theta - \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta; \qquad (6.8.38)$$

соответственно уравнение, определяющее контур тела, принимает вид

$$\frac{m}{2\pi U}(1-\cos\theta) = r^2\sin^2\theta.$$

Изменение параметров m и U приводит только к изменению масштаба течения в целом, и единственная форма тела изображена на рис. 6.8.4. Полный объемный поток m от источника на достаточ-



Р и с. 6.8.4. Обтекание полубесконечного тела, полученного путем наложения течения от точечного источника и однородного потока.
1 — контрольная поверхность.

ном удалении от него пересекает любое поперечное сечение тела со скоростью U, так что радиус цилиндрической части тела равен $(m/\pi U)^{1/2}$.

Очевидно, что радиус цилиндрической части других полубесконечных тел, получаемых из распределения источников и стоков на участке оси симметрии конечной длины с суммарной интенсивностью источников $m > 0$, будет равен $(m/\pi U)^{1/2}$.

Так как в передней части рассмотренных полубесконечных тел существует критическая точка, то можно было бы подумать, что на них в установившемся течении действует ненулевая сила сопротивления. На самом деле это не так, поскольку скорость жидкости на скруглениях тела превосходит U, и соответствующее падение давления компенсирует его увеличение вблизи критической точки. Независимо от формы закругленной носовой части тела силы давления уравновешиваются, что можно показать с помощью уравнения количества движения в интегральной форме.

В качестве контрольной поверхности выберем часть сферы радиуса R с центром, совпадающим с точечным источником, который находится в жидкости (см. рис. 6.8.4), а также участок поверхности тела от его носовой части до пересечения со сферой. Полная сила, действующая в осевом направлении на окруженную контрольной поверхностью жидкость за счет давления на ее сферической части, равна

$$-\int_0^{\pi-\theta_0} 2\pi R^2 \left\{p_0+\frac{1}{2}\rho U^2-\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right)\right\}\cos\theta\sin\theta\,d\theta,$$

где u, v — компоненты скорости жидкости на сфере, соответственно параллельные и перпендикулярные оси, p_0 — давление в жидкости далеко от тела, θ_0 — половина угла раствора конуса с вершиной в источнике, опирающегося на окружность, по которой сфера пере-

секает тело, $R \sin \theta_0 = (m/\pi U)^{1/2}$. Теперь, если m — суммарная интенсивность источников на оси, которые порождают разделяющую линию тока (поверхность тела), то при больших R имеем

$$u \approx -U + \frac{m}{4\pi R^2} \cos\theta, \quad v \approx \frac{m}{4\pi R^2} \sin\theta,$$

и в пределе при $R \to \infty$ интересующая нас сила равна

$$-p_0 \frac{m}{U} - \frac{1}{3} \rho m U.$$

Аналогично полный поток количества движения в направлении оси тела через контрольную поверхность есть

$$\rho \int_0^{\pi-\theta_0} u\,(u\cos\theta + v\sin\theta)\, 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \to -\frac{1}{3}\rho m U \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Таким образом, сила, действующая на окруженную контрольной поверхностью жидкость, должна быть равна $p_0\,(m/U)$ на части поверхности, совпадающей с поверхностью тела. Жидкость действует на тело в направлении своей скорости на бесконечности, а величина силы равна произведению давления p_0 на площадь проекции тела на нормальную к его оси плоскость. Эта результирующая сила представляет собой просто нескомпенсированное внешнее давление на одну сторону тела и не имеет никакого динамического значения. Коль скоро речь идет о динамических эффектах, никакой силы со стороны жидкости на полубесконечное тело не действует. Поскольку установившееся течение реальной жидкости около конечных осесимметричных тел при большом числе Рейнольдса ближе к безвихревому вблизи передней половины тела, чем у его кормовой части, то полученный результат, вероятно, более важен, чем вывод о том, что сопротивление конечного тела в установившемся безвихревом потоке равно нулю.

Упражнение

Предполагая, что в решении сферические координаты r и θ разделяются, покажите, что осесимметричное безвихревое течение вблизи вершины конуса имеет потенциал скорости $\varphi \sim r^m P_m(\mu)$, где $\mu = \cos\theta$, $P_m(\mu)$ — функция Лежандра первого рода, а показатель степени m определяется из уравнения

$$\frac{dP_m(\mu)}{d\mu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu = -\cos\theta_0,$$

где θ_0 — угол между осью конуса и одной из его образующих ($1 \leqslant m \leqslant 2$).

6.9. Приближенные результаты для тонких тел

В случае тел, длина которых велика по сравнению их шириной и которые движутся через жидкость, покоящуюся на бесконечности, существует простой приближенный метод определения соот-

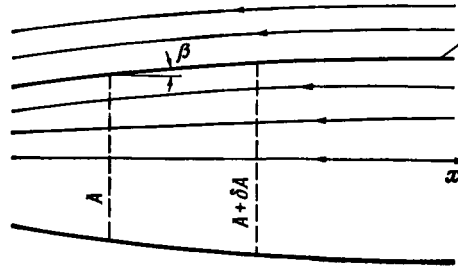


Рис. 6.9.1. Осесимметричное безвихревое обтекание тонкого тела, представляемое распределением источников на его оси.
1 — поверхность тела.

ветствующего безвихревого поля течения. Этот метод, известный как теория тонкого тела, распространен при решении многих других задач и широко используется в аэронавтике и в других областях, касающихся движения профилированных тел в жидкости. Основа этого метода в излагаемой здесь простой форме состоит в том, что для тонкого тела можно подобрать такое распределение особенностей течения (источников и стоков) вдоль некоторой линии, что безвихревое течение, связанное с этими особенностями, в сочетании с равномерным потоком удовлетворяет приближенно условию нулевой нормальной компоненты скорости на поверхности тела заданной формы. В случае тонких тел вращения этот метод является естественным продолжением содержания § 6.8 о телах вращения, образованных путем размещения источников вдоль оси симметрии, поэтому мы рассмотрим сначала этот случай.

Тонкие тела вращения

Выберем, как и в § 6.8, ось x, совпадающую с осью симметрии тела, и предположим сначала, что неподвижное тело обтекается однородным потоком со скоростью U на бесконечности в отрицательном направлении оси x (это соответствует движению тела в положительном направлении оси x в жидкости, покоящейся на бесконечности). Пусть площадь поперечного сечения тела в сечении с координатой x равна A (рис. 6.9.1). Будем считать, что касательная к меридианной кривой поверхности тела наклонена под малым углом β к его оси и что, следовательно, площадь поперечного сечения A — медленно изменяющаяся функция от x; это предположение более сильное, чем простое требование малости отношения максимальной толщины тела к его общей длине, но оно обычно рассматривается как ограничение, вытекающее из самого определения «тонкого тела».

Линии тока как течения вне тела, так и фиктивного течения внутри тела, связанного с заменой его особенностями, будут почти

параллельны оси, как и поверхностная линия тока. Далее, уравнение сохранения массы в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial(\sigma u_\sigma)}{\partial \sigma}=0,$$

где u_x, u_σ — приращения компонент постоянной скорости $(-U, 0)$, вызванные наличием в потоке тела; следовательно, если производные $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial o$ представляют собой величины одного порядка (как это можно ожидать в поле, описываемом уравнением Лапласа), то изменения u_x на всем протяжении поля течения имеют такой же порядок, как изменения u_σ. Компонента u_σ скорости вблизи поверхности тела имеет порядок $|\beta(-U+u_x)|$, следовательно, обе компоненты возмущенного течения u_x, u_σ — малые порядка βU, и осевая компонента скорости в первом приближении может быть всюду принята равной $-U$.

Из сказанного следует, что объемный поток жидкости в сечении тела с координатой x приближенно равен $-UA$, а в соседнем сечении с координатой $x+\delta x$ он равен $U(A+\delta x dA/dx)$. Жидкость не пересекает разделяющую линию тока, представляющую поверхность тела (рис. 6.9.1), поэтому разность потоков

$$-U\,(dA/dx)\,\delta x$$

должна быть компенсирована источниками на оси тела с интенсивностью $-UdA/dx$ на единицу длины. Таким образом, когда форма тонкого тела задана, можно определить плотность распределения источников (вместе с равномерным потоком порождающих течение с разделяющей линией тока, приближенно совпадающей с поверхностью тела), исходя из которой можно определить поле течения в целом. Данное приближение почти параллельного течения неточно вблизи скругленных передней и кормовой частей тела конечной длины, однако эта неточность имеет лишь локальный характер, так как суммарная интенсивность источников на оси между сечением x и передней частью тела, согласно сформулированному правилу, равна UA, и это как раз такая интенсивность, которая нужна для получения правильного поперечного смещения набегающего потока в сечении x.

Следует отметить, что теперь из выражения (6.8.37) получается особенно простое выражение интенсивности диполя, создающего асимптотически (на больших расстояниях от начала координат) такое же поле течения, что и тело. Эта интенсивность диполя равна

$$4\pi c_1=-U\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{dA}{dx}\,dx=U\int_{-\infty}^{\infty}A\,dx=UV_0; \qquad (6.9.1)$$

отсюда видно, что для любого тонкого тела, имеющего объем V и движущегося в направлении его оси симметрии $\theta=0$ со скоро-

стью U, потенциал скорости при больших значениях r есть

$$\varphi \sim -\frac{UV_0}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}. \tag{6.9.2}$$

К сожалению, соответствующее приближение кинетической энергии жидкости, полученное на основании ее выражения (6.4.17), равно нулю, что, конечно, слишком грубо для практического использования!

Очевидно, что точность подобной теории (теории тонкого тела) зависит от пользы, которую она приносит, и от конкретных параметров течения, которые используются теорией для оценки. В качестве частного подхода к вопросу о ее обычной точности можно сравнить величину коэффициента c_1 по (6.9.1) с ее точным значением, полученным из полного решения задачи о потенциале скорости φ в случае вытянутого эллипсоида вращения, движущегося параллельно своей оси. Функция тока течения в этом случае определяется выражением (6.8.30), и для нас представляет интерес форма этого поля течения на больших расстояниях от начала координат. Из определения используемых в данном случае эллиптических координат следует, что при $r \to \infty$

$$\eta \sim \theta \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(a^2-b^2)^{1/2}e^{\xi} \sim r,$$

так что

$$\left(\operatorname{ch}\xi + \operatorname{sh}^2\xi \ln \operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right)\sin^2\eta \sim \frac{2}{3}(a^2-b^2)^{1/2}\frac{\sin^2\theta}{r}.$$

Следовательно, точное выражение для соответствующего асимптотического потенциала скорости φ имеет вид

$$\varphi \sim -c_1\frac{\cos\theta}{r^2},$$

где

$$c_1 = \frac{(1/3)\,Ub^2(a^2-b^2)^{3/2}}{a(a^2-b^2)^{1/2} + b^2\ln\dfrac{a-(a^2-b^2)^{1/2}}{b}}. \tag{6.9.3}$$

Когда $b = a$, величина c_1, определяемая по формуле (6.9.3), равна $^1/_2Ua^3$, как и в случае сферы; приближенное выражение (6.9.1) для c_1, в данном случае равное $^1/_3Ua^3$, показывает, что даже при отсутствии ограничения тонкого тела ошибка уже не такая большая. Когда относительная толщина $\gamma = b/a$ мала по сравнению с единицей, коэффициент (6.9.3) равен

$$c_1 \approx \frac{1}{3}Ua^3\gamma^2(1-\gamma^2\ln\gamma),$$

в то время как приближенная формула (6.9.1) для вытянутого эллипсоида дает

$$c_1 = \frac{1}{3}Ua^3\gamma^2.$$

Таким образом, относительная ошибка для тонкого тела равна $\gamma^2 \ln \gamma$.

Подобного вида приближения можно применить и с целью учета влияния «бокового ветра» на тонкое осесимметричное тело. Предположим, что скорость движущегося тела в жидкости, покоящейся на бесконечности относительно прямоугольной системы координат, имеет компоненты $(U, V, 0)$, из которых первая параллельна оси тела. Результирующее безвихревое течение относительно системы координат, связанной с телом, можно рассматривать как наложение течений, создаваемых двумя равномерными потоками, одного с компонентами скорости $(-U, 0, 0)$, к которому применимы полученные выше результаты, и другого — чисто поперечного потока с компонентами скорости $(0, -V, 0)$. Так как поперечное сечение тела только медленно изменяется вдоль оси, то течение, вызванное этим потоком вблизи сечения x, приближенно такое же, как и в случае кругового цилиндра с площадью поперечного сечения A в потоке со скоростью V, нормальной к его образующим (и с нулевой циркуляцией), т. е. оно приближенно такое же, как течение, создаваемое двумерным диполем интенсивности $2VA$ в центре круга и с осью, направленной против направления потока со скоростью V (см. замечания после выражения (6.4.6)). Таким образом, наличие тела в поперечном потоке приближенно изображается распределением на оси тела диполей векторной интенсивности $(0, 2VA, 0)$ на единицу длины. Если форма тела задана, то теперь можно рассчитать все поле течения.

Полная интенсивность диполей, изображающих тело в поперечном потоке, имеет компоненты $(0, 2VV_0, 0)$, где V_0, как и выше, — объем тела. Сопоставляя этот результат с равенством (6.9.1), мы видим, что интенсивность диполя, который обладает таким же асимптотическим полем течения, как осесимметричное тонкое тело, движущееся со скоростью $(U, V, 0)$ через жидкость, покоящуюся на бесконечности, равна

$$4\pi \mathbf{c} = V_0 (U, 2V, 0). \tag{6.9.4}$$

Соответствующая приближенная величина кинетической энергии жидкости, полученная из общего выражения (6.4.17), равна $(1/2)\,\rho V_0 V^2$; она совпадает, как и следовало ожидать, исходя из характера применяемого приближения, с кинетической энергией жидкости между двумя плоскостями поперечных сечений кругового цилиндра произвольного радиуса, движущегося со скоростью V в направлении нормали к его оси, причем расстояние между этими плоскостями такое, что они ограничивают цилиндр объема V_0.

Тонкие тела в двух измерениях

Если тело в двумерном поле симметрично относительно центральной линии и имеет малое отношение толщины к длине, то без-

вихревое течение, вызванное движением тела в направлении его центральной линии, можно снова приближенно моделировать путем распределения источников вдоль этой линии. Поверхность тела определяется в данном случае кривой $y = \pm (1/2)\, y_0(x)$, где, как и ранее, функция $y_0(x)$ считается слабо меняющейся функцией от x. Тогда проведенное выше рассуждение показывает, что кривая $y = \mp (1/2)\, y_0(x)$ будет в первом приближении линией тока в течении, создаваемом потоком, скорость которого на бесконечности имеет компоненты $(-U, 0)$, и распределением источников на центральной линии с интенсивностью $-U dy_0/dx$ на единицу ее длины.

Однако, когда симметричное тело не движется в направлении своей центральной линии или когда тело несимметрично, необходим другой подход. Если касательная к контуру тела остается приближенно параллельной направлению его движения, то влияние конечной толщины тела все еще сводится к вытеснению элементов жидкости по нормали к поверхности тела без заметного изменения их скорости относительно тела, и, следовательно, его можно, как и выше, приближенно представить распределением источников, причем функция $y_0(x)$ дает толщину тела в сечении x. Однако нам нужно найти также некоторый способ представления того факта, что в течении относительно тела линии тока по обе его стороны не только разделены расстоянием $y_0(x)$, но и наклонены к направлению потока на бесконечности под малыми углами, сумма которых не равна нулю.

Не существует никакой специальной особенности течения, локальная интенсивность которой создавала бы определенное направление линий тока, однако распределение вдоль центральной линии точечных вихрей заставляет линии тока пересекать эту линию под ненулевым углом. В § 2.6 мы видели, что локальная интенсивность вихревой пелены (которая в данном рассмотрении двумерного течения означает непрерывное распределение вихрей вдоль линии в плоскости (x, y) с завихренностью, направленной всюду по нормали к этой плоскости) равна по величине локальному скачку касательной компоненты скорости при переходе через пелену. Это свидетельствует о том, что мы правильно выбираем вихревую пелену в качестве подходящей особенности, так как любое нарушение зеркальной симметрии течения относительно прямой, проведенной вдоль тела, должно сопровождаться разностью между скоростями жидкости в двух соседних точках на разных сторонах тела.

Эти соображения относительно способа представления наклона линий тока, совпадающих с контуром тела, посредством распределения особенностей оказываются чрезвычайно полезными в двумерной теории профиля, и поэтому мы проведем анализ применительно к этой теории.

Тонкие профили в двух измерениях

Типичный тонкий профиль характеризуется как толщиной, так и определенной изогнутостью, подобно профилю, показанному на рис. 6.7.9, и касательная к его поверхности всюду, за исключением области вблизи передней части тела, составляет малый угол с направлением набегающего потока. Острую кормовую кромку разместим в начале координат, а переднюю кромку L, определяемую в точке профиля, наиболее удаленной от кормовой кромки, расположим на оси x в точке $x = c$ (отрезок c называется хордой профиля). Тогда уравнения верхней и нижней поверхностей профиля можно написать в виде

$$y = y_1(x) \pm \frac{1}{2} y_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant c.$$

Влияние ненулевой толщины $y_0(x)$ на поток можно учесть отдельно путем распределения источников, как уже объяснялось выше.

Поэтому нам надо сейчас рассмотреть безвихревое течение, создаваемое криволинейной бесконечно тонкой дужкой $y = y_1(x)$, помещенной неподвижно в потоке, скорость которого в бесконечности имеет компоненты $(-W\cos\alpha,\ W\sin\alpha)$, где α — малый угол атаки профиля (рис. 6.9.2). Поток не проходит через кривую $y = y_1(x)$, и вообще на ней существует разрыв касательной компоненты скорости; это значит, что дужка в точности эквивалентна вихревой пелене, совпадающей с кривой $y = y_1(x)$, интенсивность которой Γ распределена таким образом, чтобы нормальная компонента скорости обращалась в нуль при $y = y_1(x)$.

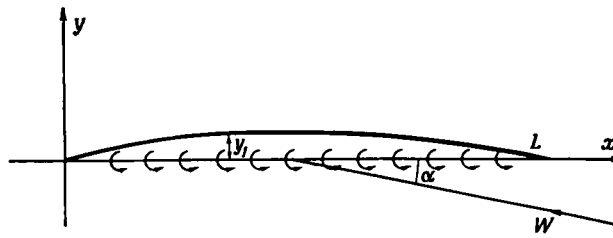
С точностью до величин первого порядка малости относительно возмущения скорости (u, v), обусловленного присутствием в потоке дужки, условие непротекания через нее можно написать в виде

$$\left(\frac{v + \alpha W}{W}\right)_{y = y_1(x)} = -\frac{dy_1}{dx}.$$

Кроме того, мы воспользуемся тем, что $|y_1| \ll c$, и предположим с целью оценки возмущения скорости (u, v), что вихревая пелена расположена на оси x в интервале $0 \leqslant x \leqslant c$, а не на линии $y = y_1(x)$. Каждый элемент δx оси x ведет себя как точечный вихрь интенсивности $\Gamma(x)\,\delta x$, и приближенное соотношение, из которого можно определить $\Gamma(x)$ при заданной форме профиля, записывается так:

$$\frac{1}{2\pi W} \int_0^c \frac{\Gamma(x')\,dx'}{x - x'} = -\alpha - \frac{dy_1}{dx}. \tag{6.9.5}$$

Практический недостаток такого рассмотрения заключается в том, что интенсивность особенности не определяется локальной формой профиля, а должна находиться как решение интегрального уравнения (6.9.5), связанного с профилем в целом.



Р и с. 6.9.2. Представление бесконечно тонкого профиля (дужки) плоской вихревой пеленой.

Нельзя ожидать, что уравнение (6.9.5) имеет единственное решение относительно $\Gamma(x)$, так как течение около любого тела в двумерном поле не определено до тех пор, пока не известна циркуляция вокруг тела. В § 6.7 мы видели, что в случае тел с острой кормовой кромкой, подобных профилям, влияние вязкости на поверхности профиля при установившемся движении заставляет циркуляцию принимать такое значение, при котором два потока жидкости с обеих сторон профиля плавно сходят с его кормовой кромки, не огибая ее (гипотеза Жуковского). В этих условиях скорость жидкости этих двух потоков вблизи кормовой кромки одинакова, поэтому интенсивность вихревой пелены, заменяющей профиль, равна там нулю. Следовательно, интегральное уравнение (6.9.5) относительно $\Gamma(x)$ нужно решать с условием

$$\Gamma(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

С другой стороны, нельзя применить еще какое-нибудь условие, аналогичное гипотезе Жуковского, на передней кромке, и в общем случае на острой передней кромке скорость бесконечно велика. Используемые на практике профили имеют скругленную переднюю кромку, однако у нашего тонкого профиля в виде дужки передняя кромка тоже острая, и появление бесконечной скорости на ней становится неизбежным; впрочем анализ от этого не страдает, так как интегральное уравнение (6.9.5) содержит только малую компоненту скорости, нормальную к хорде профиля. Вблизи острой передней кромки в точке $x = c$ (в виде точки возврата) скорость на поверхности профиля изменяется как $(1/2)A_0Wc^{1/2}(c-x)^{-1/2}$ на одной стороне и как $-(1/2)A_0Wc^{1/2}(c-x)^{-1/2}$ на его другой стороне (см. § 6.5), где A_0 — постоянная, а множители W и $c^{1/2}$ включены для того, чтобы сделать коэффициент A_0 безразмерным; поэтому вблизи $x = c$ предполагается, что

$$\Gamma(x) \sim A_0Wc^{1/2}(c-x)^{1/2}.$$

В действительности можно пойти еще дальше и считать, что

$$\Gamma(x) - A_0W\,c^{1/2}(c-x)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to c, \qquad (6.9.6)$$

так как различие скоростей на обеих сторонах профиля вблизи

передней кромки исчезает, когда из них вычитается локальное решение, соответствующее течению вокруг передней кромки (в этом можно убедиться на основе формулы (6.7.2) для скорости на поверхности плоской пластины).

Решение интегрального уравнения (6.9.5) можно получить, хотя и не в замкнутом виде, представляя циркуляцию $\Gamma(x)$ рядом Фурье по переменной θ, связанной с переменной x соотношением

$$x = {}^1/_2\, c\,(1 - \cos\theta). \tag{6.9.7}$$

Угол θ изменяется от 0 до π вдоль хорды профиля. Предпочтительнее работать с конечной неизвестной функцией, поэтому мы рассмотрим не $\Gamma(x)$, а модифицированную функцию

$$\Gamma(x) - A_0 W \left(\frac{x}{c-x}\right)^{1/2},$$

которая обладает удобным свойством обращения в нуль при $x = 0$ ($\theta = 0$) и при $x = c$ ($\theta = \pi$). Теперь мы можем предположить, без какой-либо потери общности, что это модифицированное распределение — нечетная функция от θ с периодом 2π, так что

$$\Gamma = A_0 W \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + W \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \tag{6.9.8}$$

Написанная функция удовлетворяет требуемому условию плавного обтекания кормовой кромки.

Подстановка ряда (6.9.8) в уравнение (6.9.5) дает

$$\alpha + \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(A_0 \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} + \sum_1^{\infty} A_n \sin n\theta'\right)\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_0(-I_0 + I_1) + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,(-I_{n-1} + I_{n+1}),$$

где принято обозначение табличного интеграла [1])

$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta'\,d\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} = \pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi.$$

[1]) Интеграл I_n рассматривается в смысле так называемого главного значения, определяемого предельным переходом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{\theta-\varepsilon} + \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{\pi}\right)$, так что бесконечно большие значения подинтегральной функции в первом и втором слагаемых при $\theta = \theta'$ взаимно уничтожаются. При $n = 0$ и $0 < \theta < \pi$ имеем

$$I_0 = \frac{1}{\sin\theta}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln\frac{\sin(\theta+\theta')/2}{\sin(\theta-\theta')/2}\Bigg|_{\theta'=0}^{\theta-\varepsilon} + \ln\frac{\sin(\theta'+\theta)/2}{\sin(\theta'-\theta)/2}\Bigg|_{\theta'=\theta+\varepsilon}^{\pi}\right\} = 0.$$

Кроме того, $I_1 = \pi + I_0\cos\theta = \pi$, и рекуррентная формула $I_{n+1} + I_{n-1} = 2I_n\cos\theta$ ($n \geqslant 1$) дает приведенный в тексте результат.

Следовательно,

$$\alpha+\frac{dy_1}{dx}=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta, \tag{6.9.9}$$

и поэтому коэффициенты A_0, A_1, ... явно выражаются через форму профиля [1])

$$A_0=2\alpha+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dy_1}{dx}\,d\theta, \quad A_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dy_1}{dx}\cos n\theta\,d\theta \quad (n>0). \tag{6.9.10}$$

Характерной особенностью течения, представляющей наибольший интерес, является полная циркуляция вокруг движущегося профиля и соответствующая ей подъемная сила. Для коэффициента подъемной силы получается выражение

$$C_L=\frac{\text{Подъемная сила}}{(1/2)\,\rho W^2c}=\frac{2}{Wc^2}\int_0^{c}\Gamma(x)\,dx=$$

$$=\pi\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right)=2\pi\alpha+2\int_0^{\pi}\frac{dy_1}{dx}(1+\cos\theta)\,d\theta. \tag{6.9.11}$$

Чтобы вычислить момент силы, действующей на профиль, надо рассмотреть элемент δx вихревой пелены, который создает подъемную силу $\rho W\Gamma\delta x$. Тогда безразмерный коэффициент момента относительно передней кромки

$$(C_M)_{\text{передн. кр}}=\frac{\text{Момент}}{(1/2)\,\rho W^2c^2}=-\frac{2}{Wc^2}\int_0^{c}(c-x)\,\Gamma(x)\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left(A_0+A_1-\frac{A_2}{2}\right)=-\frac{\pi\alpha}{2}-\int_0^{\pi}\frac{dy_1}{dx}\cos\theta\,(1+\cos\theta)\,d\theta. \tag{6.9.12}$$

---

1) Автор, следуя Глауэрту (1931), ищет функцию $\Gamma(x)$ в форме ряда (6.9.8). Иначе решение интегрального уравнения (6.9.5) может быть получено непосредственно в квадратурах. Такое решение, ограниченное при $x=0$, имеет вид

$$\Gamma(x)=\frac{2W}{\pi}\sqrt{\frac{x}{c-x}}\int_0^{c}\frac{\alpha+dy/dx'}{x-x'}\sqrt{\frac{c-x'}{x'}}\,dx'=$$

$$=\frac{4W}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\int_0^{\pi}\frac{\alpha+dy_1/dx'}{\cos\theta'-\cos\theta}\cos^2\frac{\theta'}{2}\,d\theta',$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения (см. Л. И. Седов (1966)).— *Прим. ред.*

Таким образом, для многих практических целей достаточно численно определить только один или два интеграла, зависящих от формы профиля.

Точность этих результатов для тонких профилей может быть проверена путем сравнения с точными результатами из § 6.7 для профилей Жуковского, полученными методом конформного отображения. Для симметричного профиля Жуковского, основа которого представляет собой плоскую пластину, было установлено, что коэффициент подъемной силы (см. (6.7.13) — результат не точный, но вполне пригодный для сравнения) равен

$$2\pi \sin\alpha \left(1 + 0{,}77\,\frac{\text{Толщина}}{\text{Хорда}}\right),$$

в то время как выражение (6.9.11) из теории тонкого профиля дает его значение $2\pi\alpha$, не зависящее от толщины. Для профиля с нулевой толщиной в виде дуги окружности из множества профилей Жуковского с изогнутой средней линией, рассмотренных в § 6.7, было найдено, что коэффициент подъемной силы (см. (6.7.14)) равен

$$2\pi\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta},$$

где 2β — угол между хордой профиля и касательной к кормовой кромке; в то же время из выражения (6.9.11) после небольших вычислений для $\beta \ll 1$ получается

$$C_L = 2\pi\alpha + 2\sin 2\beta \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(1-\sin^2 2\beta\cos^2\theta)^{1/2}} \approx$$

$$\approx 2\pi(\alpha+\beta) + 3\pi\beta^3.$$

Итак, в каждом случае главный член получается точным.

6.10. Импульсивное движение жидкости

В некоторых обстоятельствах ускорения границ и жидкости имеют большую величину в течение очень короткого промежутка времени, и мы можем рассмотреть предельный случай импульсивного (ударного) изменения, как это делается в задачах механики твердого тела. Массовые силы большой величины непосредственно на жидкость не действуют, однако мгновенное изменение в движении границ будет создавать бесконечно большие градиенты давле-

ния, которые в свою очередь порождают мгновенное изменение скорости каждой точки жидкости. Ни скорость границы, ни скорость жидкости не становятся большими во время такого изменения, поэтому члены в уравнении движения жидкости, содержащие только скорости или их пространственные градиенты, пренебрежимо малы по сравнению с членом $\partial \mathbf{u}/\partial t$. Таким образом, приближенная форма уравнения движения (без ограничения на вязкость жидкости!) в процессе мгновенного изменения имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{6.10.1}$$

Эти два остающихся члена уравнения имеют большую величину в течение короткого промежутка времени, и зависимость между скоростью жидкости $\mathbf{u}'$ сразу перед началом такого изменения и скоростью $\mathbf{u}''$ в той же самой точке сразу после изменения определяется уравнением

$$\mathbf{u}'' - \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho}\nabla \Pi, \tag{6.10.2}$$

где величина

$$\Pi = \int p\, dt \tag{6.10.3}$$

может быть названа *импульсом давления*. Давление p отлично от нуля перед и после импульсивного изменения, однако интервал интегрирования в (6.10.3) мал (он равен продолжительности внезапного изменения), и поэтому предполагается, что начальная и конечная величины давления p существенного влияния на значение интеграла не оказывают.

Важное свойство движения, описываемого уравнением (6.10.2), состоит в том, что если распределение скорости в жидкости до начала действия импульса было безвихревым с потенциалом скорости φ', то после импульса оно оказывается также безвихревым (как и следовало ожидать, исходя из того, что условия теоремы Кельвина о циркуляции удовлетворяются в ходе процесса внезапного изменения) с потенциалом скорости

$$\varphi'' = \varphi' - \frac{1}{\rho}\Pi. \tag{6.10.4}$$

Это соотношение позволяет нам дать физическое объяснение потенциала скорости. Потенциал скорости φ данного распределения скорости безвихревого течения можно рассматривать как увеличенный в $(-1/\rho)$ раз импульс давления, требуемый для возникновения данного движения из состояния покоя, или, иначе говоря, как увеличенный в $(1/\rho)$ раз импульс давления, требуемый, чтобы перевести это движение в состояние покоя. Никакое вихревое дви-

жение не может возникать из состояния покоя или переходить в состояние покоя под влиянием импульса давления.

Такая же интерпретация потенциала скорости следует из выражения полной кинетической энергии жидкости через интегралы по границам. Мы можем считать, что данное безвихревое движение возникло из состояния покоя под действием импульсивного движения границ; в таком случае средняя (между начальной и конечной) скорость элемента δA границы равна $\mathbf{u}/2$ и работа, совершаемая этим элементом границы против импульсивного давления, развиваемого жидкостью, по обычной формуле механики равна

$$(1/2)\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\delta A \times (\text{Импульс силы на единицу площади границы}) = \\ = -(1/2)\,\rho\varphi\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\delta A,$$

где нормаль $\mathbf{n}$ направлена внутрь жидкости. Полная кинетическая энергия представляет собой сумму таких слагаемых от всех частей границы жидкости, включая гипотетическую границу на бесконечности, если жидкость простирается в бесконечность; это учитывалось при выводе формулы (6.2.6).

В частном случае тела, движущегося в жидкости, покоящейся на бесконечности, влияние большого давления, создаваемого в жидкости на поверхности тела с помощью любого мгновенного изменения скорости тела, очевидно, связано с реакцией $\mathbf{G}$ на ускорение (§ 6.4). Предположим, что поступательная скорость тела быстро изменяется от $\mathbf{U}'$ до $\mathbf{U}''$, причем это изменение сопровождается заменой потенциала скорости жидкости φ' на φ''. Тогда i-я компонента импульса силы, действующего на тело в результате такого изменения, равна

$$-\int \Pi n_i\,dA = -\rho\int(\varphi'-\varphi'')\,n_i\,dA = \\ = -\rho\int(U_j'-U_j'')\,\Phi_j n_i\,dA = \rho V_0\alpha_{ij}(U_j'-U_j''), \qquad (6.10.5)$$

где интегрирование проводится по поверхности тела, а обозначения Φ_j, V_0 и α_{ij} те же, что и в § 6.4. Из выражения (6.4.28) следует, что импульс силы, действующий на тело, как и следовало ожидать, равен $\int G_i\,dt$. Как уже отмечалось в связи с (6.4.29), величина $\rho V_0\alpha_{ij}U_j$ представляет собой импульс, который нужно сообщить твердому телу, чтобы создать из состояния покоя безвихревое течение, соответствующее движению тела со скоростью $\mathbf{U}$.

Удар тела о свободную поверхность жидкости

Так как безвихревое движение однозначно определяется заданными значениями нормальной компоненты скорости в каждой точке границы жидкости, то изменение этой компоненты скорости

на границе жидкости создает в ней импульс давления. Задачи, связанные с мгновенным изменением скорости части границы, возникают в связи с ударом молота или снаряда о свободную поверхность неподвижной массы жидкости.

Рассмотрим, например, снаряд с плоской передней частью, который ударяет со скоростью U вдоль нормали к свободной поверхности полубесконечного пространства неподвижной жидкости, причем требуется определить распределение скорости в жидкости, и в частности на ее свободной поверхности, сразу после удара. Итак, нам нужно определить потенциал скорости φ движения сразу после удара (или, что одно и то же, импульс давления $\Pi = -\rho\varphi$) при следующих граничных условиях:

а) $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi = -U$ на части «свободной» поверхности, находящейся в контакте со снарядом;

б) $\varphi = 0$ на части свободной поверхности, не находящейся в контакте со снарядом (так как давление и импульс давления равны нулю на свободной поверхности);

в) $|\nabla\varphi| = 0$ всюду на больших расстояниях от снаряда.

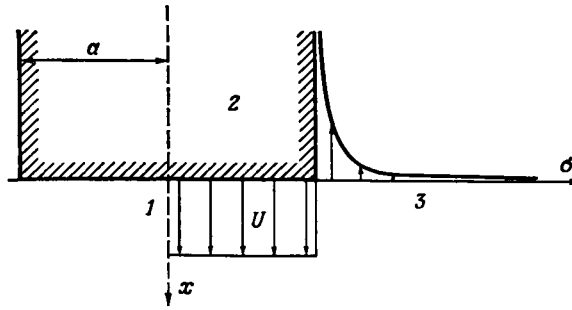
Эта математическая задача эквивалентна определению безвихревого течения, создаваемого твердой плоской пластиной, движущейся в безграничной жидкости по нормали к своей плоскости со скоростью U, так как эта плоскость в данном случае одновременно является плоскостью антисимметрии потенциала φ и на ней (за исключением самой пластины) $\varphi = 0$. Решение последней задачи известно для плоской пластины конечной ширины в двумерном случае (§ 6.6), для плоского диска в трехмерном случае (§ 6.8) и для некоторых других форм пластин, имеющих меньший практический интерес.

Для иллюстрации рассмотрим удар тела с плоской передней частью в виде круга радиуса a. Линии тока течения, возникающего вследствие удара, представляются одной половиной (например, при $x > 0$) картины линий тока на рис. 6.8.2, а функция тока этого течения определяется формулой (6.8.32). На свободной поверхности, где $x = 0$ (x, σ — цилиндрические координаты, использованные в § 6.8), мы имеем $\eta = (1/2)\pi$ и $\sigma = a\,\mathrm{ch}\,\xi$, поэтому скорость после удара направлена по нормали к поверхности и имеет величину

$$\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\eta=\pi/2} =$$

$$= -\frac{aU}{\pi}\frac{1}{\sigma}\cdot(2\,\mathrm{cth}\,\xi - 2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{arc\,ctg\,sh}\,\xi) = \qquad (\xi > 0 \quad \text{или} \quad \sigma > a)$$

$$= -\frac{2U}{\pi}\left\{\left(\frac{\sigma^2}{a^2} - 1\right)^{-1/2} - \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sigma^2}{a^2} - 1\right)^{-1/2}\right\} \qquad (\sigma > a). \tag{6.10.6}$$



Р и с. 6.10.1. Вертикальная скорость на поверхности жидкости сразу после прямого удара осесимметричного тела с плоской носовой частью.
1—ось симметрии; *2*—тело; *3*—свободная поверхность.

Это распределение нормальной скорости на поверхности жидкости изображено на рис. 6.10.1, где виден характерный концентрированный «всплеск» вблизи боковых сторон ударяющего тела. Соответствующий импульс силы, действующей на тело, направлен вверх и имеет величину

$$\int_0^{\pi} (\Pi)_{x=0} 2\pi\sigma\, d\sigma = -\rho \int_0^{a} (\varphi)_{x=0} 2\pi\sigma\, d\sigma = \frac{4}{3}\rho a^3 U. \qquad (6.10.7)$$

Здесь учтено, что на поверхности тела $\sigma = a\sin\eta$ и $\varphi = -(2aU/\pi)\cos\eta$. Эта формула следует также из общего выражения (6.10.5) и результата (полученного в § 6.8) о том, что присоединенная масса кругового диска в безграничной жидкости (по *обе* стороны от диска) в направлении его оси равна (8/3) ρa^3.

Следует отметить, что движение, вызванное ударом тела с плоской передней частью, идентично (только в момент удара) первой половине) поля течения от плоской пластины, движущейся в безграничной жидкости.

6.11. Большие пузыри газа в жидкости

Когда жидкость постоянной плотности содержит пузырь или каверну, в которой плотность среды пренебрежимо мала, движение жидкости (газа) внутри каверны не оказывает влияния на течение окружающей его жидкости. Таким образом, мы получаем задачу о течении однородной жидкости со свободной поверхностью переменной формы, которая ограничивает каверну конечного объема. Масса газа в каверне может быть достаточно большой для того, чтобы его давление определяло объем каверны, как в случае газового пузыря, поднимающегося в воде под действием выталкивающей силы, или же достаточно малой для того, чтобы давление газа было определяющим, как в случае (некоторых фаз движения)

пузыря при подводном взрыве. Во всяком случае, основная математическая трудность обычно заключается в определении формы каверны, и эту трудность можно преодолеть только в специальных условиях. Мы рассмотрим здесь «большие» пузыри газа, на которые поверхностное натяжение влияет мало и для которых число Рейнольдса движущейся жидкости велико. Другие случаи течения жидкости со свободной поверхностью неизвестной формы будут описаны в § 6.13.

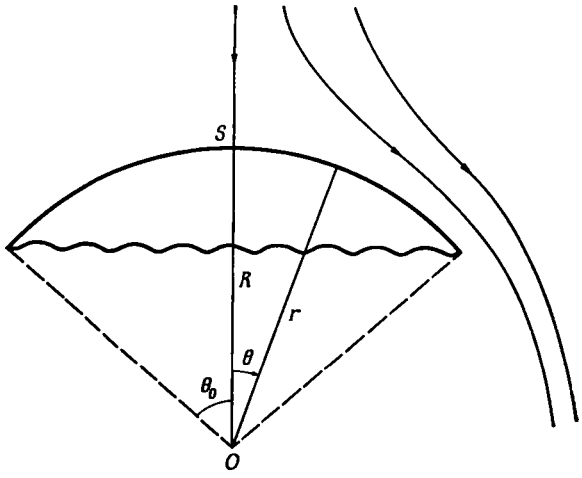
Пузырь в форме сферического сегмента, поднимающийся в жидкости под действием выталкивающей силы

В § 5.14 было отмечено, что для малых пузырьков газа объема меньше $6 \cdot 10^{-4}$ см^3, поднимающихся в воде, влияние поверхностного натяжения вполне достаточно для того, чтобы пузырек сохранял приближенно сферическую форму. Если объем пузыря в воде больше этой величины, то он под давлением воды сплющивается и поднимается, совершая колебания, о которых мало что известно. Дальнейшее увеличение объема пузыря сопровождается постепенным уплощением его нижней части, и для объемов, больших 5 см^3, для которых влияние поверхностного натяжения пренебрежимо мало, он принимает форму зонтика или сферического сегмента, как видно на фото 6.11.1 и 6.11.2. Движение пузыря в вертикальном направлении становится приблизительно установившимся. Нижняя часть пузыря нестационарна и на краях сегмента появляются нерегулярные зазубрины, однако в противоположность этому вся его верхняя часть, по-видимому, стационарна, гладка и близка к сферической форме. Перечисленные свойства такого пузыря позволяют вывести простую формулу для постоянной скорости его подъема.

Рассмотрим установившееся течение вблизи критической точки на верхней части пузыря в связанной с ним системе координат и применим теорему Бернулли для линии тока на поверхности пузыря. Давление в воде на верхней части пузыря должно быть постоянным, поэтому

$$\frac{1}{2} q_s^2 = g\,(R - r\cos\theta), \tag{6.11.1}$$

где R — радиус кривизны поверхности пузыря в критической точке S, а r, θ — сферические координаты с началом в центре кривизны O для точки на поверхности пузыря (рис. 6.11.3). Величина q_s — скорость воды на поверхности пузыря, и при больших числах Рейнольдса, соответствующих этому течению, она, по-видимому, зависит только от размера пузыря, его формы и скорости U, с которой он поднимается в воде. В пределах достаточно малой окрестности критической точки скорость q_s изменяется в зависимости



Р и с. 6.11.3. Схема течения при подъеме в жидкости пузыря в виде сферического сегмента.

от расстояния до точки S по линейному закону (см. (2.7.11)), и можно написать

$$q_s = \alpha U \theta, \tag{6.11.2}$$

где α — безразмерная постоянная, зависящая только от формы пузыря. Из соотношения (6.11.1) видно, что его правую часть можно разложить в ряд по степеням θ, полагая

$$r = R + O(\theta^3) \tag{6.11.3}$$

(члены порядка θ и θ^2 равны нулю по определению R), после чего получим

$$\alpha^2 U^2 = gR. \tag{6.11.4}$$

Равенство (6.11.4) точное, но дальнейшее продвижение требует оценки коэффициента формы α. Фотографии течения за большими пузырями (см. фото 6.11.2) показывают, что отрыв пограничного слоя на верхней части пузыря происходит по зазубренной кромке (причины отрыва не совсем ясны; потеря количества движения в слое на поверхности нулевого напряжения обычно недостаточна для появления обратного течения и отрыва, и, по-видимому, острый край сферической поверхности играет важную роль в этом явлении); кроме того, отошедший пограничный слой находится приблизительно на той же самой сфере, что и верхняя часть пузыря, во всяком случае, до максимального поперечного сечения, за которым вихревой след, по-видимому, совершает колебания. Тот факт, что внутренняя граница области безвихревого течения в общем является сферической, дает возможность оценить величину q_s,

как если бы пузырь был частью сферы радиуса R, движущейся в невязкой жидкости; в этом случае

$$q_s = \frac{3}{2} U \sin\theta \tag{6.11.5}$$

и $\alpha = 3/2$. Из равенства (6.11.4) мы находим, что

$$U = \frac{2}{3}(gR)^{1/2}. \tag{6.11.6}$$

Эта зависимость проверена экспериментально в широком диапазоне изменения размеров пузырей и для нескольких различных жидкостей, и установлено, что она весьма точно выполняется для объемов пузыря, больших 2 см³. Кроме того, такие же наблюдения (Дэвис и Тейлор (1950)) показывают, что угол θ_0, определяющий край сегмента, находится приблизительно в интервале между 46 и 64° без какого-либо заметного систематического изменения с изменением объема пузыря. Среди других приложений формула (6.11.6) дает в первом приближении скорость подъема облака сильно нагретого газа, возникающего при взрыве атомной бомбы, в зависимости от наблюдаемого диаметра (после того как облако поднимется над землей и скорость его подъема станет стационарной).

Существенное соображение, лежащее в основе равенства (6.11.4), заключается в том, что линейная зависимость статического давления в жидкости от вертикальной координаты совпадает с локально квадратичной зависимостью от расстояния до наивысшей точки S криволинейной поверхности, изображенной на рис. 6.11.3; поэтому изменение давления на поверхности пузыря, обусловленное силой тяжести, может компенсироваться динамическим давлением $(1/2)\,\rho q_s^2$, когда q_s зависит линейно от θ, как это происходит в том случае, когда точка S совпадает с критической. Это соображение применимо в самых различных условиях, и приведенные выше формулы могут быть обобщены в различных направлениях.

Вместо ограничения, состоящего в том, что плотность $\bar{\rho}$ жидкости внутри пузыря должна быть мала по сравнению с плотностью ρ окружающей его жидкости, мы можем сделать более общее предположение, что изменение динамического давления $(1/2)\,\bar{\rho}\bar{q}_s^2$ внутри пузыря мало по сравнению с таким же давлением вне его. Тогда коэффициент g в равенстве (6.11.4) заменяется на коэффициент $g(\rho - \bar{\rho})/\rho$, пригодный также и при отрицательных значениях разности $(\rho - \bar{\rho})$. Если жидкости в целом сообщается постоянное ускорение $\mathbf{f}$, то коэффициент g в равенстве (6.11.4) заменяется на $|\mathbf{g} - \mathbf{f}|$ и другие изменения не требуются. Еще одно интересное обобщение относится к случаю пузыря (или «капли», если $\rho < \bar{\rho}$), который движется с ускорением относительно окру-

жающей его жидкости, приближенно сохраняя свою форму вместе со следом. Тогда в левую часть уравнения (6.11.1) нужно добавить член $\partial\varphi/\partial t$, где φ — потенциал скорости течения относительно пузыря (вблизи $\theta = 0$ потенциал скорости $\varphi \approx (1/2)\alpha U\theta^2 R$), и нужно учесть силу инерции $-dU/dt$ на единицу массы всей жидкости. Рассматриваемый случай особенно интересен, когда производная dU/dt по величине значительно больше g, как, например, когда капля воды помещается в поток воздуха большой скорости; при этих условиях равенство (6.11.4) заменяется на уравнение

$$\alpha R\frac{dU}{dt}+\alpha^2U^2 = R\frac{dU}{dt}\frac{\rho-\bar{\rho}}{\rho}. \qquad (6.11.7)$$

Поскольку для капли воды в воздухе $\rho \ll \bar{\rho}$, то решение этого уравнения имеет вид

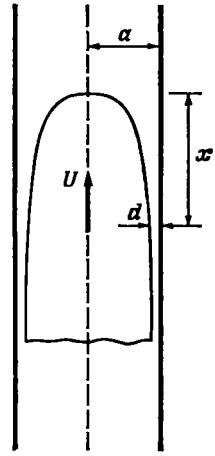
$$U \approx \frac{R\bar{\rho}}{\alpha^2\rho}\frac{1}{t-t_0}. \qquad (6.11.8)$$

Наконец, на фото 6.11.2, *в* показано, что соотношения, подобные (6.11.5) и (6.11.6), применимы и к двумерному пузырю, только при этом коэффициент 2/3 в формуле (6.11.6) заменяется на 1/2.

Замечательное свойство равенства (6.11.4) и его различных обобщений состоит в том, что скорость движения пузыря определяется его формой, и нет необходимости рассматривать механизм действия силы сопротивления, которая в установившемся движении уравновешивает влияние архимедовой силы на пузырь. То, что сила сопротивления, очевидно, не зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, что скорость диссипации механической энергии непосредственно не зависит от вязкости, означает, что напряжения, вызываемые переносом количества движения, влияют только на течение в следе пузыря.

Пузырь, поднимающийся в вертикальной трубе

Форма верхней части больших пузырей, поднимающихся в вертикальных трубах кругового поперечного сечения, также оказывается стационарной и не зависит от размера пузыря, если только он достаточно велик, чтобы заполнить трубу. Как показано схематически на рис. 6.11.4, в этих условиях кольцевая область трубы, содержащая воду, сужается в направлении нижней части пузыря, которая нестационарна и имеет неправильную форму с приближенно плоским основанием. Увеличение объема пузыря приводит к увеличению его длины без изменения формы верхней части. Предельный случай соответствует вертикальной трубе, закрытой сверху и сначала заполненной водой, которая затем стекает из нижнего конца трубы; в этом случае нерегулярная донная часть пузыря вообще не образуется.



Р и с. 6.11.4. Большой пузырь, поднимающийся в вертикальной круглой трубе, наполненной водой.

Влияние вязкости на течение опять можно не учитывать (за исключением только тех случаев, когда кольцевой слой воды весьма тонок), и равенство (6.11.4) дает связь между постоянной скоростью U подъема пузыря и радиусом кривизны границы его верхней части. Коэффициент α постоянен для всех пузырей, которые настолько велики, что способны занять почти все поперечное сечение трубы, и этот коэффициент характеризует распределение скорости в окрестности критической точки передней части пузыря; однако форма пузыря геометрически не простая, и нельзя найти величину α методом, используемым для пузыря в безграничной жидкости. Наблюдения показывают, что скорость U имеет порядок $0{,}48\ (ga)^{1/2}$, где a — радиус круглой трубы, содержащей пузырь. Эта скорость меньше, чем для пузыря в виде сферического сегмента (в безграничной жидкости) с радиусом сферы R, если $R/a > 0{,}52$; это означает, что пузыри, которые еще не заполняют трубу, догоняют большой пузырь и сливаются с ним. Установлено, что в действительности дело обстоит именно так, и поток пузырей, выделяющихся в нижней части длинной вертикальной трубы, в конце концов превращается в несколько больших пузырей, которые заполняют трубу и перемещаются вверх с приближенно одинаковой скоростью.

На достаточном расстоянии вниз от передней части большого пузыря, который заполняет трубу, его граница становится почти цилиндрической с радиусом, например, $a - d$, а скорость воды приближенно вертикальна. Если влиянием вязкости можно пренебречь (это значит, что толщина слоя d не должна быть слишком малой), то скорость воды в системе координат, движущейся вместе

с пузырем, будет приближенно постоянной поперек узкого кольцевого канала и равна скорости на границе пузыря, которая, согласно теореме Бернулли, равна $(2gx)^{1/2}$, где x — расстояние вдоль оси трубы от передней части пузыря (рис. 6.11.4). Уравнение сохранения массы дает приближенное соотношение

$$\pi a^2 U = \pi\{a^2 - (a-d)^2\}(2gx)^{1/2},$$

из которого при $x/a \gg 1$ следует

$$\frac{d}{a} = 1 - \left(1 - \frac{U}{(2gx)^{1/2}}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{U^2}{8ga}\frac{a}{x}\right)^{1/2}. \qquad (6.11.9)$$

Принимая во внимание наблюдаемое значение параметра U^2/ga, получаем

$$\frac{d}{a} \sim 0{,}17\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}. \qquad (6.11.10)$$

Эта оценка толщины кольцевого слоя воды не годится в тех случаях, когда величина d становится очень малой, сравнимой с толщиной пограничного слоя на стенках трубы, внутри которого завихренность не равна нулю. На достаточном удалении вниз по потоку завихренность будет полностью диффундировать через кольцевой слой, и тогда силы вязкости, действующие на элемент слоя, компенсируют силу тяжести. Профиль скорости становится параболическим ($d \ll a$), и, как показано в § 4.2 для течения в слое со свободной поверхностью на вертикальной пластине, объемный поток в системе координат, связанной со стенкой, равен $(1/3)gd^3/\nu$ на единицу ширины слоя, параллельного стенке. Условие сохранения массы в этом случае дает уравнение

$$\pi a^2 U = 2\pi a\left(Ud + \frac{1}{3}\frac{gd^3}{\nu}\right); \qquad (6.11.11)$$

его приближенное решение (при $U\nu/gd^2 \ll 1$ и с учетом наблюдаемого значения скорости U) таково:

$$\frac{d}{a} = \left(\frac{3}{2}\frac{\nu}{a^2 g}U\right)^{1/3} = 0{,}90\left(\frac{\nu^2}{a^3 g}\right)^{1/6}. \qquad (6.11.12)$$

Для воды, вытекающей из трубы радиуса 10 см, по этой формуле получается, что $d/a \approx 0{,}02$.

Расширяющийся сферический пузырь

Простой и важный пример течения, вызванного одним изолированным пузырем, размеры которого изменяются, дается сферической каверной, создаваемой подводным взрывом. В данном случае ускорения в радиальном направлении много больше ускорения силы тяжести g, так что в первом приближении мы можем им

пренебречь. Если скорость воды достаточно мала для того, чтобы ее можно было рассматривать как несжимаемую среду, радиальная скорость u воды (в предположении, что она зависит только от радиуса r) равна

$$u = R^2 \frac{\dot{R}}{r^2}, \tag{6.11.13}$$

где R — радиус пузыря и $\dot{R} = dR/dt$. Эта скорость соответствует безвихревому течению, потенциал скорости которого

$$\varphi = -\int_r^\infty u\, dr = -R^2 \frac{\dot{R}}{r}. \tag{6.11.14}$$

Для давления в воде мы можем написать (см. (6.2.5))

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} = \frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r} - \frac{1}{2}\frac{R^4\dot{R}^2}{r^4}, \tag{6.11.15}$$

где p_0 — постоянное давление вдали от пузыря. Следовательно, если по результатам взрыва давление p_b внутри пузыря известно как функция времени t, то радиус пузыря удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_b - p_0}{\rho}. \tag{6.11.16}$$

Это уравнение можно интерпретировать как уравнение энергии. Полная кинетическая энергия воды равна

$$\frac{1}{2}\rho \int_R^\infty 4u^2 \pi r^2\, dr = 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2,$$

а скорость, с которой эта энергия изменяется, равна величине работы, совершаемой нормальной силой на границе пузыря и на жидкой сферической поверхности «в бесконечности», т. е.

$$4\pi R^2 p_b \dot{R} - \lim_{r\to\infty}(4\pi r^2 p u) = (p_b - p_0)\, 4\pi R^2 \dot{R}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(R^3\dot{R}^2) = \frac{p_b - p_0}{\rho} R^2 \dot{R}, \tag{6.11.17}$$

что повторяет уравнение (6.11.16).

Взрыв, который производится в большой массе воды, порождает большое количество газа под высоким давлением. По мере того как этот газовый пузырь расширяется и приводит окружающую его воду в радиальное движение, давление в газе уменьшается приближенно по адиабатическому закону, который, вообще

говоря, зависит от состава продуктов взрыва, но обычно дает обратную пропорциональность давления высокой степени радиуса пузыря. На более поздних стадиях процесса расширения пузыря он превосходит свой равновесный радиус, давление газа в нем падает значительно ниже p_0, и тогда пузырь по существу можно считать пустым. Внешнее давление p_0 постоянно, так что дифференциальное уравнение (6.11.17) можно один раз проинтегрировать и найти

$$R^3\dot{R}^2 = \frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho}(R_m^3 - R^3), \tag{6.11.18}$$

где R_m — максимальный радиус пузыря, когда он прекращает расширение и начинает сжиматься. Далее, зависимость между временем t и радиусом R эффективно пустого пузыря в жидкости, в которой на бесконечности поддерживается постоянное равномерное давление $p_0 > 0$, определяется квадратурой

$$|t - t_m| = \left(\frac{3\rho}{2p_0}\right)^{1/2} \int_R^{R_m} \frac{dR}{\left(\left(\frac{R_m}{R}\right)^3 - 1\right)^{1/2}}, \tag{6.11.19}$$

где t_m — момент времени, при котором $R = R_m$. Написанная формула справедлива как для положительных, так и для отрицательных значений разности $t - t_m$, причем движение в фазе сжатия $t > t_m$ является простым обращением движения пузыря в фазе расширения. Если не происходит потерь энергии E, освобождаемой при взрыве в окружающую воду путем теплового излучения или теплопроводности, то энергию E можно приравнять полной работе, совершаемой над жидкостью в бесконечности вплоть до момента времени t_m, когда кинетическая энергия равна нулю, и определить

$$E = \frac{4}{3}\pi p_0 R_m^3. \tag{6.11.20}$$

Мы еще воспользуемся этими соотношениями в § 6.12, рассматривая другое явление.

Установлено, что соотношения (6.11.19) и (6.11.20) согласуются с наблюдаемыми радиусами пузырей, которые расширились за пределы их равновесного радиуса, если только, согласно предположению, влияние силы тяжести незначительно. Уравнение (6.11.16) показывает, что в отсутствие силы тяжести радиальные ускорения на границе пузыря максимального радиуса имеют порядок $p_0/\rho R_m$; поскольку же сферический газовый пузырь поднимается в воде с начальным ускорением $2g$ (§ 6.8), то, очевидно, условие незначительного влияния силы тяжести сводится к неравенству

$$R_m \ll \frac{p_0}{\rho g}$$

которое для взрыва в океане можно интерпретировать как требование, чтобы максимальный радиус пузыря был мал по сравнению с глубиной взрыва. Если это условие не удовлетворяется, то перемещение пузыря вверх происходит одновременно с несимметричным радиальным расширением, причем скорость подъема центра пузыря в фазе сжатия больше, чем в фазе расширения (Тейлор (1963)).

6.12. Кавитация в жидкости

По мере того как объем данной массы газа увеличивается, его давление уменьшается; однако оно остается положительным, каким бы большим не стал объем. Для капельных жидкостей это не так вследствие совершенно различной формы их уравнений состояния. Жидкости имеют очень малый коэффициент сжимаемости, и большие изменения давления сопровождаются малыми изменениями их удельного объема. В частности, удельный объем типичной капельной жидкости при положительных давлениях, близких к нулю, отличается от ее удельного объема при атмосферном давлении меньше чем на 0,01%. Таким образом, уравнение $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ строго выполняется в широком диапазоне изменения положительного давления. Возникает вопрос: что происходит, когда динамические условия в движущейся жидкости таковы, что в некоторых местах появляются отрицательные давления? Возможность появления отрицательных давлений в несжимаемой жидкости очевидна, например, из теоремы Бернулли для установившегося течения (см. (6.3.1)); давление на линии тока становится отрицательным там, где скорость превосходит величину $(2H + 2\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})^{1/2}$.

Ответ, который имеет важные практические последствия для гидравлических машин и для движения под водой, состоит в том, что капельная жидкость, которая специально не обработана, не может выдерживать растяжения и стремится к образованию областей, заполняемых паром (каверн), которые расширяются и снижают отрицательное давление. Тем самым непрерывность жидкости нарушается, и для описания течения требуется определить положение и движение границ каверны. Процесс образования и последующего развития таких каверн составляет основу явления, называемого *кавитацией.*

Испытания жидкостей в состоянии покоя показывают, что тенденция к образованию каверн, когда давление снижается до нуля, связана с непременным наличием ядер кавитации, которые, как полагают, представляют собой микроскопические включения нерастворенного газа; некоторое количество паров жидкости должно присутствовать в этих включениях, однако газ, обычно воздух, по-видимому, играет более существенную роль в образовании каверны. Трудно сказать вполне определенно, каким образом включения газа могут долгое время сохраняться в жидкости при

нормальных условиях. Давление, возникающее на границе малого сферического пузырька из-за поверхностного натяжения, настолько велико, что оно не может быть полностью уравновешено давлением пара, а газ, подвергаемый этому давлению, должен был бы быстро растворяться в жидкости.

Обычное предположение состоит в том, что газ или пар в нормальных условиях, попадая в щели малых гидрофобных (несмачиваемых) твердых частиц, например пыли, которые обычно имеются в жидкостях, способен долгое время находиться в состоянии равновесия; поверхность жидкости в этих щелях или трещинах может быть вогнутой наружу по отношению к ним, и тогда сила поверхностного натяжения направлена в сторону жидкости. Затем, когда давление в окружающей жидкости становится значительно ниже давления пара (которое для воды при 15 °С равно $1{,}704 \cdot 10^4$ дин/см^2 или около 0,017 атм), включения газа увеличиваются в объеме, образуя каверну, и, несмотря на то что для большой каверны (большей, чем твердая частица, на которой образовалась каверна) силы поверхностного натяжения направлены внутрь каверны, равновесного радиуса для нее не существует.

Установлено, что для водопроводной и для морской воды критическое постоянное давление, ниже которого размеры каверны неограниченно увеличиваются, отличается от давления водяного пара на малую величину, которой обычно пренебрегают. С другой стороны, вода, которая была сжата на несколько минут давлением приблизительно 700 атм и которая была насыщена воздухом, затем противостояла *растяжению* около 25 атм (Харвей, Макэлрой и Уайтли (1947)); вероятно, при этом все включения нерастворенного воздуха, кроме самых маленьких, уничтожаются. Вода, «дегазированная» таким способом, не кипит при атмосферном давлении, пока ее температура не станет значительно выше 100 °С; очевидно, что процессы кипения и роста каверн в жидкостях при низких давлениях физически подобны.

Когда внешнее давление в жидкости быстро изменяется, критическое давление, ниже которого в жидкости появляются видимые каверны, зависит от размера ядер и от продолжительности действия приложенного низкого давления, и простые квазистатические соотношения не годятся. Однако в практике гидравлических расчетов в качестве приближенной рабочей гипотезы все же полезно предполагать, что критическое давление равно давлению пара.

Примеры образования каверн в установившемся течении

По-видимому, простейшая реализация низкого давления, требуемого для образования каверны, получается при равномерном движении хорошообтекаемого твердого тела в безграничной жидкости. В системе координат, связанной с телом, скорость жидкости

на бесконечности постоянна и равна, например, U, а в любой фиксированной точке жидкости (фиксированной относительно тела) скорость равна αU, где коэффициент α не зависит от U и времени t, за исключением точек в пограничном слое на теле или в следе вниз по потоку от него. Течение вне пограничного слоя и следа безвихревое, и локальное абсолютное давление в этом течении

$$p = \rho\left(H + \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} - \frac{1}{2}\alpha^2 U^2\right),$$

где H — постоянная величина. Если бы тела не было, то поток (в той же системе координат) имел бы ту же постоянную Бернулли H и локальное абсолютное давление было бы равно

$$p_0 = \rho\left(H + \mathbf{g}\cdot\mathbf{x} - \frac{1}{2}U^2\right).$$

Это давление изменяется в зависимости от координаты в вертикальном направлении и отличается от статического давления в жидкости на постоянную величину. Следовательно, можно написать

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho U^2(\alpha^2 - 1). \tag{6.12.1}$$

Критерий для оценки возможности локального появления кавитации определяется разностью между давлением p и давлением паров p_v, которая в обычной безразмерной форме имеет вид

$$\frac{p - p_v}{(1/2)\rho U^2} = \frac{p_0 - p_v}{(1/2)\rho U^2} - (\alpha^2 - 1); \tag{6.12.2}$$

в первом приближении можно считать, что каверны будут образовываться в жидкости всюду, где эта величина меньше нуля.

