Г. БИРКГОФ

ГИДРОДИНАМИКА



HYDRODYNAMICS

A STUDY IN LOGIC, FACT AND SIMILITUDE

Revised edition

by

GARRETT BIRKHOFF

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1960

Г. БИРКГОФ

ГИДРОДИНАМИКА

МЕТОДЫ. ФАКТЫ. ПОДОБИЕ

Перевод со второго переработанного английского издания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией
М. И. ГУРЕВИЧА и В. А. СМИРНОВА

Предисловие
Л. И. СЕДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

Первое издание книги известного американского математика Г. Биркгофа, вышедшее в 1950 г., было переведено на русский язык (Издательство иностранной литературы, 1954 г.) и заслужило всеобщее признание советских ученых. За десять лет, отделяющих выход первого и второго английских изданий, в исследовании движений жидкости и газа был достигнут значительный прогресс, и второе издание «Гидродинамики» представляет собой существенно измененную книгу, содержащую много новых и важных результатов.

Автор по-новому анализирует и систематически излагает некоторые весьма интересные особенности логических посылок и математических постановок задач гидромеханики, а также устанавливает связи этих посылок и постановок с практикой и наблюдениями. На многих примерах он показывает, как опыт способствует развитию теории, требуя ее постоянного усовершенствования, и как теория, усложняя и видоизменяя свои методы, объясняет физическую сущность наблюдаемых явлений.

Книга представляет несомненный интерес не только для специалистов в области гидродинамики (научных работников и инженеров), но и для широкого круга математиков. Она вполне доступна студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ
К ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Цель предлагаемой книги состоит не в решении частных задач гидромеханики и не в получении каких-либо новых конкретных выводов по существу конкретных явлений, а также не в сообщении отдельных результатов, полезных для приложений. Ее автор Г. Биркгоф, математик, известный своими работами в весьма отвлеченных областях алгебры и топологии, поставил себе целью проанализировать и систематически изложить некоторые интересные особенности логических посылок и математических постановок задач гидромеханики, а также проследить связи этих посылок и постановок с практикой и наблюдениями в природе. Кроме этого, в книге содержатся замечания о некоторых предельных переходах, применяемых в гидромеханике.

Собрание и рассмотрение так называемых парадоксов любопытно само по себе и является весьма полезным для понимания особенностей теоретической гидромеханики и ее связи с экспериментом. Разъяснение парадоксов позволяет понять смысл многих гидромеханических теорий и вскрывает важные физические особенности описываемых движений.

Так, хорошо известно, какую большую роль сыграл в гидродинамике парадокс Эйлера — Даламбера. Исследование этого парадокса способствовало установлению общих свойств возмущений, вызываемых в жидкости движением твердого тела, а также выяснению механизма влияния вязкости жидкости в зависимости от формы обтекаемого тела и ряда других эффектов.

С помощью математических абстракций мы приходим в теоретической гидродинамике к постановкам задач, содержащим помимо соотношений, выводимых из общих уравнений, еще дополнительные специальные гипотезы, позволяющие выделить те решения, которые отражают влияние физических факторов, не учитываемых принятой схемой (эффект вязкости в теории идеальной жидкости, учет кавитации в теории непрерывных потоков, учет устойчивости движения вязкой жидкости при переходе от ламинарных потоков к турбулентным и т. п.). Нам представляется, что математический анализ таких гипотез, проведен-

ный в явной форме, заостряет внимание широких кругов специалистов, преподавателей и инженеров на идеях и методах, положенных в основу гидромеханики. Это особенно необходимо в настоящее время, когда к разработке проблем гидромеханики прилагаются усилия больших коллективов теоретиков и инженеров.

Углубленный логический анализ, привлекающий тонкие математические методы, всегда был основой развития теоретической гидромеханики. Именно поэтому русские ученые, основоположники гидромеханики, аэродинамики и газовой динамики, всегда были тесно связаны с математикой и являлись в ней видными специалистами. Напомним, что наши знаменитые ученые Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин были не только замечательными механиками, но и первоклассными математиками.

Теоретическое осмысливание различных реальных явлений связано с введением математических понятий и характеристик, для которых устанавливаются числовые методы расчета. В связи с этим теоретики всегда должны вводить схематизированные модели и процессы, с помощью которых формируются различного рода закономерности, описывающие с требуемой степенью точности свойства и события, происходящие с реальными телами.

Практики и экспериментаторы имеют дело с явлениями и эффектами в природе и в технике, которые происходят не только в соответствии с известными теоретическими представлениями, но и в соответствии с законами и с микро- или макромеханизмами, еще не открытыми или не учтенными в используемых теориях. Такое положение возникает очень часто.

Не более как пятьсот лет тому назад еще не существовало механики как науки, тогда как теперь механические расчеты являются основой для решения всех технических задач. Но еще более тысячи лет тому назад люди на практике умело использовали еще не открытые законы механики и опирались на них. Издавна при отсутствии механики как науки на практике успешно были разрешены многие довольно сложные технические задачи: по земле перемещались большие тяжести, строились сложные сооружения, было развито мореплавание и т. д. и т. п.

Нечто аналогичное происходит и в наше время, целесообразные действия практиков и экспериментаторов зачастую связаны с использованием и применением еще не осознанных и не открытых законов. Рациональная теория возникает и развивается в результате обобщения и осмысливания уже накопленного опыта, который в некоторых случаях добывается путем логической разработки существующих теорий.

Как известно, теоретическое описание может отразить действительные явления только в определенных границах и в некотором приближении. Ясное представление об этих границах и об истинном соответствии между теорией и действительностью является необходимым условием для овладения теорией и для ее правильного понимания. Столь же важно для понимания сущности вопроса хорошо представлять себе в каждом конкретном случае взаимодействие между теорией и экспериментом. В предлагаемой книге на многих гидромеханических примерах в наглядной и поучительной форме показано, как опыт ведет теорию, требуя ее постоянного усовершенствования, новых постановок задач, новых точек зрения, и, с другой стороны, как теория, усложняя и видоизменяя свои схемы, объясняет механическую сущность наблюдаемых явлений.

Автор уделяет значительное внимание применению соображений теории размерности и теории подобия к проблемам гидромеханики. Выводы и методы этих небольших по объему теорий применимы к самым разнообразным задачам и не связаны с особенностями отдельных частных случаев, а основы их крайне просты и легко доступны для понимания.

Однако крайняя простота получения соответствующих выводов с помощью краткой по своему существу (но не всегда очевидиой заранее) формулировки постановки задачи нередко служит для многих источником иллюзии понимания при отсутствии глубокого и явного проникновения в суть дела. Углубленное и явное описание теоретических моделей и законов обязательно для сознательного оперирования методами подобия и размерности. Это обстоятельство объясняет то, что методы теории размерностей и подобия развились и внедрились в теорию совсем недавно, после накопления большого числа разнообразных физических моделей и множества различных постановок задач в физике и механике.

Не случайно представление о безразмерных определяющих параметрах, характеризующих режимы движения, внедрено в практику только в XX столетии. Ведь совсем недавно была осознана возможность перенесения результатов измерений в движениях жидкости (например, ртути) по цилиндрическим трубам на соответствующие аналогичные движения газа (например, воздуха). Соответствующее обоснование просто; оно теперь представляется многим тривиальным, но это было понято уже после проведения большого числа опытов, обрабатывавшихся не всегда правильно. Полное осмысливание указанных теорий помимо знаний и опытности требует также хорошей физической интуиции.

Ощущается необходимость ясным образом отделить соображения подобия и размерностей от постановки задачи, связанной с рассмотрением конкретного класса явлений по существу вопроса и не связанной непосредственно с подобием. Постановка задачи может быть различной и может быть правильной или нет в зависимости от характера и цели исследования. Для каждой постановки методы размерности дают свои выводы.

К сожалению, в учебной литературе по этим вопросам имеются лишь попутные и отрывочные замечания или же допускается кустарное, логически необоснованное и неотчетливое изложение. В результате в этой области появилось множество путаных, смутных и наукообразных сочинений.

В книге «Методы теории размерностей и теории подобия в механике», вышедшей в 1944 году[1]), автором настоящего предисловия была предпринята попытка внести некоторый порядок в рассматриваемые теории. Ряд примеров и соображений, содержащихся в этой книге, можно найти и в предлагаемой книге Биркгофа. Еще до этого в книге Бриджмена «Анализ размерностей» (2-е английское издание вышло в 1931 г.)[2]) было дано систематическое изложение теории размерности. Однако книга Бриджмена оказалась недостаточной для установления правильной точки зрения на связь между теорией размерности и теорией подобия. После ее появления неоднократно высказывалось мнение, что следствия из анализа размерностей и из теории подобия не являются эквивалентными. От этих сомнений не свободен и Биркгоф в предлагаемой книге (см. гл. IV).

В действительности, однако, этот вопрос вообще не возникает, если система определяющих параметров для выбранного класса явлений (в пределах нужной точности) уже установлена. Для этого, однако, требуются предварительные исследования существа задачи с обязательным использованием частных особенностей изучаемых явлений. В частности, к такого рода исследованиям относится и рассматриваемый в книге Биркгофа «инспекционный анализ». Установление системы определяющих параметров связано с общей схематизацией явления, с использованием различного рода разведывательных гипотез, экспериментальных данных, статистических выводов, с описанием изучаемых процессов точными или приближенными уравнениями[3]), краевыми и начальными условиями, различными огра-

[1]) Следующие издания вышли в 1951, 1955 и 1958 гг.

[2]) Русский перевод вышел в 1934 г.

[3]) Как известно, система определяющих параметров и критерии подобия могут быть одинаковыми, когда действительные физические связи постановки задач и уравнения, описывающие процессы, разные, причем эти уравнения можно варьировать в довольно широких пределах.

ничениями физической природы и т. п. Такое исследование по существу опирается на разнообразные физические условия и соображения, специфичные для частных классов явлений, и поэтому его естественно включить в соответствующие специальные разделы науки. Выделение системы определяющих параметров легко осуществляется попутно в процессе проникновения в механизм изучаемых явлений и является составным элементом постановки задачи.

При такой трактовке вопроса и при обычном определении физического подобия [1]) не могут возникнуть какие-либо противопоставления анализа размерностей и теории подобия. Соображения этих двух теорий могут касаться лишь общих выводов, отделенных от частных свойств и особенностей конкретных явлений, а содержание теорий в таком понимании становится полностью эквивалентным. Биркгоф в своей книге не вполне ясно и отчетливо излагает эти вопросы, что, впрочем, связано скорее с терминологией, чем с существом дела.

В механике при развитии научных теорий крайне важно вводить новые понятия, определения, системы отсчета, системы единиц измерения и т. п., используя богатый опыт, накопленный в процессе практической деятельности и общего хода исторического развития науки, а также учитывать необходимость сделать формулировки задач и результатов исследования наиболее удобными. Иначе говоря, характер методов исследования должен оправдываться существом дела. С этой точки зрения различного рода практически неинтересные, патологические или искусственные абстрактные случаи, с которыми мы на практике никогда не встречались и, по-видимому, не встретимся, должны исключаться определениями и самой постановкой задачи. В некоторых мес-

---

[1]) На практике удобно пользоваться следующим определением динамического или вообще физического подобия. Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе. Для осуществления пересчета необходимо знать «переходные масштабы». Это определение удовлетворяет практическим требованиям и сильно упрощает и сокращает общую теорию (см. [14*]).

Указанный вывод сохраняет свою силу также и в случае, когда подобие двух явлений определено в обобщенном смысле, т. е. когда переход с обычным пересчетом по известным масштабам возможен только для некоторой специальной системы характеристик, полностью определяющей явление и позволяющей легко находить любые другие характеристики, которые, однако, нельзя получить простым умножением на соответствующие масштабы при переходе от одного из двух подобных явлений к другому.

В частности, подобие, соответствующее аффинным преобразованиям координат, может быть рассмотрено с помощью анализа размерностей при применении различных единиц измерения вдоль различных осей декартовой системы координат.

тах Биркгоф рассматривает такие примеры, излагая их иногда не вполне четко (см., например, формулу (6) § 61, а также § 65).

В естественных науках поле возможных соотношений и всякого рода уравнений весьма разнообразно, однако с точки зрения возможных приложений теории размерностей и подобия это поле приложений вполне обозримо, и можно прямо сказать, что во всех правильно развиваемых теориях не встречается таких особых примеров, которые рассмотрел Биркгоф.

Соответствующее и естественное определение изучаемых физических закономерностей дает как следствие структуру соответствующих уравнений, представленных в безразмерном виде. Определяющие параметры, переменные или постоянные, выделяемые постановкой задачи, можно рассматривать как величины, в известном диапазоне не зависящие одна от другой. Определяемые величины можно рассматривать как величины, выражаемые с помощью некоторых математических операций через определяющие. Соответствующие функциональные связи между размерными величинами обладают вполне определенной структурой, обусловленной независимостью этой связи от выбора основных единиц. Эта структура связана с существованием в классе рассматриваемых явлений своих собственных характерных величин — собственных единиц измерения, не зависимых от условных единиц измерения, выбранных на основе специального соглашения.

Стандартизация и унификация единиц измерения удобна и необходима с многих хорошо известных точек зрения. Вместе с этим теория размерностей и подобия указывает, что для различных классов вполне определенных явлений выгодны свои собственные характерные единицы измерения, связанные с существенными величинами, характерными для объектов и явлений данного класса. Использование собственной системы единиц измерения часто очень выгодно, и к нему сводится описание явлений и законов в безразмерной форме — прием, плодотворный и широко внедренный в настоящее время в науке и технике.

Особенное значение имеют случаи, когда число основных характерных независимых постоянных размерных параметров мало и недостаточно для получения числа независимых безразмерных переменных величин, равного числу независимых переменных размерных величин; в этом случае возникает автомодельность явления, что вносит существенные упрощения в задачи теоретического или экспериментального исследования.

В книге Биркгофа сделана попытка привлечь к проблеме интегрирования уравнений гидромеханики методы теории групп, что позволяет обозреть с единой точки зрения свойства различ-

ных классов частных решений этих уравнений, найденных и изученных ранее разными авторами.

Со времени выхода в свет первого издания проблема применения теории групп к задачам интегрирования дифференциальных уравнений и к установлению влияния геометрической симметрии на природу тензорных функциональных связей рассматривалась в русской литературе в монографии Л. В. Овсянникова [1]) и в работе В. В. Лохина и Л. И. Седова [2]). В этих работах содержится ряд далеко идущих новых результатов, которые остались незатронутыми в предлагаемой книге.

При переводе ссылки автора на учебную литературу заменены ссылками на соответствующие книги, имеющиеся на русском языке. В конце книги помещен список дополнительной литературы.

Л. И. Седов

---

[1]) Овсянников Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд. АН СССР, Сиб. отд., Новосибирск, 1962.

[2]) Лохин В. В., Седов Л. И., Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов, *Прикл. мат. и мех.*, вып. 3, 1963.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Настоящая книга посвящена преимущественно двум специальным аспектам гидромеханики: сложным логическим соотношениям между теорией и экспериментом и применению понятия симметрии. Вторая тема с математической точки зрения относится к теории групп.

Соотношение между теорией и экспериментом рассматривается в гл. I и II на материале многочисленных «парадоксов», в которых правдоподобные рассуждения приводят к неверным результатам. В гл. III это соотношение изучается более подробно в частном случае струйных течений.

Глава IV посвящена анализу моделирования и его теоретическому обоснованию. Проводится сравнение (или противопоставление!) теории и практики, а также описывается происхождение моделирования из понятия симметрии; таким образом устанавливается связь между теми двумя важными сторонами гидромеханики, которые изучаются в этой книге.

Центральная тема остальной части книги — применение идей теории групп. В гл. V показано, что такие идеи позволяют обосновать значительное количество известных точных решений задач теории сжимаемой и вязкой жидкости. В гл. VI установлено, что, исходя из них, можно получить классическую теорию «присоединенных масс» как частный случай современной геометрической теории «однородных пространств».

Итак, общее распределение материала весьма близко к тому, что было в первом издании. Однако весь материал книги тщательно пересмотрен и во второе издание добавлен ряд интересных новых результатов, полученных за последнее десятилетие.

Глава I

ПАРАДОКСЫ НЕВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Теоретическая гидродинамика

Теоретическая (рациональная) гидродинамика стремится приближенно предсказать движение реальной жидкости путем решения *краевых* задач для соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных. При составлении этих уравнений в качестве аксиом принимают законы движения Ньютона. Предполагается также, что рассматриваемая жидкость (обычная жидкость или газ) всюду непрерывна и что на любую часть поверхности действует вполне определенное давление или какое-либо другое внутреннее *напряжение* (сила, приходящаяся на единицу площади), которое, по крайней мере локально, является дифференцируемой функцией координат, времени и направления. Наконец, устанавливается связь этих напряжений с движением жидкости посредством введения различных параметров, характеризующих данное вещество (плотность, вязкость и т. д.), и функциональных зависимостей (закон адиабатического сжатия и т. п.). Исходя из таких допущений, математики составили системы дифференциальных уравнений для различных *идеализированных жидкостей* (несжимаемой невязкой, сжимаемой невязкой, несжимаемой вязкой и т. д.).

Для того чтобы получить вполне определенные, или корректно поставленные [1]), задачи для таких дифференциальных уравнений, необходимо еще задать соответствующие краевые условия, относящиеся либо к начальному состоянию движения, либо к движению стенок и препятствий, ограничивающих течение жидкости, либо и к тому, и к другому. Теоретическая гидродинамика включает в себя изучение краевых задач, которые получаются в результате сочетания этих краевых условий

---

[1]) Мы пользуемся ставшей в настоящее время классической терминологией Адамара, согласно которой краевая задача называется корректно поставленной, если она имеет одно и только одно решение, непрерывно зависящее от краевых условий. См. Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem, Yale Univ. Press, 1923, стр. 32.

с дифференциальными уравнениями для идеализированных жидкостей [1]).

Математику легко убедить себя в том, что теоретическая гидродинамика в основном непогрешима. Так, Лагранж [2]) писал в 1788 г.: «Мы обязаны Эйлеру первыми общими формулами для движения жидкостей... записанными в простой и ясной символике частных производных... Благодаря этому открытию вся механика жидкостей свелась к вопросу анализа, и будь эти уравнения интегрируемыми, можно было бы в любом случае полностью определить движение жидкости под воздействием любых сил...» Многие из величайших математиков, от Ньютона и Эйлера до наших дней, штурмовали задачи теоретической гидродинамики, веря в это. И в их исследованиях, часто вдохновляемых физической интуицией, были введены некоторые из наиболее важных понятий теории уравнений в частных производных: функция Грина, вихревая линия, характеристика, область влияния, ударная волна, собственные функции, устойчивость, «корректность» задачи — таков неполный список.

Однако краевые задачи теоретической гидродинамики чрезвычайно трудны, и продвижение в этой области шло бы гораздо медленнее, если бы строгая математика не дополнялась различными *правдоподобными интуитивными гипотезами.* Наиболее плодотворными среди них были следующие.

(A) Определяя, какие физические переменные необходимо рассматривать, можно полагаться на интуицию.

(B) Эффект малых воздействий мал, а эффект бесконечно малых воздействий бесконечно мал.

(C) Симметрия воздействия обусловливает симметрию эффекта.

(D) Топологию течения можно уловить интуитивно.

(E) Операции анализа применимы без ограничений: функции, рассматриваемые в теоретической гидродинамике, можно свободно интегрировать, дифференцировать, представлять в виде рядов (Тейлора, Фурье) или интегралов (Лапласа, Фурье).

(F) Математические задачи, поставленные на основе интуитивных физических представлений, считаются корректными.

Приведенные правдоподобные предположения обычно принимаются без оговорок, как сами собой разумеющиеся. Первые две главы этой книги посвящены главным образом подробному исследованию их приемлемости.

---

[1]) Для простоты изложения мы не касаемся закона сохранения энергии и других термодинамических соображений, которые также можно привлечь (см. § 14).

[2]) Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. II, М.—Л., 1950, стр. 307.

§ 2. Гидродинамические парадоксы

На деле в ряде случаев уравнения Эйлера были проинтегрированы, но результаты расчетов резко расходились с наблюдениями, что явно противоречит мнению Лагранжа. В гидродинамике такие *несомненные противоречия* между экспериментальными данными и заключениями, основанными на правдоподобных рассуждениях, называются *парадоксами*, и в дальнейшем этот термин будет употребляться именно в таком смысле.

Эти парадоксы были предметом многих острот. Так, недавно было сказано [1]), что в девятнадцатом веке «гидродинамики разделялись на инженеров-гидравликов, которые наблюдали то, что нельзя было объяснить, и математиков, которые объясняли то, что нельзя было наблюдать». (Нам кажется, что представители обоих видов все еще встречаются.) Да и Сидней Гольдштейн заметил, что всю книгу Ламба [7] можно прочитать, не представляя себе, что вода... мокрая!

Теперь обычно заявляют, что подобные парадоксы возникают из-за отличия реальных жидкостей, имеющих малую, но конечную вязкость, от идеальных жидкостей, имеющих нулевую вязкость [2]). Из этого, по существу, следует, что утверждение Лагранжа (см. прим. 2 на стр. 16) можно подправить, поставив «Навье — Стокс» вместо «Эйлер».

Это утверждение будет критически рассмотрено в гл. II; оно, пожалуй, в принципе верно для *несжимаемого* вязкого течения. Однако, мы полагаем, что если понимать его буквально, то оно может ввести в заблуждение, поскольку явно не выделены перечисленные выше правдоподобные гипотезы и не учтен тот ущерб в строгости, который обусловлен их применением.

Тем не менее нам не известно ни одного случая, когда дедукция, строгая как физически, так и математически, привела бы к неправильному заключению, но лишь очень немногие выводы теоретической гидродинамики могут быть строго установлены. Для самых интересных из них широко использовались одна или несколько из упомянутых гипотез (A)—(F).

Это можно показать на примере уравнений Навье — Стокса. Они явно непригодны для учета релятивистских эффектов, молекулярной структуры, квантовых эффектов, равно как таких специфических явлений, как ионизация, электростатические силы, загрязнения во взвесях, конденсация и т. п., каждое из которых может вызвать серьезные осложнения, как будет

[1]) Hinshelwood C.; цитируем по Лайтхиллу [Lighthill M. Y., *Nature*, 178 (1956), 343]; см. также [11], т. 1, Введение.

[2]) См. [3], § 1, 14; [11], т. 1, Введение; т. 2, Введение; Hunter Rouse, Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, McGraw-Hill, 1938, стр. 10.

показано ниже. Стало быть, уже сразу широко используется гипотеза (A). В случае *сжимаемого* течения остается открытым даже вопрос о том, какой смысл имеет понятие «второй» вязкости (§ 22, 33).

Мы не настаиваем на том, чтобы впредь не использовать в теоретической гидродинамике гипотезы (A)—(F) — даже в чистой математике правдоподобные соображения играют очень важную роль [1]). В гидродинамике продвижение едва ли было бы возможно без широкого использования таких правдоподобных гипотез, а полная строгость редко бывает достижимой. Мы только настаиваем на том, что, прежде чем считать научно установленными заключения, основанные на правдоподобных соображениях, их надо проконтролировать *либо* с помощью строгих доказательств (как в чистой математике), *либо* с помощью эксперимента.

Напротив, мы считаем, что нужно только приветствовать открытие гидродинамических парадоксов, искренне признав неспособность существующей математики (и логики) адекватно отображать сложные и удивительные явления природы. Опыт показывает, что человеческое воображение гораздо более ограничено, чем ресурсы природы; как писал Паскаль, «воображение скорее устанет постигать, чем природа поставлять».

В связи с этим, остальная часть первой главы будет посвящена анализу некоторых парадоксов классической гидродинамики. В гл. II мы уделим внимание аналогичным (но не столь широко известным) парадоксам «современной» динамики жидкостей.

§ 3. Уравнения Эйлера

Мы начнем с рассмотрения основных уравнений для невязких жидкостей, выведенных Эйлером и Лагранжем. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ означает вектор скорости жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Пусть $\rho(\mathbf{x}, t)$ означает плотность жидкости, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ — внешнее гравитационное [2]) поле и $p(\mathbf{x}, t)$ — давление в жидкости.

Если принять правдоподобную гипотезу (E) из § 1 (игнорируя молекулярную структуру вещества!), то легко показать, что закон сохранения массы эквивалентен следующему уравнению

[1]) См. Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957. Парадоксы возникают даже в чистой математике; см. Northrop E. P., Riddles in Mathematics, Van Nostrand, 1944.

[2]) Этим термином автор пользуется в более широком смысле, чем это обычно принято, применяя его для поля массовых (или объемных) сил. — *Прим. перев.*

в частных производных:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (уравнение неразрывности).} \tag{1}$$

Если обозначить «субстанциональную» производную по времени для наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, через $D/Dt = \partial/\partial t + \Sigma u_k \partial/\partial x_k$, то можно переписать (1) в виде

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{1'}$$

Случаю *несжимаемости* соответствует $D\rho/Dt = 0$, и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

При $\mathbf{u} = 0$, когда жидкость находится в состоянии *покоя*, напряжение в жидкости на любой элемент поверхности действует *по нормали* к нему. Это — физическое определение жидкости; экспериментально проверено, что ему удовлетворяют многие реальные вещества.

Эйлер предположил, что этот закон гидростатики применим также к движущимся жидкостям, т. е. в гидродинамике. Этот закон приближенно удовлетворяется во многих случаях движения жидкостей (исключая области вблизи границы). Например, изменение скорости на 50 *м/сек* в слое воздуха толщиной в четверть миллиметра вызывает усилие сдвига, составляющее примерно 1/2000 атмосферного давления ([3], стр. 2).

Непрерывные жидкости, удовлетворяющие гипотезе Эйлера, называются *невязкими* [1]). Как показал Коши, напряжение в невязкой жидкости должно быть одинаковым во всех направлениях (изотропным); получающаяся скалярная функция $p(\mathbf{x}, t)$ может быть названа *давлением*. Далее, закон сохранения количества движения эквивалентен следующему векторному уравнению в частных производных:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{g} \text{ (уравнение движения).} \tag{2}$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений в частных производных, в которой все производные *по времени* могут быть выражены через производные *по пространственным координатам* [2]), к уравнениям (1), (2) нужно добавить еще одно соотношение. В теоретической механике однородных невязких

[1]) В соответствии с гипотезой (В) из § 1 воздух и воду можно рассматривать как невязкие жидкости.

[2]) Так, что начальные условия будут определять задачу Коши в обычном математическом смысле.

жидкостей обычно вводится соотношение, связывающее плотность и давление:

$$\rho = h(p) \quad \text{(уравнение состояния)}. \tag{3}$$

Баротропные течения. Невязкие жидкости, удовлетворяющие условию (3), могут быть названы баротропными, а движения жидкости, удовлетворяющие уравнениям (1)—(3),— «баротропными течениями». Эти течения встречаются в (приближенно) однородных жидкостях при условиях, которые являются термодинамически обратимыми. (Под «однородной жидкостью» мы понимаем жидкость, имеющую однородное строение, например чистую воду или воздух.)

Именно такие жидкости обычно рассматриваются в акустике и в аэродинамике больших скоростей. Быстрое сжатие и расширение — типичные адиабатические процессы [1]) в том смысле, что можно пренебречь теплопроводностью. Кроме того, пренебрежение теплопроводностью логически не противоречит пренебрежению вязкостью в уравнении (2), поскольку как теплопроводность, так и вязкость представляют собой молекулярные явления.

В случае идеального газа с термодинамическим уравнением состояния $p = \rho RT$ и постоянным отношением теплоемкостей $C_p/C_v = \gamma$ элементарные рассуждения дают для адиабатического течения соотношение

$$p = k\rho^{\gamma} \tag{3a}$$

— так называемое *политропное* уравнение состояния для идеального термодинамически совершенного газа. Предельный случай $\gamma = 1$ соответствует изотермическому течению (бесконечная теплоемкость или в бесконечном изотермическом резервуаре бесконечная проводимость).

Уравнение (3а) достаточно точно для многих задач газовой динамики; для воздуха $\gamma = 1{,}4$. Однако для жидкостей уравнение (3) необходимо брать (приближенно) в виде $(p - p_v) = k\rho^{\gamma}$, где p_v есть давление паров при кавитации (см. § 42).

Соотношение вида (3) является также приемлемым для жидкостей, которые только незначительно сжимаемы (т. е. при ско-

[1]) Напомним, что Ньютон («Principia Mathematica», Книга II, отдел 8, предложение 48; русский перевод — в «Собрании трудов А. Н. Крылова», т. VII, М—Л., 1936; см. там же, стр. 480) принимал для изотермического течения закон Бойля, что привело к неправильному выводу скорости звука. Ошибка Ньютона была исправлена Лапласом ([7], стр. 477; в русском издании стр. 596; см. также указанный том «Собрания трудов А. Н. Крылова», стр. 485, прим. 175).

ростях гораздо меньших скорости звука, особенно в обычных жидкостях). В этом случае можно просто писать

$$\rho = \rho_0 \tag{3б}$$

и говорить об *однородной несжимаемой невязкой жидкости*. Однако в этом случае уже нельзя выразить все производные по времени через производные по пространственным координатам.

§ 4. Потенциал скорости

Основные уравнения Эйлера (1)—(3) позволяют получить различные фундаментальные следствия, имеющие много важных приложений.

Самым существенным следствием является теорема Гельмгольца, справедливая для баротропного течения в консервативных гравитационных полях (т. е. при $\mathbf{g} = -\nabla G$). Эта теорема ([7], стр. 54; [1*][1]), т. 1, стр. 149) утверждает инвариантность циркуляции $\Gamma = \oint \sum u_k\, dx_k$ по любому замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью, т. е. во всякий момент времени состоящему из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, если в начальный момент жидкость находится в покое (например, вытекает из неподвижного резервуара) и если контур остается все время замкнутым, то циркуляция всегда должна равняться нулю. Это значит, что должен существовать локально однозначный скалярный *потенциал скорости* $U(\mathbf{x}, t)$, т. е. такая скалярная функция точки, что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla U = \operatorname{grad} U. \tag{4}$$

Течения, обладающие таким свойством, называются (локально) *безвихревыми*[2]). Следовательно, в *односвязной* области, такой, как область вне некоторого твердого тела в пространстве или половина симметричной области вне кругового цилиндра на плоскости, скорость U должна быть однозначной функцией во всей области.

В случае баротропных течений при отсутствии внешних гравитационных сил для безвихревого движения [т. е. если выполняется уравнение (4)] можно получить интеграл уравнений движения, так называемое уравнение Бернулли

$$\int \frac{dp}{\rho} = P(t) - \frac{1}{2}\nabla U \nabla U - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \rho = h(p). \tag{4'}$$

[1]) Звездочка обозначает ссылку на дополнительную литературу. — *Прим. ред.*

[2]) В русской литературе чаще используется термин «потенциальные течения». — *Прим. перев.*

Действительно, уравнения движения (без гравитационного слагаемого) представляют собой в точности градиент соотношения (4′).

Несжимаемые течения. В случае однородных несжимаемых жидкостей можно обобщить уравнение Бернулли (4′) так, чтобы учитывался эффект гравитации. Действительно, для безвихревых несжимаемых течений градиент соотношения

$$p = P(t) - \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} \nabla U \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} + G \right\} \tag{5}$$

эквивалентен уравнениям движения с гравитационным членом. Более того, в этом случае уравнение (1) сводится к виду $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, откуда получаем уравнение

$$\nabla^2 U = 0. \tag{6}$$

Наконец, очевидно, что на любой непроницаемой твердой границе производная

$$\frac{\partial U}{\partial n} = F(\mathbf{x}, t) \tag{7}$$

определяется нормальной скоростью движения этой границы.

Для однозначных во всей области функций $U(\mathbf{x})$ уравнения (6) и (7) представляют классическую задачу теории потенциала, так называемую *задачу Неймана*. Как мы увидим в § 5 и гл. VI; эта задача имеет большое значение для теоретической гидродинамики. Но прежде отметим, что здесь подразумевается выполненной гипотеза (F) из § 1: предполагается, что задача Неймана должна иметь одно и только одно однозначное решение $U(\mathbf{x}, t)$ для разумным образом определенных границ.

Примечательно, что для строгого доказательства этого математического предположения, возникшего из гидродинамических рассмотрений, потребовалось более чем 50 лет. В настоящее время это основная теорема общей теории потенциала ([4], стр. 310—311; [2*]).

Эта теорема показывает, что если несжимаемая невязкая жидкость в начальный момент находится в состоянии покоя, то поле скоростей в любой момент времени зависит только от *мгновенной* скорости границы и не зависит от предшествующих состояний. Приведенные теоремы показывают также, что движение любой части границы мгновенно оказывает воздействие на весь объем жидкости: скорость сигнала равна бесконечности (это согласуется и с физической интуицией).

§ 5. Стационарные безвихревые течения

Случай стационарных (или установившихся) течений, когда $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, очевидно, имеет особое значение. Исходя из результатов § 4, гидродинамики XIX века считали правдоподобиым, что для твердого тела, проходящего с постоянной скоростью достаточно большое по сравнению с его размерами расстояние в неограниченном объеме жидкости, вязкость которой достаточно мала и которая первоначально находилась в покое, можно написать равенства:

$$U = U(\mathbf{x}), \quad p = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = g(\mathbf{x}),$$

и т. д. — для осей координат, жестко связанных с телом, относительно которых жидкость движется с постоянной скоростью $\mathbf{a}$. Ясно, что такие правдоподобные выводы основаны на гипотезе (В) § 1.

Если исходить из этих правдоподобных заключений, то далее можно действовать следующим образом. Для стационарных течений при $U = U(\mathbf{x})$ уравнение движения (2) после однократного интегрирования по пространственным координатам становится эквивалентным уравнению [1])

$$\frac{1}{2}\nabla U \nabla U + \int \frac{dp}{\rho} + G = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \text{или} \quad \sum u_i\, du_i + \frac{dp}{h(p)} + dG = 0. \tag{8}$$

Это уравнение называется уравнением Бернулли для стационарного течения; в случае несжимаемой жидкости оно принимает известный простой вид:

$$p = p_0 - \rho_0 \left(\frac{1}{2}\nabla U \nabla U + G\right). \tag{8*}$$

Подобным образом условие того, что скорость тела относительно жидкости на бесконечности равна $-\mathbf{a}$, может быть записано в виде

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{grad} U = \mathbf{a} \tag{9}$$

и для несжимаемого, и для сжимаемого течения.

Наконец, поскольку течение стационарно, то должны быть стационарны и границы течения. Отсюда условие непроницаемости (7) сводится к условию

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе.} \tag{7*}$$

---

[1]) Если справедливо соотношение (3а), то $\int dp/\rho = \gamma p/(\gamma - 1)\rho = c^2/(\gamma - 1)$.

В случае безвихревого сжимаемого течения уравнение неразрывности (1) все еще можно записать при помощи единственной неизвестной функции $U(\mathbf{x})$, *если* только пренебречь эффектом гравитации, что обычно допустимо при достаточно больших скоростях, когда становится заметной сжимаемость [1]). (Если гравитацией нельзя пренебречь, как, например, в случае атмосферных движений больших масштабов, то условие (9) не может быть выполнено, даже несмотря на то, что безвихревое течение является допустимым.)

Кинематика баротропного течения. Полагая $G = 0$ в уравнении (8), при описанных выше условиях мы можем получить равенство

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 = \frac{1}{h'(p)} = \frac{1}{J(\nabla U \cdot \nabla U)}, \tag{9*}$$

где J — функция, обратная функции $2p_0/\rho_0 - 2\int d\rho/h'(p)\rho$ [2]). С другой стороны, из уравнения (1) при $\partial\rho/\partial t = 0$ следует $\rho^{-1}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$, или

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}. \tag{10}$$

Другая форма уравнения (10) имеет вид

$$\nabla^2 U = M^2 \sum \frac{u_j u_k}{q^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}, \tag{10*}$$

где локальное «число Маха» $M = q/c$ есть отношение локальной скорости течения q к локальной скорости звука c, а все коэффициенты $u_j u_k/q^2$ меньше или равны 1.

Подставив в уравнение (10) выражение для $1/c^2$, взятое из формулы (9*), мы получим ([10], стр. 240) уравнение

$$\nabla^2 U = J(\nabla U \cdot \nabla U)\sum \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}. \tag{11}$$

Одно-единственное уравнение в частных производных (11) вместе с краевыми условиями (9) и (7*) сводит задачу для случая стационарного *сжимаемого* течения баротропной жидкости нулевой (малой?) вязкости к другой правдоподобной краевой за-

---

[1]) В случае несжимаемости гравитационный эффект сводится к обыкновенной гидростатической подъемной силе, как показано в § 21.

[2]) При этом последнюю функцию надо рассматривать как функцию аргумента $h'(p)$. — *Прим. перев.*

даче. Если только последняя задача решена, то из уравнения (8) можно легко найти поле давления.

Таким образом, мы свели задачу стационарного течения к чисто кинематической задаче. Если дано любое математическое решение уравнений (11), (9) и (7*) и если посредством уравнения (8) определено поле давления при $G = 0$, то уравнение движения (2) удовлетворяется автоматически. Очевидно, что задача Неймана из § 4 получается как предельный случай при $c \to \infty$. Допущение (F), таким образом, позволяет получить гораздо больше, а именно, что решение можно разложить по степеням M^2 (метод Рэлея — Янцена, [15], стр. 275).

§ 6. Парадокс обратимости

Одной из фундаментальных задач гидромеханики является определение силы, действующей на твердое тело, находящееся в стационарном поступательном движении с постоянной скоростью $\mathbf{a}$ в однородной покоящейся жидкости. Если твердое тело движется параллельно некоторой плоскости симметрии, то эту силу можно разложить на лобовое сопротивление D, подъемную силу L и момент M, действующий в этой плоскости.

Лагранж мог бы заметить, пользуясь весьма простыми соображениями *обратимости*, что идеализированная краевая задача § 5 может не привести к правильному результату при определении сопротивления, испытываемого реальными твердыми телами при движении в реальных жидкостях. Основная мысль заключается в следующем (см. [1]).

Определение 1. *Обращение* течения $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$ определяется как $\mathbf{v}(\mathbf{x}; t) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}; -t)$, причем в обоих течениях давление и плотность в соответствующих точках одинаковы.

Прямой подстановкой можно показать, что обращение любого течения, удовлетворяющего уравнениям (1)—(3), также удовлетворяет уравнениям (1)—(3), правда, при обращении и краевых условий. В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *есть стационарное безвихревое течение вокруг твердого препятствия и* $\mathbf{u}(\infty) = \mathbf{a}$, *то таковым является и* $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *при* $\mathbf{v}(\infty) = -\mathbf{a}$. *Кроме того, поля давления, так же как и D, L и M, одинаковы для* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *и* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Эта лемма находится в *качественном* противоречии с динамикой реальных жидкостей: в действительности изменение направления движущегося тела на противоположное обычно

влечет обращение величин D и L (хотя и не M) [1]), а не оставляет их неизменными.

Поучительно проанализировать предыдущее противоречие подробнее. Пока не установлено, что краевая задача в § 5 корректно поставлена, нельзя делать вывод о том, что ее уравнения ошибочны. Возможно, что потребуется ввести какое-нибудь дополнительное условие. Действительно, как мы увидим в § 10, это может оказаться справедливым для *сверхзвукового* течения (т. е. если число Маха $M > 1$). Чтобы пояснить это, проведем следующее разграничение:

Определение 2. Будем называть гидродинамические теории *неполными,* если соответствующие условия определяют обтекание данного препятствия не единственным образом; *переопределенными,* если эти условия математически не совместны; *ложными,* если корректно поставленная задача дает грубо ошибочные результаты.

Теорема 1. *Всякая обратимая гидродинамическая теория в отношении расчета лобового сопротивления и подъемной силы является неполной, переопределенной или ложной.*

Дозвуковой случай. В дозвуковом случае, $M < 1$, по крайней мере для достаточно малого числа Маха недавно было показано [2]), что краевая задача, определяемая уравнениями (11), (9) и (7*) из § 5, является корректно поставленной. Поскольку эта задача эллиптического типа, ее математическое решение $U(x)$ должно быть *аналитическим.* Отсюда мы заключаем, что уравнения Эйлера — Лагранжа дают *ложную* теорию для стационарного дозвукового потока.

Околозвуковой случай. По поводу этого случая, когда в дозвуковом потоке имеются локальные сверхзвуковые зоны, высказано много различных и противоречивых утверждений. Были построены математические модели подобных околозвуковых течений [3]), но они, по-видимому, очень слабо отражают физическую

[1]) Классическая гидродинамика правильно предсказывает тенденцию осесимметричных препятствий подставлять потоку более широкую сторону: ср. [7], § 71, 124. (В случае тел, обладающих продольной симметрией, при обращении потока L остается неизменным, а у M изменяется знак.)

[2]) Graffi D., *J. Rat. Mech. Analysis,* **2** (1953), 99—106; Gilbarg D., там же, 233—251; Gilbarg D. and Serrin J., там же, **4** (1955), 169—175; Bers L., *Comm. Pure Appl. Math.,* **7** (1954), 441—504; Finn R. S. and Gilbarg D., там же, **10** (1957), 23—64 и *Acta Math.,* **98** (1957), 265—276. Это обобщает результат из § 4 на случай $M = 0$ (задача Неймана). [Случай малых M см. в [3*] — *Прим. ред.*]

[3]) Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1961, § 25, п. 3.

картину. Еще более драматическим обстоятельством является то, что для некоторых профилей никакое околозвуковое течение без ударной волны невозможно. Этот парадокс околозвукового течения недавно установлен К. Моравец [1]). По терминологии теоремы 1, это означает, что задача околозвукового течения в теоретической (Эйлера — Лагранжа) гидродинамике может быть *переопределенной.*

В § 10 мы увидим, что задача сверхзвукового течения — типичная неполная задача, и примечательно, что различные разрешения парадокса обратимости в трех предыдущих случаях находятся в соответствии с общей математической теорией краевых задач эллиптического, смешанного и гиперболического типов.

§ 7. Парадокс Даламбера

Более известным и более давним, чем парадокс обратимости, является парадокс Даламбера. Согласно этому парадоксу, из допущений, сделанных в § 5, следует $D = L = 0$. Для случаев

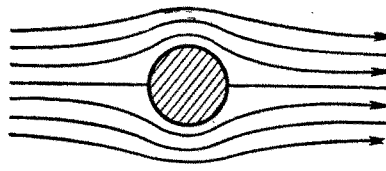


Рис. 1. Обтекание цилиндра, по Эйлеру.

кругового цилиндра (рис. 1) и сферы это следует, в силу симметрии, из явной формы потенциала скоростей:

$$U = a\left(x + \frac{x}{r^2}\right) \text{(цилиндр)}, \tag{12а}$$

$$U = a\left(x + \frac{x}{2r^3}\right) \text{(сфера)} \tag{12б}$$

и теоремы Бернулли (8*) при $\mathbf{g} = 0$. Если задача корректно поставлена, то наличие четырехкратной симметрии, как в данных случаях, позволяет показать, что $D = L = 0$, исходя только из соображений обратимости ([1], стр. 248).

Вообще же парадокс Даламбера следует из принципа обратимости для любого профиля, который обладает *центральной* симметрией, т. е. для такого, который отображается в себя при

[1]) *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 45—68, **10** (1957), 107—131 и **11** (1958), 129—144. [См. также [4*], [5*]. — *Прим. ред.*]

отражении относительно неподвижного центра симметрии. Обтекание плоской пластинки на рис. 2, *а* дает пример подобного рода. Давления, действующие на элементы поверхности, соответствующие друг другу при центральной симметрии, равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, эта система сил сводится только к паре сил (см. прим. 1) на стр. 26).

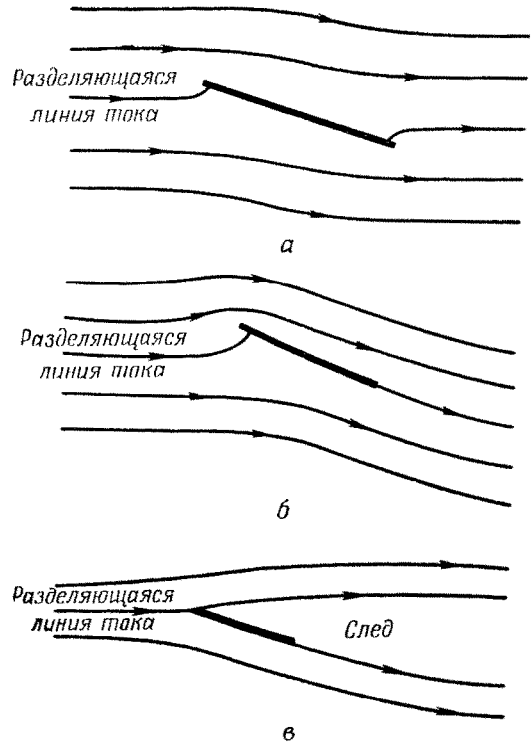


Рис. 2. Обтекание плоской пластинки, по Эйлеру (*а*), по Жуковскому (*б*) и по Гельмгольцу (*в*).

Демонстрация парадокса в общем случае дело довольно тонкое, при этом используется сложная теорема о поведении решений уравнения $\nabla^2 U = 0$ на бесконечности. А именно, пусть $U(\mathbf{x})$ возрастает на бесконечности, по крайней мере как первая степень $|\mathbf{x}| = r$. Тогда можно показать, что

$$U = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}),$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ «регулярна на бесконечности» ([4], гл. X, § 8; [2*]). Под этим мы понимаем то, что $\varphi(\mathbf{x})$ можно разложить в некоторый

сходящийся ряд (аналогичный ряду по отрицательным степеням в разложении Лорана), члены которого суть произведения отрицательных степеней r и сферических гармоник, выраженных через широту и долготу. (Для таких решений уравнения $\nabla^2 U = 0$ правдоподобная гипотеза (E) подтверждается, следовательно, строгой теоремой.)

§ 8. Теория крылового профиля

Не смущаясь приведенными выше парадоксами, ученые сумели правильно получить, по крайней мере качественно, лобовое сопротивление и подъемную силу, оставаясь в рамках уравнений движения Эйлера. Вся хитрость заключается в том, чтобы избежать употребления гипотезы (D), которую применяли Эйлер и Лагранж, а это можно сделать, используя *разрывные* и *многозначные* потенциалы. (Такие функции, правда, часто рассматриваются «практиками» как патология!)

Для определения *лобового сопротивления* можно постулировать наличие застойной *кильватерной зоны* (след, область «мертвой воды») с $U = 0$ позади препятствия, простирающегося до бесконечности, как на рис. 2, *в*. Эта зона отделена от главного течения «свободными линиями тока» с постоянным давлением, причем скорость $\mathbf{u} = \nabla U$ изменяется скачкообразно при переходе через эти линии. Эта модель будет изучена в § 39.

Теорию подъемной силы в двумерном течении можно получить, вводя многозначный потенциал вида

$$U = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + \sum a_k x_k + \varphi(\mathbf{x}), \tag{13}$$

где

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Здесь $\Gamma = \oint dU = \oint \sum u_k\, dx_k$ — циркуляция, определенная в § 4, причем интеграл берется вокруг препятствия (профиля крыла).

Вводя член $\Gamma\theta/2\pi$ в формулу (13), мы жертвуем детерминизмом, так как при этом задача Неймана из § 4 заменяется задачей, которая не является корректно поставленной. Некоторую видимость детерминизма можно еще сохранить, когда крыло имеет острую заднюю «кромку» (но не в общем случае). В этом случае является правдоподобным предположение, что «скорость конечна на задней кромке» (условие Жуковского — Чаплыгина). Это условие выделяет единственное значение циркуляции Γ и позволяет находить лобовое сопротивление и подъемную силу следующей теореме Кутта — Жуковского ([8], стр. 188).

Теорема 2. *В любом плоском течении вида* (13) *мы имеем* $D = 0$ и $L = \rho a \Gamma$, *где* $a = |\mathbf{a}|$.

В частном случае $\Gamma = 0$ мы получаем как следствие парадокс Даламбера.

Стационарное локально безвихревое плоское течение с циркуляцией можно определить как «течение Жуковского», если оно удовлетворяет условию Жуковского. Течение Жуковского для плоской пластинки схематически изображено на рис. 2, *б*; коэффициент подъемной силы $C_L = 2\pi \sin \alpha$, где α — угол атаки. Течение Жуковского для заданного профиля с острой задней кромкой представляет собой корректно поставленную краевую задачу. Ее решение в частных случаях (профиль Жуковского, профиль Кармана — Треффтца и т. д.) составляет основную главу современной теории крыла; впервые общую теорию (с приложениями) дал Мизес [1]). Ее справедливость основывается на следующей теореме чистой математики, которая позволяет нам преобразовывать элементарное течение Жуковского (12а) для единичного круга в несжимаемое течение Жуковского для произвольного профиля.

Основная теорема о конформном отображении. *Имеется одна и только одна комплексная аналитическая функция*

$$w = f(z) = kz + \sum_0^\infty c_k z^{-k}, \qquad k > 0,$$

отображающая взаимно однозначно и конформно область вне единичного круга на внешность данной односвязной области.

В последнее время этот результат был распространен на «квазиконформное» отображение (см. прим. 2) на стр. 26), которое состоит в том, что для данного числа Маха $M < 1$ имеется одно и только одно дозвуковое обтекание, по Жуковскому, для любого профиля с острой задней кромкой.

В случае хорошо обтекаемых профилей при малом угле атаки действительные потоки хорошо аппроксимируются идеальными течениями Жуковского. Хотя полагать, что лобовое сопротивление равно нулю, очевидно сверхоптимистично, тем не менее подъемная сила в действительности составляет 75—95% расчетной, а отношение подъемная сила/лобовое сопротивление может доходить до 50.

---

[1]) Mises R., *Zeits. Flugt. Motorluftschiffahrt*, 1917, стр. 157—163 и 1926, стр. 67—73 и 87—89. Относительно анализа фактических данных см. Мизес Р., Теория полета, М., ИЛ, 1949. [Формула для определения момента сил, действующих на крыло, была получена С. А. Чаплыгиным (см. Чаплыгин С. А., Соч., т. II, М.—Л., 1933). — *Прим. ред.*]

Однако условие Жуковского никоим образом не дает надежной теории подъемной силы в общем случае! Так, в трехмерном пространстве область вне самолета, очевидно, является односвязной. Следовательно, любое локально безвихревое течение в пространстве должно иметь однозначный потенциал скоростей U при нулевой подъемной силе. Если бы это было действительно так, полет был бы невозможен.

Более утонченным является следующий парадокс Чизотти [1]). Рассмотрим течение Жуковского для плоской пластинки, схематически изображенное на рис. 2, *б*. Согласно теореме Кутта — Жуковского, результирующая сила должна быть нормальной к потоку; поскольку же давление всюду нормально к пластинке, эта сила должна быть нормальной к пластинке — очевидное противоречие. Как показал Чизотти, это объясняется совсем просто: на заднюю кромку действует конечная сила вследствие бесконечного отрицательного давления (подсоса), что связано, учитывая формулу (5), с бесконечным значением скорости в этой точке. Таким образом, парадокс связан с тем, что несостоятельна гипотеза (E) из § 1, и может быть назван парадоксом особой точки.

К сожалению, экспериментальные данные не подтверждают изменения подъемной силы с изменением формы крыла, указываемого теорией Жуковского. Мы получаем здесь следующий парадокс утолщения: теоретически коэффициент C_l должен возрастать с утолщением крыла; в действительности же обычно он убывает [2]).

§ 9. Эффект Магнуса; деривация

Игрокам в гольф и теннис известно стремление вращающегося мяча уклониться от своей нормальной траектории в направлении, в котором вращается его передняя часть. Это явление называется эффектом Магнуса. Согласно Рэлею ([12], т. I, 343—346), эффект Магнуса обычно объясняют качественно следующим образом.

Локальная скорость воздуха относительно мяча из-за его вращения больше с той стороны, где вращение направлено назад, чем там, где оно направлено вперед (см. рис. 3). Следовательно, по уравнению Бернулли (3), давление с одной стороны

[1]) См. Cisotti G., *Rend. Accad. Lincei*, 5 (1927), 16—21 и 7 (1928), 17—19 и 538—543; а также Pistolesi H., там же, 12 (1930), 409—411. (Этот парадокс был известен еще Н. Е. Жуковскому, который дал в связи с этим объяснение явления подсасывающей силы; см. Жуковский Н. Е., О поддерживающих планах типа Антуанетт, Труды отд. физ. матем. научн. о-ва любителей естествознания, XV, вып. 2 (1911). — *Прим. перев.*)

[2]) См. [1], стр. 252. — *Прим. перев.*

меньше, и это дает равнодействующую в направлении, соответствующем наблюдаемому.

На основании данного объяснения очень трудно получить количественный результат, так как у нас нет какого-либо определенного способа для того, чтобы связать вращение с циркуляцией — даже в случае цилиндра [1]). Прандтль предпринял героическую попытку определить хотя бы максимум подъемной силы L, который, как он утверждал, достигается тогда, когда значение циркуляции определяется при условии, что имеется одна-единственная критическая точка [2]).

Основываясь на этом, он нашел, что максимум коэффициента C_L равен 4π. Недавно это значение было превышено [3]) — еще

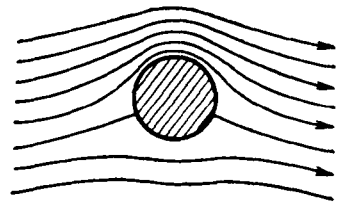


Рис. 3. Эффект Магнуса.

один факт, показывающий ненадежность нестрогих рассуждений.

Несостоятельность существующих объяснений эффекта Магнуса еще более ярко показывает следующий парадокс эффекта Магнуса.

Парадокс эффекта Магнуса. *При малых скоростях вращения направление отклонения в действительности противоположно тому, которое дает объяснение Рэлея (и которое наблюдалось Магнусом)* [4]).

Для того чтобы объяснить этот парадокс эффекта Магнуса, нужно, по-видимому, учесть турбулентность пограничного слоя—

[1]) Как показано в § 8, в случае сферы мы приходим даже к более глубокому парадоксу: вследствие односвязности циркуляция $\Gamma = 0$.

[2]) Доводы Прандтля изложены в ([3], § 27); для цилиндра радиуса c при относительной поступательной скорости a циркуляция $\Gamma = 4\ \pi ca$. По поводу более поздних экспериментальных данных см. [50], § 239.

[3]) Swanson W. M., Final Report on Contract DA-33-019-ORD-1434, Case Inst. Technology, December 31, 1956. При $V = \omega c = 17\,a$ коэффициент $C_L = 14{,}7$ и «продолжал возрастать с постоянной скоростью». Недавно, Glauert M. B. (*Proc. Roy. Soc.* **A242** (1957), 108—115) подверг вывод Прандтля критике, исходя из теоретических соображений.

[4]) См. [3], § 27 и 221; экспериментальные данные (в случае сферы) получил Маккол. Данные, приведенные в [3], § 239, показывают, что, по-видимому, аналогичная ситуация имеет место и для цилиндра.

явление, которое до сих пор не поддается математическому исследованию как краевая задача. Таким образом, при любом корректном истолковании реальной поперечной силы при малых скоростях вращения надлежит учитывать число Рейнольдса [1]).

Явление «деривации» аналогично эффекту Магнуса. Артиллеристам уже более ста лет известно, что вращающиеся снаряды имеют тенденцию отклоняться от вертикальной плоскости, в которой производится стрельба, и что такое отклонение происходит в направлении вращения головки снаряда. Однако это явление в течение многих лет понималось неправильно [2]).

Одно неверное объяснение было предложено известным математиком — Пуассоном. Он считал, что вследствие инерции ось снаряда отстает от направления касательной к траектории,

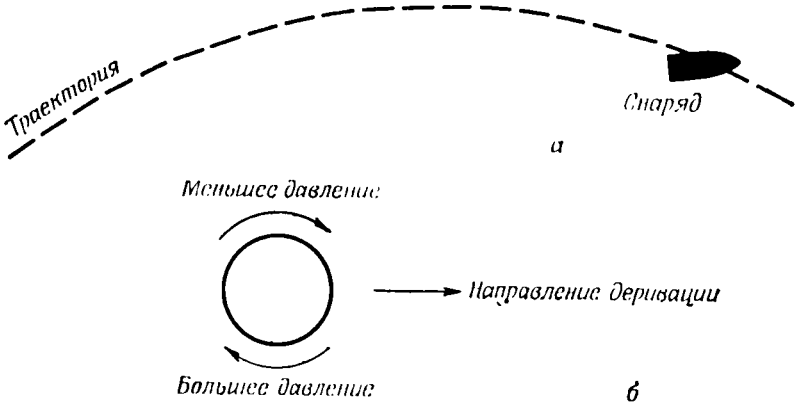


Рис. 4. Объяснение эффекта Магнуса, по Пуассону.

как схематически показано на рис. 4, *а*. Следовательно, на нижней стороне должно создаться большее давление, а значит и большее трение. В соответствии с рис. 4, *б* это должно привести к отклонению в наблюдаемом направлении. Ошибочность объяснения Пуассона становится очевидной, если применить его к вращению теннисного мяча: получилось бы направление отклонения, противоположное обычному эффекту Магнуса!