Первый член в правой части равенства (6.12.2) зависит только от внешних условий, тогда как второй — только от формы и ориентации тела. Для тела заданной формы и ориентации критерий отсутствия локальной кавитации состоит в том, что так называемое *число кавитации*

$$K = \frac{p_0 - p_v}{(1/2)\rho U^2} \tag{6.12.3}$$

не должно быть ниже некоторого критического значения. Это критическое значение изменяется с изменением координат точек в жидкости, так как и давление p_0, и коэффициент α — функции координат. Для тела достаточно малой протяженности в вертикальном направлении давление p_0 можно считать постоянным в окрестности тела и рассматривать его как «давление окружающей среды» для этого тела. В таком случае первое появление кавитации по мере уменьшения коэффициента кавитации K происходит в точке, в которой коэффициент α имеет максимальное значение и равен, например, α_m; из общих результатов § 6.2 мы знаем, что этот мак-

симум должен достигаться на границе области безвихревого течения. Тогда ограничение, которое относится к рабочим условиям и состоит в том, что абсолютное давление не должно опускаться ниже давления пара в любой точке жидкости, принимает вид

$$K > \alpha_m^2 - 1. \qquad (6.12.4)$$

Для тела, движущегося горизонтально в море, устранение кавитации (что обычно желательно по ряду причин) достигается путем увеличения глубины и уменьшения скорости U, а также путем улучшенного профилирования тела с целью уменьшить α_m. Для воды динамическое давление $(1/2)\,\rho U^2$ становится равным двум атмосферам, когда скорость U равна около 20 м/сек; на глубине h метров в море разность $(p_0 - p_v)$ достигает приблизительно $(1 + 0{,}1\,h)$ атмосфер; таким образом, кавитации не будет на теле, движущемся с этой скоростью, если глубина в метрах больше $10\,(2\alpha_m^2 - 3)$. Кавитация будет отсутствовать на *всех глубинах* при этой скорости для тонких тел, например для подводной лодки или рыбы, для которых $\alpha_m < (3/2)^{1/2}$.

На фото 6.12.1 видно появление каверн в потоке около тонкого сигарообразного тела в гидродинамической трубе при числе кавитации $K = 0{,}26$. Очевидно, что каверны образуются вблизи выступающей части тела, там, где можно ожидать минимальное давление, затем каверны сносятся вниз по потоку в области более высокого давления, где они исчезают. Непосредственные измерения давления на поверхности этого тела при данной скорости (исходя из которого можно вычислить коэффициент α_m) показали, что давление парообразования впервые достигается при коэффициенте кавитации K около 0,37, хотя для роста заметных по размеру каверн в течение короткого времени нахождения частиц жидкости в области отрицательных значений разности $p - p_v$ необходимы еще меньшие значения K.

Другие случаи установившегося течения в воде, в которых может возникнуть кавитация, связаны с трубами Вентури и винтами. Поперечное сечение трубы Вентури уменьшается до минимума и затем постепенно увеличивается так, что вода, текущая вдоль трубы, имеет локальный минимум давления в ее узком сечении [1]). При определенных условиях давление в этом сечении может стать ниже, чем давление пара, и тогда вниз по потоку образуется пенящаяся смесь воды и пузырьков, которые обычно скапливаются вблизи стенок трубы. Подобные примеры образования каверны обычны в системах подвода воды, в которых частично открытые краны действуют наподобие узкого сечения трубы Вентури. Появ-

[1]) Труба Вентури используется для измерения количества жидкости, текущей вдоль цилиндрического трубопровода. Небольшая его часть заменяется трубой Вентури, и давление на стенке измеряется в узком сечении и вверх по потоку от трубы Вентури. Массовый расход может быть найден по теореме Бернулли, если скорость приближенно постоянна поперек трубы; в противном случае ее можно эмпирически связать с разностью между этими двумя давлениями.

ление каверн в трубопроводах сопровождается характерными шипящими шумами.

Примечательной особенностью течения, вызванного винтами, является концентрация завихренности в трубке тока малого поперечного сечения в форме спирали, движущейся вниз по потоку от конца каждой лопасти винта; этот «концевой вихрь» связан с тягой, создаваемой лопастью, как будет показано в § 7.8. Вне концевого вихря и пограничного слоя на лопасти течение безвихревое и при малых расстояниях r от оси вихря, но вне его, азимутальная компонента v скорости равна приближенно $C/2\pi r$, где C — циркуляция скорости вокруг вихря (см. § 2.6). Распределение скорости v вблизи концевого вихря приближенно такое, как изображено на рис. 4.5.1. Поскольку в системе координат, движущейся вместе с винтом, течение установившееся, градиент давления в радиальном направлении в точках вблизи концевого вихря

$$\partial p/\partial r = \rho v^2/r$$

и давление в центре вихря меньше, чем на некотором расстоянии от него, на величину порядка $\rho v_{\max}^2$. Максимальная окружная скорость $v_{\max}$ зависит от циркуляции C, которая обычно выражается через известные характеристики и рабочие условия винта, и от неизвестного диаметра трубки тока, содержащей завихренность. Наблюдения показывают, что скорость $v_{\max}$ обычно больше, чем скорость воды в любой другой точке в поле винта, и давление в центре концевого вихря может быть меньше давления пара при весьма умеренных скоростях поступательного движения и вращения обычных винтов; следовательно, центр концевого вихря от каждой лопасти винта может быть первой областью течения, вызванного кораблем или подводной лодкой, в которой возникают каверны по мере возрастания скорости поступательного движения.

На фото 6.12.2, *а* показана модель винта в гидродинамической трубе, работающего в таких условиях, что при отсутствии кавитации давление в центре каждого концевого вихря меньше давления пара. Каверны образовались вдоль осей концевых вихрей от каждой из трех лопастей и, увеличив длину минимальных замкнутых контуров вокруг каждого концевого вихря, исключили области слишком высоких скоростей и давлений, меньших давления парообразования.

Примеры образования каверн в неустановившемся течении

Возможность получения нестационарного давления, меньшего давления парообразования, можно легко показать на примере жидкости в длинной трубе, которая с одного конца плотно закрыта поршнем со специальным законом движения. Сначала поршень и жидкость неподвижны, затем поршень отодвигается от жидкости

со скоростью $u(t)$. В отсутствие каверн и в предположении безвихревого течения (которое справедливо в некоторый промежуток времени, зависящий от размеров трубы) скорость всюду в жидкости равна $u(t)$ и градиент давления в направлении потока равен $-\rho du/dt$ без учета силы тяжести. Таким образом, если абсолютное давление в некоторой точке жидкости на расстоянии x от поршня постоянно и равно p_0, например потому, что труба в этой точке открыта и соединяется с атмосферой, то давление в жидкости понижается и становится самым низким на поршне, где оно равно

$$p_0 - x\rho\, du/dt. \tag{6.12.5}$$

Выдвигаемый из трубы поршень эквивалентен по своему влиянию на распределение давления массовой силе постоянной величины, направленной вдоль оси трубы (как прямой, так и слегка искривленной) и в сторону от поршня. Уменьшение давления на поршне на одну атмосферу от p_0 может быть достигнуто в столбе воды длиной около $1020\, n^{-1}$ см, если поршень движется с ускорением ng см/сек^2; следовательно, резкий удар по поршню (в направлении от жидкости) на одном конце водяного столба длиной всего в несколько десятков сантиметров может привести к состоянию растяжения, сопровождаемому, если продолжительность действия ускорения достаточно велика, процессом образования каверн.

Если мы теперь предположим, что поршень и жидкость движутся сначала совместно со скоростью U в направлении оси трубы. противоположном по знаку последующему ускорению поршня. то мы получим упрощенную схему процесса внезапного закрытия крана вверх по потоку на некотором расстоянии от выхода воды из подводящей трубы. Время T закрывания крана можно принять в качестве оценки времени, в течение которого поршень уменьшает свою скорость от величины U до нуля; при этом отношение U/T будет мерой ускорения поршня. Образование каверны вниз по потоку от крана, когда он резко закрывается, обычно становится очевидным по звуку как бы металлического удара при последующем схлопывании каверны.

Аналогичные расчеты можно провести для периодических ускорений жидкости. Если мензурка с водой, открытая сверху, прикрепляется к столу, вибрирующему в вертикальном направлении. то избыточное (от статического) давление воды на дне мензурки периодически изменяется, достигая минимальной величины ρhf, где h — глубина воды, f — амплитуда ускорения. Образование видимых каверн в данном случае зависит от длительности действия низкого давления и от размера малых включений воздуха и пара, которые служат ядрами кавитации.

Обычный способ принудительного создания кавитации, применяемый для удаления из жидкости растворенного в ней газа, состоит в фокусировке пучка акустических волн ультразвуковой частоты

в некоторой области жидкости. Когда интенсивность облучения становится достаточно большой в выбранной области жидкости, жидкость испытывает растяжение на части каждого цикла. Время растяжения за каждый цикл обычно оказывается слишком непродолжительным для подходящего роста каверн, и можно предположить, что каждое микроскопическое включение нерастворенного газа просто совершает колебания около своего равновесного состояния. Однако замечено, что средний размер пузырька на протяжении одного цикла постепенно увеличивается, во всяком случае до тех пор, пока еще имеется некоторое количество газа, растворенного в жидкости. Объяснение этого факта, очевидно, заключается в том, что эффекты второго порядка при колебаниях пузырька приводят к несколько большей диффузии газа к пузырьку от окружающей его жидкости за время расширения, чем соответствующая потеря газа за время сжатия. Как уже отмечалось в § 6.8, существует также тенденция соседних пузырьков, колеблющихся в фазе, сблизиться друг с другом и слиться, поэтому в жидкости формируются пузырьки все больших размеров, и под влиянием выталкивающей силы они поднимаются на поверхность.

Схлопывание нестационарной каверны

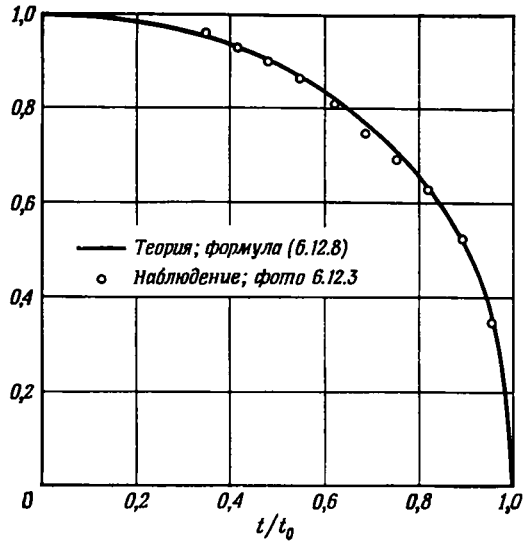
Если давление в окрестности каверны поднимается выше давления парообразования, то каверна коллапсирует (схлопывается). Стенки каверны устремляются друг к другу обычно при наличии в ней лишь малого количества газа (поступившего большей частью в течение времени существования каверны при испарении границы каверны и диффузии растворенного газа через нее), который играет роль слабой газовой подушки, и звук удара получается сильный, почти металлический, вследствие малого коэффициента сжимаемости воды. В воде вблизи каверны в момент удара развивается очень большое давление, и оно затем распространяется по всей воде как волна сжатия. С практической точки зрения этот импульс давления большой интенсивности, распространяющийся от каждой разрушающей каверны, является важной и, как правило, нежелательной чертой кавитации. Он слышен как неприятный громкий шум в системах подвода воды и в гидравлических насосах. Когда этот шум возникает в результате кавитации вблизи винта корабля, он может вызвать интенсивные вибрации винта и прослушивается за много миль от места своего образования подводными акустическими приборами. Непрерывное схлопывание каверн быстро приводит (это более важно) к износу и эрозии соседних с ними твердых поверхностей. Механизм этого процесса повреждения металлических лопастей винтов и турбин, а также бетонных водосбросов плотин выяснен еще не полностью, но, по-видимому, основную роль играют локальные усталостные разрушения

твердых материалов, обусловленные действием постоянно повторяющихся высоких напряжений.

Представляют интерес оценки величин максимума развиваемого давления и других характеристик схлопывающейся каверны. Их очень просто получить в описанном выше одномерном случае каверны, образующейся при выдвижении поршня из трубы. Предположим, например, что через некоторое время после того, как поршень перестает двигаться с ускорением, возвращающийся столб воды ударяет поршень с относительной скоростью U. (В случае мгновенного закрытия крана из энергетических соображений следует, что вода возвращается к крану с той же самой скоростью, какую она имела сразу до образования каверны, если масса столба воды остается неизменной.) Если бы вода была действительно несжимаемой, то относительная скорость всего столба воды уменьшилась бы мгновенно до нуля и импульсивное давление воды было бы бесконечным; однако благодаря действительной сжимаемости воды импульсы давления распространяются через воду с конечной скоростью c (скорость распространения звуковых волн, если амплитуда импульса не слишком велика) и до нуля падает скорость только той части столба, которая может быть достигнута волной давления, создаваемой поршнем в момент удара. Таким образом, скорость изменения количества движения столба воды на единицу площади поперечного сечения равна ρcU, и она должна быть равна приращению давления в воде вблизи поршня. Скорость звуковых волн в воде равна 1400 м/сек, так что для воды, текущей вдоль водопроводной трубы со скоростью 1 м/сек, гидравлический удар, возникающий при внезапном закрытии крана сначала перед краном, а потом за ним вследствие схлопывания образовавшейся каверны (если кран расположен на некотором расстоянии от выхода и потерь энергии нет), равен приблизительно $1{,}4 \cdot 10^7$ дин/см^2, или 14 атм.

В случае каверны, ограниченной во всех трех измерениях, движение схлопывания, очевидно, сильно зависит от формы границы каверны. Фотографии каверн, образованных в области низкого давления в установившемся течении около тела, как, например, на фото 6.12.1, показывают, что каверны при максимальном размере имеют приближенно сферическую форму. Наблюдения схлопывания одиночной каверны в контролируемых условиях, вроде приведенных на фото 6.12.3, подтверждают, что каверна, сферическая в начальный момент времени, остается приближенно такой же почти до полного схлопывания. Поэтому для простоты анализа мы предположим сферическую симметрию каверны при схлопывании.

Дифференциальное уравнение, определяющее радиус $R(t)$ сферической каверны для данных давлений p_0 «на бесконечности» и p_b в каверне, уже было получено (см. (6.11.16)). В данном случае p_0 представляет собой внешнее давление для каверны, равное дав-



Р и с. 6.12.4. Схлопывание сферической каверны из состояния покоя под действием постоянного перепада давлений.

По оси ординат R/R_m; величина радиуса R_m для каверны на фото 6.12.3, определенная путем экстраполяции, равна 0,72 см, а начальный момент времени был установлен по продолжительности схлопывания.

лению в жидкости при ее отсутствии; давление p_b может быть приравнено давлению пара p_v всегда, если только R не слишком мало, что может быть либо в начале образования каверны (когда может иметь значение поверхностное натяжение), либо к концу полного схлопывания (когда, кроме того, заключенный в каверне пар, возможно, сжимается слишком быстро, чтобы могла происходить конденсация). Упомянутое уравнение для $R(t)$ при $p_b = p_v$ можно проинтегрировать численно, если давление p_0 известно как функция времени в условиях заданного поля течения воды. Было получено соответствие между радиусом, рассчитанным таким способом, и наблюдаемым размером каверн, образующихся вблизи утолщения тела, изображенного на фото 6.12.1, и сносящихся вниз по потоку в область, где $p_0 > p_v$ (Плессет (1949)). Во время наблюдений трудно проследить за каверной на последней стадии схлопывания, так как ее радиус становится очень малым, а радиальная скорость — очень большой, так что в отношении данных об этой стадии приходится полагаться большей частью на расчет.

В простейшем случае сферическая каверна схлопывается из состояния покоя при постоянной разности $(p_0 - p_v)$. Из уравнения (6.11.18) с небольшим видоизменением получается

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3}\,\frac{p_0 - p_v}{\rho}\left(\frac{R_m^3}{R^3} - 1\right), \qquad (6.12.6)$$

где R_m — максимальный радиус каверны. Интегрирование этого уравнения должно быть проведено численно, и окончательная зависимость радиуса каверны R от времени t, начиная от состояния покоя, приведена на рис. 6.12.4. Момент времени t_0, при котором радиус каверны $R = 0$, т. е. происходит ее полное схлопывание, согласно уравнению (6.12.6), можно либо найти непосредственно путем численного интегрирования, либо выразить аналитически через гамма-функцию, и он равен

$$t_0 = 0{,}915 R_m \left(\frac{\rho}{p_0 - p_v}\right)^{1/2}. \tag{6.12.7}$$

Зависимость между относительными величинами R/R_m и t/t_0

$$\frac{t}{t_0} = 1{,}34 \int\limits_{R/R_m}^{1} \frac{dx}{(x^{-3}-1)^{1/2}} \tag{6.12.8}$$

не содержит никаких параметров; было установлено, что эта зависимость удовлетворительно согласуется с наблюдениями схлопывающейся каверны при постоянной разности $(p_0 - p_v)$ (на рис. 6.12.4 приведено сравнение теоретических результатов с наблюдаемыми (по фото 6.12.3)).

Интенсивная последняя стадия схлопывания происходит в такой короткий промежуток времени, что изменение давления p_0 будет, по-видимому, пренебрежимо малым в любых обстоятельствах; с другой стороны, предположение о том, что давление в каверне остается постоянным и равным давлению p_v, может перестать быть правильным. Если разность $(p_0 - p_v)$ для простоты считать постоянной, когда $R \ll R_m$, на этой последней стадии процесса имеем

$$\dot{R} \approx -\left(\frac{2}{3}\frac{p_0 - p_v}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{R_m}{R}\right)^{3/2}. \tag{6.12.9}$$

На этой последней стадии большая часть располагаемой работы $E = (4/3)\,\pi R_m^3\,(p_0 - p_v)$ превращается в кинетическую энергию воды, и эта кинетическая энергия концентрируется во все меньшем объеме жидкости по мере стремления R к 0. В заданной точке жидкости ее скорость при $R \to 0$ изменяется как $(R)^{1/2}$ (см. (6.11.13)), и очевидно, что бóльшая часть жидкости сильно замедляется, хотя в пределах одного-двух радиусов каверны, считая от ее поверхности, происходит сильное ускорение жидкости. Это указывает на наличие максимума давления в жидкости. Из уравнений (6.11.15) и (6.11.16) находится явное выражение для давления:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \left(\frac{p_0 - p_v}{\rho}\right)\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\dot{R}^2\left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{r^4}\right), \tag{6.12.10}$$

в котором доминирует второй член в правой части; он положителен и имеет максимальное значение $(3/8)\dot{R}^2/4^{1/3}$ при $r = 4^{1/3} R$. Из выражений (6.12.9) и (6.12.10) следует, что для максимального давления p_m при $R \to 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$p_m - p_0 \approx 4^{-4/3} (p_0 - p_v) \left(\frac{R_m}{R}\right)^3. \qquad (6.12.11)$$

Таким образом, в случае каверны, схлопывающейся из состояния покоя под влиянием разности давлений $(p_0 - p_v)$ около 1 атм, в момент, когда радиус каверны составляет 0,1 от его начального значения, максимальное давление в жидкости достигает 157 атм и радиальная скорость на границе каверны при дальнейшем уменьшении каверны равна 260 м/сек; это максимальное давление и скорость на границе продолжают быстро возрастать.

Эти соображения, выдвинутые Рэлеем (1917), показывают, что на плоской твердой поверхности, на которой периодически образуется и схлопывается полусферическая каверна, или на твердых стенках конической щели, занятой каверной, могут возникать очень большие давления, и они могут быть причиной локальных повреждений металлов. Подобные соображения менее убедительны в отношении влияния процесса схлопывания каверны, не находящейся в контакте с твердой поверхностью, так как анализ основан на предположении о несжимаемости жидкости и не дает никаких данных о том, как распространяются импульсы давления в разные стороны от схлопывающейся каверны. Эффекты сжимаемости становятся важными, когда скорость на границе каверны сравнима со скоростью звука в жидкости (1400 м/сек для воды), так как импульсы давления в этом случае, конечно, не проходят мгновенно расстояние от одной части жидкости до другой, как предполагалась неявно в проведенном выше анализе, и простой метод, позволяющий учесть эти эффекты, как это было сделано при рассмотрении гидравлического удара, уже не пригоден.

Более близкий к реальности анализ последних стадий процесса схлопывания должен также учитывать другие физические явления, которыми мы пренебрегали. Отклонения от сферической формы могут появляться из-за градиента давления окружающей среды p_0 (обусловленного влиянием силы тяжести или связанного с основным движением воды), а также, вероятно, из-за влияния соседней твердой границы, и они становятся более заметными в конце процесса схлопывания [1]).

[1]) Коническая струйка, видная в каверне на фото 6.12.3, типична для каверн, которые схлопываются при наличии градиента внешнего давления (обусловленного в данном случае силой тяжести); струйка появляется со стороны большего давления и пробивает противоположную сторону каверны, приводя к сильному искажению ее формы по мере приближения объема каверны к минимальному (Бенджамен и Эллис (1966)). [В последние годы установлено, что этот эффект *несимметричного* схлопывания каверн вблизи твердых границ и при прохождении по воде ударной волны существен для кавитационной эрозии материалов. Об исследовании этого и других явлений при кавитации см. Труды международного симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями, «Наука», М., 1972, где также имеются дальнейшие ссылки.— *Ред.*].

Кроме того, происходит смягчение процесса схлопывания за счет водяного пара, который наполняет каверну во время фазы увеличения ее радиуса, и за счет воздуха, который либо был в начальный момент в кавитационных ядрах, либо выделился из раствора через границу каверны за время ее расширения [1]). Обычно считают, что часть располагаемой механической энергии E, не являющаяся пренебрежимо малой, превращается в акустическое излучение на некотором расстоянии от схлопывающейся каверны (остальная часть энергии диссипирует локально за счет вязкости и теплопроводности), однако получить надежные оценки максимума давления в излучаемом импульсе давления или ударной волне затруднительно.

Стационарные каверны

В установившемся течении давление местами может стать настолько ниже давления пара, что образуются каверны, которые достигают размеров, не являющихся малыми (по сравнению с размерами соответствующей части поля течения), прежде чем сносятся потоком. Тогда общий объем каверн оказывает существенное влияние на распределение скорости в жидкости, обычно такое, чтобы поднять минимальное давление в жидкости до давления парообразования. В крайних условиях каверны в области низкого давления объединяются, создавая одну большую стационарную каверну. На фото 6.12.2, *б* показано развитие такой каверны на стороне разрежения лопасти винта и распространение ее вниз по потоку в виде концевого вихря. Эта стационарная или «пленочная» каверна ставит перед инженерами дополнительные проблемы, не говоря уже о шуме, вибрации и повреждениях, возникающих при схлопывании малых каверн, непрерывно отделяющихся от нерегулярных краев основной каверны, поскольку существование большой каверны изменяет распределения скоростей и давлений на поверхности тела в направлении, которое не так легко предсказать. В случае лопасти винта существование большой каверны на стороне разрежения препятствует возникновению там предполагаемого низкого давления, и результирующая сила, развиваемая лопастью в воде, соответственно уменьшается. Если бы форму стационарной каверны при различных условиях можно было предсказать, то винт можно было бы спроектировать, допуская существование каверны, однако в общем случае это сделать невозможно.

[1]) Если каверна содержит так много воздуха, что увеличение его давления при сжатии каверны замедляет процесс схлопывания и противодействует увеличению скорости на границе каверны до величины, сравнимой со скоростью звука в воде, то можно воспользоваться приведенным выше анализом, чтобы проследить повторное расширение каверны от некоторого минимального радиуса до первоначального максимального и последующее ее колебание относительно равновесного радиуса между этими двумя значениями. Наблюдались каверны, которые совершают несколько колебаний с уменьшающимся максимальным радиусом (Кнэп (1952)).

Подобно тому как число кавитации, определяемое равенством (6.12.3), использовалось для характеристики условий начала кавитации, его можно также использовать в качестве определяющего параметра для возникновения стационарной каверны. Когда твердое тело заданной формы помещено в установившийся поток жидкости и каверны отсутствуют, безразмерная форма поля течения полностью определяется числом Рейнольдса. Если теперь допускается стационарная каверна значительного размера как некоторое новое свойство поля течения, то постоянное давление в каверне p_c выступает в качестве нового физического параметра. Влияние стационарной каверны сводится к предотвращению появления в воде области, в которой давление было бы ниже давления пара, и если предполагается, что это действительно так, то вода везде находится в сжатом состоянии, за исключением границы каверны. В этих обстоятельствах одновременное возрастание давления в каверне и во всей массе жидкости не оказывает никакого влияния на поле течения, а это свидетельствует о том, что существенным является не абсолютное давление, а перепад давлений. Приближенно постоянное давление p_0, которое существовало бы в окрестности каверны при отсутствии тела, создающего каверну, т. е. внешнее давление для каверны, вновь служит удобным исходным давлением, поэтому безразмерное число, характеризующее стационарную каверну, есть число кавитации

$$K = \frac{p_0 - p_c}{(1/2)\,\rho U^2}. \tag{6.12.12}$$

Тогда этого числа кавитации и числа Рейнольдса вполне достаточно для определения поля течения в безразмерной форме и, в частности, для определения формы каверны, если влиянием силы тяжести можно пренебречь.

Зависимость формы стационарной каверны от разности $(p_0 - p_c)$, а не от абсолютной величины давления p_c (при условии, что давление p_c не меньше давления p_v, так как в противном случае процесс кавитации продолжал бы распространяться) имеет полезные последствия. Это дает возможность экспериментатору достигнуть желаемой малой величины K и получить течение, динамически подобное течению, в котором возникает стационарная паровая каверна, путем увеличения давления p_c внешними средствами (обычно путем подвода воздуха при заданном давлении в каверну через трубку. вмонтированную в тело, к которому присоединена каверна), а не технически более трудно осуществимым увеличением скорости U или понижением давления p_0. На фото 6.12.5 изображены стационарные каверны за диском, помещенным нормально к потоку воды при значении $K = 0{,}19$; на фото 6.12.5, *а* посредством подвода воздуха давление в каверне поддерживается выше давления пара, в то время как на фото 6.12.5, *б* и *в* давление в каверне

не регулируется, и, по-видимому, оно близко к давлению пара. Помимо подтверждения ожидаемого подобия формы каверн, полученных при одинаковых значениях K, эти фотографии показывают, что, по-видимому, имеется характерное различие в свободных границах каверн, наполненных паром и воздухом. Вода вблизи границы паровой каверны находится в состоянии начальной стадии кавитации, причем шероховатость и непрерывное колебание границы, вероятно, способствуют «кипению» на ней.

Кроме того, существуют обстоятельства, при которых наполненная воздухом каверна возникает естественным путем при давлении, значительно большем давления пара, например, когда снаряд входит в воду через поверхность раздела воздуха и воды. Если твердая сфера падает или выстреливается вертикально в воду (фото 6.12.6), то образуется каверна, временно присоединенная к поверхности сферы. Если скорость сферы достаточно велика, каверна затем отделяется от поверхности и продолжает двигаться вперед вместе со сферой, причем давление в каверне продолжает оставаться больше давления пара. Однако при этом не следует ожидать близкого сходства движения с установившимся течением около неподвижной сферы при определенном значении числа кавитации, так как свободная сфера замедляется, давление в невозмущенной воде изменяется с изменением глубины и каверна, присоединенная к сфере, непрерывно теряет воздух за счет его уноса через границу каверны. Динамика процесса поступления воздуха в каверну в начале ее образования, по-видимому, влияет на замыкание каверны и на полный объем воздуха, который продолжает двигаться вместе со сферой.

Из наблюдений следует, что в случае тела заданной формы, помещенного в равномерный поток жидкости, форма стационарной каверны определяется в основном числом кавитации. Однако каверна близка к стационарной только тогда, когда она наполнена воздухом и образована за телом с острой кромкой, и даже в этом случае, как видно на фото 6.12.5, *а*, кормовая часть каверны не имеет четко определенной формы. Для всех каверн, заполненных паром, и для каверн, заполненных паром или воздухом за телами без острой кромки, на практике имеет смысл лишь средняя по времени форма каверны. При отсутствии острой кромки тела, которая определяет и стабилизирует как отрыв пограничного слоя, так и присоединение каверны, может происходить взаимодействие пограничного слоя и каверны, как показано на интересных фотографиях 6.12.7. Вполне может быть, что граница каверны обычно совпадает с оторвавшимся пограничным слоем.

Оставляя в стороне неустойчивость и нестационарность, а также влияние пограничного слоя, которые могут проявляться в определенных условиях, определение формы стационарной каверны в потоке за телом при данном значении числа кавитации K пред-

ставляет само по себе интересную задачу теории безвихревого течения, которая будет рассматриваться в следующем параграфе.

6.13. Теория течений со свободными линиями тока, установившиеся струи и каверны

Ниже мы изучим ряд задач, в которых установившееся течение при больших числах Рейнольдса ограничено частично твердыми стенками и частично свободными линиями тока неизвестной формы, на которых давление постоянно и имеет заданную величину. Такие течения большей частью можно разделить на «незатопленные» струи, т. е. струи жидкости конечных поперечных размеров (по нормали к направлению основного течения), окруженные газом, и на газовые каверны конечных поперечных размеров, окруженные жидкостью; к струйным задачам относятся также задачи о движении тел вдоль свободной поверхности жидкости, которая первоначально находилась в состоянии покоя под действием силы тяжести. Мы будем предполагать, что вверх по потоку заданы такие условия, что течение всюду безвихревое, за исключением пограничных областей, с обычными оговорками относительно применимости полученных результатов.

В некоторых из этих задач общие свойства полей течений можно установить путем наблюдения, дополненного применением интегральной теоремы о количестве движения, как в § 6.3, однако в других задачах, особенно в задачах с кавернами, характер течения может быть вообще не очевиден и, во всяком случае, для получения количественных сведений требуются подробные расчеты. Тот факт, что форма свободных границ неизвестна, делает математическую задачу весьма трудной, исключая двумерные течения, в которых твердые границы состоят из прямолинейных отрезков [1]). Использование больших электронно-вычислительных машин дает возможность получить много численных решений, во всяком случае для задач двумерных и осесимметричных течений.

Как уже упоминалось в § 5.11, интерес к течениям этого типа стимулировался ранее представлением о свободных линиях тока в модели широкого следа за плохообтекаемым телом, погруженным в равномерный поток (без каверн) при больших числах Рейнольдса. Действительно, скорость в следе вблизи плохообтекаемого тела вообще меньше, чем в невозмущенном потоке, хотя предположение о том, что давление в следе постоянно, представляет собой слишком сильное упрощение, и, во всяком случае, неустойчивость вихревой пелены, составляющей границу следа, приводит к вихревому дви-

[1]) Подробный обзор современной теории течений со свободными границами имеется в книгах: Биркгоф Г., Сарантонелло Э., Струи, следы и каверны, «Мир», М., 1964; Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961 [а также в книге: Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», М., 1966.— *Ред.*].

жению и смешению жидкости на обеих сторонах этой границы уже на малых расстояниях от тела. Приложение теории свободной линии тока к случаям, в которых поверхность тока имеет на одной стороне жидкость, а на другой стороне газ, не вызывает таких возражений, так как любое движение, которое развивается в газе, оказывает пренебрежимо малое влияние на течение жидкости, и поверхность раздела жидкости и газа обычно бывает динамически устойчивой.

Будем считать, что статическое давление в области, представляющей практический интерес, приближенно однородно и, согласно теореме Бернулли, скорость жидкости на свободной линии тока по величине постоянна; очевидно, что это предположение будет правильным в том случае, когда

$$gh \ll U^2,$$

где h — масштаб протяженности рассматриваемой области в вертикальном направлении, а U — характерная скорость жидкости в этой области.

Опишем предложенный Кирхгофом (1869) метод решения, который применим к двумерным течениям с кусочно-прямолинейными границами и в котором используется комплексный потенциал скорости (§ 2.7, 6.5). С этой теорией свободных линий тока связано также имя Гельмгольца (1868), так как он первым решил задачу со свободными линиями тока. Основная идея метода состоит во введении новой комплексной переменной [1])

$$\Omega = \ln (dz/dw) = \ln (u - iv)^{-1} = \ln q^{-1} + i\theta, \qquad (6.13.1)$$

где, как и раньше, $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$, а q и θ — соответственно модуль и аргумент (относительно оси x) вектора скорости (u, v). Эта переменная Ω обладает простыми свойствами, заключающимися в том, что ее действительная часть постоянна на каждой свободной линии тока, а ее мнимая часть постоянна на каждом прямолинейном участке твердой границы. Поэтому вся граница жидкости в плоскости Ω изображается в виде фигуры с прямолинейными сторонами. Кроме того, в плоскости w граница жидкости изображается в виде простой фигуры с прямолинейными параллельными сторонами, а именно двумя прямыми линиями, параллельными действительной оси, которые соответствуют двум граничным линиям тока. Далее, из теоремы Кристоффеля — Шварца (§ 6.5) следует, что всегда можно найти конформное отображение внутренней или внешней части многоугольника на полуплоскость. Следовательно, можно найти соотношения между переменной Ω и новой комплексной переменной λ, а также между w и λ,

[1]) Идея Кирхгофа состояла в применении в качестве переменной производной dz/dw; использование более удобной переменной $\ln (dz/dw)$ было предложено немного позже Планком (1884) [и независимо в 1890 г. Н. Е. Жуковским, который решил много новых задач.—*Ред.*].

так что в обоих случаях область течения отобразится на верхнюю полуплоскость λ. Таким способом можно получить соотношение между Ω и w, из которого путем интегрирования находится зависимость w от z.

Метод будет объяснен в применении к задаче, связанной со струей, и к задаче, связанной с каверной.

Двумерная струя, вытекающая из отверстия

Как отмечалось в § 6.3, желательно знать степень сужения (коэффициент сжатия) струи жидкости, вытекающей из насадка; теорема о количестве движения пригодна для этой цели только для одной или двух специальных форм насадков. Теория течений со свободными линиями тока может дать дополнительную информацию в некоторых двумерных случаях (хотя они, конечно, имеют меньшее практическое значение).

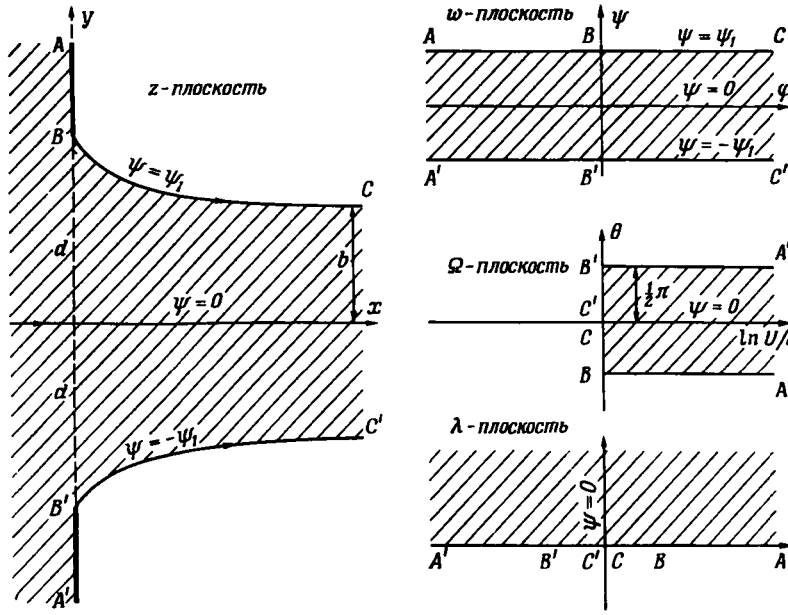
Предположим сначала, что насадком служит просто отверстие в плоской стенке малой толщины и что стенка — это часть большого сосуда с жидкостью. Скорость жидкости на свободных линиях тока, отрывающихся от краев отверстия, постоянна и равна U; эта же скорость достигается внутри струи вниз по потоку на достаточном удалении от отверстия, где (без учета силы тяжести) линии тока прямолинейны и параллельны (рис. 6.13.1). Две линии тока, ограничивающие поле течения, на которых $\psi = \mp \psi_1$, обозначены через ABC и $A'B'C'$, где A, A', C, C' — точки «на бесконечности»; на рис. 6.13.1 показаны соответствующие прямолинейные границы в плоскостях Ω и w, где Ω определяется теперь несколько более удобно:

$$\Omega = \ln\left(U\frac{dz}{dw}\right) = \ln\frac{U}{q} + i\theta. \tag{6.13.2}$$

Конформное отображение полубесконечной полосы на верхнюю полуплоскость осуществляется преобразованием (6.5.14). Приспосабливая это преобразование к заданным условиям положения, ширины и ориентации полосы в плоскости Ω (при которых в преобразовании (6.5.14) должно быть $K' = 1$ и $z_0 = -(1/2)\pi i$), получаем

$$\lambda = i \operatorname{sh} \Omega; \tag{6.13.3}$$

выбор остальных постоянных в преобразовании (6.5.14) (а именно $b = -c = 1$) произведен так, чтобы в плоскости λ точкам B и B' соответствовали значения $\lambda = \mp 1$. Теперь надо найти зависимость между w и λ так, чтобы она отображала внутренность бесконечной полосы из плоскости w на верхнюю полуплоскость λ с соответствием точек A, B, C и A', B', C', показанным в двух плоскостях



Р и с. 6.13.1. Конформные преобразования, используемые для определения двумерной струи, вытекающей из отверстия в плоской стенке.

рис. 6.13.1, причем значение φ в точках B и B' для удобства выбрано равным нулю. Общий вид искомого преобразования определяется функцией (6.5.15); выбирая в нем подходящие постоянные ($K' = -(1/2)\,\pi\psi_1$, $b = 0$, $z_0' = \psi_1$), имеем

$$\lambda = ie^{-\pi w/(2\psi_1)}. \tag{6.13.4}$$

Итак, поле течения отображено на верхнюю полуплоскость λ двумя способами, результаты которых должны совпадать, так что

$$\lambda = ie^{-\pi w/(2\psi_1)} = i\,\mathrm{sh}\,\Omega = \frac{1}{2}\,i\left(U\frac{dz}{dw} - \frac{1}{U}\frac{dw}{dz}\right).$$

Отсюда находим

$$U\frac{dz}{dw} = -i\lambda \mp (1-\lambda^2)^{1/2}; \tag{6.13.5}$$

отрицательный корень можно отбросить, поскольку $U(dz/dw) \to 1$ при $\varphi \to \infty$, $\lambda \to 0$. Последующее интегрирование (с использованием (6.13.4)) дает

$$\frac{\pi U}{2\psi_1}(z - z_0) = i(\lambda - 1) - (1-\lambda^2)^{1/2} + \mathrm{arth}\,(1-\lambda^2)^{1/2}, \tag{6.13.6}$$

где z_0 — постоянная, и, поскольку $\lambda = 1$ в точке B, в которой $z = id$ ($2d$ равно ширине отверстия), получаем

$$z_0 = id.$$

После подстановки λ из (6.13.4) в (6.13.6) находится искомая связь между w и z.

На свободной линии тока BC имеем

$$\psi = \psi_1, \quad \varphi = Us, \quad \Omega = i\theta$$

и в силу (6.13.3) и (6.13.4) получаем

$$\lambda = -\sin\theta = e^{-\pi Us/(2\psi_1)}, \tag{6.13.7}$$

где s означает расстояние вдоль свободной линии тока от точки B. Тогда уравнение (в параметрической форме) этой свободной линии тока определяется функцией (6.13.6):

$$x = \frac{2\psi_1}{\pi U}(\operatorname{arth}\cos\theta - \cos\theta), \qquad y = d - \frac{2\psi_1}{\pi U}(1 + \sin\theta), \tag{6.13.8}$$

а асимптотическая полуширина струи равна

$$b = \lim_{s\to\infty} y(s) = d - \frac{2\psi_1}{\pi U}.$$

На рис. 6.13.1 показана точная форма свободных линий тока. Связь между w и z при $s \to \infty$ становится линейной. Это означает, что, как и предполагалось, на достаточном удалении вниз по потоку скорость жидкости постоянна, так что $\psi_1 = bU$, и поэтому

$$\frac{b}{d} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}61. \tag{6.13.9}$$

Эту величину коэффициента сжатия, близкую к получаемой экспериментально, следует сравнить с величинами, приведенными на рис. 6.3.2 для круглых насадков с различными формами границ вблизи отверстия.

Аналогичный расчет формы свободных линий тока можно сделать для струи, вытекающей из двумерного насадка Борда, подобного насадку, показанному на рис. 6.3.2, *б*, и из отверстия, образованного двумя наклоненными плоскими стенками (одна из которых может быть бесконечной). Для струи, вытекающей из отверстия между двумя симметричными полубесконечными плоскими стенками, образующими угол 2α, коэффициент сужения равен

$$\left(1 + \int_0^1 \frac{\sin\alpha\beta\, d\beta}{\operatorname{tg}(\pi\beta/2)}\right)^{-1}.$$

Методы теории комплексного переменного пригодны также для определения течения, вызванного двумерными соударяющимися струями [1]).

---

[1]) См., например, Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, «Мир», М., 1964 [а также книги, указанные в примечании на стр. 607.— *Ред.*].

Двумерное обтекание пластины с каверной под давлением окружающей среды

Можно снова рассмотреть целый ряд течений, однако с целью иллюстрации общего метода мы изучим подробно только простой случай пластины, установленной по нормали к потоку бесконечной протяженности. Будем считать, что давление в каверне, которое в теории безвихревого течения может быть выбрано произвольно, равно давлению в невозмущенном потоке [1]). При этом скорость жидкости на свободных линиях тока, ограничивающих каверну, равна U — постоянной скорости течения далеко перед пластиной. Воспользуемся снова определением (6.13.2) и примем $\psi = 0$ на центральной линии тока, которая разделяется в критической точке O (в которой зададим $\varphi = 0$) на две свободные линии тока.

Соответствие между различными точками на линии тока $\psi = 0$ в плоскостях z, w и Ω показано на рис. 6.13.2. Область течения занимает всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси. Как и раньше, необходимо отыскать преобразования, отображающие области течения как из плоскости w, так и из плоскости Ω на верхнюю полуплоскость плоскости λ. Полубесконечная полоса в плоскости Ω имеет те же ширину, положение и ориентацию, что и выше, на рис. 6.13.1, поэтому функция

$$\lambda = i \operatorname{sh} \Omega$$

опять дает подходящую связь между Ω и λ, причем положения точек B, B' на плоскости по-прежнему определяются значениями $\lambda = \pm 1$. Связь между w и λ можно отыскать, заметив сначала, что область течения занимает верхнюю половину плоскости $w^{1/2}$ (см. рис. 6.13.2) и что затем необходимо выполнить инверсию и изменить знак, чтобы добиться совпадения соответствующих точек на двух действительных осях; таким образом,

$$\lambda = -\left(\frac{kU}{w}\right)^{1/2}, \tag{6.13.10}$$

где k — постоянная, подлежащая определению путем установления соответствия между положениями точки B в двух плоскостях.

Итак, искомая связь между w и Ω имеет вид

$$\lambda = -\left(\frac{kU}{w}\right)^{1/2} = i \operatorname{sh} \Omega = \frac{i}{2}\left(U\frac{dz}{dw} - \frac{1}{U}\frac{dw}{dz}\right).$$

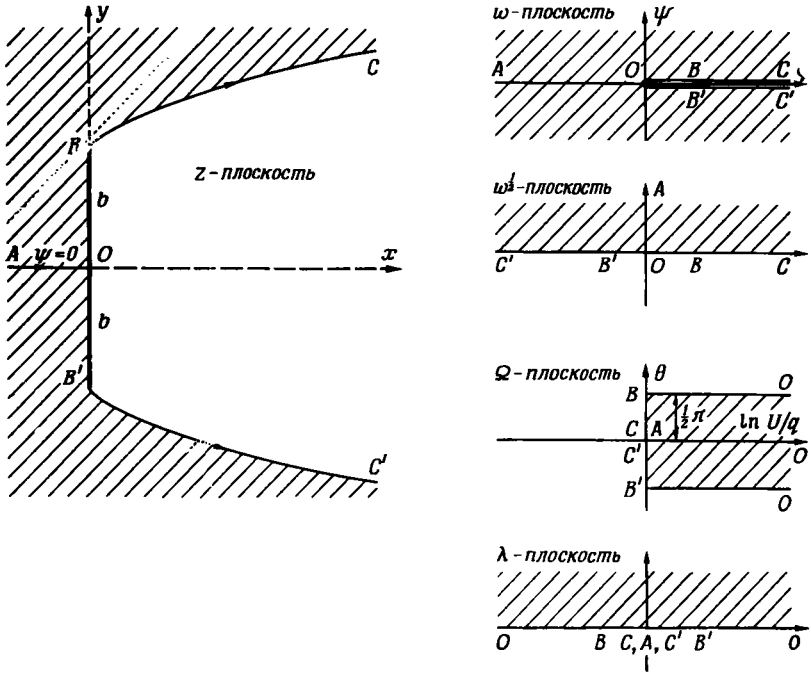
Отсюда

$$\frac{1}{U}\frac{dw}{dz} = -i\left(\frac{kU}{w}\right)^{1/2} \mp \left(1 - \frac{kU}{w}\right)^{1/2}, \tag{6.13.11}$$

причем отрицательный корень можно отбросить, так как $(dw/dz) = 0$ в точке O, где $w = 0$. Интегрирование дифференциального

---

[1]) Позже в этом параграфе мы рассмотрим более общий случай.



Р и с. 6.13.2. Конформные преобразования, используемые для определения обтекания плоской пластины с каверной под давлением окружающей среды.

уравнения (6.13.11) дает

$$\frac{z-z_0}{k}=2i\left(\frac{w}{kU}\right)^{1/2}+\left(\frac{w}{kU}\right)^{1/2}\left(\frac{w}{kU}-1\right)^{1/2}+$$
$$+\frac{\pi i}{2}-\ln\left[\left(\frac{w}{kU}\right)^{1/2}+\left(\frac{w}{kU}-1\right)^{1/2}\right], \quad (6.13.12)$$

где z_0 — постоянная, которая должна быть равна нулю, чтобы при $w=0$ было $z=0$. Теперь мы можем определить постоянную k, учитывая, что в точке B, где $\lambda=-1$,

$$z=ib, \quad \frac{w}{kU}=1;$$

в результате

$$k=\frac{2b}{\pi+4}, \quad (6.13.13)$$

где $2b$ — ширина пластины.

Теперь может быть определена форма свободных линий тока. Поскольку $w=kU$ в точке B, то на свободной линии тока BC

имеем

$$w = \varphi = U(k + s), \qquad \Omega = i\theta,$$
$$\lambda = -\sin\theta = -\left(\frac{k}{k+s}\right)^{1/2}, \tag{6.13.14}$$

где s — расстояние вдоль свободной линии тока, отсчитываемое от точки B. Действительная и мнимая части функции (6.13.12) при подстановке w из (6.13.14) дают параметрическое уравнение свободной линии тока BC:

$$x = (s^2 + sk)^{1/2} - k\ln\left[\left(\frac{s}{k}+1\right)^{1/2} + \left(\frac{s}{k}\right)^{1/2}\right], \tag{6.13.15}$$

$$y = 2(sk + k^2)^{1/2} + \frac{k\pi}{2}, \tag{6.13.16}$$

где k определено формулой (6.13.13). Каверна простирается вниз по потоку на бесконечность, и ее граница асимптотически приближается к параболе

$$y^2 = 4kx = \frac{8b}{\pi+4}x. \tag{6.13.17}$$

Если бы каверна имела конечную длину, то на основании известного свойства установившегося безвихревого течения (§ 6.4) сила сопротивления, действующая со стороны жидкости на тело вместе с каверной, была бы равна нулю и, следовательно, была бы равна нулю и сила сопротивления, действующая на тело. Однако это свойство в данном случае неприменимо и сила сопротивления, очевидно, отлична от нуля, так как скорость жидкости на передней стороне пластины везде меньше U. Результирующая сила давления на пластину действует в направлении потока и имеет величину

$$D = \int_{-b}^{b} (p - p_0)_{x=0}\, dy = \int_0^b \rho U^2\, dy - \int_0^{kU} \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=0} d\varphi,$$

где p_0 — давление на бесконечности и в каверне. Производная $-\partial\varphi/\partial y$ равна мнимой части от dw/dz, а на отрезке OB потенциал есть $w = \varphi < kU$; отсюда с учетом (6.13.11) и (6.13.13) следует, что

$$D = \rho U^2 b - \rho U^2 k \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{\gamma}}\, d\gamma = \frac{2\pi}{\pi+4}\rho U^2 b \qquad \left(\gamma = \frac{\varphi}{kU}\right).$$

Таким образом, коэффициент сопротивления равен

$$C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 2b} = \frac{2\pi}{\pi+4} = 0{,}88. \tag{6.13.18}$$

Наблюдения показывают, что если прямоугольная пластина с одной из сторон значительно больше другой (это необходимо

для приближения потока к двумерному), расположена нормально к потоку при большом числе Рейнольдса, то при отсутствии каверны коэффициент сопротивления равен приблизительно двум, т. е. больше чем в два раза превосходит расчетный.

Причины того, что теория свободных линий тока в этом случае неприменима, в общих чертах уже излагались; точнее говоря, увеличение коэффициента лобового сопротивления течения без каверны происходит вследствие появления значительного разрежения (по отношению к давлению окружающей среды) в следе сразу за пластиной.

Двумерное течение за плоской пластиной шириной $2b$, которая наклонена под произвольным углом α к потоку и за которой имеется каверна с давлением окружающей среды, можно рассчитать почти тем же способом (Рэлей (1876)). Установлено, что свободные линии тока на границах такой каверны асимптотически приближаются к параболе

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{8\sin^2\alpha}{\pi\sin\alpha + 4}\,\frac{x}{b}\,, \tag{6.13.19}$$

а сила, действующая на пластину, равна

$$D = \frac{2\pi\sin^2\alpha}{\pi\sin\alpha + 4}\,\rho U^2 b. \tag{6.13.20}$$

Эта результирующая сила направлена обязательно по нормали к пластине, что дает «подъемную» силу $D\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ по нормали к направлению невозмущенного потока.

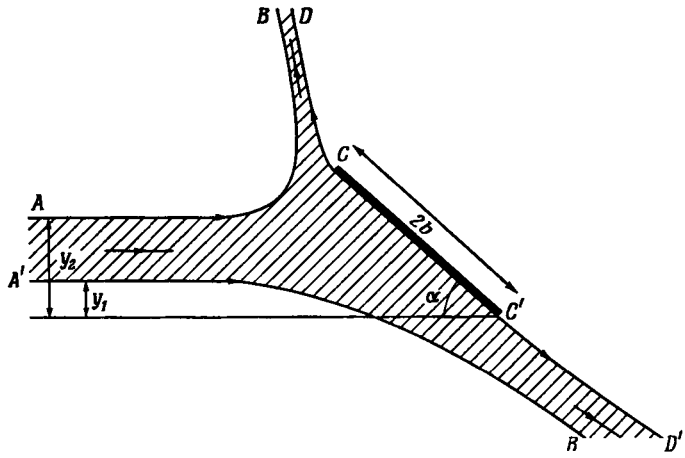
Уравнение параболы (6.13.19) и формула (6.13.20) определяют зависимость между силой сопротивления и единственным параметром длины, входящим в уравнение параболы, к которой асимптотически стремятся границы каверны:

$$\frac{D}{\rho U^2} = \pi \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y^2}{4x}\right)_{\text{на границе каверны}} \tag{6.13.21}$$

Общий метод определения двумерного течения за телом с *криволинейной* границей произвольного вида с присоединенной к нему каверной под давлением окружающей среды был разработан Леви-Чивитой (1907), и можно показать, что каверна асимптотически имеет форму параболы и что сопротивление связано с параметром асимптотической параболы той же самой зависимостью (6.13.21) [1]. Аналогичный общий результат для осесимметричных тел и каверн математически более сложно был установлен Левинсоном (1946)[2]. Граница осесимметричной каверны с давлением окружающей сре-

---

1) См. Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, «Мир»., М., 1964, § 12.4.
2) Этот результат был независимо опубликован М. И. Гуревичем в 1947 г. (см. Гуревич (1961), гл. II).— *Прим. ред.*



Р и с. 6.13.3. Общая картина струи, ударяющей о наклонную пластину с каверной под давлением окружающей среды.

ды асимптотически стремится к поверхности

$$\sigma^2 = \frac{4lx}{(\ln x)^{1/2}}, \qquad (6.13.22)$$

где (x, σ) — координаты цилиндрической системы координат с началом вблизи тела, а l — постоянная с размерностью длины, зависящая от формы и размера тела; сила сопротивления осесимметричного тела равна $2\pi\rho U^2 l^2$.

С помощью использованного выше метода можно определить несколько других двумерных течений около пластины с присоединенной к ней каверной под давлением окружающей среды. Довольно общая картина течения, которая охватывается данным методом и включает в качестве специальных случаев несколько интересных течений, изображена на рис. 6.13.3. Невозмущенный поток представляет собой прямую струю постоянной скорости U с параллельными свободными границами, находящимися на расстоянии $(y_2 - y_1)$ друг от друга. Если $y_2 \to \infty$ и $y_1 \to -\infty$, то мы возвращаемся к наклонной пластине с присоединенной к ней каверной в безграничном потоке; если $(y_2 - y_1) \ll y_1$ и $0 < y_1 < 2b \sin\alpha$, то мы получаем удар струи о наклонную плоскую стенку, к которому в § 6.3 применялась теорема количества движения, а при $y_1 \to -\infty$ мы встречаемся с новым случаем наклонной пластины, глиссирующей по свободной поверхности полубесконечной массы воды (влияние силы тяжести на это течение не учитывается). В этом последнем случае струя, ограниченная свободной линией тока CD, обычно называемая «брызговой», отбрасывается от пластины в направлении, которое зависит от величины y_2, хотя в действитель-

ности она в конце концов снова падает на поверхность воды под действием силы тяжести, что до некоторой степени затрудняет использование теоретического решения.

Можно получить некоторое представление о форме поля течения, подобного течению, изображенному на рис. 6.13.3, в котором скорость $q = U$ на каждой свободной линии тока, замечая, что свободные линии тока, по-видимому, всюду выпуклы в сторону жидкости. Это следует из равенства (6.2.13) и других результатов § 6.2, показывающих, что скорость q не может иметь максимума во внутренней точке жидкости; исключением может быть только максимум скорости q на твердой границе в точке присоединения свободной линии тока.

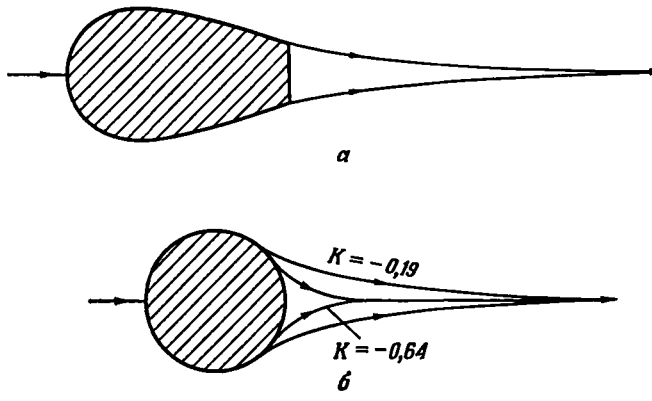
Стационарные каверны, присоединенные к телам в потоке жидкости

Мы закончим этот параграф тем, что кратко опишем некоторые характерные свойства установившегося течения около тел с присоединенными к ним кавернами (в дополнение к замечаниям, сделанным в конце предыдущего параграфа) и соответствующие вопросы теории безвихревого течения. Проблема в целом оказывается трудной вследствие как многочисленности физических факторов (прочность жидкости на разрыв, сила тяжести, вязкость), оказывающих влияние при различных условиях, так и сложности математической теории в случаях, отличающихся от двумерного течения около тел с прямолинейными границами и присоединенными к ним кавернами под давлением окружающей среды; многие аспекты этой проблемы пока еще не выяснены.

Наиболее важным параметром, определяющим форму каверны и течения в целом, является число кавитации, которое, как и в (6.12.12), можно написать в виде

$$K = \frac{p_0 - p_c}{(1/2)\,\rho U^2} = \frac{U_c^2}{U^2} - 1, \tag{6.13.23}$$

где p_0 — давление окружающей среды для каверны (предполагаемое постоянным), p_c — давление в каверне, U — скорость невозмущенного потока и U_c — постоянная скорость жидкости на свободных линиях тока на границе каверны. В этом параграфе до сих пор рассматривались только кавитационные течения при $K = 0$, математически самые простые. Такие каверны, по-видимому, образуются за телами при входе в воду, как показано на фото 6.12.6, хотя соответствие с приведенными выше математическими решениями в лучшем случае является кратковременным (§ 6.12). Если каверна за телом в потоке воды образуется искусственно путем выдува воздуха из кормовой части тела, то число кавитации можно регулировать в определенных пределах, одна-



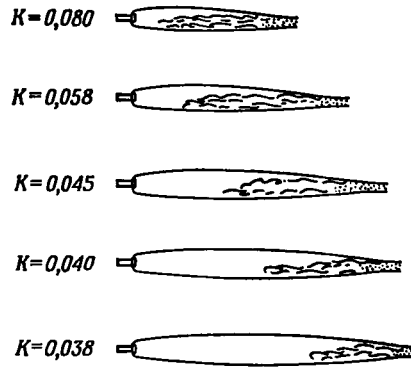
Р и с. 6.13.4. Каверны в установившемся двумерном безвихревом течении около тел с каверной под давлением, большим, чем давление окружающей среды; *а* — каверна за срезанным профилем при $K = -0{,}111$, $U_c/U = 0{,}943$, конформное преобразование (Лайтхилл (1949)); *б*— каверна за круговым цилиндром при $K = -0{,}19$, $U_c/U = 0{,}9$ и $K = -0{,}64$, $U_c/U = 0{,}6$, численный анализ (Саусвелл и Вайси (1946)).

ко стационарная каверна при $K = 0$ имеет бесконечную протяженность и не может быть реализована в таких экспериментах; проводились наблюдения течения за осесимметричными телами с присоединенными кавернами с числом кавитации K, принимающим значения между нулем и 0,5, и эти наблюдения позволяют экстраполировать, например, измерения сопротивления тела на число кавитации $K = 0$. Кроме того, очень малые положительные значения K могут встретиться в случае движущегося под водой с большой скоростью снаряда с присоединенной к нему каверной, в которой давление p_c равно давлению пара.

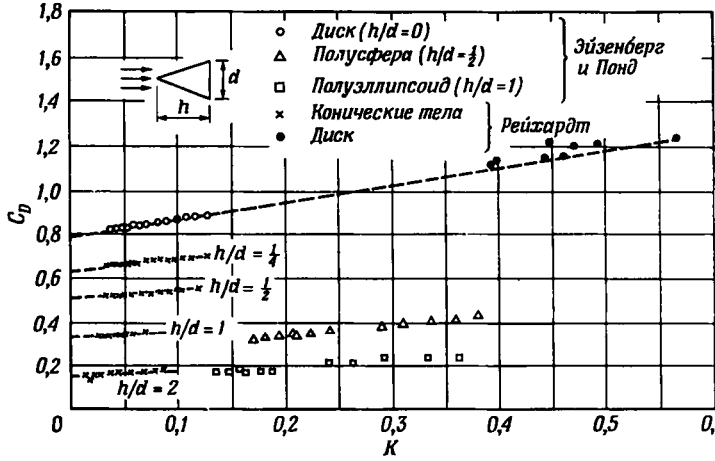
Математические и физические свойства установившихся кавитационных течений с числом кавитации $K \neq 0$ полностью не изучены. Если $K < 0$, то скорость на свободных линиях тока меньше скорости невозмущенного потока, и, по-видимому, необходимо, чтобы точка отделения свободной линии тока от тела находилась в области малых скоростей в кормовой части тела. Известные решения для двумерных кавитационных течений с числом кавитации $K < 0$ дают формы каверны, изображенные на рис. 6.13.4; для них типичны конечная длина каверны и точка возврата на ее конце, и они являются следствиями условия $U_c < U$ [1]). Такие каверны не наблюдались, возможно, вследствие того, что пограничный слой на твердой поверхности отрывается раньше достижения области низких скоростей, где начинаются свободные линии тока.

Каверны, для которых $K > 0$, представляют физический интерес, так как стационарная каверна, образующаяся при появлении

1) Такая схема кавитационного течения была указана С. А. Чаплыгиным в 1899 г.— *Прим. ред.*



Р и с. 6.13.5. Стационарные каверны, присоединенные к круговому диску при положительных числах кавитации (Рейхардт (1948)).



Р и с. 6.13.6. Измерения силы сопротивления различных осесимметричных тел с кавернами при положительных значениях числа кавитации (Рейхардт (1946), Эйзенберг и Понд ; (1948)). Каждая штриховая линия соответствует формуле $C_D = C_{D0}\,(1 + K)$.

областей растяжения жидкости, представляет собой именно такую каверну, в которой давление является наименьшим во всей области течения. Схемы таких каверн, наблюдавшихся при различных положительных значениях K, а также образованных путем вдува воздуха за круглым диском в гидроканале, показаны на рис. 6.13.5; формы каверн, по-видимому, зависят только от K. Когда $K \to 0$, каверна удлиняется, и форма ее границы при достаточном удалении от диска, по-видимому, все ближе приближается к параболоидальной, определяемой уравнением (6.13.22). Измерения силы сопро-

тивления, действующей на диск и на другие осесимметричные тела при различных значениях K, представлены на рис. 6.13.6. Коэффициент сопротивления для кругового диска при $K = 0$, полученный путем экстраполяции, равен 0,80; он весьма близок к величине коэффициента сопротивления двумерной пластины, нормальной к направлению потока (0,88), несомненно вследствие того, что давление на большей части передней поверхности пластины в обоих случаях мало отличается от давления в критической точке.

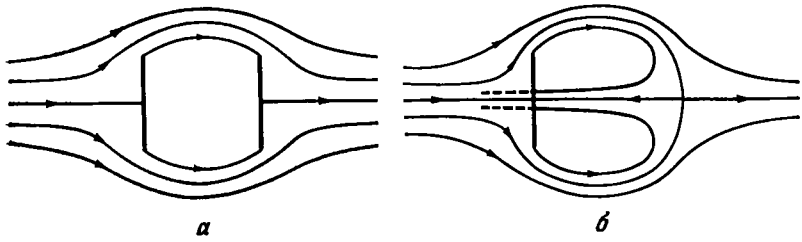
Простая формула для коэффициента сопротивления в зависимости от числа кавитации K, которая, как установлено, удовлетворительно соответствует опытным данным для всех тел, использованных на рис. 6.13.6, имеет вид

$$C_D = C_{D0}(1 + K), \tag{6.13.24}$$

где C_{D0} — коэффициент сопротивления при $K = 0$. Эта формула может быть теоретически обоснована исходя из двух предположений. Первое из них заключается в том, что линия пересечения поверхности каверны и поверхности тела не изменяется с изменением K; это, несомненно, справедливо для тел с выступающей острой кромкой. Второе предположение состоит в том, что при изменении давления в каверне и при заданных p_0 и U скорость в любой точке на смоченной поверхности тела пропорциональна U_c; это справедливо для двух концевых точек каждой линии тока на поверхности тела (одним концом является критическая точка, а другим —точка присоединения каверны, где скорость равна U_c) и может быть разумным приближением для промежуточных точек. Тогда из теоремы Бернулли следует, что в каждой точке на поверхности тела избыточное давление по отношению к давлению в каверне пропорционально U и соответственно $(1 + K)$, и, значит, сила сопротивления соответствует формуле (6.13.24).

Теоретически не было построено ни одной схемы установившегося кавитационного течения с числом кавитации $K > 0$, которая не имела бы нереальных особенностей. Трудность состоит в замыкании каверны со стороны, удаленной от тела. Отметим два наиболее известных способа преодолеть эту трудность для двумерного течения (отчасти жертвуя возможным соответствием с действительностью); эти способы показаны на рис. 6.13.7 для примера течения около плоской пластины. Первый способ, предложенный Рябушинским (1919), основан на предположении, что все поле течения симметрично относительно поперечной плоскости и что на некотором расстоянии вниз по потоку от первой пластины существует вторая «отраженная» пластина [1]). Второй способ заключается в том, что свободные линии тока поворачиваются в противоположную сторону и образуют струю, движущуюся к кормовой части

[1]) Вместо пластивы на некотором расстоянии вниз по потоку можно поместить тело и другой формы так, чтобы на нем заканчивались свободные линии тока.



Р и с. 6.13.7. Две схемы течения около плоской пластины с каверной под давлениам меньшем, чем давление окружающей среды ($K > 0$);
а — схема с отраженной пластиной; *б* —схема с возвратной струей.

пластины (это нереально, но возможно в теоретическом решении, так как струя продолжается на втором листе римановой поверхности)[1]).

Идея, лежащая в основе использования каждого из таких способов, заключается в том, что с их помощью предполагается возможным реально описать течение вблизи тела; на фото 6.12.5 видно, что кормовая часть каверны при положительном значении K плохо определена, и можно говорить о ее форме только в статистическом смысле. Некоторые фотографии каверн, присоединенных к телам при $K > 0$, указывают на то, что имеется тенденция к заполнению каверны со стороны кормовой ее части вспененной массой воды и к последующему внезапному сбрасыванию вниз по потоку содержимого каверны с периодическим повторением этого процесса.

Наконец отметим, что когда линия, по которой свободная поверхность тока отходит от тела, не фиксируется выступающей острой кромкой, возникают новые вопросы. Неясно даже в принципе, каким образом определить точки отрыва на теле с гладкой границей, хотя некоторые ограничения ее положения очевидны. Можно легко заметить, исходя из равенств (6.13.14), что кривизна $d\theta/ds$ свободной линии тока, срывающейся с края плоской пластины в двумерном течении, изменяется как $s^{-1/2}$ вблизи $s = 0$, и действительно имеется общее математическое свойство границ каверны (во всяком случае, в двух измерениях), заключающееся в том, что кривизна может быть бесконечной в точке присоединения к твердой границе независимо от того, прямолинейная эта граница или криволинейная. Знак кривизны в точке присоединения может быть отрицательным или положительным в зависимости от числа кавитации (свободная граница направлена к жидкости выпуклостью в случаях, изображенных на рис. 6.13.2 и 6.13.7, и вогнутостью — в случае рис. 6.13.4). Свободные линии тока обязательно отходят от твердой границы

1) Схема течения на рис. 6.13.7, *б* была предложена Д. А. Эфросом (1946). Известны и другие схемы кавитационных течений при $K \neq 0$. Однако реальному кавитационному течению с вязким следом за каверной соответствует замыкание каверны на некоторое полубесконечное тело вытеснения, форма которого определяется условием совпадения давлений на его поверхности в потенциальном потоке и вдоль следа в реальном потоке.— *Прим. ред.*

по касательной, поскольку иначе скорость в точке отхода должна быть равна нулю или бесконечности, так что свободные линии тока, которые не пересекают поверхность тела, можно построить лишь для некоторых сочетаний числа кавитации и положения точки отхода.

Упражнения к главе 6

1. Двумерный поток невязкой жидкости ограничен с одной стороны плоской стенкой, из которой в жидкость по нормали к стенке выступает тонкая пластина конечной длины. Течение жидкости безвихревое и однородно вдали от стенки. Используя преобразование Кристоффеля— Шварца, определите комплексный потенциал течения и проверьте, что результирующая сила, действующая со стороны жидкости на стенку, равна с противоположным знаком подсасывающей силе на острой кромке пластины.

2. Твердый сосуд в форме эллипсоида с полуосями a, b, c вращается с угловой скоростью Ω относительно оси, проходящей через его центр, и жидкость, содержащаяся в нем, находится в состоянии безвихревого движения. Покажите, что потенциал скорости течения равен сумме трех членов вида $\zeta xy\,(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$, где ξ, η, ζ — компоненты вектора Ω в направлениях главных осей эллипсоида, и что каждая частица жидкости движется относительно сосуда по поверхности эллипсоида, подобного сосуду.

3. а) Жидкость в виде «языка» движется под действием силы тяжести по наклонной плоскости, погружаясь в более легкую жидкость, которая на достаточном удалении от плоскости находится в состоянии покоя. Течение двумерное и установившееся в системе координат, движущейся вместе с языком. Покажите, что если влияние вязкости пренебрежимо мало, то касательная к поверхности раздела между двумя жидкостями в передней точке языка составляет с плоскостью угол 60°.

б) Прогрессивная волна стационарной формы с прямыми гребнями на свободной поверхности тяжелой воды большой глубины движется с наибольшей возможной (до опрокидывания) амплитудой. Движение воды под поверхностью безвихревое. Известно, что при этих условиях вода вблизи гребня имеет форму клина с вершиной на гребне и с двумя гранями, симметричными относительно вертикали. Покажите, что угол между гранями этого клина равен 120°.

4. Две одинаковые, но направленные в противоположные стороны круглые струи воды в воздухе симметрично соударяются и образуют слой воды, распространяющийся в радиальных направлениях в плоскости симметрии. Какие физические факторы ограничивают направленное наружу движение в слое? Получите оценку радиуса круговой внешней границы слоя (Тейлор (1959)).

7

ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНО НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

7.1. Введение

В этой главе мы продолжим исследование течения однородной несжимаемой жидкости при условиях, когда непосредственным влиянием вязкости можно пренебречь. Что касается завихренности, то мы будем считать ее отличной от нуля по крайней мере в некоторой части жидкости. В силу этого предположения теперь уже невозможно построить столь развитую теорию и проанализировать столь многочисленные характерные поля течений, как это было сделано для полностью безвихревого течения, так как, вообще говоря, мы больше не располагаем линейными уравнениями движения.

Напомним кинематический результат из § 2.4, согласно которому скорость несжимаемой жидкости, индуцированная распределением завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, равна

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{s}\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{s^3}\,dV(\mathbf{x}'), \tag{7.1.1}$$

где $\mathbf{v}$ — безвихревой (соленоидальный) вектор, $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, а интеграл берется по всему объему жидкости (или по несколько большему объему, если $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на границе жидкости, см. § 2.4). Если распределение завихренности известно, то безвихревая часть $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ будет определена в общем случае граничными условиями, наложенными на скорость $\mathbf{u}$; иначе говоря, мы можем считать, что граничные условия для $\mathbf{u}$ удовлетворяются путем введения некоторого воображаемого распределения завихренности на границе при скорости $\mathbf{v}$, равной нулю.

Вступительные замечания § 6.1 относительно роли теории течения невязкой жидкости остаются в силе и для этой главы. Основные уравнения, полученные в § 6.1, применимы также и здесь; это уравнение сохранения массы,

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

и уравнение движения, содержащее в качестве массовой силы, действующей на жидкость, только силу тяжести,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{7.1.2}$$

В этом уравнении $\mathbf{g}$ и ρ — постоянные величины. Нам придется, кроме того, использовать соотношение (6.2.3), которое представ-

ляет собой просто другую запись уравнения движения. Стоящая в квадратных скобках в (6.2.3) величина была обозначена через H при выводе теоремы Бернулли для установившегося течения (см. (3.5.16)); это обозначение удобно и при более общих условиях; итак, положим

$$\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}-\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\nabla H, \tag{7.1.3}$$

где

$$H=\frac{1}{2}q^2+\frac{p}{\rho}-\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}, \tag{7.1.4}$$

а $q^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. В этой главе мы не будем касаться течений жидкости со свободной поверхностью и поэтому, как обычно, освободимся в (7.1.2) и (7.1.4) от члена, содержащего силу тяжести, включив его в давление; таким образом, ниже будем считать p модифицированным давлением.

В этой главе особенно удобно использовать уравнение для завихренности, которое получается путем взятия ротора от обеих частей уравнений (7.1.2) или (7.1.3):

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega})\quad\text{или}\quad\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}=\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}. \tag{7.1.5}$$

Как было показано в § 5.3 в качестве следствия этого уравнения, вихревые трубки движутся вместе с жидкостью и имеют постоянную напряженность.

В случае двумерного течения отличной от нуля является только компонента завихренности, нормальная к плоскости течения (обозначим эту компоненту ω). В этом случае градиент скорости $\mathbf{u}$ в направлении вектора завихренности равняется нулю, так что уравнение (7.1.5) принимает вид

$$\frac{D\omega}{Dt}=0. \tag{7.1.6}$$

Поскольку в двумерном движении не происходит вращения или растяжения вихревых линий, то завихренность каждого элемента жидкости остается постоянной.

Другим случаем, в котором уравнение (7.1.5) принимает простую форму, является осесимметричное течение без «закрутки» (т. е. без азимутального движения), когда вектор завихренности в любой точке течения нормален плоскости, содержащей эту точку и ось симметрии течения. В цилиндрических координатах (x, σ, φ) с компонентами скорости (u, v, w) и единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ вдоль соответствующих координатных линий мы имеем

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k},\quad\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}=\frac{D\omega}{Dt}\mathbf{k},\qquad\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}=\frac{\omega v}{\sigma}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial\varphi}=\frac{\omega v}{\sigma}\mathbf{k},$$

так что (7.1.5) принимает вид

$$\frac{D(\omega/\sigma)}{Dt} = 0. \tag{7.1.7}$$

Это уравнение выражает постоянство напряженности жидкой вихревой трубки малого поперечного сечения и длины $2l\sigma$.

Уравнения, подобные (7.1.6) и (7.1.7), особенно полезны при изучении установившегося течения, когда из равенства нулю субстанциональной производной какой-либо величины следует ее постоянство вдоль линии тока. Итак, для установившегося течения (7.1.3) приводится к виду

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla H, \tag{7.1.8}$$

точно такому же, как и для общего установившегося гомоэнтропического течения (см. (3.5.9)). Таким образом, для установившегося течения

$$\mathbf{u} \cdot \nabla H = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla H = 0; \tag{7.1.9}$$

отсюда следует, что на поверхности, на которой лежат пересекающиеся семейства линий тока и вихревых линий, величина H постоянна. Поверхность постоянного значения величины H обычно называется *поверхностью Бернулли* (несмотря на то, что в § 3.5 теоремой Бернулли назван результат о постоянстве H вдоль линии тока в установившемся течении).

Самоиндуцированное движение вихревой нити

В § 2.6 было введено понятие вихревой нити, т. е. вихревой трубки с бесконечно малым поперечным сечением и отличной от нуля напряженностью. Проведенное там кинематическое обсуждение мы теперь можем дополнить следствиями из динамической теоремы, согласно которой вихревая трубка движется вместе с жидкостью, не изменяя своей напряженности, и получить зависимость изменения формы вихревой нити со временем. Приводимый ниже результат о движении вихревой нити имеет ограниченное применение, однако он является довольно неожиданным и имеет важное следствие для приближенного математического представления реальных распределений завихренности.

Используя распределение скорости в жидкости (7.1.1), попытаемся оценить скорость в точках вблизи вихревой нити. Предположим, что вихревая нить (напряженности $\varkappa$) находится в неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности, причем внутренних границ в жидкости нет; это означает, что $\mathbf{v} = 0$ всюду в жидкости, так что в (7.1.1) остается только интеграл. Кроме того, предположим, что в точках жидкости, не лежащих на вихревой нити, завихренность равна нулю, и тогда (7.1.1) запишется в следующем

виде (см. (2.6.3)):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\varkappa}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{s}\times d\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{s^3}, \tag{7.1.10}$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, а $\delta\mathbf{l}$ —элемент замкнутой кривой интегрирования, совпадающей с вихревой нитью. Как было установлено в § 2.6, мы можем переписать (7.1.10) иначе:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\varkappa}{4\pi}\nabla\Omega, \tag{7.1.11}$$

где Ω — телесный угол, образованный прямыми, идущими из точек замкнутой вихревой нити в точку $\mathbf{x}$. Из этих двух формул видно, что распределение скорости имеет особенности в точках вихревой нити. Ясно, что вокруг любого участка вихревой нити имеется циркуляционное движение со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию до вихревой нити при приближении к ней, однако такое циркуляционное движение жидкости может вызвать лишь поворот бесконечно малого поперечного сечения этого участка вихревой нити относительно его центра и не может сообщить ему поступательного движения. Необходимо более тщательно изучить $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в точках вблизи вихревой нити для того, чтобы определить, каков будет результат, если вычесть циркуляционное движение.

Рассмотрим индуцированную скорость в окрестности точки O вихревой нити; для этого выберем (естественную) систему ортогональных осей: по направлению касательной, главной нормали и бинормали к вихревой нити в точке O, как показано на рис. 7.1.1. Взяв точку O в качестве начала, а $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — в качестве единичных векторов вдоль выбранных осей, радиус-вектор точки в плоскости, нормальной вихревой нити в точке O, можно записать в виде

$$\mathbf{x} = x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{b};$$

наша задача теперь состоит в выражении скорости в этой точке при условии $(x_2^2 + x_3^2)^{1/2}\ (= \sigma) \to 0$. Далее, в определенном интервале расстояний l вдоль вихревой нити от точки O, скажем в $-L \leqslant l \leqslant L$, радиус-вектор $\mathbf{x}'$ точки, лежащей на вихревой нити, записывается как

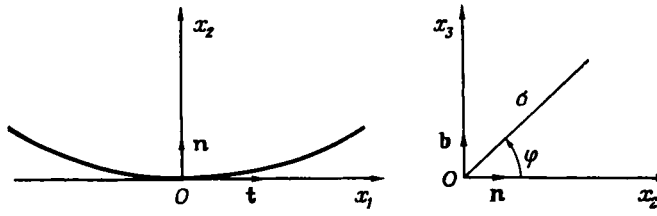
$$\mathbf{x}' \approx l\mathbf{t} + {}^1/_2 cl^2\mathbf{n},$$

где c — кривизна вихревой нити в точке O. Таким образом, вблизи точки O имеем

$$\delta\mathbf{l}(\mathbf{x}') \approx (\mathbf{t} + cl\mathbf{n})\,\delta l$$

и

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\times\delta\mathbf{l}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \approx \frac{-x_3 cl\mathbf{t} + x_3\mathbf{n} - (x_2 + (1/2)\,cl^2)\,\mathbf{b}}{\{x_2^2 + x_3^2 + l^2(1 - x_2 c) + (1/4)\,c^2 l^4\}^{3/2}}\,\delta l.$$



Р и с. 7.1.1. Схематическое определение индуцированной скорости вблизи вихревой нити.

Вклад в величину скорости в точке $(0, x_2, x_3)$ или $(0, \sigma\cos\varphi, \sigma\sin\varphi)$ от указанного выше участка вихревой нити, таким образом, равен

$$\frac{\varkappa}{4\pi}\int_{-L/\sigma}^{L/\sigma}\frac{(\mathbf{b}\cos\varphi-\mathbf{n}\sin\varphi)\,\sigma^{-1}+(1/2)\,cm^2\mathbf{b}}{\{1+m^2(1-c\sigma\cos\varphi)+(1/4)\,c^2\sigma^2m^4\}^{3/2}}\,dm, \qquad (7.1.12)$$

где $m = l/\sigma$. При $\sigma\to 0$ знаменатель подинтегрального выражения стремится к $(1+m^2)^{3/2}$ и результат (7.1.12) принимает асимптотический вид

$$\frac{\varkappa}{2\pi\sigma}(\mathbf{b}\cos\varphi-\mathbf{n}\sin\varphi)+\frac{\varkappa c}{4\pi}\mathbf{b}\ln\frac{L}{\sigma}+\text{const}. \qquad (7.1.13)$$

Вклад в скорость в точке O от участков вихревой нити, лежащих вне интервала $-L \leqslant l \leqslant L$, конечно, ограничен, и этой информации о нем для нас будет достаточно.

Первый из двух переменных членов в (7.1.13) выражает отмеченное выше циркуляционное движение вокруг вихревой нити и не вызывает ее смещения. Второй член в (7.1.13) появился впервые и свидетельствует о том, что в распределении скорости имеется другая и более слабая особенность, связанная с локальной кривизной вихревой нити. Видно, что жидкость в окрестности точки O на вихревой линии имеет большую скорость в направлении бинормали, причем величина этой скорости изменяется асимптотически как $\ln\sigma^{-1}$. Таким образом, идеальная криволинейная вихревая нить должна будет двигаться и в общем случае изменять свою форму с бесконечной скоростью. Вывод из этого состоит в том, что если кривизна трубки c отлична от нуля, то имеются большие скорости движения и деформации интенсивной вихревой трубки малого поперечного сечения, которые сильно зависят от ее величины. Вывод этот практически малопригоден, поскольку вряд ли можно получить информацию о площади поперечного сечения трубки.

Итак, мы установили, что изолированная криволинейная вихревая нить движется с бесконечной скоростью под действием индуцированного ею поля скорости; очевидно, что этот вывод не теряет своей общности и в предположениях, использованных ранее при

Приложение 1

Весовой состав сухого воздуха на уровне моря

N_2	O_2	Ar	CO_2
0,7552	0,2315	0,0128	0,0005

б) Стандартная атмосфера: средние значения давления, плотности и температуры на умеренных широтах, принятые по международному соглашению

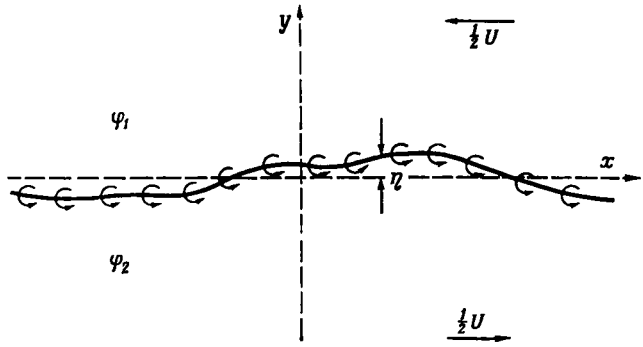
Высота над уровнем моря, м	Давление, дин/см²	Плотность, г/см³	Температура, °С
0	$1{,}013 \cdot 10^6$	$1{,}226 \cdot 10^{-3}$	15,0
500	0,955	1,168	11,7
1 000	0,899	1,112	8,5
1 500	0,845	1,059	5,2
2 000	0,795	1,007	2,0
3 000	0,701	0,910	—4,5
4 000	0,616	0,820	—11,0
5 000	0,540	0,736	—17,5
6 000	0,472	0,660	—24,0
8 000	0,356	0,525	—37,0
10 000	0,264	0,413	—50,0
12 000	0,193	0,311	—56,5
14 000	0,141	0,227	—56,5
16 000	0,103	0,165	—56,5
18 000	0,075	0,121	—56,5

в) Чистая вода

Коэффициент сжимаемости (изотермический)	$4{,}9 \cdot 10^{-11}$ см²/дин или $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ атм$^{-1}$					
Скрытая теплота плавления льда	334 дж/г					
Плотность льда	0,92 г/см³					
Коэффициент диффузии NaCl в воде при 15° С и произвольной концентрации	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$ см²/сек					
Коэффициент диффузии $KMnO_4$ в воде при 15° С и нулевой концентрации	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$ см²/сек					
Весовое процентное содержание безводного NaCl в растворе при 15° С	0	5	10	15	20	25
Плотность раствора, г/см³	0,999	1,035	1,072	1,110	1,149	1,190
Теплоемкость раствора при постоянном давлении, дж/г·град	4,19	4,16	4,13	4,10	4,07	4,04

в) Чистая вода (продолжение)

Температура T, °C	Плотность ρ, г/см³	Коэффициент теплового расширения β, 1/град	Теплоемкость, дж/г·град		Давление пара, дин/см²	Скрытая теплота парообразования, дж/г	Объем воздуха в 1 см³ насыщенной воды (приведено к 20° С), см³	Весовое процентное содержание безводного NaCl в насыщенном растворе	Скорость звука, см/сек
			c_p	$c_p - c_v$ (вычисленное по (1.8.2))					
0	0,9999	$-0{,}6 \cdot 10^{-4}$	4,217	0,002	$6{,}1 \cdot 10^3$	$2{,}501 \cdot 10^3$	0,0292	26,4	$1{,}407 \cdot 10^5$
5	1,0000	+0,1	4,202	0	8,7	2,489	0,0257		
10	0,9997	0,9	4,192	0,005	12,3	2,477	0,0228		1,445
15	0,9991	1,5	4,186	0,013	17,0	2,465	0,0205		
20	0,9982	2,1	4,182	0,024	23,3	2,454	0,0187	26,5	1,484
25	0,9971	2,6	4,179	0,041	31,6	2,442	0,0171		
30	0,9957	3,0	4,178	0,06	42,3	2,430	0,0157		1,510
35	0,9941	3,4	4,178	0,07	56				
40	0,9923	3,8	4,178	0,09	74	2,406		26,8	1,528
50	0,9881	4,5	4,180	0,13	123	2,382			1,544
60	0,9832	5,1	4,184	0,18	199	2,357		27,2	1,556
70	0,9778	5,7	4,189	0,23	311	2,333			1,561
80	0,9718	6,2	4,196	0,29	473	2,308		27,7	1,557
90	0,9653	6,7	4,205	0,34	701	2,283			
100	0,9584	7,1	4,216	0,40	1013	2,257		28,5	



Р и с. 7.1.2. Схема возникновения неустойчивости плоской вихревой пелены по отношению к малому возмущению.

заметим, что само возмущение не предполагается двумерным. Величины η, φ_1 и φ_2 взаимосвязаны, так как вихревая пелена представляет собой жидкую поверхность, которая остается границей двух областей жидкости. Рассматривая вихревую пелену как границу верхней области, находим

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)_{y=\eta} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(-\frac{1}{2}U + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z};$$

учитывая малые возмущения с точностью до членов первого порядка, отсюда получаем

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{1}{2}U\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{7.1.14}$$

Аналогичным образом, считая вихревую пелену границей нижней области, находим приближенно

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{2}U\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{7.1.15}$$

В дополнение к этим кинематическим условиям сращивания на общей границе двух потоков должно выполняться условие для давления. Если два потока одной и той же жидкости прилегают друг к другу, то на поверхности раздела поверхностное натяжение равно нулю и давление должно быть непрерывным при переходе через эту поверхность, т. е.

$$(p_1 - p_2)_{y=\eta} = 0. \tag{7.1.16}$$

В каждой из двух областей жидкости давление определяется выражением (см. (6.2.5))

$$p = \text{const} - \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gy + \frac{1}{2}q^2\right).$$

Подставляя соответствующие выражения для p_1 и p_2 в (7.1.16) и снова предполагая, что в обеих областях жидкость одна и та

же, т. е. плотность ρ непрерывна при $y = \eta$, мы находим приближенное соотношение

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{y=0} + \frac{1}{2}U\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_{y=0} = \text{const}. \quad (7.1.17)$$

Полученные линейные уравнения можно решить, если смещение вихревой пелены η представить посредством интеграла Фурье по x и z. Из (7.1.14) и (7.1.15) очевидно, что частная синусоидальная зависимость величины η от x и z влечет за собой аналогичную зависимость φ_1 и φ_2 от x и z. Следовательно, возмущение должно быть суперпозицией независимых компонент Фурье вида

$$\eta,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \sim e^{i(\alpha x+\gamma z)};$$

запись в комплексной форме удобна с той точки зрения, что не все переменные величины имеют одну и ту же фазу. Здесь γ и α — компоненты векторного волнового числа в плоскости (z, x), абсолютная величина которого равна

$$k = (\gamma^2 + \alpha^2)^{1/2};$$

соответствующие возмущения изменяются по синусоидальному закону с длиной волны $2\pi/k$ в направлении, образующем угол $\operatorname{arctg}(\gamma/\alpha)$ с осью x в плоскости (z, x). Величины φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. они зависят от y как $\exp(\pm ky)$. С учетом условия, что возмущение исчезает вдали от вихревой пелены по обе стороны от нее, мы находим

$$\left.\begin{aligned}\eta &= A\\ \varphi_1 &= B_1 e^{-ky}\\ \varphi_2 &= B_2 e^{ky}\end{aligned}\right\} \times e^{i(\alpha x+\gamma z)}, \quad (7.1.18)$$

где A, B_1 и B_2 — функции, зависящие лишь от времени; в (7.1.18) используются только действительные части соответствующих выражений.

После подстановки (7.1.18) в (7.1.14) и (7.1.15) получаем

$$\begin{aligned}-kB_1 &= \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}i\alpha UA,\\ kB_2 &= \frac{dA}{dt} + \frac{1}{2}i\alpha UA.\end{aligned} \quad (7.1.19)$$

Из (7.1.17), во-первых, видно, что постоянная в правой части может быть отличной от нуля только в том случае, когда компоненты Фурье не зависят от x и z (а также и от y), и этой постоянной мы можем пренебречь, а во-вторых, с учетом (7.1.19) находим

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{1}{4}\alpha^2U^2A.$$

Отсюда следует

$$A \sim e^{\sigma t}, \quad \sigma = \mp \frac{1}{2} \alpha U \tag{7.1.20}$$

и

$$\frac{-kB_1}{\sigma - (1/2)\, i\alpha U} = \frac{kB_2}{\sigma + (1/2)\, i\alpha U} = A. \tag{7.1.21}$$

Положительный корень σ соответствует экспоненциальному возрастанию возмущения; теоретическое существование этого возрастания указывает на неустойчивость вихревой пелены к любому периодическому возмущению по x и z, для которого $\alpha \neq 0$.

Как можно заметить, выражения для η, φ_1 и φ_2 содержат величину U только в комбинации с α. Чтобы выяснить причину этого, разложим вектор скорости в каждом из двух невозмущенных потоков на составляющие, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна векторному волновому числу (γ, α) в плоскости (z, x); соответствующим образом разложим на составляющие и завихренность пелены. Та компонента завихренности невозмущенной пелены, которая параллельна векторному волновому числу, соответствует составляющей скорости потока, параллельной гребням волны возмущения, и не взаимодействует с возмущением; иначе говоря, для любых малых амплитуд деформации синусоидальная деформация однородной вихревой пелены, при которой гребни возмущенной пелены остаются параллельными скоростям потоков по обе стороны пелены, дает в результате установившуюся картину течения (это можно сравнить с результатами, полученными в § 2.6 для вихревой пелены с постоянной напряженностью). Компонента завихренности невозмущенной пелены, нормальная векторному волновому числу, а следовательно, параллельная гребням волны, будет порождать вихревую пелену с плотностью завихренности $\alpha U/k$; эта компонента соответствует потокам, текущим *поперек* гребней волны возмущения, и только она одна обусловливает взаимодействие вихревой пелены с волной возмущения и усиление колебаний.

Из приведенных замечаний следует, что задача упростится, если мы перейдем к новым координатам в плоскости невозмущенной вихревой пелены, которые определим следующим образом:

$$kx' = \alpha x + \gamma z, \quad kz' = -\gamma x + \alpha z; \tag{7.1.22}$$

новая ось x' параллельна векторному волновому числу, а ось z' нормальна ему. Вектор возмущения скорости всюду лежит в плоскости (x', y), и скачок компоненты скорости в этой плоскости при переходе через невозмущенную пелену имеет величину $\alpha U/k$, которую обозначим, например, U'.

Механизм неустойчивости вихревой пелены можно понять, используя изменение распределения завихренности и соответствующее влияние этого изменения на распределение скорости. Рассмот-

Вектор *градиента* скалярной функции V есть

$$\operatorname{grad} V \ (\equiv \nabla V) = \left(\frac{\mathbf{a}}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{b}}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{c}}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) V.$$

Градиент по направлению $\mathbf{n}$ получается с помощью оператора $\mathbf{n} \cdot \nabla$, который может действовать как на скалярную величину, так и на векторную. Чтобы найти компоненты вектора $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{F}$, где

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{a} + F_2 \mathbf{b} + F_3 \mathbf{c},$$

мы должны знать зависимость функций F_1, F_2, F_3 и единичных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ от координат. Как следует из выписанных выше соотношений,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{F} = \mathbf{a} \left\{ \mathbf{n} \cdot \nabla F_1 + \frac{F_2}{h_1 h_2} \left(n_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - n_2 \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{F_3}{h_3 h_1} \left(n_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - n_3 \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} \right) \right\} + \mathbf{b} \{ \ \} + \mathbf{c} \{ \ \},$$

где n_1, n_2, n_3 — компоненты вектора $\mathbf{n}$ вдоль $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Операторы *дивергенции* и *ротора* действуют только на векторные величины, и

$$\operatorname{div} \mathbf{F} (\equiv \nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\mathbf{a}}{h_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{b}}{h_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{c}}{h_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_3},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} (\equiv \nabla \times \mathbf{F}) = \frac{\mathbf{a}}{h_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{b}}{h_2} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{c}}{h_3} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_3}.$$

Воспользовавшись полученными выше выражениями для производных от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, находим

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 F_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial \xi_3} \right\};$$

это выражение можно рассматривать как результат применения формулы Остроградского — Гаусса к малому параллелепипеду, стороны которого равны смещениям вдоль координатных линий, соответствующих приращениям $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$. Аналогично находим выражение

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\mathbf{a}}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial \xi_3} \right\} + \frac{\mathbf{b}}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial (h_3 F_3)}{\partial \xi_1} \right\} +$$

$$+ \frac{\mathbf{c}}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial (h_2 F_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 F_1)}{\partial \xi_2} \right\},$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a} & h_2 \mathbf{b} & h_3 \mathbf{c} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix},$$

составляющую вдоль оси x'. Теперь, когда мы установили, что вблизи точек, подобных A, имеется некоторое накопление положительной завихренности, должно существовать соответствующее распределение индуцированной скорости, которое стремится повернуть жидкость вокруг точки A в направлении против часовой стрелки и, следовательно, увеличить амплитуду синусоидального смещения вихревой пелены. Бóльшая амплитуда смещения вызывает более быстрое накопление завихренности вблизи точек типа точки A, и, таким образом, колебания в целом ускоряются. Особой чертой синусоидального возмущения вихревой пелены является то, что два процесса — накопление завихренности вблизи точек, подобных A, и поворот прилегающих участков пелены — происходят одновременно и приводят к экспоненциальному росту возмущения во времени без изменения его пространственной формы.

Теперь мы можем выяснить смысл отрицательного значения корня в (7.1.20). Предположим, что нам удалось в некоторый начальный момент времени создать возмущение волнообразной вихревой пелены в таком виде, что точки, подобные точкам C на рис. 7.1.3, стали центрами накопления завихренности (при подходящем ее синусоидальном распределении); тогда последующее движение будет стремиться (а) повернуть участки пелены вблизи точки C в направлении против часовой стрелки относительно C и (б) усилить завихренность вблизи точек, подобных точкам A, как и выше, способствуя, таким образом, экспоненциальному уменьшению возмущения. Однако начальные условия такого вида в действительности маловероятны, поэтому отрицательными значениями корня для σ в рассмотренной и в подобных задачах устойчивости можно пренебречь.

Проведенный анализ показывает, что *скорость возрастания* синусоидального возмущения, определяемая как $d\,(\ln A)/dt = \sigma$, равна $^1/_2\,\alpha U$. Таким образом, в случае возмущения более общего вида компоненты Фурье с бóльшим волновым числом (а среди них с равным модулем волнового числа и с векторным волновым числом, параллельным двум невозмущенным потокам) будут увеличиваться быстрее и в результате станут основными компонентами возмущения. Более точное изучение показывает, что, хотя развитая теория дает точное описание устойчивости переходного слоя толщины d между двумя однородными потоками по отношению к синусоидальному возмущению с длиной волны, большой по сравнению с d, возмущения с длиной волны, меньшей величины порядка d, не возрастают; кроме того, для некоторой длины волны также порядка d скорость возрастания возмущений максимальна. В этом более реальном случае следует ожидать, что начальное возмущение произвольного вида превратится путем усиления отдельных компонент Фурье в почти синусоидальное возмущение с длиной волны,

близкой к той, скорость возрастания которой максимальна; конечно, эти выводы справедливы лишь в том случае, когда величина возмущения настолько мала, что применимы линейные уравнения. Видимые на фото 5.10.5 большие и примерно периодические колебания потока появились в результате усиления малого возмущения, а длина волны колебаний, по-видимому, имеет тот же порядок, что и толщина переходного слоя, сходящего с острой кромки.

Рассмотренный выше анализ неустойчивости нетрудно распространить на случай вихревой пелены, отделяющей два потока жидкостей с различными плотностями, при наличии силы тяжести и поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей. Соответствующие результаты находят применение в таких задачах, как возникновение волн на свободной поверхности жидкости при наличии над ней потока газа.

Упражнение

Используя (7.1.5), покажите, что для осесимметричного течения с «закруткой»

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega_\varphi}{\sigma}\right) = -\frac{2w\omega_\sigma}{\sigma^2},$$

где (x, σ, φ) — цилиндрические координаты, а (u, v, w) — соответствующие компоненты скорости.

7.2. Течение неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности

Течения неограниченной жидкости при отсутствии внутренних границ представляют особый интерес в теории движения невязкой жидкости, поскольку в этих случаях не проявляются характерные эффекты вязкости, которые возникают вблизи твердых границ и обычно служат помехой при установлении соответствия с течением реальных жидкостей. Мы здесь не будем развивать теорию безвихревого движения невязкой жидкости, так как единственным решением, совместным с условием нулевой скорости на бесконечности, является состояние покоя всей жидкости. Однако в том случае, когда в покоящуюся на бесконечности жидкость погружена ограниченная область завихренной жидкости, возникает много интересных задач; по-видимому, лучшим из известных примеров может служить «вихревое кольцо». Сначала мы рассмотрим более близкий к реальности трехмерный случай, а обсуждение специальных свойств двумерного течения отложим до следующего параграфа.

В данных условиях применимы некоторые из кинематических результатов § 2.9. Так, скорость несжимаемой жидкости, связанная с распределением завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, задается выражением

(7.1.1) при $\mathbf{v} = 0$ в случае покоящейся на бесконечности жидкости, не имеющей внешних и внутренних границ; как мы установили в § 2.9, асимптотически при $r = |\mathbf{x}| \to \infty$ имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{8\pi} \nabla \left\{ \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \int \mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}' \, dV(\mathbf{x}') \right\} ; \qquad (7.2.1)$$

здесь интеграл берется по всему объему жидкости. Это выражение можно записать и в другой форме (см. (2.9.4) и (2.9.5)), а именно $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{8\pi} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \int \mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}' \, dV(\mathbf{x}') \qquad (7.2.2)$$

при $r \to \infty$. Это асимптотическое выражение для $\mathbf{u}$ справедливо при условии, что $|\boldsymbol{\omega}|$ имеет порядок меньше чем r^{-4} при больших значениях r [1]), и представляет собой распределение скорости безвихревого течения, вызванного либо отдельной замкнутой вихревой нитью малого линейного размера, либо диполем источников, помещенным в начале координат.

Результирующий импульс сил, требуемый для возникновения движения

Как мы сейчас увидим, величина интеграла $\int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \, dV$ из (7.2.1) имеет динамический смысл. Размерности величин в интеграле наводят на мысль рассмотреть полное количество движения в жидкости; однако величина скорости уменьшается только как r^{-3} при $r \to \infty$, и мы сталкиваемся здесь с той же самой трудностью, что и в случае безвихревого течения, обусловленного поступательным движением твердого тела (см. § 6.4); она состоит в том, что интеграл $\int \mathbf{u} \, dV$ в общем случае сходится не абсолютно, а, оказывается, зависит от пути, по которому объем интегрирования может стремиться к бесконечности. В этой ситуации следует поступить иначе. Если в § 6.4 мы определяли величину импульса, который должен быть приложен к твердому телу, чтобы вызвать движение жидкости из состояния покоя, то здесь мы вычислим результирующую величину распределенного импульса, который должен быть приложен к ограниченной области жидкости, чтобы вызвать заданное движение из состояния покоя. Этот результирующий импульс снова будем называть *импульсом жидкости* поля течения и обозначим $\mathbf{P}$.

Если $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$ — два распределения скорости, для которых значения интеграла $\int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \, dV$ равны, то непосредственно можно

[1]) В этом и последующих параграфах мы будем предполагать, что $|\boldsymbol{\omega}|$ достаточно малая величина при больших значениях r; это обеспечивает сходимость всех интегралов, которые содержат завихренность, возникающую в жидкости.

заключить, что движение с распределением скорости $(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')$ является таким, для которого полное количество движения жидкости равно нулю. Обозначим теперь через V некоторый объем жидкости, ограниченный замкнутой поверхностью A с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$; тогда

$$\int (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')\, dV = \int \nabla \times (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'')\, dV = \int \mathbf{n} \times (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'')\, dA,$$

а поскольку разность между $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$, как видно из (7.2.2), должна быть по порядку меньше чем r^{-2} при больших значениях r, то интеграл по поверхности в выписанном соотношении стремится к нулю при неограниченном расширении поверхности во всех направлениях. Импульс жидкости при распределении скорости $\mathbf{u}' - \mathbf{u}''$ также равен нулю, так как он совпадает с полным количеством движения, если интеграл полного количества движения сходится абсолютно. Поскольку $\mathbf{P}$ — линейный функционал от $\mathbf{u}$, а также от $\boldsymbol{\omega}$, то из этого следует, во-первых, что все поля течений, для которых значения интеграла $\int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}\, dV$ равны, имеют один и тот же импульс жидкости, а во-вторых, что

$$\mathbf{P} \sim \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}\, dV. \tag{7.2.3}$$

Для нахождения коэффициента пропорциональности выберем некоторую длину R настолько большой, чтобы при $r \geqslant R$ распределение скорости (7.2.1) выполнялось точно, и определим вклады в $\mathbf{P}$ от двух областей жидкости, задаваемых неравенствами $r \leqslant R$ и $r \geqslant R$. Полное количество движения жидкости в области $r \leqslant R$ равно

$$\rho \int\limits_{r \leqslant R} \mathbf{u}\, dV = \rho \int\limits_{r \leqslant R} \nabla \times \mathbf{B}\, dV = \rho \int\limits_{r=R} \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dA,$$

а так как (7.2.2) выполняется на сферической поверхности A, то

$$8\pi R^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{B})_{r=R} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} dV - \mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}\, dA.$$

Полное количество движения во внутренней области равно, таким образом, $^1/_3\rho \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} dV$. Эта часть $\mathbf{P}$ не зависит от R, и мы могли бы, устремляя R к бесконечности, попытаться заключить, что внешняя область не создает дополнительного вклада в $\mathbf{P}$. Однако такая попытка была бы ошибочной в силу отсутствия абсолютной сходимости интеграла $\int \mathbf{u}\, dV$. Асимптотическая форма распределения скорости (7.2.1) имеет тот же вид, что и в случае течения, обусловленного движением твердой сферы радиуса R со скоростью

$\mathbf{U}$ (см. (6.8.13)), причем

$$4\pi R^3\mathbf{U} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}\, dV; \tag{7.2.4}$$

отсюда следует, между прочим, что полное количество движения во внутренней области было бы тем же самым, если бы вся жидкость внутри сферы радиуса R двигалась со скоростью $\mathbf{U}$, определяемой из (7.2.4). Следовательно, внешняя область создает часть $\mathbf{P}$, равную импульсу жидкости при движении твердой сферы радиуса R со скоростью $\mathbf{U}$, определяемой соотношением (7.2.4); с учетом (6.4.29) и (6.8.18) эта часть равна

$$\frac{2}{3}\pi R^3\rho\mathbf{U} = \frac{1}{6}\rho\int \mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}\, dV.$$

Сумма двух найденных частей

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\rho\int \mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}\, dV, \tag{7.2.5}$$

где интеграл берется по всему объему жидкости.

Мы можем также доказать, что, как и предполагалось, это выражение результирующего импульса, который требуется для создания движения жидкости из состояния покоя, не зависит от времени, даже если течение неустановившееся. В самом деле, из (7.1.5) имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{2}\rho\int \mathbf{x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\, dV = \frac{1}{2}\rho\int \mathbf{x}\times\{\nabla\times(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega})\}\, dV.$$

Из раскрытия подинтегрального выражения (проще использовать второе равенство) следует, что оно равно сумме $2\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$ и нескольких членов, содержащих производные; последние приводят к интегралам по поверхности, которые обращаются в нуль ввиду малости $|\boldsymbol{\omega}|$ на бесконечности. Таким образом, имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \rho\int \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}\, dV = \rho\int\left\{\frac{1}{2}\nabla q^2 - \frac{\partial(u_i\mathbf{u})}{\partial x_i}\right\} dV;$$

полученный интеграл по объему также можно преобразовать в интеграл по поверхности, равный нулю ввиду установленной малости скорости жидкости вдали от начала координат.

Можно еще показать, что результирующий момент (относительно начала координат) распределенного импульса, который должен быть приложен к жидкости для создания движения из состояния покоя, равен

$$\frac{1}{3}\rho\int \mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})\, dV \tag{7.2.6}$$

и что он является вторым инвариантом возникающего движения.

Полная кинетическая энергия жидкости

Можно также найти выражение для полной кинетической энергии жидкости, используя распределение завихренности. Имеем

$$T = \frac{1}{2}\rho \int \mathbf{u}\cdot(\nabla \times \mathbf{B})\,dV = \frac{1}{2}\rho \int \{\mathbf{B}\cdot(\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\}\,dV,$$

где интегралы берутся по всему объему жидкости. Член подинтегрального выражения в форме дивергенции приводит к интегралу по поверхности, который обращается в нуль; используя в оставшемся члене выражение для векторного потенциала из (2.4.10), получим

$$T = \frac{1}{2}\rho \int \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dV = \frac{\rho}{8\pi}\int\int \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}'}{s}\,dV(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}'). \qquad (7.2.7)$$

Другое выражение для T можно получить с использованием тождества

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})) = \nabla\cdot\left(\frac{1}{2}q^2\mathbf{x}\right) - \frac{1}{2}q^2 + \mathbf{u}\cdot(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}).$$

Если обе стороны этого тождества проинтегрировать по всему объему жидкости, то два члена, сводящиеся к интегралам по удаленным на бесконечность поверхностям, очевидно, обратятся в нуль, а оставшиеся члены дадут

$$T = \rho \int \mathbf{u}\cdot(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})\,dV. \qquad (7.2.8)$$

Как можно показать, эта величина также не зависит от времени.

Течение с круговыми вихревыми линиями

Полученные выше выражения для распределения скорости, импульса жидкости течения и полной кинетической энергии принимают простую форму в случаях, когда все вихревые линии течения представляют собой концентрические окружности с общей осью симметрии.

Поскольку поле рассматриваемого течения в целом осесимметричное и азимутального движения жидкости нет, то распределение скорости мы можем описать с использованием функции тока ψ — одной из ненулевых компонент векторного потенциала $\mathbf{B}$. В цилиндрических координатах (x, σ, φ) векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{B}$ всюду параллельны координатной линии φ, и, согласно (2.4.10), имеем

$$\psi(x,\sigma) = \sigma|\mathbf{B}| = \frac{\sigma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{\omega(x',\sigma')}{s}\sigma'\cos\theta\,dx'\,d\sigma'\,d0, \qquad (7.2.9)$$

где

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}|, \quad \theta = \varphi' - \varphi, \quad s^2 = (x-x')^2 + \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma'\cos\theta$$

Результирующий импульс, требуемый для создания движения из состояния покоя, определяется посредством (7.2.5) и, очевидно, представляет собой вектор, направленный по оси симметрии и имеющий величину

$$P = \pi\rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \omega\sigma^2 \, dx \, d\sigma. \tag{7.2.10}$$

Для полной кинетической энергии жидкости мы имеем два общих выражения (7.2.7) и (7.2.8), первое из которых в данном случае принимает следующий вид:

$$T = \pi\rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \psi\omega \, dx \, d\sigma. \tag{7.2.11}$$

Эти формулы легко применить к случаю одиночной круговой вихревой нити радиуса a и напряженности $\varkappa$, расположенной при $x = 0$. Как обычно, используя $\omega(x', \sigma')\delta x' \delta\sigma' = \varkappa$ в качестве элемента интегрирования в осевой плоскости, содержащей вихревую нить, мы находим

$$\psi(x, \sigma) = \frac{\varkappa a\sigma}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(x^2 + \sigma^2 + a^2 - 2a\sigma\cos\theta)^{1/2}}. \tag{7.2.12}$$

Интегралы по θ в (7.2.9) и (7.2.12) можно вычислить при помощи таблиц. Если положить

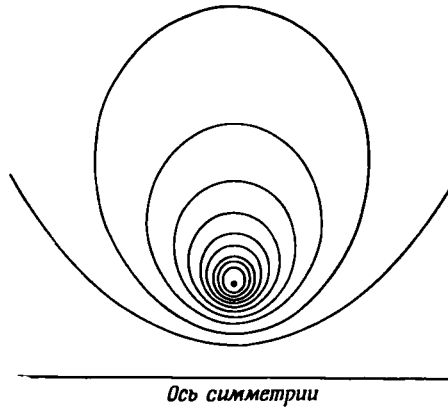
$$k^2 = \frac{4a\sigma}{x^2 + (\sigma + a)^2},$$

то (7.2.12) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, \sigma) = \frac{\varkappa (a\sigma)^{1/2}}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{k} \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right\} d\theta = \\ = \frac{\varkappa (a\sigma)^{1/2}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\}, \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, численные значения которых затабулированы.

На рис. 7.2.1 показаны линии тока, полученные по (7.2.13). Может показаться несколько странным то обстоятельство, что вблизи пересечения вихревой нити с осевой плоскостью линиями тока оказываются малые замкнутые кривые, вопреки установленному ранее факту стремления осевой компоненты скорости к бесконечности при приближении к вихревой нити по любому направ-



Р и с. 7.2.1. Линии тока в осевой плоскости, проведенные через равные интервалы изменения функции тока ψ, для течения, индуцированного в покоящейся на бесконечности жидкости одиночной круговой вихревой нитью.

лению; однако следует вспомнить, что эта осевая скорость возрастает как $\ln\{(\sigma - a)^2 + x^2\}$, в то время как циркуляционное движение вокруг вихревой нити имеет скорость, которая изменяется как $\{(\sigma - a)^2 + x^2\}^{-1/2}$ и, следовательно, доминирует в этой области.

Для импульса жидкости течения, индуцированного одиночной круговой вихревой нитью, имеем

$$P = \pi\rho\varkappa a^2; \qquad (7.2.14)$$

примечательно, что величина импульса конечна, несмотря на особенность распределения скорости на вихревой нити. Полная кинетическая энергия, естественно, бесконечна, как и для поля течения, индуцированного вихревой нитью произвольной формы.

Вихревые кольца

Известным и интригующим примером течения с круговыми вихревыми линиями служит «дымовое кольцо», которое можно образовать, если внезапно выдуть изо рта клуб дыма, скруглив при этом губы; такое кольцо движется в воздухе поступательно и равномерно и имеет ядро, наполненное дымом. Существенное требование при получении вихревого кольца (это более подходящее название) заключается в том, что сообщаемое жидкости количество движения должно обладать осевой симметрией; роль дыма сводится просто к тому, что он позволяет видеть некоторую часть жидкости. Вихревое кольцо в принципе проще всего получить, резко ударив по круговому диску в нормальном к нему направлении и притормозив его; практическое неудобство этого способа

в том, что свободно движущееся вихревое кольцо будет приближаться к диску, который будет препятствовать его движению; правда, этого можно избежать, погрузив круговой диск наполовину в жидкость со свободной поверхностью и, когда начнется горизонтальное движение жидкости, быстро выдернув его. Более общий способ основан на использовании круглого отверстия, типа отверстия в плоском твердом листе, или трубы с открытым концом, через которые «выстреливается» некоторое количество жидкости; при этом образуется вихревое кольцо, движущееся от отверстия. На фото 7.2.2 показаны различные стадии образования вихревых колец при эжектировании малых порций жидкости из конца трубы. Довольно неожиданно вихревое кольцо можно получить даже при выдувании небольшого объема воздуха из верхнего конца вертикальной трубки, находящейся в баке с водой (Уолтерс и Дэвидсон (1963)); возникающее при этом вихревое кольцо, или газовый пузырь тороидальной формы, движется вертикально вверх, а его радиус, как показывают наблюдения, увеличивается; увеличение радиуса, по-видимому, объясняется действием силы плавучести, которая приводит к увеличению импульса жидкости (см. (7.2.14)). Еще один способ получения вихревых колец, иллюстрируемый на фото 7.2.3, состоит в том, что при вертикальном падении капель жидкости на свободную поверхность той же жидкости в последней образуются вихревые кольца.

С теоретической точки зрения замечательным свойством всех наблюдаемых вихревых колец в однородной жидкости является приближенно стационарное движение относительно вихревого кольца, если кольцо достаточно удалено от его генератора. Конечно, всегда имеется некоторое затухание движения, которое обусловлено, по-видимому, действием вязкости, но затухание для больших колец меньше, чем для маленьких; это наводит на мысль о том, что строго установившееся движение должно достигаться при бесконечном числе Рейнольдса. Мы видели, что круговая вихревая нить обладает этим свойством установившегося движения, хотя скорость ее перемещения бесконечна. По крайней мере некоторые из наблюдаемых вихревых колец приближенно похожи на вихревую нить, завихренность которой сосредоточена в трубке малого (но ненулевого) поперечного сечения и которая перемещается установившимся образом в направлении оси симметрии.

Из-за незнания точной формы поперечного сечения трубки, содержащей завихренность (которая согласовывалась бы с установившимся характером движения), математическое изучение таких вихревых колец является трудным делом. Однако когда поперечное сечение мало, эта трудность уменьшается, поскольку криволинейная граница поперечного сечения служит линией тока установившегося течения относительно осей координат, движущихся вместе с кольцом (поскольку вихревые линии переносятся вместе

с жидкостью); эта граница имеет приближенно круговую форму, если преобладает циркуляционное движение вокруг близлежащей части вихревой трубки. Из формулы (7.1.13) для индуцированной скорости жидкости в окрестности криволинейной вихревой нити можно заключить (и подробный анализ подтверждает это), что в случае почти однородного распределения завихренности в тороидальном ядре с поперечным сечением в виде круга малого радиуса ε скорость движения такой вихревой трубки постоянной кривизны a^{-1} задается логарифмическим законом возрастания, усеченным на границе ядра и, таким образом, асимптотически (для $a/\varepsilon \gg 1$) эта скорость имеет величину

$$\frac{\varkappa}{4\pi a} \ln \frac{a}{\varepsilon}. \tag{7.2.15}$$

Следовательно, с увеличением радиуса кольца a скорость его движения уменьшается [1]). Формула (7.2.10) показывает, что импульс жидкости для вихревого кольца, радиус ядра которого мал, приближенно не зависит от размеров сечения ядра и, таким образом, определяется тем же соотношением (7.2.14), что и для круговой вихревой нити. Полная кинетическая энергия жидкости теперь уже не будет бесконечной, и, поскольку рассматривается асимптотический случай $\varepsilon \to 0$, ее величину найти просто. С этой целью заметим, что кинетическая энергия жидкости для прямолинейной вихревой нити напряженности $\varkappa$ в области между внутренним круговым цилиндром радиуса ε и внешним — радиуса b равна $(\rho\varkappa^2/4\pi) \ln (b/\varepsilon)$ в расчете на единицу длины вихревой нити. Для вихревого кольца это дает следующую величину кинетической энергии:

$$T \approx \frac{1}{2} \rho a \varkappa^2 \ln \frac{a}{\varepsilon}, \tag{7.2.16}$$

в чем можно убедиться, использовав соотношение (7.2.11) и то обстоятельство, что на малом расстоянии ε от вихревой нити функция тока ψ имеет порядок $(a\varkappa/2\pi) \ln \varepsilon$. Таким образом, скорость перемещения вихревого кольца приближенно равна $(1/2)T/P$.

Течение, вызванное вихревым кольцом малого кругового поперечного сечения, приближенно определяется параметрами a, $\varkappa$ и ε; это справедливо только для области вне ядра кольца, а внутри ядра движение зависит от фактического распределения завихренности. Любые два из приведенных параметров можно заменить

[1]) В результате этого два подобных вихревых кольца, отстоящих на некотором расстоянии друг от друга и расположенных на общей оси симметрии, вступают в забавную игру. Радиальная компонента скорости, вызванной задним вихревым кольцом, направлена от оси. Вследствие этого радиус переднего вихревого кольца будет постепенно увеличиваться (при постоянном значении $\varkappa$). Это приведет к уменьшению скорости перемещения переднего кольца и к соответствующему увеличению скорости перемещения заднего вихревого кольца, которое в конечном счете пройдет внутри бблшего переднего кольца и в свою очередь станет передним кольцом. Затем этот маневр колец повторится.

импульсом жидкости P (7.2.14) и полной кинетической энергией T (7.2.16). Способ определения этих трех независимых параметров практически зависит от механизма получения вихревых колец, детали которого часто остаются неясными. В случае вихревого кольца, возникающего при внезапном движении кругового диска радиуса R в направлении по нормали к его плоскости, мы можем предположить, что в момент достижения диском скорости V он каким-то способом удаляется из жидкости и не оказывает непосредственного влияния на ее дальнейшее течение. Импульс жидкости и кинетическая энергия движения, связанного с вихревым кольцом, имеют при этом точно такие же значения, как при движении кругового диска со скоростью V, а циркуляцию для вихревого кольца можно считать равной разности между значениями потенциала скорости в центральных точках на разных сторонах диска; согласно приведенным в § 6.8 формулам,

$$P=\frac{8}{3}R^3\rho V, \qquad T=\frac{4}{3}R^3\rho V^2, \quad \varkappa=4RV/\pi.$$

Теперь из (7.2.14) и (7.2.16) определяются размеры получающегося вихревого кольца:

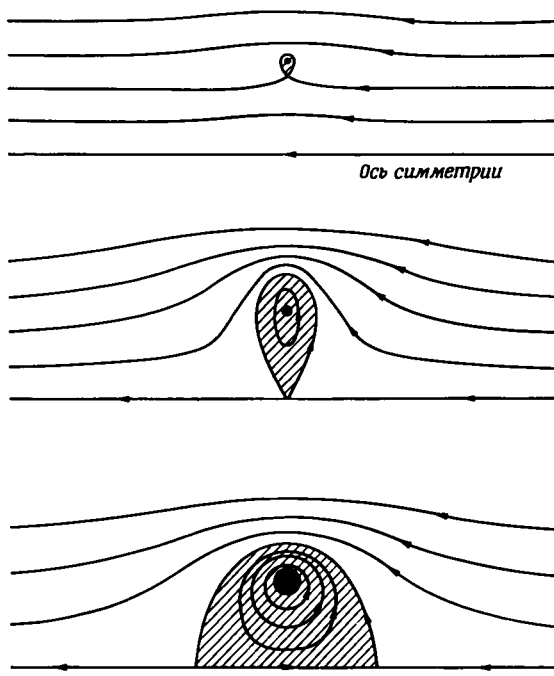
$$a=\sqrt{2/3}\,R, \quad \varepsilon=a\exp\left[-\pi^2/(2\sqrt{6})\right]=0{,}13a,$$

а из (7.2.15) находится скорость его движения, равная $V/4$; следует, однако, отметить, что отношение ε/a здесь, по-видимому, недостаточно мало для вполне аккуратного применения формул (7.2.15) и (7.2.16).

Можно считать, что два из трех параметров течения, вызванного вихревым кольцом с малым радиусом ядра, определяют масштабы длины и скорости поля течения. Таким образом, в системе координат, движущейся вместе с кольцом, скорость жидкости в произвольной точке $\mathbf{x}$ (не лежащей внутри ядра кольца) можно записать в виде

$$\frac{\varkappa}{a}F\left(\frac{\mathbf{x}}{a}, \frac{\varepsilon}{a}\right),$$

где F — произвольная функция указанных аргументов; таким образом, имеется бесконечное однопараметрическое семейство таких вихревых колец, соответствующих различным значениям отношения ε/a. Основным эффектом изменения величины ε/a (не учитывая детально картину течения в ядре и вблизи него) будет изменение скорости перемещения вихревого кольца. Следовательно, путем наложения постоянной осевой скорости $-(\varkappa/4\pi a)\ln(a/\varepsilon)$ на линии тока, показанные на рис. 7.2.4 и определяемые только величинами $\varkappa$ и a, мы получим некоторое приближение к установившимся картинам течения при различных (малых) значениях ε/a. Этим способом мы можем найти последовательность картин течений вида, показанного на рис. 7.2.4. По мере увеличе-



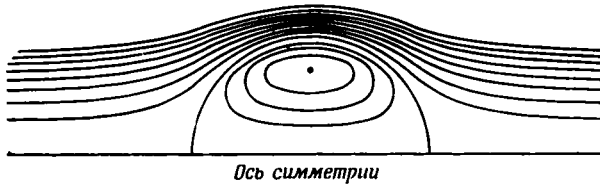
Р и с. 7.2.4. Схема линий тока установившегося течения относительно вихревого кольца при различных (малых) значениях отношения ε/a. Внутренняя зачерненная область соответствует ядру вихря, а штриховкой показана жидкость, переносимая вместе с кольцом.

ния отношения ε/a наблюдается быстрое возрастание массы жидкости, переносимой вместе с вихревым кольцом, а при значениях ε/a, превышающих величину порядка 0,01, объем этой жидкости доходит до оси симметрии.

Естественно спросить, существуют ли установившиеся вихревые кольца, имеющие немалые поперечные сечения. При этом возможно любое распределение завихренности и с точки зрения теории невязкой жидкости нужно лишь потребовать, чтобы величина ω/σ была постоянной для любой линии тока установившегося течения (см. (7.1.7)). Единственным аналитическим указанием служит существование замечательно простого поля течения, известного как *сферический вихрь Хилла* (Хилл (1894)). Завихренность течения сосредоточена внутри сферы радиуса a и распределена согласно соотношению

$$\omega = A\sigma, \tag{7.2.17}$$

где A имеет одно и то же значение для *всех* линий тока внутри сферы. Соответствующая функция тока ψ для течения внутри сферы (относительно системы координат, связанной со сферой, так что $\psi = 0$



Р и с. 7.2.5. Линии тока установившегося течения относительно сферического вихря Хилла, проведенные через равные интервалы изменения функции тока ψ.

при $x^2 + \sigma^2 = a^2$) легко находится и имеет вид [1])

$$\psi = \frac{1}{10} A\sigma^2 (a^2 - x^2 - \sigma^2); \qquad (7.2.18)$$

касательная компонента скорости на поверхности сферы (при приближении к ней изнутри) равна

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2}_{x^2+\sigma^2=a^2} = \frac{1}{5} Aa\sigma$$

и направлена от критической точки при $\sigma = 0$, $x = a$. Теперь заметим, что скорость на неподвижной сфере, обтекаемой безвихревым потоком жидкости с постоянной скоростью на бесконечности U в направлении отрицательной оси x, равна $^3/_2 U\sigma/a$ (см. § 6.8); таким образом, внутреннее и внешнее распределения скорости сращиваются при выполнении условия

$$U = (2/15)a^2 A.$$

На рис. 7.2.5 показаны линии тока этого течения, установившегося относительно вихря. Из рассмотрения по отдельности областей внутри и вне сферы радиуса a видно, что импульс жидкости (для движения относительно системы координат, связанной с жидкостью на бесконечности) равен $2\pi a^3 \rho U$; эту же величину можно получить и непосредственно из (7.2.10).

Возможно, что сферический вихрь Хилла представляет собой один крайний случай семейства вихревых колец, другой крайний случай которого — круговая вихревая нить.

7.3. Двумерное течение неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности

Двумерные течения ничем не ограниченной жидкости, которая покоится на бесконечности, имеют ряд важных отличий от течений, рассмотренных в предыдущем параграфе. Во-первых, на боль-

[1]) Было установлено, что это распределение скорости справедливо также внутри сферической капли жидкости, поступательно движущейся внутри другой жидкости при малом числе Рейнольдса (см. § 4.9).

ших расстояниях от начала координат скорость может асимптотически изменяться по закону r^{-1}; это связано с существованием ненулевой циркуляции относительно круга большого радиуса, как и в случаях безвихревого течения при наличии внутренней границы (см. § 6.4). Второе отличие состоит в том, что самоиндуцированная скорость движения прямолинейной вихревой нити не будет бесконечной, а поведение вихревой трубки с прямыми вихревыми линиями не зависит решающим образом от площади ее поперечного сечения; таким образом, области концентрации завихренности в двумерном течении можно вполне надежно аппроксимировать аналитически точечными вихрями.

В двумерном поле течения без внутренних границ безвихревой вклад $\mathbf{v}$ в (7.1.1) снова равен нулю и для любой точки поля течения имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\mathbf{s}\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{s^3}\, dA(\mathbf{x}')\, dz',$$

где δA — элемент площади плоского течения, z' — координата, нормальная к плоскости течения, а интегрирование выполняется по всему (трехмерному) пространству. Поскольку вектор $\boldsymbol{\omega}$ нормален к плоскости течения, то $\mathbf{s}\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')$ не зависит от z' и можно выполнить интегрирование по z'; в результате получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi}\int \frac{y-y'}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,\omega(x', y')\, dA(x', y'), \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{x-x'}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,\omega(x', y')\, dA(x', y'), \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

где x, y — прямоугольные координаты в плоскости течения, u, v — соответствующие компоненты скорости, а интегрирование выполняется по всей плоскости течения. Очевидно, что это распределение скорости можно получить дифференцированием функции тока

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\int \omega(x', y')\ln\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\, dA(x', y'). \tag{7.3.2}$$

Эту функцию можно также рассматривать как выражение ненулевой компоненты векторного потенциала.

Если завихренность на больших расстояниях от начала координат достаточно мала, то при $r = (x^2+y^2)^{1/2} \to \infty$ находим

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\ln r \int \omega\, dA + O(r^{-1}). \tag{7.3.3}$$

Таким образом, распределение скорости вдали от начала координат оказывается в точности таким, как если бы в начале координат был помещен точечный вихрь с интенсивностью, равной $\int \omega\, dA$.

Интегральные инварианты распределения завихренности

Непосредственное использование полного количества движения, момента количества движения и кинетической энергии жидкости оказывается невозможным, поскольку соответствующие интегралы для этих величин расходятся. Однако существуют связанные с ними величины, которые обладают ожидаемым свойством инвариантности относительно времени. Проще всего можно убедиться в этом путем рассмотрения интегральных инвариантов распределения завихренности, а затем обсудить их связь с упомянутыми выше физическими величинами.

Как завихренность, так и площадь жидкого элемента в плоском течении постоянны, поэтому первым и простейшим из интегральных инвариантов будет

$$\int \omega \, dA, \tag{7.3.4}$$

который берется по всей плоскости течения; величина этого интеграла равна циркуляции по произвольному замкнутому контуру, проведенному на большом расстоянии от начала; таким образом, этот инвариант можно считать прямым следствием теоремы Кельвина о циркуляции.