Правильное объяснение заключается в следующем. С помощью количественного исследования гироскопической устойчивости можно установить, что устойчивое положение оси снаряда (с правой винтовой нарезкой) находится справа от касательной к траектории, а не выше ее, как это утверждал Пуассон. Таким образом, деривация снаряда вызывается главным образом не-

[1]) См. Krahn E., *J. Aer. Sci.*, **23** (1956), 377—378.
[2]) Интересный исторический обзор дан в [5], гл. X.

посредственно аэродинамической поперечной силой и лишь косвенно — вращением.

Это опять-таки показывает ненадежность качественных соображений. Вероятность того, что случайное объяснение окажется правильным, равна 50%!

§ 10. Волновое лобовое сопротивление тонких крыльев

Парадокс Даламбера нельзя распространить на сверхзвуковое течение: даже без учета вязкости математические соображения приводят к существованию положительного лобового сопротивления. Ввиду парадокса обратимости это возможно только потому, что краевая задача (для стационарного движения), определяемая уравнениями Эйлера, не является корректной. Мы покажем сейчас это, начав с рассмотрения линеаризованного сверхзвукового течения (теория «тонкого крыла»).

Рассмотрим семейство независимых от времени сжимаемых течений, зависящих от параметра δ — толщины крыла. Мы предполагаем (гипотеза (Е) из § 1), что потенциал скорости можно записать в виде

$$U = ax + \delta\varphi(x, y, z) + O(\delta^2). \tag{14}$$

Подставляя его в формулу (10) и делая обычные в теории возмущений допущения, мы получаем [1]) при $\delta \to 0$

$$(M^2 - 1)\varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \qquad M = a/c. \tag{14*}$$

Ясно, что случаям дозвукового течения ($M < 1$), звукового течения ($M = 1$) и сверхзвукового течения ($M > 1$) отвечают уравнения в частных производных соответственно эллиптического, параболического и гиперболического типов [2]). Это простое замечание уже указывает на то, что краевая задача корректно поставлена лишь в дозвуковом случае.

В случае плоского течения $\varphi = \varphi(x, y)$ еще со времен Даламбера известно, что общее решение уравнения (14*) имеет вид

$$\varphi = F(x - \sqrt{M^2 - 1}\, y) + G(x + \sqrt{M^2 - 1}\, y), \tag{15}$$

где $F(r)$ и $G(s)$ — произвольные функции.

[1]) См. [6], § 141 или [10], стр. 245. Более подробное описание приложений см. в [10], гл. VIII.

[2]) Это верно также и без линеаризации, но в таком случае M будет зависеть от координат. Следовательно, возможны трансзвуковые потоки и соответствующие им дифференциальные уравнения смешанного типа (эллиптические в одних областях и гиперболические в других), как показано в § 6. [Смешанным течениям посвящена обширная литература; см., например, [7*] и [8*]. — *Прим. ред.*]

Для того чтобы определить $F(r)$ и $G(s)$, нужно использовать условие (7), которое при стационарном течении сводится к равенству $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = a\eta'(x) \tag{15'}$$

для «тонкого крыла», ограниченного кривой $y = \eta(x)$. Мы заменили в (15') $\frac{\partial}{\partial n}$ на $\frac{\partial}{\partial y}$, предположив, что тангенс угла наклона $\eta'(x) \ll 1$. Действительно, такая гипотеза (или, вернее, $\eta'(x) \ll M$) является основным допущением теории тонкого крыла.

Чтобы избежать парадокса обратимости и получить корректно поставленную задачу, необходимо систему (15), (15') дополнить некоторой добавочной гипотезой *необратимости*, выражающей интуитивно очевидный физический факт, что «волны скатываются вниз по течению». Если мы расположим тонкое крыло вдоль оси x, то последнюю гипотезу можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} F(x - \sqrt{M^2 - 1}\, y), & \text{если } y < 0, \\ G(x + \sqrt{M^2 - 1}\, y), & \text{если } y > 0. \end{cases} \tag{15*}$$

С учетом результата подстановки в уравнеиие Бернулли (5) наша система уравнений позволяет заключить о существовании *волнового давления*, которое, в приближении теории возмущений, получается в виде $p = \rho a^2 \eta'(x)$ на верхней поверхности крыла $y = \eta(x)$ и в виде $p = \rho a^2 \tilde{\eta}'(x)$ на нижней поверхности крыла $y = \tilde{\eta}(x)$. Определив продольную составляющую давления и выполнив интегрирование, мы получим для лобового сопротивления $D = \oint p\, dy$ выражение

$$D = \rho a^2 \int (\eta'\, d\eta + \tilde{\eta}'\, d\tilde{\eta}) = \rho a^2 \int [\eta'^2 + \tilde{\eta}'^2]\, dx, \tag{16}$$

где интеграл берется по длине крыла.

Для достаточно малых углов наклона приведенные формулы вполне хорошо согласуются с экспериментом ([10], стр. 346, 350) и, очевидно, дают положительное сверхзвуковое «волновое лобовое сопротивление». Любопытно, что они согласуются с очень старой квазиэмпирической формулой Эйлера, в которую входит универсальный постоянный множитель, определяемый, по предположению, экспериментально [1]).

[1]) Относительно применения к баллистическим задачам см. [5], § 12—16.

§ 11. Тонкие тела вращения

Слишком сложно рассматривать здесь применение уравнения (14*) Прандтля — Глауэрта к сверхзвуковому обтеканию так называемых «тонких», или «удлиненных», тел произвольной формы [1]). Мы только приведем несколько примеров, иллюстрирующих общий тезис о том, что если результаты не получены математически и физически строго, то им присуща тенденция становиться ненадежными.

Относительно простую задачу представляет собой осевое обтекание твердых тел вращения (артиллерийские снаряды без рыскания). Карман и Мур [2]) первыми пришли к выводу, что наличие волнового лобового сопротивления вызывает резкий рост сопротивления при движении тонкого снаряда, когда $M = 1$, и оценили это возрастание сопротивления на основе упрощений, указанных в § 10. Более чем через 10 лет Копал распространил этот вывод на снаряды с рысканием и показал, что упрощенная теория приводит к ряду ошибочных заключений [3]). В частности, в случае конусов под углом атаки поперечная сила, подсчитанная по формулам из § 10, убывает с возрастанием M, в то время как правильное приближение по теории возмущений дает ее *увеличение* (парадокс Копала).

В настоящее время признано (см. прим. 1) на этой стр.), что простая линеаризованная теория, приведенная в § 10, даже для тонких тел приводит к неправильному значению силы. В случае обтекания сверхзвуковым потоком тонких тел вращения, квадратичные члены в уравнении Бернулли при подсчете давления будут того же порядка величины, что и линейный член [4]).

Для некоторых частных приложений простые линеаризованные уравнения из § 10 нужно видоизменять тем или иным способом [5]). Так, для крыльев конечного размаха под углом атаки нужно рассматривать сбегающие вихревые слои. Кроме того,

---

[1]) См. Ward G. N., Linearized theory of steady high-speed flow, Cambridge Univ. Press, 1955.

[2]) *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **54** (1932), 303—310. Относительно современной «линеаризованной» теории см. [10], § 8.3; или [15], гл. VIII, § 15.

[3]) Kopal Z., *Phys. Rev.*, **71** (1947), 474; [10], стр. 377; подробнее — Tables of supersonic flow around yawing cones, Mass. Inst. Technology (1947), особенно стр. XVI, XVII. Экспериментальные данные приводят Holt M. и Blackie J., *J. Aer. Sci.*, **23** (1956), 931—936.

[4]) По-видимому, впервые это показал Lighthill M. J., *Reps. Mem. Aer. Res. Comm.*, 2003 (1945); см. также Broderick J. B., *QJMAM*, **2** (1949), 98—120 и [10], стр. 307.

[5]) Ursell F. and Ward G. N., *QJMAM*, **3** (1950), 326—348; Goldstein S., Proc. Int. Math. Congress, Cambridge, 1950, т. 2, особенно стр. 288—289; Adams M. C., Sears W. R., *J. Aer. Sci.*, **20** (1953), 85—98.

в случае закругленных тел вращения, таких как сфера, линеаризованная краевая задача, определяемая посредством уравнений (14*) и (15′), дает несуществующие особенности в критических точках (т. е. на оси симметрии). Но самый существенный дефект теории «тонкого крыла» заключается в том, что она не в состоянии предсказать существование *ударных волн.*

Ударные волны легко наблюдаются в виде четких линий на мгновенных фотографиях движения снарядов, таких, как снимок, изображенный на фронтисписе. В случае конусов и других остроконечных тел при достаточно больших числах Маха эти волны «присоединены» к вершине подобно характеристикам решений линейных гиперболических дифференциальных уравнений. В других же случаях они «отходят» от вершины и оказываются при этом впереди снаряда — там, где по линеаризованной теории не должно быть никакого возмущения.

§ 12. Парадокс Эрншоу

Понятие «ударной волны» можно также вывести теоретически, отправляясь от простого парадокса, которым мы обязаны Эрншоу [1]). Наш орган слуха свидетельствует, что звук проходит большие расстояния почти без искажений и с постоянной скоростью, зависящей от температуры воздуха. Этот опытный факт делает правдоподобным предположение, что плоские звуковые волны распространяются в идеальном невязком газе, не искажаясь и не затухая. Однако это не так, что показывает парадокс Эрншоу.

Парадокс Эрншоу. *При адиабатических колебаниях газа плоские звуковые стационарные волны конечной амплитуды математически невозможны.*

Доказательство. Предположим, что форма звуковых волн неизменна и что волны распространяются с постоянной скоростью, нормальной к волновому фронту. Тогда, если мы перейдем к осям координат, движущимся вместе с волнами, то увидим, что движение жидкости не только одномерно, но и *стационарно.* Выбрав в качестве направления движения ось x, мы можем написать $\rho = \rho(x)$, $u = u(x)$ и т. д., и (без учета силы тяжести) уравнение Бернулли (8) сведется к виду $udu + dp/\rho = 0$. Кроме того, уравнение неразрывности (1) перейдет в равенство

[1]) Earnshaw S., *Phil. Trans.*, **150** (1860), 133—148; см. также Stokes, *Phil. Mag.*, 33 (1848), 349; Rankine W. J. M., *Phil. Trans.*, **160** (1870), 277; [12], т. 5, 573 (или *Proc. Roy. Soc.*, **A84** (1910), 274—284); [7], § 283; [6], § 51.

$\rho u = \text{const} = C$, или $u = C/\rho$. Подставляя это в предыдущее соотношение, получаем уравнение

$$-\frac{C^2 d\rho}{\rho^3} + \frac{dp}{\rho} = 0, \text{ или } dp = \frac{C^2 d\rho}{\rho^2}. \tag{17}$$

Следовательно, подобное волновое движение возможно только в случае, если жидкость удовлетворяет уравнению состояния (3) частного вида:

$$p = p_0 - \frac{C^2}{\rho}. \tag{18}$$

Но нам не известен ни один газ, для которого адиабатическое [1]) уравнение состояния имело бы такой вид.

§ 13. Возникновение ударной волны

Как и многие другие парадоксы, парадокс Эрншоу содержит в себе зерно существенной истины. При более тщательном исследовании соответствующих уравнений можно установить, что для адиабатического течения газа более плотные части волны конечной амплитуды нагоняют менее плотные и в конечном счете перегоняют их. Показывается это следующим образом.

Пусть a обозначает всю массу жидкости слева от данной точки, так что $x(a, t)$ представляет собой положение частицы a в момент времени t, а $\frac{\partial x}{\partial a}$ есть удельный объем $\sigma = \frac{1}{\rho}$. Тогда D/Dt из § 3 заменяется на $(\partial/\partial t)_a$, $(\partial x/\partial t)_a = u$ и $(\partial^2 x/\partial t^2)_a$ есть субстанциональное ускорение; здесь индекс a означает, что величина a остается постоянной. Уравнение неразрывности (1′) удовлетворяется автоматически, поскольку $D\rho/Dt = -\rho^2 \partial^2 x/\partial t\, \partial a$ и $\operatorname{div} u = \rho \partial^2 x/\partial a\, \partial t$. Кроме того, можно использовать уравнение состояния (3), для того чтобы исключить p посредством соотношения

$$p = h^{-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = H(\sigma) = H\frac{\partial x}{\partial a}. \tag{19}$$

Следовательно, если не учитывать силу тяжести, то формулы (1)—(3) эквивалентны уравнению

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -H'\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}. \tag{20}$$

[1]) Действительно, если принять (18), то получим $d^2p/d\rho^2 < 0$, что противоречит второму началу термодинамики.

Пуассон открыл важный класс решений уравнения (20), задаваемый формулой

$$u = G(x - (c + u)t), \tag{20*}$$

где $G(r)$ — произвольная функция. Эти решения были названы *простыми* волнами ([6], стр. 92); они характеризуются свойством: $u = \int_{\sigma_0}^{\sigma} c(\sigma)\, d\sigma/\sigma$, где $c^2 = dp/d\rho = -\sigma^2 dp/d\sigma$ есть квадрат скорости звука, которая является функцией удельного объема σ. Как показал Адамар, любая плоская волна, только с одной стороны вступающая в жидкую среду (обычную жидкость или газ), в начальный момент находящуюся в состоянии покоя, должна быть простой волной.

Так как $u = \int c(\sigma)\, d\sigma/\sigma$, то формула (20*) дает функциональное соотношение между u и σ, а следовательно, и между u и c. Делая снова подстановку в (20*), при $p = k\rho^{\gamma}$ ($\gamma > 1$), легко показать, что более плотные части газа нагоняют менее плотные ([6], стр. 96), причем с постоянной скоростью. Следовательно, в течение конечного промежутка времени неизбежно возникает *разрыв плотности* или «ударная волна», что находится в самом явном противоречии с гипотезой (E) из § 1.

§ 14. Термодинамика невязких жидкостей

Для того чтобы объяснить явление ударной волны, необходимо привлечь некоторые важные термодинамические понятия [1]); одних механических концепций для этого недостаточно. Так, например, необходимо рассматривать *внутреннюю энергию* жидкости $E(p, T)$ даже тогда, когда ее можно исключить из окончательных уравнений, как в случае адиабатического течения. Эта величина входит в закон сохранения энергии согласно формуле

$$dQ = dE + p\, dV. \tag{21}$$

Здесь $p\, dV$ есть дифференциал работы при отсутствии внешних сил.

Совершенный газ можно определить посредством уравнений Эйлера, термодинамического уравнения состояния $p = \rho RT$, где

[1]) Превосходное изложение термодинамики сжимаемых жидкостей см. в [10] или Липман Г. В., Рошко А., Элементы газовой динамики, М., ИЛ, 1960. (На русском яз.: Зельдович Я. Б., Теория ударных волн и введение в газодинамику, М., изд. АН СССР, 1946; Зауэр Р., Введение в газовую динамику, М., Гостехиздат, 1947. — *Прим. перев.*)

R — газовая постоянная, и формулы для внутренней энергии $E = C_V T$, где C_V — еще одна постоянная (удельная теплоемкость при постоянном объеме).

Для *изотермического* течения $T = \text{const}$ и из соотношения $p = \rho RT$ следует формула (3а) при $\gamma = 1$. В случае *адиабатического* течения предполагается, что теплота переносится только посредством конвекции (нет ни теплопроводности, ни излучения); при этом имеем $dQ = 0$ в формуле (21). Для единичной массы $\left(\text{так что } V = \frac{1}{\rho}\right)$ имеем тогда $pV = RT$ и $E = C_V T = (C_V/R)pV$. Тогда формула (21) дает в результате уравнение

$$0 = dE + p\,dV = (C_V/R)\,V\,dp + (1 + C_V/R)\,p\,dV.$$

Полагая $\gamma = (R + C_V)/C_V$, получаем соотношение $dp/p = -\gamma dV/V = \gamma d\rho/\rho$, из которого следует «политропное» уравнение состояния (3а) : $p = k\rho^\gamma$.

Совершенную жидкость можно определить посредством уравнений Эйлера и условия несжимаемости $V = \text{const}$ (уравнение (3б)).

Уравнения Рэнкина — Гюгонио.

Используя законы сохранения массы, количества движения и энергии, можно также найти соотношение между значениями давления, плотности и температуры p_1, ρ_1, T_1 перед ударной волной и значениями тех же величин p_2, ρ_2, T_2 за ударной волной. Например, для совершенного газа эти величины зависят только от одного параметра — отношения давлений $P = p_2/p_1$ или *интенсивности скачка* $P - 1$. Тогда получим ([10], стр. 30) следующие равенства:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P + \beta}{\beta P + 1}, \qquad \beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

$$c = c_1\left[1 + \frac{(\gamma + 1)(P - 1)}{2\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Парадокс обратимости, в силу которого можно было бы поменять местами индексы 1 и 2 в предшествующих формулах и принять $P < 1$, можно избежать, если привлечь второе начало термодинамики. (В § 13 принцип, согласно которому более плотные части баротропных течений нагоняют менее плотные, приводит к такому же заключению. Это следует из неравенства $\gamma = (R + C_V)/C_V > 1$, которое в свою очередь следует из положительности величин R и C_V в силу физических соображений.)

Соотношения для косых ударных волн можно легко вывести из соотношений для нормальных скачков уплотнения, используя подвижные оси (§ 67).

§ 15. Буруны и боры

Между длинными *безвихревыми* гравитационными волнами в жидкости постоянной малой глубины и волнами сжатия в адиабатическом газе при $\gamma = 2$ существует замечательная аналогия. Длинные гравитационные волны бесконечно малой амплитуды распространяются с постоянной скоростью $c = \sqrt{gh}$ без изменения своей формы, совсем как при линеаризованном приближении сверхзвукового течения в § 10. Длинные гравитационные волны *конечной* амплитуды распространяются со скоростью $\sqrt{gh}$, которая возрастает с увеличением местной высоты волны. Следовательно, гребень всякой длинной волны на мелководье нагоняет впадину так, как это описано в § 13. Наклон фронта волны постепенно становится все круче, пока он не станет вертикальным, и волна, наконец, «обрушивается» под собственной тяжестью.

Рэлей [1]) использовал эту аналогию, чтобы качественно объяснить превращение в «боры» приливных волн при их распространении в устьях рек. Подобные «боры» получаются чаще всего в постепенно сужающихся устьях со ступенчатым дном: относительная высота приливных волн увеличивается вследствие получающейся концентрации всей энергии волны в меньшем поперечном сечении и на меньшей длине волны [равной произведению (12 часов) $\sqrt{gh}$].

Нового математического успеха удалось добиться благодаря замечанию Рябушинского (см. прим. 1) на этой стр.), который указал, что формула $c = \sqrt{g(h+y)}$, где y — локальная высота волны, соответствует выбору $\gamma = 2$ в соотношении (3а). Вскоре после этого Джеффри (см. прим. 1) на этой стр.) применил идею, аналогичную идее Рэлея при исследовании разрушения волн на отлогих отмелях. По мере того как волны переходят на мелководье, их скорость уменьшается. Из-за этого энергия волны сосредоточивается на более коротком участке, что еще больше увеличивает высоту волны и ее крутизну. Если отмель достаточно полога, гребень волны снова попадает во впадину, образуя «бурун» прибоя.

Стокер [2]) и другие авторы пытались объяснить количественно образование «бурунов» и «боров» при помощи вышеприведен-

[1]) *Proc. Roy. Soc.*, **A90** (1914), 324—328; [7], стр. 175—177, 182; см. также Riabouchinsky D., *Comptes Rendus*, **195** (1932), 988—989; [6], стр. 32—35. Результаты Джеффри см. Cornish V., Ocean Waves, Cambridge, 1934, стр. 154—159.

[2]) Стокер Дж., Волны на воде, М., ИЛ., 1959, гл. 10, § 7, § 10 и приведенная там литература.

ных соображений. Это значит, что они пытались рассматривать эти явления в рамках рациональной гидродинамики Лагранжа. Однако представляется сомнительным, что движение жидкости в действительном прибое и в приливных волнах является безвихревым настолько, чтобы такая модель была реалистичной. В настоящем прибое и в настоящих приливных волнах всегда имеется значительная завихренность из-за откатывания предшествующих волн («подмыв»), из-за течения всей массы жидкости и т. д. и, возможно, из-за «расслоения» (стратификации), вызываемого наличием взвешенного песка. Вследствие этого реальные буруны могут «нырять», «перекатываться» или «расплескиваться», а реальные боры могут продвигаться в виде изолированной стены воды или в виде ступенек [1]). Кажется маловероятным, чтобы безвихревые гравитационные волны давали такое разнообразие явлений.

Кроме того, следует вспомнить, что в абстрактную теорию входят *два* параметра: отношение h/λ глубины к длине волны и отношение h/R глубины к минимальному радиусу кривизны поверхности R. Как показал в 1925 г. Стройк [2]), при любых *фиксированных* h и λ волны достаточно малой конечной амплитуды могут распространяться без изменения своей формы; это видимое противоречие с выводами Рэлея и Рябушинского можно назвать парадоксом длинной волны. Объяснение заключается в том, что построения Стройка относятся к случаю, когда h/R сравнимо с h/λ, в то время как выводы Рэлея применимы только к случаю $h/\lambda \ll h/R \ll 1$.

§ 16. Парадокс Ферри

Гораздо более недавний парадокс, которым мы обязаны Ферри [3]), относится к сверхзвуковому обтеканию с «присоединенной» ударной волной наклоненного кругового конуса, ось которого образует угол «рысканья» δ с направлением течения. Как будет показано в § 88, из гипотезы (С), § 1, следует, что такое течение должно обладать *конической симметрией*. Поэто-

---

[1]) См. Mason M., Gravity waves, 315—320, Nat. Bu. Standards Circular 521, 1952, или гл. III из работы Cornish'a, цитированной в примечании 1) на стр. 41.

[2]) Struik D. J., *Rendic. Lincei*, **1** (1925), 522—527. Обсуждение парадокса длинной волны см. в [7]; Ursell F., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 685—694; Benjamin T. B., Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A224** (1954), 448—460.

[3]) Ferri A., *NACA, Rep.*, 1045 (1951); см. также Holt M., *QIMAM*, 7 (1954), 438—445.

му мы будем рассматривать $u = u(\varphi, \theta)$ в сферических координатах.

Если отождествить соответствующие линии тока при центральном проектировании из вершины конуса, то они составят однопараметрическое семейство, которое схематически изображено на рис. 5. За исключением линий тока, лежащих в плоскости симметрии, для которых $\theta = 0, \pi$, все линии тока стремятся

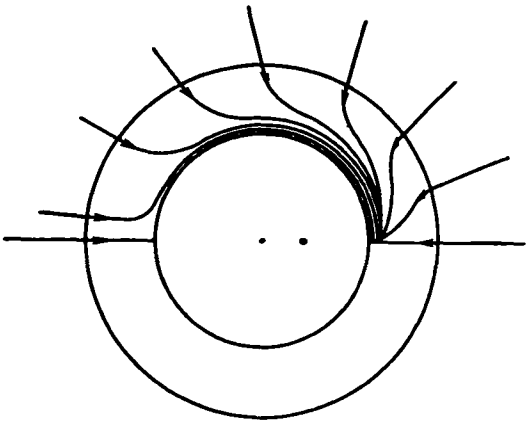


Рис. 5. Парадокс Ферри.

к предельному направлению $(\alpha - \delta, \pi)$, т. е. все они стремятся влиться в прямую линию тока, идущую по конусу и составляющую наименьший угол $\alpha - \delta$ с направлением течения. Но, в силу уравнений Рэнкина — Гюгонио, линиям тока, пересекающим «присоединенную» ударную волну под различными углами, соответствуют различные значения энтропии. Поэтому $u(\varphi, \theta)$ имеет *особую точку* в $(\alpha - \delta, \pi)$, что снова нарушает гипотезу (Е) из § 1. Эта особенность делает неправомерным разложение $u(\varphi, \theta)$ по степеням угла рысканья δ и в ряд Фурье относительно θ. Следовательно, вычисления Копала для оценки эффектов рысканья, которые основаны на теории возмущений, использующей такие разложения [1]), не являются строгими. А следовательно, строго не обоснован и парадокс Копала (§ 11).

[1]) Stone A. H., *J. Math. Phys.* MIT, 27 (1948); 67—81. [Вне тонкого вихревого слоя вблизи конуса разложение Стоуна правильно. В [11*] оно аналитически продолжено внутрь вихревого слоя, где оно переходит в разложение Виллета [12*]. — *Прим. ред.*]

§ 17. Парадокс тройной ударной волны

В § 14 упоминалось о том, что уравнения Рэнкина — Гюгонио выводятся из законов сохранения. Эти уравнения показывают, что в случае совершенного газа отношения давлений, плотностей и температур p/p', ρ/ρ', T/T' по разные стороны от стационарной ударной волны зависят только от одного параметра (интенсивности скачка или числа Маха — см. [15], гл. IV, § 4). Кроме некоторых исключений, отмеченных в конце § 14, эти выводы подтверждаются экспериментально, причем на практике можно наблюдать ударные волны различной силы.

Не так обстоит дело с «кратными» ударными волнами. В случае двойной, «регулярно» отраженной ударной волны (см. рис. 6, *а*) и тройной ударной волны, или *Y*-волны Маха (см.

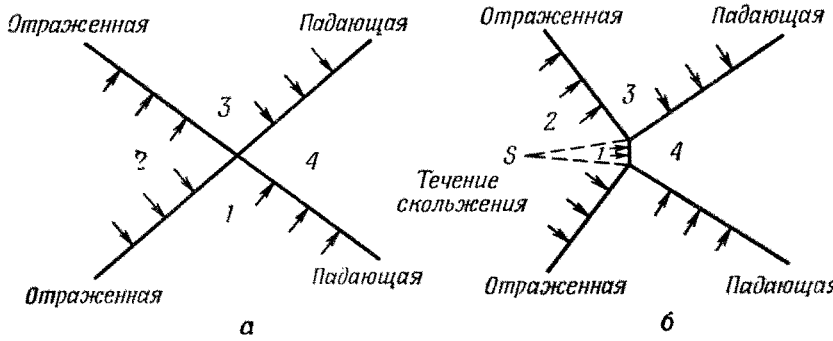


Рис. 6. Отражение ударных волн.

а — регулярное отражение; *б* — *Y*-образное отражение по Маху.

рис. 6, *б*), соответствующие математические расчеты возможны, если предположить, что в каждом из получающихся при этом секторов (1, 2, 3, 4) физические переменные принимают определенные предельные значения вблизи особой точки в «вершине» ударной волны. Многие из таких расчетов также подтверждаются экспериментально, так что эта теория является весьма правдоподобной.

Однако в случае «слабых» ударных волн регулярные отражения происходят при углах падения несколько бóльших, чем это допускается теорией, а *полученные при расчете предельные значения для тройных ударных волн значительно отличаются от*

наблюдаемых. Это противоречие, которое можно назвать парадоксом тройной ударной волны, было, по-видимому, открыто Дж. фон Нейманом (1945 г.).

Не раз пытались разрешить этот парадокс, который, возможно, является «парадоксом особой точки», т. е. получается из-за чрезмерно упрощенной картины локального поведения вблизи особой точки. Но до сих пор не дано ни одного удовлетворительного истолкования [1]).

§ 18. Значение уравнений Эйлера

Предыдущие парадоксы показывают, что область применимости уравнений Эйлера имеет некоторые ограничения; однако эти уравнения все еще являются основным орудием практической гидромеханики. Так, они дают возможность приближенно вычислить: 1) распределение давлений на лобовой поверхности препятствий; 2) подъемную силу крыла самолета; 3) силы при движении с «кавитацией» (гл. III) и наличии струй; 4) гидродинамическое противодействие ускорению твердого тела в жидкости («присоединенная масса», см. гл. VI); 5) распространение гравитационных волн, включая сейши, приливы и отливы; 6) распространение звука (акустика); 7) распределение давления и скорости течения в сверхзвуковых соплах и 8) сверхзвуковое лобовое сопротивление.

При подобных расчетах необходимо иметь в виду описанные выше парадоксы, а также большое разнообразие течений, удовлетворяющих теории невязкого обтекания при наличии завихренности. В теоретической гидродинамике это разнообразие иногда как бы остается в тени из-за того, что слишком много внимания уделяют теоремам существования и единственности — кстати сказать, при доказательстве таких теорем часто исходят из нереальных допущений. Это подчеркивается в большинстве книг по «современной гидродинамике» (например, в работах [3] и [24]), где с самого начала указывают, что возможна неоднозначность решений, а также отмечают такие удивительные экспериментальные явления, как пограничные слои и турбулентность.

Однако наличие таких обстоятельств вовсе не должно снижать значение чисто математической теории невязких жидко-

[1]) См. Bleakney W. and Taub A. H., *Revs Mod. Phys.*, **21** (1949), 587—605; [6], стр. 342; [15], стр. 144; Polachek H. and Seeger R., *Phys. Rev.*, **84** (1951), 922—929, а также [16] гл. 5 тех же авторов и приведенная там литература. Более новые работы Jahn R. G., *J. Fluid Mech.*, 2 (1957); 33—48 и Sternberg J., *Physics of Fluids*, 2 (1959), 179—206.

стей. Теория в состоянии указать существенные возможности, которые «здравым смыслом» были бы отвергнуты как абсурдные.

Например, теория указывает, что могут быть *крылья с пренебрежимо малым лобовым сопротивлением.* Хотя этот идеал пока еще не достигнут, он явился стимулом для многих важных работ (см. § 29).

Наконец, из парадокса обратимости следует возможность того, что область «мертвого» воздуха, или «след», может образоваться *впереди* цилиндра. Наличие такой области сделало бы возможным обтекание конечного цилиндра таким же потоком, как и известное обтекание Тейлора — Маккола (§ 85) для конического снаряда. Такое течение характеризуется тем, что на боковой поверхности конуса всюду постоянное давление. Согласно теории «следов» (гл. III), твердый конус можно было бы, не нарушая равновесия, заменить идеальным невязким воздухом при постоянном избыточном давлении. Математически это означает, что в идеальной жидкости возможно обтекание плоского диска сверхзвуковым потоком, при котором невидимый конический воздушный барьер защищает диск от давления воздуха, намного уменьшая лобовое сопротивление.

Здравый смысл и интуиция немедленно отвергают возможность подобного течения как до нелепости неустойчивого. Логическая основа здесь такая же, как и в том случае, когда отвергают возможность существования «следа» в области вверх по течению. Кажется в высшей степени правдоподобным, что наличие препятствия дает себя знать лишь в области, расположенной вниз по течению [1]).

И все же в данном случае, по-видимому, скорее ошибается здравый смысл, чем математический вывод! Снимки, сделанные в Абердинской научно-исследовательской баллистической лаборатории (см. фронтиспис), показывают, что очень тонкая игла, помещенная перед диском, действительно способна создать нечто вроде подобного «абсурдного» течения.

Ввиду этого и других примеров мы считаем, что у математиков нет оснований думать, будто в гидродинамике снижается значение дедукции (при сопоставлении ее с «физическими выводами»), *если* учитываются те гидродинамические парадоксы, которые выявились в эксперименте.

[1]) Те же самые интуитивные догадки были использованы в § 10, чтобы выделить более предпочтительное «простое обтекание» тонкого крыла.

Глава II

ПАРАДОКСЫ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ

§ 19. Уравнения Навье — Стокса

Несмотря на значительную область применения уравнений Эйлера — Лагранжа, их, вообще говоря, больше не считают приемлемой основой для теоретической гидродинамики. Вместо этих уравнений используются уравнения Навье — Стокса, вывод которых мы сейчас кратко изложим.

Впервые эти уравнения были выведены Навье (1822 г.) и Пуассоном (1829 г.), применившим упрощенную молекулярную модель для газов, что привело к введению положительной *вязкости* $\mu > 0$, которая, как предполагалось, описывает молекулярную диффузию количества движения.

Однако в настоящее время общепризнано, что простые законы для межмолекулярных сил, принятые обоими учеными, безнадежно не соответствуют действительности, особенно в случае реальных жидкостей. Поэтому принципиально более предпочтительным в настоящее время считается континуальный подход Сен-Венана (1843 г.) и Стокса (1845 г.), который позволяет избежать указанных предположений [1]). Мы начнем с изложения этого континуального (или «макроскопического») подхода.

Такой подход основан на фундаментальной гипотезе, заключающейся в том, что к напряжениям давления, которые рассматривал Эйлер, нужно добавить *вязкие* напряжения, *линейно* зависящие от *скоростей деформаций*. Ниже приводится краткое резюме применяемых при этом аргументов.

Задача заключается в том, чтобы найти связь между матрицей (вязких) напряжений $P = \|p_{ij}\|$ и матрицей скоростей деформации $\|\partial u_i/\partial x_j\|$. Коши показал, что для любой среды, если считать недопустимыми бесконечно большие угловые

---

[1]) Полную библиографию см. в [7], стр. 723; исследования Стокса см. в [13], т. 1, стр. 78 и дальше; стр. 182 и дальше. Хорошее современное изложение см. Serrin J., *J. Math. Mech.*, 8 (1959), 459—470. (См. также [1*], [13*]. — *Прим. перев.*)

ускорения (гипотеза (Е) из § 1), матрица напряжения должна быть симметричной: $p_{ij} = p_{ji}$. С другой стороны, матрица скорости деформации есть сумма кососимметричной составляющей

$$\frac{\| \partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i \|}{2},$$

соответствующей вращению абсолютно твердого тела, и симметричной составляющей

$$S = \frac{\| \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i \|}{2}.$$

Так как при вращении твердого тела физическая деформация отсутствует, то симметричная матрица S выражает истинную скорость деформации.

При наличии изотропности главные оси матриц P и S должны совпадать (мы напоминаем известную теорему алгебры, согласно которой всякую симметричную матрицу можно свести к диагональному виду путем вращения, приведя ее к соответствующим «главным» осям координат). Далее, из наших предположений о линейности и изотропности нетрудно получить, что относительно главных осей справедливо соотношение

$$p_{ii} = p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{2\mu\, \partial u_i}{\partial x_i} \tag{1}$$

при надлежащих постоянных λ и μ. Кроме того, с учетом симметрии относительно главной диагонали, можно записать равенство

$$p_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Возвращаясь к общей системе координат, мы получим следующие основные уравнения:

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{1*}$$

которые будем применять ниже.

Если не вводить предположения о несжимаемости, то очень трудно получить для системы уравнений Навье — Стокса корректно поставленную краевую задачу, условия которой были бы физически состоятельными. Прежде всего часто бывает неизвестна величина λ (см. § 33). Стокс пробовал предположить, что «вторая вязкость» μ' обращается в нуль:

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \tag{2}$$

Это может быть выведено из кинетической теории для одноатомных газов [1]). Можно и ошибочным способом вывести условие (2), *определив* давление p в виде $(p_{11} + p_{22} + p_{33})/3$. Ловушка состоит в том, что не известно, определяет ли это «давление» плотность согласно термодинамическому уравнению состояния $\rho = \rho(p, T)$, в котором p и ρ берутся из статических измерений. Если это так, то условие (2) имеет место ([7], стр. 718); в противном случае, мы не знаем, как связать термодинамическое давление с тензором напряжения $\| p_{ij} \|$.

§ 20. Реальные газы и жидкости

Помимо сказанного, в реальных жидкостях величины λ и μ изменяются вместе с температурой T и давлением p; например, изменения температуры имеют большое значение для смазки. В лучшем случае можно надеяться, что $\lambda(p, T)$ и $\mu(p, T)$ — однозначные функции. Для того чтобы эту зависимость учесть математически, уравнения Навье — Стокса необходимо дополнить по меньшей мере уравнением теплопроводности. Это делает краевую задачу совсем не поддающейся решению; но даже и дополненная система физически не точна, так как мы пренебрегли излучением. (Такое пренебрежение весьма правдоподобно в силу гипотезы (B) из § 1.)

Однако движение реальных жидкостей связано и с другими физическими эффектами, которые не учитывались ни Навье, ни Стоксом. Так, в реальных газах при гиперзвуковых скоростях течения важную роль играют эффект релаксации, молекулярная диссоциация и ионизация [2]). Будущий специалист по гидромеханике, которому придется иметь дело с задачами, связанными со спутниками и их возвращением, должен дополнительно к уравнениям Навье — Стокса хорошо ознакомиться с химической кинетикой.

Подобным образом бичом первых сверхзвуковых аэродинамических труб были ударные волны, возникавшие из-за конденсации водяных паров в воздухе — еще одна «скрытая переменная», которую игнорируют при постановке задач по Навье и Стоксу; см. [16, гл. 5].

Экспериментально было обнаружено, что затухание звука в жидкостях и газах — явление, которое определенно предска-

[1]) Maxwell J. C., *Phil. Trans.*, 157 (1867), 49—88; Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1961. Дюгем показал, что из второго начала термодинамики следует $\mu' \geqslant 0$.

[2]) См. Lighthill M. J., в «Surveys in Mechanics», Cambridge Univ. Press, 1956; 250—351; Хейз У. Д. и Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, М., ИЛ, 1962.

зывается любой точной теорией сжимаемых вязких жидкостей,— в значительной мере зависит от молекулярных эффектов (релаксации), см. § 33.

Ввиду упомянутых выше трудностей, по-видимому, разумно ограничиться рассмотрением *несжимаемых* вязких жидкостей, но и в этом случае известны различные аномалии. Так, многие жидкости, состоящие из длинных молекулярных цепочек или содержащие глинистые взвеси, называются «неньютоновыми» — таков употребляемый в настоящее время рабочий термин для жидкостей, которые не удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса. Сверхтекучесть жидкого гелия — еще одно явление, которое не согласуется с теорией Стокса [1]).

§ 21. Несжимаемые вязкие жидкости

Ввиду трудностей, описанных в § 20, основное внимание математиков было сосредоточено на уравнениях Навье — Стокса для несжимаемых вязких жидкостей в предположении, что величины μ и ρ можно считать примерно постоянными. Большинство специалистов считает, что *теоретическая гидродинамика*, основывающаяся на уравнениях Навье — Стокса, дает довольно точное приближение динамики *реальных* жидкостей, если число Маха M настолько мало, что можно пренебречь эффектами сжимаемости. Они уверены в том, что (перефразируя Лагранжа) «если бы уравнения Навье — Стокса были интегрируемы, то при малых числах Маха можно было бы полностью определить все движения жидкости» (ср. § 1). Для того чтобы исследовать, насколько обоснована такая уверенность, мы преобразуем сначала эти уравнения к более удобному виду.

Объединив уравнения (1*) с условием несжимаемости (формула (1′) из гл. I), мы получим уравнение

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \mu\left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i}\right).$$

Если при обычном выводе уравнений движения учесть члены, содержащие величину μ, то получим вместо уравнения Эйлера (2) в гл. I следующее уравнение:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{3}$$

Вместе с уравнением

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

[1]) См. London F., Superfluids, Wiley, 1954, стр. 6—13; Donnelly R. J., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 1461—1463 и приведенную там литературу.

уравнение (3) определяет (ньютонову) *несжимаемую вязкую жидкость*.

Легко учесть, как действует сила тяжести на твердое тело, погруженное в подобную жидкость, используя следующий принцип [1]).

Теорема 1. *Для вязкой жидкости с постоянной плотностью* ρ_0 *гравитационный эффект эквивалентен наложению гидростатического давления* $\rho_0 G$.

Доказательство. Полагая в уравнении (3) $g_i = -\partial G/\partial x_i$, где G — гравитационный потенциал, мы получим в результате уравнение

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}\tilde{p} = \nu\nabla^2 u_i, \qquad \text{где } p = \tilde{p} + \rho_0 G. \tag{5}$$

Предостережение. Заметим, что преобразование теоремы 1 не сохраняет обычного краевого условия на «свободной поверхности» $p = \text{const}$ для границы газ—жидкость. Следовательно, оно бесполезно при изучении волн на поверхности и кавитации (гл. III).

Для того чтобы получить из уравнений (3) и (4) корректно поставленную краевую задачу, вместо уравнения (7) гл. I введем краевое условие прилипания [2]) в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ на любой фиксированной границе.} \tag{6}$$

(На движущихся границах $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ — скорости движения границы, в то время как в невязком случае требуется, чтобы была непрерывной только нормальная составляющая скорости.)

Напомним также основной принцип подобия.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет уравнениям* (3), (4) *и* (6) *при* $\rho = \text{const}$. *Если величины* V, L, ν, V', L', ν' *постоянные и такие, что* $VL/\nu = V'L'/\nu'$, *то*

$$\mathbf{u}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{V'}{V}\right)\mathbf{f}\left(\frac{L\mathbf{x}}{L'}, \frac{LV't}{L'V}\right) \tag{7}$$

также удовлетворяет уравнениям (3), (4) *и* (6), *где проведена замена* ρ *на* ρ' *и* p *на* p', *причем*

$$p' - \rho' G = \frac{\rho' V'^2}{\rho V^2}(p - \rho G). \tag{8}$$

---

[1]) Karman Th., *J. Aer. Sci.*, 8 (1941), 337—356. В невязком случае этот результат получен Даламбером, Théorie de la résistance des fluides, статьи 48, 56, 91, и Аванцини (1807).

[2]) О значении этого условия мы скажем в § 34.

Другими словами, любое изменение масштаба (в пространстве и времени), сохраняющее неизменным *число Рейнольдса* $VL/\nu = \rho VL/\mu = \mathrm{Re}$, переводит несжимаемые течения, удовлетворяющие уравнениям Навье — Стокса, в решения тех же самых уравнений.

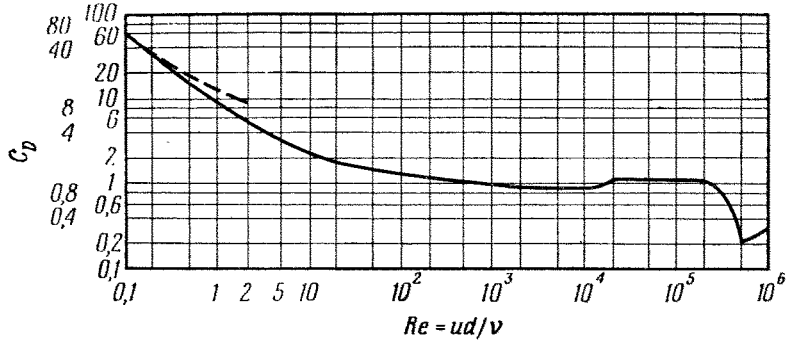


Рис. 7а. $C_D(\mathrm{Re})$ для цилиндра.

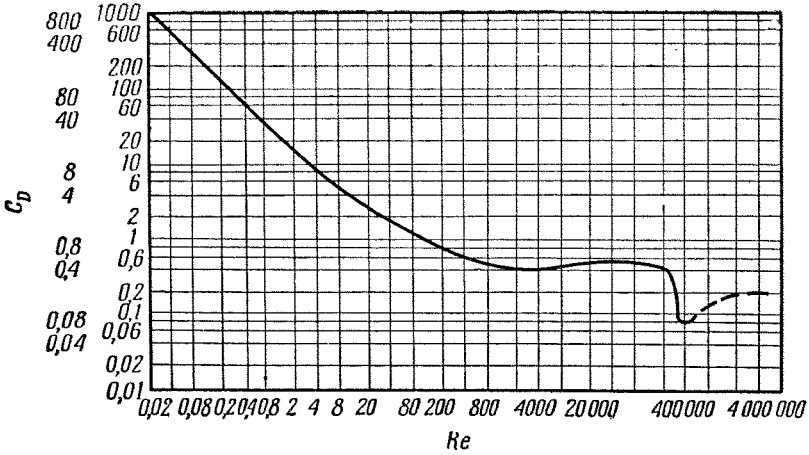


Рис. 7б. $C_D(\mathrm{Re})$ для сферы.

Следствие. Если два стационарных течения удовлетворяют краевой задаче (3), (4), (6) при одном и том же числе

Рейнольдса и если эта краевая задача математически корректно поставлена, то обтекаемые этими течениями тела должны иметь один и тот же коэффициент лобового сопротивления $C_D(\mathrm{Re})$.

Классическое экспериментальное подтверждение данного следствия (но не обязательно тех гипотез, которые при этом были использованы!) показано на рис. 7а и 7б, где приведены коэффициенты лобового сопротивления соответственно для цилиндра и сферы. Едва ли можно было предположить существование этих замечательных кривых, если бы свойства вязкости не были указаны в точной математической формулировке!

Представления, лежащие в основе теоремы 2, будут подробно проанализированы в § 71.

§ 22. Парадокс неаналитичности

Лагранж построил первое доказательство того, что в невязкой жидкости завихренность частицы жидкости является перманентной. К сожалению, доказательство Лагранжа, как показал Стокс ([13], т. 1, стр. 106—112), ошибочно. Оно одинаково применимо и к областям в вязкой жидкости, где эта завихренность *неперманентна!* Ошибка заключалась в том, что скорость и завихренность предполагались *аналитическими* функциями времени.

Если это принять (согласно гипотезе (Е) из § 1), то можно рассуждать следующим образом. Основное уравнение (3) эквивалентно (если применить операцию rot к обеим его частям) уравнению

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} \tag{9}$$

относительно завихренности $\boldsymbol{\xi} = \nabla\times\mathbf{u}$. С помощью независимых переменных Лагранжа $\mathbf{a}$ и t, где $\mathbf{a}$ относится к движущейся частице, так что $\partial/\partial t$ ($\mathbf{a}$ фиксировано) есть D/Dt, мы можем преобразовать частные производные по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum A_{kj}(\mathbf{a},\, t)\frac{\partial}{\partial a_j}.$$

Применяя эту операцию к уравнению (9), получаем соотношение

$$\frac{D\xi_i}{Dt} + \sum \xi_k(\mathbf{a},\, t)\, A_{kj}(\mathbf{a},\, t)\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \nu\nabla^2\xi_i + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\,u_i. \tag{10}$$

Последовательно дифференцируя соотношение (10) по времени t при постоянном $\mathbf{a}$, получим последовательность явных выражений для $D^n\xi_i/Dt^n$. Легко показать, что каждый член в

каждом таком выражении содержит в качестве множителя либо ξ_i, либо $\nabla^2\xi_i$, либо одну из производных

$$D\xi_i/Dt, \ldots, D^{n-1}\xi_i/Dt^{n-1} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, предполагая все функции дифференцируемыми бесконечное число раз, индукцией по n получаем, что *все* $D^n\xi_i/Dt^n = 0$ [1]).

Наличие вязкости проявляется в членах с пространственными производными от завихренности. Для невязкой жидкости начальная завихренность $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, 0) = 0$ в любой точке $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0)$ обеспечивает то, что все $D^n\boldsymbol{\xi}/Dt^n(\mathbf{a}, 0) = 0$ в тех же точках, в то время как в вязкой жидкости для обращения в нуль пространственных производных от завихренности требуется отсутствие завихренности в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0)$.

И в том и в другом случае, если функция $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t)$ *аналитическая* по t, то она тождественно обращается в нуль, так как все члены ее разложения в ряд Тейлора (по t) тождественно равны нулю. Это приводит к следующему парадоксу [2]).

Парадокс неаналитичности. *Для того чтобы область жидкости, находящаяся вначале в состоянии покоя (или в безвихревом движении), стала завихренной, она должна уже иметь завихренность, которая является неаналитической функцией времени.*

§ 23. Существование и единственность

Прежде чем выяснить пригодность уравнений Навье — Стокса для описания механики реальных (несжимаемых) жидкостей, нам следовало бы убедиться в том, что с их помощью можно формулировать физически естественные краевые задачи, которые математически оказываются корректно поставленными (см. теорему 2, следствие). То есть мы должны иметь теоремы существования и единственности, которые до сих пор доказывались только при весьма ограниченных допущениях.

Что касается задачи Коши (задачи с начальными условиями), то для нее существование и единственность были доказаны для случаев плоских и осесимметричных течений в предположении конечности полной энергии. При доказательстве исполь-

[1]) Если первоначально $\xi = 0$. — *Прим. перев.*

[2]) Duhem P., Traité d'Énergétique, т. 2, стр. 121; Truesdell C., Kinematics of vorticity, Indiana Univ. Press, 1954, § 104.

зуется уравнение (9), которое для плоского течения имеет упрощенный вид:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu\nabla^2\zeta, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{11}$$

Однако в пространственном случае даже для конечной полной энергии было доказано только существование — и то лишь для ограниченных интервалов времени [1]). Хотя предположение о конечности полной энергии, вероятно, может быть ослаблено, — пожалуй, достаточным может оказаться ограниченность скорости, — Е. Хопф [2]) показал, что задача Коши для уравнений Навье — Стокса не является корректно поставленной, если допустить, что с увеличением расстояния от начала координат скорость возрастает линейно, а давление — квадратично.

В стационарном случае теоремы существования доказаны для обтекания препятствий произвольной формы как в плоскости, так и в пространстве, но *не* доказаны теоремы единственности. Если рассматриваемые стационарные течения являются единственными, то при больших числах Рейнольдса они физически *неустойчивы*; это явно следует из парадокса турбулентности (§ 25) [3]).

§ 24. Течение Пуазейля

Уравнения Навье — Стокса, как и уравнения Эйлера во времена Лагранжа, удалось пока проинтегрировать лишь в нескольких случаях. Поэтому согласование с экспериментом в этих немногих случаях имеет принципиальное значение.

Одним из таких случаев является течение жидкости в длинной прямой трубе, поперечное сечение которой есть круг постоянного радиуса c. Пусть x обозначает расстояние, измеряемое вдоль трубы, а r — расстояние от оси трубы. В этих цилиндрических координатах u_x, u_r и u_θ пусть обозначают соответственно осевую, радиальную и трансверсальную составляющие скорости.

Теорема 3. *Единственно возможными решениями системы* (3), (4), (6), *обладающими предполагаемой симметрией (ста-*

[1]) Leray J., *J. de Math.*, **12** (1933), 1—82; там же **13** (1934), 331—418; *Acta Math.*, **63** (1934), 193—248; Hopf E., *Math. Nachr.*, **4** (1951), 213—231. См. также Долидзе Д. Е., *ПММ*, **12** (1948), 165—180 и **19** (1955), 764.

[2]) Hopf E., *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952), 107.

[3]) Значительные результаты относительно существования и устойчивости решений стационарных и нестационарных краевых задач для уравнений Навье — Стокса получены в ряде работ О. А. Ладыженской и ее сотрудников. См. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Физматгиз, М., 1961. — *Прим. перев.*

ционарные течения вязкой жидкости в круглой трубе), являются течения Пуазейля, определяемые формулами

$$u_x = a(c^2 - r^2), \qquad u_r = u_\theta = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Предположение о стационарности течения означает, что функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, r, \theta)$ не зависит от времени t. Кроме того, условия задачи инвариантны относительно отражения в любой плоскости, проходящей через ось трубы; течение имеет эту симметрию тогда и только тогда, когда $u_\theta = 0$, $u_x = f(x, r)$, $u_r = g(x, r)$. Согласно нашим условиям, должна быть также инвариантность относительно произвольного переноса вдоль оси трубы. А так как ν предполагается не зависящим от давления, то это же относится и к уравнениям (3) и (4). Симметрия относительно переноса эквивалентна соотношениям $u_x = f(r)$, $u_r = g(r)$. Из этих соотношений и из условия (6) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = d[rg(r)]/dr = 0$, откуда $g(r) = C/r = 0$, так как на оси $g(r) = 0$.

Теперь, полагая $\mathbf{g} = 0$, согласно теореме 1, мы используем уравнение (3). Поскольку $u_2 = u_3 = 0$, имеем $p = p(x)$. Рассматривая случай $i = 1$ (с одной координатой x), получаем соотношение

$$p'(x) = \mu \nabla^2 u_x = \mu [f''(r) + r^{-1} f(r)].$$

Так как левая часть не зависит от r, то правая часть также не должна зависеть от r. Таким образом, $(rf')' = rf'' + f' = kr$ для некоторого постоянного k, и $rf' = \frac{1}{2} kr^2 + K$. Это дает конечное значение $u_x = f(r)$ при $r = 0$, только если $K = 0$; следовательно, $f' = kr/2$ и $f(r) = \frac{1}{4} kr^2 + b$. Для того чтобы удовлетворялось условие прилипания (6) на границе, должно быть $u_x = a(c^2 - r^2)$, что завершает доказательство теоремы.

Подставляя полученные выражения в уравнение (3), мы получаем классический результат, что градиент давления равен

$$-\frac{dp}{dx} = 4\mu a = \frac{8\mu Q}{\pi c^4}, \tag{13}$$

где $Q = \pi a c^4/2$ есть объем жидкости, протекающий за единицу времени через поперечное сечение трубы.

§ 25. Парадокс турбулентности

Экспериментальные данные в этом случае в высшей степени замечательны. Хотя формула (13) (закон Пуазейля — Хагена) подтверждается при движении жидкости в капиллярных труб-

ках, она полностью теряет силу для обычных гидравлических труб. Точнее, мы можем сформулировать следующий общий парадокс.

Парадокс турбулентности. *Для течений в прямых трубах гипотеза симметрии* (С) *из* § 1 *выполняется, если число Рейнольдса* $\mathrm{Re} < 1700$, *и обычно не выполняется при* $\mathrm{Re} > 10^4$. *Когда* $\mathrm{Re} > 10^4$, *наблюдаемое на опыте течение не обладает ни пространственной, ни временно́й симметрией и является турбулентным.*

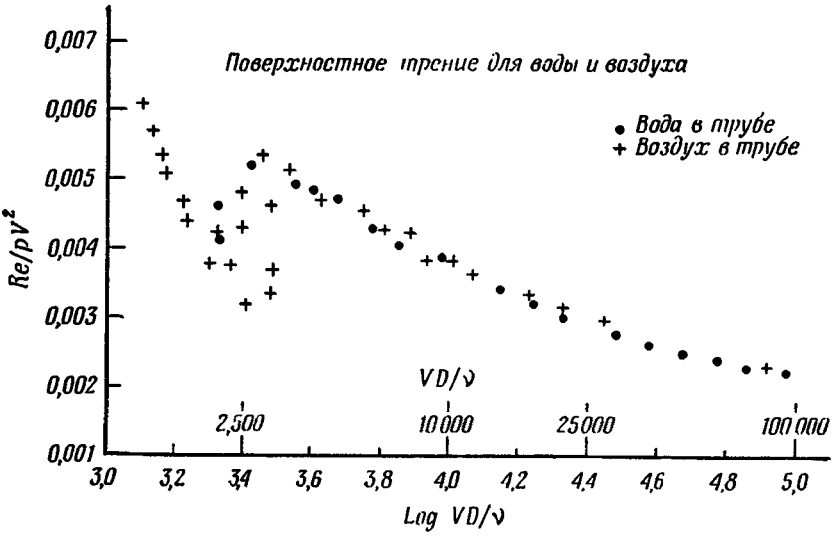


Рис. 8. Подобие течений воздуха и воды в трубах по числу Re.

Оговорка «обычно» в предыдущем утверждении относится к тому, что можно избежать появления турбулентности, добиваясь полной обтекаемости входного отверстия, полируя стенки и обеспечивая на входе трубы ламинарное течение. При чрезвычайной тщательности можно было таким путем избежать появления турбулентности при значениях Re вплоть до 40 000. Но если не принимать специальных мер, то течение в трубках при $\mathrm{Re} > 2000$ будет турбулентным.

Это хорошо иллюстрируют классические экспериментальные данные Стантона и Пэнеля [1]), которые воспроизведены на рис. 8.

[1]) Stanton, Pannell, *Phil. Trans.*, **A214** (1914), 119—124; более подробное исследование турбулентного течения в трубах см. в [3], гл. VIII.

Они своеобразно подтверждают уравнения Навье — Стокса, показывая, что *критическое число Рейнольдса* $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, при котором имеет место переход к турбулентности, одно и то же для воздуха и воды и равно приблизительно 1700. Теоретически этот вывод можно было бы получить из теоремы 2. Большинство современных специалистов считают, что течение Пуазейля является просто *неустойчивым* при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, а турбулентное течение все-таки удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса. Хотя из принципа подобия (7) теоремы 2 не следует справедливость уравнений Навье — Стокса, их пригодность в случае турбулентного течения подтверждается опытными измерениями скорости затухания однородной турбулентности [1]).

Кроме того, гипотеза (С) из § 1 все-таки выполняется *статистически*. Обозначая черточками средние значения, мы можем выразить симметрию посредством следующих формул:

$$\bar{u}_x = F(r), \quad \bar{u}_r = \bar{u}_\varphi = 0, \quad \bar{u}_x^2 = G(r), \quad \bar{u}_r^2 = H(r)$$

и т. д. Таким образом, рассмотрение экспериментальных данных подсказывает нам концепцию *статистически* определенных решений уравнений в частных производных как новую и увлекательную область для математических исследований. Изучение таких «стохастических дифференциальных уравнений» открывает теперь новые горизонты в математическом анализе.