Первые интегральные моменты распределения завихренности также постоянны. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\int x\omega \, dA = -\int x\left\{\frac{\partial(u\omega)}{\partial x}+\frac{\partial(v\omega)}{\partial y}\right\} dA = \int u\omega \, dA;$$

подставляя сюда выражение для u из (7.3.1), убеждаемся, что этот интеграл равен нулю; аналогичный результат получаем и для $\int y\omega \, dA$. Таким образом, мы можем определить две инвариантные величины

$$X = \frac{\int x\omega \, dA}{\int \omega \, dA}, \quad Y = \frac{\int y\omega \, dA}{\int \omega \, dA}, \tag{7.3.5}$$

представляющие собой координаты «центра завихренности». Если $\int \omega \, dA = 0$, то центр завихренности расположен на бесконечности.

Следующий интегральный момент, инвариантность которого подтверждается непосредственно, есть $\int (x^2 + y^2)\, \omega dA$. Скорость изменения во времени этого интеграла равна

$$\frac{d}{dt}\int (x^2+y^2)\,\omega \, dA = -\int (x^2+y^2)\left\{\frac{\partial(u\omega)}{\partial x}+\frac{\partial(v\omega)}{\partial y}\right\} dA =$$

$$= 2\int (xu+yv)\,\omega \, dA;$$

подставляя сюда выражения u и v из (7.3.1), убеждаемся, что последний интеграл равен нулю. Таким образом, длина $|D^2|^{1/2}$, определяемая соотношением

$$D^2 = \frac{\int \{(x-X)^2+(y-Y)^2\}\,\omega\,dA}{\int \omega\,dA} \tag{7.3.6}$$

и представляющая дисперсию распределения завихренности относительно фиксированного центра завихренности (X, Y), служит еще одним инвариантом рассматриваемого движения.

Размерности интегральных величин

$$\int x\omega\,dA, \quad \int y\omega\,dA \quad \text{и} \quad \int (x^2+y^2)\,\omega\,dA$$

наводят на мысль, что эти величины связаны с количеством движения и моментом количества движения жидкости (слоя единичной толщины). Соответствующие соотношения нельзя выписать непосредственно, если $\int \omega\,dA \neq 0$, поскольку в этом случае скорость на бесконечности не будет достаточно малой, чтобы интегралы по всей жидкости, выражающие количество движения и момент количества движения, имели смысл. Пусть функция тока

$$\psi(x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln r \int \omega\,dA$$

представляет разность заданного движения и установившегося течения с той же полной завихренностью, сконцентрированной в начале координат. Величина скорости такого дополнительного течения убывает как r^{-2} при $r \to \infty$, так что интеграл, выражающий соответствующее количество движения, все еще не будет абсолютно сходящимся. Однако можно показать, как и в случае рассмотренного в § 7.2 трехмерного течения, что полный импульс силы, который должен быть приложен к жидкости для порождения из состояния покоя определенного выше дополнительного течения, имеет компоненты

$$\rho \int y\omega\,dA, \quad -\rho \int x\omega\,dA. \tag{7.3.7}$$

Аналогично этому можно показать, что полный момент (относительно начала координат) импульса силы, требуемого для порождения дополнительного течения из состояния покоя, равен

$$-\frac{1}{2}\rho \int (x^2+y^2)\,\omega\,dA.$$

Пока еще мы не установили инварианта, который соответствовал бы кинетической энергии жидкости. Введение дополнительного движения не спасает положения в случае нелинейной величины, подобной кинетической энергии, так что мы должны избрать

другой путь. Рассмотрим кинетическую энергию жидкости в слое единичной толщины, занимающем конечную площадь A_1, ограниченную замкнутой кривой с линейным элементом δx:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_{A_1} (u^2+v^2)\,dA = \frac{1}{2}\rho \int_{A_1} \left(u\frac{\partial\psi}{\partial y} - v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dA =$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_{A_1} \left\{\psi\omega + \frac{\partial(u\psi)}{\partial y} - \frac{\partial(v\psi)}{\partial x}\right\} dA =$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_{A_1} \psi\omega\,dA - \frac{1}{2}\rho \oint \psi \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x}.$$

Первый из двух последних интегралов сходится при $A_1 \to \infty$. Второй не сходится, но его асимптотический вид легко определить с использованием (7.3.3). Выбирая в качестве ограничивающей кривой окружность радиуса R с центром в начале координат, находим, что при $R \to \infty$

$$T - \frac{1}{2}\rho \int \psi\omega\,dA - \frac{1}{4\pi}\rho \ln R \left(\int \omega\,dA\right)^2 \to 0 \qquad (7.3.8)$$

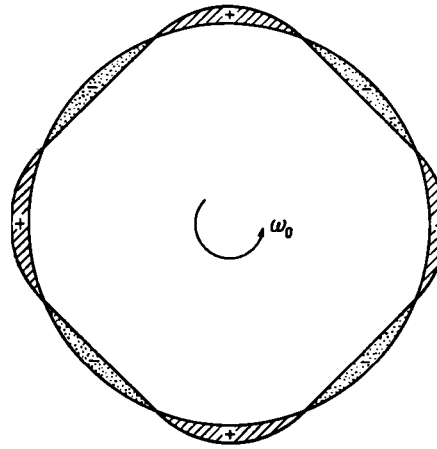
(интегралы берутся по всей плоскости). Отсюда следует, что при некотором фиксированном большом значении R величина

$$W = \frac{\rho}{2}\int \psi\omega\,dA =$$

$$= -\frac{\rho}{8\pi}\int\int \omega(x,y)\,\omega(x',y')\ln\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\,dA(x,y)\,dA(x',y') \qquad (7.3.9)$$

равна той части кинетической энергии жидкости, которая зависит от того, каким образом распределена заданная полная завихренность жидкости. Поскольку над жидкостью не совершается никакой работы и потерь энергии за счет диссипации не происходит, следует ожидать, что величина W не зависит от времени; этот вывод можно подтвердить непосредственным вычислением.

Итак, мы нашли, что интеграл $\int \omega\,dA$ и величины X, Y, D и W, определенные выше, постоянны при движении жидкости. Движение элементов жидкости происходит с постоянной завихренностью относительно фиксированного центра, с постоянной дисперсией завихренности относительно того же центра и с постоянным значением интеграла (7.3.9). Эти вполне строгие условия, которые должны выполняться при всех изменениях распределения завихренности, позволяют качественно предсказать развитие движения жидкости при некоторых простых начальных распределениях завихренности.



Р и с. 7.3.2. Несимметричная составляющая распределения завихренности в случае, когда на круговое ядро постоянной завихренности ω_0 наложено возмущение ($s = 4$).

Если распределение завихренности лишь приближенно симметрично относительно некоторого центра, то, по-видимому, «несимметричная» часть завихренности будет вместе с жидкостью двигаться вокруг центра симметрии; при этом она, вообще говоря, может изменять свою форму. Этот процесс мы можем подробно исследовать для случая, когда завихренность имеет постоянную величину ω_0 в области, ограниченной в некоторый момент кривой

$$r = a + \varepsilon \cos s\theta, \tag{7.3.17}$$

и равна нулю всюду вне этой области; здесь s — целое число, а $\varepsilon \ll a$. Это распределение завихренности можно считать наложением распределения с постоянной величиной ω_0 внутри окружности радиуса $r = a$ и слоя завихренности вдоль окружности с вихревой плотностью $\omega_0 \varepsilon \cos s\theta$, как показано на рис. 7.3.2. Первое распределение создает чисто вращательное движение, которое заставляет выпуклости и впадины границы вращаться вокруг центра окружности с угловой скоростью $(1/2)\,\omega_0$. Второе распределение деформирует границу области завихренности, создавая в каждой точке θ окружности радиальную компоненту скорости, определяемую интегралом (в смысле главного значения)

$$\frac{1}{4\pi} \varepsilon\omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\theta' \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\theta' - \theta)\, d\theta'$$

или, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin s\theta' \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta'\, d\theta' = 2\pi,$$

равную $(-1/2)\,\varepsilon\omega_0 \sin s\theta$. Однако эта радиальная компонента скорости на границе в точности равна той скорости, которая необходима для того, чтобы граница вида (7.3.17) вращалась как твердое тело вокруг центра с угловой скоростью $(-1/2)\,\omega_0/s$. Эти два движения вместе создают, таким образом, вращение всего распределения завихренности как твердого тела с угловой скоростью

$$\frac{1}{2}\,\omega_0\,\frac{s-1}{s}, \tag{7.3.18}$$

так что поле течения будет установившимся относительно осей, вращающихся с этой (постоянной) угловой скоростью.

Вообще всегда, когда в односвязной области имеется завихренность одного знака, а вне ее она равна нулю, распределение завихренности стремится вращаться как твердое тело. Прямые методы для определения стационарных относительно вращающихся осей распределений завихренности не известны, хотя решения для некоторых специальных случаев получены. Можно показать, как впервые было отмечено Кирхгофом, что область однородной завихренности, ограниченная эллипсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, вращается без изменения формы с угловой скоростью

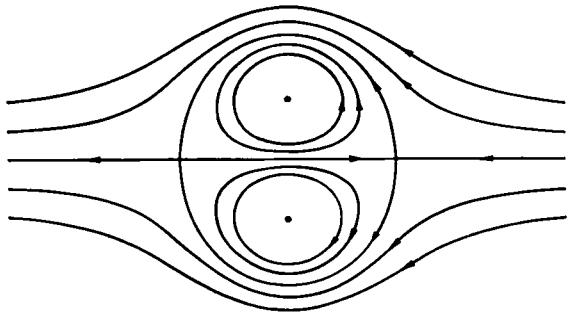
$$\frac{ab}{(a+b)^2}\,\omega_0$$

(что находится в соответствии с приведенным выше результатом при $a - b \ll a$). В пределе при $b/a \to 0$ область ненулевой завихренности становится вихревым слоем, расположенным на отрезке оси x с вихревой плотностью

$$2b\omega_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}; \tag{7.3.19}$$

этот слой также вращается без изменения формы.

Если завихренность в одних областях жидкости положительна а в других отрицательна, причем $\int \omega\, dA = 0$, то, очевидно, могут существовать установившиеся движения относительно поступательно движущихся осей координат. Как было установлено выше, движение, вызванное двумя точечными вихрями с интенсивностями $\varkappa$ и $-\varkappa$, будет установившимся относительно осей, которые перемещаются со скоростью $\varkappa/2\pi d$ в направлении нормали к прямой, соединяющей вихри. На рис. 7.3.3 показаны линии тока этого установившегося течения. Представляется вероятным, что завихренность, сконцентрированная в каждом точечном вихре, может быть распределена внутри областей с границами, приближенно повторяющими замкнутые линии тока на рис. 7.3.3; такое распространение завихренности не нарушает условий установившегося движения.



Р и с. 7.3.3. Линии тока установившегося течения относительно пары точечных вихрей с интенсивностями $\varkappa_1 = \varkappa$ и $\varkappa_2 = -\varkappa$.

Известен один частный случай установившегося движения с распределением завихренности указанного вида; если предположить, что внутри области ненулевой завихренности

$$\omega = k^2\psi,$$

где k — постоянная, то для функции тока ψ в полярных координатах получается уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -k^2\psi. \qquad (7.3.20)$$

Будем искать решение этого уравнения, которое сращивается с функцией тока внешнего безвихревого течения; попытаемся найти функцию тока вида

$$\psi \sim \sin\theta,$$

как для безвихревого обтекания кругового цилиндра. Тогда общее решение уравнения (7.3.20) запишется следующим образом:

$$\psi = CJ_1(kr)\sin\theta; \qquad (7.3.21)$$

при $J_1(ka) = 0$ оно дает круговую линию тока $r = a$. Если теперь положить

$$U = -\frac{1}{2}CkJ_1'(ka) = -\frac{1}{2}CkJ_0(ka), \qquad (7.3.22)$$

то скорость на этой линии тока, согласно (7.3.21), будет иметь то же самое значение $2U\sin\theta$, что и при обтекании кругового цилиндра радиуса a однородным потоком со скоростью U на бесконечности в направлении $\theta = \pi$.

На рис. 7.3.4 показаны линии тока в области $r \leqslant a$ для этого установившегося течения в частном случае $ka = 3{,}83$ (это наименьшее возможное значение ka). При бо́льших значениях ka

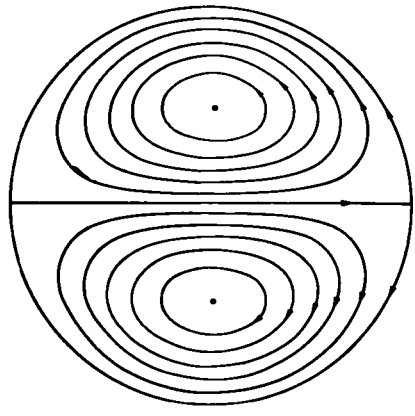


Рис. 7.3.4. Линии тока в области $r \leqslant a$ для установившегося течения, обусловленного завихренностью, пропорциональной $J_1(kr)\sin\theta$ ($r \leqslant a$, $ka = 3{,}83$), и однородным потоком с подходящей скоростью на бесконечности.

величины ω и ψ изменяют знак один или несколько раз, если двигаться вдоль радиуса до границы области безвихревого течения.

Рассматривая отдельно области внутри и вне окружности радиуса $r = a$ или воспользовавшись формулой (7.3.7), можно определить импульс жидкости относительно осей, связанных с жидкостью на бесконечности; он представляет собой вектор, имеющий направление вдоль положительной оси x и величину $2\pi a^2 \rho U$.

Упражнения

1. Покажите методом конформного преобразования плоскости течения, что траектория точечного вихря в области между двумя пересекающимися прямолинейными границами определяется кривой

$$r \sin n\theta = \text{const},$$

где r, θ — полярные координаты, а границы жидкости задаются условиями $\theta = 0$ и $\theta = \pi/n$.

2. Точечные вихри одинаковой интенсивности $\varkappa$ расположены вдоль бесконечной прямой на равных расстояниях a друг от друга; имеется еще один аналогичный ряд точечных вихрей напряженности $-\varkappa$, параллельный первому ряду и отстоящий от него на расстояние b. Покажите, что скорость, с которой все вихри движутся вдоль рядов, равна

$$\frac{\varkappa}{2a}\operatorname{cth}\frac{\pi b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{\varkappa}{2a}\operatorname{th}\frac{\pi b}{a}$$

в зависимости от того, расположены вихри в рядах друг против друга или сдвинуты на (1/2) a. (Такую «вихревую дорожку» можно использовать для приближенного представления в некотором интервале чисел Рейнольдса следа за телом, движущимся в жидкости; см. фото 4.12.6 и 5.11.4.)

3. Покажите, что если учесть влияние вязкости в рассмотренных в § 7.3 полях течения, то величина полной завихренности $\int \omega dA$ и координаты центра завихренности останутся постоянными, а величина D^2 будет расти со скоростью 4ν (D — дисперсия распределения завихренности).

7.4. Установившееся двумерное вихревое движение жидкости

В двумерном течении уравнение сохранения массы будет выполнено тождественно, если компоненты скорости u, v записать с помощью функции тока ψ. Тогда величина вектора завихренности, который всюду нормален плоскости (x, y) течения, будет определяться выражением

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right).$$

Как было установлено (см. (7.1.6)), в двумерном течении завихренность каждого элемента жидкости постоянна; в случае установившегося движения траектории частиц совпадают с линиями тока. Следовательно, завихренность ω имеет одно и то же значение во всех точках линии тока и ее, очевидно, можно записать как функцию только ψ, скажем, $\omega = f(\psi)$. Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -f(\psi), \tag{7.4.1}$$

которое определяет распределение скорости в установившемся течении, как только функция $f(\psi)$ задана.

Величина H постоянна вдоль линии тока и, следовательно, также зависит только от ψ. Теперь (7.1.8) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{dH}{d\psi} \nabla \psi; \tag{7.4.2}$$

отсюда получаем одно скалярное соотношение

$$\frac{dH}{d\psi} = -\omega = -f(\psi). \tag{7.4.3}$$

Величину H можно определить путем интегрирования, если известна функция f, после чего получается явное выражение для давления.

Итак, если распределение завихренности по различным линиям тока известно, то математическая часть решения задачи об установившемся двумерном течении ясна (хотя аналитическое определение ψ из уравнения (7.4.1) может оказаться нелегким делом). Распределение завихренности может быть задано произвольным, если мы ограничиваемся теорией невязкой жидкости. На практике

же распределение завихренности определяется историей формирования установившегося течения, которая в свою очередь в значительной степени зависит от влияния вязкости. Обычно нет возможности подробно проанализировать процесс формирования установившегося течения, и поэтому функцию f удается определить только в простых случаях.

Возможные решения уравнений движения невязкой жидкости можно исследовать путем задания того или иного вида функции f в уравнении (7.4.1). Удобно, например, взять $f(\psi) \sim \psi$, что приводит к линейному уравнению [1])

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\alpha^2 \psi, \tag{7.4.4}$$

которое известно из теории поперечных колебаний упругой мембраны с закрепленной границей в плоскости (x, y) и с ψ в качестве прогиба мембраны; решение этого уравнения получено для различных границ мембраны, на которых ψ постоянна,— круговой, прямоугольной, треугольной; однако остается неизвестным, при каких условиях могут существовать и существуют ли вообще соответствующие поля течений.

Другое простое решение, имеющее и практическое значение, получается в случае, когда завихренность во всей жидкости считается постоянной и равной, скажем, ω_0. Уравнение для ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega_0 \tag{7.4.5}$$

— это уравнение Пуассона с постоянной правой частью, которое уже встречалось в § 4.1 при совсем других обстоятельствах. (Это уравнение справедливо и для установившегося, и для неустановившегося течения, когда ω постоянна, хотя граничные условия в обоих случаях не будут одинаковыми.) Уравнение (7.4.3) при $\omega = \text{const}$ можно проинтегрировать и в результате получить

$$H = \text{const} - \omega_0 \psi,$$

---

[1]) Может случиться, что этот вид распределения завихренности будет удовлетворять также и полному уравнению завихренности для вязкой жидкости, которое для двумерного течения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right).$$

В случае любого такого распределения завихренности, при котором завихренность постоянна вдоль линий тока, второй член в левой части уравнения обращается в нуль, а для частного распределения (7.4.4) остается

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\alpha^2 \nu \omega, \text{ т. е. } \omega \sim \exp(-\alpha^2 \nu t).$$

Таким образом, решение для ψ как функции от x и y, получаемое из (7.4.4), соответствует либо установившемуся движению невязкой жидкости, либо, будучи умноженным на $\exp(-\alpha^2 \nu t)$,— затухающему движению вязкой жидкости.

или, обозначая через p модифицированное давление, учитывающее влияние силы тяжести, найти

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{1}{2} q^2 - \omega_0 \psi. \tag{7.4.6}$$

В остальной части данного параграфа мы обсудим три различных частных случая этого однородного распределения завихренности.

Постоянная завихренность в области, ограниченной снаружи

Нет необходимости подробно обсуждать решение задачи о течении подобного вида, однако заслуживает внимания тот факт, что на практике могут встретиться по крайней мере два пути возникновения установившихся течений с постоянной завихренностью в области, ограниченной извне. Первый и наиболее очевидный путь связан с начальным вращением жидкости как целого. Пусть жидкость заключена в твердый цилиндр, который вращается с постоянной скоростью относительно некоторой оси, параллельной его образующим; под действием вязкости жидкость в конечном счете будет находиться в состоянии покоя относительно твердой границы и будет иметь, следовательно, постоянную завихренность. Если теперь вращение цилиндра внезапно прекращается, то жидкость в цилиндре будет продолжать движение с постоянной завихренностью, за исключением тонкого слоя вблизи границы (предполагается, что отрыва течения нет), где сильно сказывается влияние вязкой диффузии завихренности от стенки. Толщина этого пограничного слоя увеличивается до тех пор, пока вся жидкость не придет в состояние покоя; однако при подходящих больших числах Рейнольдса течения существует период времени, когда толщина пограничного слоя пренебрежимо мала. В течение этого промежутка времени движение всей массы жидкости описывается уравнением (7.4.5) с постоянным значением ψ на стационарной границе жидкости.

Другой путь возникновения областей постоянной завихренности в установившемся двумерном течении также связан с действием вязкости в начальный период движения. Предположим, что в стационарном состоянии существует семейство замкнутых линий тока, не охватывающих внутренней границы, и влияние вязких напряжений для этих линий тока всюду мало (т. е. среди этих линий тока ни одна не проходит через слой жидкости, в котором силы вязкости и инерции сравнимы). Вдоль каждой из этих линий тока завихренность будет приближенно постоянной. Далее, *точным* уравнением, описывающим завихренность в этом случае двумерного движения, будет уравнение

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega,$$

представляющее собой обычное уравнение диффузии в движущейся среде; отсюда следует, что если завихренность имеет различные значения на разных линиях тока, то должен существовать поток завихренности поперек линий тока, направленный либо внутрь, либо наружу во всех точках какой-либо из рассматриваемых замкнутых линий тока. Поскольку источников и стоков завихренности в центре семейства замкнутых линий тока не имеется, единственным возможным стационарным состоянием будет состояние с постоянной завихренностью (для установления такого состояния потребуется длительное время ввиду предположения о малом влиянии сил вязкости). Доказательство этого факта может быть проведено в строгой аналитической форме (Бэтчелор (1956)); было установлено, что этот результат справедлив также и в том случае, когда замкнутые линии тока охватывают внутреннюю границу [1]).

В общем, какой бы ни была причина возникновения постоянной завихренности, определение функции тока по уравнению (7.4.5) при заданном ω_0 оказывается чисто математической задачей. Решения этого уравнения, упомянутые в § 4.2, могут быть использованы и здесь при соответствующей их интерпретации. Например, для установившегося течения с постоянной завихренностью ω_0 в области, ограниченной снаружи эллипсом с полуосями a и b, мы имеем

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega_0 \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\Big/\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \qquad (7.4.7)$$

Это решение справедливо во всей области, за исключением окрестности границы, где могут оказаться существенными силы вязкости; интересная особенность движения состоит в том, что частицы жидкости движутся по подобным эллипсам и за равное время пробегают орбиты одинаковое число раз при постоянном моменте количества движения каждой частицы относительно центра.

Жидкость, вращающаяся на бесконечности как твердое тело

Если жидкость, простирающаяся до бесконечности, первоначально находится в состоянии вращения с угловой скоростью $\omega_0/2$, то любое двумерное движение, вызываемое в этой жидкости, имеет постоянную завихренность ω_0 в предположении, что выполняются условия теоремы Кельвина о циркуляции. Мы ограничим-

[1]) Аналогичный результат имеется и для установившегося осесимметричного течения с замкнутыми линиями тока в осевой плоскости. Найдено, что при определенных условиях завихренность в области течения приближенно невязкой жидкости представляет собой азимутальный вектор, величина которого пропорциональна расстоянию от оси симметрии (как в случае сферического вихря Хилла, см. (7.2.17)). Результаты для плоского и осесимметричного течений можно объединить в виде утверждения, что в области установившегося течения приближенно невязкой жидкости с замкнутыми линиями тока должно быть $H \sim \psi$.

ся рассмотрением установившегося движения подобного вида при наличии стационарной внутренней твердой границы. В этом случае движение полезно представить как суперпозицию трех видов движения:

а) вращения жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\omega_0/2$ относительно начала системы координат;

б) однородного течения со скоростью $-\mathbf{U}$ (знак минус введен для согласования с рассмотренным ранее безвихревым течением, обусловленным движением тела со скоростью $\mathbf{U}$ в покоящейся на бесконечности жидкости; скорость этого течения зависит от расстояния между началом координат и центром вращения);

в) возмущения (не обязательно малой амплитуды), вызванного наличием границы и являющегося безвихревым с потенциалом скорости φ.

Таким образом, в полярных координатах (r, θ) при $\theta = 0$ в направлении скорости $\mathbf{U}$ мы получаем радиальную и окружную компоненты скорости соответственно

$$-U\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{1}{2}\omega_0 r + U\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \tag{7.4.8}$$

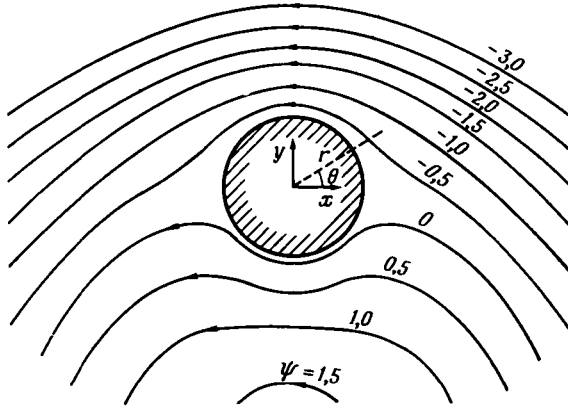
где U — величина вектора $\mathbf{U}$. Скорость возмущения на бесконечности $\nabla\varphi$ равна нулю, а условия нулевого потока жидкости через каждый участок внутренней твердой границы требуют, чтобы нормальная компонента скорости $\nabla\varphi$ принимала заданное значение (которое зависит от формы границы, а также от ω_0 и $\mathbf{U}$); таким образом, если еще задано значение циклической постоянной для безвихревого движения, то возмущенное движение единственно и для его определения применимы стандартные методы теории безвихревого течения.

На простом примере, в котором внутренняя граница жидкости имеет вид окружности радиуса a, можно проиллюстрировать, каким образом изменяется поле течения под действием заданной завихренности жидкости. Если в качестве начала системы координат выбрать центр окружности, то граница жидкости не будет перемещаться под действием вращения жидкости как целого относительно начала координат, и потенциал скорости φ имеет тот же самый вид, что и для безвихревого обтекания цилиндра однородным потоком. Обозначив через $\varkappa$ циклическую константу потенциала скорости φ, для безвихревого возмущения течения получим

$$\varphi = \frac{\varkappa\theta}{2\pi} - \frac{Ua^2\cos\theta}{r}. \tag{7.4.9}$$

Распределение полной скорости можно легко представить с использованием функции тока

$$\psi = -\frac{1}{4}\omega_0 r^2 - Ur\sin\theta - \frac{\varkappa}{2\pi}\ln r + \frac{Ua^2\cos\theta}{r}. \tag{7.4.10}$$



Р и с. 7.4.1. Схема линий тока в двумерном течении, обусловленном неподвижным круговым цилиндром, помещенным во вращающуюся жидкость; $\omega_0 a/U = 1/2$, $\varkappa/aU = 0$.

При записи ψ в безразмерном виде, очевидно, появятся два безразмерных параметра $\omega_0 a/U$ и $\varkappa/aU$. На рис. 7.4.1 показана картина линий тока при $\omega_0 a/U = 1/2$ (что соответствует случаю, когда расстояние центра вращения жидкости как целого от центра цилиндра составляет четыре радиуса цилиндра) и $\varkappa/aU = 0$.

Очевидно, что вращение всей жидкости как целого обусловливает несимметричность относительно линии $\theta = 0$ обтекания цилиндра, подобно тому как это происходит в случае обтекания цилиндра с ненулевой циркуляцией при отсутствии вращения; кроме того, в данном случае существует ненулевая сила, действующая на цилиндр в направлении по нормали к линии $\theta = 0$. Результирующую силу, действующую на внутреннюю границу жидкости, можно определить с использованием выражения для давления (7.4.6) (без учета действия силы тяжести):

$$\mathbf{F} = -\int p\mathbf{n}\,dA = \frac{1}{2}\rho \int q^2\mathbf{n}\,dA, \tag{7.4.11}$$

поскольку функция тока ψ постоянна на внутренней границе. Используя (7.4.10), находим ненулевую компоненту силы $\mathbf{F}$ в направлении оси y:

$$F_y = \frac{1}{2}\rho a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\omega_0 a + U\sin\theta + \frac{\varkappa}{2\pi a} + U\sin\theta\right)^2 \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \rho U(\pi a^2\omega_0 + \varkappa). \tag{7.4.12}$$

Вид соотношения (7.4.12) наводит на мысль, что должна существовать формула для силы, действующей на тело произвольной формы, аналогичная формуле Жуковского — Кутта, к которой сводится (7.4.12) при $\omega_0 = 0$. Мы можем проверить эту догадку, применив теорему о количестве движения подобно тому, как это сделано в § 6.4. Сила, действующая на тело произвольной формы, помещенное вместо кругового цилиндра на рис. 7.4.1, вычисляется по формуле (6.4.27) и определяется условиями в начале координат (в центре цилиндра), причем нужно учесть следующие изменения: а) величина $-\mathbf{U}$ в (6.4.27) заменяется на невозмущенную скорость $-\mathbf{U} + (1/2)\,\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}$, которая в данном случае непостоянна, и б) используется новое выражение (7.4.6) для давления. Предоставляем читателю в качестве упражнения убедиться в том, что действующая на произвольное тело сила равна результирующей обычной силы величиной $\rho U\varkappa$, направленной по нормали к $\mathbf{U}$, и силы $-\pi\rho\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{c}$, если $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}/r^2$ — первый член в ациклической (регулярной) части разложения потенциала скорости φ по отрицательным степеням r. Если форма тела задана, то c можно определить путем конформного отображения его границы на окружность. Как уже было отмечено, условие для потенциала скорости φ на внутренней границе включает как U, так и ω, поэтому c в общем случае зависит как от этих двух величин, так и от формы тела.

Жидкость, совершающая в бесконечности простой сдвиг

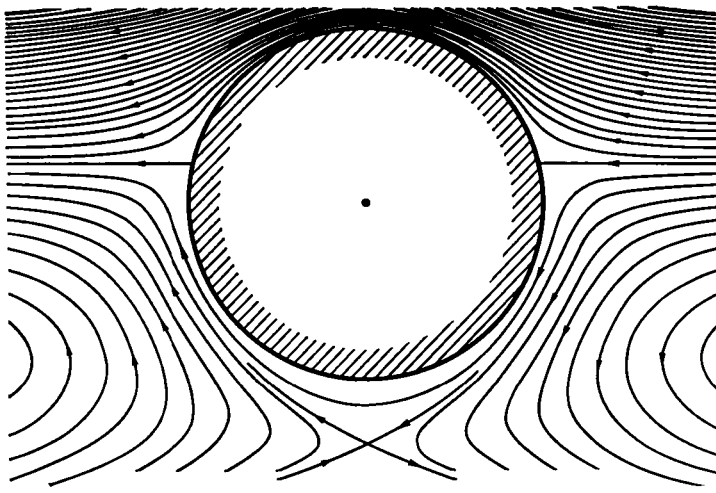
Общие простые замечания, подобные приведенным выше, можно сделать и относительно установившегося обтекания тела потоком жидкости, невозмущенная скорость которой имеет вид $(-U - \omega_0 y, 0)$ в прямоугольной системе координат. Как и прежде, возмущение, обусловленное наличием тела, можно представить посредством потенциала скорости φ, ациклическая часть которого определяется единственным образом условием непротекания жидкости через каждый участок границы тела.

Как и ранее, поле течения можно легко определить, если тело имеет форму кругового цилиндра радиуса a. Поместим центр окружности в начало координат; тогда условием для потенциала скорости φ на внутренней границе будет

$$(\partial\varphi/\partial r)_{r=a} = (U + \omega_0 a \sin\theta)\cos\theta.$$

Два члена в правой части этого условия могут быть согласованы с частными решениями для φ, и мы находим

$$\varphi = \frac{\varkappa\theta}{2\pi} - \frac{Ua^2\cos\theta}{r} - \frac{\omega_0 a^4 \sin 2\theta}{4r^2}. \qquad (7.4.13)$$



Р и с. 7.4.2. Линии тока двумерного течения, обусловленного неподвижным круговым цилиндром, помещенным в простое двумерное течение сдвига; $\omega_0 a/U = 1$, $\varkappa/aU = 0$ (Тэян (1943)).

Соответственно получаем функцию тока полного течения

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega_0 r^2 \sin^2\theta - Ur\sin\theta - \frac{\varkappa}{2\pi}\ln r + \frac{Ua^2\sin\theta}{r} - \frac{\omega_0 a^4 \cos 2\theta}{4r^2}. \tag{7.4.14}$$

На рис. 7.4.2 показаны линии тока течения для частного случая при $\omega_0 a/U = 1$, $\varkappa/aU = 0$, соответствующего довольно сильному течению сдвига. Как и следовало ожидать, разность функций тока (7.4.14) и (7.4.10) представляет обтекание кругового цилиндра, помещенного в потенциальное чисто деформационное течение.

И снова легко заметить, что наличие завихренности в рассматриваемой жидкости служит причиной возникновения ненулевой силы, действующей на круговой цилиндр. Компонента этой силы в направлении оси x равна нулю, поскольку поле течения симметрично относительно оси y. Компонента в направлении оси y определяется путем непосредственной оценки интеграла в соотношении (7.4.11) и равна

$$F_y = \frac{1}{2}\rho a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2_{r=a} \sin\theta\, d\theta = \rho U(2\pi a^2\omega_0 + \varkappa). \tag{7.4.15}$$

Здесь снова можно обобщить соотношение (7.4.15) на случай цилиндра произвольного поперечного сечения и найти

$$F_x = 0, \quad F_y = \rho\,(-2\pi\omega_0 c_x + U\varkappa), \tag{7.4.16}$$

где вектор с с компонентами (c_x, c_y), как и ранее, представляет собой коэффициент первой круговой гармоники в разложении ациклической части потенциала скорости φ. То обстоятельство, что компонента F_x равна нулю, представляется верным и из энергетических соображений; в самом деле, если тело находится в установившемся движении относительно осей координат, движущихся со скоростью $(-U, 0)$, то любое ненулевое сопротивление движению тела было бы равносильно выполнению телом работы над жидкостью, и, следовательно, изменению кинетической энергии жидкости. И опять посредством конформного отображения плоскости течения можно при заданной форме тела найти вектор с (как было показано Тзяном (1943) для профиля Жуковского).

Произвольное невозмущенное движение, в котором компоненты скорости линейно зависят от x и y, имеет постоянную завихренность, однако рассмотренные выше два частных случая — вращение жидкости как целого и простой сдвиг — служат, по-видимому, наиболее важными примерами. Формулы, подобные (7.4.12), представляют известный интерес при рассмотрении течения в турбомашинах, а формулы, подобные (7.4.15), могут оказаться полезными при изучении поведения тел, перемещающихся в текущей жидкости. Количественные результаты, интересные с прикладной точки зрения, можно получить непосредственно только для тел обтекаемой формы, на поверхности которых не происходит отрыва пограничного слоя. Если тело имеет острую кормовую кромку, подобно кромке крыла самолета, то циркуляцию $\varkappa$ по контуру тела в установившемся течении следует определять с использованием гипотезы Жуковского (§ 6.7), как и в случае безвихревого течения.

Упражнение

В одном двумерном течении центр кругового цилиндра радиуса a движется в покоящейся на бесконечности жидкости по круговой траектории радиуса R и цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью $-(1/2)\,\omega_0$, а циркуляция вокруг него равна нулю. В другом течении жидкость на бесконечности вращается как твердое тело с угловой скоростью $(1/2)\omega_0$, а цилиндр радиуса a неподвижен и его центр отстоит на расстояние R от центра вращения жидкости; циркуляция по окружности цилиндра равна $\pi a^2\omega_0$. Покажите, что действующая на цилиндр сила в обоих случаях направлена от центра вращения, а величина этой силы в первом течении равна половине силы во втором течении. (Обратите внимание на то, что если в первом случае использовать вращающуюся систему координат, то согласно результатам из § 4.1 распределения относительной скорости в обоих течениях будут одинаковыми.)

7.5. Установившееся осесимметричное течение с закруткой

Рассмотрим осесимметричное течение в цилиндрических координатах (x, σ, φ) с соответствующими компонентами скорости (u, v, w) и заданными компонентами завихренности $(\omega_x, \omega_\sigma, \omega_\varphi)$:

$$\omega_x = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma}; \quad \omega_\sigma = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \sigma}. \tag{7.5.1}$$

Уравнение сохранения массы будет выполнено, если компоненты скорости u и v записать в виде

$$u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad v = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7.5.2}$$

где $\psi(x, y)$ — функция тока; тогда азимутальная компонента завихренности будет равна

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\right). \tag{7.5.3}$$

Следует отметить, что компоненты завихренности ω_x и ω_σ получаются из σw точно таким же образом, как и компоненты скорости u и v получаются из ψ.

Из векторного уравнения движения (7.1.3) получаем три скалярных уравнения

$$v\omega_\varphi - w\omega_\sigma - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{7.5.4}$$

$$w\omega_x - u\omega_\varphi - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \tag{7.5.5}$$

$$u\omega_\sigma - v\omega_x - \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{7.5.6}$$

где H в случае осесимметричного течения зависит только от x и σ. Уравнение (7.5.6) можно переписать в виде

$$\frac{D(\sigma w)}{Dt} = 0. \tag{7.5.7}$$

Теперь оно выражает постоянство циркуляции по жидкому контуру в форме окружности, имеющей центр на оси симметрии и лежащей в плоскости, нормальной к ней. Задачи об осесимметричном закрученном течении обычно содержат интересные и трудные вопросы, касающиеся взаимодействия окружной (азимутальной) компоненты скорости w и движения в осевой плоскости с компонентами скорости u и v.

Если движение *установившееся*, то каждая частица жидкости движется вдоль линии тока по поверхности, образованной вращением кривой $\psi = \text{const}$, лежащей в осевой плоскости, относитель-

но оси симметрии течения. Тогда из теоремы Бернулли и из (7.5.7) следует

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{p}{\rho}=H(\psi),$$
$$\sigma w=C(\psi), \tag{7.5.8}$$

где H и C — произвольные функции от ψ. Теперь два из выражений (7.5.1) принимают вид

$$\omega_x=u\frac{dC}{d\psi}, \quad \omega_\sigma=v\frac{dC}{d\psi}, \tag{7.5.9}$$

показывающий, что компоненты векторов $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в осевой плоскости параллельны, а поверхности Бернулли суть поверхности вращения, на которых функция тока ψ постоянна. Любое из уравнений (7.5.4) или (7.5.5) можно использовать для получения выражения ω_φ в зависимости от H и C. Из (7.5.4) при $\partial u/\partial t=0$ находим

$$\frac{\omega_\varphi}{\sigma}=\frac{w\omega_\sigma}{\sigma v}+\frac{1}{\sigma v}\frac{dH}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\psi}-\frac{dH}{d\psi}; \tag{7.5.10}$$

то же самое получается из (7.5.5). (Если поток не закручен, то величина ω_φ/σ зависит только от ψ, что согласуется с (7.1.7).) Из (7.5.3) и (7.5.10) получаем уравнение относительно ψ:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}=\sigma^2\frac{dH}{d\psi}-C\frac{dC}{d\psi}. \tag{7.5.11}$$

Течения, в которых все переменные не зависят от x и $v=0$, представляют определенный интерес в связи с движением жидкости в кольцевых каналах и трубах; такие течения можно назвать *цилиндрическими*, так как поверхностями Бернулли для них служат круговые цилиндры. Уравнение движения в радиальном направлении в случае такого установившегося течения принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\sigma}=\frac{w^2}{\sigma}\equiv\frac{C^2}{\sigma^3}, \tag{7.5.12}$$

так что имеем

$$H=\frac{1}{2}(u^2+w^2)+\int\frac{C^2}{\sigma^3}d\sigma=\frac{1}{2}u^2+\int\frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\sigma}d\sigma. \tag{7.5.13}$$

Уравнение (7.5.11) сводится, таким образом, к тождеству; любое распределение u и w, или, что равносильно, H и C, в зависимости от σ соответствует некоторому возможному установившемуся цилиндрическому течению.

В случае установившегося течения, когда все линии тока приходят из некоторой области, возможно из «бесконечности», где значения H и C для различных линий тока известны, функции

$H(\psi)$ и $C(\psi)$ в (7.5.11) будут известными и тогда во всем поле течения ψ в принципе можно определить как функцию от x и σ. Практически это можно сделать только для очень простых зависимостей H и C от ψ. К счастью, относительно простой случай, в котором жидкость далеко вверх по потоку имеет постоянную осевую скорость U и вращается как твердое тело с угловой скоростью Ω, оказывается одним из самых важных на практике. Условия вверх по потоку задаются в виде

$$\psi = \frac{1}{2} U\sigma^2, \quad C = \Omega\sigma^2,$$

а поскольку в области вверх по потоку течение цилиндрическое и для него справедливо (7.5.13), то имеем

$$H = \frac{1}{2} U^2 + \Omega^2\sigma^2.$$

Теперь условия вверх по потоку можно переписать так:

$$C = \frac{2\Omega}{U}\psi, \quad H = \frac{1}{2} U^2 + \frac{2\Omega^2}{U}\psi, \tag{7.5.14}$$

и эта зависимость H и C от ψ должна быть одной и той же во всем поле течения. Таким образом, основное уравнение для поля течения становится линейным

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{2\Omega^2}{U}\sigma^2 - \frac{4\Omega^2}{U^2}\psi.$$

Его удобно переписать в несколько ином виде, используя в качестве зависимой переменной не саму функцию тока $\psi(x, \sigma)$, а ее отклонение от исходной функции тока в области вверх по потоку, положив

$$\psi(x, \sigma) = \frac{1}{2} U\sigma^2 + \sigma F(x, \sigma); \tag{7.5.15}$$

итак, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial F}{\partial\sigma} + \left(k^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right)F = 0, \tag{7.5.16}$$

где

$$k = 2\Omega/U.$$

Теперь на примерах решения уравнения (7.5.16) мы поясним некоторые соображения о довольно сложном взаимодействии осевого и азимутального движений. Следует иметь в виду, что линейность уравнения (7.5.16) есть результат специального вида условий (7.5.14), наложенных на течение в области вверх по потоку. Что же касается решений уравнения (7.5.11), соответствующих иным условиям вверх по потоку, то о них мало что известно.

Влияние изменения поперечного сечения трубы на течение закрученной жидкости

Предположим, что жидкость, находящаяся в установившемся движении в трубе, проходит переходный участок, соединяющий два длинных цилиндрических отрезка разных поперечных сечений; пусть на некотором расстоянии вверх по потоку от переходного участка жидкость имеет постоянную осевую скорость U и вращается как твердое тело с угловой скоростью Ω. Труба имеет осесимметричную границу, и течение всюду считается осесимметричным. Переходный участок можно рассматривать как простое увеличение или уменьшение радиуса трубы (рис. 7.5.1, *а*, *б*); два других варианта переходного участка, интересные для приложений, показаны на рис. 7.5.1, *в*, *г*. Во всех рассматриваемых случаях течение вверх и вниз по потоку от переходного участка цилиндрическое и задача состоит в определении параметров цилиндрического течения в области вниз по потоку.

Уравнение (7.5.16) применимо во всем поле течения, а в интересующей нас цилиндрической области вниз по потоку, где ψ и F зависят только от σ, имеем

$$\frac{d^2F}{d\sigma^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{dF}{d\sigma}+\left(k^2-\frac{1}{\sigma^2}\right)F=0. \qquad (7.5.17)$$

Это уравнение Бесселя порядка единицы, имеющее общее решение

$$F = AJ_1(k\sigma) + BY_1(k\sigma), \qquad (7.5.18)$$

где J_1 и Y_1 — стандартные обозначения функций Бесселя первого и второго рода. Постоянные A и B должны быть определены по известным значениям ψ при двух значениях радиуса.

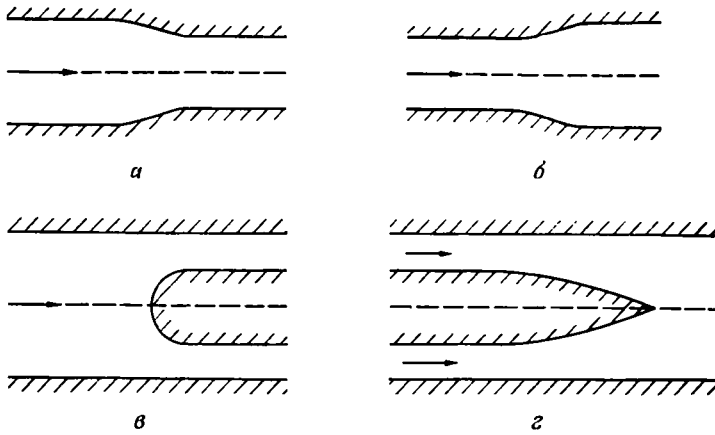
Все указанные выше варианты переходных участков можно описать единообразно, если предположить, что областями цилиндрических течений вверх и вниз по потоку от переходного участка будут кольцевые области $a_1 \geqslant \sigma \geqslant a_2$ и $b_1 \geqslant \sigma \geqslant b_2$ соответственно (рис. 7.5.2). Линии тока, на которых значения ψ равны $(1/2)\,Ua_1^2$ и $(1/2)\,Ua_2^2$ в цилиндрической области вверх по потоку, отстоят от оси симметрии соответственно на расстояниях $\sigma = b_1$ и $\sigma = b_2$ в области вниз по потоку; таким образом, решение (7.5.18) должно удовлетворять граничным условиям

$$F=\frac{1}{2}U\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1} \quad \text{при } \sigma=b_1,$$

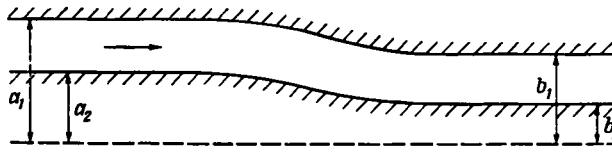
$$F=\frac{1}{2}U\frac{a_2^2-b_2^2}{b_2} \quad \text{при } \sigma=b_2.$$

Из этих условий находим

$$A=\frac{U}{2b_1b_2}\frac{b_2(a_1^2-b_1^2)Y_1(kb_2)-b_1(a_2^2-b_2^2)Y_1(kb_1)}{J_1(kb_1)Y_1(kb_2)-J_1(kb_2)Y_1(kb_1)}, \qquad (7.5.19)$$



Р и с. 7.5.1. Различные варианты переходов от одного цилиндрического течения к другому.



Р и с. 7.5.2. Общий случай перехода от одного цилиндрического течения к другому

а выражение для B получается из написанного путем замены J_1 на Y_1 и Y_1 на J_1.

Осевая скорость в цилиндрической области вниз по потоку, согласно (7.5.15) и (7.5.18), равна

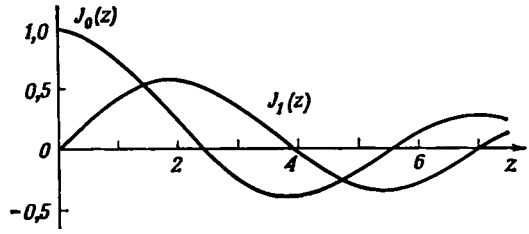
$$u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = U + \frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\sigma}\{A\sigma J_1(k\sigma) + B\sigma Y_1(k\sigma)\} = \\ = U + AkJ_0(k\sigma) + BkY_0(k\sigma); \quad (7.5.20)$$

здесь были использованы известные соотношения между функциями Бесселя J_0 и J_1, а также между Y_0 и Y_1. Азимутальная скорость равна

$$w = \frac{C}{\sigma} = \frac{2\Omega}{U}\frac{\psi}{\sigma} = \Omega\sigma + kAJ_1(k\sigma) + kBY_1(k\sigma). \quad (7.5.21)$$

Наиболее интересный переходной участок — это простое изменение радиуса трубы, показанное на рис. 7.5.1, *а*, *б*. Полагая $a_2 = 0$, $b_2 \to 0$ и записывая a, b вместо a_1, b_1, а также используя предельные значения

$$J_1(z) \to 0, \quad zY_1(z) \to -2/\pi \quad \text{при} \quad z \to 0,$$



Р и с. 7.5.3. Функции Бесселя первого рода.

мы находим

$$A=\frac{1}{2}U\frac{a^2-b^2}{bJ_1(kb)}, \qquad B=0,$$

так что

$$\frac{u}{U}=1+\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\frac{{}^1/_2 kbJ_0(k\sigma)}{J_1(kb)} \tag{7.5.22}$$

и

$$\frac{w}{\Omega\sigma}=1+\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\frac{bJ_1(k\sigma)}{\sigma J_1(kb)}. \tag{7.5 23}$$

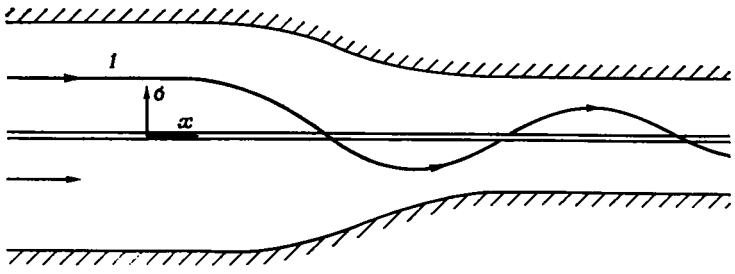
Когда $kb \ll 1$, две последние формулы приводятся к виду

$$\frac{u}{U}\approx\frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{w}{\Omega\sigma}\approx\frac{a^2}{b^2};$$

они описывают изменения, которые происходят в трубке малого поперечного сечения, представляющей собой одновременно трубку тока и вихревую трубку с однородным распределением скорости и завихренности. При более высоких значениях kb характер изменения распределений u и w по σ можно выяснить, исходя из графика функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$ на рис. 7.5.3. Если $kb < 2{,}40$ (т. е. меньше первого нуля функции $J_0(z)$), то отклонения величин u/U и $w/\Omega\sigma$ от единицы всюду в цилиндрической области вниз по потоку имеют тот же знак, что и $(a-b)$ (т. е. u и w/σ увеличиваются при сужении трубы и уменьшаются при ее расширении), и монотонно изменяются поперек сечения трубы, достигая наибольшего значения в его центре. На оси трубы в области вниз по потоку имеем

$$\left(\frac{u}{U}\right)_{\sigma=0}=\left(\frac{w}{\Omega\sigma}\right)_{\sigma=0}=1+\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\frac{(1/2)\,kb}{J_1(kb)}; \tag{7.5.24}$$

равенство u/U и $w/\Omega\sigma$ на оси трубы указывает на то, что ось трубы расположена внутри трубки тока и одновременно вихревой трубки малого поперечного сечения. При изменении kb от 0 до 2,4 множитель $(1/2)kb/J_1(kb)$ в (7.5.24) изменяется от 1,0 до 2,32, так что



Р и с. 7.5.4. Превращение прямолинейной вихревой линии в спиральную при прохождении сужения трубы.
1 – вихревая нить.

изменения величин u/U и $w/\Omega\sigma$ на оси переходного участка могут отличаться от находимых при постоянных значениях осевой скорости и осевой завихренности по всему поперечному сечению множителем, не большим 2,32. Вблизи внешней границы трубы относительные изменения величин u/U и $w/\Omega\sigma$ должны быть меньше чем $((a/b)^2 - 1)$, чтобы обеспечить правильные значения полного осевого потока массы и полного осевого момента количества движения.

Качественную картину этих изменений u и w при изменении радиуса трубы в переходном участке можно объяснить путем рассмотрения формы вихревых линий. В цилиндрической области вверх по потоку вихревые линии суть прямые, параллельные оси симметрии, которые вращаются относительно этой оси вместе с жидкостью. Когда вихревая линия проходит через переходный участок, она смещается радиально внутрь или наружу (в зависимости от сужения или расширения трубы), а азимутальная скорость частиц жидкости на вихревой линии изменяется по закону $\sigma w = \text{const}$. Таким образом, если вихревая линия смещается при прохождении переходного участка внутрь (см. рис. 7.5.4), то частицы вихревой линии движутся вокруг оси симметрии быстрее, чем они двигались в цилиндрической области вверх по потоку; в результате этого вихревая линия деформируется в спираль с *положительным* значением азимутальной компоненты завихренности (при условии, что вверх по потоку осевая скорость была положительной). Это приводит к отрицательному значению производной $\partial u/\partial\sigma$ в цилиндрической области вниз по потоку, так что при сужении трубы максимальное значение скорости достигается на ее оси, как это и было установлено из (7.5.22) (при условии, что $kb < 3{,}83$, т. е. меньше первого нуля функции $J_1(z)$). Аналогично можно убедиться, что при расширении трубы на ее оси получается наименьшая скорость.

Интересная особенность формул (7.5.22) и (7.5.23) связана с появлением отрицательных значений u и w при определенных комбинациях величин kb и a/b — грубо говоря, при достаточно сильной начальной закрутке жидкости. В случае перехода к большему радиусу трубы ($a < b$) увеличение kb от нулевого значения приводит к отрицательным значениям u и w в первую очередь на оси трубы; в случае сужения трубы компонента u становится отрицательной сначала на внешней границе при достижении величиной kb некоторого значения, превосходящего 2,40. Однако практические ситуации, в которых возникает обратное осевое течение, вряд ли могут быть описаны уравнением (7.5.16), так как оно выведено в предположении, что *все* линии тока приходят к переходному участку из области, где имеется специфическая зависимость H и C от ψ; поэтому трудно себе представить, чтобы точно такая же зависимость выполнялась для возвратных линий тока, приходящих из области больших положительных значений x вниз по потоку. Таким образом, эту формулу следует считать практически пригодной только для течений с $u \geqslant 0$ во всей цилиндрической области вниз по потоку от переходного участка.

Следует также отметить, что происходит нечто странное, когда величина kb достигает значения 3,83, при котором $J_1(kb) = 0$: для любых значений отношения a/b величины u и w/σ в области вниз по потоку становятся неопределенно большими. Более глубокий анализ позволяет выяснить связь этой особенности с нарушением нашего предположения о том, что течение вниз по потоку от переходного участка снова становится цилиндрическим. По-видимому, при таком большом значении kb возможно существование некоторого осесимметричного волнового движения жидкости, а влияние изменения поперечного сечения трубы приводит к возникновению цуга волн в области вниз по потоку (подобно тому, как в потоке воды в открытом канале возникает цуг поверхностных волн при определенной скорости течения, если канал перекрыть некоторым препятствием). В следующем параграфе мы кратко рассмотрим такие осесимметричные волны во вращающейся жидкости.

Вариант переходного участка, представленный на рис. 7.5.1, *в*, не дает чего-либо нового, за исключением того, что коэффициент B в выражении (7.5.18) для него будет отличен от нуля. При отсутствии внутренней границы жидкости в области вниз по потоку (рис. 7.5.1, *г*) коэффициент B также отличен от нуля (и отрицателен), и поэтому в области вниз по потоку при $\sigma \to 0$ обе величины u и w становятся бесконечно большими и положительными; таким образом, переходный участок в этом случае создает вблизи оси сильную, направленную вперед струю быстро вращающейся жидкости.

Влияние изменения внешней скорости на изолированный вихрь

Особенно интересное осесимметричное закрученное течение связано с так называемым свободным или изолированным вихрем, т. е. с вихревой трубкой, помещенной в безвихревой поток. При рассмотрении издали вихрь такого типа представляется просто вихревой нитью (5.2.6), определяемой только величиной циркуляции по любому охватывающему ее замкнутому контуру; однако при более внимательном рассмотрении оказывается, что этот вихрь имеет структуру с некоторым распределением завихренности внутри вихревой трубки. По-видимому, наиболее простым примером может служить распространяющаяся вихревая нить (§ 4.5); структура такого вихря полностью определяется вязкой диффузией завихренности от оси вихря. Другой пример вихря со структурой был рассмотрен в конце § 5.2; там завихренность была всюду параллельной оси вихря, а течение было установившимся в результате баланса между радиальной конвекцией завихренности, направленной внутрь вихря, и распространением завихренности наружу за счет вязкой диффузии.

В рассматриваемых здесь течениях жидкости с пренебрежимо малой вязкостью вихревые линии движутся вместе с жидкостью и мы будем предполагать движение установившимся. Кроме того, мы будем пренебрегать влиянием кривизны оси вихря.

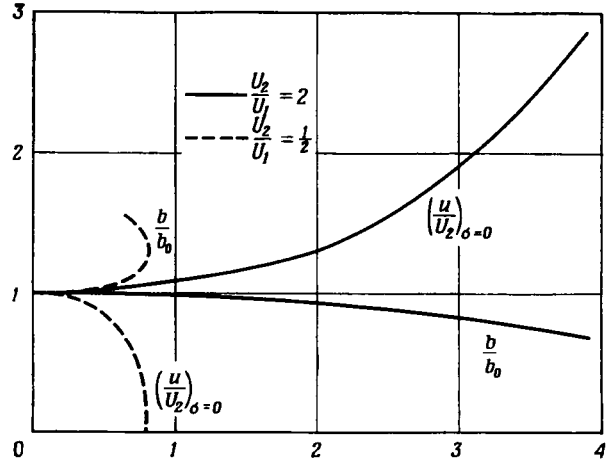
В случае строго цилиндрического вихря внутри него возможны любые распределения u и w по σ. Интересно рассмотреть такие распределения скорости в вихре, которые типичны для практических условий; с этой целью мы можем исследовать те изменения в структуре вихря, которые происходят, когда жидкость, содержащая вихрь, проходит через область нецилиндрического течения. Для этого удобно взять вихрь, цилиндрический на некотором участке своей длины с простым распределением величин H и C по ψ, и рассмотреть свойства этого вихря в некотором другом сечении, где течение снова становится цилиндрическим. Для начального цилиндрического участка с математической точки зрения удобно выбрать внутри вихря однородное распределение компоненты u и осевой компоненты завихренности; по-видимому, этот выбор также вполне подходит для любых значений вихрей, которые на некотором этапе развития подвержены сглаживающим эффектам вязкости.

Таким образом, вихрь на некотором участке его длины определяется распределением скорости

$$u = U_1, \quad v = 0, \quad w = \Omega\sigma \quad \text{для} \quad \sigma \leqslant a$$

при выполнении условий

$$u = U_1, \quad v = 0, \quad w = \Omega a^2/\sigma \quad \text{для} \quad \sigma \geqslant a$$



Р и с. 7.5.5. Свойства вихрей при увеличении или уменьшении осевой скорости. По оси абцисс отложены значения величины ka.

в безвихревом потоке, окружающем этот участок вихря. Теперь предположим, что на некотором другом участке того же вихря далеко вниз по потоку безвихревое течение вне его не зависит от x и имеет распределение скорости

$$u = U_2, \quad v = 0, \quad w = \Omega a^2/\sigma.$$

По предположению вихрь снова будет цилиндрическим (хотя и не исключена возможность волнообразного движения) с другим радиусом b и распределением скорости, определяемым подходящим решением уравнения (7.5.17). Поскольку все компоненты скорости остаются непрерывными на границе вихря, в качестве граничных условий для решения уравнения (7.5.17) имеем

$$u = U_2 \text{ при } \sigma = b, \text{ где } \psi = \frac{1}{2} U_1 a^2,$$

и еще неявное граничное условие, состоящее в том, что u не имеет особенности при $\sigma = 0$, так что в общем решении (7.5.18) следует сохранить только член $AJ_1(k\sigma)$. Таким образом, искомое решение идентично уже найденному для течения в цилиндрической области вниз по потоку в трубе радиуса b, где b определяется из соотношения (см. (7.5.22))

$$\frac{U_2}{U_1} = 1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \frac{(1/2)\, kbJ_0(kb)}{J_1(kb)}; \qquad (7.5.25)$$

здесь $k = 2\Omega/U_1$. Когда радиус вихря известен, распределение скорости в вихре определяется соотношениями (7.5.22) и (7.5.23), в которых U следует заменить на U_1.

В случае вихря бесконечно малого поперечного сечения ($a \to 0$) из (7.5.25) видно, что b также мало и что

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^{1/2} \equiv \frac{b_0}{a}.$$

Это значение для b/a в точности то же, что требуется для выполнения уравнения сохранения массы в течении, в котором осевая скорость всей жидкости в вихре изменяется от U_1 до U_2 (как это было бы в отсутствие закрученного движения). Величину b_0/a удобно использовать в качестве стандартной для сравнения со значениями b/a из (7.5.25), которые определяются с учетом влияния закрученности течения. На рис. 7.5.5 показаны значения b/b_0 (отношение b/a к b_0/a), вычисленные по (7.5.25) при различных значениях ka и при различных отношениях внешних осевых скоростей, равных 2 и 1/2. Чтобы показать соответствующие изменения в распределении осевой скорости (а следовательно, и азимутальной, так как обе они определяются через ψ) поперек вихря, было вычислено с использованием (7.5.24) и (7.5.25) отношение осевой скорости в центре вихря к скорости на границе:

$$\left(\frac{u}{U_2}\right)_{\sigma=0} = \frac{U_1}{U_2}\left\{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\frac{(1/2)\,kb}{J_1(kb)}\right\} = \frac{U_1}{U_2} + \frac{U_2 - U_1}{U_2 J_0(kb)};$$

графики этой зависимости показаны на рис. 7.5.5. Известно, что значения ka порядка единицы достигаются в случае вихрей, сбегающих с боковой кромки крыла самолета (§ 7.8); по-видимому, когда осевая скорость в безвихревом потоке, окружающем такой вихрь, заметно изменяется, должны происходить значительные изменения в структуре вихря, особенно если внешний поток замедляется. Развитие быстрого изменения осевой скорости поперек вихря, вероятно, должно быть характерной чертой вихрей, проходящих через область неоднородного безвихревого течения при значениях $ka = 2\Omega a/U_1$ порядка единицы.

Общий характер поведения кривых на рис. 7.5.5 можно выяснить качественно, воспользовавшись выражением (7.5.12) для радиального градиента давления. В области вниз по потоку в интервале $b \leqslant \sigma < \infty$ циркуляция C постоянна, а при уменьшении σ от b до нуля она уменьшается до нулевого значения. Вследствие этого разность между давлением в вихре, скажем на его оси, и давлением вдали от вихря в плоскости, нормальной к его оси, сильно зависит от величины b; увеличение b соответствует уменьшению этой разности давлений, и обратно. Таким образом, когда жидкость вне вихря замедляется, а радиус вихря увеличивается с увеличением расстояния в направлении течения, должен существовать дополнительный осевой градиент давления *внутри вихря*, который должен быть положительным и, следовательно, приводить к уменьшению скорости на оси и к дальнейшему утолщению вихря. Итак, ускорение или замедление жидкости вне

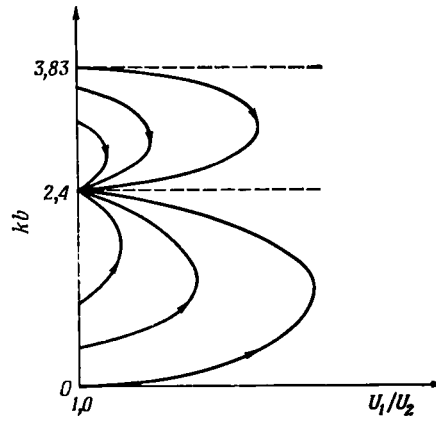
вихря приводит к изменению осевой скорости жидкости внутри вихря; знак этого изменения совпадает со знаком изменения внешней скорости, а величина изменения больше, чем изменение внешней скорости; кроме того, изменяется радиус вихря, причем это изменение больше, чем следовало бы ожидать, если бы осевая скорость была постоянна по всей поперечной плоскости.

Требуют упоминания еще две особенности кривых на рис. 7.5.5, относящихся к случаю $U_2/U_1 = 1/2$. Первая состоит в том, что при некотором значении ka осевая скорость в центре вихря становится равной нулю. Как отмечалось выше, продолжение решения в область таких сочетаний величин ka и U_2/U_1, для которых осевая скорость отрицательна, не имеет смысла, так как крайне маловероятно, чтобы жидкость, приходящая из областей вниз по потоку, на практике имела бы предполагаемую зависимость H и C от ψ. Вторая интересная особенность заключается в существовании критического значения ka (немного превосходящего то значение, при котором возникает обратное течение), при превышении которого никакое b не удовлетворяет уравнению (7.5.25), и, по-видимому, радиально равновесное течение невозможно.

Подобные особенности течения проявляются, когда мы обсуждаем изменения, происходящие в цилиндрической области при уменьшении отношения U_2/U_1 непрерывно от единицы, считая ka фиксированным, хотя мы не должны забывать о том, что *направление* этих изменений зависит от величины ka. Соотношение (7.5.25) показывает, что знаки величин

$$\frac{U_1 - U_2}{b^2 - a^2} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(kb)}{J_1(kb)}$$

совпадают. Теперь, если U_2/U_1 близко к единице, то $b \approx a$, и это означает, что знаком отношения $J_0(ka)/J_1(ka)$ определяется начальное направление изменений радиуса вихря и распределения скорости поперек вихря. В интервале $0 \leqslant ka < 2{,}40$ (внутри которого обычно лежат встречающиеся на практике значения ka) происходит «естественное» поведение величин: увеличение радиуса вихря и убывание осевой скорости на его оси при уменьшении U_2/U_1. Однако в интервале $2{,}40 < ka < 3{,}83$ (между первыми нулями функций $J_0(ka)$ и $J_1(ka)$) осевое замедление внешнего потока приводит к *меньшим* значениям радиуса вихря и к увеличению осевой скорости на его оси. Из вида соотношения (7.5.25) можно также заметить, что, каково бы ни было фиксированное значение ka, невозможно найти значение kb, удовлетворяющее соотношению (7.5.25), если величина U_2/U_1 взята меньше некоторого критического (минимального) значения. На рис. 7.5.6 схематически показано изменение в соответствии с (7.5.25) величины kb в зависимости от U_1/U_2 ($\geqslant 1$) при различных постоянных значе-



Р и с. 7.5.6. Схематическая зависимость радиуса вихря b от осевой скорости U_2 ($\leqslant U_1$). Различные кривые относятся к различным значениям величины ka; стрелки указывают направление изменения параметров от течения, соответствующего цилиндрическому вихрю радиуса a с вращением жидкости как твердого тела.

ниях ka в интервале между 0 и 3,83. Для значений ka, превышающих 3,83, получается подобное семейство кривых, сходящихся в точке kb, в которой $J_0(kb) = 0$.

Возрастание толщины вихря, которым сопровождается замедление внешнего потока (когда ka лежит между нулем и 2,40), очевидно, станет чрезвычайно большим при критическом (минимальном) значении U_2/U_1. Известно замечательное явление, называемое «разрушением вихря» или «взрывом вихря», которое на первый взгляд похоже на проявление этого быстрого увеличения диаметра вихря при уменьшении внешней осевой скорости до некоторого значения. Наблюдения за полоской краски внутри интенсивного установившегося вихря показывают, что при определенных условиях (которые еще не достаточно выяснены, но, по-видимому, включают замедление внешнего потока) вихрь может внезапно увеличиться или «взорваться», порождая беспорядочное движение совсем другого вида. На фото 7.5.7 показаны два таких «взрывающихся» вихря в воде; вихри представляют собой часть спутной системы вихрей треугольного крыла, слегка наклоненного к набегающему потоку. Более подходящее объяснение разрушения вихря (Бенджамен (1962)) связано с рассмотрением скачкообразного перехода от одного цилиндрического течения к другому, которое может существовать при той же самой внешней осевой скорости (возможность существования двух цилиндрических течений при заданных значениях ka и U_2/U_1 очевидна из графиков рис. 7.5.6); внезапный переход подобного рода аналогичен известному гидравлическому прыжку в потоке воды в открытом канале; согласно этой теории, разрушение вихря наступает до того момента, когда U_2 станет близкой к критическому значению.

7.6. Жидкие системы, вращающиеся как целое

Как упоминалось в предыдущем параграфе, вращающаяся установившимся образом жидкость способна поддерживать осесимметричное волновое движение, распространяющееся вдоль оси вращения. Сейчас мы рассмотрим в явном виде свойство «упругости» жидкости, которое приобретается ею под действием вращения и которое обусловливает восстанавливающий механизм, необходимый для распространения волн. Эта эффективная упругость жидкости существует при различных распределениях завихренности в ней, однако мы ограничимся здесь обсуждением частного случая, когда жидкость либо первоначально, либо в некотором среднем смысле стационарно вращается как твердое тело.

Течения таких вращающихся жидкостей обладают многочисленными интересными свойствами, изучению которых до сих пор уделяется много внимания [1]).

Восстанавливающее действие сил Кориолиса

Если движение отнесено к осям координат, стационарно вращающимся вместе с жидкостью, то необходимо учесть действие на жидкость сил Кориолиса и центробежных сил инерции (3.2.10). Центробежную силу на единицу массы можно записать как $(1/2)\,\nabla\,(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})^2$ и считать ее эффект эквивалентным дополнительному давлению (для жидкости постоянной плотности). В отличие от центробежной силы сила Кориолиса создает эффекты нового типа, к числу которых относится «упругость» жидкости. Обозначим через p модифицированное давление, которое содержит как центробежные силы, так и силы тяжести, а через $\mathbf{u}$ — скорость относительно осей координат, вращающихся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, и запишем уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{7.6.1}$$

Сила Кориолиса направлена перпендикулярно оси вращения и вектору скорости; она изменяет направление движения частиц жидкости, не совершая работы. Важна только компонента вектора скорости $\mathbf{u}$ в плоскости, нормальной вектору $\boldsymbol{\Omega}$ (эту плоскость мы будем называть поперечной плоскостью), поскольку сила Кориолиса стремится изменить направление только этой компоненты. Направление этого изменения противоположно вращению подвижной системы координат (рис. 7.6.1); так, например, если основное вращение в поперечной плоскости направлено против

[1]) Подробнее относительно этого вопроса см. Greenspan H. P., The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, 1968.

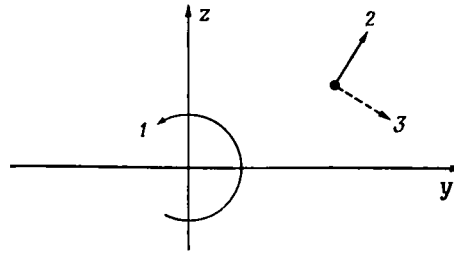


Рис. 7.6.1. К вопросу о направлении силы Кориолиса, действующей во вращающейся системе отсчета. Плоскость (y, z) нормальна к оси вращения.
1 — направление вращения системы координат; *2* — компонента скорости u в плоскости (y, z); *3* — сила Кориолиса.

часовой стрелки, то сила Кориолиса стремится повернуть направление движения частицы во вращающейся системе отсчета по часовой стрелке. Кроме того, сила Кориолиса линейно зависит от скорости и стремится изменить направление компоненты скорости u в поперечной плоскости в одинаковой мере при любых значениях этой компоненты и при любых ее направлениях. Таким образом, если движение частицы определяется в основном силой Кориолиса, то она будет двигаться по траектории, проекция которой на поперечную плоскость будет окружностью; время обхода этой окружности имеет порядок Ω^{-1}. Сила Кориолиса, очевидно, стремится вернуть частицу в ее первоначальное положение в поперечной плоскости. Заметим, что при рассмотрении силы Кориолиса положение оси вращения существенного значения не имеет.

Поскольку при движении частиц жидкости характерно их сильное взаимодействие посредством градиентов давления, желательно рассмотреть также общее воздействие сил Кориолиса на совокупность жидких частиц. Предположим, что во вращающихся осях координат существует движение, которое приводит к ненулевому и положительному значению дивергенции в некоторой области жидкости в поперечной плоскости, т. е. к положительному значению величины

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

(в системе координат, показанной на рис. 7.6.1). Тогда площадь проекции на поперечную плоскость замкнутой жидкой линии в этой области жидкости будет увеличиваться. Влияние силы Кориолиса, связанной с этим общим расходящимся движением, приводит к возникновению касательного движения жидкой линии, которое дает *отрицательный* вклад в циркуляцию вокруг нее. Это изменение циркуляции во вращающихся осях координат представляет собой просто изменение, требуемое для поддержания

постоянной циркуляции в абсолютной системе координат из-за наличия движения, приводящего к увеличению упомянутой выше площади проекции в поперечной плоскости.

Далее, возникающее новое касательное движение жидкой линии приводит к появлению силы Кориолиса, действующей в направлении по нормали к этой линии; поскольку же новое касательное движение создает отрицательный результирующий вклад в циркуляцию, возникающая при этом сила Кориолиса направлена в основном внутрь рассматриваемой области жидкости и, таким образом, стремится *уменьшить* площадь, охватываемую проекцией материальной кривой на поперечную плоскость. Иначе говоря, в тех местах жидкости, где величина дивергенции скорости $\partial v/\partial y + \partial w/\partial x$ положительна, влияние сил Кориолиса сводится к появлению отрицательного значения этой величины, и обратно. Итак, результирующий эффект сил Кориолиса состоит в создании сопротивления смещениям элементов жидкости, совместное действие которых приводит к изменению площади, охватываемой проекцией жидкой линии на поперечную плоскость, т. е. к ненулевому расхождению (дивергенции) в поперечной плоскости.

Величина восстанавливающего эффекта сил Кориолиса при смещении частиц жидкости, очевидно, зависит от относительных величин сил Кориолиса и других сил, действующих на жидкость; в рассматриваемом нами случае этими другими силами будут силы инерции. Обозначим через U характерную величину скорости (относительно вращающихся осей координат), а через L — характерный линейный размер, на протяжении которого скорость $\mathbf{u}$ заметно изменяется; тогда отношение величин членов $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ и $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}$ в (7.6.1) имеет порядок

$$U/L\Omega.$$

Величина этого отношения, которое известно как *число Россби* и названо так по имени известного шведского метеоролога, удобна для определения относительного влияния сил Кориолиса. Если $U/L\Omega \gg 1$, то силы Кориолиса оказывают незначительное влияние на картину течения; однако при условии $U/L\Omega \ll 1$ определяющим фактором, вероятно, будет стремление сил Кориолиса препятствовать любому расхождению в поперечной плоскости. В промежуточном случае, когда $U/L\Omega$ порядка единицы, следует ожидать появления интересных смешанных эффектов, предварительное представление о которых можно было составить из обсуждения в § 7.5 установившегося осесимметричного течения с закруткой.

Установившееся течение при малом числе Россби

Как было впервые отмечено Праудменом (1916), преобладающее влияние сил Кориолиса при $U/L\Omega \ll 1$ в установившемся

течении относительно вращающихся осей координат приводит к удивительным последствиям. В таком течении частица жидкости все время движется вдоль определенной линии тока, никогда не изменяя направления движения на обратное. Поскольку большие силы Кориолиса препятствуют любому смещению элементов жидкости, приводящему к ненулевому значению расхождения в поперечной плоскости, то отсюда следует, что в пределе при $U/L\Omega \to 0$ формы линий тока должны соответствовать нулевому расхождению в поперечной плоскости.

Можно вывести этот результат формально, заметив, что если $\partial \mathbf{u}/\partial t = 0$ и членом $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ можно пренебречь по сравнению с силой Кориолиса, то уравнение движения (7.6.1) запишется в виде

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{7.6.2}$$

т. е.

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right) = (0, 2\Omega w, -2\Omega v)$$

в системе координат, показанной на рис. 7.6.1. Исключив отсюда давление p, получим, что в установившемся течении во вращающейся системе координат

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{7.6.3}$$

и в соответствии с уравнением сохранения массы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7.6.4}$$

Неожиданное свойство этих приближенных уравнений, справедливых при $U/L\Omega \ll 1$, состоит в том, что движение в поперечной плоскости (или в плоскости (y, z)) не связано с движением параллельно оси вращения. Кроме того, течение совершенно не зависит от координаты x. Результат Праудмена иногда формулируется как утверждение, что «медленные» установившиеся движения относительно вращающихся осей координат должны быть двумерными. Поскольку в этой книге мы используем термин «двумерное течение» для выражения того факта, что вектор скорости всюду лежит в некоторой плоскости, здесь более всего уместно сказать, что установившиеся движения при малых числах Россби должны представлять собой наложение двумерного (т. е. плоского) движения в поперечной плоскости и некоторого осевого движения, которое не зависит от координаты x.

Величина компоненты скорости u, параллельной оси вращения, очевидно, определяется граничными условиями. Часто случается, что каждая линия в жидкости, параллельная оси вращения, встречает в какой-либо точке неподвижную границу; в таких

случаях из полученных выше соотношений следует, что всюду должно быть $u = 0$ и остается только двумерное движение. На фото 7.6.2 и 7.6.3 (выполненных Дж. Тейлором за много лет до того, как вопрос о вращающихся жидкостях привлек общее внимание[1])) показано течение воды во вращающемся открытом плоском сосуде, которое под действием сил Кориолиса в рассматриваемых условиях действительно становится двумерным.

На фото 7.6.2 мы видим, что капля окрашенной жидкости вытянулась в тонкую пленку под действием «медленного» движения, наложенного на вращающуюся жидкость; две фотографии, сделанные камерой, помещенной на оси вращения сосуда, показывают, что эта пленка краски всюду параллельна оси вращения, а компонента скорости в поперечной плоскости не зависит от x. Еще более удивительна картина течения, полученная путем введения полоски краски в точке A на фото 7.6.3. Движение относительно вращающихся осей координат создавалось здесь медленным перемещением невысокого кругового цилиндра E по дну сосуда. Глубина воды в сосуде была $\frac{1}{4}$ дюйма, а высота цилиндра—1 дюйм; в отсутствие вращения вода обходила бы как боковую, так и верхнюю поверхности движущегося цилиндра. Однако, если краску выпустить в точке A, расположенной на 1,5 дюйма выше цилиндра и непосредственно перед ним (фото 7.6.3, *а*), то она разделяется в точке B, как будто бы она встретилась с продолжением цилиндра вверх, и обходит этот воображаемый цилиндр двумя отдельными пленками; видно, что одна из них (на стороне D) даже отрывается от воображаемого цилиндра и формирует вихри [2]). На фото 7.6.3, *б* краска была выпущена в точке над цилиндром и собралась в виде единого пятна, движущегося вместе с цилиндром. Создается впечатление, что течение в области вне цилиндра и выше него приближенно такое же, как если бы цилиндр простирался от дна сосуда до поверхности воды, и что в области над цилиндром существует цилиндрический столб воды, движущийся вместе с цилиндром. Таким образом, рассматриваемое движение двумерно в том смысле, что оно согласуется с поступательным перемещением цилиндра даже тогда, когда высота его составляет четвертую часть глубины воды.

Если жидкость не ограничена неподвижными границами, пересекающими линии, параллельные оси вращения, то значение осевой компоненты скорости жидкости обычно определяется условиями на внутренней границе. Представляет особый интерес течение, образующееся при поступательном перемещении твердого тела со скоростью U параллельно оси вращения в жидкости, которая простирается неограниченно в этом направлении. Такое

[1]) См. статью Дж. Тейлора в сборнике «Наука и человечество 1971–1972», «Знание», М., 379–387. – *Прим. ред.*

[2]) Другие замечательные фотографии этого явления воспроизведены в цитированной на стр. 680 книге Гринспэна.

течение при $U/L\Omega \to 0$ будет удовлетворять всем указанным выше условиям только тогда, когда жидкость внутри соответствующего цилиндра, охватывающего данное тело, движется параллельно оси вращения вместе с телом, а компонента скорости в поперечной плоскости всюду равна нулю. И в самом деле, эксперименты подтверждают, что тело, движущееся параллельно оси вращения, проталкивает впереди себя столб жидкости, хотя позади тела картина не полностью отвечает описанной выше простой теории. К этим экспериментам мы еще вернемся в конце параграфа.

В тех случаях, когда тело движется либо параллельно оси вращения, либо перпендикулярно ей, изложенная выше теория течения при малом числе Россби приводит к выводу о существовании около тела так называемого «столба Тейлора» из жидкости, параллельного оси вращения и движущегося вместе с телом. На границе этого столба имеются слои сдвига, где завихренность жидкости велика. Следует ожидать, что в этих слоях приближенное линейное уравнение (7.6.2) уже не будет пригодным; отметим также, что поле течения в целом нельзя считать достаточно изученным.

Распространение волн во вращающейся жидкости

Мы видели, что любые перемещения частиц жидкости, находящейся во вращении, которые приводят к ненулевому значению расхождения (дивергенции) в поперечной плоскости, сопровождаются появлением сил Кориолиса, стремящихся свести к нулю это расхождение. Поскольку в невязкой жидкости нет диссипации энергии, отсюда следует, что перемещения жидкости такого вида, вызванные в ней в некоторый начальный момент, могут привести к возникновению колебаний. Может случиться, что во вращающейся жидкости будет распространяться цуг волн с различными фазами, соответствующими положительным и отрицательным значениям расхождения в поперечной плоскости. Такую возможность мы можем проанализировать, воспользовавшись решениями уравнений, описывающих движения относительно вращающейся как твердое тело жидкости; эти решения должны быть периодическими по времени и по некоторым координатам.

Рассмотрим сначала простое осесимметричное волновое движение, распространяющееся в направлении оси вращения. Относительно вращающихся осей координат это волновое движение является течением, наложенным на стационарно движущуюся жидкость; таким образом, для простой гармонической волны все параметры течения изменяются по синусоидальному закону во времени с угловой частотой, скажем, β (периодом $2\pi/\beta$) и по осевой координате с волновым числом, скажем, α (длиной волны $2\pi/\alpha$). Уравнением, описывающим движение относительно вращающихся осей коор-

динат, служит уравнение (7.6.1) в осесимметричной форме; следуя обычному подходу при изучении волновых движений, мы рассмотрим величины отклонений от невозмущенного состояния и сохраним в этом уравнении члены первого порядка малости. Однако нам не нужно проводить подробные выкладки, так как мы можем использовать результаты из предыдущего параграфа. Мы видели, что для любого *установившегося* осесимметричного течения, в котором функции $C(\psi)$ и $H(\psi)$ зависят от функции тока ψ точно так же, как и в течении с постоянной осевой скоростью U и постоянной угловой скоростью Ω, функция тока ψ удовлетворяет уравнениям (7.5.15) и (7.5.16); из этого следует, что любое решение уравнения (7.5.16), периодическое по x, можно считать представляющим некоторую прогрессивную волну с произвольной амплитудой, которая распространяется в жидкости с фазовой скоростью U; в отсутствие волнового движения жидкость вращается как твердое тело.

Таким образом, нам нужно исследовать установившееся течение, описываемое функцией тока (7.5.15), где функция $F(x, \sigma)$ удовлетворяет уравнению (7.5.16) и в случае простой гармонической волны с волновым числом α имеет вид

$$F(x, \sigma) = G(\sigma) \sin(\alpha x + \varepsilon), \quad \varepsilon = \text{const}.$$

Уравнение для $G(\sigma)$

$$\frac{d^2G}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{dG}{d\sigma} + \left(k^2 - \alpha^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right) G = 0, \tag{7.6.5}$$

где $k = 2\Omega/U$, имеет тот же вид, что и уравнение (7.5.17). Подходящим решением этого уравнения будет

$$G(\sigma) = AJ_1\{(k^2 - \alpha^2)^{1/2}\sigma\},$$

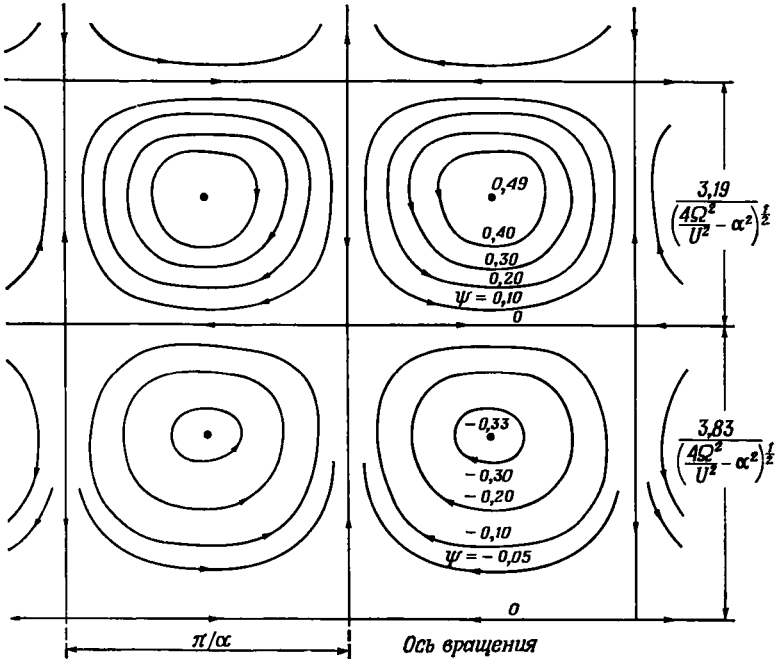
где A — произвольная постоянная; имеется еще одно возможное решение, содержащее функцию Бесселя второго рода, которое мы не рассматриваем, поскольку оно дает особенность в распределении скорости на оси симметрии. Итак, мы имеем установившееся течение, описываемое функцией тока

$$\psi = \frac{1}{2}U\sigma^2 + A\sigma J_1\{(k^2 - \alpha^2)^{1/2}\sigma\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \tag{7.6.6}$$

с положительным значением величины $(k^2 - \alpha^2)$ и произвольной постоянной A. Как видно из (7.5.14), соответствующая азимутальная компонента скорости равна

$$\frac{C}{\sigma} = \frac{2\Omega}{U}\frac{\psi}{\sigma} = \Omega\sigma + kF.$$

В области вдали от оси симметрии осевая и радиальная компоненты скорости становятся постоянными и равными U и 0 соответственно; правда, приближаются они к этим значениям довольно медлен-



Р и с. 7.6.4. Мгновенная картина линий тока движения в проходящей через ось вращения плоскости, представляющая собой простую гармоническую волну, распространяющуюся в осевом направлении с фазовой скоростью U. Значения функции тока соответствуют соотношению (7.6.7) при $A = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}/3{,}83$. (Линии тока для стоячей волны, образующейся при наложении двух таких прогрессивных волн малой амплитуды, имеют такую же форму, см. (7.6.10).)

но (как $\sigma^{-1/2}$). Из полученного выражения для C видно, что радиальная компонента силы Кориолиса, действующей (во вращающейся системе координат) на каждый элемент жидкой окружности в поперечной плоскости, имеет тот же знак, что и F, и всегда стремится поддерживать равновесное значение радиуса этой окружности.

То же самое течение, рассматриваемое относительно осей, движущихся в положительном направлении вдоль оси вращения со скоростью U, определяется функцией тока

$$\psi = A\sigma J_1\{(k^2 - \alpha^2)^{1/2}\,\sigma\}\sin\{\alpha\,(x + Ut) + \varepsilon\}; \qquad (7.6.7)$$

мгновенное положение линий тока этого течения показано на рис. 7.6.4; мы имеем здесь простую гармоническую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x с фазовой скоростью U в жидкости, которая в отсутствие этой волны вращается как твердое тело. Следует отметить, что при выводе выражения для функции тока (7.6.7), представляющей прогрессивную

волну, мы не налагали никаких ограничений на амплитуду волны, так что решение (7.6.7) справедливо не только для малых значений амплитуды A. В этом состоит особое свойство рассматриваемых осесимметричных колебательных движений относительно установившегося вращения жидкости как твердого тела: эти колебания можно представить как установившееся движение относительно некоторых осей, движущихся поступательно вдоль оси вращения жидкости; данное свойство связано с линейностью основного уравнения движения. Таким образом, два колебания, определяемые соотношением вида (7.6.7), могут быть наложены одно на другое без ограничения на величину их амплитуд, если только их фазовые скорости равны по величине и направлению; если же фазовые скорости различны, то наложение колебаний возможно лишь тогда, когда обе амплитуды достаточно малы, чтобы в уравнении (7.6.1) нелинейные члены были пренебрежимо малыми.

Необычное свойство этих осесимметричных волн во вращающейся неограниченной жидкости состоит в том, что волновое число α и угловая частота $U\alpha$ не зависят друг от друга. Волновое движение, очевидно, не будет определено, пока не заданы следующие четыре величины: Ω, U, α и амплитуда A. Вместо U мы можем задать радиальный размер ячейки, прилегающей к оси вращения (см. рис. 7.6.4); для этого заметим, что первый нуль функции $J_1(z)$ есть $z = 3{,}83$, так что этот радиальный размер равен $3{,}83(k^2 - \alpha^2)^{-1/2}$. Однако подходят не все комбинации α, Ω и U, поскольку при $k^2 - \alpha^2 < 0$ не имеется решений уравнения (7.6.5), которые были бы всюду конечны; следовательно, при заданных Ω и U допустимые значения α лежат в интервале

$$0 \leqslant |\alpha| \leqslant |2\Omega/U|.$$

В условиях лабораторного эксперимента вращающаяся жидкость обычно ограничена цилиндрической границей, скажем $\sigma = b$. Этим задается граничное условие, согласно которому эта граница должна быть линией тока течения в плоскости, проходящей через ось вращения, или, что эквивалентно, в диапазоне изменения радиуса $0 \leqslant \sigma \leqslant b$ должно содержаться целое число ячеек. Таким образом, если $z = \gamma_n$ есть n-й нуль функции $J_1(z)$, то мы требуем выполнения условия

$$b\left(k^2 - \alpha^2\right)^{1/2} = \gamma_n, \tag{7.6.8}$$

где n — число ячеек вдоль радиуса цилиндра. Это соотношение можно рассматривать как связь между скоростью волны U и волновым числом α для волнового движения с n радиальными ячейками, распространяющимися в цилиндрическом сосуде радиусом b. *Групповая скорость*, или скорость, с которой распространяется энергия такой волны, представляет собой некоторый вектор, направленный вдоль оси вращения точно так же, как и вектор

фазовой скорости; величина вектора групповой скорости определяется известным соотношением

$$U + \alpha \frac{dU}{d\alpha} = U \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + \alpha^2 b^2}. \qquad (7.6.9)$$

Таким образом, величина групповой скорости вообще меньше фазовой.

Если жидкость помещена между плоскими границами, нормальными к оси вращения и отстоящими одна от другой на расстояние l, то граничные условия будут удовлетворены путем наложения двух подобных прогрессивных волн, распространяющихся в противоположных направлениях (при подходящем выборе волнового числа). Простое решение, представляющее стоячую волну, получается из (7.6.7) и имеет вид

$$\psi = 2A\sigma J_1 \{(k^2 - \alpha^2)^{1/2} \sigma\} \cos \beta t \sin (\alpha x + \varepsilon), \qquad (7.6.10)$$

где частота обозначена через β вместо αU, поскольку величину U здесь лучше исключить из рассмотрения. Линии тока в произвольный момент времени для функции тока (7.6.10) имеют тот же вид, что и на рис. 7.6.4. Заметим, что амплитуда A должна быть в данном случае малой, так как в противном случае уравнения для возмущенного движения не будут линейными и их решения нельзя будет налагать друг на друга. Условия на двух граничных плоскостях требуют выполнения равенства $\alpha = m\pi/l$, где m — положительное целое; если же имеется еще и твердая граница жидкости при $\sigma = b$, то должно выполняться также и условие (7.6.8). Таким образом, мы видим, что собственные частоты малых колебаний вращающейся жидкости, содержащейся внутри кругового цилиндра радиусом a и длиной l, определяются соотношением

$$\beta = 2\Omega \left(1 + \frac{\gamma_n^2 l^2}{m^2 \pi^2 b^2}\right)^{-1/2}. \qquad (7.6.11)$$

Это соотношение, впервые полученное Кельвином (1880), в последнее время привлекает определенный интерес в связи с возможными приложениями в геофизике. Существование простейших форм колебаний (для которых значения m и γ_n близки к наименьшим возможным значениям) можно продемонстрировать экспериментально; формула для частоты таких колебаний подтверждается непосредственно, если на вращающуюся жидкость наложить некоторое колебание и наблюдать появление резонанса при определенных дискретных значениях частоты возбуждения (Фульц (1959)).

Во вращающейся жидкости могут существовать и плоские волны, механизм поддержания которых также обусловлен силами Кориолиса. Причина существования простого, хотя также довольно частного, вида плоской волны связана с тем, что частица жидкости, находящаяся под действием только сил Кориолиса, движется

по круговой траектории в поперечной плоскости. Если в жидкости на бесконечности (модифицированное) давление и скорость относительно вращающихся осей координат первоначально постоянны во всех плоскостях, нормальных к оси вращения, то они будут оставаться постоянными; тогда из уравнения движения (7.6.1) находим для компонент скорости, соответствующих прямоугольным координатам y, z в поперечной плоскости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\Omega w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -2\Omega v. \tag{7.6.12}$$

Отсюда следует, что жидкая поперечная плоскость движется в целом как твердая пластина по круговой траектории с угловой скоростью 2Ω. Если теперь различные жидкие поперечные плоскости первоначально приведены в движение с распределением скорости

$$v = A\cos\alpha x, \qquad w = A\sin\alpha x,$$

то каждая такая жидкая поперечная плоскость будет двигаться как твердое тело по своей круговой траектории и в последующие моменты времени t будет иметь распределение скорости

$$v = A\cos(\alpha x - 2\Omega t), \qquad w = A\sin(\alpha x - 2\Omega t).$$

Таким образом, в направлении оси x как бы распространяется простая гармоническая плоская прогрессивная волна с волновым числом α и фазовой скоростью $2\Omega/\alpha$, которая является поперечной и имеет круговую поляризацию. Здесь сказано «как бы распространяется», так как каждая жидкая поперечная плоскость движется независимо и ее движение полностью определено начальными условиями; в нашем случае, как и в известном примере с рядом шаров, которые подвешены на нитках и получают поперечное смещение путем прикосновения к ним пальца, движущегося вдоль ряда, групповая скорость, или скорость распространения энергии колебаний, равна нулю.

Могут существовать плоские волны и более общего вида, волновой вектор которых наклонен под некоторым углом θ к оси вращения жидкости. Чтобы выяснить это, нужно только наложить на полученное выше волновое движение компоненту угловой скорости вращения, параллельную оси y. В результате появится дополнительная сила Кориолиса, параллельная оси x, которая не будет зависеть от y и z и которая может быть уравновешена некоторым градиентом давления без изменения полученного выше распределения скорости. Таким образом, результирующее поле течения определится формулами

$$\begin{gathered} v = A\cos(\alpha x - 2\Omega t\cos\theta), \quad w = A\sin(\alpha x - 2\Omega t\cos\theta), \\ u = 0, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{2\Omega\sin\theta}{\alpha} A\cos(\alpha x - 2\Omega t\cos\theta), \end{gathered} \tag{7.6.13}$$

где через Ω теперь обозначена величина вектора полной угловой скорости жидкости. Угловая частота волн равна

$$2\Omega\cos\theta = \frac{2\Omega\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\alpha},$$

где Ω и $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор угловой скорости и волновой вектор; вектор $\boldsymbol{\alpha}$ направлен вдоль оси x в соответствии с соотношением (7.6.13). Известно, что вектор групповой скорости простой гармонической плоской волны равен градиенту частоты по направлению $\boldsymbol{\alpha}$ и, следовательно, имеет вид

$$\frac{2\Omega}{\alpha} - \frac{2\Omega\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^3}\boldsymbol{\alpha}\times(\Omega\times\boldsymbol{\alpha}). \qquad (7.6.14)$$

Таким образом, энергия колебаний распространяется в направлении, *нормальном* к $\boldsymbol{\alpha}$ и лежащем в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и Ω, т. е. в направлении оси y в нашем случае, как это видно из того факта, что, согласно (7.6.13), средние значения величин pu, pv, pw равны соответственно

$$0, \quad \rho\Omega A^2\alpha^{-1}\sin\theta, \quad 0.$$

Следует отметить, что если векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и Ω не параллельны, то на жидкость будут действовать не только силы Кориолиса, но и градиенты давления, которые несколько изменят простой механизм волнообразования.

Все рассмотренные выше осесимметричные и плоские волны во вращающейся жидкости относятся к так называемым *инерционным волнам.*

Течение, обусловленное движением тела вдоль оси вращения

Определение течения, обусловленного установившимся поступательным движением твердого тела параллельно оси вращения неограниченной жидкости, представляет собой трудную задачу, и до сих пор не имеется отчетливого представления о всех аспектах такого течения. Здесь мы ограничимся демонстрацией некоторых свойств этого течения в случае движения осесимметричного тела.

Число Россби $U/a\Omega$, образованное по скорости тела и одному из его линейных размеров, очевидно, выражает относительную важность эффектов поступательного движения тела и вращения жидкости. В пределе при $U/a\Omega \to \infty$ мы можем ожидать, что распределение (безразмерной) скорости стремится к тому, которое имеется при поступательном движении твердого тела в жидкости, покоящейся на бесконечности. В другом крайнем случае, при $U/a\Omega \to 0$, вполне можно полагать, что силы инерции малы по сравнению с силами Кориолиса (это обычно бывает тогда, когда скорость жидкости относительно вращающихся осей координат

всюду мала по сравнению с величиной $a\Omega$); в этом случае мы можем сразу заключить, что в пределе дивергенция в поперечной плоскости должна быть всюду равна нулю. Как уже отмечалось в данном параграфе, это приводит к требованию, чтобы осевая компонента u скорости не зависела от x; в свою очередь это возможно только тогда, когда вместе с телом переносится столб жидкости, покоящийся относительно тела и содержащийся внутри цилиндра, который имеет образующие, касающиеся тела и параллельные оси x. Хотя возможность существования такого поля течения кажется весьма удивительной, наблюдение показывает, что в общем такая картина течения возникает. Однако остаются неясными подробности течения в цилиндрическом слое сдвига, а также вопрос о том, каким образом формируется этот столб жидкости после начала движения тела.

При малых, но ненулевых значениях числа Россби $U/a\Omega$ движущийся столб жидкости, вероятно, видоизменяется, однако почти полное незнание его свойств затрудняет выяснение характера этих видоизменений. Наблюдения за течением при движении шара радиуса a (Тейлор (1922)) и при движении тела со сферической (радиуса a) носовой и конической кормовой частью (Лонг (1953)) показали, что если $U/a\Omega$ меньше 0,2 или 0,3, то столб жидкости действительно проталкивается движущимся телом. Предложенный Тейлором эксперимент с шаром для демонстрации изменения поля течения при указанных значениях $U/a\Omega$ очень прост. К дну высокой банки с водой привязывается на нитке легкий шар (например, шарик для игры в настольный теннис), раскрашенный полосками, чтобы можно было наблюдать его вращение; банка с водой приводится в равномерное вращение относительно оси симметрии. Пока шарик не движется в осевом направлении, он, конечно, вращается вместе с окружающей жидкостью. Однако если он освобождается и всплывает со скоростью U, такой, что число Россби $U/a\Omega$ превышает 0,3, то, как обнаружил Тейлор, шарик уже не вращается вместе с жидкостью. Прекращение вращения шарика следует ожидать в том случае, когда жидкость вынуждена непрерывно обтекать перемещающийся шарик; при этом любая жидкая окружность вблизи его поверхности сначала имеет малый радиус и, следовательно, малую циркуляцию, так как на более ранней стадии движения все точки этой окружности располагались вблизи оси вращения; с приближением к поверхности шарика азимутальная скорость жидкости стремится к нулю, а наличие вязкости в реальной жидкости гарантирует, что в установившемся движении шарик также будет иметь нулевую скорость вращения. Для некоторых малых значений $U/a\Omega$ Тейлор наблюдал, что поднимающийся шарик *продолжает* вращаться вместе с жидкостью, чего и следовало ожидать, если впереди поднимающегося шарика проталкивается столб (вращающейся) жидкости.

Когда $U/a\Omega$ имеет порядок единицы, силы инерции, связанные с поступательным движением тела, сравнимы по величине с силами Кориолиса и должны приводить к ненулевой дивергенции в поперечной плоскости, несмотря на противоположно направленный эффект сил Кориолиса. Вследствие этого вынужденного перемещения элементов жидкости вблизи тела, по-видимому, появятся и будут распространяться осесимметричные волны описанного ранее вида; если жидкость заключена в неограниченный цилиндр, то и в отсутствие диссипации энергии такие волны представляют собой свободные колебания (т. е. прогрессивные волны). На фото 7.6.5 показана картина движения тела с полусферической носовой и конической кормовой частью вдоль оси вращения жидкости, содержащейся в круговом цилиндре; на фотографии отчетливо видны волновые движения, правда, только вниз по потоку от тела.

Эти волны, стационарные относительно тела, «уносят» энергию от тела в том смысле, что с течением времени непрерывно увеличивается длина цуга волн, распространяющихся вниз по потоку; с этим явлением связан дополнительный вклад в сопротивление тела.

Наличие внешней цилиндрической границы жидкости позволяет получить некоторые простые аналитические выводы, в основном связанные с тем обстоятельством, что волновые числа, описывающие возможные колебания жидкости вдали от тела, могут теперь принимать только некоторые дискретные значения, а не непрерывные (в отсутствие ограничивающего цилиндра). Из уравнения (7.6.8) находим, что (безразмерные) волновые числа свободных колебаний, которые распространяются со скоростью U и для которых (круговая) цилиндрическая граница $\sigma = b$ служит линией тока, равны

$$\alpha b = \left(\frac{4b^2\Omega^2}{U^2} - \gamma_n^2\right)^{1/2}, \qquad (7.6.15)$$

где через γ_n обозначен n-й корень уравнения $J_1(z) = 0$. Отсюда видно, что имеется максимальное значение $U/b\Omega$, для которого возможны любые свободные колебания; это максимальное значение равно

$$\frac{U}{b\Omega} = \frac{2}{\gamma_1} = 0{,}52,$$

и ему соответствует значение $\alpha = 0$ (т. е. бесконечная длина волны). Это означает, что при скорости движения тела свыше $0{,}52b\Omega$ тело не будет генерировать волн. Наличие множителя b в этом условии отражает тот факт, что относительное влияние сил Кориолиса увеличивается с увеличением расстояния, на протяжении которого скорость жидкости заметно изменяется; по мере уменьшения скорости U от большого значения, при котором течение

г) Если нижняя граница слоя в точности горизонтальна, то скорость жидкости в слое должна быть горизонтальной в силу предположений б) и в). Мы допускаем некоторое влияние формы земной поверхности, но только вводим предположение, что толщина атмосферы или глубина океана, скажем H, медленно изменяется с изменением положения на поверхности, так что изменение H на расстояниях порядка H по горизонтали пренебрежимо мало. Единственное проявление этого медленного изменения толщины H слоя состоит в наложении ненулевой дивергенции в горизонтальной плоскости, когда жидкость движется по наклонному основанию. Рассматривая сохранение массы жидкого вертикального цилиндра малого поперечного сечения, мы найдем, что дивергенция в горизонтальной плоскости равна со знаком минус скорости растяжения цилиндра по вертикали и равна

$$-\frac{1}{H}\frac{DH}{Dt}. \tag{7.7.1}$$

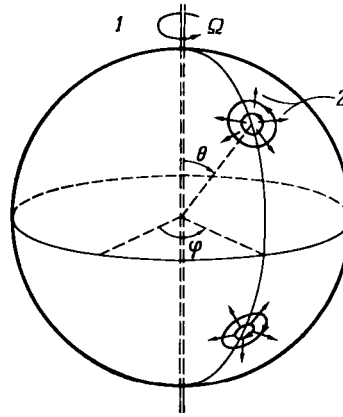
Во всем остальном обсуждении вертикальной компонентой скорости жидкости и изменением скорости в слое можно пренебрегать. Этот вид приближения известен в теории поверхностных волн на тяжелой воде как приближение «мелкой воды» (с учетом изменений толщины H в этом последнем случае как за счет формы дна, так и смещения свободной поверхности).

Теперь выпишем уравнения движения слоя жидкости на вращающемся шаре, учитывая все введенные предположения. Ясно, что наиболее удобна сферическая система координат (r, θ, φ), которая жестко связана с шаром; начало системы координат поместим в центр шара, внешнюю сферическую границу слоя зададим условием $r = R$; положим $\theta = 0$ в направлении северного полюса (так что $(\pi/2 - \theta)$ — обычный угол широты), а направление, в котором угол φ увеличивается при постоянных r и θ, будет восточным (см. рис. 7.7.1). Соответствующими компонентами скорости будут $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$, а компонентами вектора угловой скорости Земли — $(\Omega \cos\theta, \ -\Omega \sin\theta, \ 0)$. Уравнение движения однородной невязкой жидкости относительно вращающихся осей координат было дано выше в векторной форме (7.6.1), а соответствующая система скалярных уравнений в сферических координатах без учета радиальных компонент скорости и ускорения такова:

$$-2\Omega u_\varphi \sin\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{7.7.2}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\right)_\theta - 2\Omega u_\varphi \cos\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{7.7.3}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\right)_\varphi + 2\Omega u_\theta \cos\theta = -\frac{1}{\rho r \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}. \tag{7.7.4}$$



Р и с. 7.7.1. Геострофические системы циклонов в северном и южном полушариях. Завихренность относительно земной поверхности имеет тот же знак, что и $f = 2\Omega \cos\theta$, а давление в центре каждой системы низкое.
1 — северный полюс; *2* — силы Кориолиса, действующие в направлении от центра области.

Общие выражения для компонент ускорения через компоненты скорости (u_r, u_θ, u_φ) приведены в приложении 2. В этих уравнениях, как и в (7.6.1), через p обозначено модифицированное давление, посредством которого могут быть учтены эффекты силы тяжести и центробежной силы, возникающей при вращении системы координат.

Из уравнения (7.7.2) следует, что вертикальный градиент модифицированного давления всюду уравновешивается вертикальной компонентой силы Кориолиса. Однако поскольку толщина слоя жидкости мала по сравнению с горизонтальным масштабом длины рассматриваемого течения, то полное изменение давления p в слое относительно невелико, и его, подобно компонентам скорости u_θ и u_φ, можно считать в уравнениях (7.7.3) и (7.7.4) постоянным в этом слое. Более важное влияние вращения Земли состоит в образовании вклада в горизонтальную компоненту силы, действующей на частицу жидкости; этот вклад направлен по нормали к мгновенной скорости частицы, причем направление таково, что частица стремится двигаться вправо от мгновенного направления своего движения в северном полушарии (где $\cos\theta > 0$) и влево в южном полушарии (где $\cos\theta < 0$).

В уравнениях (7.7.3) и (7.7.4) разумно считать r постоянным и равным R. Тогда получаем основные уравнения движения в нашей модели атмосферы или океана:

$$\frac{Du_\theta}{Dt} - \frac{u_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{R} - fu_\varphi = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{7.7.5}$$

$$\frac{Du_\varphi}{Dt} + \frac{u_\theta u_\varphi \operatorname{ctg}\theta}{R} + fu_\theta = -\frac{1}{\rho R \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{7.7.6}$$

где

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u_\theta}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Мы воспользовались здесь стандартным обозначением: $f = 2\Omega\cos\theta$ — удвоенная угловая скорость поворота маятника Фуко на широте $(\pi/2 - \theta)$, называемая параметром Кориолиса (для Земли при $\theta = 45°$ имеем $\Omega = 7{,}29\cdot10^{-5}$ сек$^{-1}$, откуда $f = 1{,}03\cdot10^{-4}$ сек$^{-1}$).

Мы будем использовать также и соответствующее уравнение для радиальной компоненты завихренности, скажем ω, относительно вращающихся осей координат. Имеем (см. приложение 2)

$$\omega=\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right);$$

после небольших преобразований, используя (7.7.5) и (7.7.6), находим

$$\frac{D\omega}{Dt}=-\frac{u_\theta}{R}\frac{df}{d\theta}-\Delta(f+\omega). \qquad (7.7.7)$$

Здесь через Δ обозначена дивергенция в горизонтальной плоскости, т. е.

$$\Delta=\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right\}=-\frac{1}{H}\frac{DH}{Dt}$$

(последнее равенство соответствует (7.7.1)). Теперь уравнение (7.7.7) можно переписать в виде

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{f+\omega}{H}\right)=0; \qquad (7.7.8)$$

отсюда видно, что абсолютная завихренность $(f + \omega)$ элемента жидкости [1]) изменяется только вследствие движения элемента в той области, где толщина слоя жидкости изменяется. В слое постоянной толщины относительная завихренность ω изменяется только тогда, когда элемент жидкости движется с изменением широты. Уравнение (7.7.8) можно также вывести непосредственно из рассмотрения сохранения циркуляции по элементарному замкнутому жидкому контуру, лежащему в горизонтальной плоскости.

Эти уравнения применимы к течению с любым характерным масштабом длины L при условии, что он больше толщины слоя H. Наличие берегов континентов приводит к возникновению океанических течений, масштабы длины которых в действительности значительно меньше радиуса Земли R; подобно этому большой интерес

[1]) Строго говоря, $f + \omega$ — это вертикальная компонента абсолютной завихренности, но так как только эта компонента существенна, то мы можем говорить о ней как об абсолютной завихренности.

представляют атмосферные течения, протяженность которых составляет доли радиуса Земли. При исследовании таких течений удобно выбирать более или менее локальные системы координат. В случае поля течения, охватывающего малый диапазон широт относительно широты $\theta = \theta_0$, удобно ввести новые координаты

$$x = \varphi R \sin \theta_0, \qquad y = (\theta_0 - \theta) R. \tag{7.7.9}$$

Координаты (x, y, z), где z направлена вертикально вверх, образуют правую систему, подобную сферическим координатам (r, θ, φ); координаты x и y увеличиваются в восточном и северном направлениях соответственно.

При $L \ll R$ в самом грубом приближении уравнения сводятся к форме, соответствующей двумерному течению в плоском слое жидкости, если не учитывать небольшие изменения толщины, обусловленные топографией дна; в этом случае x и y — прямоугольные координаты, а параметр Кориолиса f постоянен и равен $f_0 = 2\Omega \cos \theta_0$. При этом направление оси x в горизонтальной плоскости несущественно. Единственное явное изменение в уравнении (7.7.8), возникающее в этом приближении, связано с оператором D/Dt, который принимает вид

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \tag{7.7.10}$$

где u и v — компоненты скорости жидкости в направлениях x и y соответственно, а относительная завихренность теперь такова:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если допустить возможность изменения параметра f с широтой, то можно получить улучшенное приближение для уравнений движения, которое позволяет исследовать некоторые виды полей течений, простирающихся на несколько большие, хотя все еще малые, диапазоны широт. Суть такого приближения состоит в том, что для некоторых полей течений с характерным масштабом длины L в направлении координаты y и с относительной завихренностью ω, меньшей по величине чем f, отношение ω/L может быть сравнимо с f/R, и в этом случае сравнимы между собой величины $D\omega/Dt$ и Df/Dt. Хотя теперь нельзя считать f постоянной в (7.7.8), можно воспользоваться аппроксимацией

$$f = f_0 + \beta y, \tag{7.7.11}$$

где $\beta = 2\Omega \sin \theta_0/R$ ($\beta = 1{,}62 \cdot 10^{-13}$ см$^{-1}$ сек$^{-1}$ при $\theta = 45°$, причем $\beta > 0$ на обоих полушариях). Всеми другими эффектами искривления слоя жидкости можно опять пренебречь при условии, что $L \ll R$; таким образом, можно считать, что течение происходит в плоском слое, который вращается относительно нормальной

к слою оси с угловой скоростью, линейно изменяющейся в направлении y (т. е. в направлении север — юг). Такое приближение обычно называется *приближением β-плоскости.*

Решения приведенных выше динамических уравнений были исследованы для многочисленных частных случаев и граничных условий; с некоторыми из этих решений мы сейчас познакомимся.

Геострофическое течение

Путем анализа многочисленных распределений скорости ветра (измеренных на достаточно больших высотах, чтобы избежать влияния вязких и тепловых эффектов у поверхности Земли) метеорологи установили, что силы инерции часто оказываются значительно меньше сил Кориолиса. Если жидкость находится в установившемся движении по криволинейной траектории радиуса кривизны L со скоростью q, то отношение сил инерции и сил Кориолиса имеет порядок q/fL; при $L = 1000$ км и $f = 1{,}03 \cdot 10^{-4}$ сек$^{-1}$ (примерно для $\theta = 45°$) мы имеем $q/fL \approx 0{,}01 \cdot (q$ в м/сек). В обычных условиях характерное значение скорости в атмосфере $q = 10$ м/сек, а в океане значительно меньше. Таким образом, значения q/fL, меньшие единицы, можно считать типичными. Кроме того, отметим, что временной масштаб изменения скорости жидкости (осредненный по области с линейным размером порядка H) обычно больше чем f^{-1}; он равен 2.7 час при $\theta = 45°$.

Течения, в которых силы инерции пренебрежимо малы, в литературе по геофизике известны как *геострофические* течения. В § 7.6 им соответствуют течения при малых числах Россби. Уравнения (7.7.5) и (7.7.6) в этом случае сводятся к уравнениям

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) p = \rho f\,(u_\varphi,\ -u_\theta), \tag{7.7.12}$$

которые показывают, что градиент давления в горизонтальной плоскости всюду направлен по нормали к линиям тока. Метеорологи используют эти уравнения в основном для сравнения с результатами измерений, а не для определения течения в атмосфере. Измерения атмосферного давления в различных точках на поверхности Земли легко выполнить, а соответствующие горизонтальные градиенты давления на достаточных высотах от поверхности, где движение не подвержено влиянию поверхности Земли, могут быть вычислены (при условии, что известна плотность воздуха на этих высотах); затем по (7.7.12) вычисляются компоненты гипотетического *геострофического ветра*, который аппроксимирует реальный ветер; точность этого приближения метеорологи могут оценить исходя из конкретных условий.

Когда силы инерции пренебрежимо малы, уравнение для завихренности (7.7.8) приводится к виду

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{f}{H}\right)=0; \tag{7.7.13}$$

отсюда следует, что строго геострофическое течение может осуществляться только тогда, когда вдоль траектории каждого элемента жидкости дно слоя опускается по направлению к ближайшему полюсу. Если протяженность поля течения мала по сравнению с R, так что изменение f пренебрежимо мало, то, согласно (7.7.13), величина H для движущегося элемента жидкости должна быть постоянной; тем самым мы заново установили (вследствие (7.7.1)) результат, полученный в § 7.6. Мы там видели, что пренебрежение силами инерции не совместимо с существованием ненулевой скорости расхождения жидкости в плоскости, нормальной (постоянному) вектору угловой скорости, так как такому расхождению жидкости препятствуют силы Кориолиса.

Обычный вид геострофического течения в атмосфере обладает приближенной симметрией по отношению к центральной области течения, в которой относительная завихренность не равна нулю и имеет один и тот же знак; такая масса вращающегося воздуха может образоваться в результате предшествующего передвижения массы воздуха с других широт, происходящего без изменения завихренности относительно некоторых фиксированных осей координат. Если относительная завихренность имеет тот же знак, что и параметр Кориолиса f (т. е. если относительная завихренность положительна с циркуляцией против движения часовой стрелки в северном полушарии или отрицательна с циркуляцией по движению часовой стрелки в южном полушарии), то силы Кориолиса будут направлены от центра рассматриваемой области (см. рис. 7.7.1). Такие течения называются *циклонами* и характеризуются низким давлением в их центре. Течения, в которых относительная завихренность и параметр Кориолиса имеют разные знаки,— *антициклоны* — имеют в центре повышенное давление.

Циклоны часто сопровождаются сильными ветрами, для которых геострофическое уравнение (7.7.12) неточно. Обычным методом улучшения приближения служит предположение о том, что течение установившееся, а линии тока круговые с радиусом L; в результате этого силы инерции в (7.7.5) и (7.7.6) сводятся к центробежной силе q^2/L, направленной по радиусу от центра; здесь $q^2 = u_\theta^2 + u_\varphi^2$. Линии тока и линии равного давления по-прежнему совпадают, однако местный градиент давления для циклона теперь равен

$$|\nabla p| = \rho\left(\frac{q^2}{L} - fq\right); \tag{7.7.14}$$

величина q, полученная из этого уравнения по наблюдаемым значениям L и градиента давления, называется *градиентным ветром*.

Течение над неровной поверхностью Земли

Непосредственное влияние медленного изменения толщины слоя H в зависимости от координат, как это следует из уравнения (7.7.8), состоит в изменении высоты и, следовательно, вертикальной компоненты абсолютной завихренности жидкого вертикального цилиндра малого поперечного сечения при его движении. Таким образом, когда масса жидкости движется по поднимающемуся основанию, абсолютная завихренность уменьшается по величине, а относительная завихренность изменяется, уменьшаясь в северном полушарии и возрастая в южном. Это изменение завихренности относительно поверхности Земли может привести к заметному отклонению потока, движущегося по наклонному основанию.

В качестве простого примера влияния неровного основания рассмотрим установившееся течение через горный хребет, который имеет прямолинейные параллельные контуры высот (образующие) и расположен на некоторой высоте над основанием, где толщина слоя жидкости равна H_0. Предположим сначала, что горизонтальная протяженность поля течения достаточно мала, чтобы можно было считать, что течение происходит в плоском слое с постоянным значением параметра Кориолиса $f = f_0$. Направление хребта на поверхности Земли несущественно, и мы можем считать его для удобства совпадающим с направлением оси y (рис. 7.7.2). Поток, приближающийся к хребту, имеет, по предположению, нулевую относительную завихренность и постоянную скорость с компонентами (U, V), а сила Кориолиса будет уравновешиваться постоянным градиентом давления. В точке над гребнем, где толщина слоя равна H, относительная завихренность ω определяется равенством

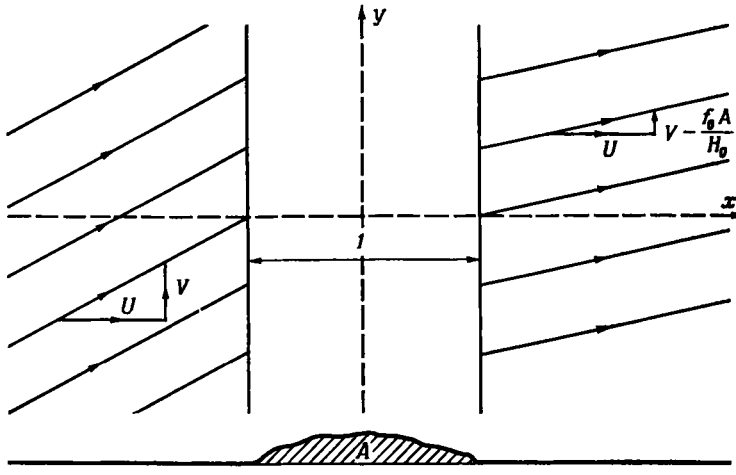
$$\frac{f_0+\omega}{H} = \frac{f_0}{H_0}. \tag{7.7.15}$$

Ясно, что компоненты скорости u и v не зависят от y, так что имеем

$$\frac{dv}{dx} = \omega = f_0\left(\frac{H}{H_0} - 1\right)$$

и

$$v = V + f_0 \int_{-\infty}^{x} \frac{H - H_0}{H_0}\, dx. \tag{7.7.16}$$



Р и с. 7.7.2. Отклоняющее действие горного хребта на однородный поток с компонентами скорости U и V относительно вращающейся системы координат.
1 — горный хребет; поперечное сечение хребта заштриховано.

Компонента u скорости определяется из уравнения сохранения массы

$$uH = UH_0.$$

Влияние возвышающегося хребта, таким образом, выражается в отклонении набегающего однородного потока в правую сторону (в северном полушарии) от направления движения. В области вниз по потоку от хребта компонента скорости вдоль оси x вновь становится равной ее невозмущенному значению, а компонента вдоль оси y принимает постоянное значение $V - (f_0A/H_0)$, где

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} (H_0 - H)\, dx$$

— площадь поперечного сечения хребта. Следовательно, тангенс результирующего угла отклонения потока по часовой стрелке равен

$$\frac{U(f_0A/H_0)}{U^2+V^2-V(f_0A/H_0)}.$$

Для хребта средней высоты 2 км и ширины 50 км при $H_0 = 10$ км мы имеем $f_0A/H_0 \approx 1$ м/сек, т. е. отклоняющее влияние даже такого большого хребта можно считать несущественным при рассмотрении атмосферных движений, однако для океанических течений, где скорости намного меньше атмосферных, оно будет значительным.

Влияние на поток возвышения (изолированного горного образования), имеющего конечную площадь в горизонтальной плоскости, можно учесть, рассматривая его как область с отрицательной завихренностью (в северном полушарии); величина завихренности ω в любой точке этой области определяется в случае однородного набегающего потока соотношением (7.7.15). (Следует заметить, что число Россби течения не должно быть слишком малым, поскольку тогда поток будет просто обтекать «столб Тейлора» над горой!) Дополнительное течение, обусловленное наличием этой горы, представляет собой установившееся циркуляционное движение по часовой стрелке; циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему гору, равна

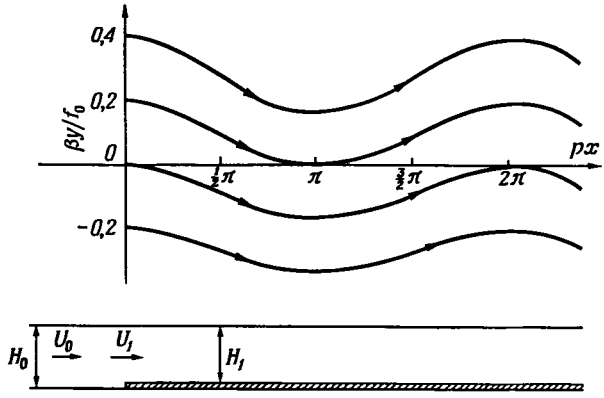
$$\iint_{-\infty}^{\infty} \omega \, dx \, dy = \frac{f_0}{H_0} \iint_{-\infty}^{\infty} (H - H_0) \, dx \, dy; \tag{7.7.17}$$

последний интеграл — это объем горы, возвышающейся над основанием, над которым течет слой жидкости толщиной H_0. Влияние горы на скорость воздуха или воды едва ли можно обнаружить на практике, однако сила Кориолиса, связанная с указанным антициклоническим циркуляционным движением, вызывает повышение давления над горой (как в северном, так и в южном полушариях); в атмосферных течениях этот эффект иногда наблюдается.

Предположим теперь, что горизонтальная протяженность L рассматриваемого поля течения такова, что отношение ω/L сравнимо по величине с f/R, хотя L все еще много меньше R. Как было выяснено ранее, по-прежнему можно считать, что жидкость движется в плоском слое, и использовать для описания движения прямоугольные координаты (x, y) и соответствующие им компоненты скорости (u, v). Однако мы теперь должны предусмотреть изменение параметра Кориолиса в зависимости от широты; для этого мы можем воспользоваться приближенным линейным соотношением (7.7.11), направив ось y на север. Одновременный учет влияния топографии основания и переменности параметра Кориолиса усложняет нашу задачу, однако мы можем выявить основные новые черты явления, перейдя к обсуждению упрощенного течения над длинным горным хребтом. Здесь снова удобно рассматривать набегающий поток с постоянной скоростью, скажем U_0, и это вынуждает нас выбрать направление движения вдоль широты, т. е. параллельным оси x. Относительная завихренность ω элемента жидкости в точке (x, y) над хребтом, где толщина слоя равна H, определяется из уравнения

$$\frac{f_0 + \beta y + \omega}{H} = \frac{f_0 + \beta y_0}{H_0}, \tag{7.7.18}$$

где y_0 — значение координаты y того же элемента жидкости при достижении им хребта.



Р и с. 7.7.3. Линии тока при обтекании ступеньки, направленной с севера на юг, однородным западным ветром ($H_1 = 0{,}91H_0$).

Теперь скорость уже не будет одинаковой во всех точках прямой, параллельной хребту, и нам придется рассматривать все поле течения. Чтобы получить упрощенное представление о поле такого течения, рассмотрим «хребет» в форме ступеньки или скачкообразное изменение толщины слоя H от значения H_0 до H_1 вдоль меридиана $x = 0$ (рис. 7.7.3). На этой ступеньке компоненты скорости изменяются разрывно от $(U_0, 0)$ до $(U_1, 0)$, где $U_1 = U_0H_0/H_1$, а относительная завихренность изменяется от 0 до

$$(f_0 + \beta y)\frac{H_1 - H_0}{H_0}.$$

В области $x > 0$ толщина слоя постоянна, так что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

и мы можем ввести функцию тока ψ. Течение в этой области установившееся, и, следовательно, величина $(f + \omega)$ зависит только от функции тока ψ. Но при $x = 0$ (двигаясь из области $x > 0$) мы имеем $\psi = U_1 y$ и

$$f + \omega = \frac{H_1}{H_0}(f_0 + \beta y) = \frac{H_1}{H_0}\left(f_0 + \frac{\beta}{U_1}\psi\right),$$

причем это соотношение между $(f + \omega)$ и ψ должно выполняться во всей области $x > 0$. Следовательно, в этой области

$$\nabla^2\psi = -\omega \equiv f - \frac{H_1}{H_0}\left(f_0 + \frac{\beta}{U_1}\psi\right) \equiv f_0\frac{H_0 - H_1}{H_0} + \beta y - p^2\psi, \qquad (7.7.19)$$

где $p^2 = \beta H_1/U_1H_0$.

Наш выбор упрощающих предположений привел к линейному уравнению для ψ. Одно из решений, которое содержит линейную зависимость ψ от y, требуемую условиями при $x = 0$, имеет вид

$$\psi = (y + a) F(x) + \left\{ f_0 \frac{H_0 - H_1}{H_0} + \beta y \right\} \Big/ p^2,$$

где a — постоянная, а $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2F}{dx^2} + p^2 F = 0. \tag{7.7.20}$$

Чтобы получить заданные компоненты скорости и функцию тока при $x = 0$, нужно положить

$$F(0) + \beta/p^2 = U_1, \qquad F'(0) = 0$$

и

$$a = f_0/\beta.$$

Полное решение для ψ теперь можно выписать в явном виде:

$$\psi = U_1 y + U_1 \frac{H_0 - H_1}{H_1} (f_0 + \beta y) \frac{1 - \cos px}{\beta}. \tag{7.7.21}$$

На рис. 7.7.3 показаны линии тока для случая $H_1 = 0{,}91\, H_0$ и $U_1 > 0$. Различные линии тока отличаются по форме только за счет изменения масштаба в направлении y вследствие различия значений параметра Кориолиса на разных линиях тока. Если $|\beta y/f_0| \ll 1$ и $px \ll 1$, то решение (7.7.21) дает компоненты скорости, найденные выше (см. (7.7.16)) для потока через хребет при постоянном параметре f. Новая особенность решения (7.7.21) состоит в его периодичности по x при действительных значениях p, т. е. при $U_1 > 0$. Влияние топографии дна в этом простом примере заключается лишь в образовании ненулевой относительной завихренности при $x = 0$ и, следовательно, в отклонении потока в южном направлении; волновой характер линий тока в области вниз по потоку от ступеньки обусловлен непостоянством параметра Кориолиса. Как длина волны в направлении оси x, так и отклонение линии тока по оси y не являются малыми величинами. Длина волны равна

$$\frac{2\pi}{p} = 2\pi \left(\frac{U_1 H_0}{\beta H_1} \right)^{1/2},$$

что составляет около 1 600 км на широте 45° при $U_1 = 1$ м/сек и $H_0 - H_1 \ll H_0$. Отклонение в южном направлении линии тока, проходящей через начало координат, составляет

$$\frac{2f_0}{\beta} \frac{H_0 - H_1}{2H_0 - H_1} = 2R \operatorname{ctg} \theta_0 \left(\frac{H_0 - H_1}{2H_0 - H_1} \right).$$

Для линии тока, начинающейся на широте 45°, это расстояние соответствует диапазону широт $2(H_0 - H_1)/(2H_0 - H_1)$ радиан (и при $H_1 = 0{,}91\, H_0$ оно равно 1050 км или 9,5° широты).