Несмотря на доблестные усилия математиков [2]), наблюдаемая неустойчивость течения Пуазейля не получается в результате исследований средствами математического анализа. Предполагали [3]) даже, что в идеально гладких круглых трубах течение Пуазейля является *устойчивым* относительно бесконечно малых возмущений. Однако в настоящее время даже для случая двумерных возмущений совершенно достоверно установлена неустойчивость плоского течения Пуазейля между двумя параллельными пластинками при $\mathrm{Re} > 5300$. Поэтому подобное предположение представляется маловероятным.

---

[1]) Stewart R. W., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47** (1951), 146—157. (Относительно изотропной турбулентности см. [14*], [9*] и приведенную там литературу. — *Прим. ред.*)

[2]) См. Synge J. L., Hydrodynamical stability, Semicentennial publ. Am. Math. Soc., 1938, т. 2, стр. 227—269; [36], особенно § 3.2.

[3]) См. [11], т. 2, стр. 32—33; Comolet R., *Comptes Rendus*, **226** (1948), 2049 (также *La Houille Blanche, numéro special* **B** (1949), 673). Теоретические аргументы см. Pekeris C. L., *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **34** (1948), 285—295.

§ 26. Другие парадоксы симметрии

Весьма любопытно, что склонность к симметрии проявляется лишь в ограниченной области $\mathrm{Re} < 1700$. Любопытно, что и предполагаемое стремление к наименьшему действию, по-видимому, имеет примерно те же границы, поскольку расход энергии в течении Пуазейля меньше, чем в турбулентном течении [1]).

Для того чтобы хоть немного разобраться в этих фактах, рассмотрим другие примеры из гидродинамики, в которых необоснованное применение гипотезы (С) из § 1 также приводит к неправильным результатам.

Один из интересных примеров представляет собой течение в трубах с некруговым поперечным сечением. При малых Re в этом случае опять-таки наблюдается параллельное течение, для которого можно вычислить профиль скоростей ([7], § 332) и в котором принцип наименьшего действия остается в силе. При больших Re течение снова становится турбулентным и даже статистически не является параллельным: существуют значительные «вторичные течения» [2]) в углах трубы.

Другой случай был изучен Дж. Тейлором в его классической работе [3]). Рассмотрим вязкую жидкость, находящуюся между двумя длинными сооснными цилиндрами, которые вращаются в противоположных направлениях с постоянными угловыми скоростями ω и ω' соответственно. Описанное течение является (приближенно) симметричным относительно переносов вдоль и вращения вокруг оси цилиндров, а также не зависит от времени. Имеется в точности одно решение системы (3), (4), (6), обладающее такой симметрией; оно носит название «течения Куэтта».

При малых ω, ω' такое течение Куэтта наблюдается экспериментально. При больших числах Рейнольдса вместо течения Куэтта появляется несимметричное, однако нетурбулентное течение. Грубо говоря, сохраняется симметрия во времени, но не в пространстве.

Далее, рассмотрим маленький пузырек воздуха, поднимающийся в стоячей воде под действием собственной плавучести. Благодаря поверхностному натяжению он принимает форму, близкую к сферической, и, во всяком случае, на него не действует ни одна сила, которая не была бы симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через центр пузырька. Следовательно, в силу симметрии, пузырек должен был бы

[1]) По поводу специальных теорем относительно минимума расхода энергии см. [7], § 344.

[2]) [3], п. 161, где приводятся результаты Никурадзе.

[3]) *Phil. Trans.*, **A223** (1922), 289—293; см. также [36], гл. 2.

подниматься вертикально. Однако, и это поразительный факт, при $\mathrm{Re} > 50$ такой пузырек прокладывает себе путь вверх по вертикальной спирали! [1])

Аналогичное явление имеет место в следе за круговым цилиндром, который движется в потоке параллельно своей образующей. В диапазоне чисел Рейнольдса $50 < \mathrm{Re} < 500$ эта зона содержит чередующиеся вихри противоположных знаков (вихревая дорожка Бенара — Кармана); это явление будет проанализировано в § 56.

На первый взгляд может показаться, что подобные примеры противоречат метафизическому принципу Лейбница достаточного основания [2]), а именно нашей гипотезе (С). Более глубокий подход состоит в том, что, *хотя симметричные причины обусловливают симметричные явления, почти симметричные причины не обязательно приводят к почти симметричным явлениям:* симметричная задача может не иметь ни одного *устойчивого* симметричного решения. Такая возможность и является действительным источником «парадоксов симметрии» (наблюдаемых нарушений гипотезы (С) из § 1).

Далее отметим, что проанализировать *устойчивость* решения гораздо труднее, чем получить само решение, поэтому почти наверняка решения будут получаться задолго до того, как будет установлена их неустойчивость. В силу этого можно предвидеть, что и в будущем поток парадоксов симметрии не прекратится.

§ 27. Теория пограничного слоя

Фундаментальный вопрос механики жидкостей состоит в том, чтобы найти взаимосвязь между решениями уравнений Эйлера для движения невязкой жидкости и решениями уравнений Навье — Стокса для жидкостей с исчезающе малой вязкостью. Математически речь идет об асимптотическом поведении решений системы (3), (4) при $\mu \to 0$ (т. е. при $\mathrm{Re} \to +\infty$). Поскольку обычно для кораблей и самолетов числа Рейнольдса лежат в интервале $10^6 — 10^9$, то для того же интервала огромное практическое значение имеет задача расчета лобового сопротивления.

---

[1]) См. Nisi H. and Porter A. W., *Phil. Mag.*, **46** (1923), 754; [17], стр. 294; Saltman P. J., *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 249—275.

[2]) Современную формулировку этого принципа дал Birkhoff G. D., *Rice Institute Pamphlet*, **28** (1941), № 1, 24—50; Collected Papers, т. 3, стр. 778—804. Любопытно, что формальные системы математической логики игнорируют этот принцип, применимость которого к физике была замечена в 1894 г. Пьером Кюри («Oeuvres Scientifiques», Paris, 1908, особенно стр. 119—215).

Легко видеть, что обычная теория возмущений к этой задаче не применима, так как член, учитывающий вязкость $\nu\nabla^2\mathbf{u}$, в уравнении (3) имеет самый большой порядок и, следовательно, возмущение вязкости ν относительно значения $\nu = 0$ есть *сингулярное возмущение* [1]). Тип уравнений в частных производных обычно определяется членами наивысшего порядка. Таким образом, пренебрежение членами высшего порядка ведет к стиранию различий между типами уравнений. Даже для обыкновенных дифференциальных уравнений такого вида, как $\varepsilon y'' + y = 0$, с краевыми условиями $y(0) = a$, $y(1) = b$, мы получаем в пределе совершенно различные картины в зависимости от того, положить ли $\varepsilon \to +0$ или $\varepsilon \to -0$.

Современные исследования указанного выше сингулярного возмущения в большинстве исходят из идеи Прандтля о том, что завихренность имеет место лишь в тонком *пограничном слое* жидкости у любой твердой границы, в котором происходит резкий перепад касательных напряжений, и в следе (часто близкого к вихревому слою) позади тела. Вне этого пограничного слоя и следа течение является почти безвихревым, и к нему применимы уравнения Эйлера.

Для собственно пограничного слоя Прандтль [2]) построил модель, согласно которой некоторые члены в уравнениях отбрасываются. Для двумерного потока он получил (пренебрегая силой тяжести) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}p'(x) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad p = p(x), \qquad (14)$$

плюс обычное условие несжимаемости (4) $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$. Уравнение (14) — уравнение *параболического типа*, и его можно интегрировать численно, пока $u > 0$, с учетом краевых условий $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ на неподвижной стенке и $u(x, \infty) = u_\infty(x)$ вне пограничного слоя, причем предполагается, что $u_\infty(x)$ выражено через давление по уравнению Бернулли: $\rho u_\infty^2/2 + p(x) = \text{const}$. Предполагается также, что в первой же точке, в которой $u(x, y) < 0$ при положительном y, происходит *отрыв* потока [3]).

Были предприняты различные попытки сделать более строгим несколько интуитивный вывод Прандтлем уравнения (14); вероятно, более всего заслуживает внимания то, что сделано

---

[1]) Это подчеркивали Oseen ([9], стр. 211) и др.

[2]) Proc. Third Int. Math. Congress Heidelberg (1904), стр. 484—491, перепечатано в [37].

[3]) Более подробно см. в [3], гл. IV; или в [43], стр. 94—99 и 222—224.

Мизесом [1]). Однако многие результаты теории еще далеко не ясны. Кроме неразъясненной сингулярности у передней кромки, к ним относится также следующий парадокс.

Парадокс пограничного слоя. *Теоретически при выводе уравнения* (14) *предполагается, что отношение* δ/x *толщины пограничного слоя* δ *к длине* x *стремится к нулю. Экспериментально же показано, что если* $\delta/x < 0{,}01$, *то пограничный слой становится турбулентным и уравнение* (14) *не удовлетворяется* [2]).

Например, пограничный слой остается ламинарным вдоль корпуса корабля и вдоль крыльев самолета во время полета всего на расстоянии нескольких сантиметров! Эту турбулентность пограничного слоя можно связать, как мы сейчас увидим, с турбулентностью в трубах.

§ 28. Парадоксы Эйфеля и Дюбуа

Представление о том, что сопротивление снаряда D должно быть плавно возрастающей функцией скорости снаряда v, весьма старо. Так, во многих учебниках можно найти «доказательства» (с помощью анализа размерностей, см. § 61) того, что сопротивление D должно быть пропорционально v при малых скоростях и пропорционально v^2 при больших скоростях. Поэтому в высшей степени удивительным показался открытый в 1912 г. Констанци и Эйфелем [3]) следующий парадокс.

Парадокс Эйфеля. *При числах Рейнольдса, близких к критическому числу* $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$, *сопротивление сферы фактически убывает с возрастанием скорости.*

Два года спустя Прандтль показал, что это падение сопротивления зависит от возникновения *турбулентности* в «пограничном слое» около сферы и эта турбулентность может быть вызвана путем увеличения шероховатости сферы *или* же при помощи дополнительной турбулизации потока. Действительно,

---

[1]) *ZAMM*, 7 (1927), 425—427. Эвристическое исследование сингулярности для течения вблизи передней кромки плоской пластинки см. Carrier G. F., Lin C. C., *Quar. Appl. Math.*, **6** (1948), 63—68.

[2]) Ср. [43], стр. 32—33. Другие трудности, возникающие при наивном применении теории, упомянуты там на стр. 110—112. По поводу дальнейших затруднений см. также Stewartson K., *J. Math. Phys.*, MIT. **36** (1957), 173—191.

[3]) Eiffel G., *Comptes Rendus*, **155** (1921), 1597—1599. Объяснение Прандтля см. в [11], т. 2, п. 63, или Gott. Nachr., Math.-Phys. Kl. (1914), 177—190.

можно связать число $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$ парадокса Эйфеля с $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 1700$ для турбулентности в трубах посредством сопоставления толщины ламинарного пограничного слоя δ диаметру трубы d. Если $\mathrm{Re} = u_\infty x/\nu$ есть число Рейнольдса основного течения на расстоянии x от передней кромки, то из уравнения (14) следует $\delta(x) \simeq 4\sqrt{\nu x/u_\infty}$, и тогда число Рейнольдса для пограничного слоя определяется выражением $\mathrm{Re}_\delta = u_\infty \delta/\nu \simeq 4\sqrt{u_\infty x/\nu}$. Отсюда $\delta/x \simeq 4/\sqrt{\mathrm{Re}}$, а число Рейнольдса из парадокса Эйфеля $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$ приближенно соответствует числу $\mathrm{Re}_\delta \simeq 4\sqrt{\mathrm{Re}_{\text{кр.}}} \simeq 1600$, что вполне согласуется с $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ для турбулентности в трубах. Это открытие объясняет также следующий более старый парадокс.

Парадокс Дюбуа. *Сопротивление палки, которую удерживают неподвижно в потоке, имеющем скорость v, обычно меньше, чем сопротивление той же палки, которую тянут с той же скоростью v в стоячей воде.*

Этот парадокс особенно интересен потому, что на первый взгляд кажется, будто он противоречит основному принципу механики Ньютона — инвариантности всех законов при переходе к равномерно и поступательно движущимся осям координат. Вероятно, потому что Леонардо да Винчи[1]) признавал этот принцип, он утверждал равносильность двух указанных выше случаев — хотя это сразу опровергается наблюдением.

В настоящее время объяснение парадокса Дюбуа считается известным. Потоки жидкости всегда более или менее турбулентны; это приводит к понижению сопротивления по той же (не объясненной математически) причине, по которой понижается сопротивление при обтекании сферы, как было показано Прандтлем. Выражаясь современным языком, свободная турбулентность потока вызывает переход к турбулентному движению в пограничном слое. Это в свою очередь задерживает отрыв потока, сужая таким образом «след» и уменьшая связанное с этим лобовое сопротивление.

§ 29. Регулирование пограничного слоя

Первоначально (см. прим. 1) на стр. 61) Прандтль считал свою теорию пограничного слоя мостом, связывающим классическую теоретическую гидродинамику и динамику реальных

[1]) MacCurdy E., The Notebooks of Leonardo da Vinci, New York, 1941, стр. 503. Леонардо также заметил подобие воздуха и воды (там же, стр. 645).

жидкостей. Согласно теории, при неограниченном возрастании числа Рейнольдса Re пограничный слой должен стремиться стать бесконечно тонким. Отсюда следует, что при достаточной изобретательности мы в состоянии *регулировать* этот пограничный слой произвольно малым усилием так, чтобы аппроксимировать течения Жуковского с *нулевым сопротивлением и большой подъемной силой*. Для достижения этой цели было проведено огромное число тщательных исследований и экспериментов; некоторые из них мы сейчас вкратце рассмотрим [1]).

Наиболее известным является то соображение, что сопротивление можно уменьшить при помощи улучшения *обтекаемости*. Под этим мы понимаем подбор для крыла самолета такого очертания, которое сводит к минимуму градиент противодавления. Это должно было бы задержать отрыв потока и таким образом уменьшить лобовое сопротивление, позволяя избежать застойной области у передней кромки либо отрыва вблизи нее. На практике это достигается тем, что передняя кромка округляется, а остальная часть тела постепенно суживается до острой задней кромки.

Опасность появления застойной области, которая уменьшает подъемную силу, равно как увеличивает лобовое сопротивление, прежде всего возникает при больших углах атаки. Для того чтобы задержать появление застойной области, весьма полезно также слегка искривить профиль крыла книзу. В предельном случае профиля в виде дуги окружности легко убедиться в том, что этот прием позволяет избежать бесконечного значения скорости на передней кромке; в общем случае течений Жуковского это приводит к значительному уменьшению градиента противодавления на верхней (подсосной) стороне.

Главной задачей национальных лабораторий в течение 1910—1930 гг. было создание оптимально обтекаемых очертаний для самолетов, летавших со скоростями не более 400 *км/час* (когда можно было пренебречь эффектами сжимаемости).

Для анализа экспериментальных данных и проектирования новых опытных конструкций большим подспорьем был расчет распределения давления согласно теории Жуковского, а следовательно, по уравнениям Эйлера. Однако ценность таких расчетов *не* в определении значений подъемной силы, лобового сопротивления или момента (ср. § 8), а в том, что они позволили указать на переход к турбулентности и на отрыв потока в по-

[1]) См. [3], гл. 12 и [43], гл. 13, где содержится более полное введение в рассматриваемый вопрос. Относительно идей Прандтля см. [11], т. 2, п. 50—52 и 91—93.

граничном слое. Как это далеко от первоначальной концепции Лагранжа!

При больших углах атаки можно избежать потери скорости и получить большую подъемную силу при помощи так называемых *разрезных крыльев*. Такие крылья знакомы пассажирам самолетов и могут быть получены при помощи предкрылка и закрылка. К сожалению, разрезные крылья увеличивают лобовое сопротивление, поэтому их используют лишь на взлете и при посадке, когда в первую очередь важно получить большую подъемную силу при уменьшенной скорости. Хотя трудно предсказать математически, как работают разрезные крылья, характер влияния щелей на течения вдоль верхней стороны крыльев, очевидно, подобен действию струй, которые снижают тенденцию к отрыву потока посредством ускорения пограничного слоя. Изобретательные техники пробовали также использовать струи для тех же целей.

Другое многообещающее приспособление основано на создании принудительного *подсоса* либо через щели, либо через равномерно размещенные круглые отверстия на тех участках, где иначе произошел бы отрыв пограничного слоя. В этом случае пограничный слой отжимается к стенке, и мы опять получаем лучшее приближение к течению Жуковского. Если используются щели, то, исходя из теории Жуковского, нужно создать повышенное давление как раз впереди щелей [1]). Можно также попытаться использовать подсос для того, чтобы сохранить пограничный слой *ламинарным*, тем самым опять-таки уменьшая лобовое сопротивление. К сожалению, очень трудно, по-видимому, получить такое ламинарное течение. Даже летящие в воздухе насекомые могут вызвать турбулентность при обтекании самой гладкой поверхности крыла.

Последняя идея Прандтля заключалась в том, чтобы помешать уменьшению скорости в пограничном слое, а следовательно, и отрыву, используя *движущиеся границы*. Хотя в лабораторных условиях и можно продемонстрировать правильность рассматриваемой идеи [2]), но до сих пор ее применение имеет лишь эмпирическую основу, так что в дальнейшем мы больше не будем возвращаться к этому вопросу.

---

[1]) См. Goldstein S., *J. Aer. Sci.*, 15 (1948), 189—220; Pfenninger W., там же, 16 (1949); 227—236; Doehnhoff A. E., Lofton L. K., Jr., там же, 729—740; Lachmann G. V., *J. Roy. Aer. Soc.*, 59 (1955), 163—198.

[2]) См. [11], п. 51—52; Ackeret J., Das Rotorschiff..., Goettingen, 1925; Favre A., *Comptes Rendus*, 202 (1936), 434—436. По поводу идей Прандтля см. также § 9.

Технические трудности, встречающиеся при реализации упомянутых выше соображений, не должны заслонять лежащую в их основе идею — аппроксимацию идеального течения Жуковского, описанного в § 8.

§ 30. Парадокс Стокса

В § 25—29 мы рассмотрели трудности, связанные с теоретическими расчетами течений при больших числах Re. Теперь мы перейдем к противоположному случаю, когда $\mathrm{Re} \to 0$. В этом случае разложение по степеням Re уже не связано с «сингулярным возмущением» в смысле § 24; нелинейный конвективный член $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ не будет членом самого высокого порядка, и с математической точки зрения представляется вполне целесообразным его попросту опустить.

Это было сделано Стоксом, который ввел, таким образом, новый класс идеальных течений, обычно называемых «ползущими». В таком приближении Стокс вывел формулу

$$D = 6\pi\mu c v \tag{15}$$

для сопротивления, испытываемого твердой сферой радиуса c при медленном движении со скоростью v в жидкости с вязкостью μ. При выводе существенно используется гипотеза (C) применительно к осевой симметрии. Окончательная формула (15) хорошо подтверждается экспериментально [1]) при $\mathrm{Re} < 0{,}2$.

Казалось бы, вполне естественно применить тот же самый метод к круговым цилиндрам, движущимся перпендикулярно оси. Однако в этом случае мы имеем следующий парадокс.

Парадокс Стокса. *Стационарное «ползущее» обтекание кругового цилиндра невозможно.*

Доказательство. При плоском стационарном ползущем течении уравнения Навье — Стокса (11) сводятся к уравнению $\nabla^2 \zeta = 0$. Если V — функция тока, то последнее уравнение эквивалентно уравнению $\nabla^4 V = 0$, т. е. V — *бигармоническая* функция. Отсюда следует, что V — *аналитическая функция* [2]). Действительно, во всяком круговом кольце функцию V можно разложить в ряд Фурье

$$V = \sum a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta, \tag{16}$$

[1]) [3], п. 215. По поводу формулы (15) см. [7], п. 337—338.

[2]) Относительно свойств используемых бигармонических функций см. Nicolescu M., Les fonctions polyharmoniques, Hermann, 1936, особенно стр. 13—16 и стр. 32. Обычно вместо строгого доказательства ссылаются на гипотезу (E).

где $a_n(r)$ и $b_n(r)$ удовлетворяют соотношениям

$$E_n^1 a_n = E_n^1 b_n = 0, \qquad E_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{r^{-1}d}{dr} - n^2 r^2. \tag{16'}$$

Если вектор скорости $(\partial V/\partial y, -\partial V/\partial x)$ в прямоугольных координатах ограничен на бесконечности, то простое вычисление дает соотношение $a_1(r) = A_1 r + a_1/r$, и $a_n(r) = a_n'/r^{n-2} + a_n''/r^n$ при $n \geqslant 2$. Отсюда следует формула

$$V = vy + V_0 + a_0 \ln r + \frac{a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta}{r} + \\ + \sum_2^\infty \left\{ \left(\frac{a_n'}{r^{n-2}} + \frac{a_n''}{r^n} \right) \cos n\theta + \left(\frac{b_n'}{r^{n-2}} + \frac{b_n''}{r^n} \right) \sin n\theta \right\}. \tag{17}$$

С другой стороны, если $\nabla^4 V = 0$, то из теоремы о дивергенции следует уравнение

$$\int\int_A (\nabla^2 V)^2 \, dx\, dy = \int_C \left\{ \nabla^2 V \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 V) \right\} ds,$$

где C — кривая, ограничивающая область A.

Пусть теперь A — область между цилиндром и большой окружностью радиуса r. Так как на цилиндре $V = \partial V/\partial n = 0$, интеграл в правой части предыдущего уравнения, взятый по этой части C, должен обращаться в нуль. На большой окружности, поскольку

$$\nabla^2 V = O(r^{-2}), \quad V = O(r), \quad \nabla V = O(1) \text{ и } \nabla(\nabla^2 V) = O(r^{-3}),$$

справедливо соотношение

$$\int_C \left\{ \nabla^2 V \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 V) \right\} ds = O(r^{-2}) \cdot O(r) \to 0$$

при $r \to \infty$. Так как $(\nabla^2 V)^2 \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\nabla^2 V \equiv 0$, т. е. V должно быть гармонической функцией. Следовательно, в формуле (17) $a_n' = b_n' = 0$. Наконец, из условия $\partial V/\partial r = 0$ — условия прилипания на поверхности цилиндра — следует, что $V = V_0$ и $v = 0$, а это завершает доказательство [1]).

[1]) Подробное изложение вопросов § 30 и § 31 см. в [1*]. — *Прим. ред.*

§ 31. Уравнения Озеена

Озеен [1]) и Ламб ввели парадокс Стокса в рамки теории, показав, что конвективные члены преобладают над вязким членом при очень больших значениях r, как бы ни было мало число Re. Переопределенности можно избежать, более аккуратно переходя к двойному пределу при $\mathrm{Re} \to 0$, $r \to +\infty$.

Чтобы получить разрешимую краевую задачу, Озеен предложил ввести в оператор D/Dt вместо точных членов $\sum u_k \partial/\partial x_k$ линеаризованные конвективные члены $\sum u_k(\infty)\partial/\partial x_k$. Благодаря введению таких слагаемых в уравнения Стокса Озеен смог получить теоретическую формулу для лобового сопротивления в случае медленно движущегося цилиндра. Приближенное экспериментальное подтверждение этой формулы возможно, хотя и оказывается довольно трудным ([3], гл. IX).

Это разрешение парадокса Стокса в свою очередь привело к другому парадоксу, открытому Файлоном [2]). В парадоксе Файлона утверждается, что уравнения Озеена, взятые буквально, дают *бесконечный момент* для эллиптического цилиндра, косо поставленного относительно потока. Этот парадокс был недавно разрешен Имаи при помощи перехода к более высоким приближениям.

Приближенные уравнения Озеена можно также использовать для исправления формулы (15), чтобы учесть влияние малого, но конечного числа Re на лобовое сопротивление сферы; поправочный множитель оказался равным $(1 + 3\mathrm{Re}/8)$. Этот поправочный множитель был тщательно исследован Гольдштейном [3]), который получил степенной ряд для коэффициента сопротивления $C_D(\mathrm{Re})$, сходящийся, вероятно, при $\mathrm{Re} < 2$. Экспериментальные измерения, по-видимому, дают меньшее сопротивление; кроме того, ввиду асимптотического характера исследований Озеена возникает вопрос, не будет ли окончательная формула верна только асимптотически [4]).

Обзор решений других краевых задач, к которым приводят уравнения Озеена, дан в работе [9], часть III. Однако аппроксимация конвективных членов весьма неточна вблизи препят-

---

[1]) [9], стр. 162; [7], стр. 769; см. также [12], т. VI, стр. 29—40.

[2]) Filon L., *Proc. Roy. Soc.*, A113 (1926), 7—27. По поводу объяснения парадокса Файлона, данного Имаи (Imai), см. там же, A208 (1951), 487—516.

[3]) Goldstein S., *Proc. Roy. Soc.*, A123 (1929), 225—235; или [3], § 215. Ср. Weyssenhoff J., *Annalen der Physik*, 62 (1920), 1—45.

[4]) См. Kaplun S., Lagerstrom P. A., *J. Math. Mech.*, 6 (1957), 585—593; Proudman I., Pearson J. R. A., *J. Fluid Mech.*, 2 (1957), 237—262.

ствий и стенок. В связи с этим теория пограничного слоя Прандтля при больших числах Рейнольдса значительно более плодотворна.

§ 32. Парадокс пузырька

В теории подводного взрыва мы встречаемся с положением, аналогичным парадоксу Стокса. Хотя существует простая и чрезвычайно полезная теория сферических пузырьков, возникающих при подводных взрывах [1]), легко показать, что в двумерной гидродинамике для всякого расширения или сжатия пузырька в несжимаемой жидкости требуется бесконечное значение кинетической энергии

$$\frac{1}{2}\int\int(\rho\nabla U\cdot\nabla U)\,dx\,dy.$$

При конечных силах сжимаемость всегда должна играть основную роль на достаточно больших расстояниях.

Имеются еще два любопытных парадокса, происхождение которых скорее физическое, нежели математическое, и которые показывают уязвимость гипотезы (А) из § 1. Пусть маленький воздушный пузырек поднимается в жидкости под действием плавучести, причем он настолько мал, что вследствие поверхностного натяжения сохраняет почти сферическую форму и его движение — «ползущее». Так как пузырек состоит из газа, то вместо условия (6) надо взять его логическое обобщение: $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должна быть непрерывна при переходе через границу.

Поставленная таким образом математическая задача была решена Рыбчинским и Адамаром при добавочном предположении непрерывности тангенциального напряжения [2]). Теоретически лобовое сопротивление определяется по формуле

$$D=6\pi c v\mu\left(\frac{2\mu+3\mu'}{3\mu+3\mu'}\right)\simeq 4\pi c\mu v,\quad\text{если}\quad \mu'\ll\mu, \tag{18}$$

где μ — вязкость жидкости, а μ' — вязкость жидкости поднимающегося пузырька.

Все это относится к теории. На практике же для сопротивления, по-видимому, обычно верна формула (15), а не (18). Это значит, очевидно, что пузырек ведет себя так, как если бы

[1]) См. [7], п. 91—91а, или [17], гл. XI, § 1—3

[2]) Rybczynski W., *Bull. Acad. Sci. Cracovie* (1911), 40; Hadamard J., *Comptes Rendus*, 152 (1911), 1735. Относительно экспериментальных данных см. Barr G., A manual of viscometry, Oxford, 1931, стр. 190 и дальше; Bryn T., *Forschung Ing.*, 4 (1933), 27–30; [11], т. 2, п. 74.

он был твердым телом. Такое противоречие между теорией и экспериментом может быть названо парадоксом поднимающегося пузырька.

Как предполагали Бонд [1]) и другие авторы, кажущаяся твердость, возможно, объясняется образованием тонкой (мономолекулярной) пленки на поверхности пузырька из различных примесей, и эта пленка оказывает сопротивление деформации [2]). Однако полная картина все еще не ясна.

Еще более эффектным является следующий парадокс.

Парадокс падающего пузырька. *При вертикальном градиенте температуры в жидкости изменения поверхностного натяжения могут привести к тому, что пузырек будет опускаться, а не подниматься* [3]).

Стягивание поверхности пузырька по направлению к стороне с бóльшим поверхностным натяжением заставляет пузырек в вязкой жидкости двигаться в направлении убывания поверхностного натяжения, т. е. в направлении возрастания температуры. Это явление кажется парадоксальным только потому, что оно так необычно, и потому, что в механике жидкостей почти всегда условно принимают поверхностное натяжение (как и вязкость) постоянным.

§ 33. «Вторая» вязкость

Как указывалось в § 19, при обычном выводе уравнений Навье — Стокса (1*) мы имеем дело с двумя коэффициентами вязкости λ и μ. Можно принять, что коэффициент вязкости μ при сдвиге измеряется для течения Пуазейля; тогда остается задача измерить коэффициент λ и проверить следствия уравнений (1*) для этого коэффициента λ, который, вероятно, зависит от температуры T и давления p.

Как было сказано в § 19, Стокс просто предполагал, что $\lambda = -2\mu/3$. Однако ясно, что надежнее ввести в рассмотрение величину $\mu' = \lambda + 2\mu/3$ и исследовать ее экспериментально. С физической точки зрения λ и «вторая» вязкость μ' не имеют смысла, пока они не определены и не измерены экспериментально.

---

[1] Bond W. N., *Phil. Mag.*, 4 (1927), 889—898. Отличный обзор вопроса см. McNown J. S., *La Houille Blanche*, 6 (1951), 701—722.

[2]) Сопротивление может быть вязким или упругим; см. Criddle D. W. and Meader A. L., Jr., *J. Appl. Physics*, 26 (1955), 838—842 и приведенную там литературу.

[3]) Block M. J., Young N. O., Goldstein J. S., *J. Fluid Mech.*, 6 (1959), 350—356; см. [17], стр. 319.

А это сделать не легко. Так, в пограничных слоях сжимаемой жидкости значение μ' не играет большой роли, так как величина деформации сдвига намного превышает величину сжатия. Отчасти по этой причине в теории течений с большими скоростями «второй» вязкостью обычно пренебрегают [1]) и наиболее добросовестные авторы оставляют открытым вопрос о соотношении Пуассона — Стокса $\mu' = 0$.

Экспериментальные определения μ' обычно основывались на измерении затухания звука, но теоретическое истолкование таких измерений далеко не просто. Так, Стокс в своей теории затухания звука не только предполагает, что $\mu' = 0$, но все внимание уделяет только величине μ и, кроме того, не учитывает рассеяние, вызываемое теплопроводностью (тепловая диффузия). Последнее было учтено Кирхгофом, который также вычислил (с большим завышением) затухание, обусловленное трением в пограничном слое при распространении звука в трубах [2]), причем учитывалась только величина μ. Но, по-видимому, оба эти автора не рассматривали затухание звука как средство для измерения величины μ'.

Хотя интерпретация экспериментальных данных все еще является до некоторой степени противоречивой, следующие факты, по-видимому, вполне разъяснены. Для некоторых газов, таких, как He, Ar и N_2, опыт согласуется с предположением $\mu' = 0$ [3]). Но другие газы, такие, как O_2 и CO_2, дают гораздо более резкое затухание звука в определенных *полосах частот* [4]).

В воздухе непропорционально большие эффекты могут быть вызваны незначительной относительной влажностью или небольшой примесью CO_2, равно как и пылью, а также шероховатостью стенок (в трубах). Для большинства жидкостей поглощение сильно зависит от частоты; кроме того, необходимо тщательно следить за содержимым пузырька. Так, при относительном объеме пузырька, равном 0,17%, скорость распространения звука

---

[1]) См. [15], стр. 36—38, и [10], гл. 11. По поводу замечаний относительно предположения $\mu' = 0$ см. [7], п. 325, 328; [10], стр. 185, и [11], т. 1, стр. 260, примечание.

[2]) См. [7], п. 359—360; Kirchhoff G., *Pogg. Ann.*, 177 (1868), 177—193. Относительно трения в пограничном слое см. § 115.

[3]) Это можно связать с доказательством Максвелла (при помощи молекулярных соображений, см. § 34) того, что для идеального одноатомного газа $3\lambda + 2\mu = 0$; см. также Rocard Y., Hydrodynamique et théorie cinetique des gaz, Appendix I.

[4]) Duff A. W., *Phys. Rev.*, **6** (1898), 129—139 и **11** (1900), 65—74; van Itterbeck A., Mariens P., *Physica*, **4** (1937), 207—215 и 609—616; Markham J. J., Beyer R. T., Lindsay R. B., *Revs. Mod. Phys.*, **23** (1951), 353—611; Marvin R. S. и др., *J. Appl. Phys.*, **25** (1954), 1213—1218.

уменьшается в 5 раз[1]) и соответственно увеличивается затухание звука.

Легче всего объяснять зависимость затухания звука (ультразвука) от частоты, вводя *время релаксации*[2]) (гистерезисный эффект) при переходе молекулярной энергии от одной собственной частоты к другой. Однако различные авторы пытались согласовать данные наблюдений с соответствующими интерпретациями «второй» вязкости μ'[3]), а следовательно, и величины λ в уравнении (1*)[4]).

§ 34. Молекулярные эффекты

Молекулярное строение жидкостей объясняет многие явления в динамике реальных жидкостей — не только наличие особых полос частот при поглощении ультразвуковых волн, указанное в § 33. Насильственным и неестественным было бы исследование многих таких явлений в рамках ортодоксальной механики континуума.

Например, при оценке толщины фронта ударной волны необходимо учитывать время релаксации в тех жидкостях, в которых подобные молекулярные явления типа гистерезиса оказывают влияние на величину «второй» вязкости (см. прим. 2) на этой стр.). (В классической теории механики континуума толщина фронта ударной волны предполагается равной нулю.)

В верхних слоях атмосферы, где очень мала плотность (давление), время релаксации при $M > 2$ существенно влияет на величину *отхода ударной волны* от движущегося тела[5]).

---

[1]) Wood A. B., A textbook of sound, стр. 362. По поводу удивительных эффектов давления см. Litovitz T. A., Carnevale E. H., *J. Appl. Phys.*, **26** (1955), 816—820.

[2]) Kneser H. O., *Annalen der Physik*, **11** (1931), 761—776; Eckart C., *Revs. Mod. Phys.*, **20** (1948), 232—235; Liebermann L. N., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1415—1422; Lighthill M. J. в работе [20], разд. 4 (относительно толщины ударной волны см. разд. 6); Herzfeld K. F., Litovitz T. A., Absorption and dispersion of ultrasonic waves, 1959.

[3]) Tisza L., *Phys. Rev.*, **61** (1942), 531—536; Гуревич С. Б., *Докл. АН СССР*, **55** (1947), 17—19; Karim S., Rosenhead L., *Revs. Mod. Phys.*, **24** (1952), 108—116; Truesdell C., *J. Rat. Mech. Analysis*, **4** (1953), 643—721.

[4]) По поводу изложенных в этом параграфе соображений см. Слезкин Н. А., Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М., ГТТИ, 1955, гл. I и Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, изд. 2-е, М., ГТТИ, 1954, гл. II и § 78 в гл. VIII. — *Прим. перев.*

[5]) См., например, Schwartz R. N., Eckerman J., *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 169—174. Если бы это было результатом мгновенной диссоциации, то величина этого расстояния не зависела бы от плотности (§ 73).

Кроме того, молекулярная диссоциация, рекомбинация молекул и ионизация влияют на толщину ударной волны в гиперзвуковом потоке[1]); действительно, они в значительной мере влияют на движение жидкости в случае, когда при обычных атмосферных условиях число Маха $M > 10$. Так, воздух содержит 1% NO при 2000° К и 10% NO при 3000° К. При температурах свыше 11 000° К становится ощутимой ионизация.

По этой причине при реалистическом подходе к изучению гиперзвуковых ударных волн все в большей мере надо учитывать химическую физику[2]).

Ортодоксальная механика континуума не в силах также объяснить физическое явление *диффузии* и обратное ему — *разделение* составной жидкости или газа на свои компоненты, например отделение сливок от молока. В идеальном континууме отделение изотопов не было бы возможно ни с помощью газовой диффузии, ни в центрифугах, ни в соплах[3]).

Скольжение жидкости. Совсем иначе используются молекулярные представления при объяснении нарушения граничного условия (прилипания жидкости) (6), когда средняя длина свободного пробега молекулы сравнима с макроскопическими размерами. Можно отметить при этом три важных частных случая: течение через щели, свободное падение мельчайших капель (опыт Милликена с каплей масла) и торможение спутника. Во всех этих случаях весьма заметно отклонение от законов механики континуума[4]): наблюдаемые усилия сдвига значительно меньше, чем предсказываемые формулами (13) и (15).

Легче всего истолковать указанные явления как вызванные частичным нарушением условия (6). В предельном случае «зеркального отражения» всех молекул (угол падения равен углу отражения) напряжение сдвига на границе, очевидно, должно равняться нулю. Таким образом, условие (6) логично заменить условием непрерывности нормальной составляющей скорости (гл. 1, (7)), свойственным невязкому течению. Так как

---

[1]) См. Lighthill M. J., *J. Fluid Mech.*, **2** (1957), 1—32, а также [14].

[2]) См. *Nature*, 178 (1956), 343—345; Deal W. E., *J. Appl. Phys.*, 28 (1957), 782. Ценный обзор исследований, проведенных в течение второй мировой войны, сделали Penney W. G., Pike H. H. M., *Progress in Physics*, 13 (1950), 46—82.

[3]) По поводу аэродинамических методов отделения изотопов (с помощью сопла) см. Leroy M., Nucleonics, April, 1960, стр. 68.

[4]) Knudsen M., *Annalen der Physik*, 34 (1911), 593—656. О недавних обзорах с библиографиями см. Patterson G. N., Molecular flow of gases, Wiley, 1956, гл.V; а также Schaaf S., гл. 9—10 в Heat transfer, Univ. of Michigan Press, 1953; [16], гл. 8.

$\nabla^2 u_i = \partial(\nabla^2 U)/\partial x_i = 0$ для любого безвихревого несжимаемого потока, любое решение задачи Неймана (течение Жуковского или Эйлера) должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса (5). Таким образом, учет зеркального отражения должен был бы вызвать полный пересмотр теории вязких течений.

Для объяснения экспериментальных фактов вместо понятия зеркального отражения вводят квазиэмпирический «коэффициент аккомодации». Пользуясь таким коэффициентом и учитывая постулируемое в кинетической теории газов конечное значение средней длины свободного пробега, были получены результаты, в общем согласующиеся с данными эксперимента.

«Скольжение» в течении разреженного газа нельзя смешивать с представлениями девятнадцатого столетия об общем скольжении на границе весьма гладких твердых тел (например, Hg по стеклу). Так, Стокс [1]) считал, что «скольжение» должно наступать начиная с определенной скорости, тогда как многие другие выдающиеся ученые воздерживались от высказываний по этому вопросу. Ввиду многих особенностей физики поверхностей такое положение не слишком удивительно. Подтверждением взглядов Стокса могла быть и предполагаемая аналогия с трением твердых тел, при котором напряжение сдвига τ ограничено произведением постоянной $\mu < 1$ на нормальное давление. Даже в настоящее время, несмотря на то что подавляющее число фактов свидетельствует против аналогии с понятием общего скольжения [2]), всеобщей и абсолютной уверенности в этом вопросе пока не достигнуто.

§ 35. Выводы

Кратко изложенные выше факты являются серьезным доводом в пользу пригодности уравнений Навье — Стокса для потоков *несжимаемых* вязких жидкостей, к которым относятся течения обычных газов и жидкостей при скоростях, значительно меньших скорости распространения звука (т. е. если $M < 0{,}2$). Однако для большинства приложений нельзя полагаться на правдоподобные гипотезы, перечисленные в § 1, хотя эти гипотезы в других условиях могут оказаться полезными. Поэтому особенно при рассмотрении *турбулентности* требуется весьма

---

[1]) [13], т. 1, стр. 96—99. См. там же и стр. 186.

[2]) Систематизированный обзор фактов относительно общего скольжения см. в работе [3], т. 2, стр. 356—361. Последние данные см. Brockman M. R., *Nat. Bu. Standards Rep.*, **4673** (1956); Schnell E., *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 1149—1152; Debye P. and Cleland R. L., там же, **30** (1959), 843—849.

аккуратное применение статистического анализа на высоком математическом уровне.

Так, вместо использования уравнений Навье — Стокса при формулировке очевидных краевых задач (например, задачи стационарного течения) нужно обращаться непосредственно к *физической действительности* для постановки соответствующих краевых задач.

Подобное положение никоим образом не является чем-то новым в анализе, хотя об этом часто забывают. Так, открывая Первый международный математический конгресс, Пуанкаре сказал: «Каким бы богатым ни было воображение человека, природа еще богаче в тысячу раз», и далее: «Каждая физическая теория... по-новому освещает уравнения (в частных производных)... Без этих теорий мы не знали бы, что такое уравнения в частных производных» [1]). С тех пор эти основные истины подтверждались и другими выдающимися математиками, и их всегда следует помнить.

Менее ясно, какие свойства можно законным образом приписать *сжимаемым* вязким жидкостям. Хотя можно надеяться, что какое-то видоизменение уравнений Навье — Стокса будет хорошо соответствовать физическим фактам, остается неясным, как увязать это видоизменение с термодинамикой.

Для полной строгости нужно учитывать как теплопроводность и излучение, так и нагрев за счет трения и изменение вязкости и плотности с изменением температуры. Строгое решение возникающих при этом краевых задач и доказательство того, что задачи корректно поставлены, по-видимому, почти безнадежная проблема. Столь же, если не более, трудным делом представляется строгое применение методов теории возмущения, обосновывающее пренебрежение отдельными переменными. Достижение успеха в этом случае будет зависеть от использования гипотез (A) — (F) из § 1 и других подобных эвристических предположений.

Однако довольно обобщений! Теперь, не связывая себя строгой программой, мы перейдем к изучению трех различных концепций гидродинамики, чтобы получить более глубокое представление о том, какого рода соображения характеризуют существо вопроса. Мы имеем в виду теорию струй, подобие и присоединенные массы.

---

[1]) Poincaré H., Proc. First Int. Math Congress, Zürich, 1897, стр. 81—90. Подтверждения этой точки зрения см. Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem, Yale Univ. Press, 1923, стр. 23 и Courant R., Proc. Eleventh Int. Math. Congress, Cambridge (USA), 1950, т. 2, стр. 278.

Глава III

СТРУИ, СЛЕДЫ И КАВИТАЦИЯ

§ 36. Разрывные течения

При движении реальных жидкостей с малой вязкостью обычно можно заметить, что поток стремится *отделиться* от твердых стенок, особенно у острых углов. Это было уже отмечено в § 8, где на рис. 2, *в* изображено такое течение, а также в § 29.

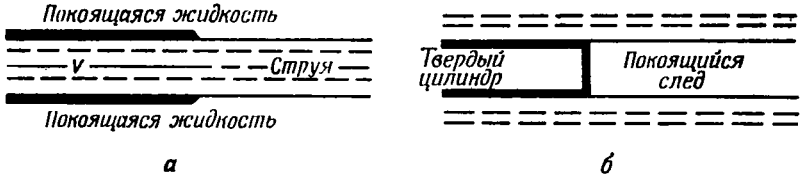


Рис. 9. *а* — прямая струя идеальной жидкости; *б* — след позади полуцилиндра в идеальной жидкости.

Математические модели подобных течений с отрывом можно довольно легко построить, используя уравнения движения Эйлера для *невязкой* жидкости. Основная идея состоит в том, что допускается скачкообразное изменение скорости при переходе через линию тока, что является грубым нарушением гипотезы (Е) из § 1. Простые примеры таких течений схематически изображены на рис. 9. В этих течениях все линии тока параллельны друг другу, а области равномерного течения отделены от областей стоячей воды *линиями тока*, при переходе через которые скорость изменяется *скачком*. На рис. 9, *а* изображена идеализированная бесконечная *струя*, поступающая в область неподвижной воды из трубы произвольного поперечного сечения, а на рис. 9, *б* изображен равномерный поток, отрывающийся от полуцилиндра со стороны среза и обтекающий застойный *след* позади этого полуцилиндра. В обоих случаях давление можно считать гидростатическим.

По определению, в идеальной невязкой жидкости усилие сдвига равно нулю; следовательно, необходимое и достаточное

условие равновесия на линии тока, являющейся линией разрыва, — это *непрерывность давления* при переходе через нее.

Если линия тока ограничивает идеализированный след или какую-либо другую область, заполненную неподвижной жидкостью («мертвая вода»), а сила тяжести учтена согласно теореме 1 из § 21, то условие непрерывности давления равносильно условию постоянства давления в рассматриваемой области. Поэтому ввиду непрерывности давления на линиях тока, ограничивающих след, давление должно быть постоянным. Линии тока, на которых скорость изменяется скачком, а давление постоянно, называются *свободными линиями тока*.

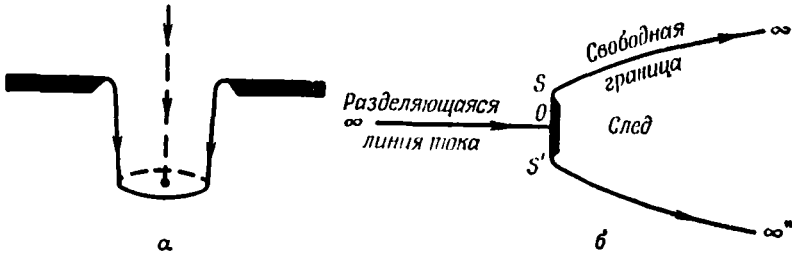


Рис. 10. *а* — круглая струя; *б* — след позади диска.

В силу уравнения Бернулли (8*) гл. I, если все еще пренебрегать силой тяжести, скорость остается постоянной вдоль любой свободной линии тока при стационарном течении, и наоборот: $v\,dv = -dp/\rho = 0$. Это дает чисто кинематическое краевое условие для стационарных течений, ограниченных свободными линиями. Вместе с формулами § 5 оно определяет следующую краевую задачу теории потенциала.

Задача Гельмгольца. Для заданного препятствия R найти потенциал скоростей, удовлетворяющий 1) уравнению $\nabla^2 U = 0$ вне препятствия R и вне области «мертвой воды» R_1; 2) условию $\partial U/\partial n = 0$ на границах препятствия R и области R_1 и 3) условию $|\nabla U|^2 = \text{const}$ на границе области R_1.

Заметим, что последнее краевое условие *нелинейно*. Заметим также, что топология течения осталась неопределенной; на практике ее задают исходя из интуитивных представлений или экспериментальных данных (гипотеза (D) из § 1). Две такие топологии течения схематически изображены на рис. 10. На этих рисунках показаны «струя», вытекающая из круглого отверстия в плоской стене, и «след» за диском.

Течения, удовлетворяющие указанным условиям 1)—3), т. е. решения задачи Гельмгольца, в последующем мы будем называть *течениями Гельмгольца*.

В действительности же никто еще не сумел дать точную математическую трактовку указанных выше двух течений Гельмгольца, см. § 49. Однако аналогичные течения для плоского случая, т. е. струя, вытекающая из щели, и след позади плоской пластинки, можно построить довольно легко. Теория этих плоских течений Гельмгольца будет предметом исследования в § 37—39[1]).

§ 37. Годографы в виде полукруга

В общем случае локально безвихревые несжимаемые плоские течения характеризуются существованием *комплексных потенциалов* $W = U + iV$. Здесь U — потенциал скоростей, а V — функция тока. Комплексный потенциал W есть аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$, характеризующей положение точки, а ее производная

$$\frac{dW}{dz} = \zeta = u - iv \tag{1}$$

представляет собой *сопряженное значение* комплексной скорости[2]) $u + iv = \zeta^*$, где $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$.

Если известен потенциал $W = f(\zeta)$ как комплексная аналитическая функция ζ, то, следовательно, можно определить z в виде аналитической функции от ζ, т. е.

$$z = \int \zeta^{-1} f'(\zeta)\, d\zeta = \int \zeta^{-1}\, dW. \tag{2}$$

и следовательно, можно (в принципе), исключив ζ, найти $W(z)$. Итак, для определения стационарного плоского течения Гельмгольца достаточно знать функциональное соотношение $W = f(\zeta)$. Каков вид этой функции в случае плоских течений, приведенных на рис. 10, можно догадаться по годографам рассматриваемых течений.

Годографом плоского течения называется геометрическое место тех значений ζ, которые действительно достигаются в этом течении. Из рис. 10 легко видеть, что годографы соответствующих плоских течений (если они существуют) должны быть *полукругами*. Это следует из того, что $\arg \zeta$ (направление течения) — величина, постоянная на плоских пластинках (фиксиро-

[1]) В русской литературе принят термин «теория струй», в эту теорию входит изучение всех течений со свободными поверхностями, на которых давление постоянно. — *Прим. ред.*

[2]) В русской литературе комплексной скоростью называется сама величина $dw/dz = u - iv$. — *Прим. ред.*

ванных границах), в то время как $|\zeta|$ (скорость течения) постоянна вдоль свободных границ, как показано в § 36.

С другой стороны, область W, или геометрическое место значений, принимаемых в данном течении величиной W, ограничена линиями $V = \text{const}$ (линии тока), параллельными действительной оси U. На рис. 10, *а* — это бесконечная полоса. Для случая на рис. 10, *б* — это полуплоскость, разрезанная вдоль положительной оси U (если выбрать постоянную интегрирования в $W = \int \zeta\, dz$ так, чтобы в критической точке было $W = 0$).

Аппарат конформного отображения. Пусть теперь Ф — любое течение, имеющее годографом полукруг (следовательно, ограниченное свободными линиями тока и прямолинейными стенками). Мы можем так выбрать оси координат, что величина ζ будет принимать действительные значения на неподвижной границе, и так выбрать единицы измерения, что на свободной границе будет $|\zeta| = 1$. Затем с помощью преобразования $\sigma = (\zeta + \zeta^{-1})/2$ отобразим область годографа на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\{\sigma\} < 0$. Конформное преобразование наиболее общего вида, отображающее область годографа на нижнюю полуплоскость, задается формулой

$$T = \frac{a\sigma + b}{c\sigma + d} = \frac{a(\zeta^2 + 1) + 2b\zeta}{c(\zeta^2 + 1) + 2d\zeta}, \quad ad > bc, \tag{3}$$

где a, b, c, d — действительные числа.

С другой стороны, область W любого односвязного течения, ограниченного линиями тока, есть обобщенный «многоугольник», одна или большее число вершин которого расположены на бесконечности и все стороны которого параллельны действительной оси. Следовательно, можно отобразить область T, определяемую соотношением (3), на область W при помощи подходящего (конформного) преобразования Шварца — Кристоффеля:

$$\frac{dW}{dT} = R(T) = \frac{C\prod_j (T - B_j)}{\prod_k (T - T_k)}, \tag{4}$$

где C и B_j, T_k — *действительные* параметры ([4], стр. 370). Мы видим, что для любого односвязного течения Ф, у которого область годографа есть полукруг, можно записать W в виде $\int A(\zeta)\, d\zeta$, используя формулы (3) и (4), где $A(\zeta)$ — *рациональная функция.*

Рассмотренный выше метод можно легко обобщить на случай, когда область годографа есть круговой сектор с углом,

при вершине равным π/n ([17]), гл. II). В этом случае преобразование ζ^n отображает область годографа на полукруг и, следовательно, соотношение

$$T = \frac{a(\zeta^{2n}+1)+2b\zeta^n}{c(\zeta^{2n}+1)+2d\zeta^n}$$

представляет собой отображение области годографа на полуплоскость. А дальше мы действуем, как в предыдущем случае.

§ 38. Истечение струи из щели

Гельмгольц [27] первый применил в 1868 г. описанный выше аппарат к случаю плоской струи, вытекающей из щели, см. рис. 11, *а*. В этом случае, выбрав единицу длины так, чтобы скачок V при переходе через отверстие был равен π, мы можем в формулах § 37 положить $W = \ln T$, $T = e^W$. $dW/dT = 1/T$.

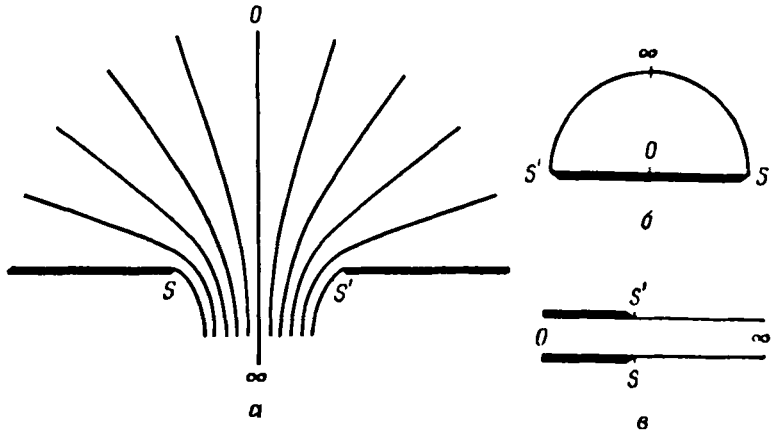


Рис. 11. Плоская струя, вытекающая из щели.

Для выбора величин a, b, c, d рассмотрим зависимость между ζ и W в физической плоскости. Очевидно, что предел $\zeta = 0$ в области годографа на рис. 11, *б* достигается тогда, когда $W = -\infty$ в области W на рис. 11, *в* или, что эквивалентно, когда $T = 0$. Из этого следует $a = 0$ в формуле (3). С точностью до подобия мы можем теперь написать равенства

$$T = \frac{\zeta}{\zeta^2 - 2C\zeta + 1}, \qquad W = \ln T, \qquad C = -d/c. \tag{5}$$

Точка струи, лежащая на бесконечности, где $W = +\infty$, очевидно, соответствует значению $\zeta = e^{i\alpha}$, $(\zeta + \zeta^{-1})/2 = \sigma = C =$

$= \cos\alpha$. Следовательно, уравнения (2) и (5) определяют *струю, вытекающую из щели* в бесконечной пластинке и образующую с этой пластинкой угол α. Так как подинтегральное выражение в формуле (2) представляет собой рациональную функцию, мы можем произвести интегрирование в замкнутом виде и получим, учитывая равенства (5), следующее соотношение:

$$W = \ln\zeta - \ln(\zeta^2 - 2C\zeta + 1); \tag{6}$$

детали вычислений мы здесь опускаем. Случай *вертикальной* струи, рассмотренный Гельмгольцем, соответствует $C = \cos\alpha = 0$.

§ 39. Схема обтекания Кирхгофа

В 1869 г. Кирхгоф [31] выполнил аналогичные расчеты для следа позади пластинки. В этом случае преобразование $W = T^2$ отображает нижнюю полуплоскость на плоскость с разрезом, являющуюся областью W; таким образом, $R(T) = 2T$ в формуле (4), если направить действительную ось вдоль пластинки.

Для того чтобы определить постоянные a, b, c, d в формуле (3), мы снова рассмотрим зависимость между W и ζ в физической плоскости. Точка $W = 0$, в которой начинается разрез, соответствует критической точке течения, в которой $\zeta = 0$. Отсюда $a = 0$, и мы снова можем написать равенства (5), помня при этом, что $C = \cos\alpha$ определяет направление течения на бесконечности.

Наиболее интересен случай обтекания пластинки под *прямым* углом; он представляет собой плоское течение, аналогичное изображенному на рис. 10, *б*. В этом случае равенства (5) сводятся к виду

$$W = T^2 = \left(\frac{\zeta}{\zeta^2+1}\right)^2. \tag{7}$$

Выполняя интегрирование, указанное в формуле (2), мы на этот раз получаем следующее соотношение:

$$z = \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} - \frac{i}{2}\ln\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right\} + \text{const} \tag{8}$$

для всех значений $\zeta = \xi + i\eta$.

Вдоль пластинки величина ζ принимает действительные значения и соотношение (8) сводится к виду

$$z = \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} + \operatorname{arc\,tg}\zeta\right\}, \tag{8a}$$

где, очевидно, $z(0) = 0$, и, таким образом, постоянная интегрирования равна нулю. В правой точке отрыва $S\zeta = 1$, следовательно,

$$z(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{4+\pi}{8}. \qquad (8б)$$

Давление легче всего вычислить, положив $\zeta = \xi = \operatorname{tg}\theta$ вдоль пластинки, так что $\zeta/(\zeta^2+1) = \sin\theta\cdot\cos\theta = 1/2\sin 2\theta$. Следовательно, в силу теоремы Бернулли[1]) и формулы (8а), давление на пластинку равно интегралу

$$\int_{\xi=0}^{1}(1-\xi^2)\,dx = \int_{\xi=0}^{1}\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}\theta}\,d\left[\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right] = \int_{\theta=0}^{\pi/4} 2\cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Отношение этой величины к половине длины пластинки, очевидно, представляет собой коэффициент лобового сопротивления, который, таким образом, равен величине

$$C_D = \frac{2\pi}{\pi+4} = 0{,}88. \qquad (9)$$

Аналогичные, но более сложные подсчеты для случая обтекания пластинки под острым углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ позволяют получить следующие формулы[2]):

$$C_D = \frac{2\pi\sin^2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}, \qquad C_L = \frac{\pi\sin 2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}. \qquad (9')$$

§ 40. Влияние стенок

Метод годографа[3]) можно также применить с целью получения информации относительно влияния стенок на струю при истечении из сопла.

Рассмотрим, по Гельмгольцу, обтекание пластины, половина ширины которой равна b и которая удерживается в симметричном положении в струе из сопла, как показано на рис. 12, *а*. Так же как и раньше, функции $W(z)$ и $\zeta(z)$ конформно отображают течение на бесконечную полосу с разрезом и на полукруг соответственно.

---

[1]) Автор предполагает, что плотность жидкости равна единице. — *Прим. ред.*

[2]) Через C_L обозначен коэффициент подъемной силы. — *Прим. ред.*

[3]) См. [17], гл. II, § 7, 8; а также гл. I, § 11.

Это опять-таки следует из того, что область W ограничена линиями тока, на которых $V = \text{const}$, включая линию тока, разделяющуюся в критической точке. Область годографа ограничена свободными линиями тока, на которых величина ζ постоянна, и неподвижной пластинкой, вдоль которой величина ζ направлена вертикально.

С математической точки зрения удобно так выбрать начало координат и единицы измерения, чтобы область W представляла собой полосу $-\pi < V < \pi$, разрезанную вдоль положительной полуоси $W = U > 0$, а область годографа — полукруг $|\zeta| < 1, -\frac{\pi}{2} < \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$.

Удобно также рассматривать только нижнюю *половину* течения.

При этих условиях область значений $T = e^W$ совпадает с полуплоскостью. Так как преобразование ζ^2 отображает половину области годографа на единичный полукруг $0 < \arg\zeta < \pi, |\zeta| < 1$, то функция $(\zeta^2 + \zeta^{-2})/2$ отображает ее на полуплоскость. В силу основной теоремы о единственности конформного отображения, отсюда следуют соотношения:

$$W = \ln T,$$

$$T = \frac{a(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + 2b}{c(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + 2d}, \qquad (10)$$

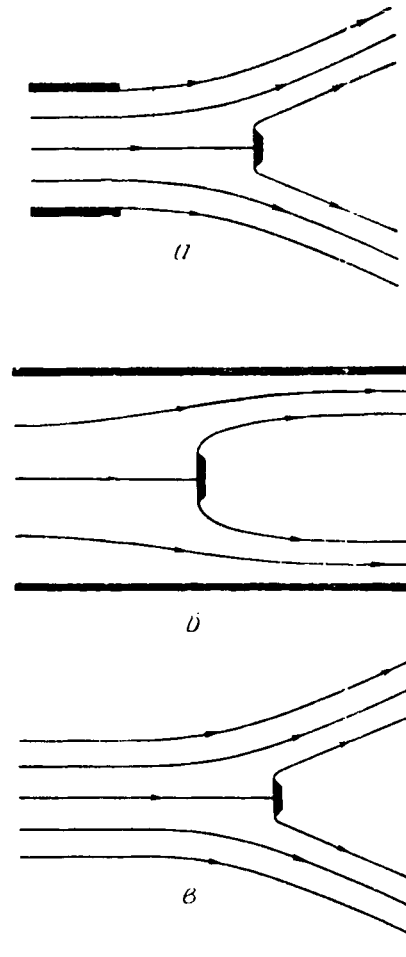


Рис. 12. Примеры плоских течений.

а — пластинка в струе, вытекающей из сопла; *б* — пластинка в канале; *в* — пластинка в свободной струе.

где величины a, b, c, d — действительные числа. Эти действительные постоянные можно связать с геометрическими свойствами течения. Если $v < 1$ — скорость течения в сопле (предполагаемая постоянной) и $e^{-i\alpha}$ — скорость в нижней струе, то $\zeta = v$,

когда $W = -\infty$ и $T = e^W = 0$, в то время как $\zeta = e^{i\alpha}$, когда $W = T = \infty$. Таким образом, отбрасывая постоянные слагаемые, получим следующее выражение:

$$W = \ln[(\zeta^2 - e^{2i\alpha})(\zeta^2 - e^{-2i\alpha})] - \ln[(\zeta^2 - v^2)(\zeta^2 - v^{-2})] = \\ = \ln[\zeta^4 - 2C\zeta^2 + 1] - \ln[\zeta^4 - (v^2 + v^{-2})\zeta^2 + 1], \qquad (11)$$

где $C = \cos 2\alpha$. Поскольку из формулы (2) $z = \int \zeta^{-1}\, dW$, это выражение можно проинтегрировать элементарным способом и получить $z(\zeta)$ в замкнутом виде [1]).

Особый интерес представляют случай $C = 1$ — пластина в *закрытом канале* (рис. 12, *б*), для которого можно получить соотношение

$$z = 4 \operatorname{arc\,th} \zeta - 2v \operatorname{arc\,th} v\zeta - \frac{2}{v} \operatorname{arc\,th} \frac{\zeta}{v}, \qquad (12а)$$

и случай $v = 1$ — пластина ширины π в *свободной струе*, (рис. 12, *в*), для которого можно получить соотношение

$$z = 2\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - e^{i\alpha}\ln\frac{1+e^{i\alpha}\zeta}{1-e^{i\alpha}\zeta} - e^{-i\alpha}\ln\frac{1+e^{-i\alpha}\zeta}{1-e^{-i\alpha}\zeta}. \qquad (12б)$$

Используя формулы (12а), (12б), можно показать, что поправка на влияние стенок для коэффициента C_D мала, если исходить из скорости на свободной линии тока, но она очень велика, если исходить из скорости вверх по течению. Так, она составляет 30%, если (двумерный) туннель имеет ширину в 100 диаметров. В случае свободной струи эта поправка мала, и рассмотренная выше проблема не возникает.

§ 41. Неустойчивость течений Гельмгольца

К сожалению, свободные границы струй и следов, рассмотренные Гельмгольцем и Кирхгофом, *неустойчивы*. Это было известно уже Гельмгольцу ([27], стр. 222), который заметил, что границы струй, вытекающих из духовых труб, закручиваются в виде периодических спиралей.

Кроме того, наблюдения показывают, что при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^4$ линии тока, которые отделяются от плоской пластинки (или другого препятствия) в движущемся потоке, вскоре прекращают свое существование в турбулентной «зоне смешения». Вследствие этого реальный след никоим образом не представляет собой неподвижную полосу «мертвой воды», простирающуюся в бесконечность, как полагал Кирхгоф. Реальные следы заполнены вихрями, которые наиболее активны

[1]) Задачи, рассмотренные в § 40, впервые были решены в 1890 г. Н. Е. Жуковским [15*]. — *Прим. ред.*

в зоне смешения, и эти вихри непрерывно выносят жидкость вниз по течению за пределы следа.

Чтобы объем жидкости, образующей след, оставался одним и тем же, необходимо, чтобы в центре следа поддерживалось обратное течение. В результате этого в потоке появляются два вихря, как это изображено на схеме рис. 13. Эти вихри поддерживаются значительным градиентом давления, они намного уменьшают давление p_w в кильватерной зоне позади пластинки.

Ввиду такой крайней неустойчивости в реальных следах получается значительное понижение давления: давление в них p_w

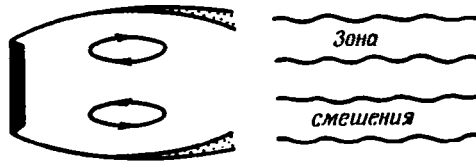


Рис. 13. Обратное течение в реальном следе.

гораздо меньше давления p_a в смежных областях. Как следствие этого найденный Кирхгофом теоретически коэффициент сопротивления $C_D = 0{,}88$ меньше, чем половина действительного значения C_D, которое приблизительно равно двум. Для наклонных пластинок значение подъемной силы C_L в модели Кирхгофа занижено даже в большей мере, особенно при углах, меньших «критического угла» (около 15°).

Если бы это было не так, то полет самолета был бы крайне затруднен. Это заметил Рэлей ([12], т. I, стр. 287, и т. III, стр. 491) уже в 1876 г. К счастью, модель Жуковского из § 8 является гораздо лучшим приближением действительной картины при малых углах атаки. (Кроме того, отрыв потока можно намного задержать при помощи соответствующей конструкции крыла, как уже было объяснено в § 29.)

Эти факты были хорошо известны Кельвину [1]), который получил более важный результат: он показал, как можно количественно исследовать устойчивость прямолинейных линий тока в плоскопараллельном течении.

Очень большой интерес представляет случай горизонтальной границы в вертикальном поле силы тяжести. Граница разделяет две жидкости с плотностями ρ и ρ', которые движутся соответственно со скоростями u и u', как указано на рис. 14. Кельвин показал, что в этих условиях синусоидальное возмуще-

[1]) *Nature*, 50 (1894), стр. 524, 549, 573; см. также Рэлей [38], т. 6, стр. 39

ние граничной поверхности с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ должно возрастать по экспоненциальному закону $\exp\{l(\lambda)t\}$, где

$$[l(\lambda)]^2 = \frac{\rho\rho' k^2}{(\rho+\rho')^2}(u'-u)^2 - \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}gk - \frac{\gamma k^3}{\rho+\rho'}, \quad . \quad (13)$$

причем γ есть натяжение на граничной поверхности, а g — ускорение силы тяжести. Его доказательство приведено в работе [7], п. 266—267.

В случае следов, когда $\rho = \rho'$ и $\gamma = 0$, очевидно, мы имеем $l(\lambda) = k|u' - u|/2 > 0$. Граничная поверхность в высшей степени неустойчива, скорость нарастания возмущений с очень короткой длиной волны *не ограничена*. Так, например, на расстоянии в n длин волны, $|u' - u|t = n\lambda = 2\pi n/k$, скорость нарастания определяется множителем $e^{2\pi n}$ в относительном движении [1]).

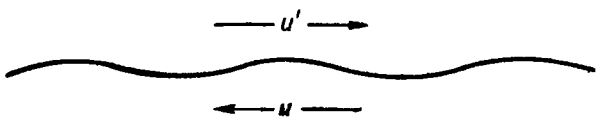


Рис. 14. Неустойчивость по Гельмгольцу и Кельвину.

Волны, вызываемые ветром. Кельвину мы обязаны классическим применением его формулы (13) для расчета минимальной скорости ветра, требующейся для возникновения ряби на поверхности спокойной воды. Вероятно, каждому доводилось наблюдать, что при достаточно легком бризе поверхность прудов остается зеркально гладкой. Теоретически можно показать, что для равномерно дующего ветра при обычном отношении плотности воздуха к плотности воды, равном $\rho'/\rho = 0{,}00126$, из формулы (13) следует, что возмущения всех длин волн будут безразлично устойчивы тогда и только тогда, когда $|u' - u| < 646$ *см/сек*. В действительности волны возникают при ветрах со средней скоростью, меньшей чем $^1/_5$ этой величины; простое и убедительное объяснение этого парадокса еще предстоит найти [2]).

§ 42. Кавитация

Когда твердое тело движется в жидкости с большой скоростью, его след обычно заполняется газом. Такой заполненный

[1]) Многие струйные течения при $\rho' = 0$ обладают «нейтральной устойчивостью», см. Fox J. L., Morgan G. W., *Quart. Appl. Math.*, 11, 4, 1954. — *Прим. ред.*

[2]) Ursell F. недавно дал обзор этой задачи в работе [20], стр. 216—249; резюме некоторых экспериментальных данных см. там же на стр. 240.

газом след называют *каверной*, и решения задачи Гельмгольца описывают обтекание каверны гораздо лучше, чем они описывают самый след.

Естественным образом каверны возникают при различных условиях. Так, можно сфотографировать [38] заполненные воздухом каверны позади сфер, падающих в воду с высоты двух метров и больше. Заполненные паром каверны образуются позади подводных снарядов, скорость которых превышает, скажем, 30 *м/сек*. Подобные каверны также обычно образуются на лопастях судовых винтов при давлении на поверхности винта, превышающем примерно 1,5 *кг/см*^{2}, и в таких случаях опасаются разрушения маленьких пузырьков, сопутствующих «возникновению кавитации» как причины эрозии винта. Подобная эрозия (и по той же причине) может происходить при перегрузке гидротурбин. Парадоксально, что «суперкавитационные» винты, работающие при гораздо бо́льших давлениях и притом в больших кавернах, можно сконструировать так, чтобы избежать этой эрозии.

Впервые практическое значение кавитации было отмечено примерно в 1900 г. Математический анализ этих явлений основан на правдоподобном предположении, что заполненные паром каверны образуются благодаря испарению, как только давление в жидкости падает ниже вполне определенного значения — «давление испарения» p_v. Математически это эквивалентно условию

$$p = p_v \text{ в каверне}; \quad p \geqslant p_v \text{ в жидкости}. \tag{14}$$

(В кавернах, заполненных воздухом, конечно, возможно $p > p_v$.)

Руководствуясь этой идеей, Тома ввел [1]) в 1924 г. широко применяемый в настоящее время *параметр кавитации* (кавитационное число)

$$Q_v = \frac{p_a - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}, \tag{15a}$$

где p_a — давление во внешней области. Вскоре после этого Аккерет и другие авторы [2]) показали, что теория течений Гельмгольца применима к кавернам больших масштабов позади твердых препятствий. Но в первую очередь развитию теории кавитации, какой она является в настоящее время, способствовали работы по применению подводных снарядов во время второй мировой войны.

---

[1]) Thoma D., Trans. First World Power Conf. (1924), т. 2, 536—551; см. также Taylor H. B., Moody L. F., *Mech. Engineering*, 44 (1922), 633—640; см. § 72.

[2]) Ackeret J., *Tech. Mech. und Thermodynamik*, 1 (1930), 1—21 и 63—72. В 1932 г. Weinig впервые применил модель Рябушинского из § 7 к кавитационным течениям.

§ 43. Параметры ρ'/ρ и Q

Определенные выше эмпирическим путем параметры ρ'/ρ и Q_v время от времени упоминались в инженерной литературе, но в учебниках теоретической гидродинамики [1]) отсутствовали вплоть до 1945 г. В настоящее время эти параметры дают ключ ко многому при исследовании течений Гельмгольца. Например, при помощи параметра ρ'/ρ можно объяснить, почему стационарные кавитационные течения и струи жидкостей в воздухе (т. е. *двухфазные* течения) описываются по Гельмгольцу гораздо лучше, чем следы или, скажем, газовые струи.

В случае скоростных торпед члены, содержащие g и γ в формуле (13), относительно малы. Следовательно, если $\rho' \ll \rho$, то в первом приближении получим равенство $l(\lambda)=(k|u'-u|/2)\sqrt{\rho'/\rho}$. Это приводит к выводу, что *расстояние* $|u'-u|t$ от точки отрыва до зоны перемешивания, где модель Гельмгольца теряет силу при данной длине волны λ, будет пропорционально $\sqrt{\rho/\rho'}$. Для каверн, заполненных воздухом, $\rho/\rho' \simeq 750$, а для каверн, заполненных паром, $\rho/\rho' \simeq 30\,000$; следовательно, в обоих случаях, согласно анализу Кельвина, надо ожидать, что неустойчивость свободных линий будет невелика.

Этим теоретически объясняется эмпирическое утверждение Бетца и Петерсона [2]), что *теория струй применима, если* $\rho'/\rho \ll 1$. Эти авторы основывались на работе Аккерета и на более ранних работах Мизеса, проверявшего теоретические расчеты для струй воды в воздухе. Например, хотя влияние стенок, описанное в § 40, не сказывается в реальных следах, для которых оно первоначально было рассчитано [3]), оно весьма существенно при наличии реальных каверн.

Практическое применение теории струй зависит также от второго параметра, который совпадал бы с выражением (15а), если бы условия (14) были точными. Если предположить, что условия (14) и уравнение Бериулли выполняются для теоретического двухфазного течения Гельмгольца, то выражение (15а) принимает вид $Q_c = (v_f/v_a)^2 - 1$, где v_f — скорость на свободной линии тока, а v_a — скорость во внешней

---

[1]) См. [7], п. 73—80 и гл. XII первого издания [8]. Контраст с данными книги [2], гл. II, поразителен; см. также Proc. Seventh Int. Congress Appl. Mech., London, 1948, т. 2, стр. 7—16.

[2]) *Ingenieur Archiv*, 2 (1931), 190—211. Относительно данных Мизеса, подтверждающих формулы, выведенные в § 40, см. *Zeits. VDI*, 61 (1917), 447—452, 467—473 и 493—497.

[3]) Volcovici V., Inaugural dissertation, Goettingen, 1913. Относительно приложений к кавитации см. Birkhoff G., Plesset M. and Simmons N., *Quar. Appl. Math.*, 8 (1950), 151—168 и 9 (1952), 413—421.

области («скорость свободного потока»). Поэтому *теоретический* параметр кавитации для течения Гельмгольца мы определим выражением

$$Q = \left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 - 1. \tag{15б}$$

Ясно, что для идеальной жидкости из условий (14) следует $Q > 0$. Для каверн, заполненных воздухом, эмпирический коэффициент падения давления также всегда положителен и определяется формулой

$$Q_c = \frac{p_a - p_c}{{}^1/_2 \rho v^2}, \tag{15в}$$

где p_c — давление в каверне. Наконец, эмпирически найдено, что *падение давления в следе* ($p_a - p_w$), упомянутое в § 41 и выраженное в безразмерной форме через коэффициент падения давления в следе

$$Q_w = \frac{p_a - p_w}{{}^1/_2 \rho v^2}, \tag{15г}$$

заключено между нулем и единицей. Таким образом, за плоской пластинкой значения Q_w близки к единице.

Принимая величину Q_w в качестве эмпирического параметра, теорию струй можно плодотворно применить даже к *следам*. Так, если ввести поправочный числовой множитель $(1 + Q_w)$, для того чтобы учесть наблюдаемое падение давления в следе за наклонной плоской пластинкой, то формулы теории Кирхгофа хорошо согласуются с получаемыми на практике функциями распределения давлений на передней поверхности ([17], стр. 28, рис. 3) — по крайней мере если $\alpha > 15°$, т. е. больше критического угла.

Условие $Q > 0$, очевидно, легко отождествить в случае невязкой жидкости со следующим чисто кинематическим условием, введенным в 1911 г. М. Бриллюэном [19] в связи с исследованием следов [1]).

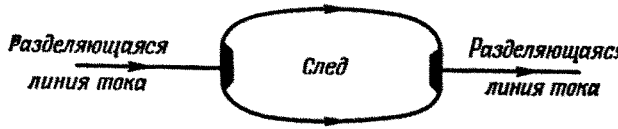
Условие Бриллюэна. Скорость принимает максимальное значение на свободной линии тока.

Хотя во всех известных нам практических приложениях выполнено условие $Q > 0$, было бы неправильным предполагать, что условие (14) строго выполняется при любых обстоятельствах. (См. работу [17], гл. XV.)

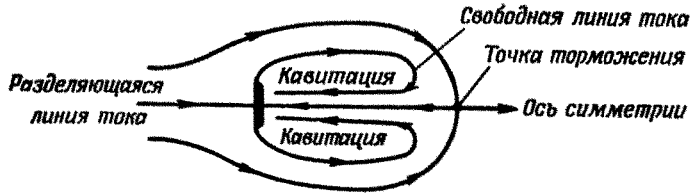
[1]) Что условие Бриллюэна выводится из формул (14), указано в работе [2], стр. 51; см. также § 45.

§ 44. Модели течений при $Q \neq 0$

В случае обтекания пластинки в канале, формула (12а), можно считать Q положительной величиной, вводя в рассмотрение скорость вверх по течению (равную единице, что достигается выбором единиц измерения) в качестве скорости свободного потока. При таком условии $Q = v^{-2} - 1 > 0$ и $1 + Q = v^{-2}$. Таким образом, предположение о том, что при определении коэффициента C_D нужно использовать скорость на свободной линии



а



б

Рис. 15. *а* — течение Рябушинского; *б* — возвратная струя.

тока, $v = v_f$ эквивалентно введению в предыдущем параграфе миожителя $(1 + Q_w)$.

Однако построить течения Гельмгольца с условием $Q \neq 0$ в бесконечном потоке гораздо труднее. Кроме того, реальные каверны имеют конечные размеры, а построить течения Гельмгольца с конечными кавернами особенно трудно из-за следующего парадокса.

Парадокс Бриллюэна. *Каверны конечного размера, удовлетворяющие условию Бриллюэна, математически невозможны.*

Ниже мы кратко рассмотрим доказательство (см. [19]). Поскольку давление внутри каверны минимально (условие Бриллюэна), свободные линии тока обращены своей вогнутостью в сторону каверны, которая должна быть поэтому выпуклой. Но такая каверна должна иметь критическую точку, в которой схо-

дятся две свободные линии тока, с минимальным давлением p_s. По теореме Бернулли из этого следует, что $|u|^2 = 2(p_s - p)/\rho \leqslant 0$ везде, за исключением свободной границы, а это означает, что $u = 0$ тождественно.

Чтобы избежать парадокса Бриллюэна, были построены различные модификации течения Гельмгольца путем искусственного изменения задней части каверны. Можно полагать, что таким образом будет выполнено условие $Q \neq 0$ без значительного искажения течения около препятствия, создающего каверну.

Так, в 1921 г. Рябушинский [39] построил течение Гельмгольца со свободными линиями тока для двух симметрично расположенных пластинок (см. рис. 15, *а*) с условием $Q > 0$. Это построение можно кратко описать следующим образом (см. [17], гл. V, § 9).

«Область годографа» (т. е. диаграмма на ζ-плоскости) одной четверти течения, очевидно, представляет собой четверть круга, а область W — квадрант ввиду вертикальной и горизонтальной симметрии. Следовательно, конформное отображение области годографа на область W выполняется (см. § 40) по формуле

$$W^2 = \frac{a(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + b}{c(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + d} = C\,\frac{\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1}{\zeta^4 + 2\mu\zeta^2 + 1}. \qquad (16а)$$

Посредством выбора единиц измерения мы можем свести все к случаю $C = 1$ и $\zeta = 1$ при $W = \infty$, из чего следует $\mu = -1$.

После этого получим соотношение

$$W = \frac{\sqrt{\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1}}{(\zeta^2 - 1)}, \qquad (16б)$$

откуда величину $z = \int dW/\zeta$ можно получить в виде эллиптического интеграла. Если v есть скорость на свободной линии тока, то $\zeta = v$ при $W = 0$, откуда $\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1 = (\zeta^2 - v^2)\ (\zeta^2 - v^{-2})$ и $\lambda = -\frac{1}{2}(v^2 + v^{-2})$. По уравнению Бернулли $Q = v^2 - 1$, откуда $\lambda = \frac{1}{2}\left[(1+Q) + (1+Q)^{-1}\right]$. С помощью этих формул легко найти коэффициент C_D как функцию Q.

Другое важное течение Гельмгольца с условием $Q > 0$ было построено в 1946 г. Эфросом и, независимо от него, Гильбаргом и Роком [1]. Вместо симметричной каверны оно имеет *возвратную* струю (см. рис. 15, *б*) [2]. Возвратные струи наблюдались экспериментально, хотя они, по-видимому, образуются лишь

[1]) См. [17], гл. III, § 8, по поводу литературы и подробностей вычислений.

[2]) См. [16*], подробности в [17*]. — *Прим. ред.*

время от времени и неустойчивы [1]). Поэтому модель возвратной струи представляет особый интерес с физической точки зрения.

Позади выпуклых тел можно построить также «заостренные» каверны при $Q < 0$, хотя в свое время считали, что это невозможно [2]). Однако такие каверны вовсе не похожи на наблюдаемые, образцы которых показаны на фото I и фото II (см. § 51). Сохранить повышенное давление в устойчивой каверне (или в следе конечной длины), по-видимому, очень трудно.

§ 45. Криволинейные препятствия

Для математического аппарата, описанного выше, существенно то, что нам известны *специальные* конформные отображения и интегралы от *специального* вида функций. Хотя этот аппарат тщательно разработан и пригоден для решения многих задач с полигональными препятствиями (см. [17], гл. II, III и V), он, вообще говоря, не пригоден для исследования кавитационного обтекания *криволинейных* препятствий.

Создание быстродействующих вычислительных машин дало возможность подойти по-другому к этой проблеме, пользуясь *общими* теоретико-функциональными методами. Хотя такой подход до сих пор успешно применялся лишь к *плоским* течениям и хотя ниже мы будем рассматривать только такие приложения, подобные методы вполне могут быть применимы к осесимметричным и даже к произвольным струйным течениям.

В качестве иллюстрации этого современного подхода мы рассмотрим общий случай криволинейного препятствия, симметрично расположенного в бесконечном потоке, как показано на рис. 16. Мы снова будем предполагать, что смачиваемый участок $\overset{\frown}{ACB}$ поверхности препятствия расположен вертикально, и выберем единицы измерений так, чтобы на свободной границе было выполнено условие $|\zeta| = 1$.

Следуя Леви-Чивита [33], отобразим конформно и однозначно односвязную область течения на внутренность полукруга Γ:

$$|t| < 1, \qquad \operatorname{Im}\{t\} > 0. \tag{17}$$

---

[1]) В задней части каверны за осесимметричным препятствием может образоваться также пара вихрей с пустой внутренней областью ([42], стр. 230).

[2]) См. работу [17], гл. V, § 10, 14, а также работу [2], стр. 58. [Случай заостренной каверны перед пластинкой был рассмотрен С. А. Чаплыгиным еще в 1899 г. [18*]. Задача о заостренной каверне за обтекаемым клином также была решена С. А. Чаплыгиным [19*]. — *Прим. ред.*]

Из основной теоремы о конформных отображениях [1]) следует, что имеется в точности одно такое отображение $t = f(z)$ области течения на внутренность полукруга Г, переводящее точки A, B, C соответственно в точки 1, —1, i. Очевидно, что функция $f(z)$ отображает *свободные* линии тока на *диаметр*, расположенный на действительной оси, а смачиваемый участок поверхности *препятствия* — на *полуокружность* $t = e^{i\sigma}(0 < \sigma < \pi)$. (В этом случае мы используем обозначения, отличающиеся от § 38—40.)

Чтобы получить выражение для комплексного потенциала,

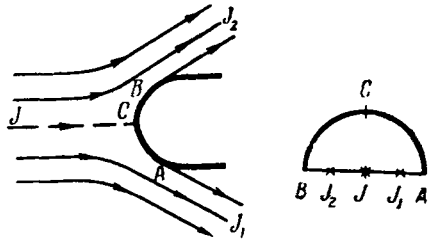


Рис. 16. Обтекание криволинейного препятствия.

удобно отобразить область Г на верхнюю полуплоскость посредством конформного преобразования

$$T = -\frac{t + t^{-1}}{2}, \quad \text{так что} \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{1 - t^{-2}}{2}. \tag{18}$$

Тогда комплексный потенциал, очевидно, задается так:

$$W = \frac{MT^2}{2}, \qquad \frac{dW}{dT} = MT, \qquad M > 0, \tag{18'}$$

где M — некоторая положительная постоянная. Это следует из того, что формула (18′) позволяет отобразить область течения на плоскость с разрезом, причем точка разветвления $t = i$ попадает в точку $W = T = 0$, а точка на бесконечности $t = 0$ — в точку $W = T = \infty$.

Теперь рассмотрим функцию $(i - t)/(i + t) = (1 + it)/(1 - it)$. Модуль ее равен единице, если t — действительное число; ее аргумент на участке $\widehat{AC}$ равен $\pi/2$, на участке $\widehat{CB}$ равен

[1]) Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, Springer, Leipzig, 1923, т. 1, стр. 61. По поводу принципа отражения Шварца см. там же, стр. 225. [На русском языке см., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1950; или Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951. — *Прим. перев.*]

$-\pi/2$, в точке C имеется скачок аргумента $-\pi$. Новая функция $\Omega(t) = \theta + i\tau$, определенная формулами

$$\zeta = \left(\frac{1+it}{1-it}\right) e^{-i\Omega(t)}, \qquad \zeta^{-1} = \left(\frac{1-it}{1+it}\right) e^{i\Omega(t)}, \tag{19}$$

также аналитическая и регулярная функция внутри области Г. На свободной границе, где t — действительное число, имеем равенство $|1 + it| = |1 - it|$, и следовательно, можно записать соотношение

$$1 = |\zeta| = \left|\frac{1+it}{1-it}\right| e^{\tau(t)} = \tau(t). \tag{19'}$$

Поэтому функция $\tau(t)$ обращается в нуль на диаметре полукруга Г, т. е. функция $\Omega(t)$ *действительна, когда действительно* t.

По принципу симметрии Шварца (см. прим. 1) на стр. 93) функцию $\Omega(t)$ можно аналитически продолжить на внутренность единичного круга $|t| < 1$. Поэтому в рассматриваемом нами симметричном случае (ζ и $i\Omega(t)$ действительные на мнимой оси t, являющейся осью симметрии) мы можем написать равенство

$$\Omega(t) = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \ldots, \tag{20}$$

где все a_i действительные числа, причем радиус сходимости ряда (20) не меньше единицы. Для неподвижной границы $|t| = 1$ с помощью довольно тонких рассуждений можно доказать, что функция $\Omega(t)$ даже *непрерывна* ([17], гл. VI, стр. 135). Не строго выражаясь, множитель $(1 - it)/(1 + it)$ «снимает» простой полюс для функции ζ^{-1} (нуль для функции ζ) в критической точке.

Обратно, для данной функции (20) с радиусом сходимости, равным единице или больше единицы, уравнения (19) и

$$z = \int_i^t \zeta^{-1}\left(\frac{dW}{dT}\right)\left(\frac{dT}{dt}\right) dt = \frac{M}{4}\int_i^t \zeta^{-1}(t - t^{-3})\, dt \tag{21}$$

определяют течение, разделяющееся на две симметричные части позади гладкого препятствия $\widehat{ACB}$, имеющего непрерывную касательную. Это приводит к классическому результату Леви-Чивита.

Теорема 1. *Течениям, разделяемым на две симметричные части симметричным препятствием в бесконечном потоке, однозначно соответствуют различные функции вида* (20), *регулярные при* $|t| < 1$ *и непрерывные при* $|t| = 1$, *и постоянные* M. *Это соответствие задается уравнениями* (19), (20) и (21).

§ 46. Прямая задача

Теорема 1 позволяет решить *обратную* задачу — найти класс *всех* плоских течений бесконечного потока, разделенного на симметричные части криволинейным препятствием. Теперь мы обратимся к прямой задаче: найти, какова функция $\Omega(t)$ для данного двумерного препятствия P, симметрично расположенного в бесконечном потоке. Мы покажем, что эта задача эквивалентна решению нелинейного интегрального уравнения.

В принципе можно очень просто выразить все свойства течения с помощью функции $\Omega(t)$. Так, вдоль неподвижной границы P ($t = e^{i\sigma}$ в плоскости t) для $\Omega = \theta + i\tau$ запишем равенства

$$\theta = a_1 \cos\sigma + a_3 \cos 3\sigma + a_5 \cos 5\sigma + \dots, \tag{22а}$$

$$\tau = a_1 \sin\sigma + a_3 \sin 3\sigma + a_5 \sin 5\sigma + \dots. \tag{22б}$$

Нам будет удобно рассматривать также производную

$$\lambda(\sigma) = -d\theta/d\sigma = a_1 \sin\sigma + 3a_3 \sin 3\sigma + a_5 \sin 5\sigma + \dots, \tag{22в}$$

предполагая в соответствии с гипотезой (Е) из § 1, что выписанные ряды Фурье удовлетворительно сходятся в случае достаточно «гладких» препятствий.

Мы покажем теперь, что θ отличается на величину $\frac{\pi}{2}$ от направления φ касательной к препятствию. Так как $\arg dz/dT = \arg\zeta^{-1} + \arg dW/dT$ и $\arg dz/dT = \varphi$ (исключая критическую точку C), то очевидно, что $\arg\zeta^{-1}$ равен $\varphi - \pi$ на участке $\overset{\frown}{AC}$ и равен φ на участке $\overset{\frown}{CB}$. С другой стороны, в силу формулы (19) и сделанных перед этим замечаний относительно величины $\arg[(1+it)/(1-it)]$ значение $\arg\zeta^{-1}$ равно $\theta - \pi/2$ на участке $\overset{\frown}{AC}$ и равно $\theta + \pi/2$ на участке $\overset{\frown}{CB}$. Оба эти соотношения показывают, что вдоль участка ACB $\theta = \varphi - \pi/2$.

Длину дуги препятствия l можно найти при помощи соотношения (21), из которого следует равенство

$$dl = |\zeta^{-1}| \cdot |dW/dT| \cdot |dT/dt| \cdot d\sigma \quad \text{на} \quad t = e^{i\sigma}.$$

Применяя формулу (19′) и элементарную тригонометрию, получаем соотношение

$$|\zeta^{-1}| = \left|\frac{1-it}{1+it}\right| \cdot |e^{i\theta-\tau}| = \left|\frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\right| e^{-\tau}.$$

Аналогично, так как $dW/dt = (t - t^{-3})$, как и в формуле (21), находим соотношение

$$\left|\frac{dW}{dt}\right| = M \cdot |\cos\sigma \sin\sigma|, \quad M = \text{const}.$$

Сравнивая предыдущие формулы, окончательно получаем следующий результат:

$$dl = M\nu(\sigma)\, e^{-\tau(\sigma)}\, d\sigma, \qquad \nu(\sigma) = |\sin\sigma\,(1+\sin\sigma)|. \tag{23}$$

Поэтому для *кривизны*, определяемой равенством $\varkappa = -d\varphi/dl = -d\theta/dl$, получаем формулу

$$\varkappa = \frac{\lambda(\sigma)\, e^{\tau(\sigma)}}{M\nu(\sigma)}, \tag{24}$$

что можно сравнить с формулами (22в), (23).

Пусть теперь P — любое гладкое симметричной формы препятствие, имеющее *кривизну постоянного знака* (т. е. без точек перегиба), и пусть $\varkappa = K(\theta)$ выражает кривизну как функцию угла $\theta = \varphi - \pi/2$, на который касательная поворачивается за точкой C. Тогда, преобразуя формулу (24), получим выражение

$$\lambda(\sigma) = M\nu(\sigma)\, e^{-\tau(\sigma)} K(\theta) = M\nu(\sigma)\, e^{-D\lambda} K(J\lambda), \tag{25}$$

где линейные *операторы* D и J определяют функции $\tau(\sigma)$ и $\theta(\sigma)$ через $\lambda(\sigma)$ по формулам (22а)—(23в). (Действительно, $J\lambda = \int_{\pi/2}^{\sigma} \lambda(\sigma)\, d\sigma$, тогда как $D\lambda$ является «преобразованием Дини» функции $\lambda(\sigma)$ при соответствующем сингулярном интегральном ядре $D(\sigma, \sigma')$; см. работу [17], стр. 136.) Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы течение, описанное в теореме* 1, *соответствовало препятствию, имеющему кривизну* $\varkappa = K(\theta)$ *постоянного знака, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* (25).

При малых значениях константы M интегральное уравнение (25) можно разрешить прямой итерацией функционального преобразования

$$\lambda_{n+1}(\sigma) = S[\lambda_n(\sigma)] = M\nu(\sigma)\, e^{-D\lambda_n} K(J\lambda_n). \tag{26}$$

При больших значениях M сходится «усредненная итерация» относительно соответствующим образом выбранного «весового» множителя ε, т. е. можно итерировать по формуле

$$\lambda_{n+1}(\sigma) = (1-\varepsilon)\lambda_n(\sigma) + \varepsilon S[\lambda_n(\sigma)]. \tag{26'}$$

Таким образом, используя современные быстродействующие вычислительные машины, можно эффективно разрешить интегральное уравнение (25), при заданном положительном значении M; подробности можно найти в литературе [1]).

§ 47. Неопределенность точки отрыва

Соответствие между интегральными уравнениями (25) и препятствиями P не является взаимно однозначным из-за наличия параметра M. Поэтому возникает основной вопрос: в каком смысле (если о нем можно говорить) корректно поставлена задача Гельмгольца, рассмотренная в § 36? Этот трудный вопрос еще не разрешен полностью даже для плоских течений, имеющих ось симметрии.

Таким образом, как показал в 1911 г. А. Вилла [22], даже течение Кирхгофа, описанное в § 39, не является единственным решением задачи Гельмгольца для плоской пластинки в бесконечном потоке. Для конфигурации, изображенной на рис. 17, появляется однопараметрическое семейство других, топологически отличающихся возможных решений [2]) (см. (D), § 1).

В случае круглых препятствий возникает еще более существенная неопределенность, даже если предположить, что топология течения обусловливает наличие единственной бесконечной каверны позади препятствия. Еще до того как удалось доказать строгие теоремы, М. Бриллюэн установил, что *положение точки отрыва является неопределенным*. Этот факт тесно связан с неопределенностью постоянной M в соотношении (25): вообще говоря, константа M соответствует «смоченной длине», равной расстоянию от точки раздела C до точек отрыва A и B, и возрастает с увеличением участков $\widehat{CA} = \widehat{CB}$. Поэтому задача Гельмгольца для круглых препятствий *не* является корректно поставленной, даже если задаться топологией течения.

---

[1]) Работа [17], гл. IX, § 8; Birkhoff G., Goldstine H. H., Zarantonello E. H., *Rend. Sem. Mat. Torino*, 13 (1954), 205—223. [Первая конкретная задача об обтекании с отрывом струй криволинейного препятствия (дуга круга при прямом ударе) была решена А. И. Некрасовым [20*] методом последовательных приближений с доказательством сходимости и единственности. Затем появился еще ряд работ, продолжающих и обобщающих исследования А. И. Некрасова, см. [17*]. Метод Н. Е. Жуковского был обобщен на случай струйного обтекания произвольного числа криволинейных дуг Л. И. Седовым [7*]. Широкие теоремы существования и единственности для струйных течений были доказаны М. А. Лаврентьевым [21*] — *Прим. ред.*]

[2]) См. работу [17], гл. V, § 3. Zarantonello E. H., *J. de Math.*, 33 (1954), 29—80, показал, что других возможностей не существует.

Однако если предположить, что выполняется условие Бриллюэна (§ 43), то задача бесконечной каверны становится корректно поставленной, по крайней мере в некоторых случаях. Следуя Лерэ [35], определим «скобку» как препятствие P, кривизна которого $\varkappa(\theta)$ возрастает [1]), как показано на рис. 18. Лерэ доказал, что всякая симметричная скобка P имеет единственную пару «точек Бриллюэна» A_0, B_0, обладающих следующим свойством: кривизна свободных линий тока в точках отрыва A, B при любом симметричном обтекании части P равна $+\infty$, конечна или равна $-\infty$ в зависимости от того, происходит ли от-

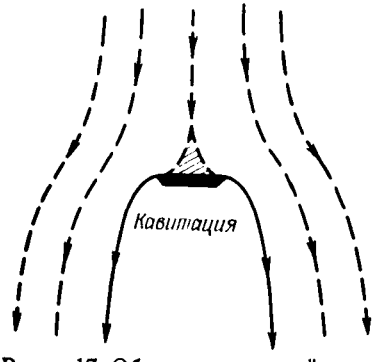


Рис. 17. Обтекание плоской пластинки, по Вилла.

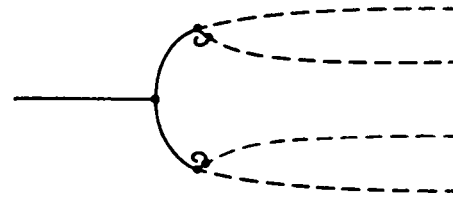


Рис. 18. Обтекание «скобки» по Гельмгольцу.

рыв перед точками A_0, B_0, в точках A_0, B_0 или позади точек A_0, B_0 соответственно. В первом случае ввиду бесконечной кривизны свободные линии тока должны проходить сквозь скобку, что невозможно. В третьем случае, очевидно, нарушается условие Бриллюэна. Следовательно, если мы определим *задачу Гельмгольца — Бриллюэна,* как задачу нахождения Эйлеровых течений, которые ограничены неподвижными препятствиями и свободными линиями тока, удовлетворяющими условию Бриллюэна, то получим следующее утверждение.

В случае бесконечной симметричной каверны позади скобки задача Гельмгольца — Бриллюэна поставлена корректно и отрыв происходит в точках Бриллюэна A_0, B_0. Интересно было бы точно определить класс симметричных препятствий, для которых задача Гельмгольца — Бриллюэна поставлена корректно.

Мы показали выше, что в случае скобок условие Бриллюэна эквивалентно условию конечности кривизны свободной линии

[1]) По теореме о четырех вершинах, круг есть единственная «скобка», ограничивающая гладкую выпуклую область.

тока. В литературе не раз встречалось утверждение, что последнее условие («гладкого отрыва» — см. работу [17], гл. VI, § 6) представляет собой «физически разумную» замену условия Бриллюэна. Однако в силу условий (14) и особенно в силу того, что при обтекании по Кирхгофу плоской пластинки нарушается условие «гладкого отрыва», условие Бриллюэна кажется нам предпочтительным [1]).

§ 48. Осесимметричные течения Гельмгольца

Впервые осесимметричные течения Гельмгольца были строго математически проанализированы в 1946 г., когда Левинсон [2]) дал строгое исследование асимптотических очертаний каверны. Предполагая, что для них удовлетворяется условие

$$y = x^s g(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = 0, \tag{27}$$

Левинсон доказал, что $s = {}^1/_2$ и что

$$C(\ln x)^{-1/4-\varepsilon} < g(x) < C(\ln x)^{-1/4+\varepsilon}$$

для некоторой постоянной C, при всех $\varepsilon > 0$ и при достаточно больших x. Если условие (27) усилить до вида $xg'(x)/g(x) = O(1/\ln x)$, то можно получить соотношения

$$y \sim Cx^{1/2}(\ln x)^{-1/4} \left(\text{т. е. } \left\{\lim_{x\to\infty} \frac{y(\ln x)^{1/4}}{\sqrt{x}}\right\} = \text{const}\right) \tag{28}$$

и лобовое сопротивление можно выразить по формуле

$$D = \frac{\pi\rho C^4 v^2}{8}.$$

Однако Левинсон не доказал, что такие каверны существуют.

Первое доказательство существования *конечных* осесимметричных каверн было дано в 1952 г. Гарабедяном, Шиффером и Леви [24]. Пользуясь принципом Рябушинского о том, что свободные линии тока экстремизируют присоединенную массу относительно вариаций, оставляющих постоянным объем каверны, а также пользуясь новым результатом о том, что «симметризация» уменьшает присоединенную массу, эти авторы доказали существование осесимметричных течений Гельмгольца «типа

[1]) См. также [2], § 5, где указанные вопросы впервые были рассмотрены с такой точки зрения.

[2]) Levinson N., *Annals of Math.*, 47 (1946), 704—730. (См. также [17*]. — *Прим. ред.*)

Рябушинского» (рассмотренных в § 44) для профилей произвольного очертания (и для любого $Q > 0$). Существование же течений Гельмгольца с бесконечными осесимметричными кавернами не доказано детально, хотя показано, что это достаточно правдоподобно.

Единственность бесконечной осесимметричной каверны была доказана для препятствий с данной точкой отрыва Гильбаргом и Серрином. Доказательство основано на методе сравнения, впервые введенном М. А. Лаврентьевым [1]).

Замечательным в указанных доказательствах является то, что в них используются существенно новые идеи. Это оказалось необходимым, так как аппарат конформных отображений, традиционно используемый в случае плоских течений, здесь уже не пригоден.

Любопытно также, что хотя существование и единственность плоских течений со свободными границами были доказаны более чем через 50 лет, после того как были построены первые нетривиальные примеры таких течений, мы до сих пор не знаем ни одного представляющего интерес аналитического («точного») осесимметричного течения Гельмгольца [2]), и это несмотря на то, что мы располагаем теоремами существования и единственности.

Поэтому при анализе частных осесимметричных течений Гельмгольца приходится опираться на приближенные методы. Из применявшихся до сих пор методов наиболее остроумным является метод разложения по степеням числа подобия, разработанный Гарабедяном [25] [3]). В то время как предыдущие авторы получили для коэффициента сжатия струи, вытекающей из круглого отверстия в плоской пластинке, величину 0,61, вычисления Гарабедяна привели к результату 0,58.

§ 49. Законы сохранения

Математические доказательства результатов, сформулированных в § 48, крайне сложны. Полезные результаты относительно осесимметричных течений Гельмгольца часто можно получить гораздо проще, обращаясь к физическим законам сохранения, как это и будет сделано ниже.

---

[1]) Gilbarg D., *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952), 309—320 и Serrin J. B., там же, 2 (1953), 563—575; см. также [17], гл. IV, § 12—14. Работу М. А. Лаврентьева см. в *Математическом сборнике*, **46** (1938), 391—458.

[2]) По поводу анализа приближенных решений см. Birkhoff G., Symposium on Naval Hydrodynamics, August, 25—29, 1958 [32].

[3]) Критические замечания по этой работе см. *РФЖ «Механика»*, № 5, Б 309, 1963 г. — *Прим. ред.*

Насадок Борда. Рассмотрим сосуд с вертикальными стенками, который заполнен жидкостью плотности ρ и в который вставлен насадок Борда с поперечным сечением произвольной формы и площади A (см. рис. 19); пусть давление на уровне насадка равно p. Мы предположим, что срыв течения [1]) с насадка происходит у его внутреннего края и что скорость струи, вытекающей из насадка, асимптотически приближается к постоянному значению v, которое представляет собой постоянную скорость на свободной линии тока, ограничивающей струю. Пусть A^* — асимптотическое поперечное сечение струи; тогда, по определению, A^*/A есть коэффициент сжатия. Мы подсчитаем его следующим образом.

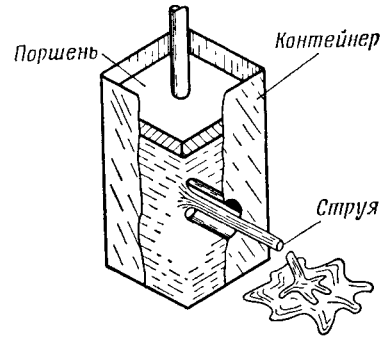


Рис. 19. Истечение из насадка Борда.

Объем жидкости, вытекающий за единицу времени, равен vA^*, его количество движения равно v^2A^*; «расход» кинетической энергии составляет $^1/_2\rho v^3A^*$. С другой стороны, добавляемое количество движения равно pA (избыточное давление), а энергия (потенциальная) равна $p(vA^*)$. Отсюда $pA = \rho v^2A^*$ и $pvA^* = {}^1/_2\rho v^3A^*$. Разделив первое уравнение, умноженное на v, на второе, получим в результате равенство

$$\frac{A^*}{A} = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Кумулятивные заряды. Другое важное применение законов сохранения мы находим в *теории направленных зарядов*, которые использовались в американских «базуках», в британских PIAT и разных других видах противотанкового и фугасного оружия времен второй мировой войны. Мы здесь кратко изложим сущность подобного применения теории струй; дальнейшую литературу можно найти в работах [17], стр. 16 и [22*].

Конструкцию и действие такого оружия можно в принципе описать следующим образом. Взрывчатое вещество с металлической прокладкой окружает полую выемку; детонатор снаряда расположен в тыльной части. Рассмотрим только случаи конической и клиновидной металлической прокладки; в продольном

[1]) Это случай «безнапорного течения»; см. Gibson A. H., Hydraulics, Constable, London, 4-е изд., стр. 122; это условие не всегда выполняется.

разрезе они показаны на рис. 20. Взрыв заставляет прокладку двигаться внутрь и вперед, причем оказывается, что приведенная таким образом в движение прокладка обладает огромной пробивной силой. Чем объясняется появление такой силы?

Наилучшее из известных объяснений исходит из следующих правдоподобных допущений (приближенного характера).

Допущение 1: получив начальный импульс от взрывчатки, стенки прокладки движутся внутрь под действием их соб-

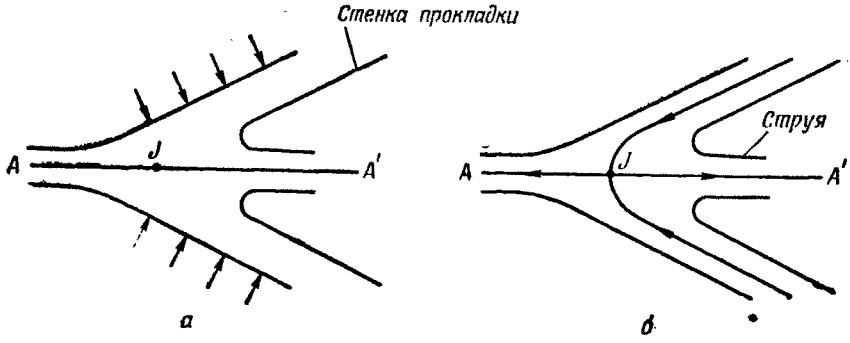


Рис. 20. Схема действия кумулятивного заряда.

ственного количества движения с постоянной скоростью до тех пор, пока они не встретятся на «оси» (AA' на рис. 20, $а$).

Допущение 2: под действием развивающихся при этом огромных напряжений металл прокладки ведет себя как идеальная жидкость.

Допущение 3: эта жидкость движется стационарно относительно осей, связанных с точкой J встречи противоположных стенок прокладки.

Допущение 4: поверхности стенок прокладки являются свободными границами.

Эти допущения сводят вопрос к задаче Гельмгольца о соударении струй (рис. 20, $б$). В плоском случае (клин) годограф представляет собой окружность; годограф же половины потока — полуокружность. Область W представляет собой бесконечную полосу с разрезом, поэтому можно полностью рассчитать течение [1]) по методу § 37.

[1]) [17], стр. 36; [8], стр. 283.

Для более важного случая конической прокладки мы не располагаем таким аппаратом. Однако с помощью законов сохранения все же можно приближенно указать зависимость скорости и массы струи от угла при вершине конуса и от используемой взрывчатки. Имея эти данные, можно оценить пробивную силу, пользуясь уравнением Бернулли [1]).

§ 50. Кавитационные течения как течения Гельмгольца

В § 43 было дано теоретическое обоснование эмпирического утверждения (Бетца — Петерсона, см. прим. 2) на стр. 88), что теория струй применима, если $\rho'/\rho \ll 1$. Это указывает на возможность математического описания кавитационных течений посредством решения краевой задачи Гельмгольца — Бриллюэна. Ниже мы дадим обзор доводов в пользу и против этого положения; в настоящем параграфе рассмотрим только первые доводы.

Во-первых, как и в случае кавитационных течений идеальной жидкости, очертания реальных каверн сравнительно гладкие, стационарные [2]) и имеют длину в 10 или более диаметров обтекаемого тела. Таким образом, они являются значительно лучшим приближением теоретической модели, чем реальные следы (см. § 53). Исключение составляют те случаи, когда препятствие помещено в кавитационную трубу при $Q > 0{,}3$.

Во-вторых, профиль каверны почти всегда выпуклый, и отрыв потока происходит у поперечного сечения с максимальным диаметром. Это утверждение в общем согласуется с решениями задачи Гельмгольца — Бриллюэна и заметно отличается от случая следов.

В-третьих, приближенная экспериментальная формула [3])

$$C_D = 0{,}55 + 0{,}4Q = 0{,}55(1 + 0{,}73Q) \qquad (30)$$

для коэффициента C_D при поперечном кавитационном обтекании цилиндра вполне хорошо согласуется с теоретическим значением $C_D(0) = 0{,}55$, вычисленным Бродецким для задачи Гельмгольца — Бриллюэна по методу из § 46, если ввести поправочный множитель $(1 + Q)$, согласно § 43 [4]).

[1]) Birkhoff G., MacDougall D. P., Pugh E., Taylor G., *J. Appl. Phys.*, 19 (1948), 563—582.

[2]) Если препятствие не совсем гладкое, могут возникнуть небольшие «биения», направленные по основному течению, как на фото I или в [23], стр. 116, 129. Когда $Q > 0{,}3$, каверна может попеременно вбирать и выпускать воду; см. [32], стр. 10.

[3]) Kempf H., Foerster E., Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs, Springer, 1932, 227—342.

[4]) Сопротивление цилиндра при различных числах кавитации было рассчитано рядом авторов, литературу см. в [17*]. — *Прим. ред.*

Несколько наиболее интересных фактов относится к каверн позади снарядов, выстреленных в воду. Фото I дает нам отличный материал такого рода [1]); на фото показана каверна, образовавшаяся позади сферы, входящей в воду со скоростью около 45 *м/сек*. На одной и той же фотопластинке были сделаны два снимка со сдвигом во времени на 0,005 *сек*. Белые точки на снимках — это маленькие пузырьки, каждый из которых сфотографирован дважды. Нетрудно найти точки, соответствующие одному и тому же пузырьку, и длина вектора, идущего от первой точки ко второй для каждой пары, в грубом приближении пропорциональна вектору скорости воды вблизи пузырька. Таким образом, можно наглядно представить себе профиль каверны и поле скоростей течения.

Однако по разным причинам подобные снимки не вполне точно соответствуют теоретической постановке вопроса. Так, например, они изображают замедляемое тело, а не стационарное течение; поверхность воды является второй свободной границей, что усложняет математическое описание; к тому же нельзя пренебрегать влиянием воздуха (ср. § 53).

Применимость теории течений Гельмгольца качественно подтверждается тем, что позади снарядов, движущихся достаточно быстро, получаются каверны сколь угодно большой длины (100 диаметров и больше). Это явление имеет важное практическое значение: большое поражающее действие скоростных снарядов и осколков бомб обусловлено тем, что они могут проделывать отверстия, значительно превышающие их собственные размеры [2]). Для нас же значение этого факта заключается в том, что он указывает физическое приближение к бесконечным кавернам, которые определяются математически как решения задачи Гельмгольца — Бриллюэна.

Обобщенная задача Гельмгольца. Если предположить, что выполняются условия (14) и что жидкость несжимаемая и невязкая, то можно применить концепцию Гельмгольца и к *ускоренному течению* с учетом *гравитационных* сил. С этой целью допустим, что кавитация самопроизвольно возникает, как только $p < p_v$. Получающуюся таким образом краевую задачу можно назвать *обобщенной* задачей Гельмгольца [3]).

---

[1]) См. Birkhoff G., Caywood T. E., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 646—659 (описание приборов, использованных в опытах, и другие снимки).

[2]) См. [5], § 74 и указанную там литературу; а также Harvey E. N., *The Military Surgeon*, **98** (1946), 509—528.

[3]) Теория гравитационных волн рассматривает тесно связанную с ней задачу, когда $p = p_a$ на свободной поверхности. Обычно под поверхностью $p > p_a$, но в данном случае это условие не предполагается.

Идея о том, что реальную кавитацию можно математически описать при помощи решений обобщенной задачи Гельмгольца, подтверждается качественным наблюдением того, что *заполненные паром каверны возникают у твердых поверхностей.* Это эмпирическое положение можно вывести при рассмотрении обобщенной задачи Гельмгольца следующим образом [1]). Применяя оператор Лапласа к уравнению Бернулли [гл. I, формула (5)], получим уравнение

$$\nabla^2 p = -\rho_0 \nabla^2 \left\{ \frac{1}{2} \nabla U \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} + G \right\}. \tag{31}$$

В формуле (31) $\nabla^2 G = 0$, так как G есть ньютонов гравитационный потенциал; $\nabla^2 (\partial U/\partial t) = \partial (\nabla^2 U)/\partial t = 0$, в силу формулы (6) из гл. I; и, полагая $u_k = \partial U/\partial x_k$, так что $\nabla U \nabla U = \sum u_k^2$, получаем формулу

$$\nabla^2 \left(\sum u_k^2 \right) = \sum u_k \nabla^2 u_k + 2 \sum (\nabla u_k \cdot \nabla u_k) \geqslant 0.$$

Отсюда $\nabla^2 p \leqslant 0$, причем равенство имеет место только если u постоянная, т. е. p — *супергармоническая* функция. Известно, однако, что супергармоническая функция должна принимать свои минимальные значения на границе; следовательно, p будет становиться меньше p_v прежде всего на границе.

§ 51. Пузырьки

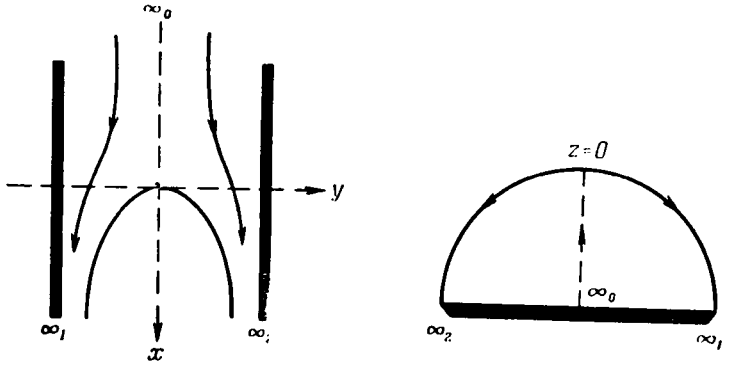
Часто употребляемое вместо «каверны» слово «пузырек» указывает добавочно на малые размеры и подвижность. При рассмотрении маленьких пузырьков обычно необходимо учитывать силу тяжести и поверхностное натяжение, как мы уже видели в § 32. Мы изложим сейчас некоторые результаты относительно пузырьков, которые показывают правильность указанных соображений, и разъясним далее причины, по которым течения Гельмгольца дают лишь приближенную картину реальных каверн.