Можно также определить функцию тока течения в области вниз по потоку, возникающего в том случае, когда на пути потока в восточном направлении есть вторая ступенька вдоль меридиана, понижающая основание до уровня, соответствующего первоначальной толщине слоя жидкости H_0. Это поле течения зависит от скорости, с которой жидкость подходит ко второй ступеньке, и, таким образом, зависит от расстояния между ступеньками.

Для потока, подходящего к ступеньке в западном направлении, скорости U_0 и U_1 отрицательны и $p^2 < 0$ (это справедливо в обоих полушариях). Согласно полученному выше решению, координата y вдоль линии тока в области $x < 0$ зависит теперь от x по экспоненциальному закону. Ниже мы обсудим физическую причину этого коренного отличия между влиянием ступенек на течения в восточном и западном направлениях.

Планетарные волны

Рассмотренное выше «течение в β-плоскости» обладает интересными волновыми свойствами, которые мы сейчас изучим более внимательно. Существование волн связано с непостоянством параметра Кориолиса, поэтому не составляет особого труда выяснить общий механизм их возникновения. Когда элемент жидкости движется под некоторым углом к параллели, т. е. направление его движения образует некоторый угол с осью x на диаграмме, подобной рис. 7.7.3, величина параметра Кориолиса f непрерывно изменяется в зависимости от координаты элемента жидкости. Если скорость элемента жидкости имеет компоненту в северном направлении, то параметр f увеличивается и величина силы Кориолиса, действующей на элемент, возрастает. Следовательно, траектория элемента жидкости повернется вправо относительно направления его движения. Если первоначальное направление движения элемента жидкости соответствует северо-восточному квадранту, то указанный поворот траектории постепенно изменит направление движения и оно будет соответствовать юго-восточному квадранту; в результате элемент жидкости будет находиться под действием уменьшающихся значений параметра f и его направление движения будет изменяться в противоположную сторону — траектория повернется налево. Таким образом, если направленное на восток течение по какой-либо причине изменило направление, то на него будет действовать сила, стремящаяся восстановить первоначальное направление движения.

Этот восстанавливающий эффект был только что обнаружен при решении задачи о восточном течении, пересекающем ступеньку, которая тянется с севера на юг, хотя решение было основано на анализе завихренности, а не количества движения жидкости и сил, действующих на нее. Существование в β-плоскости восстанавли-

вающей силы, которая обеспечивает колебания восточного течения при обтекании фиксированного препятствия, впервые было отмечено Россби (1939) и поэтому соответствующее волновое движение обычно называют *волнами Россби*. Было установлено также существование подобных волновых движений в слое жидкости на вращающемся шаре (Хаурвиц (1940); Лонге-Хиггинс (1964, 1965)), и для названия этих волн используется более общий термин — *планетарные волны*.

Если теперь рассмотреть течение в западном направлении относительно неподвижного препятствия на земной поверхности, то окажется, что отклоняющее воздействие непостоянного параметра Кориолиса уже не будет восстанавливать первоначальное движение жидкости. Простое решение задачи о ступеньке в направлении с севера на юг на пути западного течения обнаруживает экспоненциальный рост отклонения течения от западного направления, однако можно показать, что наличие ступеньки в данном случае оказывает влияние на течение вверх по потоку, вследствие чего нарушается предположение о постоянстве скорости течения при подходе к ступеньке.

Существование синусоидальных волн с прямолинейными гребнями в плоском слое жидкости постоянной толщины при линейном изменении параметра f можно продемонстрировать непосредственно. Для таких волн в жидкости (покоящейся в их отсутствии) имеем функцию тока

$$\psi \sim \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}, \tag{7.7.22}$$

где (k, l) — волновой вектор в плоскости (x, y), σ — круговая частота. Соответствующая относительная завихренность равна

$$\omega = -\nabla^2\psi = (k^2 + l^2)\,\psi, \tag{7.7.23}$$

и, таким образом, скорость изменения абсолютной завихренности элемента жидкости есть

$$\frac{D(f+\omega)}{Dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{df}{dy} + (k^2+l^2)\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\psi\{-\beta k - \sigma(k^2+l^2)\}. \tag{7.7.24}$$

Отсюда видно, что уравнение для завихренности (7.7.8) будет удовлетворено, если

$$\sigma = -\beta k/(k^2 + l^2). \tag{7.7.25}$$

Это соответствует существованию поперечных волн, для которых скорость жидкости всюду параллельна гребням волн, т. е. составляет прямой угол с волновым вектором (k, l). Фазовая скорость, с которой гребни перемещаются в направлении волнового вектора, равна

$$\frac{\sigma}{(k^2+l^2)^{1/2}} = -\frac{\beta k}{(k^2+l^2)^{3/2}}. \tag{7.7.26}$$

Следует отметить, что волновое движение имеет установившийся характер в системе координат, перемещающейся со скоростью $(\sigma/k, 0)$, т. е. движущейся в западном направлении со скоростью

$$\beta/(k^2 + l^2),$$

которая не зависит от направления волнового вектора. Кроме того, на жидкость может быть наложено любое количество синусоидальных волн с одинаковым волновым числом, равным $(k^2 + l^2)^{1/2}$, поскольку уравнения (7.7.23) и (7.7.24) справедливы для системы таких волн, а отдельные вклады в правую часть уравнения (7.7.24) от различных волн обращаются в нуль, если σ имеет величину (7.7.25). Следовательно, система наложенных синусоидальных волн с одним и тем же значением волнового числа формирует установившееся движение относительно системы координат, движущейся в западном направлении со скоростью $\beta/(k^2 + l^2)$.

Существуют и другие движения, обладающие этим свойством. Если взять функцию тока в виде

$$\psi\,(x + ct,\ y),$$

то получим уравнение

$$\frac{D\,(f+\omega)}{Dt} = -\beta\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial t} + u\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\,\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\,(-\beta x + c\omega)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\omega,\ \psi)}{\partial\,(x,\ y)};$$

оба члена в правой части этого уравнения обращаются в нуль, если

$$\omega \equiv -\nabla^2\psi = \beta\psi/c. \qquad (7.7.27)$$

Рассмотрим решение этого уравнения

$$\psi = e^{in\theta}\left\{A_n J_n\left(\frac{r\beta^{1/2}}{c^{1/2}}\right) + B_n Y_n\left(\frac{r\beta^{1/2}}{c^{1/2}}\right)\right\},$$

где J_n и Y_n — функции Бесселя первого и второго рода, $r^2 = (x + ct)^2 + y^2$; это решение описывает некоторое центрированное течение, скорость которого на больших расстояниях от центра уменьшается как $r^{-3/2}$; решения подобного вида при различных значениях постоянных n, A_n и B_n могут быть наложены одно на другое; ненулевые значения постоянных B_n позволяют решать задачи с внутренней границей, внутри которой толщина слоя жидкости непостоянна. Другим решением уравнения (7.7.27) будет

$$\psi = (y + a)\left\{A\sin\frac{(x+ct)\,\beta^{1/2}}{c^{1/2}} + B\cos\frac{(x+ct)\,\beta^{1/2}}{c^{1/2}}\right\},$$

где a, A и B — постоянные; это решение в системе координат, движущейся со скоростью c в западном направлении, дает установившееся течение в области вниз по потоку от ступеньки вдоль меридиана на дне слоя жидкости.

Общее свойство всех этих точных решений состоит в том, что течение жидкости в восточном направлении со скоростью U, на которое налагаются движения с характерным масштабом длины $(U/\beta)^{1/2}$, может находиться в установившемся состоянии; об этом свидетельствуют наблюдаемые отклонения восточного течения попеременно то в северном, то в южном направлениях. Можно быть уверенным, что это свойство важно для геофизических приложений, особенно для течений в атмосфере. Как установили метеорологи, направление ветра на большой высоте над поверхностью Земли в средних широтах в основном восточное, а линии тока, опоясывающие земной шар, обнаруживают крупномасштабные почти стационарные периодические отклонения от этого направления. Эти наблюдаемые волны (или меандры) могут быть вызваны горными цепями, которые играют роль препятствий на пути ветра, подобно тому как ступенька на дне слоя жидкости служила причиной возникновения волн в области вниз по потоку [1]). Согласно данным нашего анализа, число волн при однократном обходе земного шара на широте 45° составляет около $(\beta R^2/U)^{1/2}$ или $(Rf/U)^{1/2}$, т. е. приблизительно $26/(U)^{1/2}$, где U выражено в м/сек. Поскольку средняя скорость восточного ветра заключена обычно в пределах от 10 до 30 м/сек, то согласно нашим расчетам число волн должно быть в пределах от 5 до 8; эти значения согласуются с наблюдаемой глобальной картиной ветра.

Обсуждение крупномасштабных свойств движения в атмосфере и океане не может быть полным без учета влияния изменений плотности жидкости; однако эта задача не будет здесь обсуждаться.

7.8. Вихревая система крыла самолета

Общие свойства пространственного обтекания тел при наличии подъемной силы

Если в двумерном безвихревом течении, обусловленном поступательным движением тела в покоящейся жидкости, циркуляция вокруг тела отлична от нуля, то на тело действует поперечная сила (§ 6.4). Мы видели (§ 6.7), что если двумерный профиль — тонкое тело с закругленной передней частью и острой кормовой кромкой — находится в установившемся движении в жидкости под небольшим углом атаки, то влияние вязкости на возникающее течение при большом числе Рейнольдса приводит к образованию циркуляции вокруг профиля; ее величина в точности равна тому значению, которое требуется, чтобы переместить кормовую критическую точку на острую кромку профиля и исключить отрыв пограничного слоя на верхней и нижней частях профиля (гипотеза

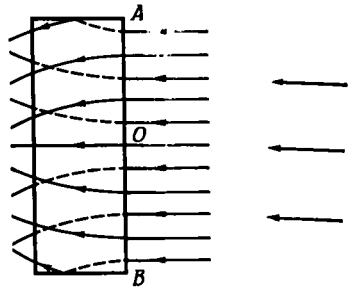
[1]) Нагревание или охлаждение воздуха при прохождении им границы между сушей и морем также может приводить к возникновению крупномасштабных отклонений ветра от основного восточного направления.

Н. Е. Жуковского). Это сочетание двух факторов — наличия поперечной силы, величину которой можно предсказать, и отсутствия отрыва пограничного слоя (что обеспечивает относительно небольшую силу сопротивления) — нашло многочисленные практические приложения в аэронавтике.

Обсуждение в § 6.7 свойств профилей и соответствующих полей течений было ограничено двумерными задачами. Теперь мы перейдем к более реалистическому случаю пространственных течений, возникающих при установившемся поступательном движении тела конечных размеров, на которое действует боковая, или подъемная, сила. Удобно воспользоваться терминологией теории крыльев — тонких тел, специально сконструированных для получения большой подъемной силы при малой силе сопротивления (в определенном положении их относительно направления движения); однако многие идеи и рассуждения качественно применимы и к течениям, которые возникают при поступательном движении произвольного тела, имеющего не более чем одну плоскость симметрии в направлении движения.

Напомним один результат из § 6.4, состоящий в том, что если течение, вызванное установившимся поступательным движением трехмерного тела, всюду безвихревое, то равны нулю как сила сопротивления, так и поперечная сила, действующая на тело. Таким образом, в рассматриваемых здесь условиях существование завихренности в жидкости неизбежно. Для хорошообтекаемого тела с острой кормовой кромкой и при безотрывном обтекании завихренность, возникающая на поверхности тела, сносится вниз по потоку в тонком следе (или пелене), толщина которого определяется вязкостью жидкости. Поперек этой вихревой пелены давление изменяется непрерывно, а поскольку постоянная Бернулли одна и та же во всей области безвихревого течения, то заключаем, что одинакова и величина скорости (относительно тела) в смежных точках по обе стороны от пелены. Таким образом, делаем вывод, что для двумерного течения вихревая пелена представляет собой тонкий след, содержащий завихренность обоих знаков, результирующее влияние которой на поле течения уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, а толщина пелены стремится к нулю. Для трехмерного же течения имеется возможность изменения *направления* вектора скорости в пелене, что связано с наличием в ней компоненты завихренности, параллельной направлению потока. Следовательно, нам необходимо изучить связь между существованием компоненты завихренности в направлении потока на поверхности тока, простирающейся вниз по потоку от задней кромки трехмерного тела, и возникновением поперечной силы, действующей на это тело.

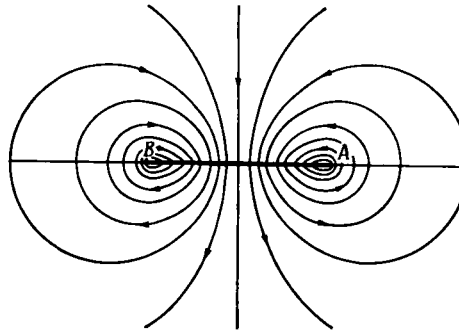
Эта связь очевидна из рассмотрений общей формы линий тока при установившемся обтекании плоского крыла с положительным



Р и с. 7.8.1. Возникновение завихренности вниз по потоку от крыла вследствие подсасывания жидкости на концах крыла с нижней стороны повышенного давления на верхнюю. Завихренность в спутном потоке имеет циркуляцию на участке *OA* против часовой стрелки относительно направления течения, а на участке *OB* — по часовой стрелке.

углом атаки. Наблюдение показывает, что на нижней поверхности крыла, обращенной к набегающему потоку, давление больше, чем на верхней «подсасывающей» поверхности, вследствие чего и возникает подъемная сила. (Этого следует ожидать по теории двумерного профиля; для крыла с большим отношением размаха к хорде течение вблизи середины крыла приближенно соответствует двумерному обтеканию.) Отмеченная выше разность давлений приводит к тому, что на обоих концах крыла жидкость будет стремиться перетекать с нижней стороны крыла на верхнюю, как показано схематически на рис. 7.8.1. Возникающее при этом количество движения жидкости в направлении размаха крыла сохраняется, когда жидкость уносится вниз по потоку от крыла, что и соответствует «спутной» завихренности на поверхности тока, сходящей с острой кромки крыла. Эта завихренность имеет разные знаки по обе стороны от вертикальной плоскости симметрии, проходящей через середину крыла, и спутную вихревую пелену можно представить приближенно в виде двух полубесконечных вихревых нитей с таким направлением циркуляции, что каждая из них движется вниз под действием другой. Полный импульс сил, требуемый для порождения этого движения жидкости в поперечной плоскости (нормальной к направлению полета), направлен вниз.

Завихренность, направленная по потоку и распространяющаяся за крылом, как видно, служит посредником в процессе непрерывного порождения направленного вниз количества движения жидкости в результате воздействия крыла на жидкость. Имеется еще одно фундаментальное следствие существования этой спутной завихренности. Возникновение кинетической энергии движения жидкости в поперечной плоскости по мере непрерывного увеличения пройденной крылом длины пути должно быть обусловлено работой, совершаемой движущимся крылом, так что на крыло, очевидно, должна действовать сила сопротивления. Это — *индук-*



Р и с. 7.8.2. Линии тока двумерного движения непосредственно после приложения распределенного вдоль отрезка AB импульса силы, направленного вниз.

тивное сопротивление, кратко рассмотренное в § 5.11. Как и подъемная сила, оно возникает вследствие порождения завихренности на твердой поверхности и имеет величину, которая, во всяком случае для тел, на которых пограничный слой не отрывается до острой кормовой кромки, определяется формой тела и не зависит от вязкости жидкости.

Более ясное представление о спутной системе вихрей можно получить путем рассмотрения тесно связанного с ней двумерного течения, в котором движение возникает из состояния покоя под действием импульса силы, распределенного вдоль отрезка AB (рис. 7.8.2). Этот отрезок представляет собой поперечное сечение тонкого крыла плоскостью, нормальной направлению полета, а движение жидкости в различные моменты времени после приложения импульса приближенно соответствует движению жидкости в такой поперечной плоскости на различных расстояниях вниз по потоку от движущегося крыла. Фактическое распределение импульса сил на отрезке AB связано с тем, каким образом движущееся крыло действует на жидкость, что зависит от точной формы крыла и его положения; однако очевидно, что линии тока течения жидкости непосредственно после приложения импульса будут иметь вид, показанный на рис. 7.8.2.

В результате приложения импульса сил на отрезке AB возникает вихревой слой (поскольку такое распределение приложенной силы не удовлетворяет условиям теоремы Кельвина о циркуляции), и в соответствии с общими результатами из § 7.2 и 7.3 заключаем, что при заданном распределении импульса сил на отрезке AB величина завихренности в любой его точке изменяется линейно в зависимости от величины полного импульса; этот импульс обозначим через I. С другой стороны, кинетическая энергия изменяется как квадрат завихренности (см. (7.3.9)) и, следова-

тельно, как квадрат полного импульса. Далее, при движении крыла со скоростью U оно действует с силой L, направленной вниз, на жидкость между параллельными поперечными плоскостями, отстоящими на единичном расстоянии друг от друга, в течение интервала времени $1/U$, так что полный импульс I в нашей аналогии представляется величиной L/U. В течение того же самого интервала времени движущееся крыло совершает работу D_i для преодоления индуктивного сопротивления D_i, и эта величина определяется кинетической энергией двумерного движения в рассматриваемой аналогии. Отсюда следует, что

$$D_i = \frac{L^2}{A\rho U^2}, \tag{7.8.1}$$

где множитель пропорциональности A имеет размерность площади и зависит от конкретного распределения завихренности.

Крылья большого относительного размаха и теория «несущей линии»

Для вычисления подъемной силы и силы индуктивного сопротивления, действующих на крыло заданной формы и заданного положения, можно использовать методы теории невязкой жидкости, если крыло имеет острую кормовую кромку и отрыва пограничного слоя вверх по потоку от нее не происходит. Основная трудность связана с определением напряженности и положения вихрей, которые тянутся вниз по потоку от крыла и оказывают влияние на течение вблизи него. Ланчестер и Прандтль еще на заре развития аэронавтики заложили основы теории для вычисления при определенных условиях этой системы вихрей, а также подъемной силы и силы индуктивного сопротивления, действующих на крыло. Эта теория до сих пор имеет важное значение при конструировании и испытаниях крыльев самолетов, предназначенных для дозвуковых скоростей полета; мы сейчас кратко ее обсудим.

Теория основана на двух главных предположениях относительно рассматриваемого крыла. Первое из них — спутные вихри считаются прямолинейными и параллельными направлению полета — позволяет упростить выражение для поля скорости, индуцированной вихревой пеленой. В действительности вихревые линии движутся вместе с жидкостью и вследствие существования в поперечной плоскости ненулевой компоненты скорости (которая возникает под влиянием этих же вихрей) спутные вихри оказываются наклоненными к направлению полета. Однако при условии, что эти вихри достаточно слабы (а это эквивалентно требованию достаточно малой подъемной силы крыла), мы можем ожидать, что предположение о прямых спутных вихрях, параллельных

поскольку вихревая пелена не бесконечна в обе стороны, а ограничена с одной стороны несущей линией, то соответствующий вклад будет равен половине указанной величины. Присоединенный вихрь на несущей линии не дает вклада в индуцированную скорость на самой несущей линии (хотя, конечно, он индуцирует вокруг нее некоторую циркуляцию). Следовательно, получаем вертикальную компоненту скорости в точке $(0, 0, z_1)$, которую обозначим через

$$v(z_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{s}\frac{dK(z)}{dz}\frac{dz}{z_1 - z}; \qquad (7.8.2)$$

здесь берется главное значение интеграла.

Важно также рассмотреть обтекание крыла в масштабе хорды. Согласно второму из наших двух основных предположений, изменение параметров течения по размаху крыла настолько мало, что обтекание любого сечения крыла, подобного изображенному на рис. 7.8.3, *б*, можно считать двумерным. Отсюда следует, что местное значение циркуляции K определяется гипотезой Жуковского и формой сечения крыла. Однако форма крыла в целом все же оказывает влияние на обтекание каждого сечения крыла. Решающий момент рассматриваемой теории состоит в том, что при введенных выше предположениях вертикальная скорость, индуцированная спутной вихревой системой крыла, приближенно постоянна в окрестности любого его сечения (т. е. в области, сравнимой по линейному размеру с хордой крыла); следовательно, влияние этой скорости на обтекание сечения крыла равносильно малому изменению направления скорости невозмущенного потока. Мы видим, что двумерное обтекание сечения крыла в точке z_1 соответствует обтеканию профиля однородным потоком со скоростью U под углом атаки

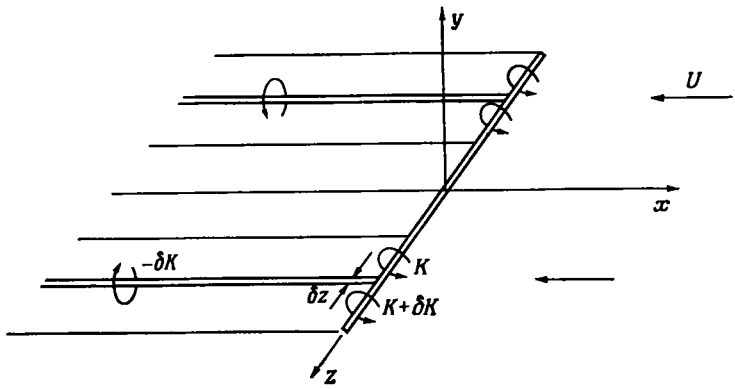
$$\alpha + \frac{v(z_1)}{U},$$

где α — угол между хордой крыла и направлением его полета, а $v(z_1)$ определяется соотношением (7.8.2).

Теперь, чтобы продвинуться дальше, нужно дополнить нашу теорию несущей линии данными об обтекании сечения крыла. Как было установлено в § 6.7, для всех профилей в двумерном потоке циркуляция изменяется по линейному закону в зависимости от хорды c, скорости U и угла атаки (если угол атаки достаточно мал при обычных условиях полета). Мы можем, следовательно, написать

$$K(z) = \frac{1}{2}acU\left\{\alpha + \beta + \frac{v(z)}{U}\right\}, \qquad (7.8.3)$$

где $-\beta$, как и в § 6.7,— угол атаки, соответствующий нулевой подъемной силе; a — постоянная, равная $dC_L/d\alpha$ в обозначениях



Р и с. 7.8.4. Вихревая система несущей линии. Дугообразные стрелки указывают фактическое направление циркуляции в случае, когда подъемная сила действует в положительном направлении оси y ($\delta K < 0$).

Пусть циркуляция в точке $(z + \delta z)$ на крыле превосходит ее значение в точке z на величину $\delta K = (dK/dz)\,\delta z$; тогда, применяя теорему Стокса к полосе, ограниченной двумя подобными замкнутыми кривыми, которые охватывают крыло и лежат в нормальных к оси z плоскостях, проведенных через указанные точки, заключаем, что спутная завихренность, сходящая с участка крыла между точками $(z + \delta z)$ и z, должна иметь величину δK (как обычно, направление против часовой стрелки в плоскости (y, z) считается положительным); иначе говоря, плотность напряженности (§ 2.6) сходящих вихрей в точке z равна dK/dz. Это означает, что вся вихревая система, содержащая свободные спутные вихри и присоединенный вихрь на несущей линии, представляется системой вихревых нитей прямоугольной формы; одна сторона шириной $2z$ таких прямоугольников расположена на крыле, другая — на бесконечности вниз по потоку. Циркуляция вокруг крыла на его концах ($z_1 = \mp s$) должна уменьшаться до нулевого значения, и если это уменьшение происходит быстро, то плотность напряженности вихревой пелены должна иметь бо́льшую величину вблизи концов крыла.

В дальнейшем нам потребуется величина скорости в точке $(0, 0, z_1)$ на несущей линии, индуцированная всей вихревой системой крыла. Из геометрической формы системы ясно, что индуцированная скорость направлена вертикально. Если через $\delta K\,(z)$ обозначить напряженность элементарного участка вихревой пелены, простирающейся от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ и отсекающей на несущей линии отрезок от z до $(z + \delta z)$, то вклад в индуцированную вертикальную скорость (см. (2.6.4)) от этой напряженности составит

$$-\delta K\,(z)/\{2\pi\,(z_1 - z)\};$$

§ 6.7; величина a для тонких профилей Жуковского в полностью безвихревом потоке приближенно равна 2π, и, как показывают наблюдения, ненамного отличается от 6 для большинства профилей.

Если параметры αc и $(\alpha + \beta)$ заданы как функции координаты z, то соотношения (7.8.2) и (7.8.3) дают интегральное уравнение для определения циркуляции $K(z)$. Когда функция $K(z)$ найдена, определяется полная подъемная сила крыла:

$$L = \rho U \int_{-s}^{s} K(z)\, dz. \tag{7.8.4}$$

Поскольку эффективный поток, в котором находится каждое сечение крыла, не точно параллелен направлению полета, то существует малая компонента поперечной силы, параллельная этому направлению; интеграл от этой компоненты по размаху крыла определяет индуктивное сопротивление

$$D_i = -\rho U \int_{-s}^{s} \frac{v(z)}{U} K(z)\, dz. \tag{7.8.5}$$

Иногда оказывается полезным заменить переменную z на θ следующим образом:

$$z = -s \cos \theta.$$

На концах крыла $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ циркуляция K равна нулю, так что мы можем ее представить в виде ряда Фурье

$$K(\theta) = U \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta;$$

более того, так как циркуляция симметрична относительно $\theta = \pi/2$, то коэффициенты B_n при четных n обращаются в нуль. Из (7.8.2) для $0 < \theta_1 < \pi$ находим

$$v(\theta_1) = -\frac{U}{4\pi s} \int_0^{\pi} \frac{\sum nB_n \cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_1}\, d\theta = -\frac{U}{4s} \frac{\sum nB_n \sin n\theta_1}{\sin\theta_1};$$

здесь была использована величина определенного интеграла, найденная в § 6.9. Коэффициенты B_n можно теперь найти численным путем из (7.8.3), воспользовавшись стандартными приближенными методами. Соотношения (7.8.4) и (7.8.5) для компонент сил, действующих на крыло, становятся теперь такими:

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 s \pi B_1, \tag{7.8.6}$$

$$D_i = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{1}{4} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n B_n^2. \tag{7.8.7}$$

Эти различные формы записи для L и D_i приводят к интересному результату: для заданной полной подъемной силы крыла заданного размаха индуктивное сопротивление имеет минимальную величину, если распределение циркуляции таково, что

$$B_n = 0 \qquad \text{для} \qquad n > 1,$$

т. е. если

$$K = UB_1 \sin\theta = UB_1 \left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)^{1/2}. \tag{7.8.8}$$

Соответствующая индуцированная скорость v равна постоянной величине $-UB_1/4s$ по всему размаху крыла, а индуктивное сопротивление равно

$$D_i = \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{1}{4}\pi B_1^2 = \frac{L^2}{2\pi s^2 \rho U^2}, \tag{7.8.9}$$

что вполне соответствует выражению (7.8.1).

Представленная соотношением (7.8.9) «эллиптическая нагрузка» крыла может быть реализована различными способами: посредством подходящих распределений по размаху крыла хорды профиля, его формы и угла атаки. Простой способ, имеющий еще то преимущество, что нагрузка остается эллиптической при изменении угла атаки, состоит в том, что величины a, α и β выбираются постоянными по всему размаху, а крыло берется эллиптической формы в плане, т. е.

$$c = c_0 \left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)^{1/2}.$$

(Очевидно, что обвод крыла может быть составлен из двух половин эллипсов с разными малыми осями.) В нашем случае эллиптического крыла из сравнения (7.8.3) и (7.8.8) заключаем, что

$$B_1 = (\alpha + \beta) \frac{(1/2)\, ac_0}{1 + (ac_0/8s)}. \tag{7.8.10}$$

Таким образом, «скос потока», обусловленный вихревой пеленой, создает для всего крыла эффективный угол атаки (относительно положения крыла с нулевой подъемной силой), величина которого в $\{1 + (ac_0/8s)\}$ раз меньше его кажущегося значения; подъемная сила крыла также уменьшается во столько же раз относительно того значения, которое она имела бы, если бы каждое сечение крыла действовало как изолированный двумерный профиль.

Поскольку $a \approx 2\pi$ и поскольку необходимое условие справедливости нашего анализа есть $c_0/s \ll 1$, то указанный выше множитель, на который изменяется угол атаки вследствие скоса потока, будет мало отличаться от единицы. Это служит иллюстрацией того факта, что теория несущей линии существенно связана с малым возмущением картины течения на крыле бесконечного

размаха. Имеются также теории «несущей поверхности», в которых учитываются распределения вертикальной силы на крыле как по размаху, так и по хорде крыла [1]); при этом обычно используются идеи, изложенные в данном параграфе, и теория тонкого профиля из § 6.9. В рассматриваемых здесь условиях можно развить процесс последовательных приближений для определения распределения силы, действующей на крыло большого относительного размаха; приведенная выше теория несущей линии представляет собой первое приближение в этом процессе (в качестве «нулевого» приближения служит теория двумерного обтекания крыла бесконечного размаха) [2]). В соответствии с процедурой последовательных приближений заметим, что поскольку член $v(z)/U$ играет роль возмущающего в выражении (7.8.3), то его можно оценить с той точностью, которую дает теория несущей линии; для этого нужно использовать невозмущенное значение циркуляции $K(z)$ в интервале (7.8.2). Иначе говоря, с приближением теории несущей линии согласуется аппроксимация решения уравнений (7.8.2) и (7.8.3) квадратурой

$$K(z) = K_0(z) - \frac{ac}{8\pi} \int_{-s}^{s} \frac{dK_0(z')}{dz'} \frac{dz'}{z - z'}, \tag{7.8.11}$$

где

$$K_0(z) = \frac{1}{2} acU(\alpha + \beta).$$

В случае эллиптического в плане крыла и при постоянных по размаху значениях a, α и β это эквивалентно заключению, что выражение (7.8.10) и связанные с ним соотношения справедливы только с точностью до первого порядка величины $ac_0/8s$.

Спутная вихревая система далеко за крылом

Проведенный выше анализ основан на предположении, что вблизи крыла, точнее на расстоянии порядка размаха, спутные вихри имеют прямолинейную форму и параллельны направлению полета крыла, т. е. образуют плоскую вихревую пелену. В действительности индуцированная самими спутными вихрями скорость вызывает некоторое поперечное перемещение вихревых линий. Отношение вертикальной компоненты индуцированной скорости к скорости набегающего потока, как видно из формул (7.8.2) и (7.8.4), должно быть порядка $L/\rho U^2 s^2$, или $C_L c/s$, где

[1]) Относительно этих теорий можно прочитать в книге: Thwaites B. (ed.), Incompressible Aerodynamics, Oxford University Press, 1960 [а также: Белоцерковский С. М., Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа, «Наука», М., 1965.— *Ред.*].

[2]) См. Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, М., «Мир», 1967.

C_L — коэффициент подъемной силы крыла, определяемый как

$$C_L = \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \times (\text{Площадь крыла})}.$$

Следовательно, если $C_L c/s \ll 1$, то вихри будут распространяться вниз по потоку от концов крыла, оставаясь приближенно прямолинейными. Однако в момент времени t, соответствующий расстоянию Ut вниз по потоку от крыла, индуцированное поле скорости должно передвинуть вихревые линии в поперечном направлении на расстояние vt; таким образом, первоначальная плоская вихревая пелена будет заметно искажена при значениях t порядка s/v, т. е. на расстоянии порядка

$$sU/v, \quad \text{или} \quad s^2/cC_L.$$

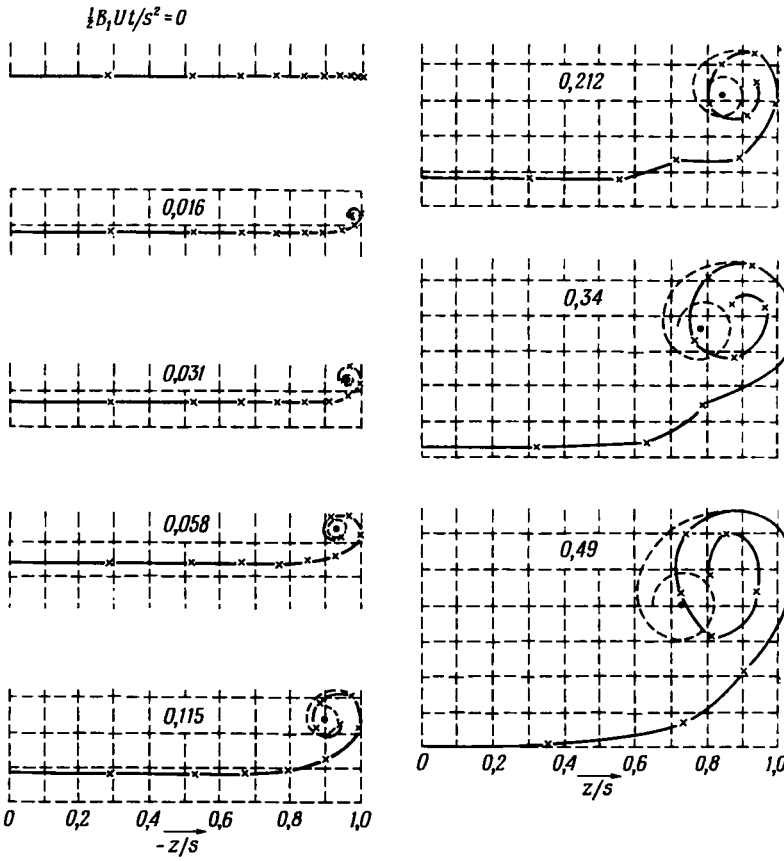
Когда первоначально плоская вихревая пелена за крылом большого относительного размаха начинает деформироваться под влиянием индуцированного ею поля скорости, это деформирование происходит весьма специфическим путем. Поскольку изменение формы вихревой пелены на расстоянии вниз по потоку, сравнимом с размахом крыла, невелико, то формы ее поперечных сечений на различных расстояниях d вниз по потоку от крыла будут приближенно теми же самыми, что и в случае двумерного поля течения в различные интервалы времени t в поперечном сечении первоначально прямолинейной вихревой пелены, причем $d = Ut$. (Влиянием присоединенной завихренности крыла мы пренебрегаем, так как она может оказывать воздействие на свободные вихри только вблизи крыла.) Эту двумерную задачу можно решить численно, если напряженность вихревой пелены задана как функция координаты вдоль размаха крыла.

На рис. 7.8.5 показаны результаты таких вычислений для вихревой пелены за крылом с эллиптическим распределением циркуляции (7.8.8). Напряженность вихря (циркуляция) на единицу длины вихревой пелены равна

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{UB_1 z}{s(s^2 - z^2)^{1/2}}, \tag{7.8.12}$$

и отсюда видно, что она концентрируется вблизи двух ее концов. Для целей численного расчета непрерывное распределение напряженности было заменено точечными вихрями одинаковой напряженности, которые были подходящим образом размещены на прямой, представляющей вихревую пелену. Поскольку пелена плоская, y-компонента индуцированной скорости направлена вниз и постоянна по сечению пелены, как это уже было отмечено для случая эллиптически нагруженного крыла [1]). Однако, как

[1]) Как было установлено ранее, индуцированная скорость должна быть постоянной для крыла, имеющего полубесконечные присоединенные вихри; ясно, что эта скорость будет постоянна и для пелены вдали от крыла (если она еще остается плоской), но ее величина будет в два раза больше.



Р и с. 7.8.5. Расчетные положения группы из десяти одинаковых точечных вихрей, расположенных при $t = 0$ вдоль прямой линии таким образом, чтобы приближенно представить половину вихревой пелены эллиптически нагруженного крыла (см. (7.8.12)) Штриховые линии получены аналитическим путем для течения вблизи края вихревой пелены (помеченного точкой), где численное интегрирование становится невозможным (Вестуотер (1936)).

видно из (7.8.2) и (7.8.12), в концевых точках есть особенности, и поэтому в них вертикальная компонента индуцированной скорости изменяется скачкообразно до бесконечно большого положительного значения (которое при численных расчетах может быть воспроизведено, конечно, лишь приближенно). Оба конца вихревой пелены вследствие этого перемещаются вверх, и это новое распределение завихренности приводит к дальнейшей деформации пелены, которая свертывается около этих концов. Конец вихревой пелены продолжает оставаться особенностью и всегда перемещается под прямым углом к направлению местной касатель-

ной к пелене, образуя спираль с бесконечным числом витков. (Фотографии (см. фото 5.10.5) обнаруживают аналогичное спиральное движение края вихревой пелены за острым выступом тела вскоре после начала его движения.)

Как видно из фотографий более поздних стадий развития вихревой пелены (см. фото 7.8.5), завихренность позади тела формируется в виде двух растущих спиралей; завихренность в каждой из двух спиралей приближенно симметрична относительно некоторой точки, расположенной на расстоянии около $0{,}8\,s$ от плоскости симметрии (x, y). (Первый интегральный момент завихренности с каждой стороны этой плоскости должен оставаться постоянным (см. § 7.3) и первоначально имеет значение, соответствующее центру завихренности на расстоянии $0{,}79\,s$ от плоскости (x, y).) Далеко вниз по потоку от крыла, таким образом, существует пара вихрей («парный вихрь») со структурой, промежуточной между показанными на рис. 7.3.3 и рис. 7.3.4; на первом из них завихренность сконцентрирована в двух точках, на втором завихренность разных знаков непрерывно распределена по полуокружностям. Направленный вниз импульс, требуемый для порождения этой пары вихрей, создается крылом, а кинетическая энергия движения в поперечной плоскости, обусловленного парой вихрей, связана с индуктивным сопротивлением крыла, о чем уже говорилось выше. Два спутных вихря, образующихся далеко вниз по потоку вследствие свертывания вихревой пелены, в литературе иногда считаются концентрированными (вихревыми нитями), хотя для крыльев с относительно большим размахом степень концентрации (дисперсия) завихренности одного знака вдали от крыла не может сильно отличаться от соответствующего ее значения в начальной плоской вихревой пелене ввиду требования сохранения кинетической энергии.

Наблюдения поля течения вниз по потоку от крыльев различной формы показывают, что хотя скорость свертывания сходящей вихревой пелены может зависеть от формы крыла и его положения, все же достаточно далеко от крыла типичной и преобладающей картиной остается пара спутных вихрей.

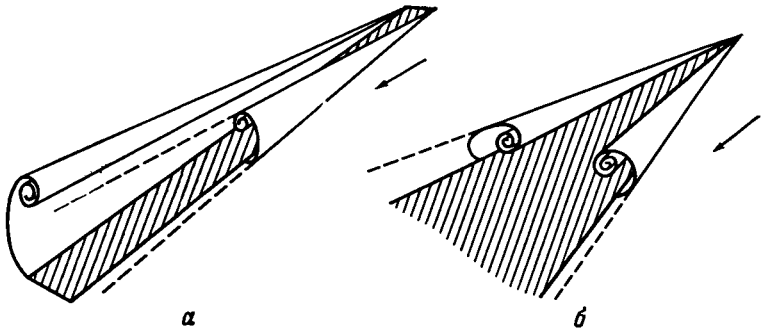
Крылья с большой стреловидностью

Многие современные самолеты конструируются с учетом возможности полетов при скоростях, приближающихся к скорости звука. Если нежелательные эффекты образования ударной волны вследствие сжимаемости воздуха требуется ограничить в допустимых пределах, то самолет должен иметь форму, которая исключает низкие значения минимального давления, т. е. высокие значения максимальной скорости воздуха относительно самолета. Очевидно, что «двумерные» или цилиндрические тела, движущиеся

по нормали к своим образующим, с этой точки зрения намного хуже «трехмерных» тел; например, при безвихревом обтекании кругового цилиндра (при нулевой циркуляции) и сферы отношение максимальной скорости жидкости к скорости набегающего потока равно соответственно 2,0 и 1,5. Вследствие этого передние кромки крыльев самолета желательно отгибать назад, т. е. делать их стреловидными, причем степень стреловидности зависит от предполагаемой скорости полета. Для самолетов со сверхзвуковой скоростью полета неизбежно образование ударной волны, которая простирается в область вниз по потоку в виде конуса с углом раствора, уменьшающимся при увеличении скорости полета. В этих условиях нежелательно, чтобы крылья выступали за пределы области, ограниченной головной ударной волной, так как это привело бы к формированию дополнительных ударных волн и опять бы потребовались стреловидные крылья. Для полета при числах Маха, равных двум (и еще больших), требуется крыло, больше похожее на наконечник стрелы, чем на обычное крыло с большим относительным размахом и прямолинейной передней кромкой, как было рассмотрено выше. Таким образом, спутная вихревая система уже не будет иметь форму, изображенную на рис. 7.8.4, и классическая теория несущей линии окажется неприменимой, поскольку скорость, индуцированная спутными вихрями, сильно изменяется вдоль хорды крыла.

В этой книге мы не можем подробно обсуждать вопросы аэродинамического расчета самолетов, однако одной-двум характерным чертам спутной вихревой системы крыла с большой стреловидностью уделим внимание. Обычно форма крыла выбирается таким образом, чтобы при крейсерской скорости самолета требуемая подъемная сила создавалась при достаточно малом угле атаки, при котором не происходит отрыва пограничного слоя до кормового среза крыла. При обтекании крыльев с большой стреловидностью воздух стремится быстро огибать расходящиеся боковые кромки крыльев и вследствие этого диапазон углов атаки их безотрывного обтекания оказывается весьма малым. В случае меньших скоростей полета, например при посадке, требуются более высокие значения угла атаки и может оказаться, что произойдет отрыв пограничного слоя на всей длине обеих кромок крыла. Эта ситуация интересна в качестве примера обтекания тел, протяженных в направлении, почти параллельном направлению набегающего потока.

Многочисленным исследованиям в аэродинамических трубах подвергались крылья в форме равнобедренного треугольника в плане. На фото 7.8.6 показаны линии тока вблизи верхней поверхности такого «дельтавидного» крыла под углом атаки, хотя и малом, но достаточном для возникновения отрыва потока на обеих боковых кромках (здесь они одновременно являются



Р и с. 7.8.7. Схемы свертывания вихревой пелены, сходящей с боковых сторон удлиненных плоских несущих поверхностей.

передними кромками). Видно, что вихревая пелена содержит завихренность главным образом в направлении основного потока, и эта завихренность сходит по всей длине боковых кромок, начиная от самой вершины треугольника; свертывание вихревой пелены в спирали происходит задолго до того, как она уносится вниз по потоку от кормового среза. (См. также фото 7.5.7, на котором видно поведение более сильно свернутых вихрей, возникших при большом угле атаки крыла.)

Отметим, что, когда вытянутое тело помещается почти вдоль потока жидкости, качественную картину его обтекания можно получить путем наложения двух потоков — один из них параллелен оси тела, а другой перпендикулярен ей. Если тело имеет затупленную форму при обтекании его поперечным потоком, то на разных расстояниях от передней части тела отрыв потока будет происходить в различные моменты развития обтекания. Ситуацию легче всего представить на примере движения простого цилиндрического тела в виде плоской прямоугольной пластины с центральной плоскостью симметрии вдоль потока (рис. 7.5.7, *а*). Мы отчетливо представляем себе те изменения скорости жидкости, которые происходят в точках плоскости, нормальной центральной линии пластины, по мере того как эта плоскость движется со скоростью свободного потока. Поскольку градиенты параметров по нормали к этой плоскости малы, картина изменения течения в этой плоскости приближенно та же, что и в двумерном течении, обусловленном плоской пластиной, которая внезапно начинает двигаться с постоянной скоростью по нормали к своей плоскости в покоящейся жидкости.

По обе стороны пластины сбегают две вихревые пелены, сворачивающиеся (как показано на фото 5.10.5), в то время как они сносятся вниз по потоку; в результате образуется установившееся обтекание несущей прямоугольной пластины, подобное изобра-

женному на рис. 7.8.7, *а*. Известно, что вихри, образованные позади плоской пластины, движущейся в направлении нормали к своей плоскости, после начала движения увеличиваются по размеру, но потом постепенно приобретают установившиися средний размер, определяемый шириной пластины; дальнейшее течение вниз по потоку становится либо периодическим, либо нерегулярным и колеблющимся. Таким образом, можно ожидать, что вихревая пелена позади прямоугольной несущей пластины действительно развивается по схеме, показанной на рис. 7.8.7, *а*, только в том случае, когда длина пластины не слишком велика.

В случае треугольного в плане крыла с малым углом при вершине ширина плоской пластины в соответствующем двумерном неустановившемся течении должна предположительно увеличиваться со временем линейно, а вихревая пелена может регулярно сворачиваться, как показано на рис. 7.8.7, *б*, вдоль сторон треугольника, сколь длинны бы они ни были. Более того, здесь, очевидно, существует интересная возможность, заключающаяся в том, что рост размеров вихрей в поперечной плоскости в точности соответствует увеличению ширины треугольной пластины, а картины течения в плоскости, поперечной к центральной линии пластины, имеют подобную форму на любых расстояниях от вершины. Таким образом, скорость жидкости на любых радиальных линиях, проходящих через вершину, имеет постоянное значение; такое течение называется *коническим*. Предположение о конической симметрии поля течения, вызванного дельтавидным крылом с малым углом при вершине и умеренным углом атаки, стало основой многочисленных современных исследований по теории крыла[1]).

---

[1]) См., например, Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, М.—Л., 1948.— *Прим. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Измеренные значения некоторых физических параметров различных жидкостей

(1 атм = 1,013·10⁶ дин/см², 1 дж = 0,2389 кал = 10⁷ г·см²/сек²)

а) Сухой воздух при давлении в одну атмосферу

Теплоемкость при 15° С: $c_p = 1{,}012$ дж/г·град; $c_v = 0{,}718$ дж/г·град; $\gamma = 1{,}401$

Коэффициент сжимаемости (изотермический) $0{,}987 \cdot 10^{-6}$ см²/дин или 1 атм$^{-1}$

Коэффициент теплового расширения при 15° С $3{,}48 \cdot 10^{-3}$ град$^{-1}$

Скорость звука при 15° С 340,6 м/сек

Среднеквадратичное значение скорости молекул при 15° С 498 м/сек

Коэффициент диффузии водяного пара в воздухе при 15° С 0,25 см²/сек

Коэффициент самодиффузии азота или кислорода при 15° С 0,18 см²/сек

Температура T, °С	Плотность ρ, г/см³	Коэффициент вязкости μ, г/см·сек	Коэффициент кинематической вязкости ν, см²/сек	Коэффициент теплопроводности [1] k_H дж/см·сек·град	Коэффициент термодиффузии $\varkappa_H$, см²/сек	Число Прандтля $\nu/\varkappa_H$
—100	$2{,}04 \cdot 10^{-3}$	$1{,}16 \cdot 10^{-4}$	0,057	$1{,}58 \cdot 10^{-4}$	0,076	0,75
—50	1,582	1,45	0,092			
0	1,293	1,71	0,132	2,41	0,184	0,72
10	1,247	1,76	0,141	2,48	0,196	0,72
15	1,225	1,78	0,145	2,51	0,202	0,72
20	1,205	1,81	0,150	2,54	0,208	0,72
30	1,165	1,86	0,160			
40	1,127	1,90	0,169			
60	1,060	2,00	0,188			
80	1,000	2,09	0,209			
100	0,946	2,18	0.230	3,17	0,328	0,70
200	0,746	2,58	0,346			
300	0,616	2,95	0,481			
500	0,456	3,58	0,785			
1000	0,277	4,82	1,74	7,6	2,71	0,64

[1] Последняя значащая цифра в этом столбце недостоверна.

Приложение 1

Весовой состав сухого воздуха на уровне моря

N_2	O_2	Ar	CO_2
0,7552	0,2315	0,0128	0,0005

б) Стандартная атмосфера: средние значения давления, плотности и температуры на умеренных широтах, принятые по международному соглашению

Высота над уровнем моря, м	Давление, дин/см²	Плотность, г/см³	Температура, °С
0	$1{,}013 \cdot 10^6$	$1{,}226 \cdot 10^{-3}$	15,0
500	0,955	1,168	11,7
1 000	0,899	1,112	8,5
1 500	0,845	1,059	5,2
2 000	0,795	1,007	2,0
3 000	0,701	0,910	—4,5
4 000	0,616	0,820	—11,0
5 000	0,540	0,736	—17,5
6 000	0,472	0,660	—24,0
8 000	0,356	0,525	—37,0
10 000	0,264	0,413	—50,0
12 000	0,193	0,311	—56,5
14 000	0,141	0,227	—56,5
16 000	0,103	0,165	—56,5
18 000	0,075	0,121	—56,5

в) Чистая вода

Коэффициент сжимаемости (изотермический)	$4{,}9 \cdot 10^{-11}$ см²/дин или $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ атм$^{-1}$					
Скрытая теплота плавления льда	334 дж/г					
Плотность льда	0,92 г/см³					
Коэффициент диффузии NaCl в воде при 15° С и произвольной концентрации	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$ см²/сек					
Коэффициент диффузии $KMnO_4$ в воде при 15° С и нулевой концентрации	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$ см²/сек					
Весовое процентное содержание безводного NaCl в растворе при 15° С	0	5	10	15	20	25
Плотность раствора, г/см³	0,999	1,035	1,072	1,110	1,149	1,190
Теплоемкость раствора при постоянном давлении, дж/г·град	4,19	4,16	4,13	4,10	4,07	4,04

в) Чистая вода (продолжение)

Температура T, °C	Плотность ρ, г/см³	Коэффициент теплового расширения β, 1/град	Теплоемкость, дж/г·град		Давление пара, дин/см²	Скрытая теплота парообразования, дж/г	Объем воздуха в 1 см³ насыщенной воды (приведено к 20° С), см³	Весовое процентное содержание безводного NaCl в насыщенном растворе	Скорость звука, см/сек
			c_p	$c_p - c_v$ (вычисленное по (1.8.2))					
0	0,9999	$-0{,}6 \cdot 10^{-4}$	4,217	0,002	$6{,}1 \cdot 10^3$	$2{,}501 \cdot 10^3$	0,0292	26,4	$1{,}407 \cdot 10^5$
5	1,0000	+0,1	4,202	0	8,7	2,489	0,0257		
10	0,9997	0,9	4,192	0,005	12,3	2,477	0,0228		1,445
15	0,9991	1,5	4,186	0,013	17,0	2,465	0,0205		
20	0,9982	2,1	4,182	0,024	23,3	2,454	0,0187	26,5	1,484
25	0,9971	2,6	4,179	0,041	31,6	2,442	0,0171		
30	0,9957	3,0	4,178	0,06	42,3	2,430	0,0157		1,510
35	0,9941	3,4	4,178	0,07	56				
40	0,9923	3,8	4,178	0,09	74	2,406		26,8	1,528
50	0,9881	4,5	4,180	0,13	123	2,382			1,544
60	0,9832	5,1	4,184	0,18	199	2,357		27,2	1,556
70	0,9778	5,7	4,189	0,23	311	2,333			1,561
80	0,9718	6,2	4,196	0,29	473	2,308		27,7	1,557
90	0,9653	6,7	4,205	0,34	701	2,283			
100	0,9584	7,1	4,216	0,40	1013	2,257		28,5	

в) Чистая вода (продолжение)

Температура T, °С	Коэффициент вязкости μ, г/см·сек	Коэффициент кинематической вязкости ν, см²/сек	Коэффициент теплопроводности k_H, дж/см·сек·град	Коэффициент термодиффузии $\varkappa_H$, см²/сек	Число Прандтля $\nu/\varkappa_H$
0	$1{,}787\cdot10^{-2}$	$1{,}787\cdot10^{-2}$	$5{,}6\cdot10^{-3}$	$1{,}33\cdot10^{-3}$	13,4
5	1,514	1,514			
10	1,304	1,304	5,8	1,38	9,5
15	1,137	1,138	5,9	1,40	8,1
20	1,002	1,004	5,9	1,42	7,1
25	0,891	0,894			
30	0,798	0,802	6,1	1,46	5,5
35	0,720	0,725			
40	0,654	0,659	6,3	1,52	4,3
50	0,548	0,554			
60	0,467	0,475	6,5	1,58	3,0
70	0,405	0,414			
80	0,355	0,366	6,7	1,64	2,2
90	0,316	0,327			
100	0,283	0,295	6,7	1,66	1,8

г) Поверхностное натяжение между двумя жидкостями

Поверхностное натяжение при 20° С (дин/см)

	Вода	Ртуть	Этиловый спирт	Четыреххлористый углерод	Оливковое масло	Бензол	Глицерин
Воздух	72,8	487	22	27		29	63
Вода		375	<0	45	20	35	<0

Зависимость от температуры

Температура, °С	0	10	15	20	25	30	40	50	60	80	100
Поверхностное натяжение между воздухом и водой, дин/см	75,7	74,2	73,5	72,8	72,0	71,2	69,6	67,9	66,2	62,6	58,8

д) Коэффициенты диффузии количества движения и тепла для различных веществ при температуре 15° С и давлении 1 атм

	Воздух	Вода	Ртуть	Этиловый спирт	Четырех-хлористый углерод	Оливковое масло	Глицерин
ρ, г/см^3	0,001225	0,999	13,61	0,79	1,60	0,918	1,26
c_p, дж/г·град	1,012	4,19	0,140	2,34	0,84	2,01	2,34
μ, г/см·сек	0,000178	0,0114	0,0158	0,0134	0,0104	0,99	23,3
ν, см^2/сек	0,145	0,0114	0,00116	0,0170	0,0065	1,08	18,5
k_H, дж/см·сек·град	0,000253	0,0059	0,080	0,00183	0,00113	0,00169	0,0029
$\varkappa_H$, см^2/сек	0,202	0,00140	0,042	0,00099	0,00084	0,00092	0,00098
$\nu/\varkappa_H$	0,72	8,1	0,028	17,2	7,7	117	189

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выражения для некоторых векторных дифференциальных величин в ортогональных криволинейных координатах

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — некоторая система ортогональных криволинейных координат, и пусть единичные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ параллельны координатным линиям и направлены в сторону увеличения координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно. Тогда изменение положения вектора $\mathbf{x}$, соответствующее приращениям координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, есть

$$\delta\mathbf{x} = h_1\delta\xi_1\mathbf{a} + h_2\delta\xi_2\mathbf{b} + h_3\delta\xi_3\mathbf{c},$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и положительные скалярные множители h_1, h_2, h_3 (коэффициенты Ламе) зависят от координат ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Тот факт, что три семейства координатных линий образуют ортогональную систему координат, позволяет выписать полезные выражения для производных от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Имеем

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_2} = 0$$

и еще два других подобных соотношения; поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_2}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_3}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_2} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_3}\right) =$$

$$= -2\,\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_3}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2},$$

мы видим, что

$$\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2} = \frac{\partial(h_2\mathbf{b})}{\partial\xi_1}\left(\text{или}\ \ \frac{\partial(h_1\mathbf{a})}{\partial\xi_2}\right)$$

есть вектор, нормальный $\mathbf{c}$. Отсюда следует

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1}\mathbf{b}, \qquad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\xi_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}\mathbf{a}$$

и еще четыре других подобных соотношения. Таким образом, находим

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi_1} = \frac{\partial(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\partial\xi_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}\mathbf{b} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}\mathbf{c}$$

и еще два других подобных соотношения.

которое в свою очередь также можно рассматривать как результат применения теоремы Стокса к трем ортогональным граням того же параллелепипеда.

Применяя дивергенцию к градиенту, получаем *оператор Лапласа*, который может действовать как на скалярную величину, так и на векторную,

$$\nabla\cdot\nabla V\,(\equiv\nabla^2 V)=$$
$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\xi_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial\xi_3}\right)\right\}.$$

Компоненты лапласиана $\nabla^2\mathbf{F}$ могут быть вычислены путем замены V в этом выражении на $\mathbf{F}=F_1\mathbf{a}+F_2\mathbf{b}+F_3\mathbf{c}$ и использования выражений для производных от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, однако получающийся результат слишком сложен, чтобы быть полезным. Обычно при нахождении компонент вектора $\nabla^2\mathbf{F}$ в конкретной системе координат намного удобнее использовать тождество

$$\nabla^2\mathbf{F}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$$

и полученные выражения для градиента, дивергенции и ротора.

Рассмотрим теперь выражение компонент тензора скоростей деформации через компоненты скорости и производные относительно криволинейной системы координат. Градиент по направлению $\mathbf{n}$ от компоненты скорости $\mathbf{u}$ в фиксированном направлении $\mathbf{m}$ есть

$$\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{u})=\mathbf{m}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}).$$

Диагональные элементы тензора скоростей деформации представляют собой скорости расширения, получающиеся при подстановке $\mathbf{m}=\mathbf{n}$, а внедиагональные элементы содержат градиенты скорости, для которых $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны. Из полученного выше выражения для $\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{F}$ следует, что компонентами тензора скоростей деформации в декартовых координатах, локально параллельных векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (которым соответствуют индексы 1, 2, 3), являются

$$e_{11}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u})=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}+\frac{u_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}+\frac{u_3}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3},$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u})+\frac{1}{2}\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u})=\frac{h_3}{2h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{u_3}{h_3}\right)+\frac{h_2}{2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{u_2}{h_2}\right)$$

и еще четыре других выражения, получаемых циклической перестановкой индексов. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} можно получить по компонентам тензора скоростей деформации, используя (для несжимаемой жидкости) соотношение

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij}.$$

Теперь компоненты всех членов в уравнении движения жидкости в проекциях на направления $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ можно получить

простой подстановкой выписанных выше соотношений. Компоненты члена $\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}$ в ускорении находятся из выражения для $\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{F}$.

Ниже приводятся выражения для некоторых частных систем координат.

Сферические координаты

Системе координат $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \theta$, $\xi_3 = \varphi$ (где φ — азимутальный угол относительно оси $\theta = 0$) соответствуют

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\sin\theta.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} = \mathbf{b}, \qquad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\mathbf{c},$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta} = -\mathbf{a}, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\mathbf{c},$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{a} - \cos\theta\,\mathbf{b},$$

$$\nabla V = \mathbf{a}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\mathbf{b}}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{c}}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{F} = \mathbf{a}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_r - \frac{n_\theta F_\theta}{r} - \frac{n_\varphi F_\varphi}{r}\right) + \mathbf{b}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_\theta - \frac{n_\varphi F_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{n_\theta F_r}{r}\right) +$$
$$+ \mathbf{c}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_\varphi + \frac{n_\varphi F_r}{r} + \frac{n_\varphi F_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{\mathbf{a}}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial (F_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right\} + \frac{\mathbf{b}}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial (rF_\varphi)}{\partial r}\right\} +$$
$$+ \frac{\mathbf{c}}{r}\left\{\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right\},$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2},$$

$$\nabla^2\mathbf{F} = \mathbf{a}\left\{\nabla^2 F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial (F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right\} +$$
$$+ \mathbf{b}\left\{\nabla^2 F_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{F_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right\} +$$
$$+ \mathbf{c}\left\{\nabla^2 F_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} - \frac{F_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right\}.$$

Тензор скоростей деформации:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r},$$

$$e_{\theta\varphi}=\frac{\sin\theta}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\qquad e_{\varphi r}=\frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),$$

$$e_{r\theta}=\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.$$

Уравнение движения несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla u_r-\frac{u_\theta^2}{r}-\frac{u_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+$$

$$+\nu\left\{\nabla^2 u_r-\frac{2u_r}{r_2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla u_\theta+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+$$

$$+\nu\left\{\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla u_\varphi+\frac{u_\varphi u_r}{r}+\frac{u_\theta u_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+$$

$$+\nu\left\{\nabla^2 u_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right\}.$$

Цилиндрические координаты

Системе координат $\xi_1=x$, $\xi_2=\sigma$, $\xi_2=\varphi$ (где φ — азимутальный угол относительно оси $\sigma=0$) соответствуют

$$h_1=1,\qquad h_2=1,\qquad h_3=\sigma.$$

Тогда

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\varphi}=0,\qquad\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\varphi}=\mathbf{c},\qquad\frac{\partial\mathbf{c}}{\partial\varphi}=-\mathbf{b},$$

и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не зависят от x и σ.