Сначала мы напомним ([11], т. I, п. 29) о скачке давления, равном $2\gamma/r$, который создается поверхностным натяжением γ при переходе внутрь поверхности сферического пузырька радиуса r. Уже это беглое замечание указывает на возможность того, что жидкость, из которой удалены все пузырьки радиуса $r > R$, может выдерживать натяжение величиной $(2\gamma/r) - p_v$ без кавитации!

---

[1]) Kirchhoff G., Vorlesungen über Mechanik, 1876, стр. 186; см. также Bouligand G., *J. de Math.*, **6** (1927), 427.

Хотя ограниченность объема книги лишает нас возможности подробно исследовать этот увлекательный вопрос, мы все же напомним, что жидкости после дегазации в лабораторных условиях выдерживали натяжение величиной в десятки атмосфер [1]), вопреки условию (14). Подобно этому вода, из которой удален воздух, может быть перегрета без парообразования. По этим причинам лабораторные измерения кавитации теперь, как правило, сопровождаются измерением содержания воздуха в жидкости. Только потому, что чаще всего «вода» *не* в достаточной мере однородна (ср. § 1), а содержит во взвеси много «пузырьковых ядер», условие (14) приближенно справедливо.



а *б*

Рис. 21. Подъем плоского пузырька в канале.

Второй вопрос, имеющий математический интерес, связан с подъемом больших пузырьков в вертикальных трубах при наличии силы тяжести. Не затрагивая трудных задач физической реализации и устойчивости и пренебрегая поверхностным натяжением, мы рассмотрим идеализированный случай — подъем двумерного плоского пузырька, схематически изображенный на рис. 21, *а*.

Наиболее интересно здесь большое сходство с математическими методами, введенными в § 45, 46. Чтобы показать это, снова отобразим течение на единичный полукруг Γ в плоскости t (рис. 21, *б*), причем неподвижную границу отобразим на диаметр, а свободную — на полуокружность, как в § 37. Пусть d — диаметр трубы и u_0 — скорость подъема пузырька (если оси неподвижно связать с верхней точкой пузырька, то u_0 есть скорость падения в ∞_0 — в точке на бесконечности вверх по тече-

[1]) С другой стороны, величина 250 атмосфер, которую часто приводят, является, по-видимому, неправильной; см. [17], гл. XV, § 3.

нию). Тогда, что почти очевидно, потенциал скоростей

$$W = A \ln\left(\frac{t}{1-t^2}\right), \qquad A = \frac{u_0 d}{\pi} \tag{32}$$

характеризует источник нужной интенсивности при $t = 0$, стоки равной интенсивности при $t = \pm 1 (\infty_1$ и $\infty_2)$; границы области Γ переходят в линии тока.

Что касается сопряженной скорости $\zeta(t)$, то мы учитываем ее нули и бесконечности в области Γ подстановкой, аналогичной подстановке Леви-Чивита (19):

$$\zeta = (1+t^2)[-\ln C(1-t^2)]^{1/2} e^{\Omega(t, C)}, \qquad 0 < C < 0{,}5. \tag{33}$$

Как и раньше, из принципа симметрии Шварца следует, что функция $\Omega(t, C)$ регулярна в единичном круге $|t| < 1$ и ее ряд Тейлора

$$\Omega(t, C) = a_0(C) + a_2(C)\, t^2 + a_4(C)\, t^4 + \ldots \tag{33'}$$

суммируется по Абелю при $t = 1$.

Остается удовлетворить условию $|\zeta|^2 = 2gy$ на поверхности раздела, т. е. уравнению Бернулли для свободной границы в стационарном несжимаемом невязком течении. Это условие эквивалентно нелинейному интегральному уравнению относительно неизвестной функции

$$\lambda(\sigma) = -\operatorname{Im}\{\Omega(t, C)\} = -2a_2 \sin 2\sigma - 4a_4 \sin 4\sigma - \ldots,$$

которая определяется коэффициентами ряда (33′).

Это интегральное уравнение аналогично уравнению (25), но более сложно. Найти его приближенное численное решение оказалось трудным делом. Вычисления привели к выводу [1]), что $u_0/\sqrt{gd} = 0{,}23 \pm 0{,}01$, что вполне хорошо согласуется с немногими имеющимися экспериментальными данными [2]).

§ 52. Неустойчивость по Тейлору

Когда $\rho' > \rho$, гравитационный член в формуле (13), очевидно, вызывает *неустойчивость*. Эта неустойчивость просто-напросто такая же, как у воды в ведре, перевернутом вверх дном!

Так как поступательное движение области с ускорением a оказывает действие, эквивалентное [3]) наложению поля тяготения

[1]) Birkhoff G., Carter D., *J. Rat. Mech. Anal.*, **6** (1957), 769—780; см. также Garabedian P., *Proc. Roy. Soc.*, **A241** (1957), 423—431.

[2]) Н. Е. Жуковский в [23*] получил точное решение подобной задачи. — *Прим. ред.*

[3]) Synge J. L., Griffith B. A., Principles of Mechanics, 2-е изд., McGraw-Hill, 1949, § 53.

$g = -a$, то в ускоренном течении предыдущий результат можно интерпретировать следующим образом. Плоская поверхность раздела двух жидкостей с плотностями ρ, ρ' неустойчива, когда имеется ускорение, направленное от более легкой жидкости к более тяжелой. Такая неустойчивость называется *неустойчивостью по Тейлору* [1]).

Двумерная неустойчивость возмущений первоначально плоской поверхности раздела адекватно описывается формулой (13), пока амплитуда возмущений остается *бесконечно малой*. При начальных синусоидальных возмущениях наиболее заметным признаком нелинейной тейлоровой неустойчивости является возникновение закругленных на концах столбиков, разделенных падающими струями. Любопытно, что наличие этих столбиков приближенно согласуется с тем анализом подъема плоских пузырьков, который кратко изложен в § 51.

Тейлорова неустойчивость весьма заметно проявляется в пульсации сферических пузырьков. Такие пузырьки играют главную роль как в кавитационной эрозии (§ 42), так и в подводных взрывах. В предположении сферической симметрии (снова гипотеза (С)!) Рэлей [2]) получил простые дифференциальные уравнения для радиуса $b(t)$ как функции времени, применимые к обоим типам пузырьков. Однако, если возмущения сферической границы разложить по функциям Лежандра $p_h(\cos\varphi)$, то можно показать, что амплитуды возмущений $b_h(t)$ удовлетворяют уравнению

$$b\ddot{b}_h + 3\dot{b}\dot{b}_h - (h-1)\ddot{b}b_h = 0. \qquad (34)$$

(Это уравнение отличается от уравнения (13) для плоского случая членом $3\dot{b}\dot{b}_h$.) Пузырьки, возникающие при подводном взрыве, сначала чрезмерно расширяются, когда вода выталкивается наружу, а затем снова сужаются примерно до начального радиуса.

Вблизи минимального радиуса происходит резкое замедление течения внутрь пузырька, т. е. происходит ускорение в направлении более плотной жидкости. Это, очевидно, делает сферическую поверхность раздела неустойчивой по Тейлору, — обстоятельство, которое очень ослабляет последовательные пульсации пузырька.

Случай пузырька, заполненного паром и сжимающегося «в точку», как предполагается при идеализированной кавита-

[1]) Так как впервые ее физическое значение выяснил Тейлор; *Proc. Roy Soc.*, **A201** (1950), 192—196. Дальнейшие разъяснения и литературу см. в [17], гл. XI, § 12, 13.

[2]) [12], т. VI, стр. 504; [7], п. 91 а; [17], гл. XI, § 1—3.

ционной эрозии, менее ясен, так как тут всегда имеется ускорение, направленное от более плотной жидкости к менее плотной. Тем не менее и в этом случае имеем неустойчивость из-за отрицательного торможения [1]), так как по существу $b < 0$.

В предшествующих рассуждениях мы не только пренебрегали многими физическими переменными, которые могут иметь значение (например, поверхностным натяжением), но и ограничивались *бесконечно малыми* возмущениями. Хотя достигнут некоторый успех в исследовании возмущений конечной амплитуды, в нелинейной теории пока еще не все понятно.

§ 53. Масштабные эффекты при входе в воду

Большинство приведенных выше экспериментальных фактов подтверждают мнение о том, что математические решения обобщенной задачи Гельмгольца приближенно применимы к реальным кавитационным течениям. Упомянутые до сих пор исключения были связаны с особенностями малых пузырьков [2]). Кроме того, рассуждения в § 43 дают серьезное основание предполагать, что теория струй применима в случае, когда p'/p мало.

Если мы хотим согласовать это предположение с опытными фактами, то приходится признать, что число 0,0013 не «мало». В частности, есть два гидродинамических явления, которые наблюдаются при входе тел в воду в атмосферных условиях и отсутствуют, если воздух удален. Следовательно, никакая математическая теория, пренебрегающая отношением $p'/p \leqslant \leqslant 0{,}0013$, не может их правильно объяснить. Более важным из этих явлений считается *поверхностное смыкание*. Если в спокойную воду падает небольшой шар со скоростью 3—6 *м/сек*, то каверна сначала смыкается по схеме рис. 22, *а*, так называемое *глубинное смыкание*. Если же скорость при входе равна 12 *м/сек* или больше, то каверна начинает смыкаться на поверхности по схеме рис. 22, *б*. Снимок поля скоростей при смыкании на поверхности воспроизведен на фото II. Впервые явление поверхностного смыкания наблюдал Вортингтон примерно в 1900 г. [33]; позднее Маллок [3]) заметил, что звук, возникающий при глубинном смыкании, напоминает хлопок, а при поверхностном — всплеск.

В 1944 г. Дэвис [4]), следуя указаниям Тейлора, показал, что если в достаточной мере снизить давление воздуха p, то поверх-

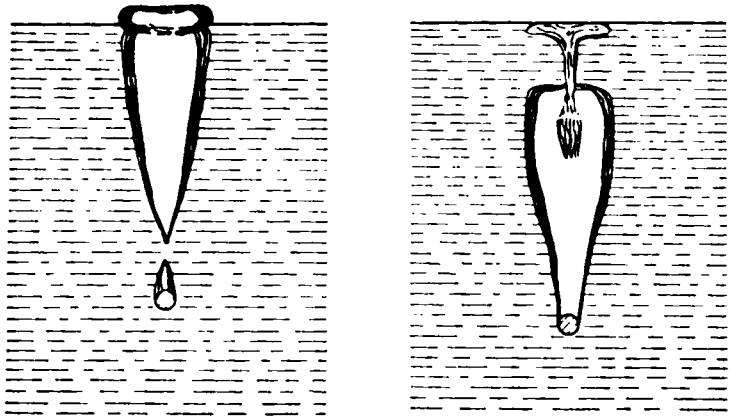
[1]) Birkhoff G., *Quar. Appl. Math.*, 13 (1956), 451—453.

[2]) См. § 32, 51 и [32]. Маленькие пузырьки кое-чего да стоят!

[3]) Mallock W., *Proc. Roy. Soc.*, A95 (1918), 138—143; см. также Harvey E. N. and McMillen J. H., *J. Appl. Phys.*, 17 (1946), 541—555.

[4]) Неопубликованный доклад, отпечатанный на мимеографе.

ностное смыкание уже не происходит даже при больших скоростях. Вначале предполагали, что наличие или отсутствие поверхностного смыкания зависит от кавитационного числа $Q = 2p/\rho v^2$, так как величина Q оказывает существенное влияние на многие кавитационные явления. Но в 1945 г. по нашему предложению Дж. Гильбарг и Андерсон [29] применили тяжелые газы типа



а *б*

Рис. 22. *а* — глубинное смыкание; *б* — поверхностное смыкание.

фреона, благодаря чему можно было независимо менять давление и плотность. Эти авторы показали, что для заданного диаметра d шара и *вертикальной* скорости входа v (число Фруда $\mathrm{Fr} = v^2/gd$) характер смыкания в основном определяется отношением ρ'/ρ. Например, для шаров диаметра 2,5 *см*, входящих в воду со скоростями 15—45 *м/сек* (т. е. при $\mathrm{Fr} = 10^3 - 10^4$) происходит поверхностное смыкание, если $\rho'/\rho > 0{,}001$, и глубинное, если $\rho'/\rho < 0{,}0001$.

Это внезапное изменение режима вблизи малого значения параметра ρ'/ρ напоминает внезапное изменение в обычном следе, происходящее вблизи $1/\mathrm{Re} = \nu/vd = 0{,}02$ (вихревая дорожка) и $1/\mathrm{Re} = 0{,}000005$, а также в трубах вблизи $1/\mathrm{Re} = 0{,}0005$ (см. гл. II). Таким образом, это дает нам еще один «парадокс аппроксимации» и снова указывает на то, что *характер решений уравнений в частных производных может внезапно изменяться вблизи очень малых значений параметров.*

В § 78 будет показано, правда, с помощью до некоторой степени произвольного физического анализа, что такое изменение режима в действительности тесно связано с безразмерным пара-

метром $N = \sqrt{\mathrm{Fr}}\rho'/\rho$ и происходит тогда, когда N примерно равно $^1/_{80}$.

Другое явление, не совместимое с наивным пониманием утверждения Бетца и Петерсона, состоит в том, что при наклонном входе в воду обнаруживается тенденция к преломлению траектории движения книзу. Хотя обстоятельства дела не вполне ясны, Слихтер показал на опыте, что гладкая дюралевая сфера диаметром в 5 *см*, входящая в воду со скоростью около 15 *м/сек* под углом в 20° к горизонту, может отклониться вниз при входе на 5° и больше. (При гораздо бо́льших скоростях были обнаружены отклонения вверх и тенденция к рикошету [1].) Полной теории этих явлений нет, но Слихтер провел тщательный (к сожалению, неопубликованный) экспериментальный анализ, который показал, что такое преломление траектории связано с *вязкостью воздуха* — переменной, влиянием которой по интуиции, казалось бы, можно пренебречь (ср. с гипотезой (А) из § 1).

§ 54. Реальные следы

Обычно уравнения Эйлера приближенно применимы в условиях стационарного течения, когда $\rho'/\rho \ll 1$, но для этого *не* достаточно, чтобы ν было мало. Это выразительно показано на фотографиях реальных следов. В частности, основной переменной, определяющей поведение реального следа, является безразмерное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu$, определенное в § 21. При этом дело сводится к выяснению природы реальных следов при $\mathrm{Re} \gg 1$.

При условии $\mathrm{Re} \ll 1$ в реальных следах передняя и задняя части приближенно симметричны, и такие следы соответствуют приближению Стокса — ползущему течению (§ 30), если можно получить решение такой краевой задачи. В интервале $5 < \mathrm{Re} < 30$ (приближенно [2])) при обтекании кругового цилиндра или другого необтекаемого препятствия линии тока «отрываются», образуя конечный выпуклый след, который качественно напоминает конечную каверну, описанную ранее в этой главе. В действительности подобные следы наблюдались позади сфер и дисков вплоть до значения $\mathrm{Re} = 200$.

При бо́льших Re, главным образом в интервале $40 < \mathrm{Re} < 1000$, реальные следы обычно бывают *периодическими,*

[1]) Ramsauer C., Über den Ricochetschuss. Kiel dissertation, 1903; [5], стр. 453. [Рикошетирование по поверхности воды было изучено Л. И. Седовым (см. Седов Л. И., Водяные рикошеты, *ДАН СССР*, 37 (1942), № 9). — *Прим. ред.*]

[2]) См. [17], гл. XII—XIV относительно более подробного изложения фактов.

благодаря чему часто слышна музыкальная нота. В случае кругового цилиндра частота колебания N связана со скоростью течения v и диаметром d приближенным эмпирическим соотношением

$$N=\frac{v}{6d}. \tag{35}$$

Поскольку течения с подобными периодическими следами стационарны, это представляет собой новый парадокс симметрии (§ 26).

В интервале $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$ реальные следы позади плохо обтекаемых тел оказываются преимущественно *турбулентными*, но в случае достаточно гладких поверхностей пограничный слой обычно не становится турбулентным до тех пор, пока не произойдет отрыв. Однако для значений $\mathrm{Re} > 3 \times 10^5$ пограничный слой, как правило, становится турбулентным *до* отрыва. Как уже объяснялось в § 28, это дает весьма суженный (но все еще турбулентный) след.

Существенная зависимость всех этих качественных явлений от численного значения Re делает очевидным тот факт, что никакая действительно фундаментальная теория реальных следов не может пренебрегать вязкостью. Тем не менее были построены различные остроумные модели следов на основе уравнений Эйлера.

Так, Мизес [1]) предложил применять решение задачи Гельмгольца — Бриллюэна в качестве подходящего приближения реального обтекания цилиндра с ламинарным пограничным слоем. В том случае, когда из-за турбулентности пограничного слоя при больших числах Рейнольдса след сужается, хорошее приближение дает «след нулевого сопротивления».

Были предложены и другие «струйные» модели [2]), в которых вводится частичное восстановление давления в следе на больших расстояниях, что можно согласовать с эмпирическими данными.

§ 55. Вихревые модели следов

В других моделях следов заранее вводятся *априорные* распределения завихренности с целью выразить наблюдаемые свойства течения посредством простых математических уравнений. При больших Re опять-таки можно пренебречь вязкостью, что, по крайней мере при беглом рассмотрении, кажется оправданным.

---

[1]) Мизес Р., Теория полета, М., ИЛ, 1949.

[2]) Roshko A., *J. Aer. Sci.*, 22 (1955), 124—132; Cornell W. A. в [32]. [Схема, на которую указывает автор, впервые была введена Н. Е. Жуковским [15*]. — *Прим. ред.*]

В одной из старых моделей вводятся два симметрично расположенных за круговым цилиндром точечных вихря, как показано на рис. 23 (ср. рис. 13). Этой модели, которой мы обязаны Фепплю, уделялось значительное внимание ввиду ее чрезвычайной математической простоты, интересной теории ее устойчивости и связи ее с моделями вихревых дорожек (§ 56). Если вихри расположены на кривой $2ry = r^2 - a^2$ ([7], стр. 155), где a — радиус цилиндра, то вихревая конфигурация находится в (неустойчивом) равновесии. Кроме того, можно добиться, чтобы

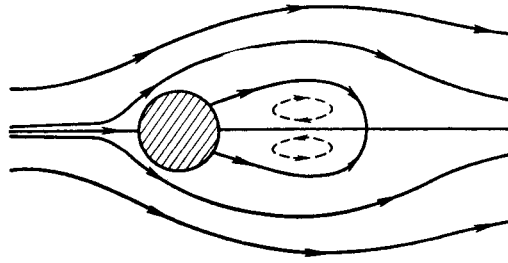


Рис. 23. Обтекание цилиндров, по Фепплю.

конфигурация линий тока модели имела хорошее согласование с наблюдаемой экспериментально, примерно в интервале $5 < \mathrm{Re} < 30$.

Однако вблизи центра вихря в стационарном плоском течении многие поля скоростей напоминают конфигурации линий тока в виде концентрических окружностей, и, следовательно, не стоит придавать слишком большое значение упомянутому согласованию. Теоретически же в стационарном течении завихренность должна из любого центра распространяться во внешние области, становясь асимптотически *постоянной* внутри любой замкнутой линии тока ламинарного течения при большом числе Рейнольдса.

Эта значительно более подходящая модель была недавно предложена Бэтчелором [1]), однако до сих пор при конкретных расчетах не удалось преодолеть вычислительные трудности. Кроме того, в виду неустойчивости по Гельмгольцу, реальные следы при больших Re дают в высшей степени нестационарное

[1]) *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 177—190 и 388—398; см. также Wood W. W., там же, **2** (1957), 77—87.

течение, и, следовательно, модель является нереальной. Для диапазона $5 < \mathrm{Re} < 30$, по-видимому, более приемлемой является модель вязкого течения Озеена (§ 31) [1]).

§ 56. Вихревые дорожки

Наиболее заманчивой вихревой моделью для следов является «вихревая дорожка», состоящая из двух параллельных рядов точечных вихрей, размещенных на одинаковом расстоянии, причем эти периодические ряды расположены «в шахматном порядке», так что вихри каждого ряда приходятся посредине между вихрями другого ряда. Эта модель была предложена Карманом [2]) для представления периодических следов за цилиндрами, наблюдаемых в основном в интервале $30 < \mathrm{Re} < 300$. Для нее комплексный потенциал $W = U + iV$ записывается в следующем виде:

$$W = \frac{i\varkappa}{2\pi}\left\{\lg \sin \frac{\pi z}{a} - \lg \sin \frac{\pi}{a}\left(z - \frac{a}{2} - ih\right)\right\}. \qquad (36)$$

Таким образом, потенциал включает три параметра: интенсивность вихря $\varkappa$, продольный размер a и поперечный размер h. В любом конкретном случае определение этих параметров, очевидно, является основной задачей, а любой набор значений $\varkappa$, a и h задает равновесное расположение.

Карман показал, что в невязкой жидкости такое расположение имеет неустойчивость первого порядка (т. е. отклонения от положения равновесия растут экспоненциально), если только h/a не равно 0,281 (приближенно). Он показал также, что аналогичное размещение вихрей, при котором вихри в обоих рядах остаются параллельными [величина $a/2$ опускается в формуле (36)], всегда неустойчиво.

Кроме того, исследуя скорость K, с которой завихренность распространяется в пограничном слое по обе стороны, Гейзенберг и Прандтль [3]) получили соотношение

$$\frac{\varkappa v}{a} \simeq K \simeq \frac{(1+Q)\,v^2}{4}, \qquad (37)$$

откуда $\varkappa \simeq (1 + Q)av^2/4$. Хотя сам вывод весьма приблизителен, результат является надежным с точностью до множителя 2.

---

[1]) Литература приведена в [17], стр. 263, примечание 13. Отличный исторический обзор вихревых систем в следах дал Розенхед Л., сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, стр. 446—454.

[2]) *Gott. Nachr., Math.-Phys. Kl.* (1912), 547—556.

[3]) Heisenberg W., *Phys. Zeits.*, 23, (1922), 363—366 и комментарии Прандтля на стр. 366; см. также [3], стр. 555, 564 и [11], т. 2, стр. 132.

Наконец, легко догадаться, что величина h не должна намного отличаться от диаметра цилиндра d; в § 57 мы сможем в большей мере обосновать это теоретически. Учитывая все приведенные выше соображения, можно построить приближенную *априорную* модель периодических следов.

Очевидно, что эта модель вихревой дорожки возникла не из решения математической краевой задачи: остроумная идея Кармана не принадлежит к «рациональной гидродинамике» в смысле § 1. Так, в этой теории обтекаемое препятствие не является неким реально существующим геометрическим объектом.

Было высказано предположение, что вихревые дорожки естественно возникают при закручивании вихревых слоев, представляя, таким образом, асимптотические решения задачи Коши. Однако приближение в виде модели сосредоточенных *точечных* вихрей является нереальным как теоретически, так и экспериментально [1]), даже несмотря на то что, как иногда говорят, вихревые слои закручиваются, причем «завихренность все больше и больше сосредоточивается в закрученных участках».

Эти замечания имеют своей целью подчеркнуть, насколько далеко ушла современная гидродинамика от простой и догматической идеи Лагранжа. Все стационарные вихревые течения из § 55 и все решения задачи Гельмгольца удовлетворяют уравнениям Эйлера для несжимаемой невязкой жидкости; это показывает, насколько далека от «корректной» постановки задача стационарного течения для этих уравнений.

В действительности же само понятие «стационарного течения» ошибочно с физической точки зрения для жидкостей малой вязкости!

§ 57. Количество движения в следе

Однако тот факт, что идеи Лагранжа оказались ошибочными, не означает, что теоретический подход в гидродинамике следует отвергнуть. Как мы видели в гл. II, есть большие основания считать уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости заслуживающими доверия. Наше рассмотрение теории следов мы закончим кратким обзором результатов, полученных к настоящему времени при помощи этих уравнений. Как и в случае кавитационного движения (§ 49), многое может быть объяснено при помощи законов сохранения.

Возможно, что наиболее полезной является интерпретация *количества движения следа*. В эксперименте позади всякого

[1]) Теоретический разбор см. в работе Birkhoff G., Fisher J., *Rend. Soc. Mat. Palermo*, 8 (1959), 77—90, относительно экспериментальных данных см. [3], гл. XIII. Цитата взята из той же работы.

движущегося в жидкости твердого тела мы наблюдаем движущийся вперед «след». Таким образом, для двумерного случая можно определить количество движения следа, приходящееся на единицу длины, на расстоянии x от препятствия, по формуле ([17], стр. 266).

$$M(x)=\rho\int u(x, y)\,dy, \tag{38}$$

где ось x выбрана параллельно направлению движения твердого тела, а величина u обозначает поступательную скорость [1]) движения жидкости.

Если мы принимаем эмпирический факт, что вне следа завихренностью можно пренебречь и поэтому здесь применимы приближения классической гидродинамики, то это приводит нас к предположению, что количество движения $M(x)$ фактически не зависит от величины x — небольшого расстояния позади препятствия [2]). Эта гипотеза подтверждается экспериментально.

Далее, естественно предположить, что количество движения в следе создается давлением тела на жидкость (второй закон Ньютона) и что оно равно по величине и противоположно по направлению сопротивлению D, которое жидкость оказывает движению тела (третий закон Ньютона). В частности, сопротивление D должно равняться возникающему за единицу *времени* количеству движения в следе, которое в свою очередь должно равняться произведению $u_\infty M$, где M — количество движения в следе в расчете на единицу *длины*.

Эти интуитивные догадки можно сформулировать математически и вывести из разумных предположений относительно течения жидкости [3]). Еще более интересно то обстоятельство, что некоторое уточнение таких формул дает наилучший способ *измерения* фактического лобового сопротивления крыла в полете,— по давлениям в трубках Пито, определяемым позади крыла на расстоянии от него, составляющем небольшую долю ширины крыла [4]).

Для нас еще более интересно применение закона сохранения количества движения следа к модели «вихревой дорожки» из

---

[1]) Для периодических или турбулентных следов — среднее значение этой скорости по времени.

[2]) Чтобы придать таким гипотезам математическую респектабельность, можно называть их «тауберовыми».

[3]) [17], гл. XII, § 9. Более раннее тщательное исследование провел Taylor G. Y., *Phil. Trans.*, **A225** (1925), 238—245; см. также Goldstein S., *Proc. Roy. Soc.*, **A142** (1933), 563—573

[4]) [3], § 115. Первоначально эту технику разработал Betz A., *Zeits. Flugt Motorluftschiffahrt*, **16** (1925), 42—44; см. также Fage A. Jones B. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A111** (1926), 592—603.

§ 56. В очень длинном вихревом «хвосте» с ограниченной скоростью *среднее* продольное расстояние $\bar{a}$ между вихрями не может изменяться со временем. С другой стороны, количество движения следа в расчете на единицу длины легко подсчитать по формуле $\bar{h}\varkappa/\bar{a}$, где $\bar{h}$ — среднее поперечное расстояние между вихрями. Теоретически из этого следует, что в невязкой жидкости, когда $\varkappa$ постоянно во времени, значение $\bar{h}$ (а следовательно, и отношение среднего продольного расстояния к среднему поперечному) должно быть *постоянно* во времени: здесь нет тенденции к единственному «устойчивому» [1]) отношению протяженностей. В вязкой жидкости сосредоточения завихренности $\pm\varkappa$ противоположных знаков диффундируют и взаимно уничтожаются; следовательно, можно ожидать возрастания величины $\bar{h}$, что и наблюдается в эксперименте.

С научной точки зрения приведенные выше результаты интересны тем, что они помогают выяснить асимптотическую структуру реальных следов. Однако для получения конкретных выводов нужно ввести еще одну гипотезу подобия. Подобие и относящиеся к этому идеи будут основной темой последующих гл. IV и V. Относительно же применений к теории следов см. работу [17], гл. XII и XIV.

[1]) Фактически даже отношение протяженностей Кармана $h/a = 0{,}281\ldots$ дает неустойчивость, хотя и низшего порядка, см. [18]. [Это было установлено Н. Е Кочиным в работе [24*]. — *Прим. ред.*]

Глава IV

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 58. О моделях

Применение *моделей* при изучении механики жидкостей находит отклик у каждого, кто не лишен естественной любознательности. Какой мальчик не играл с моделями кораблей и самолетов и с упрощенными моделями плотин и водосливов? Но даже в наиболее развитых областях современной техники такие модели незаменимы и имеют существенное значение.

И несмотря на это, имеется очень мало таких физических дисциплин, где разрыв между теорией и инженерной практикой был бы больше, чем в области применения моделей к изучению гидродинамических явлений. Ученые-теоретики стремятся оставить в тени те неудобные факты, которые не укладываются послушно в рамки простой логической теории. В то же время инженеры, постоянно соприкасающиеся с действительностью под открытым небом и в лаборатории, обычно слишком перегружены частными техническими задачами, и им практически недоступно участие в академических дискуссиях. Ведь легче воздать на словах должное общепризнанным теориям, а при решении конструкторских проблем полагаться на опыт и интуицию.

Наша цель — уменьшить этот разрыв путем критического исследования проблемы в целом с обеих точек зрения. Мы начнем с *теории* моделирования, подчеркивая при этом связь с понятием *группы*.

Сначала, в § 59—65 будет дан критический обзор *анализа размерностей*. К анализу размерностей обычно обращаются, когда нужно обработать результаты экспериментов с моделями, и он обладает тем преимуществом, что для него не требуется математических сведений сверх курса элементарной алгебры, но зато и тем недостатком, что необходимо вводить добавочные постулаты, физическую надежность которых приходится проверять особо. В § 60—61 эти постулаты даны в *теоретико-групповой* формулировке в терминах «группы подобия» всевозможных изменений основных единиц.

Затем в § 66—74 будет показано, как эти постулаты можно вывести из математических формулировок динамики жидкостей, рассмотренных в гл. I, II, проверяя гидродинамические уравнения на инвариантность относительно заданных групп. Мы будем называть указанный метод *инспекционным анализом*, заимствуя этот выразительный термин у Руарка [56]; фактически, метод основан на старой идее, которая была предложена Афанасьевой-Эренфест [61]. Но до сих пор данный метод никогда практически не использовался, хотя, как мы покажем, он является значительно более надежным (§ 72) и более общим (§ 74), чем анализ размерностей.

Наконец, в § 75—78 выводы инспекционного анализа (и анализа разномерностей) будут сопоставлены с *практикой* моделирования. Как и в гл. I и II, окажется, что действительность намного сложнее теории. В инженерной практике должны учитываться многие факторы, игнорируемые при математическом описании, и приходится использовать некоторые приемы, не получившие еще научного обоснования.

§ 59. Анализ размерностей

Анализ размерностей возник в результате распространения на физические явления понятий геометрического подобия, отношения и пропорции, знакомых еще грекам [1]). Впервые это было сделано Галилеем при определении прочности балок из данного материала в зависимости от их линейных размеров. Он ввел интуитивно очевидное предположение о том, что разрушение балки происходит тогда, когда сила, отнесенная к единице площади (напряжение), превосходит некоторую максимальную величину, характерную для материала балки. Галилей пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема обратно пропорциональна длине и предвосхитил многие другие классические результаты.

Затем анализ размерностей применяли Мариотт и Ньютон [2]), но только Фурье (см. прим. 1) на этой стр.) впервые установил, что существуют определенные «основные единицы»,

[1]) Так, Фурье ([59], гл. II, разд. IX) упоминает, что греки знали размерности площади и объема. Рэлей всегда ссылался на «подобие» и «динамическое сходство». У Галилея, см. его «Две новые науки» (1638), День второй. [«Беседы о двух отраслях науки», М.—Л., 1933. — *Прим. ред.*]

[2]) Mariotte, Traité de la percussion des corps (1679) и Traité du mouvement des eaux (1686); Newton, Principia Mathematica (1686), т. 2, разд. 7. [В русском переводе: Крылов А. Н., Собрание трудов, т. 7, М.—Л., 1936. — *Прим. перев.*] См. также Bertrand J., *J. de l'Ecole Polyt.*, 19 (1848), 189—197.

относительно которых каждая физическая величина имеет определенные «размерности», которые надо записывать как показатели степеней. Конечно, эта идея почти очевидна, если вдуматься в смысл «коэффициентов пересчета» при переходе физических величин от одной системы единиц к другой.

Посредством различного выбора единиц Фурье без труда показал, что одни и те же аналитические формулы дают как решения задачи об охлаждении сфер малых размеров так и задачи об остывании Земли. Поскольку нас интересует соотношение теории и фактических данных, то здесь уместно заметить, что выводы Фурье были не правомочны, так как он не учитывал конвекции и радиоактивного нагрева земного ядра. Тем не менее его метод исключения параметров путем изменения единиц стал теперь классическим и применяется со значительным (хотя и не одинаковым!) успехом во многих разделах физики. Стокс, Савар, Фруд, Рейнольдс, Ваши и многие другие исследователи с успехом использовали этот метод и установили ряд законов фундаментального значения.

Рэлей первым занялся изучением вопроса о том, насколько указанный прием плодотворен как общий метод исследования. Это вызвало длившуюся в течение двух десятилетий, 1900—1920 гг., оживленную дискуссию с участием ведущих физиков о молчаливо принятых ранее предположениях и о границах применимости анализа размерностей.

Эти предположения и ограничения, хотя на них часто не обращают внимания в технике и в популярной литературе, изложены наряду с другими вопросами этого раздела в классической монографии Бриджмена [46], к которой мы отсылаем любознательного читателя. Другими авторитетными источниками являются работы Л. И. Седова [57] и Лангхаара [51].

§ 60. Группа подобия

Одна из наших основных целей — обосновать анализ размерностей с помощью постулатов, в которых явно используется упомянутая в § 58 группа подобия положительных скалярных преобразований единиц измерения. Хотя постулаты будут формулироваться абстрактно, мы будем интерпретировать их при помощи простых примеров из гидромеханики, и, быть может, самым простым из них является следующий пример.

Пример 1. Допустим (или вспомним!), что скорость волны v в глубоком водоеме определяется ее длиной λ и ускорением силы тяжести g, так что $v = f(\lambda, g)$. Допустим также, что это

соотношение остается тем же самым при любом выборе «основных единиц» длины и времени. Сделав эти предположения, мы можем математически рассуждать следующим образом.

Пусть в некоторой фиксированной системе основных единиц волна длиной λ движется со скоростью v в гравитационном поле интенсивности g. Если выбрать новую единицу длины, равную α старых единиц, и новую единицу времени, равную τ старых единиц, то длина волны запишется в виде $\lambda' = \lambda/\alpha$, а ее скорость — в виде $v' = v\tau/\alpha$, в то время как ускорение силы тяжести примет вид $g' = g\tau^2/\alpha$. Выбрав $\alpha = \lambda$ и $\tau = \sqrt{\lambda/g}$, мы получим $\lambda' = g' = 1$, и формулу

$$\frac{v}{\sqrt{g\lambda}} = v' = f(\lambda', g') = f(1, 1) = C,$$

где C — скорость волны единичной длины в гравитационном поле, выраженная в новой системе основных единиц. Отсюда в новой системе основных единиц $v = C\sqrt{g\lambda}$. Но, по предположению, функция f не зависит от выбора основных единиц; отсюда $v = C\sqrt{g\lambda}$ также и в старой системе единиц, где C — некоторая универсальная постоянная. (Для волн в глубоком водоеме $C = 1/\sqrt{2\pi}$.)

Предыдущее рассуждение можно провести в абстрактной форме в терминах обычных понятий «основных» и «производных» однородных по размерности величин. Эти понятия характеризуются следующими двумя постулатами, которые представляют собой нечто большее, чем просто определения. (В примере 1 λ — основная величина, в то время как v и g — производные величины.)

Предположение I. Имеются некоторые независимые «основные величины» q_i $[i = 1, \ldots, n]$, такие, что они независимо преобразуются «заменой единиц» по формулам

$$T_\alpha(q_i) = \alpha_i q_i \quad [i = 1, \ldots, n;\ \alpha_i > 0], \tag{1}$$

где α_i — любые положительные действительные числа. (В механике $n = 3$, а q_i — это длина, время и масса; в примере 1 $n = 2$, так как масса не входит в рассмотрение.)

Предположение II. Имеются «производные величины» Q_j (такие, как плотность, скорость, вязкость и т. д.), которые *однородны по размерности* в том смысле, что при преобразовании по формуле (1) каждое Q_j умножается на подходящий «коэффициент пересчета»:

$$T_\alpha(Q_j) = \alpha_1^{b_{j1}} \ldots \alpha_n^{b_{jn}} Q_j. \tag{2}$$

Показатели b_{jk} называются «размерностями» величины Q_j в данной системе основных единиц; если все они равны нулю, то величина Q_j называется «безразмерной». Очевидно, что любое произведение степеней однородных по размерности величин остается однородным по размерности. Ясно также, что формула (1) является частным случаем формулы (2) при условии

$$b_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i. \end{cases}$$

Следовательно, с математической точки зрения предположение I излишне.

Преобразованиям T_α взаимно однозначно соответствуют векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с положительными компонентами («положительные» n-векторы). Кроме того, если определить следующие действия:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n), \quad \boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}), \tag{3}$$

то, очевидно, выполняются равенства

$$T_\alpha(T_\beta(Q_j)) = T_\beta(T_\alpha(Q_j)) = T_{\alpha\beta}(Q_j), \tag{3а}$$

$$T_{\alpha^{-1}}(T_\alpha(Q_j)) = Q_j. \tag{3б}$$

Говоря математическим языком, равенства (2) определяют представление *мультипликативной группы*[1]) положительных n-векторов, определенной соотношением (3) как группа (2) линейных преобразований пространства векторов $\mathbf{Q}$.

§ 61. Соотношения, не зависящие от единиц измерения

При выводе формулы $v = C\sqrt{g\lambda}$ в примере 1 мы использовали еще два других предположения. На абстрактном языке выше приведенных предположений I и II их можно сформулировать следующим образом.

Предположение III. Существует функциональное соотношение вида

$$\varphi(Q_0, \ldots, Q_r) = 0, \tag{4}$$

где φ — однозначная функция. [(В примере 1 $r = 2$, а $\varphi = v - f(\lambda, g)$.)]

Предположение IV. Соотношение (4) не зависит от выбора основных единиц.

[1]) Под *группой* понимается такое множество, замкнутое относительно ассоциативного умножения, что для каждого из его элементов существует обратный элемент относительно умножения. Подробности см. в [45], гл. VI.

Таким образом, в анализе размерностей рассматриваются функциональные соотношения $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ *положительных* переменных, которые под действием (коммутативной, зависящей от n-параметров) группы T_α преобразуются по формулам (2). Говоря точнее, исследуются соотношения, которые не зависят от выбора единиц измерения и которые определяются следующим образом.

Определение. Функциональное соотношение $\varphi(Q_0, Q_1 \ldots, Q_r) = 0$ однородных по размерности переменных *не зависит от выбора единиц* тогда и только тогда, когда из соотношения $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ следует

$$\varphi(T_\alpha(Q_0), \ldots, T_\alpha(Q_r)) = 0 \tag{5}$$

при любом преобразовании основных единиц T_α.

Обратно, используя формулу (3б), получаем, что из соотношения $\varphi(T_\alpha(Q_0), \ldots, T_\alpha(Q_r)) = 0$ следует

$$\varphi(Q_0, \ldots, Q_r) = 0 \tag{5'}$$

для каждого преобразования T_α, но мы, не вникая в эти тонкости, будем принимать как формулу (5), так и формулу (5'). Другими словами, по определению, следующее соотношение $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ не зависит от единиц тогда и только тогда, когда в гипероктанте, определяемом положительными [1]) векторами $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_r)$, *геометрическое место точек,* соответствующее этому уравнению, *инвариантно относительно преобразований группы* (2).

Следует подчеркнуть, что уравнению $\varphi = 0$ соответствует некоторое геометрическое место точек и на вид функции φ не наложено никаких ограничений. Это иллюстрируется следующим простым примером.

Пример 2. Рассмотрим частицы, выведенные из состояния покоя и движущиеся с не зависящим от времени ускорением a. Обозначим расстояние через s, время через t и скорость через v.

Для такой системы всегда справедливы хорошо известные однородные по размерности (следовательно, не зависящие от единиц измерения) соотношения $v = at$ и $v^2 = 2as$. Однако геометрическое место точек, определяемое уравнением $v = at$ в положительном октанте пространства (v, a, t) совпадает с геометрическим местом, определяемым, например, соотношением

$$\sqrt[3]{(v-at)(a+v)} + \sqrt[5]{t(v-at)} = 0. \tag{6}$$

[1]) Это все можно распространить на случай неположительных векторов, но только ценой усложнения формулировок.

Поэтому соотношение (6) *не зависит от выбора единиц*, хотя оно и не является однородным по размерности.

Несмотря на свою искусственность, этот пример поможет нам выявить различие между формальным доказательством Букингема (§ 64) П-теоремы и более общим геометрическим доказательством Ваши́, которое будет изложено в § 63. Но прежде чем доказывать П-теорему в общем случае, мы рассмотрим сначала частный случай $r = n$, когда соотношения, не зависящие от выбора единиц,

$$Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_n), \tag{7}$$

содержат точно на единицу больше величин $Q_j (j = 0, \ldots, n)$, чем имеется основных единиц $(i = 1, \ldots, n)$. Мы будем предполагать, что f — однозначная функция, а также, что величины $Q_1, \ldots, Q_n$ зависят от n основных единиц, т. е. матрица $\|b_{jk}\|$ из формулы (2), состоящая из $(n \times 1) \times n$ элементов, имеет ранг n. Эквивалентным условием является требование, чтобы квадратный минор B, соответствующий $j = 1, \ldots, n$, был *неособой* матрицей [1]).

Как уже было указано выше, пример 1 относится к этому случаю при $n = r = 2$.

Теорема 1. *Всякое соотношение вида* (7), *не зависящее от выбора единиц и содержащее n основных единиц, равносильно соотношению*

$$Q_0 = CQ_1^{x_1} \ldots Q_n^{x_n}, \tag{8}$$

где $C = f(1, \ldots, 1)$ *и* x_i *определяются из уравнений*

$$b_{0i} = b_{1i}x_1 + \ldots + b_{ni}x_n \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{8'}$$

Доказательство. Так как величины Q_i положительные и минор B — неособая матрица, то мы можем найти такой вектор $\boldsymbol{\alpha}$, что $T_{\alpha}(\mathbf{1}) = \mathbf{Q}_0$, где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$; и пусть при этом $C = f(1, \ldots, 1)$. Отсюда, применив формулы (5), (5′) к соотношению $C - f(1, \ldots, 1) = 0$, получим равенство

$$T_{\alpha}(C) - f(Q_1, \ldots, Q_n) = 0.$$

Применяя формулу (2) к первому члену и перенося его в другую сторону, можно записать

$$f(Q_1, \ldots, Q_n) = C\alpha_1^{b_{01}} \ldots \alpha_n^{b_{0n}}. \tag{9}$$

[1]) Этому эквивалентно условие неравенства нулю определителя B (см. [45], стр. 304).

С другой стороны, так как минор B — неособая матрица, то система (8′) имеет единственное решение $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Для этого решения $\mathbf{x}$ справедливы равенства

$$Q_j^{x_j} = T_\alpha (1)^{x_j} = \left(\alpha_1^{b_{j1}} \ldots \alpha_n^{b_{jn}}\right)^{x_j}.$$

Выполнив элементарные выкладки с показателями, получим

$$\prod_j Q_j^{x_j} = \prod_{j,k} \alpha_k^{b_{jk} x_j} = \prod_k \alpha_k^{\sum b_{jk} x_j} = \prod_k \alpha_k^{b_{0k}}.$$

Делая подстановку в правую часть равенства (9), получим формулу (8).

Для дальнейшего разъяснения смысла теоремы 1 приведем следующие известные примеры.

Пример 3. Предположим, что сопротивление D, которое жидкость оказывает движению твердого тела заданной формы, является *инерциальным* в том смысле, что оно определяется плотностью жидкости ρ, скоростью v и диаметром тела d. Тогда при $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ формула (8) эквивалентна соотношению

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^x (LT^{-1})^y L^z,$$

так что уравнения (8′) сводятся к виду

$$1 = x, \quad 1 = -3x + y + z, \quad -2 = -y,$$

откуда $x = 1$, $y = z = 2$. Отсюда, если соотношение не зависит от единиц измерения, то $D = K_D \rho v^2 d^2$, где K_D — постоянная. (В действительности же величина $K_D = \pi C_D/8$, которая носит название баллистического коэффициента сопротивления, слабо изменяется.)

Пример 4. Если сопротивление D определяется через ρ, v, d и вязкость жидкости μ в виде функционального соотношения, не зависящего от выбора единиц, и если силами инерции можно пренебречь («ползущие течения» Стокса), то аналогичный подсчет размерностей приводит к соотношению $D = K^* \mu v d$, где K^* — еще одна постоянная.

§ 62. Числа Рейнольдса и Маха

В теореме 1 число n основных единиц равнялось числу r переменных, входящих в не зависящее от выбора единиц соотношение

$$Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_r).$$

При $r = n + 1$ рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, приводят к формулам, содержащим полезные безразмерные параметры.

Теорема 1′. *Всякое соотношение* $Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_r)$, *не зависящее от выбора единиц и содержащее* $(r-1)$ *основных единиц, можно записать в виде*

$$Q_0 = C(\Pi) Q_1^{x_1} \ldots Q_r^{x_r},$$

где $\Pi = Q_1^{a_1} \ldots Q_r^{a_r}$ — *безразмерное произведение степеней* $Q_1, \ldots, Q_r$ *и* $Q_0 Q_1^{-x_1} \ldots Q_r^{-x_r} = \Pi_0$ *также безразмерное произведение.*

Теперь мы проиллюстрируем предыдущий результат, представляющий собой частный случай П-теоремы (мы ее докажем ниже), двумя важными примерами из гидромеханики.

Пример 5. Предположим, что $D = f(\rho, v, d, \mu)$ есть функция от ρ, v, d и μ, не зависящая от выбора единиц при всех преобразованиях единиц длины, времени и массы по формуле (1). Безразмерные величины $K_D = D/\rho v^2 d^2$ и $\mathrm{Re} = \rho v d/\mu$ (число Рейнольдса) инвариантны относительно этих преобразований. Но с помощью одного из таких преобразований [1]) мы можем одновременно свести ρ, v, d к 1; при этом μ переходит в $\mu/\rho v d = 1/\mathrm{Re}$. Поэтому

$$D = K_D(\mathrm{Re})\rho v^2 d^2, \quad \text{где} \quad K_D(\mathrm{Re}) = f\left(1, 1, 1, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right). \tag{10}$$

Пример 6. Предположим, что D подобным же образом определяется величинами ρ, v, d и сжимаемостью невозмущенного потока жидкости — $d(1/\rho)/dp = d\rho/\rho^2 dp$. При этом получаются безразмерные величины $D/\rho v^2 d^2 = K_D$ и $v^2 d\rho/dp$ (размерность последней $(LT^{-1})^2 (ML^{-3}) (MLT^{-2}L^{-2})^{-1} = 1$). Физический смысл выражения $v^2 d\rho/dp$ станет понятнее, если мы вспомним, что $dp/d\rho = c^2$, где c — скорость звука в жидкости. Рассуждая, как в примере 5, получаем соотношение

$$K_D = f(\mathrm{M}^2), \quad \text{где} \quad \mathrm{M} = \frac{v}{c} \text{ — число Маха [2])}. \tag{11}$$

Формулу (10) можно вывести также из теоремы 2 гл. II, если предположить, что уравнения Навье — Стокса полностью

---

[1]) Это доказательство в основном принадлежит Ваший; см. также Riabouchinsky D., *L'Aerophile*, September 1911.

[2]) Называемое во Франции «числом Сарро». Термин «число Маха» предложил Ackeret J., *Schweiz. Bauzeitung*, 94 (1929), 179.

определяют движение жидкости, ср. § 71. Аналогично формулу (11) можно вывести из уравнений Эйлера — Лагранжа, ср. § 73.

Прежде чем доказать П-теорему, мы приведем еще один важный пример применения анализа размерностей.

Пример 7. Пусть имеется отнесенное к единице массы *стационарное* распределение энергии турбулентности между вихрями различных размеров λ, так что $dE = E'(\lambda)d\lambda$. Предположим, что это распределение определяется *инерциальным* механизмом передачи энергии турбулентности вихрям меньших размеров λ. Очевидно, что скорость передачи энергии, приходящейся на единицу массы, имеет размерность $V^2/T = L^2/T^3$; следовательно, при любом изменении масштаба вида $L \to \alpha L$, $T \to \gamma T$ она умножается на величину α^2/γ^3. Кроме того, чтобы $E'(\lambda)$ сохранялось неизменным, эта скорость не должна зависеть от λ. Отсюда осредненное *время* $T(\lambda)$, необходимое для превращения вихрей размера λ в вихри меньших размеров, должно быть пропорционально $\lambda^{2/3}$: *при изменении масштаба величина* T *имеет размерность* $L^{2/3}$. Теперь рассмотрим спектр *частот* энергии: $dE = F(k)dk$, где $k = 2\pi/\lambda$ есть волновое число. Поскольку dE имеет размерность $V^2 = L^2T^2$, а величины k и $dk = 2\pi d\lambda/\lambda^2$ имеют размерность $1/L$, то функция $F(k)$ имеет размерность L^3/T^2, или $L^{5/3}$, или $k^{-5/3}$. Окончательно из анализа размерностей следует формула Колмогорова для *распределения энергии трубулентности*: $F(k) \sim k^{-5/3}$.

Формула Колмогорова связана с известным парадоксом бесконечной плотности полной энергии турбулентности, приходящейся на единицу объема, в случае мощных пульсаций, но мы не будем рассматривать здесь объяснение этого парадокса.

§ 63. П-теорема

Не приводя больше примеров[1]), перейдем сразу к доказательству общей П-теоремы Ваши и Букингема, которую можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть положительные переменные* $Q_1, \ldots, Q_r$, *при всех преобразованиях по формуле* (1) *основных единиц* $q_1, \ldots, q_n$ *изменяются согласно формуле* (2). *Пусть* $m \leqslant n$ —

[1]) Многочисленные примеры приводят Бриджмен П. [46], гл. I, VI; Седов Л. И. [57]; Лангхаар [65], Портер [54] и Робертсон Б. А., *Gen. Elec. Review*, **33** (1930), 207; см. также Рэлей, Phil. Mag., **34** (1892), 59 и 8 (1905), **66**, а также Nature, **95** (1915), 66.

ранг матрицы $\|b_{ik}\|$, *определяемой формулами* (2). *Тогда всякое не зависящее от выбора единиц соотношение вида*

$$f(Q_1, \ldots, Q_r) = 0 \tag{12}$$

эквивалентно условию вида

$$\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = 0 \tag{13}$$

при подходящим образом выбранных безразмерных произведениях $\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}$ *степеней* Q_i.

Пояснение. Первая фраза соответствует предположениям I и II из § 60. Предположения III и IV обобщены формулой (12).

Доказательство. Согласно определению, матрица $\|b_{ik}\|$ имеет неособый минор [1]) m-го порядка. Переставляя Q_j и q_i мы можем добиться того, чтобы в этот минор входили лишь $Q_1, \ldots, Q_m$ и $q_1, \ldots, q_m$. (Физически это означает, что другие основные единицы не являются независимыми.) Тогда всякий вектор $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn})$ при $j > m$ есть линейная комбинация $\mathbf{b}_j = c_{j1}\mathbf{b}_1 + \ldots + c_{jm}\mathbf{b}_m$ векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$.

Теперь определим $(r - m)$ новых *безразмерных* переменных Π_i формулами

$$\Pi_i = Q_{m+i} Q_1^{-c_{j1}} \ldots Q_m^{-c_{jm}}.$$

Определим также новую функцию g в виде

$$g(Q_1, \ldots, Q_m, \Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = f(Q_1, \ldots, Q_r); \tag{14}$$

очевидно, что в формуле (14) $Q_j = \Pi_{j-m} Q_1^{c_{j1}} \ldots Q_m^{c_{jm}}$ при $j > m$.

В «октанте» $Q_1 > 0, \ldots, Q_r > 0$ преобразование (2) независимых переменных взаимно однозначно в *большом* [2]). Поэтому соотношение $f = 0$ эквивалентно (т. е. определяет то же самое геометрическое место) соотношению $g = 0$, и, следовательно, $g = 0$ также не зависит от выбора единиц. Но так как минор матрицы $\|b_{ij}\|$ при $i, j = 1, \ldots, m$ неособый, то систему линейных уравнений $b_{i1} \lg \alpha_1 + \ldots + b_{im} \lg \alpha_m = \lg Q_i$ для любых положительных $Q_1, \ldots, Q_m$ при подходящем выборе можно разрешить относительно чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. А так как соотношение $g = 0$ не зависит от выбора единиц, то определяемое им геометриче-

[1]) Относительно свойств матриц, используемых здесь, см., например [45], гл. X, в частности, стр. 306 [или Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*]. Неособый минор m-го порядка — это квадратная подматрица порядка m, определитель которой не равен нулю.

[2]) В случае когда c_{jm} — целые числа, это можно обобщить на другие октанты. Характер поведения на гиперплоскостях $Q_i = 0$ более сложен; его исследовал Riabouchinsky D., *Comptes Rendus*, **217** (1943), 220—223.

ское место одно и то же для всех $Q_1, \ldots, Q_m$; следовательно, соотношение (12) эквивалентно, например, зависимости

$$\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = g(1, \ldots, 1; \Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Историческая справка. Имеются некоторые разногласия относительно авторства П-теоремы. Ваший[1]) получил этот результат в 1892 г., но он не сформулировал своих исходных допущений. Он указал использованный выше метод, но его рассуждения настолько загадочны, что никто не воспроизводил его доказательства. Букингем ([47], [48]) дал в 1914 г. первое доказательство П-теоремы, но только для частного случая, когда функцию f можно разложить в ряд Маклорена, и до недавних пор это было единственное общепринятое доказательство[2]). Недавно Рябушинский и А. Мартино-Лягард [52], разъяснив соображения Ваший, получили гораздо более общее доказательство[3]).

Приведенное здесь доказательство дает возможность более отчетливо выявить ограничения, накладываемые на величины α_i и Q_j и показать используемый матричный аппарат[4]).

§ 64. Обсуждение доказательства

Если предположить, что функцию f можно разложить в ряд Маклорена, то можно дать другое алгебраическое доказательство П-теоремы, понять которое, быть может, легче. Мы приведем здесь это доказательство и некоторые связанные с ним результаты, чтобы полнее разъяснить понятие *однородности по размерности.* Прежде всего отметим следующие очевидные следствия из теоремы Эйлера об однородных функциях.

Лемма 1. *Для функции $f(\mathbf{Q})$, зависящей от положительных величин $Q_1, \ldots, Q_m$, выполнение Эйлеровых условий однородности*

$$\frac{\partial f}{\partial Q_j} = \frac{\lambda_j f}{Q_j}, \tag{15}$$

[1]) Vaschy A., *Annales Télégraphiques,* 19 (1892), 25—28. Идеи Рябушинского получили развитие в ряде его работ (*L'Aerophile,* September, 1911; *Comptes Rendus,* 217 (1943), 205—208 и 225 (1947), 837—839).

[2]) Фактически Бриджмен ([46] стр. 16) поставил вопрос о том, нельзя ли рассматривать функции более общего вида. Функция $\alpha(\beta, M, \gamma)$ в определении Тейлора — Маккола из § 85 является безразмерной функцией, которую нельзя разложить в ряд Маклорена; см. также парадокс Ферри из § 16.

[3]) В первом издании [57] дано доказательство П-теоремы при самых общих предположениях. — *Прим. ред.*

[4]) См. также Langhaar H. L. [51] и данные там ссылки.

где λ_j — действительные постоянные, эквивалентно следующему соотношению:

$$f(\mathbf{Q}) = CQ_1^{\lambda_1} \dots Q_m^{\lambda_m}, \quad C = f(1, \dots, 1). \tag{15'}$$

Если Q_j однородны по размерности, как в формуле (2), *то однородна по размерности и функция f, и ее размерности относительно q_k есть $\lambda_1 b_{1k} + \dots + \lambda_m b_{mk} = \Lambda_k$.*

Для таких функций мы введем следующее определение.

Определение. Конечную сумму функций $f(\mathbf{Q})$, удовлетворяющую (15'),

$$\varphi(\mathbf{Q}) = f_1(\mathbf{Q}) + \dots + f_r(\mathbf{Q}) \tag{16}$$

будем называть *Q-полиномом.*

Лемма 2. *Если все члены $f(\mathbf{Q})$ в $\varphi(\mathbf{Q})$ одной и той же размерности Λ_k по любому q_k, то функция φ однородна по размерности.*

Действительно, выполнив подстановку (2), получим

$$\varphi(T_\alpha(\mathbf{Q})) = \varphi(\mathbf{Q}, \alpha) = \alpha_1^{\Lambda_1} \dots \alpha_n^{\Lambda_n} \varphi(\mathbf{Q}). \tag{17}$$

Простой пример $f_1 = Q_1$, $f_2 = Q_2$, $f_3 = -Q_1$ показывает, что обратное неверно, если функция φ не приведена к нормальному виду.

Мы будем говорить, что Q-полином *формально однороден*, если все его члены f_i имеют один и тот же вектор размерности $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Очевидно, если функция φ формально однородна, то равенство $\varphi = 0$ не зависит от выбора единиц в смысле соотношения (5). Кроме того, оно эквивалентно безразмерному соотношению $1 + (f_2/f_1) + \dots + (f_r/f_1) = 0$, что тривиально доказывает П-теорему для Q-полиномов.

Многие уравнения физики формально однородны, подобно приведенным выше в примерах 1, 3, 4. Утверждали даже (хотя это неверно, см. § 65), что все настоящие физические уравнения *должны быть* однородны и, действительно, критерием однородности по размерности часто можно пользоваться в качестве удобного способа формальной проверки физических уравнений, если вы в них не вполне уверены. Однако в действительности дело обстоит значительно сложнее, и некоторые тонкие разграничения, которые здесь надо иметь в виду, лучше показать на примере. В связи с этим мы вновь рассмотрим пример 2 из § 61.

Если применить П-теорему к соотношению (6), не зависящему от выбора единиц и рассматривать v как Q_1, а t —

как q_2, то после некоторых преобразований получим соотношение [1])

$$\sqrt[3]{(1-\Pi)(\Pi+1)}+\sqrt[5]{1-\Pi}=0.$$

Это соотношение в отличие от соотношения (6) не только не зависит от выбора единиц, но и однородно по размерности, так как все входящие в него члены имеют размерность нуль по всем основным величинам. Несмотря на это, доказательство П-теоремы Букингема не применимо к соотношению (6).

Следуя Бриджмену [2]), мы можем рассмотреть также полиномиальное уравнение

$$\varphi(s,\ v,\ a,\ t)=v+v^2-2as-at=0. \tag{18}$$

И это уравнение, и соотношение (6) удовлетворяются в условиях примера 2; кроме того, функция φ есть Q-полином.

Однако уравнение (18) *не является* не зависящим от выбора единиц в смысле соотношения (5), и функция φ не формально однородная функция: подстановка $s\to\alpha s$, $t\to\beta t$ переводит уравнение (18) в следующее:

$$\frac{\alpha}{\beta}(v-at)+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2(v^2-as)=0. \tag{18'}$$

Так как уравнение (18) справедливо в любой системе основных единиц («справедливо при любых единицах», хотя и зависит от выбора единиц), то уравнение (18′) есть тождество относительно величин α и β. Поэтому из уравнения (18′) следуют равенства: $v=at$ и $v^2=as$. Эти рассуждения можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. Пусть $\varphi(\mathbf{Q})$ *есть Q-полином, и пусть соотношение* $\varphi(\mathbf{Q})=0$ *«справедливо при любых единицах». Тогда условия* $\varphi(\mathbf{Q})=0$ *эквивалентно системе формально однородных уравнений.*

Доказательство следует из формального рассмотрения тождества

$$\varphi(T_\alpha(\mathbf{Q}))=\sum\alpha_1^{\Lambda_{i1}}\dots\alpha_n^{\Lambda_{in}}\varphi_i(\mathbf{Q}),$$

где $\varphi_i(\mathbf{Q})$ — слагаемые функции φ, имеющие различные размерности $\Lambda_i=(\Lambda_{i1},\dots,\Lambda_{in})$.

Применив предыдущие рассуждения к ряду Маклорена, получим доказательство Букингема П-теоремы; по-видимому, оно

[1]) Это соотношение не получается из (6). — *Прим. ред.*

[2]) [46], стр. 42. Исследование уравнения (18) привело Бриджмена к мысли предложить «векторное исчисление» соотношений.

равным образом применимо к ряду Лорана и к действительному ряду Дирихле внутри областей сходимости.

Наконец, мы напомним свойство «абсолютной инвариантности относительной величины», введенное Бриджменом [1]). Согласно Бриджмену, функция переменных $q_1, \ldots, q_n$ обладает этим свойством, если она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{f(q_1', \ldots, q_n')}{f(q_1, \ldots, q_n)} = \frac{f(\alpha_1 q_1', \ldots, \alpha_n q_n')}{f(\alpha_1 q_1, \ldots, \alpha_n q_n)} \tag{19}$$

для всех положительных α_i, q_i и q_i' [$i = 1, \ldots, n$]).

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть $Q = f(q_1, \ldots, q_n)$ есть положительная величина, непрерывная по основным единицам q_i и удовлетворяющая уравнению* (19), *так что отношения ее числовых значений инвариантны относительно изменений основных единиц. Тогда Q должно удовлетворять соотношению* (2).

Доказательство. Пусть $q_1' = \sigma$, $\alpha_1 = \sigma^m$, а все остальные переменные равны 1. При помощи перестановки можно получить формулу (19) в виде

$$\lambda f(\sigma^m, 1, \ldots, 1) = f(\sigma^{m+1}, 1, \ldots, 1),$$

где $\lambda = f(\sigma, 1, \ldots, 1)/f(1, 1, \ldots, 1)$. Индукцией по m получаем для всех положительных и отрицательных целых m следующее равенство:

$$f(\sigma^m, 1, \ldots, 1) = \lambda^m f(1, 1, \ldots, 1). \tag{19'}$$

Отсюда, полагая $q_1 = 2^{m/n}$, $\sigma = \sqrt[n]{2}$ и $f(1, \ldots, 1) = C$, получаем выражения

$$f(q_1, 1, \ldots, 1) = C\lambda^m \text{ и } f(2, 1, \ldots, 1) = C\lambda^n.$$

Положим $a = \log_2[f(2, 1, \ldots, 1)/f(1, 1, \ldots, 1)] = n \log_2 \lambda$, так что $\lambda^m = 2^{ma/n}$; после подстановок получаем соотношение

$$f(2^{m/n}, 1, \ldots, 1) = C2^{ma/n} = C(2^{m/n})^a. \tag{20}$$

---

[1]) См. [23], стр. 21. Уравнение (19), очевидно, показывает, что *отношения* однородных величин инвариантны относительно замены основных единиц. Предположение, что q_i положительны, хотя и не упоминается, но также необходимо в доказательстве Бриджмена, поскольку он имеет дело с $\int dq_i/q_i$. И, действительно, отрицательные величины a_i обычно не имеют никакого физического смысла. Эти результаты распространил с дифференцируемых на непрерывные функции Martinot-Lagarde A., *Comptes Rendus*, 223 (1946), 136—137.

Но степени двойки с рациональными показателями образуют всюду плотное множество положительных действительных чисел. Следовательно, если f фактически непрерывна, если f не является неизмеримой и не является всюду разрывной функцией [1]), то для всех положительных q_1 получаем равенство $f(q_1, 1, \ldots, 1) = Cq^1$.

Повторив рассуждение для других индексов, мы приходим к утверждению теоремы [2]).

§ 65. Независимы ли физические законы от выбора единиц?

В § 61 мы рассматривали свойство независимости соотношений от выбора единиц как математическую гипотезу. Относительно ее физической применимости велись жаркие споры. Так, некоторые авторы позволяли себе истолковывать тот правдоподобный принцип, что «все единицы измерения [3]) пригодны», как приводящий к выводу, что при всех таких единицах получаются одни и те же универсальные физические законы. Так, Толмэн [4]) в 1914 г. утверждал: «основные сущности, из которых построена физическая вселенная, таковы, что из них можно построить миниатюрную вселенную, в точности подобную... нашей вселенной».

Легко видеть, что такой вывод не является логически необходимым, если вспомнить, что в некотором смысле все пространственно-временные системы координат равновозможны. Но геоцентрическая система, подобная той, что используется в астрономии Птолемея, не приводит к тем же физическим законам, что и гелиоцентрическая система.

Кроме того, такое истолкование неверно даже для единиц длины, массы и времени в механике [5]). Действительно, основное положение специальной теории относительности состоит в том,

---

[1]) Относительно контрпримеров всюду разрывных функций см. Hammel G., *Math. Annalen*, **60** (1905), 459—462. С помощью логарифмического преобразования уравнение (19) сводится к известному аддитивному функциональному уравнению. Легко показать, что, в силу уравнения (19), если функция f разрывна в одной точке, то она должна быть всюду разрывной. Относительно неизмеримости f см. Banach S., Théorie des Operations Linéaires, Warsaw, 1933, стр. 23.

[2]) Простое доказательство этой теоремы для дифференцируемых функций см. в [57]. — *Прим. ред.*

[3]) Относительно значения шкалы измерений см. Campbell N., Measurement and Calculation, 1928. Строго говоря, следует различать шкалы перечисления, порядковые шкалы, шкалы, в которых можно установить равенство разностей значений, и истинные линейные шкалы с нулем.

[4]) Tolman R. C., *Phys. Rev.*, **3** (1914), 244—255.

[5]) Конечно, можно сохранить предположение IV следующим образом: считать, по определению, основной единицей такую единицу измерения, для которой справедливо предположение IV; это может даже оказаться полезным.

что законы механики, одним из которых является основной закон силы

$$F = \frac{d\,(m_0 u/\sqrt{1-u^2/c^2})}{dt}, \qquad (21)$$

не являются независимыми от выбора единиц измерения длины и времени в отдельности, так как в них входит скорость света [1]).

В квантовой механике постоянная Планка h входит в формулу де-Бройля для длины волны частицы $\lambda = h/mv$ и в фотоэлектрическое уравнение $E = h\nu$; это еще более подчеркивает то обстоятельство, что не все физические законы однородны по размерности. Здесь h — универсальная постоянная, имеющая размерность действия ML^2/T (энергия × время). Другая размерная постоянная γ входит во всеобщий закон притяжения Ньютона [2]) $F = \gamma mm'/r^2$; другие такие постоянные входят в выражение для диаметра любой микрочастицы, и т. д. Таким образом, мы вынуждены безоговорочно признать, что *мы не знаем таких «основных единиц», по отношению к которым все известные нам физические законы не зависимы от выбора единиц* [3]). В действительности выбор некоторых единиц как основных (или первичных), а всех остальных как производных (или вторичных) является делом соглашения и не вызван физической необходимостью. Так, иногда оказывается удобным считать силу не зависящей от массы, длины и времени [4]).

Физические постоянные. В предшествующих утверждениях необходимо сделать существенную оговорку. Универсальность «универсальных постоянных» может оказаться не абсолютной. Так, до открытия Ньютоном тяготения величина g должна была, по-видимому, считаться универсальной постоян-

---

[1]) Независимый выбор единиц длины и времени возможен и в этом случае, если скорость света c рассматривать как физическую размерную постоянную. — *Прим. ред.*

[2]) Согласно Эддингтону (*Lond. Phys. Soc.*, 1918, стр. 91), практически природа заставляет нас единственным образом выбрать единицы длины, времени и массы так, чтобы было $\gamma = c = h = 1$. Ограниченные законы «гравитационного подобия» исследовал Laboretta, *Electrotecnica*, 1932, стр. 1629.

[3]) Другие примеры см. у Бриджмена [46], стр. 103. [По-видимому, речь идет о зависимости от единиц измерения способа записи физических законов, а не самих законов по существу. — *Прим. ред.*]

[4]) См. [46], стр. 65. В термодинамике мы имеем замечательный парадокс Рябушинского (там же, стр. 10), а также закон радиации Стефана — Больцмана $E/\text{площадь} = KT^4$. Еще больше проявляется искусственность понятия «основная единица» при рассмотрении электромагнитных единиц; см. Jeans J., Electricity and magnetism, Cambridge Univ. Press, 1941, стр. 14—15, а также Bryleński, *Comptes Rendus*, 215 (1942), 104.

ной (что до сих пор сказывается в выборе технической системы единиц). Далее, скорость $c = 1/\sqrt{K\mu}$ распространения электромагнитных волн рассматривалась Максвеллом [1]) не как универсальная постоянная, а как величина, зависящая от диэлектрической постоянной K и магнитной проницаемости данного вещества. По-видимому, преждевременно отказываться, как от безосновательных, от попыток, подобных предпринятым Толмэном (см. прим. 4) на стр. 133) и Эддингтоном [2]), вывести соотношения между универсальными постоянными из некоторых общих принципов.

§ 66. Инспекционный анализ

В ньютоновой континуальной механике можно производить любые изменения типа (1) *в масштабах длины, массы и времени*, чего нельзя сказать о релятивистской и квантовой механиках. И, по-видимому, можно быть уверенным, что законы ньютоновой механики достаточно точно описывают поведение реальных жидкостей в обычных условиях. Хотя подобные изменения масштаба могут существенно повлиять на такие свойства вещества, как плотность и вязкость, диапазон плотности и вязкости реальных жидкостей настолько велик, что это влияние обычно остается незаметным.

Выделенный выше курсивом принцип можно доказать не только экспериментально на моделях, но его можно также вывести теоретически из основных уравнений гидромеханики. Этот вывод основывается на простом мета-математическом принципе: *если какая-либо система математических уравнений инвариантна относительно некоторой группы, то то же самое справедливо для всех следствий из этих уравнений.*

Применительно к скалярным преобразованиям (1), указанным принципом фактически пользовались Фурье, Стокс и другие пионеры исследования анализа размерностей, чтобы проверить правильность своих рассуждений. Этот метод был отчетливо осознан Рэлеем, когда он ссылался на «подобие»; преимущества этого метода признавал также Бриджмен [3]), который писал: «Преимущество (анализа размерностей) в том, что он быстро приводит к результату, но... он не дает такой полноты информации, которую можно было бы получить с помощью...

[1]) Theory of electricity and magnetism, Oxford, 1881, статьи 784—787.

[2]) Eddington A., Relativity theory of protons and electrons, Cambridge Univ. Press, 1935; см. также [46], гл. VIII и Whittaker E. T., Spase and spirit, Edinburgh, 1946.

[3]) Rayleigh, *Phil. Mag.*, 34 (1892), 52 и 8 (1905), 66, а также *Nature* 95 (1915), 66; Bridgman [46], 17; см. также Schiffer L., *ZAMM*, 24 (1944), 289—293.

детального анализа» и «анализ размерностей с физической точки зрения не столь поучителен, как условие подобия».

Принцип «динамического подобия» для движений жидкости обычно формулируется следующим образом.

Определение. Два течения жидкости Ф и Ф′ называются *динамически подобными*, если их можно описать при помощи координатных систем[1]), в которых пространство, время и масса связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$x_i' = \alpha x_i, \qquad t' = \beta t, \qquad m' = \gamma m. \tag{22}$$

Легко проверить, являются ли уравнения гидродинамической теории инвариантными относительно преобразований вида (22).

Именно это было сделано при доказательстве теоремы 2 из § 21. Из уравнений, подлежащих проверке, наиболее важны уравнения Навье — Стокса для *несжимаемой вязкой жидкости:*

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i + \nu\nabla^2 u_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Было показано, что эти уравнения инвариантны при отсутствии свободной поверхности, *если* для величин ν и p/ρ (гидростатическое давление можно учесть согласно теореме 1 из § 21) масштабы выбраны так, что число Рейнольдса vd/ν из примера 5, § 62 сохраняется неизменным. (Относительно роли параметров, характеризующих данное вещество, таких, как ν и ρ, см. § 65; их роль аналогична той, которую играют K и μ в теории электромагнетизма, где $c = c_0/\sqrt{K\mu}$.)

В § 70—73 будут доказаны различные аналоги теоремы 2 из § 21 применительно к сжимаемому невязкому течению, сжимаемым струйным течениям, течениям с кавитацией и т. д. Но сначала мы рассмотрим инспекционный анализ вообще, для того чтобы лучше уяснить себе его отношение к традиционному анализу размерностей.

§ 67. Связь с теорией групп

Ясно, что математические уравнения можно проверить на инвариантность не только относительно «изменений масштаба», описываемых посредством соотношений (22), но и относительно многих других преобразований. Например, *все* уравнения физики инвариантны относительно переноса и поворота осей ко-

[1]) В действительности мы имеем в виду ньютоновы системы координат, в которых верны законы движения Ньютона. Поскольку предположение об их существовании ставит вопрос о возможности динамического подобия, в этом определении имеется нечто от порочного круга.

ординат — известный принцип, который весьма существен при математическом исследовании большинства физических задач. В некоторых частных случаях можно воспользоваться инвариантностью относительно конформных и афинных преобразований (см. § 74).

Вообще говоря, *инспекционный анализ применим к любой группе преобразований*[1]). Под группой преобразований мы разумеется, понимаем (см. прим. 1) на стр. 122) множество преобразований, содержащее тождественное и все обратные преобразования и произведения любых двух своих элементов.

Наше утверждение основывается на логической аксиоме, о которой шла речь в § 1, гипотеза (С) и в § 26, а именно: *если гипотезы теории инвариантны относительно группы G, то инвариантны относительно G и их следствия*[2]). Обратно, *множество всех взаимно однозначных преобразований, оставляющих без изменения какую-либо систему уравнений, образует группу.*

Самой важной группой в механике после «группы подобия» преобразований вида (22) является десятипараметрическая группа Галилея — Ньютона. Эта группа порождается трехпараметрической подгруппой S пространственных переносов

$$x_i' = x_i + c_i \qquad [i = 1, 2, 3]; \tag{24}$$

однопараметрической подгруппой T переносов отсчета времени

$$t' = t + c; \tag{25}$$

трехпараметрической подгруппой R поворотов пространства

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k, \tag{26}$$

где $\|a_{ik}\|$ — наиболее общая квадратная ортогональная матрица третьего порядка, и трехпараметрической подгруппой M группы преобразований к *осям, движущимся* поступательно с постоянной скоростью

$$x_i' = x_i - b_i t. \tag{27}$$

Теперь легко проверить, что три закона движения Ньютона инвариантны относительно преобразований (24)—(27) и что эти

---

[1]) Это было высказано Ehrenfest [61], стр. 261, но не привлекло внимания, так как она не указала никаких приложений. Элементарные сведения о группах см. в [45], гл. VI; об ортогональных матрицах см. там же, гл. VIII. [См. также Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1953; Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., 1948. — *Прим. ред.*].

[2]) Это положение, хотя и широко используется математиками и физиками, редко формулируется явно; см., однако, Bouligand G., Théorie Générale des Groupes, Paris, 1935, стр. 3.

преобразования не изменяют определений таких физических параметров, как плотность, вязкость и т. д. (предполагается, что масса остается неизменной). Следовательно, *теоретическая механика Ньютона инвариантна как относительно группы Галилея — Ньютона*, так и относительно группы преобразований (22) динамического подобия. Этот принцип был подтвержден на опыте многими способами с очень большой точностью, за исключением тех случаев, когда скорости движения сравнимы со скоростью света [1]).

§ 68. Теория моделирования

Мы указали два основных преимущества инспекционного анализа: он дает нам возможность оправдать предположение IV анализа размерностей, позволяя проверить инвариантность уравнений, определяющих данную краевую задачу, относительно преобразований (1); а также позволяет рассматривать «подобие» не только такого простого вида, как (1). Инспекционный анализ имеет и третье преимущество: он дает в принципе рациональный метод проверки справедливости предположения III.

Хотя, как мы видели, предположения I, II и IV, по-видимому, в общем допустимы в механике жидкостей, с предположением III дело обстоит иначе. Кроме того, анализ размерностей не дает основания a priori решить вопрос о том, определяют ли переменные $Q_1, \ldots, Q_n$ величину Q_0 достаточно точно. Так, Бриджмен [2]) замечает вскользь, что этот кардинальный вопрос «не может быть разрешен философом на кафедре», а его можно решить только на основе физического опыта. Мы проиллюстрируем это затруднение большим экспериментальным материалом.

Для того чтобы проверить справедливость предположения III с помощью инспекционного анализа, в принципе можно действовать следующим образом. Пусть известно, что некоторое течение жидкости можно приближенно рассчитать, решив соответствующую *краевую задачу* в смысле § 1. Тогда можно попросту проверить инвариантность дифференциальных уравнений и краевых условий относительно преобразований некоторой группы (скажем, преобразований (22)). Если они инвариантны и краевая задача корректно поставлена, то предположение III справедливо.

Таким образом, инспекционный анализ имеет то преимущество, что он укладывается в общую схему теоретической гидро-

[1]) Кажущийся парадокс Дюбуа не является контрпримером; см. § 28.
[2]) [46], стр. 13—14; см. там же, стр. 50.

динамики. Основное ограничение, накладываемое на его применимость, обусловлено, как мы уже выяснили в гл. I—II, тем обстоятельством, что все еще слишком мало задач теоретической гидродинамики сведены к таким краевым задачам, корректность которых доказуема.

§ 69. Частный инспекционный анализ

Мы приведем сейчас пример, иллюстрирующий применение как инспекционного анализа, так и способы устранения затруднений, возникающих при этом.

Рассмотрим уравнения Навье — Стокса (23) для несжимаемой вязкой жидкости. Согласно Руарку [56] их можно привести к безразмерному виду следующим образом.

Пусть V, L и P соответственно скорость, длина и давление на модели, измеренные, по предположению, на границах течения жидкости. Если умножить уравнения (23) на L/V^2, чтобы придать этим уравнениям безразмерный вид, и ввести безразмерные переменные $u_i' = u_i/V$, $t' = Vt/L$, $x_i' = x_i/L$, $p' = p/P$ и безразмерные постоянные $\mathrm{Re} = VL/\nu$, $\mathrm{Fr} = V^2/Lg$ и $Q^* = 2P/\rho V^2$, то получим уравнения

$$\frac{Du_i'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2 u_i' + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{g_i}{g}\right) - \frac{Q^*\partial p'}{2\partial x_i'}, \tag{28}$$

где g_i/g — направляющие косинусы силы тяжести.

Безразмерные дифференциальные уравнения (28) находятся в замечательном соответствии с техническим опытом: мы можем отсюда вывести три наиболее важных ориентирующих правила, используемые при моделировании[1]). Так, мы видим, что если влияние силы тяжести, сжимаемости и кавитации незначительно, то модель должна иметь то же самое число Рейнольдса Re. Если не имеют значения сжимаемость, кавитация и вязкость, то моделировать надо по числу Фруда Fr.

Если можно пренебречь сжимаемостью и вязкостью, но надо учитывать гравитационные и кавитационные эффекты, то следует сохранять неизменным как число Fr, так и «число кавитации» Q^* (см. § 72, 78).

Инспекционный анализ делает правдоподобным предположение, что те или иные величины не играют роли как раз тогда, когда малы соответствующие коэффициенты в уравнениях (28),

[1]) См. [11], т. 2, гл. I, по поводу аналогичного вывода. Рецепт там таков: нужно сохранить неизменными «отношения сил»; ни величина Q^*, ни дифференциальные уравнения не рассматриваются в явном виде.

и, таким образом, по-видимому, он дает хорошее теоретическое обоснование моделирования по числам Fr, Re и Q^*.

Хотя только что приведенное рассуждение весьма содержательно и его стоит запомнить, оно страдает тем недостатком, что учитывалось только одно из трех фундаментальных уравнений гидромеханики, а именно уравнение движения. Итак, при этом остались в стороне уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k}=0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}+\frac{D(\lg \rho)}{Dt}=0 \tag{29}$$

и уравнение состояния, которое можно записать в виде

$$\rho=f(p). \tag{30}$$

По этой причине мы будем называть его «частным инспекционным анализом», а соответствующий процесс, когда рассматриваются корректно поставленные условия, полностью определяющие течение, будем называть «полным инспекционным анализом».

§ 70. Инерциальное моделирование

На практике соображениями удобства экспериментирования и экономии часто руководствуются не только при выборе используемой жидкости (например, воздуха или воды), но и при выборе *размеров* моделей и *скорости* течения. Использование малых моделей для представления действительной картины бо́льшего масштаба обычно обосновывается с помощью анализа размерностей. В частности, обычно считают приближенно выполненным следующее условие.

Принцип инерциального моделирования. Безразмерные величины остаются без изменения при всех преобразованиях вида (22).

Так, если L — характерная длина и V — характерная скорость, то считают, что $V^{-1}\mathbf{u}(L^{-1}\mathbf{x})$ инвариантно по отношению к преобразованиям (22). В качестве следствия можно получить, исходя из значения величин на модели $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, действительную величину $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ посредством соотношения

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})=\frac{V'}{V}\,\mathbf{u}\left(\frac{L\mathbf{y}}{L'}\right),$$

где L' и V' — характерные длина и скорость полного масштаба. Подобным же образом допускают инвариантность относительно преобразований (22) коэффициента давления $C_p=(p-p_a)\big/\frac{1}{2}\rho v^2$, где p_a — давление в окружающей среде. В случае невязкой

жидкости из этого следует инвариантность коэффициента $C_D = D/\frac{1}{2}\rho V^2 A$, где D — лобовое сопротивление и A — площадь поперечного сечения. Заметим, однако, что неизменность величины $p/\frac{1}{2}\rho v^2$ не предполагается (см. § 72): анализ размерностей охватывает не все.

В действительности метод инспекционного анализа позволяет нам обойтись без всех предположений анализа размерностей. В частности, принцип инерциального моделирования можно строго *вывести* из стандартных уравнений для несжимаемой невязкой жидкости при условии отсутствия свободной поверхности.

Так, почти тривиальные выкладки показывают, что преобразования (22) в сочетании с преобразованиями $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u}/\beta$, $\rho' = \gamma\rho/\alpha^3$ и $p' = (\gamma/\alpha\beta^2)p$ сохраняют неизменными как уравнения движения Эйлера и уравнение неразрывности, так и условие отсутствия вихрей $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 5. *В случае несжимаемого течения к уравнениям движения Эйлера, уравнению неразрывности и независимости и к краевым условиям Эйлера на твердых стенках применим принцип инерциального моделирования.*

Поскольку сформулированные выше условия определяют корректно поставленную краевую задачу (задачу Неймана, см. § 4) для стационарного течения при заданном p_a, отсюда вытекает следствие.

Следствие. Если справедливы уравнения Эйлера для безвихревого несжимаемого течения, то измеренное значение C_D не должно зависеть от размеров, скорости движения и плотности жидкости.

Фактически, ввиду парадокса Даламбера, этот результат менее интересен сам по себе, а интересен в качестве иллюстрации важного метода. Однако приведенные рассуждения равным образом применимы к течениям Жуковского (§ 8), к «следам»[1]) Кирхгофа (§ 39), к течениям Гельмгольца — Бриллюэна (§ 47) и к теории вихревых дорожек Кармана (§ 56). Принцип инерциального моделирования справедлив также для примитивной ньютоновой кинетической теории сопротивления воздуха и для квазиэмпирической формулы Эйлера, выражающей лобовое

[1]) То есть к каверна м. Заметим, что, поскольку теории течений Эйлера и Жуковского обратимы, в преобразованиях (22) можно рассматривать даже $\alpha < 0$.

сопротивление и подъемную силу в виде определенных интегралов [1]).

Если применить теорему 5 к ускоренному движению, возникающему из начального состояния покоя, то получим, что коэффициент присоединенной массы k, выражающийся отношением [2])

$$k = \frac{\text{Присоединенная масса}}{\text{Масса перемещенной жидкости}},$$

определяется *формой* рассматриваемого тела и не зависит от его размеров, от изменения ускорения и от плотности жидкости.

Экспериментально проверено, что принцип инерциального моделирования приближенно справедлив при режимах, соответствующих широкому диапазону изменений Re. Однако он сразу перестает быть справедливым, когда появляются перемежающиеся вихри и турбулентность в пограничном слое (например, вблизи $1/\mathrm{Re} \simeq 0{,}02$ и $0{,}00005$, см. § 28).

§ 71. Моделирование по числу Рейнольдса

Гораздо бо́льшее значение имеет применение метода инспекционного анализа к уравнениям для несжимаемых вязких жидкостей. В этом случае, в силу теоремы 2 из § 21, получается следующая теорема.

Теорема 6. *Если уравнения Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости вместе с условиями несжимаемости и прилипания на стенках приближенно определяют независящее от времени (статистически) течение жидкости, то справедливо соотношение* (8).

Действительно, соотношение (8) весьма убедительным образом было подтверждено экспериментально для самых разнообразных жидкостей и газов [3]). Как показано на рис. 8, разрушение течения Пуазейля в трубах для воздуха, воды и многих других жидкостей наступает при одном и том же числе Рейнольдса. При числах Маха, меньших $M = 0{,}3$, коэффициенты

[1]) Эти теории подробно рассмотрены в книгах Painlevé P., Leçons sur la résistance des fluides, Paris, 1930 и Cranz [5], гл. II.

[2]) *Присоединенная масса* тела в жидкости (гл. VI) — это разность между его инертной массой в жидкости и в вакууме.

[3]) См. § 25 и приведенные там ссылки на литературу, а также [54], стр. 16—17. Теорию разработал Стокс, [13], т. 3, стр. 17. Так как турбулентные движения обычных жидкостей и газов динамически подобны, по-видимому, маловероятно, чтобы турбулентность можно было связать с кинетической теорией иначе, чем косвенным образом — через вязкость. Подобным же образом были исследованы масла — Boswall R. O., Brierly J. C., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 122 (1932), 423—569.

лобового сопротивления сфер и цилиндров удовлетворяют соотношению (8) при одном и том же значении $K_D(\mathrm{Re})$ для всех жидкостей и при всех размерах и скоростях. Соответствующий результат справедлив для поверхностного трения пластинок, параллельных направлению потока.

При опытной проверке этих результатов необходимо соблюдать следующие две предосторожности, иначе не обеспечивается моделирование по числу Рейнольдса. Во-первых, нужно пользоваться моделями с аналогичной *шероховатостью поверхностей.* Это существенно влияет на появление турбулентного течения и на переход в пограничном слое от ламинарного течения к турбулентному. Так, вблизи $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ можно намного уменьшить лобовое сопротивление сферы, увеличив должным образом шероховатость ее поверхности.

Во-вторых, *турбулентность свободного потока* должна оставаться той же самой [1]), особенно в аэродинамических трубах с замкнутым контуром. Найдено, что величина $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ для сфер в аэродинамических трубах может увеличиваться в 2 раза в зависимости от турбулентности в трубе. Практическое решение этой проблемы будет описано в § 75.

Моделирование при бо́льших числах Рейнольдса в малом масштабе для больших скоростей в потоке — весьма нелегкая задача. Если использовать данную жидкость (воздух или воду) при атмосферных условиях, то всякое уменьшение диаметра модели должно компенсироваться увеличением в том же отношении скорости. В случае воздуха вязкость ν можно уменьшить, используя сжатый воздух, чтобы компенсировать уменьшение масштаба длин (ср. конец § 73 и § 75). К сожалению, мы не знаем ни одной жидкости, у которой значение ν было бы намного меньше, чем у воды, хотя многие жидкости имеют значительно большее значение ν. Поэтому только аэродинамические трубы [2]) дают экономичные модели по числу Рейнольдса при моделировании течений воды.

§ 72. Моделирование по числу Фруда и по числу кавитации

Инспекционный анализ можно также применять для получения законов моделирования явлений, в которых вязкость и

[1]) [3], стр. 431; см. также § 28, где приведены аналогичные результаты.

[2]) Об использовании аэродинамических труб вместо гидродинамических см. Keller C., Escher Wyss News (1940). Гелий в условиях сверхтекучести (§ 20), по-видимому, не подходит.

сжимаемость не играют существенной роли, но зато имеется «свободная поверхность», находящаяся под постоянным давлением. В частности, такие законы применимы к гравитационным волнам и к явлению кавитации в жидкостях. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *В однородном гравитационном поле интенсивности* g *Эйлеровы уравнения движения и краевые условия на твердых границах, а также условие безвихренности и условие на «свободной поверхности»* $p = \text{const}$ *на границе сред жидкость — газ остаются неизменными при всех преобразованиях вида* (22), *оставляющих неизменным число Фруда* $\mathrm{Fr} = V^2/gL$.

Доказательство. В силу теоремы 5, достаточно рассмотреть условие на свободной поверхности $p = \text{const}$, т. е. условие того, чтобы ∇p был нормален к ограничивающей поверхности. Для доказательства умножим уравнения (23) на L/V^2, как при выводе уравнений (28); мы получим безразмерное уравнение

$$\frac{Du_i'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{g_i}{g}\right) - \frac{\partial\left(p/\rho_0 V^2\right)}{\partial x_i'}. \tag{31}$$

Так как g_i/g есть i-й направляющий косинус интенсивности гравитационного поля и так как $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ определяет ∇p, то мы получаем динамическое подобие при пропорциональности *дифференциалов* коэффициента давления $2p/\rho_0 V^2$ (хотя и нет обычной пропорциональности величины $2p/\rho_0 V^2$), если только числа Fr будут равны.

Действительно, давление в окружающей среде P — это обычное локальное атмосферное давление p_a при моделировании гравитационных волн; при кавитационном моделировании нужно рассматривать также давление пара p_v. Это стало вполне ясно лишь в 1924 г., когда Тома [1]) ввел число кавитации

$$Q = \frac{P - p_v}{{}^1/_2 \rho V^2}. \tag{32}$$

[1]) Thoma D., Experimental research in the field of water Power, Trans. First World Power Conf., т. 2 (1924), 536—551; см. также Taylor H. B., Moody L. F., *Mech. Engineering*, 44 (1922), 633—640. Явно это высказал Lerbs H. на стр. 290 в Hydromechanische probleme des schiffsantriebs, Hamburg; см. также Rossell H. E., Chapman L. B., Principles of naval architecture, Soc. Nav. Arch. Marine Eng., New York, 1947, т. 2, стр. 177.

До этого считалось общепризнанным, что кавитация зависит от однородного безразмерного параметра

$$Q^* = \frac{P}{{}^1/_2 \rho V^2}, \tag{32'}$$

входящего в уравнение (28), что непосредственно следует из обычного анализа размерностей [1]).

Полный инспекционный анализ вместе с предположением, что кавитация возникает самопроизвольно при $p < p_v$, дает теоретическое обоснование для предпочтения формулы (32), ибо это предположение равнозначно постулированию разрывного уравнения состояния гл. III (14):

$$\rho = \rho_0, \qquad \text{если} \qquad p > p_v \tag{33}$$

и

$$\rho = \rho_v, \qquad \text{если} \qquad p = p_v.$$

При заданных P и p_v преобразование подобия (22) не изменяет соотношений (33) тогда и только тогда, когда оно не изменяет величину Q; доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

При моделировании можно оставить неизменными *как* гравитационные, *так* и кавитационные члены при линейном масштабе $1 : \alpha$, взяв для скорости масштаб $1 : \sqrt{\alpha}$ (одно и то же g) и изменяя P таким образом, чтобы $P - p_v$ преобразовывалось в отношении $1 : \alpha$. Такое «моделирование по числу Фруда с понижением давления» сейчас широко используется при исследовании кавитации судовых винтов; может оказаться, что в таких моделях давлением пара нельзя пренебречь.

§ 73. Моделирование по числу Маха

Еще со времен опытов Робина (1747 г.) [2]) известно, что сопротивление снаряда не пропорционально квадрату скорости; следовательно, ни один способ инерциального масштабирования не является приемлемым. В обозначениях примера 3 из § 61 K_D заметно возрастает вблизи скорости звука. Поэтому K_D обычно табулировали как функцию v.

Было признано с самого начала, что причиной этого является сжимаемость воздуха, но более рациональное табулирование K_D как функции числа Маха M относится лишь ко времени первой

[1]) См. Lorain F., L'hèlice propulsive, Paris, 1932, стр. 129. Buckingham E., *Jour. Am. Soc. Naval Eng.*, 48 (1936), 147—148; Taylor D. W., The speed and power of ships, 3-е издание (1943), стр. 17.

[2]) По поводу истории вопроса см. Cranz [5], стр. 44—45

мировой войны. По логике вещей следует, что на дальность полета снарядов должна влиять не только плотность, что видно уже из выражения, определяющего K_D, но и температура воздуха. Однако явным образом это было впервые установлено, по-видимому, после первой мировой войны [1]).

Начиная примерно с 1935 г. в связи с созданием скоростных самолетов, аэродинамики стали интересоваться моделированием по числу Маха. Аэродинамические трубы, работающие при скорости 30 *м/сек*, можно использовать для воспроизведения условий полета со скоростями до 120 *м/сек*, если регулировать должным образом «эффективное» число Рейнольдса, но в них вовсе не сказывается влияние сжимаемости, которое проявляется при бóльших скоростях. Поэтому начиная с 1935 г. аэродинамики и баллистики объединили свои усилия для изучения сжимаемых течений.

Впервые законы моделирования при сохранении числа Маха для политропного уравнения состояния вывел Ланжевен (см. прим. на этой стр.) при помощи «инспекционного анализа» уравнений движения *сжимаемого невязкого* газа без учета сил тяжести. Мы изложим результаты Ланжевена в несколько обобщенном виде.

Обращаясь снова к теореме 5, мы видим, что уравнение неразрывности инвариантно относительно всех преобразований подобия. Очевидно также, что любое заданное уравнение состояния (30) не изменяется ни при каком преобразовании, которое не изменяет p и ρ в соответствующих точках. Стало быть, оно не изменяется, в частности, при преобразованиях

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t \quad \text{если} \quad p, \rho, \mathbf{u} \quad \text{не изменяются.} \tag{34}$$

Инспекционный анализ указывает, что в уравнениях (23) слагаемые $Du_i/Dt = \sum u_k\, \partial u_i/\partial x_k + \partial u_i/\partial t$ и $\partial p/\rho \partial x_i$ при преобразовании (34) оба умножаются на $1/\alpha$. В результате получаем теорему.

Теорема 8. *Основные уравнения сжимаемого невязкого течения инвариантны относительно преобразования* (34).

Как показано в гл. I, эти основные уравнения не определяют корректно поставленную краевую задачу. По меньшей мере не-

[1]) Darrieus G., Mem. Art. Française, (1922), стр. 242; Hilliar H. W., *Dept. Sci. Res. Exp. Report RE* 142/19 (1919). Darrieus утверждает, что изменение дальности полета по этой причине может составлять примерно 1%. Работа Ланжевена, цитируемая ниже, напечатана сразу после работы Darrieus. Обоснованность моделирования по числу Маха показал Buckingham [48], стр. 275—278. О практической стороне дела см. Kent R. H., *Mech. Eng.*, September 1932.

обходимо добавить к ним уравнения Рэнкина — Гюгонио для ударных волн (§ 14). Однако поскольку последние уравнения можно вывести из уравнения состояния и законов сохранения массы, количества движения и энергии — а эти законы не изменяются при любом преобразовании вида (34), — то произойдет соответствующее изменение масштаба и в уравнениях Рэнкина — Гюгонио.

Закон изменения масштаба (34) справедлив также в теории упругости, теории пластичности и в динамике взрывных процессов [1]); он назван законом Кранца. Вообще он справедлив всегда, когда *тензор напряжений есть функция только от деформации* и не зависит от ее скорости, и всякий раз, когда в некотором напряженном состоянии освобождается определенная (в расчете на единицу объема) химическая энергия, как это требуется в условиях Чепмена — Жуге ([6], § 87). Любопытно, что этот закон справедлив также в *релятивистской* механике жидкостей.

Некоторые авторы хотели с помощью частного инспекционного анализа обосновать моделирование по числу Маха. Пусть $c = \sqrt{dp/d\rho}$ обозначает локальную скорость звука, и пусть C — скорость звука в невозмущенном потоке. Тогда, если пренебречь силами вязкости и тяжести и обозначить $M = V/C$, то соотношение (23) примет вид

$$\frac{du_i'}{dt'} + \sum \frac{u_k' du_i'}{dx_k} + \frac{1}{M^2}\left(\frac{c}{C}\right)^2 \frac{dp}{\rho\, dx_i} = 0. \tag{35}$$

Это дает следующее правдоподобное правило: *моделирование при постоянном числе Маха,* что для данного невозмущенного потока эквивалентно преобразованиям (34).

Однако в общем случае это правило оказывается *ложным,* если рассматривать различные газы (газы с разными уравнениями состояния (30)) или даже один и тот же газ, но при различных температурах и давлениях. Сравним, например, динамически подобные баротропные течения газа, у которых условия свободного потока отнесены к двум точкам на одной и той же адиабате. В силу уравнений (22), величины $\mathbf{u}$ и ρ всюду умножаются на постоянные множители. Поэтому в силу уравнения (35) $\operatorname{grad} p$ умножается на постоянный множитель $a(\alpha)$, где α — отношение плотностей в свободном потоке. Следовательно, если $F(\rho) = p(\rho) - p_f$ (p_f — давление в свободном потоке), то $F(\alpha\rho)/F(\rho) = a(\alpha)$ не зависит от ρ. Таким образом, для всех ρ, ρ', α справедливо $F(\alpha\rho)/F(\rho) = F(\alpha\rho')/F(\ ')$. Но это, очевидно,

[1]) См. [10], стр. 195; Schardin H., *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 223—243.

эквивалентно соотношению (16) из § 64. Отсюда по теореме 4 $F(\rho) = k\rho^{\gamma}$ и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы модели сжимаемых потоков по числу Маха были динамически подобны при любых условиях в невозмущенном потоке, уравнение состояния должно иметь специальный вид*:

$$p = k\rho^{\gamma} + \text{const}. \tag{36}$$

При этом достаточно, чтобы γ было одним и тем же вдоль всех адиабатических кривых. Обобщение на неадиабатические течения очевидно.

Линеаризованное моделирование по Маху. Интересный пример аффинного моделирования дает линеаризованное приближение (Прандтля — Глауэрта) стационарного сжимаемого обтекания тонких тел, уже описанное в § 10—11. Возмущение φ потенциала скоростей $U = ax + \varphi(x, y, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [гл. I, (14*)]

$$(M^2 - 1)\varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \quad M = \frac{a}{c}. \tag{37}$$

В *дозвуковом* случае ($M < 1$) оно эквивалентно уравнению $\nabla'^2 \varphi = 0$, где $\nabla'^2 = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ и $x' = x/\sqrt{1 - M^2}$, в силу чего этот случай *аффинным* преобразованием сводится к случаю *несжимаемого* потока.

В *сверхзвуковом случае* ($M > 1$) мы подобным же образом приводим это уравнение к виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}, \quad [k = \sqrt{M^2 - 1}], \tag{37'}$$

что представляет собой *волновое* уравнение. В обоих случаях мы получаем *при соответствующих числах Маха аффинно подобные течения для аффинно эквивалентных моделей.* Случай звуковой скорости нужно рассматривать отдельно ([10], разд. 9.6).

Таким образом, для аффинно подобных течений изменение значения M эквивалентно (по крайней мере в теории [1])) изменению «отношения толщин». Следовательно, за исключением обыкновенного моделирования по Маху (35), можно изменять масштабы в двух перпендикулярных направлениях независимо друг от друга, так же как в теории длинных волн.

[1]) Учитывая § 12, к этой теории нужно относиться несколько критически. Она не рассматривает ударных волн.

Моделирование двойных соударений [1]). Преобразование расстояний и плотности в обратном отношении при сохранении скорости и температуры

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t, \quad u_i \to u_i, \quad \rho \to \rho/\alpha, \quad \theta \to \theta$$

обладает некоторыми необычными свойствами. В совершенном газе (§ 3,14) оно сохраняет неизменным удельную теплоемкость C_v, адиабатическую постоянную γ и скорость звука в окружающей среде C. Следовательно, оно сохраняет число Маха $M = V/C$.

Кроме того, это преобразование согласуется и с кинетической теорией газов, если рассматривать только двойные соударения молекул. Следовательно, оно сохраняет неизменными вязкость μ, проводимость $\varkappa$, а среднюю длину свободного пробега молекулы λ изменяет в отношении $1 : \alpha$. Значит, оно сохраняет также число Рейнольдса $\mathrm{Re} = VL\rho/\mu$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = C_p\mu/\varkappa$ и число Кнудсена λ/L. Таким образом, оно пригодно для моделирования сжимаемости, явлений ударных волн, явлений вязкости, повышения температуры вследствие нагрева пограничного слоя и явлений в разреженном газе (большая средняя длина свободного пробега).

Наконец, данное преобразование сохраняет все вторичные процессы химической кинетики, следовательно, оно пригодно для моделирования многих явлений, рассмотренных в § 34, которые не укладываются в рамки механики континуума. С другой стороны, оно имеет то большое преимущество, что позволяет воспроизводить путем моделирования многие аэротермодинамические явления, протекающие в верхних слоях атмосферы, при испытаниях на моделях небольших размеров вблизи поверхности земли.

§ 74. Асимптотическое изменение масштаба

Аффинное моделирование — как и в теории тонких тел — можно формально рассматривать в рамках анализа размерностей, приписывая разные «размерности» длинам в разных направлениях [2]).

Однако гораздо более действенным является метод инспекционного анализа, который показывает, что такой «анализ размерностей» обычно равносилен особой *теории возмущений*, т. е. асимптотическому инспекционному анализу.

[1]) Неопубликованная работа автора и Эккермана из AVCO Corp.

[2]) См. Williams W., *Phil. Mag.*, **34** (1892), 234—271; Moon P., Spencer D. E., *J. Franklin Inst.*, 248 (1949), 495—522. Часто методы возмущений сами не могут быть строго обоснованы.

Мы рассмотрели случай линеаризованного моделирования по числу Маха. Сейчас мы приведем несколько примеров применения той же идеи.

Быть может, наиболее важным примером служат уравнения *пограничного слоя* Прандтля для ламинарного течения вблизи гладкой твердой границы (§ 27). Так, стационарное плоское течение в пограничном слое определяется [гл. II (14)] уравнениями

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{38}$$

и краевыми условиями $u(x,0)=0$, $u(x,\infty)=u_\infty$.

Эти уравнения, выведенные в приближении, когда толщина пограничного слоя считается бесконечно малой, инвариантны относительно группы аффинных преобразований вида

$$x\to\beta^2 x,\quad y\to\beta y,\quad u\to u,\quad v\to\beta^{-1}v, \tag{39}$$

а также относительно группы, определяющей моделирование по числу Рейнольдса.

Другой пример дает теория безвихревых гравитационных волн в мелких водоемах с медленно изменяющейся глубиной h. В самом грубом приближении средняя скорость частицы $u(x,t)$ в этих «волнах на мелководье» для двумерного движения [58, разд. 2.2] удовлетворяет уравнению

$$u_{tt}=g(hu)_{xx}. \tag{40}$$

Частный инспекционный анализ показывает, что уравнение (40) инвариантно относительно преобразования

$$t\to\beta t,\quad h\to\beta^{-2}h \tag{41а}$$

при любом $\beta>0$. Так как уравнение (40) однородно и линейно, то оно инвариантно также относительно преобразований

$$u\to\delta u+\varepsilon \quad \text{при любых} \quad \delta>0 \quad \text{и} \quad \varepsilon. \tag{41б}$$

Как уже было отмечено в § 15, волны на мелководье можно представить более точно уравнениями политропного течения при $\gamma=2$. Из сказанного в § 73 следует, что они инвариантны при всех изменениях масштаба вида

$$\mathbf{x}\to\alpha\mathbf{x},\quad t\to\alpha t,\quad \mathbf{u}\to\mathbf{u},\quad \rho\to k\rho. \tag{41в}$$

В гл. V мы покажем, как с помощью таких групп можно получать в явном виде частные решения краевых задач.

Здесь же мы главным образом рассматриваем применения теории моделирования. Ее важным приложением является обоснование изменения вертикального масштаба в гидравлических моделях [1]). Мы рассмотрим этот вопрос в § 77.

§ 75. Аэродинамические трубы

В настоящее время многие ведущие лаборатории в первую очередь занимаются проведением и истолкованием опытов на моделях. В связи с этим на практике были выработаны некоторые простые положения относительно подобия, вроде описанных в этой главе. Однако первоначально простые идеи были значительно усовершенствованы с развитием этих работ, и мы получили бы весьма искаженное представление о моделировании, если бы не рассмотрели некоторые практические аспекты этой темы. Поэтому в заключение мы дадим краткий исторический обзор развития экспериментальной техники некоторых специальных видов моделирования.

Аэродинамические трубы представляют, быть может, наиболее совершенные устройства для проведения экспериментов с моделями. Полученные в них данные первоначально истолковывались только с помощью инерциального масштабирования, например в случае замеров коэффициентов C_D, C_L, C_M для препятствия или крыла заданной *формы* при заданном угле атаки. К тому же, эти грубые данные требовали «поправок тарирования» на влияние державок модели, а также поправок на влияние стен и падение давления (§ 102). Поскольку опыты проводились при различных числах Рейнольдса, часто возникали расхождения, в особенности в окрестности $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, и конкурирующие лаборатории иногда заявляли, что это результат ошибок эксперимента [2]).

Остроумная идея, позволяющая получать разные числа Re на малых моделях, состоит в том, чтобы использовать аэродинамические трубы с переменной плотностью ([3], разд. 102); так как вязкость μ не зависит от давления, то число $\mathrm{Re} = VL/\nu = \rho VL/\mu$ пропорционально плотности.

Однако опыты показывают, что идеи, изложенные в § 71, не безупречны и в том отношении, что турбулентность в аэродинамической трубе может влиять на величину $C_D(\mathrm{Re})$. Чтобы это учесть, было предложено для всякой данной аэродинамической трубы определить такой множитель λ, чтобы в этой трубе

[1]) Craya A. [50], Doodson A. T. [51], стр. 148.

[2]) По воспоминаниям профессора В. Прагера. Конечно, шероховатость модели также представляет собой параметр, который подлежит учету.

«эффективное» число Рейнольдса $Re_{эф.}$ было равно $\lambda VL/\nu$. В настоящее время в связи с созданием аэродинамических труб натуральных размеров с малой турбулентностью, не говоря уже об исследованиях в свободном полете и о стандартных наборах профилей, эксперименты в аэродинамических трубах с малой скоростью в значительной мере избавились от былой своей неопределенности.

Техника использования *сверхзвуковых* аэродинамических труб имеет гораздо меньшую историю. Первые такие трубы были введены в действие во время второй мировой войны, и их бичом было непредвиденное возникновение скачков конденсации и даже образование снега — явления, которые трудно исследовать с помощью только анализа размерностей.

Анализ размерностей указывает на то, что в сверхзвуковых аэродинамических трубах (и во внешней баллистике) нужно считать C_D функцией от чисел M и Re. Однако практически число Рейнольдса, по-видимому, играет второстепенную роль, вопреки широко распространенной противоположной точке зрения [1]). Так, поверхностное трение обычно составляет только 10% от полного сопротивления при движении снаряда, а это, скорее всего, именно та составляющая, на которую влияют шероховатость поверхности и вязкость. Однако величина $Re_{эф.}$ оказывает влияние и на различные менее существенные явления, скажем, на толщину ударных волн и на λ-образные ударные волны, открытые Аккеретом [2]).

§ 76. Опытовые бассейны

Наиболее важным применением моделирования по числу Фруда являются испытания моделей судов, хотя оно также применяется при моделировании волн и сейшей, вхождения в воду (§ 78) и используется для гидравлических турбин, имеющих свободную поверхность [3]).

Уже давно спорят о том, кого надо считать автором «моделирования по числу Фруда» при исследовании на моделях сопротивления судов, — Рича или Фруда. Поскольку факты довольно любопытны, мы приведем их.

---

[1]) Теоретические выводы в The Mechanical Properties of Fluids, Blackie и др., 1935, основаны на одной-единственной таблице, приведенной на стр. 37 в [5]. В баллистических опытах, проведенных в США, не обнаружили чего-либо даже отдаленно напоминающего данные этой таблицы.

[2]) Ackeret J., *Mitt. Inst. Aerodynamik Zürich*, № 10, 1944.

[3]) См. Bertrand J., *J. de l'Ecole Polyt.*, 19 (1948), 189—197.

В 1831 г. Рич [1]) предложил в точности то, что обычно называют «законом Фруда», а именно испытывать модели кораблей при равных числах Фруда и оценивать сопротивление объекта с помощью преобразования подобия (22). Большая заслуга Фруда состоит в том, что он пошел дальше этого простого закона.

У большинства торговых кораблей 90% величины сопротивления приходится на трение, и, следовательно, для них пригодно не моделирование по числу Фруда, а моделирование по числу Рейнольдса. Чтобы оценить сопротивление корпуса корабля по испытаниям на моделях, нужно его представить в виде двух составляющих: волновое сопротивление и сопротивление трения. Впервые это было предложено в 1874 г. Фрудом [2]), и это основное допущение можно представить в виде формулы

$$C_D = C_W(\mathrm{Fr}) + C_f(\mathrm{Re}). \tag{42}$$

А у торговых кораблей обычно превалирует $C_f(\mathrm{Re})$!

Однако точные «законы» моделирования еще далеко не выяснены. Начиная с 1935 г. $C_f(\mathrm{Re})$ обычно расчленяют на «поверхностное трение» и «сопротивление формы» (сопротивление, вызванное наличием следа или вихрей).

Переход от сопротивления формы модели к моделируемому сопротивлению в значительной мере основывается на личной интуиции исследователя. Начиная примерно с 1945 г. обычным приемом стало создание искусственной шероховатости поверхности модели, с тем чтобы получить «эффективное число Рейнольдса» $\mathrm{Re}_{эф.}$ и коэффициент сопротивления формы более близкими к соответствующим коэффициентам для реального корабля. Автору не известен ни один теоретический принцип, позволяющий определить, какая именно требуется шероховатость модели, особенно если учесть, что «обрастание» корпуса сильно изменяет поверхностное сопротивление трения у реального корабля за время его службы.

Недавно было предложено *вычислять* волновое сопротивление корабля теоретически, а сопротивление трения (и формы) рассматривать как некий остаток. Такие вычисления пока не проведены: нелинейность краевых условий на «свободной границе» делает их устрашающими.

В случае линеаризованного приближения «тонкого корабля» (§ 74) теоретическое вычисление коэффициента $C_W(\mathrm{Fr})$ приводит к пятикратному интегралу (интеграл Мичелла). В несколь-

[1]) Reech F., Cours de l'Ecole d'Application du Génie Maritime, Lorient, 1831.

[2]) *Trans. Inst. Nav. Arch.*, 15 (1874), 36—59.

ких простых случаях он был подсчитан. Однако до сих пор не ясно, чем объясняется расхождение между вычисленным значением $C_W(\mathrm{Fr})$ и получаемым из опытов значением $C_D - C_f(\mathrm{Re})$ — нелинейностью или наличием следа [1]).

§ 77. Модели рек и гаваней

Объяснение результатов, полученных при моделировании гаваней, рек, устьев, плотин, водосливов и т. д. [2]), еще более зависит от практического опыта и интуиции. Достаточно сложно также моделирование потока жидкости в так называемых «неподвижных ложах»; еще более трудно с помощью простых математических понятий инспекционного анализа осуществить моделирование эрозийного действия и отложений в случае «подвижного ложа».

При изучении движения жидкости на малых моделях неподвижных русел в первом приближении можно использовать моделирование по числу Фруда. Это значит, что если уменьшение длин равно $L:1$, то скорость должна уменьшиться в отношении $\sqrt{L}:1$, а объемный расход — в отношении $L^{5/2}:1$, как предполагалось в § 72, но все это весьма приближенно. (Периоды отливов и приливов тоже изменяются в отношении $\sqrt{L}:1$.)

Однако практика моделирования по числу Фруда скоро заставляет признать необходимыми различные ограничения. Так, затухание волн и другие эффекты вязкости оказываются завышенными на моделях малых размеров. В небольших моделях гаваней волны не разбиваются так, как настоящие волны: решающим оказывается действие капиллярности [3]). Кроме того, захват воздуха в небольших по размеру моделях водосливов и водопадов гораздо меньше, чем в естественных условиях [4]).

Более важен тот факт, что (§ 71) силы вязкости в моделях относительно велики и, следовательно, турбулентность («вихревая вязкость») сравнительно с ними мала. Чтобы этого избежать, обычно в моделях *индуцируют* турблентность, искусственно увеличивая шероховатость поверхностей или даже создавая

[1]) Birkhoff G., Kotik J., Korvin-Kroukovsky B. V., *Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Eng.*, 62 (1954), 359—396.

[2]) Компетентное изложение обычных подходов см. Warnock H., Engineering Hydraulics, Hunter Rouse ed., гл. II; см. также Am. Soc. Civ. Eng. Manual of Engineering Practice, № 25.

[3]) Чтобы их моделировать, нужно оставлять неизменным «число Вебера» $W = \gamma/\rho V^2 L$, где γ — поверхностное натяжение [см. Bashforth, Adams, Capillary Action (1883 г.)].

[4]) См. Escande L., Génie Civile, 16 dec. 1939; Camichel C. and Escande I., Similitude Hydrodynamique et Technique des Modèles Reduits, Paris, 1938 (редкая книга).

препятствия движению жидкостей в виде вертикальных пластинок или жестких проволочных сеток. Это увеличивает вихревую вязкость, так что силы вязкости в модели становятся даже относительно бóльшими, чем в других условиях.