Далее,

$$\nabla V=\mathbf{a}\frac{\partial V}{\partial x}+\mathbf{b}\frac{\partial V}{\partial\sigma}+\mathbf{c}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{F}=\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\nabla F_x)+\mathbf{b}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_\sigma-\frac{n_\varphi F_\varphi}{\sigma}\right)+\mathbf{c}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_\varphi+\frac{n_\varphi F_\sigma}{\sigma}\right),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial(\sigma F_\sigma)}{\partial\sigma}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{a}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{\partial(\sigma F_\varphi)}{\partial\sigma}-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial F_\sigma}{\partial\varphi}\right\}+\mathbf{b}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial F_x}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial x}\right)+$$

$$+\mathbf{c}\left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial\sigma}\right),$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2},$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{a}\,(\nabla^2 F_x) + \mathbf{b}\left(\nabla^2 F_\sigma - \frac{F_\sigma}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \\ + \mathbf{c}\left(\nabla^2 F_\varphi + \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial F_\sigma}{\partial \varphi} - \frac{F_\varphi}{\sigma^2}\right).$$

Тензор скоростей деформации:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad e_{\sigma\sigma} = \frac{\partial u_\sigma}{\partial \sigma}, \qquad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\sigma}{\sigma},$$

$$e_{\sigma\varphi} = \frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{u_\varphi}{\sigma}\right) + \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial u_\sigma}{\partial \varphi}, \quad e_{\varphi x} = \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial u_x}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial x},$$

$$e_{x\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial \sigma}.$$

Уравнение движения несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x,$$

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_\sigma - \frac{u_\varphi^2}{\sigma} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \nu\left(\nabla^2 u_\sigma - \frac{u_\sigma}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right),$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_\varphi + \frac{u_\sigma u_\varphi}{\sigma} = -\frac{1}{\rho\sigma}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\nabla^2 u_\varphi + \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial u_\sigma}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{\sigma^2}\right).$$

Полярные координаты

Соответствующие формулы можно получить из формул для цилиндрической системы координат путем отбрасывания всех компонент и производных в направлении координатной линии x. Однако целесообразно выписать их здесь отдельно, поскольку они часто используются. Системе координат $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \theta$ соответствуют $h_1 = 1$, $h_2 = r$. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} = \mathbf{b}, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta} = -\mathbf{a},$$

$$\nabla V = \mathbf{a}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\mathbf{b}}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla \mathbf{F} = \mathbf{a}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_r - \frac{n_\theta F_\theta}{r}\right) + \mathbf{b}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla F_\theta + \frac{n_\theta F_r}{r}\right),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right\}\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2},$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{a}\left(\nabla^2 F_r - \frac{F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial \vartheta}\right) + \mathbf{b}\left(\nabla^2 F_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{F_\theta}{r^2}\right).$$

Тензор скоростей деформации:

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad e_{r\theta}=\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.$$

Уравнение движения несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+\left(u_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u_r-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+\left(u_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u_\theta+\frac{u_r u_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Адамар (Hadamard J.), *Comptes Rendus*, 152 (1911), 1735.
Андраде (Andrade E. N. da C.), *Proc. Phys. Soc.*, 51 (1939), 784.
Апельт (Apelt C. J.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 3175 (1961).
* **Белоцерковский С. М.**, Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа, «Наука», М., 1965.
Бенджамен (Benjamin T. B.), *J. Fluid Mech.*, 14 (1962), 593.
Бенджамен, Эллис (Benjamin T. B., Ellis A. T.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A260** (1966), 261.
Бетц (Betz A.), *Z. f. Flugtech. und Motorluftschiffahrt*, 6 (1915), 173.
Биркгоф Г., Сарантонелло Э., Струи, следы и каверны, «Мир», М., 1965.
Блазиус (Blasius H.), *Z. Math. Phys.*, 56 (1908), 1.
Блазиус, *Z. Math. Phys.*, 58 (1910), 90.
Бэтчелор (Batchelor G. K.), *J. Fluid Mech.*, 1 (1956), 177.
Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, «Мир», М., 1967.
Ватсон (Watson G. N.), Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1958. [Есть русский перевод первого издания: **Ватсон Г. Н.**, Теория бесселевых функций, ч. 1—2, ИЛ, М., 1949.]
Верле (Werlé H.), Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, Publication № 103, 1961.
Вестуотер (Westwater F. L.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 1692 (1936).
Визельсбергер (Wieselsberger C.), *Z. Flugtech. und Motorluftschiffahrt*, 5 (1914), 142.
* **Волькенштейн М. В.**, Строение и физические свойства молекул, М., 1955.
Гаген (Hagen G.), *Poggendorff's Annalen d. Physik und Chemie* (2), 46 (1839), 423.
Гамель (Hamel G.), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung*, 25 (1917), 34.
Гельмгольц (Helmgoltz H. von), *Crelle's Journal*, 55 (1858) (а также: *Phil. Mag.* (4), 33 (1867), 485; *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, 101).
Гельмгольц, *Verh. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg*, 5 (1868) (*а*), 1 (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, 223).
Гельмгольц, *Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin*, 23 (1868) (*б*), 215 (а также: *Phil. Mag.* (4), 36 (1868), 337; *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, 146).
* **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.**, Молекулярная теория газов и жидкостей, ИЛ, М., 1961.
Глауэрт Г., Основы теории крыла и винта, ОГИЗ, 1931.
Глауэрт (Glauert M. B.), *J. Fluid Mech.*, 1 (1956), 625.
Глауэрт, *Proc. Roy. Soc.*, A242 (1957), 108.
* **Голубев В. В.**, Лекции по теории крыла, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 1—2, ИЛ, М., 1948.
Гринспэн (Greenspan H.), The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, 1968.
Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.
Дарси (Darcy H.), Les fontaines publiques de ville de Dijon, p. 590, 1856.
Дефан (Defant A.), Physical Oceanography, v. 1, Pergamon Press, 1961.

Джеффри (Jeffery G. B.), *Phil. Mag.* (6), 29 (1915), 455.
Джеффри, *Proc. Roy. Soc.*, A102 (1922), 161.
Джеффрис (Jeffreys H.), Cartesian Tensors, Cambridge University Press, 1931.
Джеффрис Г., Свирлс Б., Методы математической физики, т. 1—3, «Мир», М., 1971.
Джонс (Jones D. R. M.), Ph. D. Dissertation, University of Cambridge, 1965.
Дин (Dean W. R.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 40 (1944), 19.
Дэвис, Райдил (Davies J. T., Rideal E. K.), Interfacial Phenomena, Academic Press, 1961.
Дэвис, Тейлор (Davies R. M., Taylor G. I.), *Proc. Roy. Soc.*, A200 (1950), 375.
Жуковский Н. Е., *Z. f. Flugt. und Motorluftsch.*, 1 (1910), 281. [Собр. соч., т. 4, 1949, стр. 92—116.]
Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.
* **Зубов Н. Н.**, Динамическая океанология, М.—Л., 1947.
Кавагути (Kawaguti M.), *J. Phys. Soc. Japan*, 8 (1953), 747.
Каплун, Лагерстром (Kaplun S., Lagerstrom P. A.), *J. Math. Mech.*, 6 (1957) 585.
Карман (Kármán T. von), *Z. angew. Math. Mech.*, 1 (1921), 233.
Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, «Наука», М., 1964.
Кастлман (Castleman R. A.), NACA Tech. Note № 231, 1925.
Келлер, Таками (Keller H. B., Takami H.), Proc. Symposium on Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations (Univ. of Wisconsin), 1966.
Кельвин (Kelvin), *Camb. and Dub. Math. J.* (1849). (*Math. and Phys. Papers*, 1, 107.)
Кельвин, *Trans. Roy. Soc. Edin.*, 25 (1869). (*Math. and Phys. Papers*, 4, 49.)
Кельвин, *Phil. Mag.* (5), 10 (1880), 155. (*Math. and Phys. Papers*, 4, 152.)
Кеннард (Kennard E. H.), Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, 1938.
Кирхгоф (Kirchhoff G.), *J. reine angew. Math.*, 70 (1869), 289. (См. также: **Кирхгоф Г.**, Механика, Лекции по математической физике, Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 243.)
Клаттер, Смит, Брэзиер (Clutter D. W., Smith A. M. O., Brazier J. G.), Douglas Aircraft Company Report № ES29075, 1959.
Кнэп (Knapp R. T.), *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 166 (1952), 150.
Кокран (Cochran W. G.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30 (1934), 365.
Коллинз (Collins R.), *Chem. Eng. Sci.*, 20 (1965), 851.
Копсон (Copson E. T.), Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford University Press, 1935.
Коттрел (Cottrell A. H.), The Mechanical Properties of Matter, John Wiley, 1964.
Коул Р., Подводные взрывы, ИЛ, М., 1950.
* **Кочин Н. Е.**, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, М., 1951.
* **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.**, Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2, Физматгиз, М., 1963.
Крокко (Crocco L.), *Z. angew. Math. Mech.*, 17 (1937), 1.
Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
Кутта (Kutta W. M.), *Sitzungsber. d. Bauer. Akad. d. Wiss., M.-Ph. Kl.*, 1910.
* **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.**, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.
Лайтхилл (Lighthill M. J.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 2328 (1949).
Лайтхилл, in «Surveys in Mechanics» (Batchelor G. K. and Davies R. M., eds.), Cambridge University Press, 1956.
Ламб (Lamb H.), *Phil. Mag.* (6), 21 (1911), 112.
Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М., 1947.
Ламб, Statics. Cambridge University Press, 1933.
Ламбурн, Брайер (Lambourne N. C., Bryer D. W.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 3282 (1962).
Ландау Л. Д., *Докл. АН СССР*, 43 (1944), 286.

* **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.**, Статистическая физика, «Наука», 1964.
Левинсон (Levinson N.), *Annals of Math.*, 47 (1946), 704.
Левич В. Г., Физико-химическая гидродинамика, Физматгиз, М., 1959.
Леви-Чивита (Levi-Civita T.), *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 23, 1 (1907).
* **Лейбензон Л. С.** (ред.), Гидродинамическая теория смазки. Н. П. Петров, О. Рейнольдс, А. Зоммерфельд, А. Мичель, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, изд. АН СССР, М.— Л., 1934.
Лейф (Leigh D. C.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 51 (1955), 320.
* **Леонтович М. А.**, Введение в термодинамику, Гостехиздат, М.— Л., 1952.
* **Лойцянский Л. Г.**, Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, М., 1962.
Лок (Lock R. C.), *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 4 (1951), 42.
Лонг (Long R. R.), *J. Met.*, 10 (1953), 197.
Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins M. S.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A245 (1953), 535.
Лонге-Хиггинс, *J. Fluid Mech.*, 8 (1960), 293.
Лонге-Хиггинс, *Proc. Roy. Soc.*, A279 (1964), 446.
Лонге-Хиггинс, *Proc. Roy. Soc.*, A284 (1965), 40.
Магнус (Magnus G.), *Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie*, 88 (1853), 1.
Мелвин-Хьюз (Moelwyn-Hughes E. A.), States of Matter, Oliver and Boyd, 1961.
Миллсапс, Польгаузен (Millsaps K., Pohlhausen K.), *J. Aero. Sci.*, 20 (1953), 187.
Мил-Томсон (Milne-Thomson L. M.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 36 (1940), 246.
Мил-Томсон, Theoretical Hydrodynamics, ed. 5, Macmillan, 1968. [Есть русский перевод изд. 4: **Милн-Томсон Л. М.**, Теоретическая гидродинамика, «Мир», М., 1964.]
Мичель (Michell A. G. M.), Lubrication: Its Principles and Practice, Blackie, 1950.
Моффат (Moffatt H. K.), *J. Fluid Mech.*, 18 (1964), 1.
Мур (Moore D. W.), *J. Fluid Mech.*, 16 (1963), 161.
Навье (Navier M.), *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 6 (1822), 389.
Нёккентвед (Nøkkentved C.), *Ingenioren*, 41 (1932), 330.
Озеен (Oseen C. W.), *Ark. f. Mat. Astr. Fys.*, 6, № 29 (1910).
Окабэ, Иноуэ (Okabe J., Inoue S.), *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, 8 (1960), 91.
Окабэ, Иноуэ, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, 9 (1961), 147.
Онзагер (Onsager L.), *Nuovo Cimento, Supplement*, 6 (1949), 279.
* **Оно С., Кондо С.**, Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях, ИЛ, М., 1963.
Пейн (Payne R. B.), *J. Fluid Mech.*, 4 (1958), 81.
Пёшль Т., Эвальд П., Прандтль Л., Физика упругих и жидких тел, ОНТИ, М.— Л., 1933.
Пиппард (Pippard A. B.), Classical Thermodynamics, Cambridge University Press, 1957.
Пирс (Pierce D.), *J. Fluid Mech.*, 11 (1961), 460.
Планк (Planck M.), *Wied. Ann.*, 21 (1884).
Плессет (Plesset M. S.), *J. Appl. Mech.*, 16 (1949), 277.
Прандтль (Prandtl L.), Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses (Heidelberg 1904), Leipzig, 484—491, 1905.
Прандтль, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1914), 177.
Прандтль, *J. Roy. Aero. Soc.*, 31 (1927), 730.
Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, М., 1951.
Прандтль Л., Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, т. 1, ГТТИ, М.— Л., 1933, т. 2, ОНТИ, М.— Л., 1935.
Праудмен, Пирсон (Proudman I., Pearson J. R. A.), *J. Fluid Mech.*, 2 (1957), 237.
Праудмен (Proudman J.), *Proc. Roy. Soc.*, A92 (1916), 408.
Пуазейль (Poiseuille J. L. M.), *Comptes Rendus*, 11 (1840), 961, 1041; 12 (1840), 112.

Пуассон (Poisson S. D.), *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 13 (1829), 1.
Рейнольдс (Reynolds O.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 174 (1883), 935. (*Papers on Mechanical and Physical Subjects*, 2, 51.)
Рейнольдс, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 177 (1886), 157. (*Papers on Mechanical and Physical Subjects*, 2, 228.)
Рейхардт (Reichardt H.), U. K. Ministry of Aircraft Production, Rep. and Trans. № 766, 1946.
Розенхед (Rosenhead L.), *Proc. Roy. Soc.*, A175 (1940), 436.
Розенхед (ed.), Laminar Boundary Layers, Oxford University Press, 1963.
Россби (Rossby C. G.), *J. Mar. Res.*, 2 (1939), 38.
Рошко (Roshko A.), *J. Fluid Mech.*, 10 (1961), 345.
Рэлей (Rayleigh), *Phil. Mag.* (5), 2 (1876), 430. (*Scientific Papers*, 1, 286.)
[**Рэлей**, Теория звука, т. 1—2, М., 1955.]
Рэлей, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A175 (1883), 1. (*Scientific Papers*, 2, 239.)
Рэлей, *Phil. Mag.* (6), 34 (1917), 94.
Рэнкин (Rankine W. J. M.), *Phil. Trans. Roy. Soc.* (1871), 267.
Рябушинский (Riabouchinsky D.), *Proc. London Math. Soc.*, 19 (1919), 206.
Салливан (Sullivan R. D.), *J. Aero/Space Sci.*, 26 (1959), 767.
Саусвелл, Вайси (Southwell R. V., Vaisey G.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A240 (1946), 117.
* **Седов Л. И.**, Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, М., 1962.
* **Седов Л. И.**, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», М., 1966.
* **Седов Л. И.**, Механика сплошных сред, «Наука», М., 1970.
Сен-Венан (Saint-Venant B. de), *Comptes Rendus*, 17 (1843), 1240.
Сквайр (Squire H. B.), *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 4 (1951), 321.
* **Слезкин Н. А.**, Динамика вязкой несжимаемой жидкости, ГТТЛ, М., 1955.
* **Смирнов В. И.**, Курс высшей математики, т. 3, ч. 2; т. 4, «Наука», М., 1967.
Спеллс (Spells K. E.), *Proc. Phys. Soc.*, B65 (1952), 541.
Стокс (Stokes G. G.), *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8 (1845), 287. (*Mathematical and Physical Papers*, 1, 75.)
Стокс, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9 (1851), 8. (*Mathematical and Physical Papers*, 3, 1.)
Стюарт (Stuart J. T.), *J. Fluid Mech.*, 24 (1966), 673.
Стюартсон (Stewartson K.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 50 (1954), 454.
Таneда (Taneda S.), *J. Phys. Soc. Japan*, 11 (1956) (*a*), 302.
Таneда, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, 4 (1956) (*б*), 99.
Тейлор (Taylor G. I.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A215 (1915), 1. (*Scientific Papers*, 2, 1.)
Тейлор, *Proc. Roy. Soc.*, A100 (1921), 114. (*Scientific Papers*, 4.)
Тейлор, *Proc. Roy. Soc.*, A102 (1922), 180. (*Scientific Papers*, 4.)
Тейлор, *Proc. Roy. Soc.*, A104 (1923), 213. (*Scientific Papers*, 4.)
Тейлор, *Proc. Roy. Soc.*, A253 (1959), 313. (*Scientific Papers*, 4.)
Тейлор, *Scientific Papers*, 3, 1963, 320.
* **Тейлор Дж.**, в сборнике «Наука и человечество 1971—1972», «Знание», М., 1972.
Тзяи (Цянь Сюэ-сень) (Tsien H.-S.), *Q. Appl. Math.*, 1 (1943), 130.
Титчмарш (Titchmarsh E. C.), Eigenfunction Expansions, Oxford University Press, 1962. [Есть русский перевод первого издания: **Титчмарш Э.**, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ИЛ, М., т. 1, 1960; т. 2, 1961.]
* **Тихонов А. Н., Самарский А. А.**, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1953.
Том (Thom A.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 1194 (1929).
Том, *Proc. Roy. Soc.*, A141 (1933), 651.
Триттон (Tritton D.), *J. Fluid Mech.*, 6 (1959), 547.
* Труды международного симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями, «Наука», М., 1972.

Туэтс (Thwaites B.) (ed.), Incompressible Aerodynamics, Oxford University Press, 1960.
Уолтерс, Дэвидсон (Walters J. K., Davidson J. F.), *J. Fluid Mech.*, **17** (1963), 321.
Фейдж, Фокнер, Уолкер (Fage A., Falkner V. M., Walker W. S.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 1241 (1929).
Фёттингер (Föttinger H.), *Mitteilungen der Vereinigung der Gross-Kesselbesitzer*, № 73 (1939), 151.
Фокнер, Скэн (Falkner V. M., Skan S. W.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 1314 (1930).
* **Франкль Ф. И., Карпович Е. А.**, Гидродинамика тонких тел, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
Френкел (Fraenkel L. E.), *Proc. Roy. Soc.*, **A267** (1962), 119.
* **Фридман А. А.**, Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ, М.— Л., 1934.
Фульц (Fultz D.), *J. Met.*, **16** (1959), 199.
Хаберман, Мортон (Haberman W. L., Morton R. K.), Taylor Model Basin, Washington, Rep. № 802. 1953.
Хаппель, Бреннер (Happel J., Brenner H.), Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, 1965.
Харвей, Макэлрой, Уайтли (Harvey E. N., McElroy W. D., Whiteley A. H.), *J. Appl. Phys.*, **18** (1947), 162.
Хартри (Hartree D. R.), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33** (1937), 223.
Хартри, *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 2426 (1949).
Хартунян, Сирс (Hartunian R. A., Sears W. R.), *J. Fluid Mech.*, 3 (1957), 27.
Хаурвиц (Haurwitz B.), *J. Mar. Res.*, **3** (1940), 254.
Хеле-Шоу (Hele Shaw H. J. S.), *Nature*, **58** (1898), 34.
Хилл (Hill M. J. M.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A185** (1894).
Хименц (Hiemenz K.), Dissertation, Göttingen; *Dingler's Polytech. J.*, 326 (1911), 311.
Хоман (Homann F.), *Forsch. Ing.-Wes.*, **7** (1936) (*а*), **1**.
Хоман, *Z. angew. Math. Mech.*, **16** (1936) (*б*), 153.
Хоуарт (Howarth L.), *Aero. Res. Coun., Rep. and Mem.*, № 1632 (1935).
Хоуарт, *Phil. Mag.* (7), **42** (1951), 1433.
* **Чаплыгин С. А.**, К вопросу о струях в несжимаемой жидкости, Собр. соч., т. 1, 1948.
Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.
Чёрчилл (Churchill R. V.), Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill, 1941.
Шиманский (Szymanski F.), *J. Math. Pures Appliquées*, Series 9, **11** (1932), 67.
Шлихтинг (Schlichting H.), *Phys. Z.*, 33 (1932), 327.
Шлихтинг, *Z. angew. Math. Mech.*, **13** (1933), 260.
Эйзенберг, Понд (Eisenberg P., Pond H. L.), Taylor Model Basin, Washington, Rep. № 668, 1948.
Эйнштейн (Einstein A.), *Ann. Phys.*, **19** (1906), 289.
Эйнштейн, *Ann. Phys.*, **34** (1911), 591.
Экман (Ekman V. W.), *Ark. Math. Astr. Fys.*, **2**, № 11 (1905).
* **Эфрос Д. А.**, *ДАН СССР*, **51**, № 4 (1946).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамар (Hadamard J.) 299, 739
Андраде (Andrade E. N. da C.) 432, 739
Апельт (Apelt C. J.) 326—328, 331, 739
Архимед 37

Белоцерковский С. М. 720, 739
Бенджамен (Benjamin T. B.) 603, 679, 739
Берд Р. 102, 739
Бернулли Д. 207
Бетц (Betz A.) 553, 739
Биркгоф (Birkhoff G.) 607, 739
Блазиус (Blasius H.) 389, 403, 537, 739
Брайер (Bryer D. W.) 740
Бреннер (Brenner H.) 321, 743
Брэзиер (Brazier J. G.) 740
Бэтчелор (Batchelor G. K.) 5—7, 204, 661, 739, 740

Вайси (Vaisey G.) 618, 742
Ван-Дайк (Van Dyke M.) 313, 720, 739
Ватсон (Watson G. N.) 250, 739
Верле (Werlé H.) 739
Вестуотер (Westwater F. L.) 722, 739
Визельсбергер (Wieselsberger C.) 739
Волькенштейн М. В. 19, 739

Гаген (Hagen G.) 233, 234, 739
Гамель (Hamel G.) 370, 739
Гельмгольц (Helmholtz H.) 290, 346, 608, 628, 739
Гиршфельдер Дж. 102, 739
Глауэрт (Glauert H.) 549, 579, 739
Глауэрт (Glauert M. B.) 470, 530, 739
Голубев В. В. 549, 739
Гольдштейн (Goldstein S.) 12, 423, 469, 739
Гринспэн (Greenspan H.) 680, 684, 739
Гуревич М. И. 607, 615, 739

Дарси (Darcy H.) 286, 739
Дефан (Defant A.) 255, 739
Джеффри (Jeffery G. B.) 370, 740
Джеффрис (Jeffreys H.) 120, 162, 189, 555, 740
Джонс (Jones D. R. M.) 740
Дин (Dean W. R.) 327, 740
Дэвидсон (Davidson J. F.) 642, 743
Дэвис (Davies J. T.) 93, 97, 740
Дэвис (Davies R. M.) 204, 587, 740

Егер Д. 57, 241, 740

Жуковский Н. Е. 5, 283, 504, 531, 711, 740, 741

Зоммерфельд А. 138, 218, 283, 740, 741
Зубов Н. Н. 255, 740

Иноуэ (Inoue S.) 741

Кавагути (Kawaguti M.) 326, 328, 331, 740
Каплун (Kaplun S.) 310, 740
Карман (Kármán T.) 366, 400, 740
Карпович Е. А. 726, 743
Карслоу Г. 57, 241, 740
Кастлман (Castleman R. A.) 298, 740
Каулинг Т. 74, 743
Келлер (Keller H. B.) 326, 331, 740
Кельвин (Kelvin) 345, 478, 689, 740
Кеннард (Kennard E. H.) 64, 740
Кертисс Ч. 102, 739
Кибель И. А. 5, 37, 495, 740
Кирхгоф (Kirchhoff G.) 424, 608, 655, 740
Клаттер (Clutter D. W.) 740
Кнэп (Knapp R. T.) 604, 740
Кокран (Cochran W. G.) 367, 740
Коллинз (Collins R.) 740
Кондо С. 93, 741
Копсон (Copson E. T.) 145, 536, 740

Коттрел (Cottrell A. H.) 102, 740
Коул (Cole R. H.) 85, 740
Кочин Н. Е. 5, 37, 189, 495, 740
Коши 349
Крокко (Crocco L.) 209, 740
Курант (Courant R.) 138, 218, 740
Кутта (Kutta W. M.) 504, 740

Лаврентьев М. А. 145, 491, 536, 740
Лагерстром (Lagerstrom P. A.) 310, 740
Лагранж 110, 349
Лайтхилл (Lighthill M. J.) 204, 618, 740
Ламб (Lamb H.) 5, 6, 11, 37, 303, 307, 495, 522, 556, 740
Ламбурн (Lambourne N. C.) 740
Ландау Л. Д. 5, 8, 64, 266, 740, 741
Ланчестер 714
Левинсон (Levinson N.) 615, 741
Левич В. Г. 302, 459, 741
Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 615, 741
Лейбензон Л. С. 283, 741
Лейф (Leigh D. C.) 410, 741
Леонтович М. А. 42, 741
Лифшиц Е. М. 5, 8, 64, 741
Лойцянский Л. Г. 5, 391, 741
Лок (Lock R. C.) 434, 435, 741
Лонг (Long R. R.) 692, 694, 741
Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins M. S.) 451, 453, 462, 708, 741

Магнус (Magnus G.) 530, 741
Максвелл 204
Макэлрой (McElroy W. D.) 594, 743
Мелвин-Хьюз (Moelwyn-Hughes E. A.) 19, 741
Миллсапс (Millsaps K.) 372, 377, 741
Милн-Томсон (Milne-Thomson L. M.) 4, 519, 524, 611, 615, 741
Мичель (Michell A. G. M.) 283, 741
Мортон (Morton R. K.) 460, 743
Моффат (Moffatt H. K.) 292, 741
Мур (Moore D. W.) 459, 741

Навье (Navier M.) 190, 741
Нёккентвед (Nøkkentved C.) 741
Ньютон 192

Озеен (Oseen C. W.) 306, 307, 741
Окабэ (Okabe J.) 741
Онзагер (Onsager L.) 653, 741
Оно С. 93, 741

Пейн (Payne R. B.) 406, 407, 741
Петров Н. П. 283, 741
Пёшль Т. 741
Пипард (Pippard A. B.) 42, 741
Пирс (Pierce D.) 741
Пирсон (Pearson J. R. A.) 310, 741
Планк (Planck M.) 608, 741
Плессет (Plesset M. S.) 601, 741
Польгаузен (Pohlhausen K.) 372, 377, 741
Понд (Pond H. L.) 619, 743
Прандтль (Prandtl L.) 4, 6, 10, 381, 389, 428, 469, 714, 741
Праудмен (Proudman I.) 310, 741
Праудмен (Proudman J.) 682, 683, 741
Пуазейль (Poiseuille J. L. M.) 233, 234, 741
Пуассон (Poisson S. D.) 190, 742

Райдил (Rideal E. K.) 93, 97, 740
Рейнольдс (Reynolds O.) 240, 274, 280, 283, 741, 742
Рейхардт (Reichardt H.) 619, 742
Розе Н. В. 5, 37, 495, 740
Розенхед (Rosenhead L.) 372, 391, 404, 469, 742
Россби (Rossby C. G.) 682, 708, 742
Рошко (Roshko A.) 428, 742
Рэлей (Rayleigh) 424, 453, 603, 615, 742
Рэнкин (Rankine W. J. M.) 567, 742
Рябушинский (Riabouchinsky D.) 620, 742

Салливан (Sullivan R. D.) 345, 742
Самарский А. А. 238, 742
Сарантонелло Э. 607, 739
Саусвелл (Southwell R. V.) 618, 742
Свирлс Б. 120, 162, 555, 740
Седов Л. И. 5, 519, 522, 579, 607, 742
Сен-Венан (Saint-Venant B. de) 190, 742
Сирс (Sears W. R.) 458, 743
Сквайр (Squire H. B.) 266, 742
Скэн (Skan S. W.) 396, 743
Слезкин Н. А. 742
Смирнов В. И. 162, 555, 742
Смит (Smith A. M. O.) 740
Соу С. 321
Спеллс (Spells K. E.) 742
Статкевич А. А. 5
Стокс (Stokes G. G.) 190, 274, 293, 350, 444, 742
Стюарт (Stuart J. T.) 451, 742
Стюартсон (Stewartson K.) 397, 742

Таками (Takami H.) 326, 331, 740
Танеда (Taneda S.) 327, 328, 331, 742
Тейлор (Taylor G. I.) 258, 587, 593, 622, 684, 692, 742
Тзян (Цянь Сюэ-сень) (Tsien H.-S.) 665, 666, 742
Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 262, 742
Титьенс (Tietjens O. G.) 469, 741
Тихонов А. Н. 238, 742
Том (Thom A.) 326, 327, 330, 331, 742
Торричелли 483
Триттон (Tritton D.) 330, 331, 742
Туэтс (Thwaites B.) 549, 720, 743

Уайтли (Whiteley A. H.) 594, 743
Уолкер (Walker W. S.) 421, 743
Уолтерс (Walters J. K.) 642, 743

Фейдж (Fage A.) 421, 743
Фёттингер (Föttinger H.) 743
Фокнер (Falkner V. M.) 396, 421, 743
Франкль Ф. И. 726, 743
Френкел (Fraenkel L. E.) 372, 743
Фридман А. А. 209, 743
Фульц (Fultz D.) 689, 743

Хаберман (Haberman W. L.) 460, 743
Хаппель (Happel J.) 321, 743
Харвей (Harvey E. N.) 594, 743
Хартри (Hartree D. R.) 397, 410, 743
Хартунян (Hartunian R. A.) 458, 743
Хаурвиц (Haurwitz B.) 708, 743
Хеле-Шоу (Hele Shaw H. J. S.) 284, 743
Хилл (Hill M. J. M.) 645, 743
Хименц (Hiemenz K.) 363, 743
Хоман (Homann F.) 365, 743
Хоуарт (Howarth L.) 364, 365, 743

Чаплыгин С. А. 283, 537, 618, 741, 743
Чепмен С. 74, 743
Чёрчилл (Churchill R. V.) 238, 743

Шабат Б. В. 145, 536, 740
Шиманский (Szymanski F.) 251, 743
Шлихтинг (Schlichting H.) 430, 449, 743

Эвальд П. 741
Эйзенберг (Eisenberg P.) 619, 743
Эйнштейн (Einstein A.) 321, 743
Экман (Ekman V. W.) 255, 743
Эллис (Ellis A. T.) 603, 739
Эфрос Д. А. 621, 743

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авогадро закон 61
Автомодельное решение 243
Адиабатическое изменение состояния 43
Антициклон 701
Архимеда закон 36, 229
— —, аналог для вращающейся жидкости 231
Архимедова сила 37, 229
— — в движущейся жидкости 229
Атмосфера 695
— стандартная 728
—, уравнения движения модели 697

Безвихревое движение см. Движение безвихревое
— соленоидальное векторное поле 136
— течение вблизи критической точки 142
Бернулли поверхность 625
— постоянная (константа) 207, 210, 418, 467, 468, 481, 625
— теорема для установившегося течения 205, 211, 335, 467, 625
— —, приложения к безвихревому течению 481
— —, специальные формы 211
Бойля закон 41
Больцмана постоянная 68
— распределение 65
Борда насадок 485, 611

Вектор соленоидальный 108
Векторная функция координат с нулевым ротором 115
Вентури труба 596
Ветер геострофический 700
— градиентный 702
Вихревая дорожка 330, 423, 440, 657
— линия 15, 128
— —, движение вместе с невязкой жидкостью 346
— нить 15, 129
Вихревая нить круговая 628, 639
— —, распространение под действием вязкой диффузии 262, 344
— —, самоиндуцированное движение 625
— пелена 133, 134
— —, интенсивность 133
— —, неустойчивость 628
— —, распространение под действием вязкой диффузии 242, 344, 345
— система крыла 710
— трубка 128
— —, интенсивность 129
Вихревой диполь 131
Вихревые кольца 641
Вихрь присоединенный на несущей линии 716
— разгонный 545
— сферический Хилла 645, 661
— тормозной 545
— точечный 131
— эллиптический 655
Вихря разрушение («взрыв вихря») 679
Влияние изменения внешней скорости на вихрь изолированный 675
— — — — — — сферический 645
Внутренняя энергия 43
— —, добавки к ней за счет вращательных и колебательных форм движения молекул 70, 71
— —, изменение в движущейся жидкости 198
— — совершенного газа 69
— —, уравнение 200, 201
Водослив через плотину 486, 487
Воды физические параметры 728—730
Воздуха физические параметры 727
Волна прогрессивная 622
— —, затухание на поверхности тяжелой жидкости 461
— —, угол на вершине острого гребня 622
Волны инерционные 691
— планетарные 707, 708
— Россби 708

Вращающаяся жидкость см. Жидкость вращающаяся
Вращение жидкости в двумерном течении 230
— установившееся области завихренности 654, 655
Время рèлаксации при отклонениях от состояния равновесия 79, 88
Выталкивающая сила см. Архимедова сила
Вязкости коэффициент см. Коэффициент вязкости
Вязкость жидкости 52, 53
— суспензии 313

Газ совершенный 62
— —, коэффициенты переноса в нем 74
— —, отклонения от его законов 71
— — с постоянными удельными теплоемкостями 71
— —, уравнение состояния 68
Гармоники круговые 169
Геострофический ветер в атмосфере 700
Геострофическое течение в океане 700, 701
Гидравлический удар 600
Гипотеза Жуковского 541, 542
— пограничного слоя 381
— сплошной среды 21
Главные напряжения 31
— оси тензора напряжений 31
— — — скоростей деформации 114
Глубина проникания колебаний в потоке 249
Гомоэнергетическое течение 210
Гомоэнтропическое течение 205
Градиентный ветер 702

Давление в безвихревом течении 476
— — жидкости 85
— — совершенном газе 64
— модифицированное 228, 481, 482
— насыщенного пара 83
— равновесное 201
— статическое 33
Давления импульс 581
— механическое определение в движущейся жидкости 187
— увеличение при внезапном расширении трубы 467
— центр 554
Даламбера парадокс 416, 504
Дарси закон 286
Движение безвихревое внутри угла между плоскими стенками 511
— — во вращающемся эллипсоиде 622
— —, вызванное движением поступательным плоской пластины 533, 534, 539
— — — — — полутела 569
— — — — — сферы 165, 558
— — — — — тела, образованного источниками на оси 566, 573
— — — — — тонкого тела 570, 576
— — — — — цилиндра заданной формы 522
— — — — — — кругового 171, 526
— — — — — — эллиптического 530
— — — — — эллипсоида вращения 562
— — — — твердого тела 495
— — — пластиной с присоединенной к ней каверной 612
— —, выражение для давления 476
— —, кинетическая энергия 477
— —, которое можно сделать установившимся во вращающейся системе координат 492
— — осесимметричное 555
— —, рассматриваемое как движение, вызванное распределением источников и стоков на границе области 172
— —, сохраняемость 349
— вихревой трубки постоянного напряжения вместе с невязкой жидкостью 346
— жидкости на вращающемся шаре 694
— молекул, колебательные и вращательные формы 70, 71
— простого сдвига 52, 117, 664
— системы точечных вихрей 651
— чисто деформационное 114
Девиатор напряжений 187
Дельта-тензор Кронекера 29
Джеффри — Гамеля течение 370
Диаграмма равновесных состояний жидкости 44
— — — системы жидкость — пар 82
Дивергенция 14, 107, 119
Динамическое подобие 272
Диполь вихревой 131
— источников 123
Диссипация энергии, вызванная вязкостью 201

Диффузии коэффициент см. Коэффициент диффузии
— уравнение 57, 241
Диффузия в движущейся жидкости 180
— — изотропной среде 55, 56
— вещества (массодиффузия) 51
Дорожка вихревая см. Вихревая дорожка
Дрейф прогрессивной волны 453
— элементов жидкости 453

Единственность однозначного потенциала скорости 478
— распределения скорости безвихревого соленоидального течения 140, 141, 151, 160, 168
— соленоидального течения с малыми силами инерции 290

Жидкая граница 195
— линия 15, 104
— поверхность 15, 104
Жидкий объем 15, 104
Жидкость вращающаяся, влияние на ее течение изменения поперечного сечения трубы 670
— —, медленное движение в ней тела 683
— —, распространение в ней волн 685, 693
— —, течение, вызванное движением тела вдоль оси вращения 691
— — — геострофическое 700
— — — при наличии неподвижной внутренней границы 662
— —, упругость 680
— вязкая 52
— неньютонова 192
— несжимаемая 108
— ньютонова 192
— обычная 17
— самотяготеющая 39
— эффективно невязкая 193, 335, 381, 417, 472, 473
— — несжимаемая 136
Жуковского гипотеза 541, 542
— преобразование 549
— профиль 549

Завихренность 14, 114, 115
—, влияние вязкости на дисперсию ее распределения 658
—, возникающая при неустановившемся движении профиля 542
Завихренность, возникновение при движении жидкости из состояния покоя 350
—, законы распространения для невязкой жидкости 345
—, интегральные инварианты ее распределения 648
—, интенсификация при растяжении вихревых линий 342
— локальная 119
— спутная 415, 712, 724
— установившегося двумерного вихревого течения 658, 659
— элемента тонкого слоя жидкости на вращающемся шаре 698
Закон Авогадро 61
— Архимеда 36, 229
— Био — Савара 130
— Бойля 41
— Дарси 286
— Карно 69
— Стокса 297
— Шарля 68

Изгиб профиля крыла 352
Изотропная среда, диффузия и теплопроводность в ней 55, 56
Изэнтропическое изменение состояния 46
— течение 205
Импульс давления 581
— жидкости 507, 636, 649
Импульсивное движение жидкости 580
Индуктивное сопротивление 415, 713
Инерции силы 185, 307
Инерционные волны 691
Интенсивность вихревой пелены 129
— — трубки 129
— источника 120, 123
Истечение из круглого отверстия 482, 609

Каверна внутри концевого вихря, отходящего от лопасти винта 597
— за плоской пластиной 612
— заполненная воздухом или паром 605
— пленочная 604
—, присоединенная к телу 617
— с ненулевым числом кавитации 618, 620, 621
Каверны образование в течении неустановившемся 597
— — — — установившемся 594
— схлопывание 599—601

Кавитации число 595, 605
Кавитация 83, 593, см. также Каверна
—, вызванная ускорением жидкости 598
Капиллярность 98
Карно закон 69
Кельвина теорема о минимуме энергии 478
— — — циркуляции 345, 473
Кинетическая теория газов 62, 98
— энергия безвихревого течения, вызванного движением тела 500
— — двумерного течения 650
— — неограниченной жидкости, движущейся с завихренностью 639
Колеблющееся тело, вызванное им установившееся течение 451, 452
— —, действующая на него демпфирующая сила 443
Кольца вихревые 641
Комплексный потенциал 145
— — вихревой нити 150
— — двумерного течения 145, 504
— — обтекания цилиндра кругового 522
— — — — эллиптического 532
— — простых безвихревых полей течения 509, 510
Коническое течение 726
Контактная сила 25, 26
Контрольная поверхность 183
Конформное преобразование течения 513
— — — со свободными линиями тока 608
Кориолиса параметр 698
— сила 185, 680
— — в выражении модифицированного давления 230, 231
— —, влияние на основное течение 682, 683, 700, 701
— —, восстанавливающий эффект 682
— —, равновесие с силой трения в слое Экмана 252
Коэффициент вязкости 61, 191
— — жидкости 88
— —, измеренные значения 730
— — кинематический 61, 227
— — расширения жидкости (объемный) 202
— — сдвига 202, 203
— — совершенного газа 76, 77
— — суспензии 313
— диффузии 57, 61
— — растворенного вещества 87, 728
Коэффициент диффузии совершенного газа 76
— переноса 54, 55, 215
— присоединенной массы 506
— проницаемости пористой среды 286
— самодиффузии 57
— сжатия (струи) 484, 611
— сжимаемости 45, 84
— — воды 728
— — совершенного газа 69
— сопротивления 297
— температуропроводности 59, см. также Коэффициент термодиффузии
— теплового расширения 48, 215
— — — воды 729
— — — воздуха 727
— — — совершенного газа 69
— теплопроводности 57
— термодиффузии 59, 88
— — воды 730
— — воздуха 727
— — совершенного газа 76, 77
Кристоффеля — Шварца теорема 519
Критическая точка в системе жидкость — пар 83
Крокко соотношение 209
Круговой цилиндр в невязкой жидкости, вращающейся на бесконечности 662
— —, вызванное его внезапным движением из состояния покоя течение 406, 407, 422
— — — — вращением течение 260, 261
— — — — поступательным движением безвихревое течение 526
— —, демпфирующая сила, действующая на него при колебаниях 443
— —, помещенный в чисто деформационное течение 665
— — при числах Рейнольдса больших 424, 426, 529
— — — — — — малых 310
— — — — — — от 1 до 100 324, 325
— —, циркуляция вокруг него 529
Крыла вихревая система 710
— относительное удлинение 714
Крыло стреловидное 723
Кундта трубка 452

Лагранжево представление поля течения 103
Лапласа уравнение 138
— — в криволинейных координатах 733

Линейный вихревой диполь 131
Линия вихревая 15, 128
— особенностей в объеме жидкости 126, 127
— отмеченных частиц 104
— тока 104
Локальная производная 105
Лошмидта число 61

Магнуса эффект 530
Максвелла термодинамические соотношения 47
Максвелловское распределение скоростей молекул 66, 67
Массовые силы 24
Масштаб высоты атмосферы 41
Маха число 219
Модель малярной кисти 237
— течения с возвратной струей 621
Модифицированное давление 228, 482
Модуль упругости объемный 45
Молекулярная сила 18
Момент, действующий на профиль Жуковского 554
— — — — тонкий 579—580
— — — цилиндр произвольной формы 538
— — — — эллиптический 538

Напряжений тензор 29
— — в жидкости движущейся 187
— — — — покоящейся 31
— —, девиатор 187
— —, компоненты в криволинейных координатах 734
— —, симметрия 30
Напряжения 26
— в ньютоновой жидкости 192
— главные 31
— касательные 30
— — нулевые 289
— нормальные 30
Насадок Борда 485, 611
Натяжение поверхностное 90
— —, влияние адсорбированного вещества 92, 93
— —, давление, вызванное им 95
— —, измеренные значения 730
Неньютонова жидкость 192
Несжимаемая жидкость 108, 193
Нестягиваемая кривая 128
Несущая линия 714
Несущее тело 415, 712
Нить вихревая 15, 129
Ньютонова жидкость 192

Обратимое изменение состояния 43
Обтекание пластинки и цилиндра при наличии отсоса 357
Объемная вязкость 202
— — пузырьков газа в суспензии 321
Объемные силы 24
— сферические функции 162
Объемный модуль упругости 45
Определяющие уравнения 56
Отклонение потока, вызванное горным хребтом 702
Отрыв пограничного слоя 407, 422
— — — на стенке с точкой излома 412

Парадокс Даламбера 416, 504
Параметры состояния 42
Пелена вихревая 133, 134
Перенос количества движения 60
Переноса явления 50
Переходный слой между двумя одно родными потоками 242
Планетарные волны 707, 708
Пластина, вызванное ее движением двумерное безвихревое течение 533, 535, 539, 540
—, глиссирующая по свободной поверхности 616
— с присоединенной каверной 612
Поверхностное натяжение см. Натяжение поверхностное
Поверхностные силы 25, 26
Поверхность Бернулли 625
— контрольная 183
Пограничный слой 380
— —, автомодельное решение для степенного распределения скорости внешнего потока 396
— —, влияние на обтекание движущегося тела 420, 421, 605, 606
— — — — форму каверны за телом 621, 622
— —, интегральные соотношения Кармана 400
— — на наклонном цилиндре 469
— — — плоской пластине 387
— — — свободной поверхности 454
— — — — — —, вызванное им затухание гравитационных волн 461
— —, нарастание в первоначально безвихревом течении 402
— —, отрыв см. Отрыв пограничного слоя
— — при замедлении и ускорении внешнего потока 394

Пограничный слой при колебании стенки 441
— —, приближенные уравнения 382
— —, связанный с ним установившийся поток 447
— —, толщина вытеснения 390, 391 401
— — — потери импульса 401
— — турбулентный 393
Подъемная сила 415
— —, вызванная циркуляцией вокруг профиля Жуковского 551, 552
— — — — — — произвольного 548
— — — — — — тонкого 579
— — — — — цилиндра 504, 537
— —, действующая на крыло 718
— — — — тело, движущееся в жидкости 414, 710
Поле течения ациклическое 150
— — циклическое 150
Постоянная Бернулли см. Бернулли постоянная
— Больцмана 68
— циклическая 149
Потенциал комплексный см. Комплексный потенциал
— скорости 14, 137
— — векторный 14, 110, 112, 172
— —, представление рядом по круговым гармоникам целой степени 169
— — — — — объемным сферическим функциям 161, 162
— —, физический смысл 582
Поток вектора 54
Прандтля число 727
Представление поля течения лагранжево 103
— — — эйлерово 103
Приближение мелкой воды 696
— β-плоскости 700
Прибор Хеле-Шоу 283, 284
Принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул 67
Присоединенная масса диска кругового 565
— — тела, движущегося с ускорением 506
Присоединенной массы коэффициент 506
Производная локальная 105
— субстанциональная 14, 106
Профиль (крыла) 538, 539
—, возникновение циркуляции 541
— Жуковского 545
Профиль, изгиб 552
—, подъемная сила 548
— тонкий, приближенная теория 574
—, угол атаки 548
—, хорда 551, 576
Пуазейля течение 233—235
Пузырь в форме сферического сегмента, скорость подъема 585
—, поднимающийся в вертикальной трубе 588
— — при числе Рейнольдса большом 457
— — — — — малом 302
— сферический расширяющийся 590
— тороидальной формы 642
Пузырьки в жидкости 561
— — —, взаимопритяжение, вызванное колебаниями 561
— сферической формы 588

Равновесие жидкости 20, 21, 40
Распределение скоростей молекул 64
— — — Больцмана 65
— — — максвелловское 66, 67
Расстояние между центрами молекул 20
Расхождение см. Дивергенция
Реакция жидкости на ускорение тела 503, 506
Рейнольдса число 240, 272, 274
Решение автомодельное 243
— уравнения теплопроводности для начального точечного источника тепла 241
Россби волны 708
— число 682
Рэнкина овоид 567

Свертывание вихревой пелены 722, 725
Свободная энергия 47
— —, добавок от поверхностного натяжения 91
Свободные слои смешения 433
Связь девиатора напряжений с тензором скоростей деформации 190
Сдвиг простой 52, 117
Сила архимедова 37, 229
—, действующая на движущееся тело при ускорении жидкости 508
— — — — — — установившемся движении жидкости 414
— — — периодическую решетку твердых тел 464, 467
— — — полубесконечное симметричное тело 569

Сила, действующая на цилиндр при установившемся поступательном движении 535
— демпфирующая 443, 444
— инерции 15, 185, 307
— Кориолиса 185, 680
— молекулярная 18
— объемная (массовая) 24
— поверхностная (контактная) 25, 26
— подсасывающая 512
— подъемная 414, 504, 537, 548, 551, 552, 579, 710, 718
— сопротивления 415, 426, 427, 713
Скорости изменения субстанциональных интегралов 176
Скорость возрастания возмущения в вихревой пелене 634
— диссипации механической энергии 201
— изменения конвективная 105
— — локальная 105
— объемного расширения (дивергенция) 14, 107, 119
— распространения звуковых волн 218
Скос потока, вызванный вихревой пеленой 719
След за движущимся телом 435, 436, 470
Слой пограничный см. Пограничный слой
— Экмана см. Экмана слой
Смазки теория 280
Смачивание твердой поверхности 97, 98
Совершенный газ см. Газ совершенный
Совмещаемые кривые 147
Соотношение Крокко 209
— Максвелла термодинамическое 47
Сопротивление индуктивное 415, 713
— кругового цилиндра или сферы при числах Рейнольдса больших 426, 427
— — — — — — — — — малых 296, 297, 312
— — — — — — — — — от 1 до 100 330
— нулевое 416, 504
— сферического газового пузырька при числах Рейнольдса больших 457
— — — — — — — — малых 301, 302
— тела, движущегося с постоянной скоростью 415
Сопротивление тела, движущегося с постоянной скоростью, влияние перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный 428
— — при больших числах Рейнольдса без отрыва потока 419
— — — — — — — с отрывом потока 426
— — с присоединенной каверной 614, 620
— трения 415
— формы 415
Сопряженные функции 145
Состояния изменение адиабатическое 43
— — изэнтропическое 46
— — обратимое 43
— параметры 42
— уравнение 42
Спутные вихри за стреловидным крылом 724
— — — телом 415, 712
Стандартная атмосфера 728
Сток точечный 123
Стокса закон 297
Столб Тейлора 685, 704
Столкновение молекул 62, 78
Струи соударяющиеся 622
Струйное течение, вызванное кумулятивным зарядом 491
Струхаля число 276, 441
Струя двумерная при больших числах Рейнольдса 430, 431
— —, вытекающая из отверстия 609
— из точечного источника количества движения 264
—, набегающая на твердую стенку двумерная 470, 616
— — — — — — цилиндрическая 488
Стягиваемая кривая 128
Субстанциональная производная 14, 106
Суспензия, вязкость 313
—, повышенная скорость диссипации в ней 317, 318
Сфера, вызванное ее движением течение безвихревое 558
— — — — — — при числах Рейнольдса больших 426, 427
— — — — — — — — — малых 293 299, 307
— — — — — — — — — от 1 до 100 330, 331
—, ее колебания, вызванные звуковыми волнами 561

Сфера колеблющаяся, демпфирующая сила 445, 446
—, обтекание чисто деформационным потоком 315
Сферический вихрь Хилла 645, 661

Тейлора столб 685, 704
Тело несущее 415, 712
Тензор Леви-Чивиты 29
— напряжений 15, 29
— скоростей деформации 14, 114
— — — в криволинейных координатах 734
Теорема Бернулли см. Бернулли теорема
— Кельвина о минимуме энергии 478
— — — циркуляции 345, 473
— Кристоффеля — Шварца 519
— о минимуме диссипации 290
— об окружности 524
Теоремы Гельмгольца 346
Теория несущей линии 714
— смазки 280
Теплоемкости главные 55
— — воды 729
— — воздуха 727
— — обычных жидкостей 86
— — совершенного газа 69
Теплоемкость 44
Теплопроводность 52
— движущейся жидкости 180
Термодиффузия 59
—, измеренные значения 731
Течение акустическое 452
— ациклическое 150
— безвихревое см. также Движение безвихревое
— — в двусвязной области 148
— — вблизи критической точки 142
— —, вызванное движением тонкого тела 570, 571
— в канале слабоизменяющейся формы 278
— — окрестности критической точки на твердой границе 360
— — приборе Хеле-Шоу 283
— — трубе поперечного сечения формы круговой 233
— — — — — — —, начало течения 249
— — — — — — прямоугольной 235
— — — — — — эллиптической 235
— внутри угла 286
Течение, вызванное вращением кругового цилиндра 260, 261
— — колебанием плоской границы 248
— — стоксовым препятствием («стокслетом») 306
— геострофическое 700
— гомоэнергетическое 210
— гомоэнтропическое 205
— двумерное 104
— Джеффри — Гамеля 370
— динамически подобное 272
— изэнтропическое 205, 216
— коническое 726
— неустановившееся одного направления 240
— осесимметричное 104
— — безвихревое 555
— — вихревое без закрутки 639
— — — с закруткой 669
— — цилиндрическое 668
— Пуазейля 233—235
— с линиями тока круговыми 258
— — — — свободными 607
— установившееся (стационарное) 104
— — в сужающемся и расширяющемся канале 370
— —, вызванное колеблющимся пограничным слоем 447
— — одного направления 232
— — относительно пары вихрей 654, 656
— центробежное на вращающемся диске 365
— циклическое 150
Тока линия 104
— трубка 104
— функция 14, 110
— — Стокса 112
Торричелли формула 483
Трение внутреннее 52
Труба Вентури 596
Турбулентность 240

Удар тела о свободную поверхность жидкости 582
Уравнение Ван-дер-Ваальса 73
— диффузии 57, 241
— завихренности 337
— количества движения 181
— — — в интегральной форме 182
— — —, приложение к безвихревому течению 481
— — —, примеры применения 463, 481

Уравнение Лапласа 138
— Навье — Стокса 193
— Озеена 306
— состояния 42
— — воды 85
— — совершенного газа 68
— сохранения массы 107
— теплопроводности 57, 241
— Фридмана — Крокко 209
Уравнения движения 181
— — в координатах полярных 737
— — — — сферических 736
— — — — цилиндрических 736
— — модели атмосферы или океана 697
— — ньютоновой жидкости 194, 226
— — относительно подвижных осей 183
— определяющие 56
Ускорение 105
— в криволинейных координатах 734
— элемента жидкости 105
Условие несжимаемости 218, 219
— отрыва пограничного слоя 411
— отсутствия скольжения 196
Условия на свободной границе двух сред 198
—, при которых поле скоростей можно считать соленоидальным 218
Установившееся вращение области завихренности 654, 655
— течение см. Течение установившееся

Фазы конденсированные 81
Физические свойства чистой воды 728
Фильтрация через пористую среду 285
Формула Торричелли 483
Формулы Чаплыгина — Блазиуса 537
Функции гармонические 138
— сферические объемные 162
— — поверхностные 162
Функция векторная безвихревая 115
— тока 14, 110
— — Стокса 112

Хеле-Шоу прибор 283, 284
Хилла вихрь сферический 645, 661
Хорда профиля 551, 576

Центр давления 554
Циклическая постоянная 149
Циклическое течение 150
Циклон 701
Циркуляция скорости 129
— —, влияние на нее вязкости 340
— —, постоянство в невязкой жидкости 345

Чаплыгина — Блазиуса формулы 537
Число кавитации 595, 605
— Лошмидта 61
— Маха 219
— Прандтля 727
— Рейнольдса 240, 272, 274
— Россби 682
— Струхаля 276, 441
— Фруда 272
Чисто деформационное движение 114

Экмана слой во вращающейся жидкости 251
— — на свободной поверхности 253
— — — твердой границе 256, 369
Элемент жидкости 103
— —, скорость изменения 174
Эллипсоид вращения, вызываемое его движением безвихревое течение 562
Эллиптическая нагрузка на крыло 719
Эллиптические координаты 532, 562
Эллиптический цилиндр, вызываемое его движением безвихревое течение 530
Энергия внутренняя см. Внутренняя энергия
— кинетическая см. Кинетическая энергия
— свободная см. Свободная энергия
Энтальпия 47
— совершенного газа 69
— торможения 210
Энтропия 46
— совершенного газа 69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА (5)

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ (8)

ПРЕДИСЛОВИЕ (9)

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ (14)

ГЛАВА 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ (17)

1.1. Твердые тела, жидкости и газы (17) 1.2. Гипотеза сплошной среды (21) 1.3. Объемные и поверхностные силы, действующие на жидкость (24) 1.4. Механическое равновесие жидкости (34) 1.5. Классическая термодинамика (41) 1.6. Явления переноса (50) 1.7. Отличительные свойства газов (61) 1.8. Отличительные свойства жидкостей (81) 1.9. Условия на границе между двумя средами (90)

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ (103)

2.1. Основные понятия (103) 2.2. Сохранение массы (106) 2.3. Анализ относительного движения в окрестности точки (113) 2.4. Распределение скоростей при заданных скорости расширения и завихренности (119) 2.5. Особенности скорости расширения. Источники и стоки (123) 2.6. Распределение завихренности (127) 2.7. Распределения скорости при нулевой завихренности и нулевой скорости расширения (136) 2.8. Безвихревое соленоидальное течение в двусвязных областях пространства (147) 2.9. Трехмерные поля течения, простирающиеся в бесконечность (154) 2.10. Двумерные поля течения, простирающиеся в бесконечность (165)

ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ (174)

3.1. Интегралы по объему движущейся жидкости (174) 3.2. Уравнение движения (181) 3.3. Выражение для тензора напряжений (186) 3.4. Изменение внутренней энергии движущейся жидкости (198) 3.5. Теорема Бернулли для установившегося течения невязкой и нетеплопроводной жидкости (205) 3.6. Полная система уравнений движения жидкости (215) 3.7. Заключительные замечания к первым трем главам (223)

ГЛАВА 4. РАВНОМЕРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (226)

4.1. Введение (226) 4.2. Установившееся течение одного направления (232) 4.3. Неустановившееся течение одного направления (240) 4.4. Слой Экмана на границе вращающейся жидкости (251) 4.5. Течение с круговыми линиями тока (258) 4.6. Установившаяся струя из точечного источника количества движения (264) 4.7. Динамическое подобие и число Рейнольдса (271) 4.8. Поля течений, в которых силы инерции пренебрежимо малы (277) 4.9. Течение, вызываемое движением тела при малых числах Рейнольдса (292) 4.10. Уточненное уравнение Озеена для течения при малом числе Рейнольдса (306) 4.11. Вязкость разбавленной суспензии из малых частиц (313) 4.12. Изменения в обтекании тел при возрастании числа Рейнольдса от 1 до 100 (324)

ГЛАВА 5. ТЕЧЕНИЕ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА; ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОСТИ (334)

5.1. Введение (334) 5.2. Динамика завихренности (336) 5.3. Теорема Кельвина о циркуляции и законы распространения завихренности для невязкой жидкости (345) 5.4. Возникновение завихренности при движениях жидкости из состояния покоя (350) 5.5. Установившиеся течения, в которых диффузия завихренности, возникающей на твердой границе, ограничивается за счет конвекции (356) 5.6. Установившееся двумерное течение в сужающемся или расширяющемся канале (370) 5.7. Пограничные слои (380) 5.8. Пограничный слой на плоской пластине (387) 5.9. Эффекты ускорения и замедления внешнего потока (394) 5.10. Отрыв пограничного слоя (407) 5.11. Течение при установившемся движении тел в жидкости (414) 5.12. Струи, свободные слои смешения и следы (429) 5.13. Колеблющиеся пограничные слои (441) 5.14. Течения со свободными поверхностями (454) 5.15. Примеры применения теоремы о количестве движения (463)

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ БЕЗВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ (471)

6.1. Роль теории течения невязкой жидкости (471) 6.2. Общие свойства безвихревого течения (474) 6.3. Установившееся течение; некоторые приложения теоремы Бернулли и теоремы о количестве движения (481) 6.4. Общие свойства безвихревого течения, обусловленного движущимся твердым телом (495) 6.5. Использование комплексного потенциала в случае двумерного безвихревого течения (509) 6.6. Двумерное безвихревое течение, вызванное движущимся цилиндром с циркуляцией (526) 6.7. Двумерные профили (538) 6.8. Осесимметричное безвихревое течение, вызванное движением тела (555) 6.9. Приближенные результаты для тонких тел (570) 6.10. Импуль-

сивное движение жидкости (580) 6.11. Большие пузыри газа в жидкости (584) 6.12. Кавитация в жидкости (593). 6.13. Теория течений со свободными линиями тока, установившиеся струи и каверны (607).

ГЛАВА 7. ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНО НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (623)

7.1. Введение (623) 7.2. Течение неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности (635) 7.3. Двумерное течение неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности (646) 7.4. Установившееся двумерное вихревое движение жидкости (658) 7.5. Установившееся осесимметричное течение с закруткой (667) 7.6. Жидкие системы, вращающиеся как целое (680) 7.7. Движение жидкости в тонком слое на вращающемся шаре (694) 7.8. Вихревая система крыла самолета (710)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Измеренные значения некоторых физических параметров различных жидкостей (727)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выражения для некоторых векторных дифференциальных величин в ортогональных криволинейных координатах (732)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (739)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ (744)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ (747)

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2. издательство «Мир».

ДЖ. БЭТЧЕЛОР

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ЖИДКОСТИ

Редакторы Г. М. Ильичева и А. С. Попов
Художник А. Г. Антонова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор В. П. Сизова

Сдано в набор 30/I 1973 г.
Подписано к печати 31/VII 1973 г.
Бумага тип № 1 $60\times90^{1}/_{16}$=24,75 бум. л.
49,5 печ. л. в т. ч. 2 п. л. иллюстраций.
Уч.-изд. л. 49,1. Изд. № 1/5963
Цена 3 р. 79 к. Зак. 0872

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9

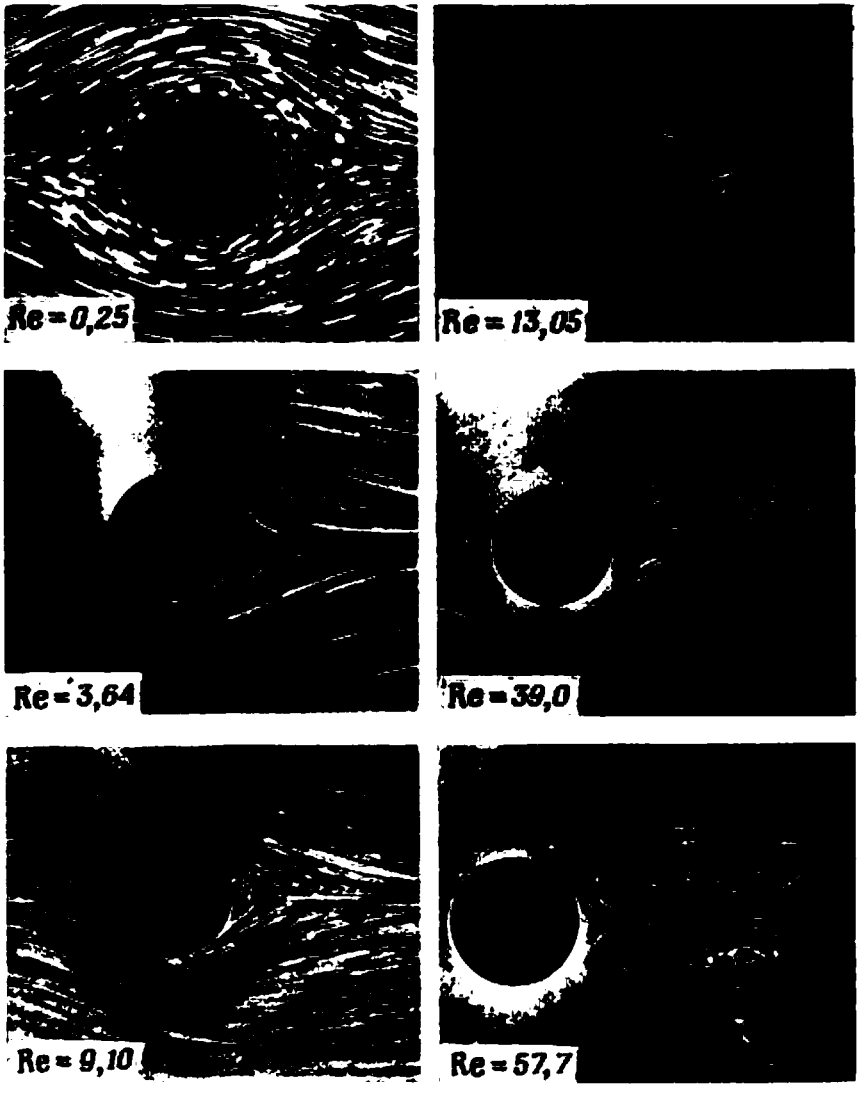


Фото 4.12.1. Линии тока установившегося течения (слева направо) около кругового цилиндра радиуса a ($\mathrm{Re} = 2aU/\nu$). Фотография при $\mathrm{Re} = 0{,}25$ (из книги Прандтля и Титьенса (1935)) показывает движение твердых частиц на свободной поверхности, а на остальных фотографиях (из работы Танеда (1956а)) видны частицы, освещенные в потоке в одной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

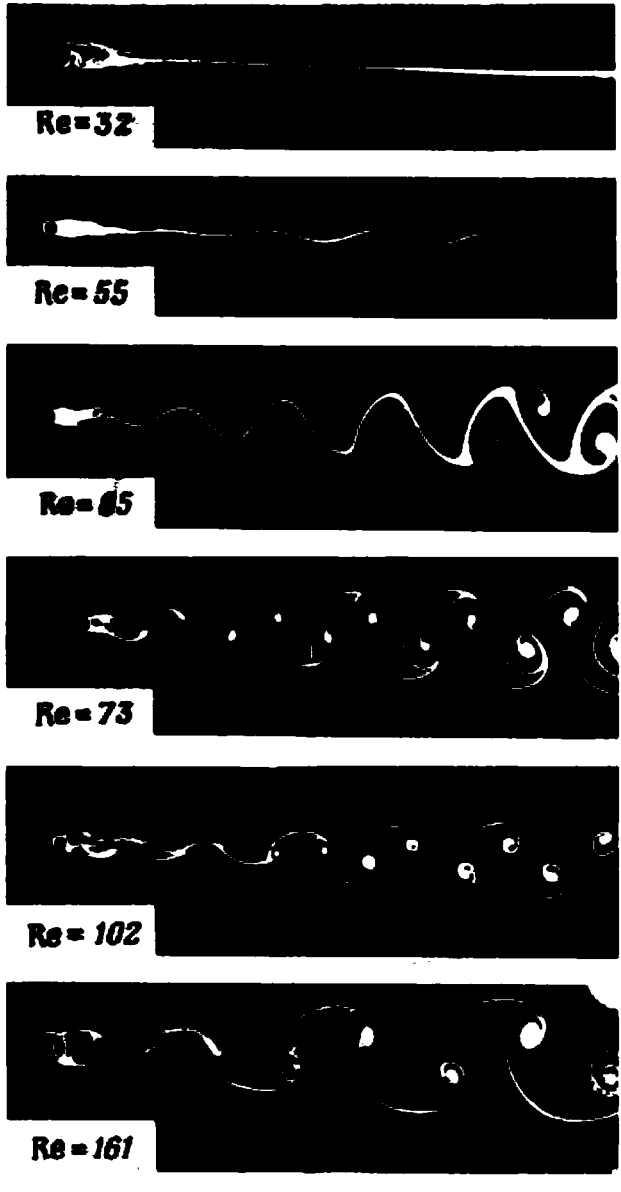


Фото 4.12.6. Линии отмеченных частиц в следе за круговым цилиндром в потоке масла (Хоман (1936а)).