Впрочем, при достаточно больших числах Рейнольдса, такую до некоторой степени парадоксальную практику можно частично обосновать с помощью инспекционного анализа, на что указал автору С. Рой. В указанных условиях силы вязкости гораздо меньше, чем «напряжения Рейнольдса» $\overline{u_i' u_j'}$, где $\mathbf{u}'$ — вектор турбулентной скорости, а черта означает усреднение (см. [5], стр. 192). Поэтому, если относительная турбулентность во всех точках одна и та же, можно рассчитывать на то, что распределения средних скоростей на модели и в натуре сходны.

Перенос твердых частиц (загрязнений, песка, гравия) движущейся водой в силу его большого практического значения для рек, гаваней и устьев часто изучают на моделях типа «подвижного ложа». Использование таких моделей требует большого индивидуального искусства и связано с очень тонкими соображениями [1]).

Моделирование по числу Фруда весьма приближенно сохраняет как скорости, вызванные силой тяжести, так и волновые движения (в моделях гаваней), но только в случае турбулентного режима течения или в случае, когда можно пренебречь вязкостью [2]).

На модели часто завышают относительные размеры частиц, отчасти, чтобы избежать силы сцепления, отчасти, чтобы сохранить число Re, а также, чтобы облегчить изготовление модели. Такое завышение размеров препятствует увлечению частиц модели водой. Это явление компенсируется [3]) уменьшением их отрицательной плавучести $\rho_1 - \rho$.

Заслуживает упоминания также обычное в таких моделях использование *различных масштабов по горизонтали и по вертикали.* В Англии принято завышать вертикальный масштаб (следуя Рейнольдсу и Гибсону), чтобы избежать чрезмерного мелководья. Обоснованность такого завышения часто оспарива-

---

[1]) Подробное рассмотрение некоторых трудностей можно найти в работе *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 71 (1944), *Trans.* № 3, ч. 2. В некоторых моделях приливов силу Кориолиса нужно моделировать посредством изменения кривизны русла; см. [49], стр. 78.

[2]) Можно завысить наклон дна реки или устья, чтобы получить подходящие средние скорости течения, когда число Re мало. Шероховатость представляет собой важный фактор.

[3]) См. Camichel C., Escande L., *Comptes Rendus*, 199 (1934), 992. Отличное изложение законов масштабирования в случае переноса нила см. Einstein H. A., Müller R., *Schweiz. Archiv*, 5 (1939), № 8.

лась [1]) во Франции, где имеется тенденция применять модели больших размеров. Это можно истолковать как нечто вроде асимптотического масштабирования (§ 74).

На практике при изучении гидравлических моделей рек и гаваней редко обращаются к теоретическим доводам. Надежности добиваются тем, что воспроизводят различные аспекты режима, наблюдаемого в реальных условиях. При этом надеются, что изменения в условиях обтекания также будут воспроизведены в новом масштабе — хотя не имеется никаких теоретических доводов в поддержку такого предположения.

§ 78. Моделирование входа в воду

Для подводной баллистики может иметь большое значение моделирование явлений поверхностного и глубинного смыкания, которые сопровождают вход в воду, как указано в § 53. Поэтому возникает проблема, как воспроизвести эти явления в другом масштабе.

На основании экспериментальной аналогии можно поддаться искушению использовать попросту моделирование по числу Фруда с пониженным давлением при постоянных числах Fr и Q или Q^*; и действительно, такое предложение было сделано. Однако мы рады заявить, что на этот раз правильное решение в случае поверхностного смыкания, по-видимому, было дано не инженером, исходившим из физического опыта, а с помощью инспекционного анализа «математиком в его кабинете», именно автором этой книги [2]). Решение было подсказано следующими соображениями.

Простое размышление приводит к мысли, что поверхностное смыкание обусловлено плотностью воздуха: имеет место снижение давления в горловине каверны на величину $\rho' v'^2/2$ (ρ' — плотность воздуха, v' — скорость воздуха), и это вызывает всплеск и сужение горловины. Такое явление невозможно воспроизвести на модели, если плотность ρ' уменьшается вследствие понижения давления; но если давление не понижается, то, по-видимому, не моделируются размеры пузыря, образующегося после смыкания каверны.

---

[1]) Camichel C., Fischer E., Escande L., *Comptes Rendus*, **199** (1934), 594. Экспериментальный контрпример, приведенный ими, не является примером почти горизонтального потока.

[2]) Birkhoff G., Modeling of entry into water, Applied Math. Panel, National Defense Research Council, May, 1945 (рассекречено); Waugh J. C., Stubstad G. W., Water-entry cavity modeling, *Navord Rep.* **5365**, December, 1957. Относительно моделирования входа твердого тела в воду см. также May A., *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 127—139; Levy J., Rep. E-12.19, Hydrodynamics Lab., Caltech., August 1956.

Поскольку мы имеем дело не с водяным паром, уравнение состояния уже не имеет вида (33), а выражается приближенно соотношением

$$p' = k\rho'^{\gamma}. \tag{43}$$

Приближенно это уравнение удовлетворяется для подводных пузырьков газа, и если только мы не имеем дела с насыщенным газом, равенство $p' = p_v + k\rho'^{\gamma}$ не выполняется. По этой причине надо использовать число Q^* вместо числа Q.

С математической точки зрения, уравнения неразрывности, состояния и движения сохраняются при преобразовании

$$\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}, \quad t_1 = \sqrt{\alpha}\, t, \quad \mathbf{u}_1 = \sqrt{\alpha}\, \mathbf{u}, \quad p_1 = \alpha p,$$
$$p'_1 = \alpha p', \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho'_1 = \rho', \quad k_1 = \alpha k,$$

где индексом обозначены преобразованные переменные. Итак, мы можем получить модель, если у нас будет газ, уравнение состояния которого имеет вид $p'_1 = \alpha k \rho_1'^{1,408}$, где $p' = k\rho'^{1,408}$ есть уравнение состояния воздуха. Таким газом, например, вполне может быть воздух при низкой температуре, но это непрактично с технической точки зрения.

По-видимому, практичнее использовать фреон или какой-либо другой «тяжелый газ», у которого $\gamma \neq 1{,}4$, но плотность которого в несколько раз больше плотности воздуха при пониженном давлении и при температуре атмосферы; в малом масштабе такое моделирование было выполнено (ср. [29]). Остается только выполнить моделирование ρ и $dp/d\rho$ для газа.

Моделирующий процесс, описанный выше, по-видимому, не отражает глубинного смыкания. Если оно представляет собой эффект вязкости, как мы предположили в § 53, его можно моделировать, лишь сохраняя число Re, что практически невозможно. Однако, поскольку максимально возможное понижение давления уменьшается до нуля вместе с Q^* (в предположении, что растяжение $p < 0$ невозможно в течение рассматриваемого промежутка времени), глубинное смыкание должно получаться хотя бы и не совсем точно при моделировании по числу Фруда с пониженным давлением, с применением или без применения тяжелого газа.

Необходимость более аккуратного анализа, чем обычный анализ размерностей, видна и на примере безразмерного параметра $N = \sqrt{\mathrm{Fr}}\, \rho'/\rho$. Этот параметр, как недавно [1]) было

[1]) Birkhoff G., Isaacs R., Transient cavities in air-watter entry, *Navord Rep.*, **1490**, January 1951.

показано, весьма приближенно определяет вид смыкания при входе в воду: поверхностное или глубинное.

Использование параметра N в качестве необходимого критерия доказывают следующие опытные данные. Согласно экспериментам время $T_{г.с.}$, необходимое для глубинного смыкания, в грубом приближении пропорционально величине $\sqrt{L/g}$. С другой стороны, установлено (например, с помощью инспекционного анализа инерциального механизма поверхностного смыкания), что продолжительность $T_{п.с.}$ поверхностного смыкания пропорциональна $\rho L/\rho' V$, где L — характерная длина, а V — характерная скорость. Поэтому для поверхностного смыкания условие $T_{г.с.} > T_{п.с.}$ принимает вид $N > N_{кр.}$.

При обычном использовании анализа размерностей мы пришли бы к выводу, что средние разности давлений, вызывающие поверхностное и глубинное смыкание, должны быть пропорциональны соответственно величинам $\rho' V^2/2$ и $2\rho g L$, а это привело бы к предложению использовать безразмерное отношение $N' = \mathrm{Fr}\,\rho'/\rho$ в качестве критерия поверхностного смыкания. Последнее резко расходится с наблюдениями.

Глава V

ТЕОРИЯ ГРУПП И ГИДРОМЕХАНИКА

§ 79. Введение

В гл. IV было показано, что понятие группы ценно для гидромеханики в трех отношениях. Во-первых, это понятие помогает математически обосновать моделирование с помощью инспекционного анализа, который более соответствует сути дела, чем обычно применяемый анализ размерностей. Во-вторых, с помощью понятия группы можно проверять справедливость математических теорий гидромеханики даже в тех случаях, когда невозможно проинтегрировать теоретически выведенные уравнения в частных производных. И наконец, как и анализ размерностей (но более общим образом), оно часто дает средство снизить число подлежащих рассмотрению параметров; тем самым понятие группы вносит значительные упрощения.

Теперь мы обсудим возможности применения этого понятия к *интегрированию* дифференциальных уравнений гидромеханики и, конечно, уравнений математической физики вообще. Большая часть того, что мы намерены высказать в связи с этим, в том или ином виде уже имеется в других работах. Но если, как мы полагаем, применение понятия группы в теории дифференциальных уравнений только начинается, то, по-видимому, целесообразно свести воедино относящиеся к этому вопросу соображения.

Сначала мы опишем то, что можно назвать методом *поиска симметричных решений* уравнений в частных производных. Предположим, что система уравнений в частных производных Σ инвариантна над группой G, элементами которой являются входящие в систему зависимые и независимые переменные. Метод состоит в отыскании решения, инвариантного над некоторой подгруппой группы G. Другими словами, он состоит в отыскании *автомодельных* решений, обладающих *внутренней симметрией* относительно G.

Этот метод так часто применялся при решении отдельных физических задач, что удивительно, почему он не был более

отчетливо сформулирован гораздо раньше [1]). Мы покажем сейчас его эффективность на нескольких частных примерах.

§ 80. Симметричные решения уравнения теплопроводности

Метод «поиска симметричных решений» применим к континуальной физике вообще. Совсем просто его применение к уравнению диффузии; и это мы рассмотрим прежде всего. Для плоско-параллельного течения уравнения Навье — Стокса сводятся к уравнению диффузии [2]), но наиболее известно применение уравнения диффузии в теории теплопроводности. Ввиду того что переносу тепла и переносу количества движения в вязкой жидкости соответствует одна и та же группа симметрии, в некоторых задачах, относящихся *и* к теплопроводности *и* к конвекции, можно применять аналогичные рассуждения. Например, можно рассматривать задачи с изменением фазы на подвижных границах (задача Стефана) или задачи о росте сферических пузырьков пара в равномерно перегретой воде.

Итак, рассмотрим диффузию тепла из *точечного источника* в среде с постоянной теплопроводностью $\varkappa$. Уравнение теплопроводности для твердых тел имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 U = \varkappa \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}, \qquad (n = 1,\ 2 \text{ или } 3), \tag{1}$$

где U — температура в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в момент времени t.

Ввиду сферической симметрии задачи будем искать решение вида $U(r, t)$, где $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Этим исчерпывается использование в задаче чисто *геометрической симметрии* явления. Но тут еще имеется *физическая симметрия* в том смысле, что дифференциальное уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований пространства, времени и температуры

$$r' = \alpha r, \qquad t' = \alpha^2 t, \qquad U' = \beta U + \gamma, \tag{1*}$$

зависящей от трех произвольных параметров α, β, γ. Этой группой обобщается классический закон времени, согласно которому

[1]) Впервые он был высказан Бехертом [62]. Более полная формулировка была дана Л. И. Седовым [72] и [57], гл. IV, § 1; см. также К. П. Станюкович [73] и [74].

[2]) [7], п. 345—347. Результаты этого параграфа были опубликованы в [63], прежде чем нам стало известно о работах, названных в примечании 1. Относительно применения к исследованию роста пузырьков пара см. Birkhoff G., Horning W. A., Margulies R., *Physics of Fluids*, 1 (1958), 201—204.

время, требующееся для распространения тепла, пропорционально квадрату расстояния. При любом положительном числе m трехпараметрическая группа (1*) содержит однопараметрическую подгруппу, определяемую соотношениями

$$r' = \alpha r, \qquad t' = \alpha^2 t, \qquad U' = \alpha^m U. \tag{2}$$

Так как $\gamma = 0$, то эта подгруппа сохраняет следующее краевое условие $U(\infty, t) = 0$. *Мы будем искать решения $U(r, t)$ уравнения* (1), *инвариантные относительно подгрупп вида* (2).

В рассматриваемом случае, ввиду того что группа (2) состоит из скалярных умножений, можно применить П-теорему. Переменные $\chi = r^2/t$ и $U/t^{m/2}$ инвариантны относительно преобразований (2). Поэтому, согласно П-теореме, всякое решение (1), инвариантное относительно преобразований (2), должно иметь вид

$$U = t^{m/2} f(\chi), \quad \chi = r^2/t. \tag{3}$$

В § 89 мы покажем, что уравнение (1) всегда имеет решения симметричной формы (3) (автомодельные), по крайней мере локально.

Пока мы ограничимся исследованием одного частного случая. Подставляя соотношение (3) в уравнение (1) и деля на подходящую степень величины t, получаем уравнение

$$4\varkappa\chi f'' + (2\varkappa n + \chi) f' - \frac{m}{2} f = 0. \tag{4}$$

Переход к переменной $\xi = r^2/4\varkappa t$ (которая *безразмерна* в обычном смысле, т. е. инвариантна относительно группы преобразований (22) из гл. IV) дает более простые выражения:

$$U = t^{m/2} F(\xi), \quad \text{где} \quad \xi F_{\xi\xi} + \left(\xi + \frac{n}{2}\right) F_\xi - \frac{m}{2} F = 0. \tag{4'}$$

После подстановки $x = -\xi$ последнее уравнение переходит в конфлуэнтное гипергеометрическое уравнение[1]). Однако не это главное; главное то, что *решения уравнения* (1) *можно найти, интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение,* что всегда можно проделать численно.

Не все «симметричные» решения уравнения (1) [т. е. (4)] представляют одинаковый физический интерес. Преимущественно интересны решения, для которых $U \to 0$ при $r \to \infty$, так что

$$\lim_{\chi \to \infty} f(\chi) = 0.$$

[1]) Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 2-е, М., Физматгиз, 1961, уравнение 2.113.

Нас также интересует *полное количество тепла,* которое пропорционально интегралу $\int_0^\infty U(r, t) r^{n-1}\, dr$, а следовательно, и величине $\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}$, или $t^{(m+n)/2}$.

В частности, интересен случай, когда полное количество тепла *постоянно,* что соответствует распространению ограниченного количества тепловой энергии из начала координат. Тогда $m = -n$; если положить $n = 2h$, то уравнение (4′) после приведения подобных членов сводится к виду

$$0 = \xi F_{\xi\xi} + (\xi + h) F_\xi + hF = \xi (F_\xi + F)_\xi + h (F_\xi + F), \quad h = \frac{n}{2}. \qquad (4^*)$$

Уравнение (4*) можно проинтегрировать в замкнутом виде. Чтобы получить $U(\infty, t) = 0$, функции F и F_ξ должны стремиться к нулю при $\xi \to +\infty$, и, следовательно, $F(\xi) = e^{-\xi}$. Мы получили решение Лапласа

$$U = Ct^{-n/2} e^{-r^2/4xt}, \qquad (5)$$

которое в большинстве учебников выводится с помощью преобразования Фурье.

Другой интересный случай — это случай *точечного источника,* выделяющего тепло (за счет химического или радиоактивного процесса) с постоянной скоростью начиная с момента $t = 0$. Здесь $m + n = 2$, т. е. $m = 2 - n$, вследствие чего уравнение (4′) принимает вид

$$\xi F_{\xi\xi} + (\xi + h) F_\xi + (1 - h) F = 0, \quad h = \frac{n}{2} = \frac{1 - m}{2}.$$

Интегралы такого вида конфлуэнтного гипергеометрического уравнения (они были получены другим путем) могут быть выражены в замкнутом виде [1]). Однако это не столь важно, как то обстоятельство, что полученное дифференциальное уравнение является обыкновенным.

§ 81. Спиральные течения вязкой жидкости

Теперь мы проиллюстрируем метод «поиска симметричных решений» на классическом примере «спиральных течений» несжимаемой вязкой жидкости. Впервые окончательные формулы

[1]) См. Carslaw and Jaeger, «Conduction of Heat in Solids». Особенно прост случай $n = 2$, так как тогда $(1 - h) = 0$. [На русск. яз. Карслоу, Теория теплопроводности, М.—Л., ГТТИ, 1947. — *Прим. перев.*]

были получены Джеффри и Хамелем [1]). Наибольшее значение для приложений имеют частные случаи вырождения: радиальное течение в канале и круговое течение Куэтта. Все же мы рассмотрим общий случай, так как он представляет интерес с математической точки зрения.

Хорошо известно, что в случае плоских несжимаемых потоков уравнение неразрывности эквивалентно введению «функции тока» $V = \int (u\,dy - v\,dx)$, так что $(\partial V/\partial y, -\partial V/\partial x)$ есть вектор скорости. Тогда выражение $-\nabla^2 V = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ дает *завихренность*. Кроме того, уравнения движения Навье — Стокса для таких плоских течений эквивалентны [2]) уравнению

$$\nu\nabla^4 V = \frac{\partial(\nabla^2 V,\ V)}{\partial(x,\ y)} = \frac{1}{r}\frac{\partial(\nabla^2 V,\ V)}{\partial(r,\ \theta)} = \\ = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial \theta}\right], \tag{6}$$

где $\partial(p,\ q)/\partial(x,\ y) = p_x q_y - q_x p_y$ — обычное обозначение якобиана, а ν, как обычно, кинематическая вязкость μ/ρ.

Анализ размерностей показывает, что при геометрически подобных условиях поведение несжимаемых вязких жидкостей зависит только от безразмерного параметра Re. Теперь мы будем искать *автомодельные* плоские течения для однопараметрических подгрупп группы подобия

$$r' = e^{\alpha} r, \qquad \theta' = \theta + \beta.$$

Это значит, что мы будем рассматривать течения, инвариантные относительно некоторой *спиральной* подгруппы

$$r' = e^{\alpha} r, \qquad \theta' = \theta + c\alpha, \tag{7}$$

где параметр c характеризует спираль.

Преобразования (7) переводят плоскость саму в себя. Так как ρ постоянно, формулы (7) дают автомодельное движение при постоянном числе Re тогда и только тогда, когда значения ru_r и ru_θ в соответствующих точках одинаковы. Но дифференциалы значений функции тока V пропорциональны произведениям расстояний на скорости, так как $dV = (\partial V/\partial x)dx + (\partial V/\partial y)dy$. Поэтому дифференциалы V будут *инвариантны* относительно спиральной группы (7). Итак, при заданном в полярных коорди-

---

[1]) Jeffery G. B., *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 327—338; Hammel G., *Jahr. Deutsche Math. Ver.*, **25** (1916), 34—60.

[2]) Это можно вывести из гл. II (11), так как $\operatorname{rot} \mathbf{g} = 0$ в консервативном поле и $\xi \cdot \nabla = 0$ в силу того, что $\xi_1 = \xi_2 = \partial/\partial z = 0$. Этот результат можно найти также в [8], стр. 573, пример 7.

натах соотношении $(r, \theta) = (e^{\lambda}, \theta)$ посредством преобразования (7) при $a = -\lambda$ получаем соотношения

$$V(e^{\lambda}, \theta) - V(e^{\lambda}, c\lambda) = V(1, \theta - c\lambda) - V(1, 0) = F(\chi), \quad \chi = \theta - c\lambda. \tag{8}$$

По той же причине в случае автомодельных относительно группы (7) течений равные изменения λ вызывают равные изменения $V(e^{-\lambda}, c\lambda)$; поэтому $V(e^{\lambda}, c\lambda) = a\lambda + b$ есть линейная функция от λ. (Постоянная b не влияет на скорость, и ее можно положить равной нулю.) Комбинируя этот результат с соотношением (8), мы получим формулу

$$V(r, \theta) = a\lambda + F(\chi), \quad \lambda = \ln r, \qquad \chi = \theta - c\lambda. \tag{9}$$

Согласно этой формуле, течение определяется произвольной постоянной a и функцией одной переменной F. Наиболее интересен случай, когда *линии тока — спирали*, т. е. когда $a = 0$ в формуле (9).

Как и раньше, мы сделаем подстановку в дифференциальное уравнение общего вида (6); далее следуют выкладки.

В общем виде получается уравнение

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right). \tag{10}$$

откуда, в силу формулы (9), $\nabla^2 V = e^{-2\lambda}(c^2+1)F''$.
Снова дифференцируя, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}(\nabla^2 V) &= -e^{-2\lambda}(c^2+1)[cF''' + 2F''], \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2 V) &= e^{-2\lambda}(c^2+1)F'''. \end{aligned} \tag{10'}$$

Из формулы, дающей отношение площадей в якобианах, $\partial/\partial(x, y) = r^{-2}\partial/\partial(\lambda, \theta)$ следует, что уравнения Навье — Стокса (6) эквивалентны уравнению

$$\frac{\nu}{r^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\nabla^2 V\right] = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial\lambda} - \frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial\theta}\right].$$

Выполняя указанные действия, используя равенства (10), (10') и сокращая на общий множитель $(c^2+1)/r^4 = e^{-4\lambda}(c^2+1)$, мы получаем уравнение

$$\nu[(c^2+1)F^{IV} + 4cF''' + 4F''] + aF''' + 2F'F'' = 0. \tag{11}$$

Это и есть обыкновенное дифференциальное уравнение, полученное Озееном [1]); трудно найти другой столь же простой его вывод. С помощью подстановки $G = F'$ можно придать уравнению (11) несколько более привлекательный вид; кроме того, оно удовлетворяется всегда, когда $F''' = 0$. Во всяком случае, решения можно получать численным интегрированием.

§ 82. Пограничные слои у клиньев

Рассмотрим теперь задачу интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в случае стационарного плоского течения; они уже были приведены в § 27. Эти уравнения имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

а краевые условия таковы:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x \geqslant 0 \tag{13}$$

и

$$\lim_{y\to\infty} u(x, y) = u_\infty(x). \tag{13'}$$

Как было отмечено в § 74, приведенные уравнения выведены в *асимптотическом* приближении. Это подсказывает нам мысль рассматривать масштабы x и y как независимые измерения и искать решения, симметричные относительно нетривиальных подгрупп четырехпараметрической группы аффинных преобразований

$$x \to \alpha x, \quad y \to \beta y, \quad u \to \gamma u, \quad v \to \delta v. \tag{14}$$

Можно надеяться на успех в случае обтекания бесконечного симметричного *клина*. В этом случае с помощью элементарного конформного преобразования можно показать, что эйлерово течение вне пограничного слоя имеет вид [2]) $u_\infty(x) = cx^m$ при подходящих значениях постоянных c и m. Случай $m = 0$ соответствует плоской пластинке, параллельной потоку; случай $m = 1/2$ соответствует плоской пластинке, перпендикулярной потоку.

Проверяя условия (12) и (13′) на инвариантность относительно группы (14) при $u_\infty(x) = cx^m$, мы получаем однопараметрическую подгруппу, определяемую соотношениями

$$\beta = \alpha^{(1-m)/2}, \quad \gamma = \alpha^m \text{ (тривиально)}, \quad \delta = \alpha^{m-1}\beta = 1/\beta. \tag{14*}$$

[1]) См. Oseen C. W., *Arkiv for Mat.*, 1—11, 1927—1928, или [71], гл. II. Относительно асимптотического поведения при малом ν см. Kuerti G., *J. Math. Phys.* MIT, **30** (1951), 106—115.

[2]) Доказательство дали Falkner и Skan [77]; см. также [3], § 64. Случай плоской пластинки впервые рассмотрел Blasius [65]; см. также Weyl [66], Geis [67].

Переменная $\eta = (u_\infty/x)^{1/2}y$ инвариантна относительно этой подгруппы; поскольку величина $V = \int u\,dy$ получается в виде $\alpha^{(m+1)/2}V$, то инвариантна также и функция f, определяемая равенством $V = f(x, y)$. Поэтому мы ищем решение частного вида $V = x^{(m+1)/2}f(\eta)$, т. е. решение, инвариантное относительно подгруппы (14*).

Всякое решение V такого вида удовлетворяет условиям (13), (13′) и второму уравнению из формул (12), если $f'(\infty) = c$. Для того чтобы удовлетворялось оставшееся уравнение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\eta)$ удовлетворяла уравнению

$$m(f'^2 - 1) - \frac{m+1}{2}ff'' = \nu f'''. \tag{15}$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать численно [1]) при краевых условиях $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = c$.

§ 83. Струи и следы в вязкой жидкости

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, можно рассчитать, в приближении пограничного слоя, асимптотический профиль скоростей ламинарных вязких струй как для плоского, так и для осесимметричного течений.

Ввиду инвариантности уравнения пограничного слоя и уравнения неразрывности (12) относительно аффинных преобразований мы будем искать профили скоростей, удовлетворяющие гипотезе подобия

$$u = x^{-p}f(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{x^q}, \tag{16}$$

где y обозначает расстояние от оси x на плоскости или в пространстве. Для того чтобы уравнения (12) были инвариантны относительно преобразования (16), необходимо и достаточно, чтобы $2q = p + 1$.

Мы опускаем выкладки [2]), однако заметим, что в ходе вычислений подтверждается формула $\beta = \alpha^{(1-m)/2} = \alpha^q$ из группы (14*) для рассмотренного в § 82 случая $p = -m$.

Для того чтобы определить p, нужно также использовать закон сохранения полного *количества движения струи*, равно как закон сохранения количества движения следа, рассмотренный в § 57. На плоскости этот закон сохранения эквивалентен соот-

[1]) См. Hartree D. R., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33** (1937); 223—229; Goldstein S., там же, **35** (1939), 338—341; Stewartson K., там же, **50** (1954), 454—465.

[2]) [17], стр. 271.

ношению $2p = q$, а в пространстве — соотношению $p = q$ в предположении, что справедливо соотношение (16).

Решая предыдущие уравнения, мы получим для пространственного случая $p = q = 1$. Это весьма примечательно, так как полная система уравнений Навье — Стокса инвариантна относительно найденной частной группы подобия, что впервые было получено Яцеевым и Сквайром [1]). Уравнения Навье — Стокса в сферических координатах эквивалентны уравнению

$$f^2 = 4\gamma f + 2(1-\gamma^2)f' - 2(c_1\gamma^2 + c_2\gamma + c_3), \quad \gamma = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad (17)$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Кроме того, из естественных физических краевых условий следует, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$; в таком случае уравнение (17) можно легко проинтегрировать и получить следующий результат:

$$f = \frac{2\sin^2\theta}{a + 1 - \cos\theta} \qquad (17')$$

при произвольном a. Поведение этих решений «в большом» будет рассмотрено в § 89.

Аналогично можно рассмотреть ламинарные следы в вязкой жидкости, если u считать возмущением скорости свободного потока U, так чтобы $U + u$ представляло собой локальную скорость. В этом случае, кроме гипотезы подобия (16), надо привлечь закон сохранения *количества движения следа* (§ 57), что дает $p = q = \frac{1}{2}$ для плоских следов и $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$ для следов в пространстве. Можно также вычислить и профили скоростей по-прежнему в приближении ламинарного пограничного слоя.

Примерно таким же образом исследуются турбулентные струи и следы. Однако в настоящее время общепризнано, что допущения, использующие понятие «длины перемешивания», для подобия в турбулентном случае, принятые в опубликованных теоретических работах, весьма сомнительны (см. [17], гл. XIV, § 11).

§ 84. Течения Прандтля — Мейера

В качестве еще одного примера применения метода «поиска симметричных решений» в задачах континуальной физики мы перейдем теперь к установившимся безвихревым течениям сжимаемых невязких жидкостей. Дифференциальные уравнения

---

[1]) Яцеев В. Л., *ЖЭТФ*, 20 (1950), 1031—1034; Squire H. B., *QJMAM*, 4 (1951), 321—329. Относительно краевых условий см. [17], стр. 278.

таких течений инвариантны, как мы видели в § 73, относительно однопараметрической группы моделирования по числу Маха:

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t; \quad p, \rho, \text{ и } \text{ не изменяются.} \tag{18}$$

Следуя методу поиска симметричных решений, будем искать течения, инвариантные относительно группы (18); стационарные же течения будут инвариантны и относительно группы преобразований

$$t \to t + \tau \tag{18'}$$

при неизменности всех прочих переменных.

При рассмотрении течений, инвариантных относительно преобразований (18) и (18'), удобно пользоваться полярными (r, θ) и сферическими (r, θ, φ) координатами. Пусть u_r и u_θ — соответствующие радиальная и трансверсальная составляющие скорости. Мы рассмотрим лишь случай $u_\varphi = 0$, т. е. случай отсутствия циркуляции в стационарном (безвихревом) плоском и осесимметричном течении.

Допущение инвариантности относительно преобразований (18) и (18') означает для таких течений, что нижеследующие величины зависят только от угловой переменной (дополнения широты):

$$\begin{aligned} &u_r = g(\theta), \qquad u_\theta = h(\theta), \qquad \rho = \rho(\theta), \\ &p = f(\rho), \qquad \frac{dp}{d\rho} = f'(\rho) = c^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Плоские течения, удовлетворяющие условиям (19), называются *течениями Прандтля — Мейера*; в § 92 мы дадим их обобщение (см. там рис. 26). Пространственные течения, удовлетворяющие условиям (19), называются осесимметричными *коническими* течениями.

Предположение об отсутствии вихрей равносильно условию $\oint u_r\, dr + u_\theta r\, d\theta = 0$ для всех замкнутых кривых, откуда $0 = \partial(ru_\theta)/\partial r - \partial u_r/\partial\theta = h - g'$, и мы получаем равенство

$$h = g'. \tag{20}$$

Так как течение безвихревое, то уравнения движения эквивалентны уравнению Бернулли, которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}u^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2) + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \tag{21}$$

или как дифференциальное уравнение

$$0 = u\, du + \frac{dp}{\rho} = g'(g + g'') + c^2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right). \tag{21'}$$

При *политропном* уравнении состояния $p = k\rho^\gamma + p_0$, $c^2 = \gamma k\rho^{\gamma-1}$, и так как $\int dp/\rho = k\gamma\rho^{\gamma-1}/(\gamma-1) = c^2/(\gamma-1) + \text{const}$, то, следовательно, в этих условиях получаем уравнение

$$\frac{1}{2}(g^2+g'^2)+\frac{c^2}{\gamma-1}=\text{const}=C. \qquad (21^*)$$

Все сказанное до сих пор справедливо и для конических течений.

Для течений Прандтля — Мейера уравнение неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ можно записать в виде

$$0=\frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho u_\theta)=\rho u_r+(\rho u_\theta)'=\rho\,(u_r+u_\theta')+\rho' u_\theta.$$

Использовав (19) и (20), мы получим уравнение

$$(g+g'')+\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)g'=0. \qquad (22)$$

Умножая уравнение (22) на g' и вычитая полученное уравнение из равенства (21′), придем к результату

$$(c+g')(c-g')\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)=0. \qquad (22')$$

Соотношения (22) и (22′), очевидно, эквивалентны уравнениям движения и неразрывности. Мы получаем, таким образом, два семейства решений.

Случай I. $\rho' = 0$. Тогда, согласно уравнению (22), получаем $g'' + g = 0$, откуда $u_r = A\cos(\theta - \alpha)$. Чтобы получить u_θ, мы используем формулы (19) и (20) и находим, что течение *равномерное* с постоянным вектором скорости.

Случай II. $c^2 = g'^2$, или $c = \pm g'$. Мы видим, что радиусы $\theta = \text{const}$ являются характеристиками в том смысле, что перпендикулярная к ним составляющая скорости всегда равна скорости звука c. Это так называемые *волны разрежения Прандтля — Мейера* [1]); они могут заполнять клиновидные области, плавно переходящие на границе в области равномерного течения. Мы часто видим такие области на фотографиях действительных течений; таким образом, предположение, что $\rho = \rho(\theta)$, непосредственно подтверждается экспериментом.

В политропном случае, подставляя $c^2 = g'^2$ в уравнение (21*), мы сразу получаем дифференциальное уравнение

$$(\gamma+1)g'^2+(\gamma-1)g^2=2(\gamma-1)C. \qquad (23)$$

[1]) [69]; Meyer T., *VDI Forschungsheft*, **62** (1908), 31—67.

Оно легко интегрируется в замкнутом виде, причем качественно характер решений в адиабатическом случае $\gamma > 1$ совершенно отличен от характера решений при $\gamma = 1$, при $-1 < \gamma < 1$ или при $\gamma = -1$ (круговое течение).

В общем (неполитропном) случае уравнение (22) и соотношение $c = \pm g'$ остаются справедливыми. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай $c = g'$. С помощью уравнения (21) мы получаем сначала $\ln \rho = \psi(c) = \psi(g')$, а затем уравнение

$$(g + g'') + g' g'' \psi'(g') = 0, \tag{23'}$$

которое интегрируется численно ([14], раздел 7.1). (Если $g'\psi'(g') = -1$, то имеется особенность.) Следовательно, *волны разрежения Прандтля — Мейера математически возможны для общего вида уравнения состояния.*

§ 85. Конические течения Тейлора — Маккола

В пространстве n измерений (физически, разумеется, представляет интерес случай $n = 3$) уравнение неразрывности для стационарных осесимметричных течений принимает вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^{n-1} \cos^{n-2}\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho r^{n-2} \cos^{n-2}\theta u_\theta) =$$
$$= \rho r^{n-2}(\cos^{n-2}\theta u_\theta)' + [(n-1)\rho u_r + \rho' u_\theta] r^{n-2} \cos^{n-2}\theta.$$

Разделив все члены уравнения на выражение $\rho r^{n-2} \cos^{n-2}\theta$ и воспользовавшись соотношениями (19) и (20) (напомним, что уравнения (19)—(21') справедливы для пространственных течений), вместо уравнения (22) мы получим следующее уравнение:

$$(n-1)g - (n-2)g' \operatorname{tg}\theta + g'' + g'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0. \tag{24}$$

Уравнение (21') в данном случае все еще справедливо, оно эквивалентно уравнению (21*) в политропном случае, и учитывая уравнения (21) и (21*), мы получаем соотношение

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = -\frac{g'(g+g'')}{c^2} = \frac{g'(g+g'')}{(\gamma-1)}\left[\frac{1}{2}(g^2+g'^2) - C\right]^{-1}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (24), которое можно записать в виде

$$(g'' + g) + (n-2)(-g' \operatorname{tg}\theta + g) + g'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0, \tag{24'}$$

мы получим следующий результат:

$$(g''+g)\left\{1+\frac{g'^2}{(\gamma-1)}\left[\frac{1}{2}(g^2+g'^2)-C\right]^{-1}\right\}+$$
$$+(n-2)(-g'\operatorname{tg}\theta+g)=0. \qquad (25)$$

Последнее уравнение было численно проинтегрировано при $\gamma = 1{,}408$ (воздух) в известной работе Тейлора и Маккола [75].

Для баллистики (см. рис. 24) представляют интерес однородные и плоско-параллельные вначале течения, искажаемые затем конической ударной волной постоянной интенсивности, согласно уравнениям Рэнкина — Гюгонио [также инвариантным относительно преобразований (18)]. Далее эти течения происходят в областях, где выполняется уравнение (25) [1]), пока они не становятся чисто радиальными ($g' = 0$), т. е. касательными к идеализированной конической головке снаряда, полуугол при вершине которой равен β, а ось направлена по скорости невозмущенного течения. Для заданных β, γ уравнение (25) можно проинтегрировать численно при начальных условиях, а именно: задается $g'(\beta) = 0$ и любое значение безразмерного отношения $g^2(\beta)/C$ в уравнении (21*). Имеется только одно значение угла ударной волны α и соответствующего числа Маха M, для которых уравнения Рэнкина — Гюгонио совместимы с плоско-параллельным движением вверх по течению от ударной волны. Поэтому мы можем записать $\alpha = \alpha(M, \beta, \gamma)$. Для заданных β, γ такое решение с «присоединенной ударной волной» (ср. § 11) теоретически существует только при $M > M(\beta, \gamma)$. Если $M < M(\beta, \gamma)$, то никакое коническое течение невозможно, и, следовательно, теория

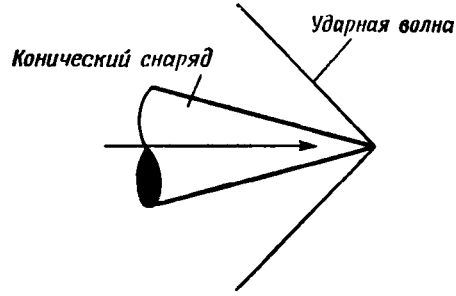


Рис. 24. Коническое течение Тейлора и Маккола.

[1]) В случае плоскости линии тока в этой области — прямые (§ 84, случай I), на что впервые указал A. Busemann, *ZAMM*, **9** (1929), 496—498.

предсказывает существование течения с «отошедшей ударной волной».

Подобные течения будут рассмотрены в § 88. Здесь достаточно отметить, что теоретически вычисленные границы конического режима, давление на коническую головку и угол присоединенной ударной волны (как функции числа Маха и угла при вершине конуса) ненамного отличаются от экспериментальных данных.

§ 86. Расходящиеся волны давления

Существуют также важные семейства нестационарных течений, обладающие внутренней симметрией (18). Из таких семейств особенно заслуживают упоминания расходящиеся волны — плоские, цилиндрические и сферические. Плоские расходящиеся волны возникают, например, когда в ударной трубе рвется диафрагма в области позади слоя взрывчатки, взорванного с одной из сторон, или позади поршня, который мгновенно начинает двигаться с постоянной скоростью в бесконечно длинном цилиндре [1]). Сферические волны возникают при равномерном расширении сферы.

Интересно отметить, что с расходящимися волнами давления связано одно из первых сознательных применений метода поиска симметричных решений [2]). Мы рассмотрим их лишь с математической точки зрения.

Здесь удобнее перейти к переменным Лагранжа. Обозначим через a массу, определяемую путем интегрирования от какой-либо фиксированной материальной точки (например, от стационарного центра симметрии). Для *плоских* волн, если определять положение координатой $x = f(a, t)$ и обозначать плотность через $\rho = \rho(a, t)$, уравнение неразрывности эквивалентно соотношению $\sigma = \partial f/\partial a$ между удельным объемом $\sigma = 1/\rho$, величиной x и массой a. Поэтому допустимые для данного уравнения состояния $p = p_0 - F(\sigma) = p_0 + k\rho^\gamma$ течения соответствуют решениям уравнений движения. Последние сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F'(\sigma)\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = k\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^{-\gamma-1}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}, \qquad (26)$$

[1]) По поводу расходящихся плоских волн («центрированные волны разрежения») см. [6], § 46. О волнах давления, возникающих при расширении сферы, см. Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc.*, **A 186** (1946), 273—292.

[2]) См. [62], [72] и [74]. О них идет речь и в [57], гл. IV. В [57], гл. II, § 13, приводится ссылка на более раннюю работу об автомодельных гравитационных волнах Н. Е. Кочина, Труды Мат. Института им. Стеклова, 9 (1935); см. также [7], п. 277.

как указано в [6], § 18. (Легко проверить, что $u = \partial f/\partial t$ есть скорость, $\partial^2 f/\partial t^2$ — субстанциональное ускорение и что правая часть представляет собой $-\partial p/\rho\partial x$.)

Так как скорость $u = \partial f/\partial t$, то автомодельность относительно преобразований (18) эквивалентна соотношению $f(\alpha a, \alpha t) = \alpha f(a, t)$ для всех $\alpha > 0$ и, следовательно, соотношению $f(\alpha, \alpha t) = \alpha f(1, t) = \alpha g(t)$. Полагая $\tau = t/a$, получим равенства:

$$x = f(a, t) = af\left(1, \frac{t}{a}\right) = ag(\tau), \quad \tau = \frac{t}{a}. \tag{26'}$$

Таким образом, равенства (26′) служат выражением инвариантности относительно преобразований (18).

Подставив формулу (26′) в уравнение (26), получим соотношение

$$0 = a^{-1}g''(\tau)\{1 - \gamma k\rho^{\gamma+1}\tau^2\}, \tag{27}$$

так как прямой подсчет показывает, что $\partial^2 f/\partial a^2 = t^2 g''(t/a)/a^3$. Итак, «центрированные» плоские волны, обладающие симметрией расширения (18), представляют собой решения обыкновенного дифференциального уравнения (27). (Парадокс Эршоу утверждает, что таких решений, обладающих симметрией переноса, нет.) Уравнение (27) имеет два семейства решений. Если $g'' = 0$, то $f = a\,[C_1 + C_2(t/a)] = C_1 a + C_2 t$. Это тривиальный случай, когда имеем равномерное течение с постоянными u и σ.

Во втором случае, $1 = \gamma k\rho^{\gamma+1}\tau^2$, откуда следует соотношение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^{\gamma+1} = \sigma^{\gamma+1} = \gamma k\tau^2. \tag{28}$$

Согласно формуле (26′), $\partial f/\partial a = g(t/a) - (t/a)g'(t/a)$, и, следовательно, получаем условие в виде

$$g - \tau g' = [\gamma k\tau^2]^{1/(\gamma+1)} \tag{29}$$

если $\gamma \neq -1$. Это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка легко проинтегрировать формально. Его общее решение имеет вид

$$g(\tau) = C\tau + A\tau^{2/(\gamma+1)}, \tag{29'}$$

где $A = [(\gamma+1)/(\gamma-1)]\,[\gamma k]^{1/(\gamma+1)}$, а C произвольно при условии, лишь если $|\gamma| \neq 1$. Если $\gamma = -1$, то решения не существует, так как тогда ввиду соотношения (28), $\tau = \text{const}$. Если $\gamma = 1$, то общее решение имеет вид $g(\tau) = C\tau - \sqrt{\gamma k}\,\tau \ln \tau$.

Аналогично можно разобрать случаи центрированных цилиндрических и сферических волн. Для случая $m + 1$ измерений

уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r^m F'(\sigma)\frac{\partial}{\partial a}\left[r^m \frac{\partial r}{\partial a}\right], \quad \sigma = r^m \frac{\partial r}{\partial a}. \tag{30}$$

Условие автомодельности относительно преобразований (18) эквивалентно следующим соотношениям, аналогичным формуле (26′):

$$r = bg(\tau), \quad \tau = \frac{t}{b}, \quad b = a^{1/(m+1)}. \tag{30′}$$

Подставив соотношения (30′) в уравнение (30), мы снова получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решения которого представляют собой цилиндрические и сферические волны.

Как и в § 84 и 85, можно получить волны, аналогичные описанным выше для общего уравнения состояния, не требуя условия политропности [1]).

§ 87. Политропная симметрия

В политропном случае $p - p_0 = k\rho^\gamma$ (ср. гл. IV, теорема 9), а уравнения сжимаемого невязкого баротропного течения обладают двухпараметрической группой симметрии. Она представляет собой подгруппу трехпараметрической группы преобразований:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \to \alpha\mathbf{x}, \qquad t \to \beta t, \qquad \mathbf{u} \to (\alpha/\beta)\,\mathbf{u}, \\ &\rho \to \delta\rho, \qquad (p - p_0) \to \delta^\gamma (p - p_0). \end{aligned} \tag{31}$$

Политропное уравнение состояния и уравнение неразрывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ инвариантны относительно всякого преобразования вида (31). Уравнения движения (невязкой жидкости) инвариантны относительно группы (31) тогда и только тогда, когда $\delta^{\gamma-1} = \alpha^2/\beta^2$. Отсюда, двухпараметрическая подгруппа группы (31), сохраняющая неизменными уравнения движения Эйлера, определяется условием $\delta = (\alpha/\beta)^{2/(\gamma-1)}$.

За исключением тривиального случая $\beta \equiv 1$, во всякой однопараметрической подгруппе группы (31) справедливо равенство $\alpha = \beta^\tau$ при некотором постоянном показателе τ. Поэтому, если уравнения движения Эйлера инвариантны относительно такой подгруппы, то $\delta = \beta^{2(\tau-1)/(\gamma-1)}$, и мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \to \beta^\tau \mathbf{x}, \qquad t \to \beta t, \qquad \mathbf{u} \to \beta^{\tau-1}\mathbf{u}, \\ &\rho \to \beta^{2(\tau-1)/(\gamma-1)}\rho, \qquad (p - p_0) \to \beta^{2\gamma(\tau-1)/(\gamma-1)}(p - p_0). \end{aligned} \tag{32}$$

[1]) Относительно материалов § 86 см. оригинальную литературу на русском языке [8*], [14*]. — *Прим. ред.*

Автомодельным течениям из § 84—86 соответствует выбор $\tau = 1$, и тогда вторая строчка из соотношений (32) сводится к $\rho \to \rho$, $p \to p$, так что соотношения (32) вырождаются в формулы (18).

Орбитами группы (32) (ее «множествами транзитивности») в системе координат пространство — время называются кривые, на которых постоянна величина $\chi = \mathbf{x}/t^{\tau}$. Следовательно, невязкие сжимаемые течения, которые группа (32) переводит самих в себя, определяются соотношениями

$$u_i(\mathbf{x};\ t) = t^{\tau}\ {}^{1}f_i(\chi), \qquad \rho = t^{2(\tau-1)/(\gamma-1)}e(\mathbf{x}), \tag{33}$$

а также и зависимостью $p - p_0 = k\rho^{\gamma}$. Сделав подстановку в уравнения движения, получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы течение было автомодельным относительно этой частной группы моделирования по числу Маха.

Важным примером такого течения является асимптотическое течение газов в результате взрыва в стволе орудия при сообщении ускорения снаряду постоянной массы [1]). Пользуясь переменными Лагранжа, можно исключить уравнение неразрывности. Кроме того, как и в первом примере из § 80, имеется особая «точка концентрации» начальной энергии при $t = 0$. Это соответствует случаю высокой концентрации взрывчатки в «длинноствольном» орудии; в данном случае можно предполагать, что течение *адиабатично*.

Указанный пример связан с примером чрезвычайно интенсивных сферических и цилиндрических взрывных волн, когда можно пренебречь давлением вне области взрыва [2]). В этом случае энтропия зависит от силы ударной волны и убывает со временем; чтобы сохранялась величина полной энергии, нужно положить $\tau = {}^{2}/_{5}$.

Окончательные формулы для этих случаев читатель может найти в литературе, на которую мы ссылались.

§ 88. Конические течения

Течения, которые мы до сих пор рассматривали, обладают достаточной физической симметрией в пространстве и времени, так что все характеризующие их величины каждый раз можно выразить функциями *одной* независимой переменной. В этих условиях уравнения в частных производных механики жидкостей

[1]) Love A. E., Pidduck F. B., *Phil. Trans.*, **A222** (1922), 167—226; Kent R. H., *Physics*, 7 (1926), 319—324. Ускорение $a \sim t^{\tau-2}$. См. также [6], § 160.

[2]) См. [6], § 161; такую модель дал Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc.*, **A201** (1950), 159—186. Относительно дальнейших результатов см. [57], гл IV [В русской литературе такие волны называются «сильными ударными волнами». — *Прим. ред.*]

сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако имеются другие важные приложения метода поиска симметричных решений, когда задача сводится к уравнениям *в частных производных*. Наиболее очевидный пример представляют собой «конические течения» без осевой симметрии, которые впервые ввел и исследовал А. Буземан [1]). Это — стационарные течения с полем скоростей (в сферических координатах)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi, \theta). \tag{34}$$

Подобные течения получаются, например, около дельтавидных крыльев, так как такие крылья обладают конической симметрией.

Более аккуратное применение метода к расширяющемуся автомодельному течению необходимо при рассмотрении входа в воду клина или конуса с постоянной скоростью (см. рис. 25),

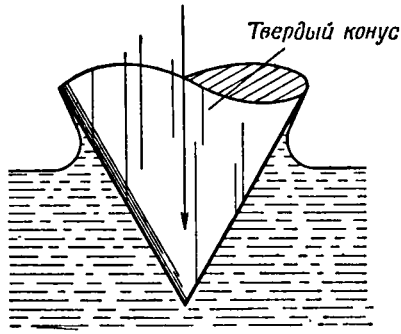


Рис. 25. Вертикальный удар конуса о воду.

причем скорость должна быть достаточно велика, чтобы на входе преобладали силы инерции. Сначала мы рассмотрим случай клина [2]). Как и раньше, преобразование:

$$x_i \to \alpha x_i, \qquad t \to \alpha t, \quad \text{величины } p, \rho, u_i \text{ не изменяются} \tag{35}$$

оставляет инерциальную гидромеханику неизменной; мы даже можем считать жидкость сжимаемой! Поэтому метод «поиска симметричных решений» в случае клина предсказывает нам выбор решений вида

$$U(x, y; t) = t\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right). \tag{36}$$

---

[1]) См. *NACA Tech. Memo.* 1100 (1947) и данную там библиографию; см. также [10], § 10.5; Ферри А., статья в книге Общая теория аэродинамики больших скоростей (ред. Сирс У. Р.), Воениздат, 1962.

[2]) Этот вопрос был исследован Л. И. Седовым [14*]. — *Прим. ред.*

Этот метод сведения трех независимых переменных к двум использован в известной работе Г. Вагнера об ударе гидроплана при посадке на воду [1]). Рассуждая, как в гл. III, § 2 мы можем свести задачу к функциям *одной* комплексной переменной, но при этом усложнятся краевые условия.

Очевидно, тот же метод применим к задаче о конусе, входящем в воду с постоянной скоростью, и решение имеет вид

$$U(x, y, z; t) = t\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right), \tag{37}$$

т. е. мы перешли от *четырех* независимых переменных к *трем*.

В случае прямого *кругового* конуса, вертикально входящего в воду, задача имеет осевую симметрию и решение можно построить с помощью функции

$$U(x, y, 0; t) = t\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right),$$

т. е. одной единственной функции *двух* независимых переменных.

В случае несжимаемой жидкости теорию потенциала можно использовать для создания поля течения с помощью *распределения источников* на свободной поверхности, положение и интенсивность которых являются искомыми функциями одной переменной (длины дуги). Использовав эту идею, Шиффман и Спенсер [2]) показали, что условие постоянства давления на «свободной поверхности» приводит к системе интегральных уравнений относительно функций *одной* переменной. Значительным достижением, которое принадлежит Хиллману, было приближенное численное интегрирование этих уравнений для конуса с углом в 60°.

§ 89. Локальные и глобальные решения

Приведенные выше примеры показывают, что во многих случаях для задач, имеющих данную симметрию в пространстве и времени, существуют автомодельные математические решения. Однако сформулировать и доказать общую теорему существования гораздо труднее.

Когда имеется симметрия, достаточная для того, чтобы общие дифференциальные уравнения течения жидкости сводились к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям, мы можем использовать стандартные *локальные* теоремы существования.

---

[1]) Wagner H., *Zeits. ang. Math. Mech.*, 12 (1932), 193—215.

[2]) *Comm. Pure Appl. Math.*, 4 (1951), 379—417; в этой же статье изложены результаты Hillman; см. также [17], гл. XI, § 9.

Однако существование *глобальных* решений, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям, предсказать гораздо труднее. Ярким примером встречающихся здесь трудностей может служить сжимаемое невязкое плоское течение с симметрией вращения (спиральные линии тока). Как впервые показал Рингleб [1]), такое течение невозможно в «большом», поскольку его радиальная составляющая меняет свое направление на противоположное вдоль «предельной окружности».

Такую неопределенность наглядно можно продемонстрировать на течениях Тейлора — Маккола (§ 85), для которых режим конической симметрии типа присоединенной ударной волны ограничен условием достаточной малости угла при вершине конуса (при данном числе Маха). Для общего класса стационарных осесимметричных течений, удовлетворяющих уравнению (25), очень трудно строго определить существование решения в «большом», и опубликованные результаты не всегда надежны [2]).

Подобным образом, хотя существование безударных центрированных волн разрежения возможно, волны сжатия связаны с ударными волнами, из-за чего весьма усложняется исследование существования решения в «большом» для автомодельных волн взрыва.

Другой интересный пример трудности определения глобального решения представляют собой осесимметричные *струи* (ламинарные, вязкие). Как показано в § 83, уравнения Навье — Стокса можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, если использовать автомодельное поле скоростей, имеющее в сферических координатах вид

$$\mathbf{u} = r^{-1}\mathbf{f}(\theta). \tag{38}$$

К сожалению, как показал Беран [3]), результирующее обыкновенное дифференциальное уравнение (17) не имеет глобальных решений, удовлетворяющих естественным краевым условиям для струи, вытекающей из круглого отверстия в плоской стенке или из какого-либо другого конического отверстия. Вопреки некоторым опубликованным результатам, по-видимому, только струя, вытекающая из труб с параллельными стенками, математически совместима в «большом» с требуемой симметрией (38) и естественными краевыми условиями.

Локальная теорема существования. Даже общие *локальные* теоремы существования нелегко доказать. Один

[1]) *ZAMM*, **20** (1940), 185—198; см. также [15], гл. V § 4 и VII § 8.

[2]) Наиболее аккуратное исследование проведено автором и Уолшем, Walsh J. M., Riabouchinsky Jubilee Volume, Paris, 1954, 1—12.

[3]) Beran M., *Quar. Appl. Math.*, **14** (1956), 213—214.

из положительных результатов формулирует следующая [1]) теорема (мы просим прощения у читателя за абстрактную математическую терминологию, которой мы воспользуемся ради краткости).

Теорема 1. *Пусть* $X = \Gamma \times E$ *есть прямое произведение своих подпространств* Γ *и* E *и пусть для каждого фиксированного* $\alpha \in E$ *группа* G *преобразований пространства* X *транзитивна* [2]) *на множестве* (γ, α), *где переменная* $\gamma \in \Gamma$. *Если дифференциальное уравнение* $D[u] = 0$, *определенное в* X, *инвариантно относительно* G, *то на* E *существует дифференциальное уравнение* $\Delta[U] = 0$ *порядка не более чем* $D[u] = 0$ *и такое, что* $u(\mathbf{x}) = u(\gamma, \xi) = U(\xi)$ *удовлетворяет уравнению* $D[u] = 0$ *тогда и только тогда, когда* $U(\xi)$ *удовлетворяет* $\Delta[U] = 0$ *для* $\xi \in E$.

Доказательство. В окрестности каждой точки $\mathbf{x} = (\gamma, \xi)$ из X можно ввести в X локальные координаты $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$. Всякая p-я частная производная $X^{(p)}[u]$ по этим координатам будет иметь простой вид $\Gamma^{(m)}[u]\, E^{(p-m)}[u]$, где $\Gamma^{(m)}$ и $E^{(p-m)}$ — частные производные по координатам $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ для Γ и E соответственно. Отсюда всякий оператор в частных производных $D = \Phi\{X_1^{(p_1)}, \ldots, X_s^{(p_s)}\}$ порядка q на функциях $u(\mathbf{x})$, определенных на X, можно записать в виде соотношения

$$D = \Psi\{\Gamma_1^{(m_1)}, \ldots, \Gamma_s^{(m_s)};\ E_1^{(p_1-m_1)}, \ldots, E_s^{(p_s-m_s)}\}, \qquad (39)$$

которое представляет собой функцию частных производных на E порядка не больше q.

Но те функции $U(\xi) = u(\gamma, \xi)$, значение которых в любой точке $\mathbf{x} = (\gamma, \xi)$ зависит только от γ (т. е. функции, инвариантные относительно G), оператор E_j переводит в другие функции того же класса, а оператор Γ_j (группа G транзитивна) переводит их в 0. Поэтому для таких функций оператор D эквивалентен дифференциальному оператору на E, полученному отбрасыванием всех членов, в которых $m_j > 0$. Этим теорема доказана.

Следствие. Если задача $D[u] = 0$ корректна для некоторого класса краевых условий, инвариантного относительно G, то корректна и задача $\Delta[u] = 0$.

Хотя при доказательстве локальных теорем существования

[1]) См. также Morgan J. A., *Quar. J. Math.*, **3** (1952), 250—259. Если дифференциальные уравнения линейны и группа G компактна, можно подойти к вопросу иначе — с точки зрения интегрирования на группах.

[2]) Это означает, что для данных (γ, α) и (γ', α) в G существует такое g, что $g(\gamma, \alpha) = (\gamma', \alpha)$. Мы предполагаем, что Γ и E — дифференцируемые многообразия.

для обыкновенных дифференциальных уравнений аналитичность несущественна[1]), в теоремах существования для уравнений в частных производных такое условие часто существенно.