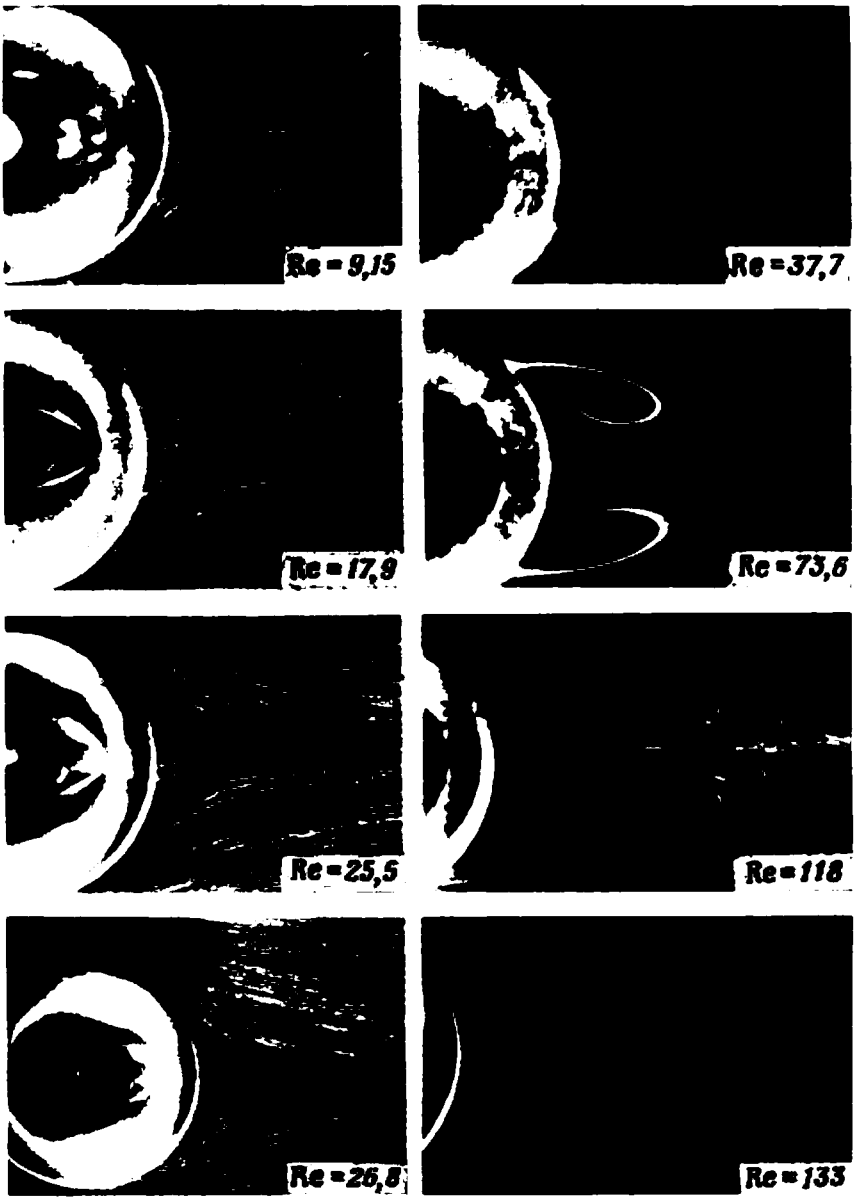


Фото 4.12.8 Линии тока в осевой плоскости установившегося течения (слева направо) около сферы радиуса a (Танеда (1956б)); $\mathrm{Re} = 2aU/\nu$.

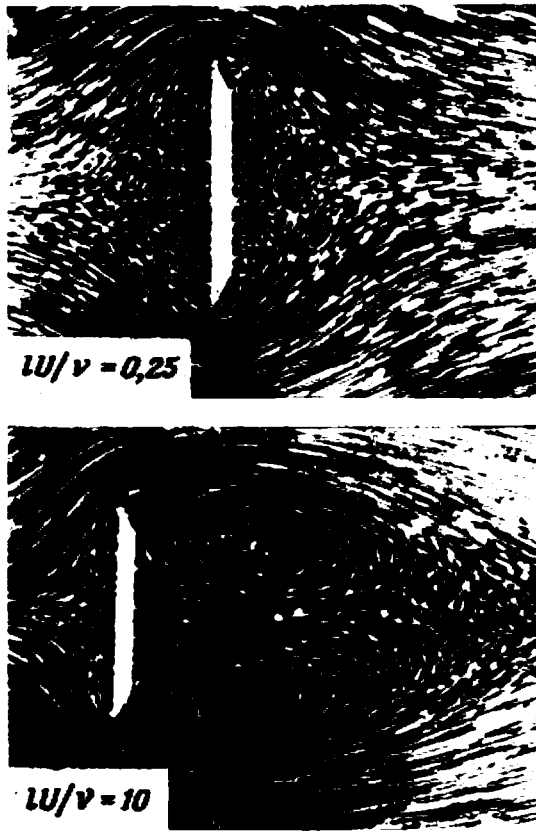


Фото 4.12.10. Линии тока течения (слева направо) около плоской пластины длины l, помещенной поперек потока и по потоку (Прандтль и Титьенс (1935)).

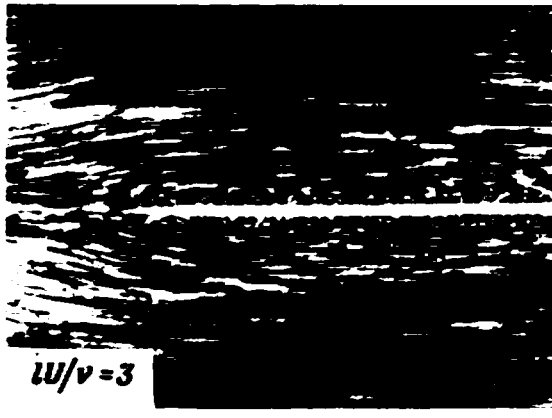


Фото 4.12.10. Продолжение.

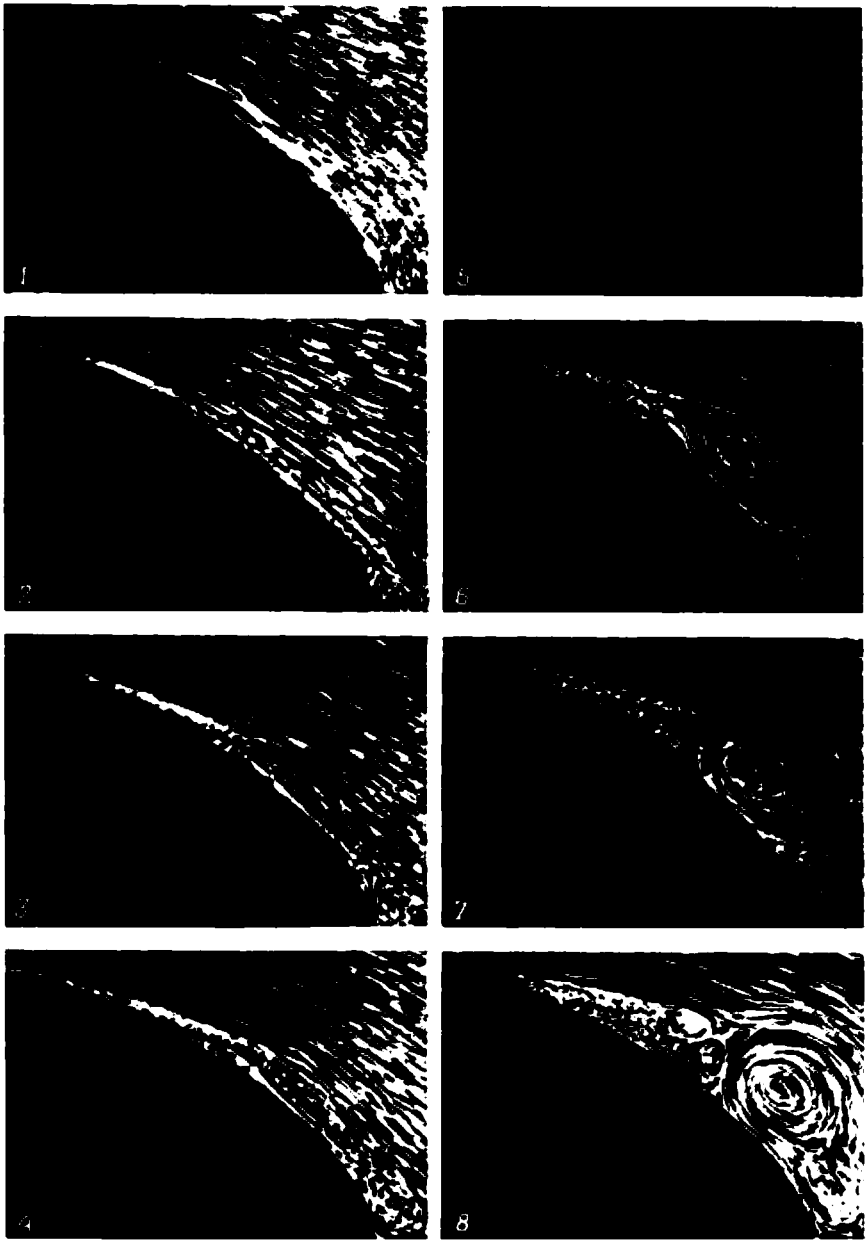


Фото 5.9.3. Последовательные стадии нарастания пограничного слоя на кормовой части плохообтекаемого тела, которое начало двигаться из состояния покоя. Наблюдатель неподвижен относительно тела; движение жидкости происходит слева направо (Прандтль и Титьенс (1935)).

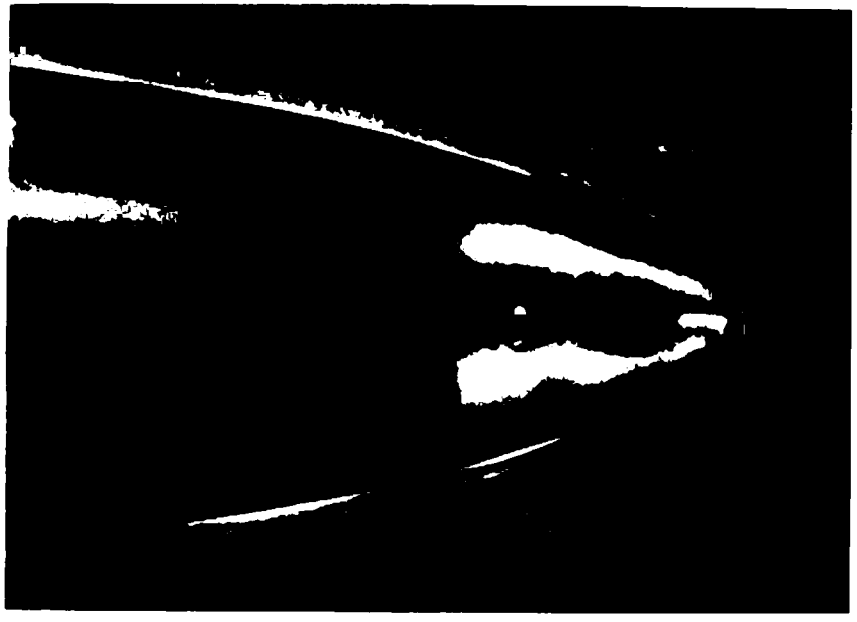


Фото 5.10.1. Отрыв установившегося пограничного слоя на кормовой части поверхности тела вращения в потоке воды. Число Рейнольдса (по длине тела) равно $1{,}3 \cdot 10^6$. Поверхность воды, являющаяся плоскостью симметрии тела, была сделана видимой с помощью алюминиевого порошка (Клаттер, Смит и Брэшер (1959)).

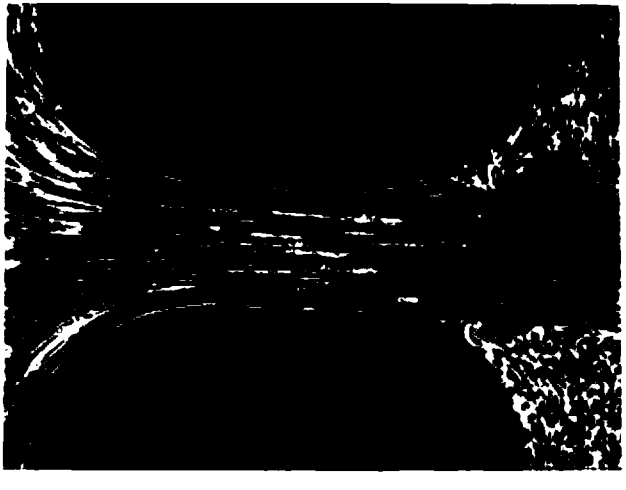


Фото 5.10.2. Линии тока течения в канале, который сначала сужается, а потом расширяется (Фёттингер (1939)).

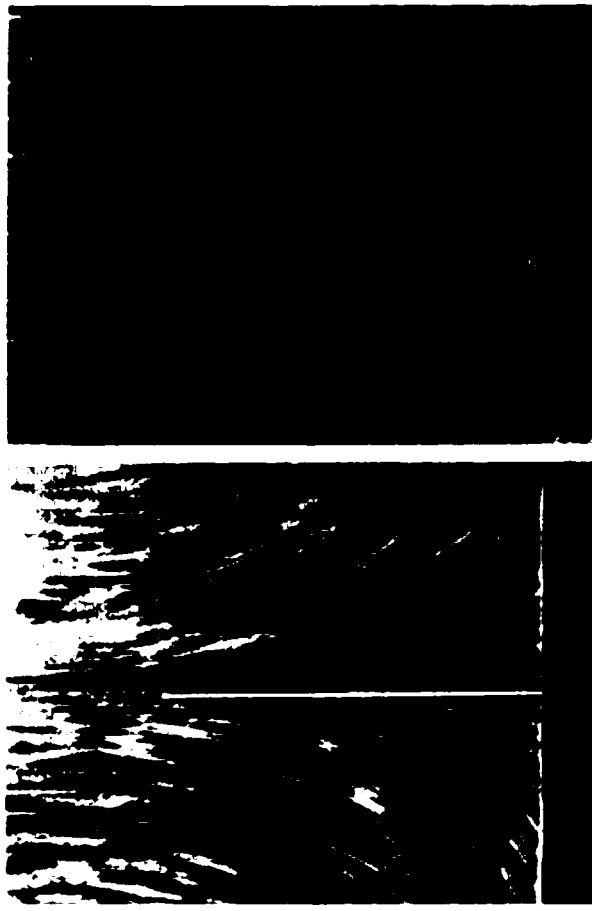


Фото 5.10.3. Течение в окрестности критической точки на стенке; на нижней фотографии в плоскости симметрии течения помещена тонкая пластинка (Фёттингер (1939)).

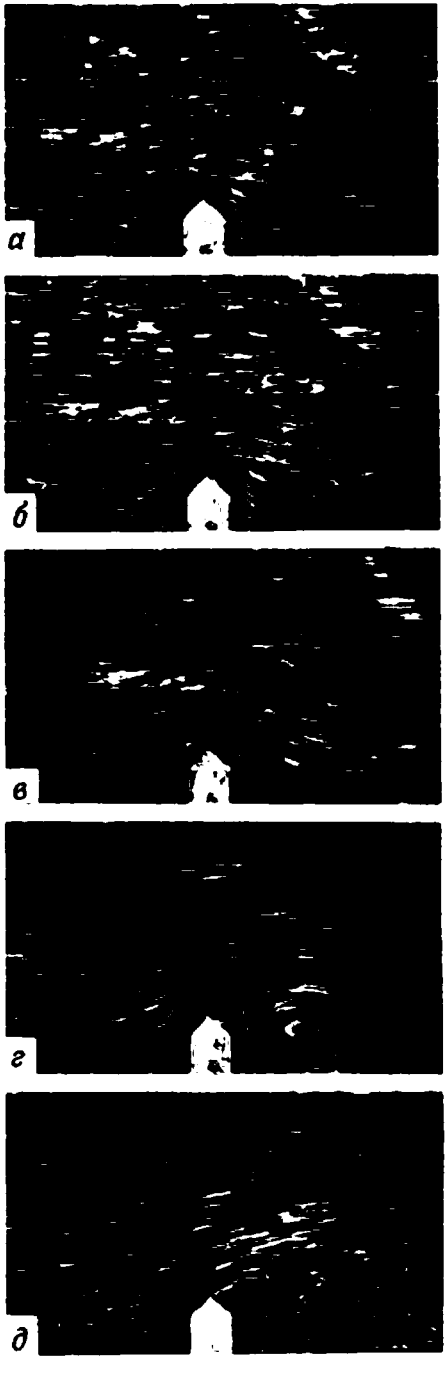


Фото 5.10.6. Последовательные стадии развития течения (слева направо) из состояния покоя за моделью дома (Нёйкентвед (1932)).

Фото 5.10.5. Серия теневых фотографий, сделанных через интервалы времени около $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ сек (между последними двумя снимками интервал времени удвоен), показывающая положение пара, сходящего с поверхности осесимметричного тела с точкой излома; тело из состояния покоя приведено в движение в воздухе с постоянной скоростью 731 см/сек. На правой стороне каждого снимка указана неподвижная шкала с делениями через 0,63 см (Пирс (1961)).

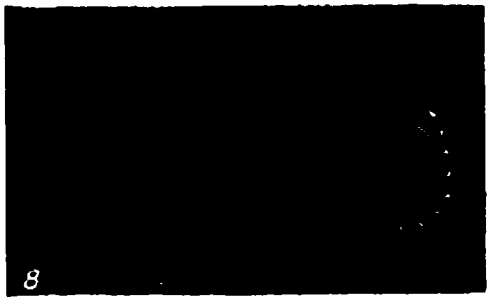


Фото 5.10.5. Продолжение.

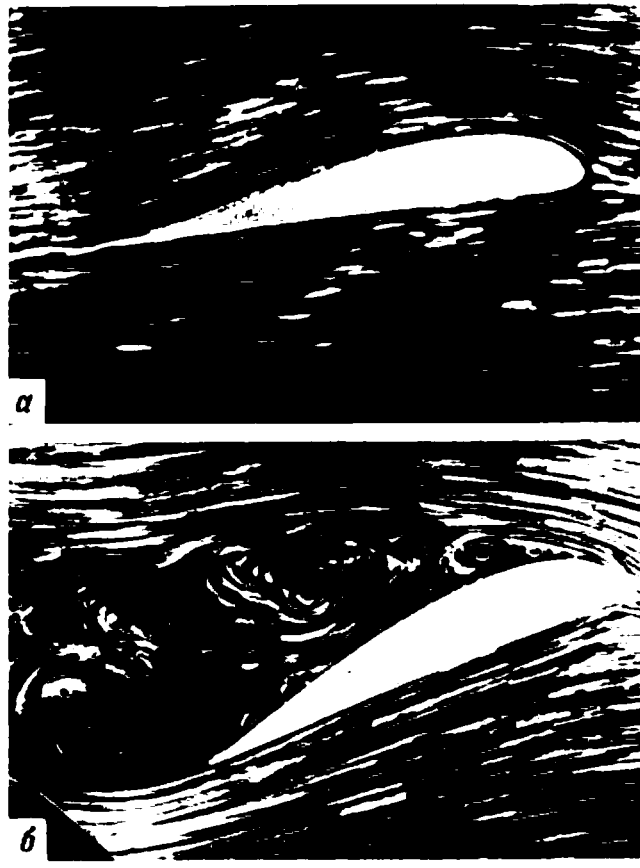
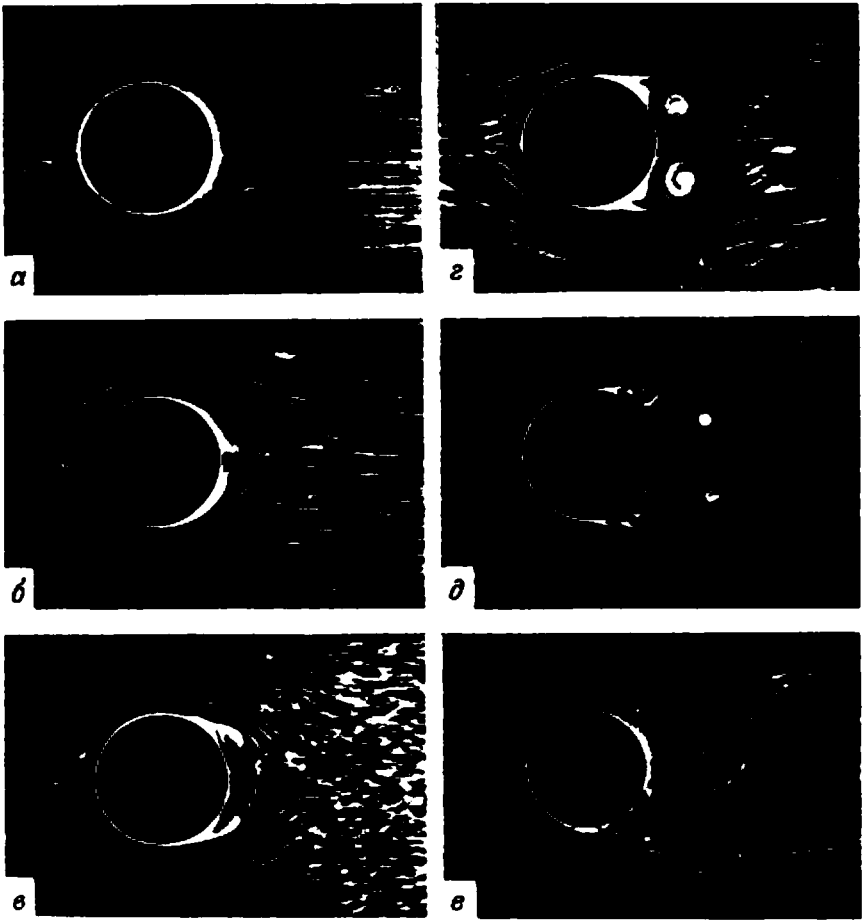


Фото 5.11.1. Обтекание профиля потоком, движущимся справа налево: *а* — профиль расположен почти по потоку, *б* — профиль расположен под большим углом атаки (Пёшль, Эвальд и Прандтль (1933)).



Ф о т о 5.11.3. Последовательные стадии развития течения (слева направо) из состояния покоя за круговым цилиндром. Скорость течения была быстро увеличена, а затем поддерживалась постоянной (Прандтль (1927)).

Фото 5.11.4. «Вихревая дорожка» в следе кругового цилиндра, движущегося с постоянной скоростью при $Re = 1{,}93 \cdot 10^4$. Для наблюдения потока на поверхности воды был насыпан алюминиевый порошок; цилиндр двигался слева направо относительно покоящейся фотокамеры (поэтому на снимке он получился в виде размытой полоски) (Клаттер, Смит и Брэзиер (1959)).

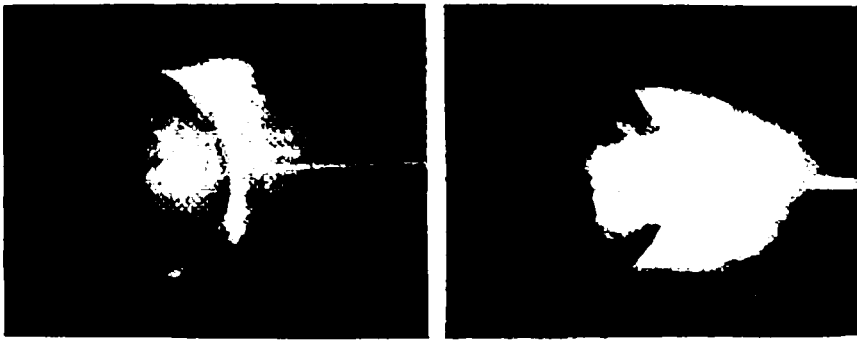


Фото 5.11.7. Дым, выпускаемый на кормовой части сферы, обтекаемой слева направо. Фотография справа показывает влияние на пограничный слой возмущения, вносимого проволочным кольцом (Визельсбергер (1914)).

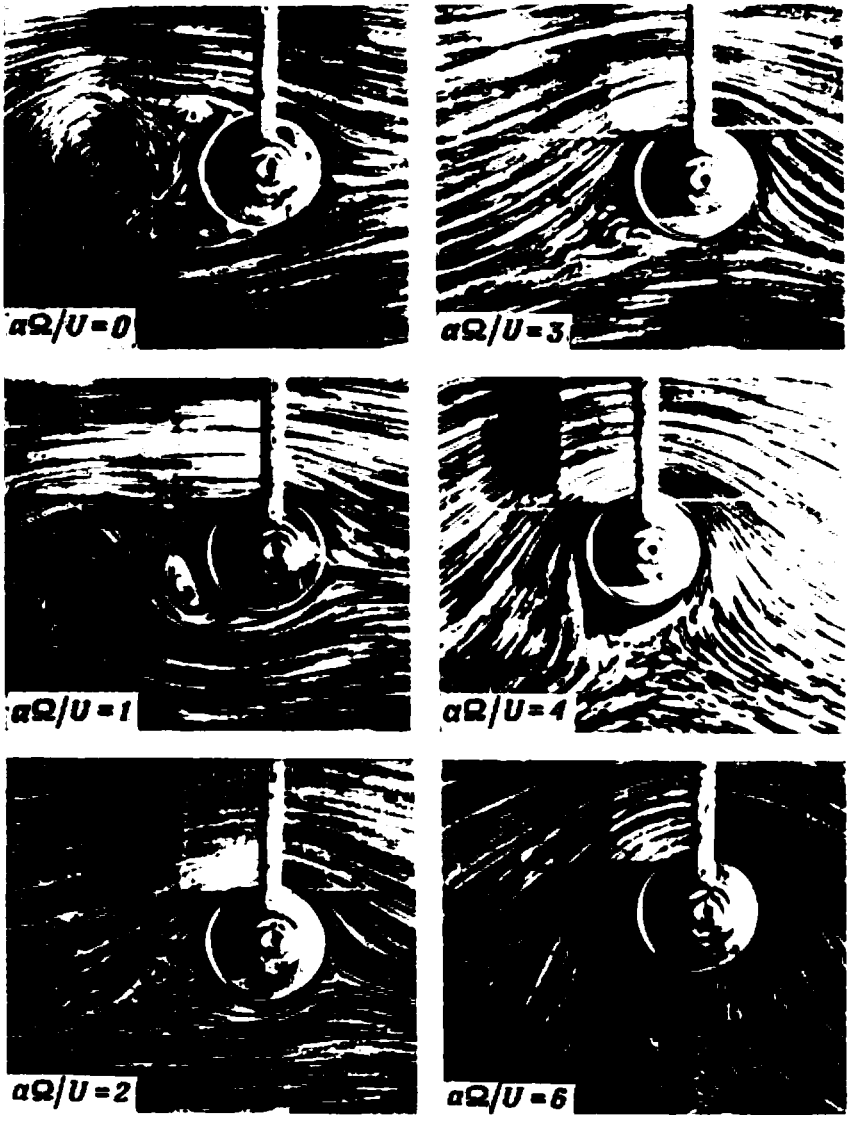


Фото 6.6.2. Фотографии линий тока при обтекании твердого цилиндра, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью Ω, потоком (справа налево) с постоянной скоростью U на бесконечности (Прандтль и Титьенс (1935)).

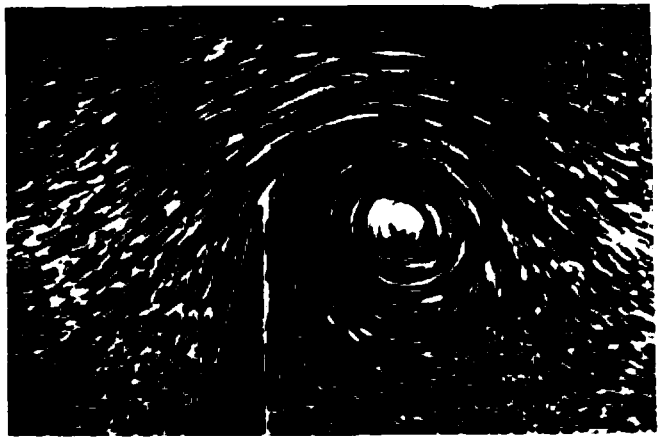


Фото 6.7.2. Течение (слева направо) около острой кромки тела вскоре после начала движения (Прандтль и Титьенс (1935)).

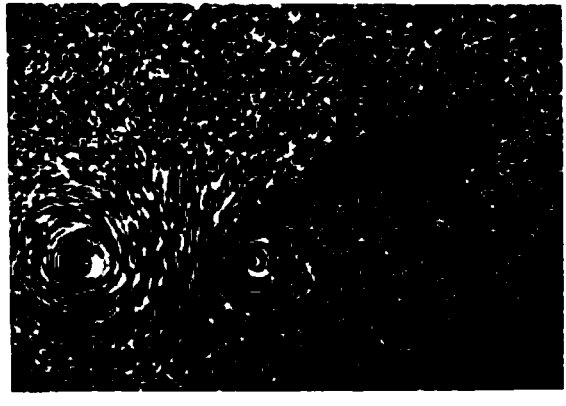


Фото 6.7.6. Вихри, сходящие с профиля, который из состояния покоя был внезапно приведен в равномерное движение, а затем внезапно остановлен (Прандтль и Титьенс (1935).

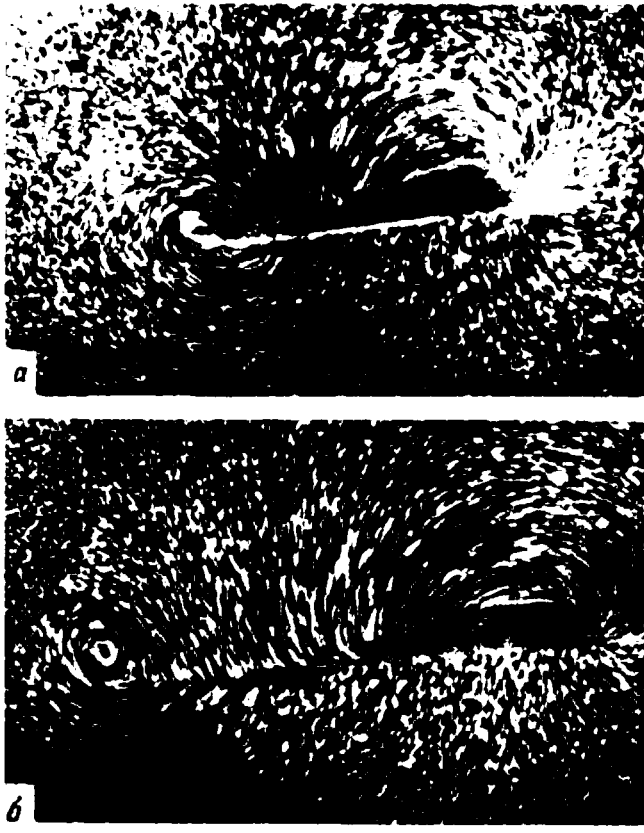


Фото 6.7.5. Линии тока течения, создаваемого движущимся профилем в неподвижной жидкости: *а* — вскоре после начала движения профиля (слева направо); *б* — после равномерного перемещения профиля по потоку приблизительно на длину хорды. Завихренность, сходящая с кормовой кромки, концентрируется в отчетливо видный вихрь (Прандтль и Титьенс (1935)).

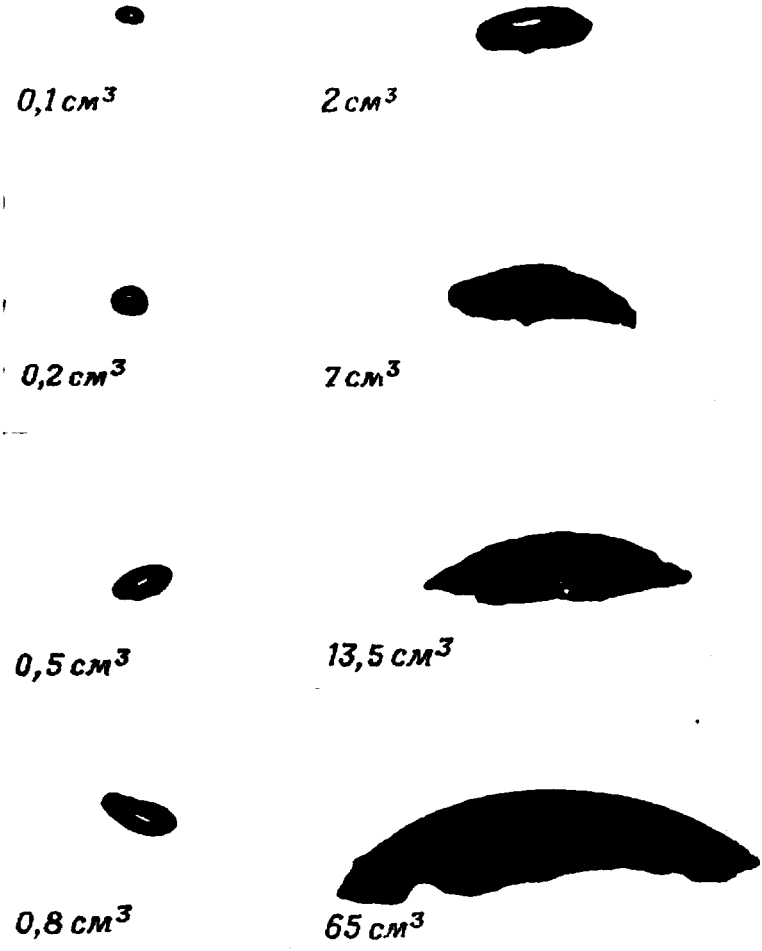


Фото 6.11.1. Пузыри воздуха, поднимающиеся в воде. Объем пузыря указан на каждой фотографии (Джонс (1965)).

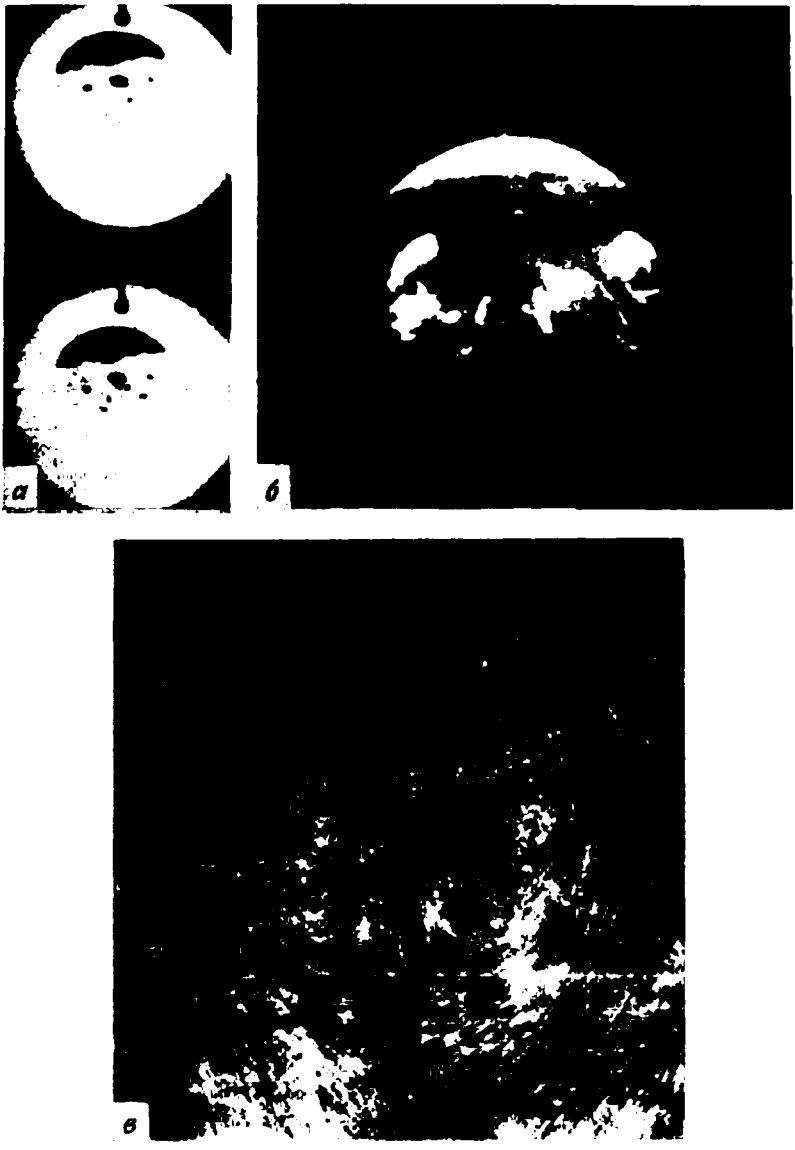


Фото 6.11.2. Фотографии больших пузырей газа, показывающие структуру следа за ними: *а* — искровые фотографии пузыря воздуха в нитробензоле, радиус $R \approx 3$ см, скорость $U \approx 37$ см/сек (Дэвис и Тейлор (1950)); *б* — пузырь воздуха в воде, радиус $R \approx 5$ см, скорость $U \approx 45$ см/сек (неопубликованная фотография Р. Коллинза); *в* — «двумерный» пузырь воздуха в воде между параллельными пластинами, расположенными на расстоянии 6 мм, радиус $R \approx 7$ см, скорость $U \approx 40$ см/сек (Коллинз (1965)). Фотографии *б* и *в* были сделаны камерой, неподвижной относительно пузыря, и с использованием твердых частиц для визуализации потока. На фотографиях *а* и *б* пузырь и жидкость, движущаяся вместе с ним, приблизительно ограничены сферой, а на фотографии *в* — окружностью.

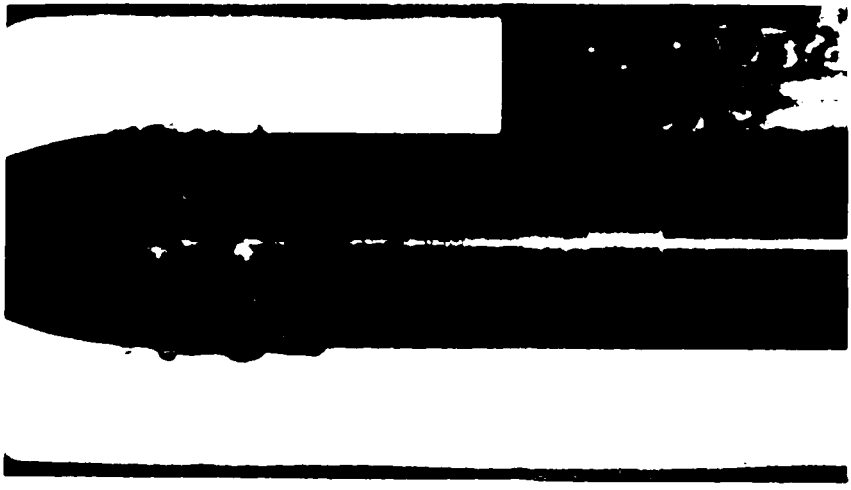


Фото 6.12.1. Образование каверн при обтекании (слева направо) осесимметричного тонкого тела в гидродинамической трубе при $K = 0{,}26$ (Кинн (1962)).

Фото 6.12.2. Кавитация, создаваемая винтом, который вращается в потоке воды (справа налево). *а* — каверна возникает внутри концевого вихря от каждой из трех лопастей; *б* — при более высоких скоростях вращения и потока на стороне разрежения каждой лопасти также наблюдается каверна, объем которой достаточно велик, чтобы влиять на распределение давления по лопасти.

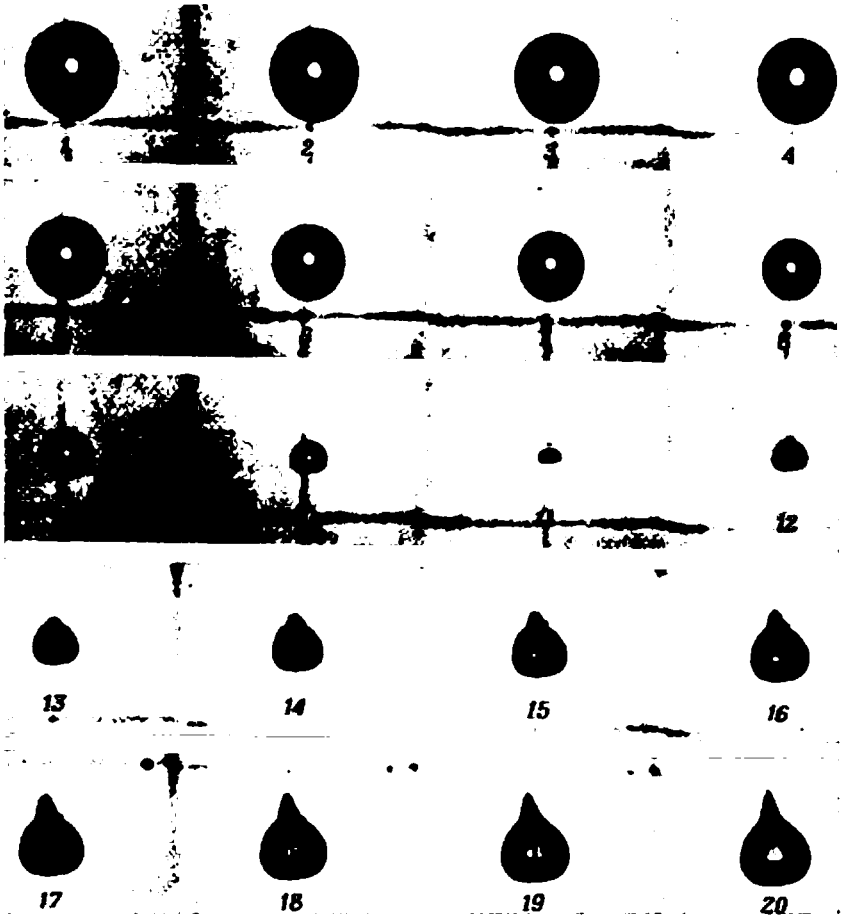


Фото 6.12.3. Фотографии (через интервалы времени $2 \cdot 10^{-4}$ сек) схлопывающейся каверны в неподвижном сосуде с водой. Каверна была образована путем быстрого растяжения воды с малым пузырьком газа, выделенным путем электролиза, в качестве ядра. В течение периода времени, охватываемого снимками, разность давлений $p_0 - p_\infty$ поддерживалась равной 0,051 атм. Средний радиус каверны на первом снимке равен 0,69 см, а минимальный ее объем достигается между 10-м и 11-м снимками. Снимки с 11 по 20 показывают повторное расширение с характерной несферической формой (неопубликованные фотографии Бенджамена и Эллиса).

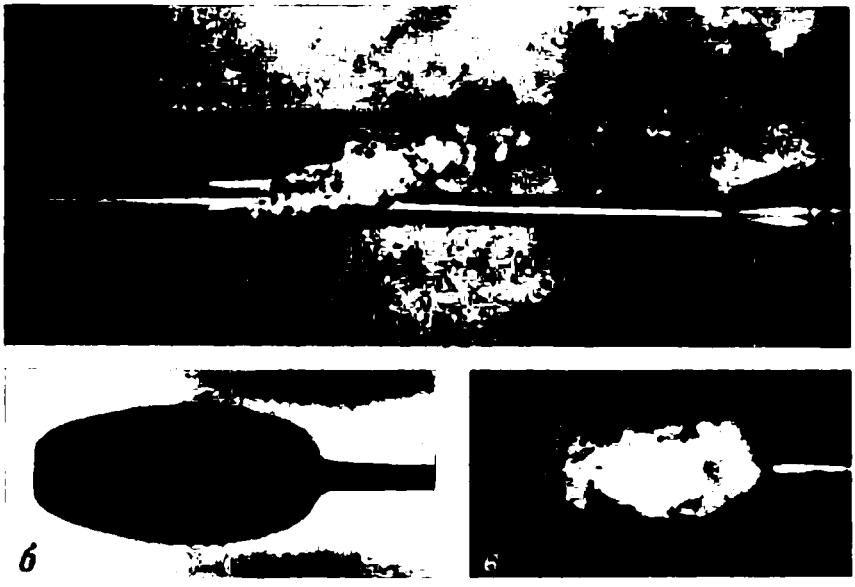


Фото 6.12.5. Стационарные каверны при $K = 0{,}19$ за круговым диском, расположенным нормально к потоку воды: *а* — давление в каверне поддерживается путем непрерывного подвода воздуха в каверну; *б* и *в* — каверны без подвода воздуха. Снимок *б* получен с выдержкой 2 сек, а снимок *в* — с выдержкой 10^{-4} сек. Асимметрия кормовой части каверны объясняется влиянием плавучести (фотографии ВМС США).

Фото 6.12.7. Фотографии сферы диаметром 22 см, входящей в воду со скоростью 64 см/сек: *а* — гладкая поверхность; *б* — в передней части сферы имеется небольшой участок песочной шероховатости, которая предположительно турбулизирует пограничный слой на сфере (фотографии ВМС США). Сравните с аналогичным эффектом в потоке без каверны, фото 5.11.7.

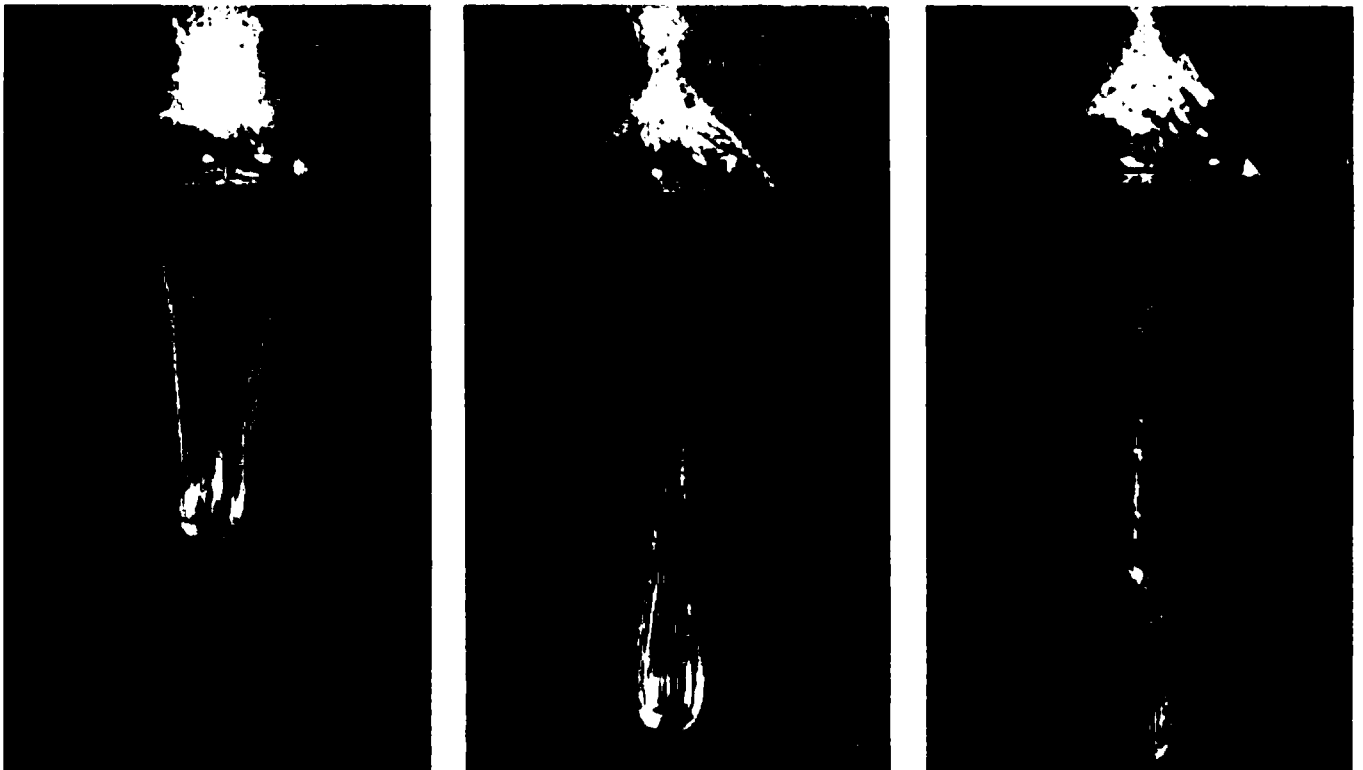


Фото 6.12.6. Каверна, образующаяся во время входа в воду сферы диаметром 9,9 см при скорости 830 см/сек (фотография ВМС США).

Фото 7.2.2. Различные стадии развития вихревых колец, образованных в воде при инжектировании малых количеств подкрашенной жидкости (по плотности близкой к воде) из стеклянной трубки кругового сечения с внутренним диаметром 1,5 см. На последнем снимке в центре вихревого кольца находится чистая вода, хотя это и незаметно при наблюдении сбоку (Онабе и Иноуэ (1960)).

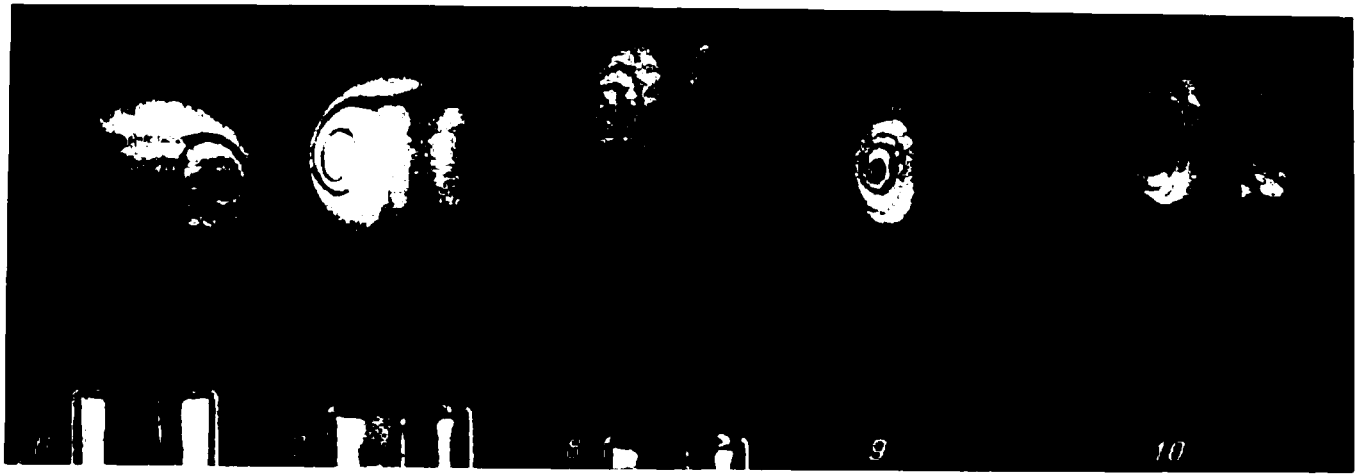


Фото 7.3.2. Продолжение.

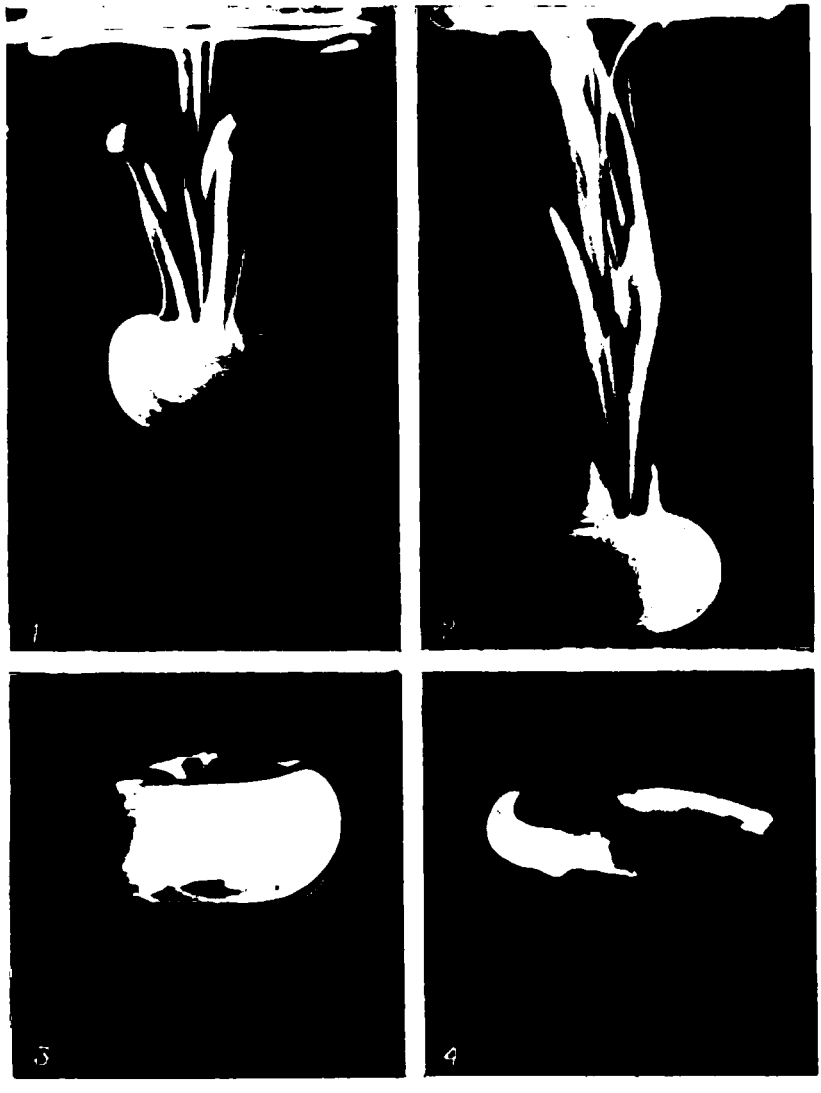


Фото 7.2.3. Различные стадии развития вихревых колец, образованных в воде при вертикальном падении капель подкрашенной жидкости с конца пипетки, расположенного на расстоянии 1 см над свободной поверхностью (Окабе и Иноуэ (1961)).

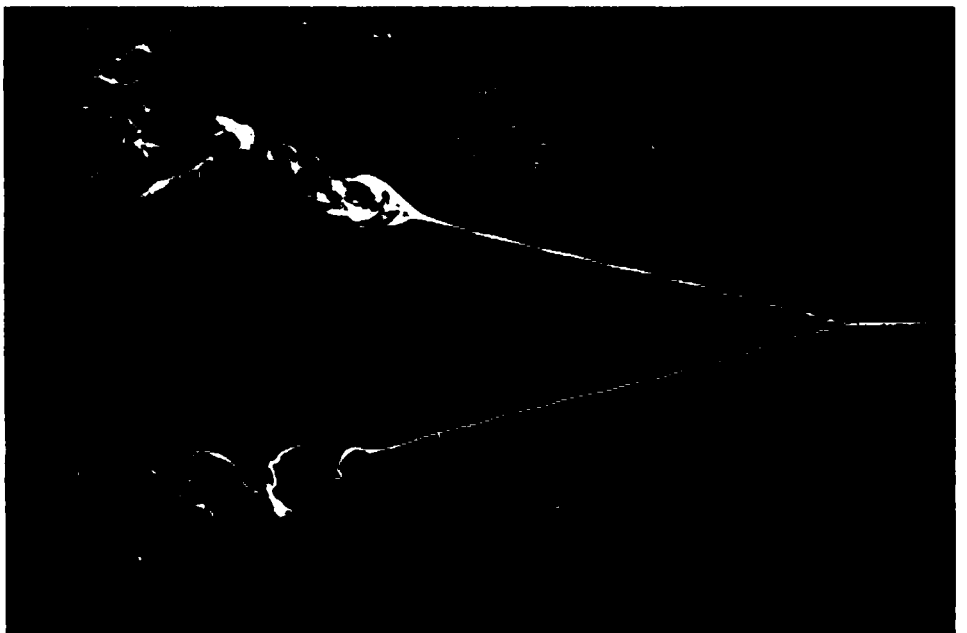


Фото 7.5.7. «Взрыв» вихрей в воде. Две полоски краски располагаются вдоль осей интенсивных вихрей, сходящих с боков треугольного крыла (Лэмбурн и Брайер (1962)).

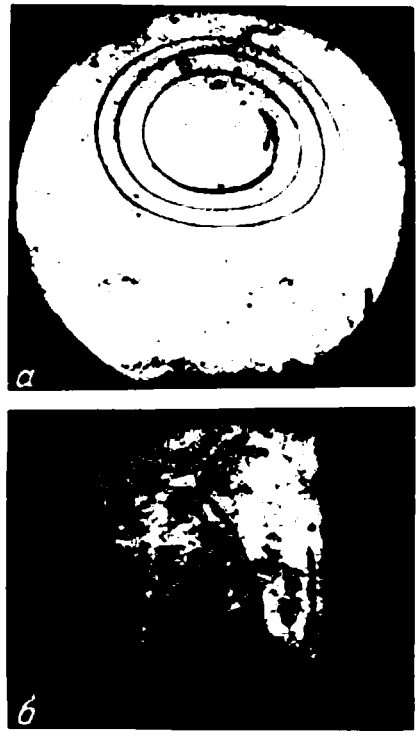


Фото 7.6.2. Фотографии капли окрашенной жидкости, которая вытянулась в тонкую пленку, параллельную оси вращения, что свидетельствует о двумерном характере движения. Медленное движение относительно вращающейся системы координат было получено путем небольшого изменения скорости вращения круглого сосуда (а) и прямоугольной ванночки (б). Фотокамера расположена на оси вращения (Тейлор (1921)).

Фото 7.6.3. Движение во вращающемся сосуде с водой глубиной 4 дюйма, вызванное медленным перемещением кругового цилиндра E высотой 1 дюйм справа налево по дну сосуда (вид сверху).

а — краска выпущена в (движущейся) точке A жидкости, расположенной выше цилиндра и прямо по потоку впереди него; B — точка разделения краски; точки C и D — места последующего расположения краски; F — державка цилиндра;

б — краска выпущена в точке A, расположенной над цилиндром; краска остается внутри пятна D. Ясно, что течение двумерное (Тейлор (1923)).

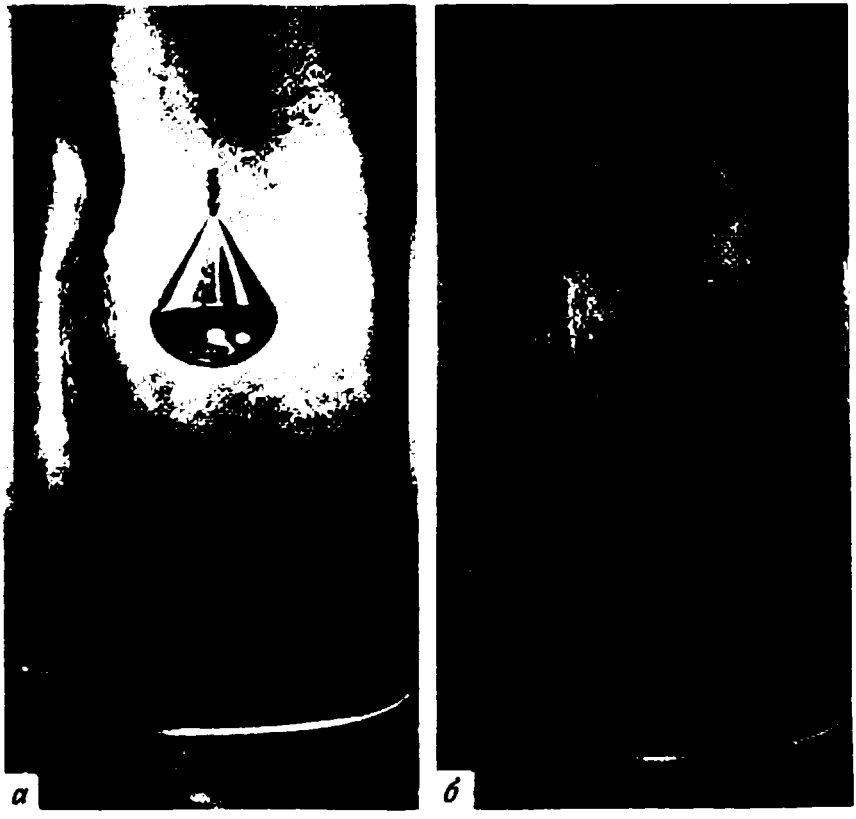

а
б

Фото 7.6.5. Волны, порожденные телом, движущимся вдоль оси вращения воды в цилиндре радиуса b, становятся видимыми при падении крупинки марганцевокислого калия непосредственно перед опускающимся телом. Волны стационарны относительно тела. *а* — видно, что волновое движение происходит ниже по потоку от тела; *б* — $U/b\Omega=0{,}306$; возможна только одна форма свободного колебания с длиной волны $1{,}19b$; *в* — $U/b\Omega=0{,}163$; возможны три формы свободных колебаний с длинами волн $0{,}54b$, $0{,}62b$ и $0{,}92b$ (Лонг (1953)).

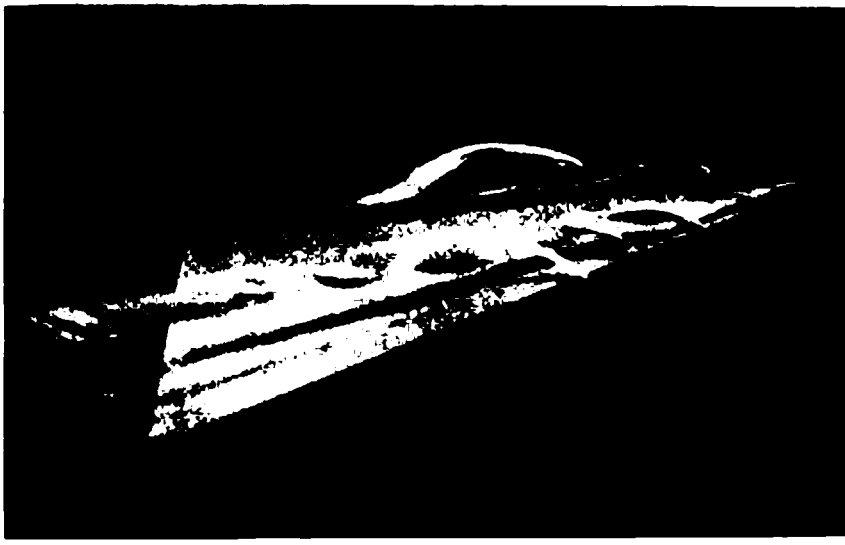


Фото 7.8.6. Течение вблизи верхней поверхности дельтавидного крыла при угле атаки 12° (Верле (1961)).