В случае *аналитических* уравнений с частными производными (и аналитическими группами симметрии) уравнение (39) также будет аналитично. В этом случае для многих задач *с начальными условиями* мы располагаем хотя бы *локальными* теоремами существования. Так, предположим, что все производные *по времени* входящих в уравнение функций $\varphi_i(\mathbf{x}; t)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ выражаются через φ_i и их первые производные *по пространственным* координатам, так что можно записать уравнение

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = F_l\left(\varphi_j, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right). \tag{40}$$

Тогда теорема существования Коши — Ковалевской[2]) утверждает, что уравнение (40) имеет одно и только одно локальное аналитическое решение для данных аналитических начальных условий $\varphi_i(\mathbf{x}; 0)$ при $t = 0$.

А теперь предположим, что уравнение (40) инвариантно относительно группы G. Пусть $\varphi_i(\mathbf{x}; 0) = G_i(\mathbf{x})$ есть множество аналитических начальных условий, инвариантное относительно G. Тогда единственное локальное решение, которое существует, согласно предыдущей теореме, тоже будет инвариантно относительно G. Следовательно, мы имеем локальную теорему *существования* (и единственности) для приведенного дифференциального уравнения, полученного методом поиска симметричных решений, если только таковая теорема имеется для первоначальных дифференциальных уравнений.

Кажущееся незначительным ограничение, что производные по пространственным координатам в уравнениях (40) должны быть *первого* порядка, на самом деле оказывается весьма сильным. Так, из него следует, что система (40) должна быть гиперболического типа. В случае сжимаемой невязкой жидкости это выполняется, чего нельзя сказать, например, о несжимаемой невязкой жидкости или любой вязкой жидкости. Для того чтобы строго установить даже локальную корректность метода поиска симметричных решений, нужны дальнейшие исследования в теории уравнений в частных производных.

---

[1]) Автор не изучал вопроса, какие требуются условия для того, чтобы избавиться от трудностей, которые могут возникнуть в случае таких обыкновенных дифференциальных уравнений, как $y'^2 + y^2 + 1 = 0$, «степени» выше первой.

[2]) Hadamard J., Le probleme de Cauchy, Paris, 1932, гл. I [или Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений; М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*]

§ 90. Теория групп и метод разделения переменных

Решения физических задач, обладающие внутренней симметрией относительно некоторой группы, можно математически упростить с помощью связанного с этой группой выбора переменных. Мы покажем теперь, каким образом это приводит к методу «разделения переменных», который широко применяется в гидродинамике.

Рассмотрим, например, инвариантность уравнений Эйлера — Лагранжа для невязкой сжимаемой жидкости относительно группы

$$t \to \alpha t,\ x_i \to \alpha x_i;\ p,\ \rho,\ \mathbf{u} \text{ без изменений.} \tag{18}$$

По определению, частные «автомодельные» течения, инвариантные относительно группы (18), можно выразить в виде

$$u_i = f_i(\chi),\quad p = p(\chi),\quad \rho = \rho(p) = \rho(p(\chi)), \tag{41}$$

где

$$\chi = (\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3) = \left(\frac{x_1}{t},\ \frac{x_2}{t},\ \frac{x_3}{t}\right) = \frac{\mathbf{x}}{t}. \tag{42}$$

Очевидно, (42) есть частный случай соотношения

$$\chi = h(t)\,\mathbf{x}. \tag{43}$$

Найдем теперь все нестационарные течения невязкой жидкости, формально допускающие разделение переменных по формулам (41) и (43).

Наш первый результат будет отрицательного характера. Оказывается, что всякое такое течение инвариантно относительно группы (18): обобщение соотношения (42) до вида (43) ничего не дает.

Очевидно, что для любой дифференцируемой функции $F(\chi)$ из соотношения (43) следуют равенства:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{h'}{h}\sum \chi_k \frac{\partial F}{\partial \chi_k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = h\frac{\partial F}{\partial \chi_i}, \tag{44}$$

где суммирование производится по индексу k. Поэтому уравнение неразрывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ эквивалентно уравнению

$$h\left[\left(\frac{h'}{h^2}\right)\sum \frac{\chi_k\,\partial\rho}{\partial\chi_k} + \sum \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial\chi_k}\right] = 0, \tag{45}$$

если справедливо соотношение (43). Аналогично, если пренебречь силой тяжести, уравнения движения невязкой жидкости эквивалентны уравнениям

$$h\left[\left(\frac{h'}{h^2}\right)\sum \frac{\chi_k\,du_i}{\partial\chi_k} + \sum \frac{u_k\,du_i}{\partial\chi_k} + \frac{dp}{\rho\,\partial\chi_i}\right] = 0. \tag{46}$$

Если h'/h^2 — постоянная, не зависящая от времени и не равная нулю, скажем $-C$, то $\frac{1}{h} = C(t - t_0)$. Поэтому посредством очевидного изменения начала отсчета и единицы измерения времени можно свести наш случай к случаю течений, удовлетворяющих соотношению (42) и, следовательно, обладающих симметрией относительно группы (18).

В противном случае, как можно показать частным дифференцированием соотношений (45), (46) по времени при фиксированном χ, будем иметь $\sum \chi_k \partial\rho/\partial\chi_k = \sum \chi_k \partial u_i/\partial\chi_k = 0$. В этом случае, в силу равенств (44) $\partial\rho/\partial t = \partial u/\partial t = 0$ и, следовательно, $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Отсюда, частный выбор переменной h'/h^2 в формуле (45) дает как раз стационарные *конические* течения из § 88. Такие течения удовлетворяют соотношениям (41) и (43) при *любом* $h(t)$, в частности при $h(t) = 1/t$, как в формуле (42); все они являются автомодельными относительно группы (18).

Итак, методом поиска решений, симметричных относительно группы (18), можно получить *все* невязкие течения, допускающие (кажущееся более общим) «разделение переменных» вида (41) и (43).

Для *безвихревых* течений соотношения (41) и (42) эквивалентны предположению, что потенциал скоростей $U(\mathbf{x}, t)$ допускает разделение переменных

$$U = tF(\chi) = tF(\mathbf{x}/t), \tag{47}$$

что уже сделано в соотношениях (36) и (37). При этом для безвихревых *баротропных* течений можно применить обобщенное уравнение Бернулли из § 4, $\partial U/\partial t + \frac{1}{2}\nabla U \nabla U + \int dp/\rho = C(t)$.

Последнее ввиду равенств (44) сводится к уравнению

$$F(\chi) - \sum \chi_k \frac{\partial F}{\partial \chi_k} + \frac{1}{2}\nabla F \nabla F + \int \frac{dp}{\rho} = C. \tag{47'}$$

В случае *несжимаемой* жидкости ($\rho = \rho_0$) можно получить расширение класса подобных решений, положив $C = C(t)$.

Дальнейшие обобщения. Разделение переменных вида (47), хотя и эквивалентно формуле (41), наводит на мысль, что формально следует рассмотреть вообще все течения, которые *автомодельны* по времени в том смысле, что для них справедливо соотношение:

$$\mathbf{u} = g(t)\mathbf{f}(\chi), \quad \text{где} \quad \chi = h(t)\mathbf{x}. \tag{48}$$

В этот класс течений входят также течения, рассмотренные в § 87, для которых [как сказано в замечании после формулы (32)]

инвариантность относительно (18) эквивалентна равенству $\tau = 1$.

В него также входит новый класс *несжимаемых* безвихревых струйных течений, введенный Карманом [1]). Последние определяются условием подобия

$$U = (\mathbf{x};\ t) = \frac{1}{t}\varphi(\mathbf{x}), \tag{49}$$

которое соответствует постоянному коэффициенту ускорения.

§ 91. Случай вязкой жидкости

Интересно было бы определить самое общее течение невязкой жидкости, удовлетворяющее условию подобия (48), и проверить течение на инвариантность относительно подгрупп группы подобия. Вместо этого мы в виде компенсации определим *несжимаемые вязкие* течения, удовлетворяющие условию (48).

Как и в § 3, уравнения состояния и неразрывности для несжимаемого течения, взятые вместе, эквивалентны одному условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Так как g и h не обращаются в нуль, то это равносильно равенству

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial \chi_k} = 0, \tag{50}$$

из которого исключено t.

Остается рассмотреть уравнения движения Навье — Стокса. По теореме 1 из § 21 силой тяжести можно пренебречь. С учетом этого и после непосредственной подстановки условия (48) в уравнения Навье — Стокса из гл. II, формула (3), мы получим соотношения:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = g' f_i + \sum g h' x_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial \chi_k}\right) = g' f_i + \sum \left(\frac{g h'}{h}\right) \chi_k \frac{\partial f_i}{\partial \chi_k},$$

$$\sum u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum g f_k g h \left(\frac{\partial f_i}{\partial \chi_k}\right) = \sum (g^2 h) f_k \frac{\partial f_i}{\partial \chi_k},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \left(\frac{a(t)\, h(t)}{\rho_0}\right) \frac{\partial p}{\partial \chi_i}, \quad \text{если} \quad p = a(t)\, p(\chi),$$

$$\nu \nabla^2 u_i = \nu (g h^2) \sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial \chi_k^2}.$$

[1]) *Annali di Mat.*, 29 (1949), 247—249; см. также [17], стр. 248.

Следовательно, дифференциальные уравнения Навье — Стокса можно записать, разделив переменные, в виде

$$\sum_{j=1}^{5} F_j(t)\,G_j(\chi)=0, \tag{51}$$

где

$$F_1=g',\quad F_2=gh'/h,\quad F_3=g^2h,\quad F_4=ah,\quad F_5=gh^2$$

и

$$G_1=f_i,\quad G_2=\chi_k\frac{\partial f_i}{\partial\chi_k},\quad G_3=f_k\frac{\partial f_i}{\partial\chi_k},$$

$$G_4=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\chi_i},\quad G_5=-\nu\sum\frac{\partial^2 f_i}{\partial\chi_k^2}.$$

Очевидно, что условие (51) эквивалентно требованию, чтобы векторы $\mathbf{F}=(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ и $\mathbf{G}=(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)$ принадлежали взаимно *ортогональным подпространствам*. В зависимости от числа линейно независимых соотношений, которым удовлетворяет G_j, «F-подпространство», натянутое на векторы F_i, может, как видим, иметь 1, 2, 3 и 4 измерения. Сначала мы рассмотрим тот невырожденный случай, когда все F_j пропорциональны, так что «F-подпространство» имеет одно измерение.

Мы можем сделать F_4 пропорциональным F_3, положив $a=\alpha g^2$. Как и раньше, наличие равенства $g=h$ (постоянные множители можно опустить) эквивалентно пропорциональности F_1 и F_2. Остается еще условие, что F_1 должно быть пропорционально F_3 или должно выполняться равенство $g'=(-\beta/2)g^2h$ для некоторой постоянной β. Так как $g=h$, то это условие равносильно тому, что $-2g'/g^3=\beta$, или $1/g^2=\beta(t-t_0)$. Надлежащим выбором начала координат и шкалы времени последнее условие можно свести к $g=1/\sqrt{t}$ и, следовательно, к условиям

$$u_i(\mathbf{x};\,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}f_i(\chi)\quad\text{и}\quad p=\frac{p(\chi)}{t},\quad\left[\chi=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right], \tag{52}$$

$$-\frac{1}{2}\left(f_i+\chi_k\frac{\partial f_i}{\partial\chi_k}\right)+f_k\frac{\partial f_i}{\partial\chi_k}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\chi_i}=\nu\sum_k\frac{\partial^2 f_i}{\partial\chi_k^2}. \tag{52'}$$

Итак, в поисках более общего типа симметричных решений мы снова снизили число независимых переменных на единицу! Рассматривать соотношения (52′) сами по себе здесь мы не будем [1]).

[1]) На плоскости условие (50) эквивалентно существованию функции тока, а из соотношения (52′) можно исключить p, используя rot (grad p) = 0. При этом уравнение четвертого порядка в частных производных (6) не изменяется.

Это соответствует инвариантности уравнений Навье — Стокса относительно преобразования $t \to \alpha t$ и $\mathbf{x} \to \beta \mathbf{x}$ при условии, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu \sim (\beta/\alpha)\beta$, $[\nu = \mathrm{const}]$ не изменяется, так что $\beta \sim \sqrt{\alpha}$. Решения (52) — в точности те течения, которые инвариантны относительно этой группы.

Уравнение (51) имеет также «вырожденные» решения. Например, рассмотрим течения, параллельные оси x, тогда можно записать равенства:

$$u_1 = g(t) f_1(y, z), \quad u_2 = u_3 = p = 0. \tag{53}$$

В этом случае условие (50) всегда удовлетворяется. Так как $h = 1$, то $F_2 = 0$; из $p = 0$ следует $F_4 = 0$. Большое значение имеет то, что $G_4 = f_1 \partial u_i/\partial x = 0$ при всех i; поэтому для F_3 нет ограничений. Остается удовлетворить условию $g' f_1 = \nu g (\partial^2 f_1/\partial y^2 + \partial^2 f_1/\partial z^2)$, которое, поскольку g зависит от t, а f_1 зависит от $\mathbf{x} = (y, z)$, сводится к равенству $g'/g = -k$ и соотношению

$$u_1 = e^{-kt} f_1(y, z), \quad \text{где} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = -\nu k f_1. \tag{53'}$$

Последнее соотношение определяет хорошо известное[1]) экспоненциальное затухание параллельных вязких течений, например, течения в двумерном канале $-a \leqslant y \leqslant a$ при $u_1 = e^{-kt} \cos \pi y/2a$ и $k = \pi^2/4a^2\nu$.

§ 92. Обратные методы

Предыдущие примеры характеризуют метод «разделения переменных» как обобщение «метода поиска симметричных решений». В свою очередь метод разделения переменных представляет собой частный случай более широкого класса «обратных методов», систематически изученных П. Неменьи[2]). Положение в этом вопросе нестрого можно описать следующим образом. Всякий раз, когда теория групп указывает на существование течений с разделенными переменными или течений, обладающих каким-либо другим свойством P, *априорно* постулируя свойство P, мы получим по меньшей мере те же решения, но, возможно, и какие-либо другие.

[1]) См. Taylor G. I., *Phil. Mag.*, **46** (1923), 671—674. Аналогичное экспоненциальное затухание возможно и для круговых течений, когда $p'(r)$ достаточно велико для создания центростремительного ускорения; ср. [71] и Berker R., Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Lille, 1936.

[2]) Неменьи П. Ф., сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, стр. 234—257. [См. также [44]. — *Прим. ред.*]

Например, согласно теории групп, существуют (локально) волны расширения Прандтля — Мейера, для которых

Векторная скорость постоянна вдоль всякой прямой некоторого однопараметрического семейства. P1

«Обратный метод» состоит в нахождении всех стационарных безвихревых течений сжимаемой невязкой жидкости, обладающих свойством P1. Это получается следующим образом.

Мы знаем (§ 5), что уравнения движения в случае стационарного безвихревого потока эквивалентны уравнению Бернулли $u^2/2 + \int dp/\rho = C$. Поэтому с помощью численного интегрирования для каждого значения «давления торможения» (т. е. постоянной интегрирования) получим одну и только одну пару функций $\rho(u)$ и $p[\rho(u)]$, удовлетворяющих как уравнению состояния, так и уравнениям движения. Кроме того, течения со свойством P1 — это течения, у которых такие $\rho(u)$ и $p[\rho(u)]$, что *вихри отсутствуют* и *уравнение неразрывности* (т. е. закон сохранения массы) удовлетворяется.

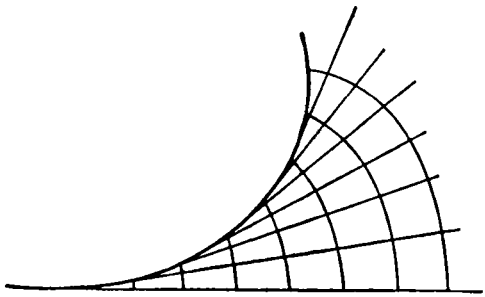


Рис. 26. Координаты для волны разрежения Прандтля — Мейера.

В рассматриваемой задаче можно достаточно хорошо разобраться геометрически, используя специальную систему координат, связанную с нашим однопараметрическим семейством прямых. В качестве специальной системы координат рассмотрим угол θ, образуемый осью x с прямыми, и направленное расстояние h вдоль линии, ортогонально пересекающей прямые и отсчитываемой от некоторой фиксированной кривой, как показано на рис. 26. Если вспомнить, что заданные прямые представляют собой, «вообще говоря», касательные к некоторой плоской кривой Γ, то сразу видно: (1) линии $\theta = \text{const}$ суть данные прямые; (2) линии $h = \text{const}$ образуют ортогональное семейство эволют кривой Γ; (3) $ds^2 = dh^2 + r^2 d\theta^2$, где $r = h + s(\theta)$ есть радиус кривизны эволюты, а s означает длину дуги вдоль Γ.

В этой естественной геометрической системе координат легко записать условие независимости и условие сохранения массы.

По определению, независимость означает, что циркуляция по любой замкнутой кривой γ равна нулю. Если α обозначает

угол между прямой $\theta = \theta_0$ и вектором скорости $\mathbf{u}(\theta_0)$ с модулем q, то циркуляция по γ равна

$$\oint \sum u_k\, dx_k = \oint q(\cos\alpha\, dh + \sin\alpha\, r\, d\theta).$$

По теореме Грина, этот интеграл обращается тождественно в нуль тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(q\cos\alpha) = \frac{\partial}{\partial h}(rq\sin\alpha).$$

Так как $r = h + s(\theta)$, то $\partial r/\partial h = 1$; далее, в силу свойства P1, величины q и α суть функции только θ. Поэтому условие незавихренности эквивалентно условию

$$\frac{d}{d\theta}(q\cos\alpha) = q\sin\alpha. \tag{54}$$

Положив $g(\theta) = q\cos\alpha$ и $h(\theta) = q\sin\alpha$, будем иметь $g' = h$, что обобщает формулу (20) из § 84.

Для того чтобы записать условие сохранения массы, заметим, что поток массы во *внешнюю область* через кривую γ равен

$$\oint_{\gamma} \rho q(-\sin\alpha\, dh + \cos\alpha\, r\, d\theta).$$

По теореме Грина, этот интеграл тогда и только тогда обращается в нуль, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho q\sin\alpha) = \frac{\partial}{\partial h}(r\rho q\cos\alpha) = \rho q\cos\alpha. \tag{55}$$

В только что введенных обозначениях последнее условие сводится к уравнению $(-\rho h)' = \rho g$, где штрих означает дифференцирование по θ. После подстановки $h = g'$ и упрощений получим $\rho' g' + \rho g'' + \rho g = 0$, или $(g'' + g) + (\rho'/\rho)g' = 0$, т. е. уравнение (22) из § 84.

Следовательно, *все течения, удовлетворяющие условию* P1, *можно получить из течений Прандтля — Мейера* заменой лучей, исходящих из вершины фиксированного угла, касательными к фиксированной кривой Γ, причем векторная скорость в соответствующих точках остается той же [1]).

[1]) Этот результат получил Less F. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1924), 350—362; см. также [6], стр. 273—278, и приведенную там библиографию.

Предыдущий пример является частным случаем более общей «обратной задачи» нахождения всех течений с одномерными годографами, т. е. таких течений, для которых векторы скорости описывают одну-единственную *кривую* [1]). (В общем случае годографом называется геометрическое место всех векторов скорости потока.)

§ 93. Общие замечания

Очевидно, что метод поиска симметричных решений как раз является одним из таких методов, при которых задаются произвольные функциональные соотношения и затем находятся удовлетворяющие им течения. Другим таким методом является разделение переменных. Таким образом, класс «обратных методов» включает в себя в качестве частных случаев метод поиска симметричных решений и метод разделения переменных.

Большим преимуществом метода поиска симметричных решений по сравнению с остальными двумя является то, что для него мы располагаем теоремами существования симметричных решений, по меньшей мере в малом (ср. § 89). А когда разделение переменных приводит к нетривиальным решениям, то последние обычно связаны с теорией групп.

Это положение можно проиллюстрировать на примере уравнения Лапласа $\nabla^2 U = 0$ для стационарных течений Эйлера в пространстве и на примере уравнения Гельмгольца $\nabla^2 U + k^2 U = 0$. Было показано [2]), что в обоих случаях системы координат, в которых имеет место разделение переменных, принадлежат к нескольким известным классам, большая часть которых при преобразованиях над группой, порождаемой инверсиями относительно сфер, переходит в семейство параллельных плоскостей, в пучок плоскостей, проходящих через одну прямую, и в семейство концентрических сфер, т. е. в одну из систем координатных поверхностей для декартовых, цилиндрических или сферических координат. Это наводит на мысль, что к данной задаче можно непосредственно применить метод конформных преобразований, рассматривая инвариантность относительно конформной группы.

Однако утверждение, что всякое разделение переменных в гидромеханике связано с группами (внутренняя симметрия),

---

[1]) Случай несжимаемой вязкой жидкости см. Müller W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig, 1932; также *Zeits ang. Math. Mech.*, **13** (1938), 395—408. Случай сжимаемой невязкой жидкости см. [72], а также Giese J. H., *Quar. Appl. Math.*, **9** (1951), 237—246.

[2]) См. [70], а также Moon P., Spencer D. E., *Proc. Am. Math. Soc.*, **3** (1952), 635—642 и **4** (1953), 302—307 и приведенную там литературу.

было бы преувеличением. Несмотря на то что решение [1]) Кармана уравнений Навье — Стокса для течения вблизи вращающегося диска не изменяется при аффинном преобразовании

$$r \to \alpha r, \qquad z \to z, \qquad u_r \to \alpha u_r, \qquad u_\theta \to \alpha u_\theta, \qquad u_z \to u_z,$$

уравнения Навье — Стокса не инвариантны относительно этого преобразования.

Аналогично «обратные» допущения относительно постоянства величины скорости или завихренности на линиях тока и т. д. не имеют никакого отношения к группам [2]). Было бы желательно определить, как это сделано для уравнений Лапласа и Гельмгольца (см. прим. 2) на стр. 188), все системы координат, в которых решения уравнений нестационарного движения жидкостей можно найти методом разделения переменных.

§ 94. Метод годографа

С помощью преобразований годографа можно значительно упростить уравнения сжимаемого невязкого течения. Мы уже видели [гл. I, уравнение (10)], что стационарные безвихревые плоские течения сжимаемой невязкой жидкости взаимно однозначно соответствуют потенциалам скоростей U, которые удовлетворяют *нелинейному* уравнению в частных производных:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\{U_x U_x U_{xx} + 2U_x U_y U_{xy} + U_y U_y U_{yy}\}. \tag{56}$$

Здесь индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным, а c^2 есть местная скорость звука.

Напомним [3]), что уравнение (56) эквивалентно одному из следующих *линейных* уравнений в частных производных: либо уравнению

$$q^2 V_{qq} + q\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right) V_q + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) V_{\theta\theta} = 0, \tag{57а}$$

либо уравнению

$$q^2 \varphi_{qq} + q\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \varphi_q + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \varphi_{\theta\theta} = 0. \tag{57б}$$

Здесь V — функция тока; $qe^{i\theta}$ — комплексный вектор скорости, так что $U_x = q\cos\theta$ и $U_y = q\sin\theta$; c^2 — однозначная функция

[1]) Karman Th., *ZAMM*, 1 (1921), 233—252; Batchelor G., *Quar. J. Math. Appl. Mech.*, 4 (1951), 29—41. По поводу дальнейших обобщений см. Berker R., работу, цитир. в прим. 1) на стр. 185.

[2]) Kampé de Fériet J., Proc. Int. Math. Congress, Zürich (1932), т. 2, 298—299; Nemenyi P., Prim R., *J. Math. Phis. MIT*, 27, (1948), 130—135.

[3]) См. [6], гл. IVA или Seifert H., *Math. Annalen*, 120 (1947), 75—126.

переменной q, согласно уравнению Бернулли, и $\varphi = U - xU_x - yU_y$ — зависимая переменная в лежандровом контактном преобразовании, посредством которого получено уравнение (57б).

Теперь нетрудно получить уравнения (57а) и (57б), исходя из уравнения (56) и только что указанных определений, но вовсе не ясно, почему нужно было использовать эти переменные годографы, чтобы получить линейные уравнения. Одним из мотивов могло быть то соображение, что метод годографа успешно применяется в задачах со свободными линиями тока (как в § 38). Сейчас мы приведем другую мотивировку, использующую три соображения из теории групп.

Первым из них является инвариантность законов динамики невязкой жидкости относительно группы (18) преобразований Ланжевена:

$$\mathbf{x} \to \lambda\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \to \mathbf{u}, \qquad U \to \lambda U, \qquad V \to \lambda V, \qquad \varphi \to \lambda\varphi.$$

Оказывается, что уравнение в частных производных, выражающее эти законы, как правило, должно быть *неоднородным* (и поэтому нелинейным), если в качестве независимых переменных брать x_i, а в качестве зависимых переменных — U, V или φ; но это уравнение будет *однородным*, если принять за независимые переменные[1]) u_i, а в качестве зависимых переменных U, V или φ.

Нам остается не ясным a priori, почему это однородное уравнение должно быть линейным, когда в качестве зависимых переменных взяты V и φ.

Второе соображение из теории групп — очевидная инвариантность законов движения жидкости относительно группы *поворотов* $\theta \to \theta + \alpha$, когда q, U, V, φ остаются фиксированными. Из этого следует, что в формулах (57а) и (57б) величина θ должна входить только в дифференциальные операторы и не входить в коэффициенты. Следовательно, мы имеем теоретико-групповое оправдание использования в качестве независимых переменных q и θ[2]) вместо $u = U_x$ и $v = U_y$. Благодаря этому коэффициенты нашего дифференциального уравнения зависят только от *одной* из двух независимых переменных.

Третье теоретико-групповое соображение — это очевидная инвариантность законов движения жидкости относительно груп-

[1]) Это возможно в малом, кроме случая (упомянутого в § 92) одномерного годографа. По причинам, аналогичным описанным в § 89, вообще говоря, это невозможно в большом.

[2]) Использование переменной $w = \ln q$ вместо q подсказывается теорией функций комплексного переменного: $w + i\theta = \ln(u + iv)$.

пы *переноса* $x \to x + a$, когда u, U, V, φ остаются фиксированными (§ 67). Это эквивалентно тому, что x и y в уравнении (56) входят лишь в дифференциальные операторы и не содержатся в коэффициентах.

§ 95. Инерциальное плоское движение

Теорию групп можно использовать не только для упрощения уравнений движения жидкости, с ее помощью можно также приводить интегрирование уравнений движения к квадратурам[1]). Важное подтверждение этого положения дает движение снаряда в плоскости под действием только *инерциальных* сил. (Приблизительно такой характер имеет движение во многих задачах баллистики, а также движение подводной лодки при фиксированной установке рулей, когда гидростатическая плавучесть уравновешивает силу тяжести.) Это значит, что мы будем рассматривать группу из § 70.

Пусть $x = q_1$ и $y = q_2$ обозначают координаты снаряда, а $\psi = q_3$ — угол между осью x и некоторой осью, жестко связанной со снарядом. Мы *предполагаем*, что координаты мгновенного положения снаряда определяют его будущее движение под действием сил реакции и согласно законам Ньютона, так что (при обычных ограничениях относительно дифференцируемости) получим уравнения:

$$\ddot{q}_i = F_i(q_1, q_2, q_3; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = F_i(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}). \tag{58}$$

Это, очевидно, система обыкновенных, вообще говоря, нелинейных дифференциальных уравнений *шестого* порядка.

Мы сейчас покажем, как с помощью теории групп ее можно свести к системе *второго* порядка и четырем квадратурам. Метод, который мы опишем, в основном обобщает обычный метод «циклических координат» при переходе от лагранжевых динамических систем к нелагранжевым системам. После того как будет описан этот переход, мы укажем схему дальнейшего обобщения — на случай обыкновенных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно некоторой группы.

Прежде всего можно ожидать, что система (58) будет инвариантна относительно *переноса* пространственных координат $x \to x + x_0$, $y \to y + y_0$[2]). Это обстоятельство очень просто интер-

[1]) Строгое современное математическое исследование этой ставшей классической связи с теорией групп в случае обыкновенных однородных *линейных* дифференциальных уравнений см. в работе Kolchin E. R., *Annals of Math.* 49 (1958), 1—42. Относительно нелинейного случая, см. Dickson [68].

[2]) Практически это означает, что можно пренебречь такими факторами, как изменение плотности с высотой.

претировать математически: оно позволяет нам заменить систему (58) системой *четвертого* порядка:

$$\frac{dq_1}{dt} = F_1(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}), \qquad \frac{d\dot{q}_2}{dt} = F_2(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}),$$
$$\frac{dq_3}{dt} = \dot{q}_3, \qquad \frac{d\dot{q}_3}{dt} = F_3(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}) \tag{59}$$

и двумя квадратурами

$$q_1 = \int \dot{q}_1\, dt, \qquad q_2 = \int \dot{q}_2\, dt. \tag{59'}$$

Таким образом, с помощью двухпараметрической группы можно снизить порядок нашей системы на две единицы, заменив интегрирование уравнений квадратурами. Далее, система (58) изотропна, т. е. инвариантна относительно *поворотов* координатной системы. Чтобы выразить этот факт аналитически, удобно в качестве новых переменных использовать модуль скорости $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ и угол наклона θ траектории к оси x. Тогда $\dot{x} = v\cos\theta$ и $\dot{y} = v\sin\theta$. Очевидно, что v и «угол тангажа» $\varphi = \psi - \theta$ инвариантны относительно вращений; поэтому система (59) эквивалентна [1]) (если она изотропна) системе:

$$\frac{dv}{dt} = G_1(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}), \qquad \frac{d\theta}{dt} = G_2(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = G_3(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}), \tag{60}$$

у которой второе уравнение сводится к квадратуре $\varphi = \int \dot{\varphi}\, dt$.

Наконец, предположение, что все силы «инерциальны», означает, что они пропорциональны квадрату скорости, т. е. геометрические траектории инвариантны относительно группы изменений масштаба времени. Но очевидно, что φ и *расстояние* $s = \int v dt$ инвариантны относительно этой группы. Отсюда, заменив t независимой переменной s, получим уравнение

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi', \quad \frac{d\varphi'}{ds} = H(\varphi,\ \varphi'), \quad \frac{dv}{v\,ds} = H^*(\varphi,\ \varphi'). \tag{61}$$

(Например, $mv\,dv/ds$ есть касательная составляющая силы; она равна произведению v^2 на силу $mG_1(v/v, \varphi, \dot{\varphi}/v) = mG_1(1, \varphi, \varphi') = H^*(\varphi, \varphi')$, которая действовала бы на снаряд, если бы все скорости были изменены в отношении $v : 1$.) В итоге система

[1]) Строго говоря, пока v не обращается в нуль.

(58) *эквивалентна системе второго порядка* (61), *пяти квадратурам:* (59′) *и следующим соотношениям*

$$v = v_0 e^{\int H^* ds}, \quad t = \int \frac{ds}{v}, \quad \varphi = \int \dot{\varphi}\, dt. \tag{62}$$

§ 96. Теорема Бьянки

Предыдущее рассуждение можно существенно обобщить. Пусть Σ — любая система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{63}$$

Предположим, что Σ инвариантна относительно группы Γ преобразований $\mathbf{x} \to \gamma(\mathbf{x})$ в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$. Это значит, что если функция $x(t)$ удовлетворяет системе (63), то ей удовлетворяет и преобразованная функция $\gamma(\mathbf{x}(t))$ при всех $\gamma \in \Gamma$ Мы покажем, что это обстоятельство значительно облегчает интегрирование системы (63).

Это легко показать, если Γ — однопараметрическая группа. В данном случае, за исключением окрестностей особых точек, группа Γ локально сводится [1]) посредством замены координат к группе переносов $y_1 \to y_1 + a$; $y_2, \ldots, y_n$ без изменений. Система (63) запишется в этих координатах в виде $dy_i/dt = G_i(y_1, \ldots, y_n)$. Так как вычитание постоянной из y_1 не изменяет ни одной из производных dy_i/dt, то, очевидно, G_i фактически не зависят от y_1, поэтому можно записать уравнение

$$\frac{dy_i}{dt} = G_i(y_2, \ldots, y_n), \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{64}$$

Таким образом, мы сведем интегрирование системы (63) к интегрированию системы $(n-1)$-го порядка $dy_j/dt = G_j(y_2, \ldots, y_n)$, $[j = 2, \ldots, n]$ и одной квадратуре $y_1 = \int G_1(y_2(t), \ldots, y_n(t))\, dt$.

Обобщая сказанное, отметим следующее: пусть Γ — любая r-параметрическая разрешимая группа Ли преобразований пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, относительно которой инвариантна система (63). Тогда, почти по определению, группа Γ имеет локальные [2]) подгруппы Ли $S_1 < S_2 < \ldots < S_r = \Gamma$, такие, что 1) S_{i-1} нормальна в S_i; 2) S_i порождается подгруппой S_{i-1} и некоторой однопараметрической подгруппой Γ_i.

---

[1]) См. [78], стр. 34. Вообще мы здесь не даем подробных указаний относительно используемых результатов теории групп Ли.

[2]) Понятие локальной подгруппы разъясняется в книге Шевалле К., Теория групп Ли, М., ИЛ, тт. 1—2, 1948—1958 гг

Рассматривая все в малом, предположим, что подмножества транзитивности подгруппы S_{i-1} представляют собой h-мерные подпространства постоянных $y_{n+1}, \ldots, y_n$, т. е. они параллельны гиперплоскости $(y_1, \ldots, y_h)$ для некоторого h. Предположим, далее, что ввиду инвариантности системы (63) относительно S_{i-1} можно свести интегрирование системы (63) к интегрированию системы

$$\frac{dy_j}{dt} = G_j(y_{h+1}, \ldots, y_n), \qquad [j = h+1, \ldots, n] \tag{65}$$

и квадратурам. Мы покажем, что тогда аналогичное утверждение справедливо для S_i.

Возможны два случая. Если подмножества транзитивности группы S_i h-мерны, то наше утверждение тривиально. В противном случае, поскольку S_{i-1} нормальная (т. е. инвариантная) подгруппа группы S_i, множества транзитивности[1]) подгруппы S_{i-1} нетривиально преобразуются подгруппой Γ_i. Выбрав надлежащим образом систему координат, мы можем предположить, что Γ_i осуществляет переносы $y_{h+1} \to y_{h+1} + a$; $y_{h+2}, \ldots, y_n$ не изменяются. Следовательно, как и для системы (64), мы можем свести интегрирование системы (65) к интегрированию системы

$$\frac{dy_j}{dt} = G_j(y_{h+2}, \ldots, y_n), \qquad [j = h+2, \ldots, n] \tag{65'}$$

и квадратуре $y_{h+1} = \int G_{h+1}(y_{h+2}(t), \ldots, y_n(t))\,dt$. Этим завершается доказательство по индукции следующей теоремы.

Теорема 2 (Бьянки)[2]). *Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений Σ порядка n инвариантна относительно некоторой разрешимой группы Ли, обладающей m-мерными множествами транзитивности. Тогда интегрирование системы Σ можно свести к интегрированию системы порядка $(n-m)$ и к квадратурам.*

В § 95 Γ_1 это группа $x \to x + a$, Γ_2 — группа $y \to y + b$, Γ_3 — группа $\theta \to \theta + \alpha$, $x \to x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y \to x\sin\alpha + y\cos\alpha$, Γ_4 — группа $t \to t/\lambda$, $x \to x$, $v \to \lambda v$ и т. д.

---

[1]) По определению, «множество транзитивности» группы S_{i-1} для некоторой точки y есть множество Y всех $\sigma(y)[\sigma \in S_{i-1}]$. Так как $\gamma \in \Gamma_i$ и из $\sigma \in S_{i-1}$ следует $\gamma^{-1}\sigma\gamma \in S_{i-1}$, то множество всех $\gamma(\sigma(y)) = (\sigma\gamma)(y)$ совпадает с множеством всех $\sigma(\gamma(y))$, и, следовательно, тоже является множеством транзитивности группы S_{i-1}.

[2]) См. [78], [34, V].

§ 97. Заключение

Просматривая снова гл. IV и V, мы начинаем понимать, какое большое значение имеет для гидродинамики понятие группы. Так, это понятие лежит в основе всего анализа размерностей и моделирования; оно дает также значительное обобщение этих теорий в виде инспекционного анализа.

Далее, группы симметрии позволяют уменьшить число независимых переменных, входящих в уравнения в частных производных, непосредственно с помощью метода поиска симметричных решений и метода «отделения переменной времени» и косвенно — с помощью обратных методов. Кроме того, метод поиска симметричных решений в общем случае заведомо дает решения в малом (§ 89).

Даже после того, как число независимых переменных сведено к одному, так что дальнейшее упрощение с помощью предыдущих методов уже невозможно, полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений часто легче всего проинтегрировать, используя теоретико-групповые соображения.

Указанные выше методы применимы к уравнениям как аналитическим, так и неаналитическим, как линейным, так и нелинейным; таким образом, они свободны от ограничений, накладываемых на обычные методы разложения в ряды или представления интегралами. Поэтому теория групп играет фундаментальную роль в решении дифференциальных уравнений гидромеханики.

Наконец, в гл. VI мы попытаемся показать, что теория групп лежит также в основе классических уравнений движения твердого тела в идеальной (т. е. несжимаемой невязкой) жидкости.

Мы надеемся, что в будущем в еще большей мере выяснится связь гидромеханики с теорией групп.

Глава VI

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ

§ 98. Присоединенная масса сферы

Качественно представление о присоединенной массе общеизвестно. Например, пусть мы опустили легкое весло в спокойную воду и затем сделали гребок. Всем известно из опыта, что кажущаяся инерция (т. е. сопротивление ускорению движения) весла при движении его в воде значительно увеличивается. Эта увеличившаяся инерция как раз и называется «кажущейся массой» весла, а разность между кажущейся и действительной массой называют «индуцированной» или «присоединенной массой».

Точное математическое определение присоединенной массы впервые дали Грин и Стокс более ста лет назад [1]). Ход их рассуждений был примерно таков.

Рассмотрим сферу массы m и радиуса a, движущуюся со скоростью v в *несжимаемой невязкой* жидкости плотности ρ (на протяжении всей этой главы мы будем рассматривать лишь безвихревые течения такой «идеальной жидкости»). Не ограничивая общности, мы можем считать, что движение направлено по оси сферической системы координат. Потенциал скоростей для жидкости, покоящейся на бесконечности, совпадает с потенциалом диполя, который в сферических координатах имеет вид

$$U = \frac{-a^3 v \cos\theta}{2r^2}. \tag{1}$$

Действительно, легко проверить, что нормальная производная потенциала $\partial U/\partial r = v\cos\theta$ представляет собой нормальную составляющую скорости точек на поверхности сферы (§ 4). Радиальная и трансверсальная составляющие скорости в произвольной точке жидкости равны соответственно

$$u_r = \frac{a^3 v\cos\theta}{r^3}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{a^3 v\sin\theta}{2r^3}.$$

---

[1]) Green G., Mathematical Papers, стр. 315 (1833); [13], т. 1, стр. 17 (1843). Более полную библиографию см. в [7], п. 92.

Поэтому полная кинетическая энергия жидкости выражается формулой

$$T = \iiint \tfrac{1}{2}\rho\left(u_r^2 + u_\theta^2\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \pi\rho v^2 a^6 \int_{r=a}^{\infty} r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{\cos^2\theta}{r^6} + \frac{\sin^2\theta}{4r^6}\right] d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho v^2 a^6}{4} \int_{r=a}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \int_0^{\pi} \left[1 + 3\cos^2\theta\right] \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho v^2 a^6}{4} \left[\frac{-1}{3r^3}\right]_a^{\infty} \left[-\cos\theta - \cos^3\theta\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi\rho v^2 a^3}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi\rho a^3}{3}\, v^2 = \frac{1}{2} m' v^2.$$

Так мы получаем следующий классический результат: кинетическая энергия жидкости равна кинетической энергии частицы, движущейся с той же скоростью, что и сфера, и имеющей массу m', равную *половине массы вытесненной сферой жидкости.*

Кроме того, очевидно, что в невязкой жидкости вращение сферы не оказывает на окружающую жидкость никакого влияния; следовательно, момент инерции сферы остается неизменным. Это наводит на мысль, что (если пренебречь влиянием сил тяжести) сфера в такой жидкости динамически эквивалентна более тяжелой сфере в вакууме, кажущаяся масса $m^* = m + m'$ которой есть сумма массы сферы m и присоединенной массы m', равной половине массы вытесненной воды, но момент инерции которой не изменяется. Это будет строго доказано в § 109, где мы покажем, что все динамические характеристики всякого безвихревого несжимаемого течения можно вывести из выражения для его кинетической энергии при помощи общих уравнений лагранжевой динамики.

§ 99. Приложения

Изложенные выше результаты находят себе различные простые применения. Одно из них относится к вычислению начального ускорения, получаемого наполненным водородом сферическим баллоном, который сразу освобожден от канатов. Предположим, что масса баллона составляет $^1/_{10}$ массы вытесненного им воздуха. Человек, не знающий о кажущейся массе, мог бы проделать следующие ошибочные вычисления. По закону Архимеда, полная подъемная сила равна произведению $9g$ на массу баллона; поэтому (так можно было бы подсчитать) начальное ускорение должно равняться $9g$. А в случае сферического бал-

лона, наполненного водородом и погруженного в воду, такие же ошибочные вычисления дали бы для ускорения значение, равное по меньшей мере $1000g$.

Однако правильное начальное ускорение можно легко найти при помощи теории кажущихся масс. *Кажущаяся масса* баллона m^* составляет $0{,}1 + 0{,}5 = {}^3/_5$ массы вытесненного воздуха; поэтому в действительности ускорение равно $3g/2$. В воде оно составило бы около $2g$.

Более тонким будет применение понятия присоединенной массы, в случае когда жидкость, в которую погружена невесомая сфера, внезапно получает ускорение a. Чему равно ускорение a^* сферы относительно наблюдателя, находящегося вне жидкости? Эту задачу можно решать так. Для наблюдателя, связанного с жидкостью, ускорение a эквивалентно фиктивному гравитационному полю напряженности a. Рассуждая, как и в предыдущем случае, получим, что начальное ускорение $a^* - a$ сферы относительно наблюдателя, связанного с жидкостью, удовлетворяет уравнению $a^* - a = 2a$, т. е. $a^* = 3a$.

Такой расчет был подтвержден Т. Е. Кейвудом и автором [1]) для малых воздушных пузырьков в воде, и этот вывод существен для истолкования опытных данных относительно различных течений жидкости, подобных изображенным на фото I и II.

Укажем еще одно применение — к часам с маятником ([13], т. 3, стр. 1—141). Из-за присоединенной массы инерция сферического маятника в воздухе увеличивается примерно на 0,02%; часы с таким маятником отстают примерно на 10 *сек* в день, в зависимости от плотности воздуха (давления и температуры).

Можно было бы привести множество других приложений (см. § 103—104), но, по-видимому, целесообразнее сначала рассмотреть теоретические основы вычисления присоединенной (или «индуцированной») массы для тела произвольной формы. И, как мы увидим, это составляет замечательную главу классической лагранжевой динамики. Ее создали Кельвин [85] и Кирхгоф [81]; ей в основном посвящена гл. VI «Гидродинамики» Ламба [7] [2]).

§ 100. Инерциальные лагранжевы системы

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из твердого тела Σ и идеальной жидкости без свободных поверхностей, ограниченную снаружи и (или) изнутри телом Σ. Очевидно, что Σ имеет шесть степеней свободы, которые можно описать с помощью координат $q_1, \ldots, q_6$. Далее, если дано $\mathbf{q}(t)$, то при весьма общих

[1]) Birkhoff G., Caywood T. E., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 646—659.
[2]) См. также работы [7*], [25*], [26*], [1*] и [9*]. — *Прим. ред.*

условиях существует один и только один потенциал скоростей (см. § 4 или [4], стр. 217, 311) $U = \dot{q}_i U^i(\mathbf{q})$, который на бесконечности стремится к нулю («регулярен»), удовлетворяет уравнению $\nabla^2 U = 0$ и на поверхности S тела Σ принимает значения $\partial U/\partial n$, определяемые движением Σ. Следовательно, кинетическая энергия жидкости определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho(\nabla U \nabla U)\, dR = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{6} T_{ij}(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j. \qquad (2)$$

Кроме того, суммарная кинетическая энергия жидкости и твердого тела определяется аналогичным равенством, но с другими коэффициентами. Симметричная матрица

$$T_{ij}(\mathbf{q}) = \rho\iiint (\nabla U^i \cdot \nabla U^j)\, dR, \qquad (2')$$

входящая в равенство (2), называется тензором «присоединенной массы»; если учитывается и кинетическая энергия тела Σ, то получающуюся в результате матрицу называют тензором «кажущейся массы».

Динамическая система, только что определенная, неголономна и имеет бесконечное число степеней свободы, если учитывать деформацию жидкости. Тем не менее естественно рассматривать ее как обычную лагранжеву систему ([76], стр. 36) с шестью степенями свободы и считать, что конфигурация жидкости определяется ее границами, движущимися при наличии «идеальной связи» — несжимаемости. На деле такое допущение обычно принимается без доказательства ([7], гл. VI; [81], стр. 238 и [85], стр. 320). Мы докажем его в § 109.

Далее, по теореме Аванцини (§ 21, теорема 1) действие тяготения состоит просто в том, что к системе инерциальных сил без учета силы тяжести добавляется постоянная гидростатическая *подъемная сила*. Поэтому достаточно рассматривать случай $L = T$ нулевой потенциальной энергии, что соответствует $g = 0$. Этим определяется лагранжева система[1]), в которой «обобщенные силы» Q_i удовлетворяют уравнениям

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \qquad (3)$$

Лагранжеву систему с нулевой потенциальной энергией можно назвать *инерциальной лагранжевой системой*; в § 101—112 мы рассмотрим тензор присоединенной (и кажущейся) массы, определяемый инерциальной лагранжевой системой (2), (3).

[1]) Точнее, частный случай лагранжевой системы. — *Прим. ред.*

§ 101. Тензор присоединенной массы

Вблизи положения $\mathbf{q} = 0$ в некоторой системе отсчета удобно считать, что q_1, q_2, q_3 определяют поступательные движения тела Σ в направлениях трех осей координат соответственно, а q_4, q_5, q_6 определяют повороты (в радианах) относительно этих осей. Тогда T_{hk} (0) из формулы (2) представляют собой числа, зависящие от выбора осей координат, связанных с Σ.

При любом таком выборе осей пусть U^1, U^2, U^3 обозначают потенциалы скоростей, соответствующие переносам в направлении осей с единичной линейной скоростью, а U^4, U^5, U^6 — потенциалы скоростей при вращении тела вокруг этих осей с единичной угловой скоростью. Тогда кинетическая энергия жидкости T из формулы (2) определяется равенством

$$2T = \dot{q}_h \dot{q}_k \iiint \rho (\nabla U^h \cdot \nabla U^k)\, dR = \dot{q}_h \dot{q}_k T_{hk}, \tag{4}$$

где мы суммируем по повторяющимся индексам (обычное соглашение в тензорном исчислении). Как и в формуле (2), $dR = dx_1 dx_2 dx_3$ есть элемент объема жидкости; кроме того, поскольку $\nabla U^h \nabla U^k = \nabla U^k \nabla U^h$, очевидно, имеем $T_{hk} = T_{kh}$, т. е. тензор присоединенной массы *симметричен.*

При ускоренном движении из состояния покоя все $\dot{q}_h = 0$; следовательно, уравнение (3) сводится к уравнениям простого вида:

$$Q_h = T_{hk}(0)\, \ddot{q}_k, \quad \text{если} \quad \mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0. \tag{5}$$

Отсюда следует простая интерпретация величины T_{hk}; *это есть k-компонента силы, если телу в состоянии покоя сообщают единичное ускорение в направлении h.* Кроме того, так как $T_{hk} = T_{kh}$, мы сразу получаем следующий принцип взаимности ([76], стр. 305): k-компонента силы при единичном ускорении в направлении h равна h-компоненте силы под действием единичного ускорения в направлении k.

В простом случае (5) легко проверить непосредственно, что наша система лагранжева. В силу второго тождества Грина ([4], стр. 212) справедливо равенство

$$T_{hk} = \rho \iiint \nabla U^h \nabla U^k\, dR = \rho \iint U^h \left(\frac{\partial U^k}{\partial n}\right) dS. \tag{6}$$

Но в этом случае производная $\partial U^h/\partial n$ равна (гл. I, (7)) нормальной составляющей скорости тела Σ при движении с единичной скоростью в направлении q_h. Введем теперь следующее

удобное обозначение, которое будем использовать и в дальнейшем, $dS_k = (\partial U^k/\partial n)\,dS$, так что можно записать соотношения:

$$dS_1 = dx_2\,dx_3, \quad dS_2 = dx_3\,dx_1, \quad dS_3 = dx_1\,dx_2,$$
$$dS_4 = x_2\,dS_3 - x_3\,dS_2, \quad dS_5 = x_3\,dS_1 - x_1\,dS_3, \tag{7}$$
$$dS_6 = x_1\,dS_2 - x_2\,dS_1.$$

По самому определению величины T_{hk} очевидно равенство

$$T_{hk} = \rho \int\int U^h\,dS_k = \rho \int\int U^k\,dS_h. \tag{8}$$

Очевидно также, что если обозначить через p скалярное давление, то $\int\int p\,dS_1$, $\int\int p\,dS_2$, $\int\int p\,dS_3$ представляют собой компоненты *силы*, с которой тело Σ действует на жидкость, а $\int\int p\,dS_4$, $\int\int p\,dS_5$, $\int\int p\,dS_6$ представляют собой компоненты *момента* этой силы.

Теперь рассмотрим течение, возникающее из состояния покоя при единичном ускорении в направлении q_h. Легко подсчитать, что если в начале $U = 0$ и $\partial U/\partial t = U^h$, то $U(x; t)$ отличается от $tU^h(x)$ на бесконечно малую величину второго порядка относительно t. Так как мы свели задачу к случаю $g = 0$, то из уравнения Бернулли для давления жидкости, движущейся с ускорением [гл. I, (5)], следует уравнение

$$p + \frac{1}{2}\rho\nabla U\nabla U + \rho\frac{\partial U}{\partial t} = \text{const}. \tag{8*}$$

Отсюда видно, что начальное гидродинамическое давление p^h всюду равно произведению «потенциала ускорений» U^h на плотность ρ. Соответствующая подстановка в формулу (8) дает $T_{hk} = \int\int p^h\,dS_k$, т. е. T_{hk} *есть k-компонента силы при движении из состояния покоя, вызванном единичным ускорением в направлении q_h*. В частности, Q_1, Q_2, Q_3 представляют собой обычные компоненты *силы* относительно выбранных нами осей, а Q_4, Q_5, Q_6 — соответствующие моменты. Этим оправдано предположение (3) для случая (5), т. е. для случая ускорения тела из состояния покоя.

Когда движение сводится только к *поступательному*, координаты (q_1, q_2, q_3) могут быть использованы *в большом*. Тогда $T_{ij}(\mathbf{q}) = T_{ij}(0)$, т. е. *постоянные*, и, таким образом, из формулы (3) следует соотношение

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = T_{ij}\ddot{q}_j, \qquad [i, j = 1, 2, 3]. \tag{9}$$

Отсюда видно, что парадокс Даламбера (§ 7) возникает уже из-за принятия предположения (3), и это заставляет нас вспомнить, что наша модель в общем не соответствует физической действительности. Более сложным оказывается исследование *моментов* и вообще величин, характеризующих вращение при наличии поступательного движения (см. § 111—112).

Выведенные выше формулы относятся к «присоединенной» массе. Очевидно, что *кажущаяся масса*, определяемая как сумма собственной массы находящегося в жидкости (твердого) тела Σ и присоединенной массы, представляется другим симметричным тензором (матрицей), обладающим в точности теми же свойствами.

§ 102. Геометрические фигуры частных видов; тело Рэнкина [1])

Коэффициенты присоединенной массы были подсчитаны теоретически не только для сферы, но и для тел простой геометрической формы. Обычно их приводят в безразмерном виде, выражая их через отношение k присоединенной массы ко всей массе, равной произведению плотности ρ на объем (Σ) вытесненной жидкости.

Многие результаты, полученные различными авторами, приведены в книге Ламба [7]. Эллиптические цилиндры в случае поступательного движения и вращения рассматриваются в [7], § 71 и § 105—107; сфероиды и эллипсоиды — в [7], § 105—107 и § 113—116; пара сфер — в [7], § 113—116.

Можно также вычислить присоединенную массу различных других «двумерных» фигур (цилиндров, движущихся параллельно своей оси). Так, Тейлор [2]) подсчитал величину k для различных многоугольников и параболических двуугольников. Различные авторы [3]) рассматривали также круги и эллипсы с симметрично расположенными стабилизаторами с целью исследовать стабилизирующее действие, которое оказывают на летательный аппарат рулевые поверхности.

---

[1]) Многие из результатов, приведенных в этом параграфе и в других параграфах этой главы, можно найти в работах Л. И. Седова [25*] и [27*]; см. также Риман И. С., Крепс Р. Л., Присоединенные массы тел различной формы, Тр. ЦАГИ № 635, 1947 г. — *Прим. ред.*

[2]) Taylor J. L., *Phil. Mag.*, **9** (1930), 161—183. Случай параллельных пластинок см. Рябушинский Д., Proc. Int. Math. Congress, Strasbourg (1920), 568—585; см. также Bickley W. G., *Phil. Trans.*, **A228** (1929), 235—274 и *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37** (1934), 82—105 и Seth B. N., Publ. Lucknow Univ. (1938—1939).

[3]) Kuerti G. и др., *Navord Rep.* **2295** (1952); Bryson A. E., *J. Aer. Sci.*, **20** (1953), 297—308 и **21** (1954), 424—426; Summers R. C., там же, **12** (1953), 856—857, ср. с формулой (22).

Из других осесимметричных тел, для которых аналитически найдена присоединенная масса, можно назвать тор, сферические луночки и «линзы», ограниченные соосными сферическими сегментами [1]). В случае сфер были исследованы и слабо деформированные сферы.

Можно также рассмотреть *тела Рэнкина* — твердые тела вращения, которые при обтекании равномерным потенциальным потоком параллельно оси x_1 эквивалентны системе источников и стоков, размещенных на этой оси. Мы рассмотрим сейчас подобные тела Рэнкина в порядке обобщения результатов Макса Мунка и Дж. Тейлора [2]).

Первый шаг заключается в том, что к выражению $U\nabla x_1 - x_1\nabla U$ применяется второе тождество Грина с учетом того, что $\nabla^2 U = \nabla^2 x_1 = 0$. Итак, если S'' — большая сфера, содержащая Σ, а R — область между поверхностью S тела Σ и сферой S'', то, полагая $U^h = U$, мы получаем из формулы (8)

$$T_{1h} = \rho \int_S \int U\left(\frac{\partial x_1}{\partial n}\right) dS = \\ = \rho \int_S \int x_1 \frac{\partial U}{\partial n} dS - \rho \int_{S''} \int \left(x_1 \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial x_1}{\partial n}\right) dS; \qquad (10)$$

причем $-\partial/\partial n = \partial/\partial r$ на сфере S''. Интегралы по сфере S'' можно легко оценить асимптотически, если воспользоваться представлением

$$-U = \sum \frac{\mu_i x_i}{r^3} + O(r^{-3}), \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 2\sum \frac{\mu_i x_i}{r^4} + O(r^{-4}). \qquad (11)$$

Так как площадь сферы S'' равна $4\pi r^2$, членами $O(r^{-3})$ соответственно $O(r^{-4})$ в формуле (10) можно пренебречь. В силу симметрии отпадают слагаемые, содержащие μ_2, μ_3. Чтобы оценить остаток, мы воспользуемся сферическими координатами,

---

[1]) Относительно тора см. Hicks W. M., *Phil. Trans.*, **172** (1881), 609 и Dyson F. W., там же, **184** (1892), 42. О сферических луночках см. Bassett A. B., *Proc. Lond. Math. Soc.*, **16** (1885), 286. Относительно линз см. Shiffman M. and Spencer D. C., *Quar. Appl. Math.*, **3** (1947), 270—288; Payne L. E., там же 10 (1952), 197—204. По поводу почти сферических тел см. Szego G., *Duke Math. J.*, **16** (1949), 209—223; также Plana, *Mem. accad. sc. Torino*, **38** (1835), 209.

[2]) *NACA Tech. Notes*, 104—106 и [83]; см. также [7], § 121а; Tollmien W., *Ing.-Archiv*, **9** (1938); Landweber L., *Quar. Appl. Math.*, **14** (1956), 51—56 и *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 319—336.

положив $x_1 = r\sin\varphi$, $dS = 2\pi d(\sin\varphi)$. Интеграл по сфере S'' с точностью до $O(r^{-1})$ равен величине

$$2\pi\mu_1\rho\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\{2\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\}\,d(\sin\varphi)=2\pi\rho\mu_1[\sin^3\varphi]_{-1}^{1}=4\pi\rho\mu_1.$$

Поэтому, переходя к пределу при $r\to\infty$, мы получим соотношение

$$T_{1h}=T_{h1}=4\pi\rho\mu_1^h-\rho\int\int x_1\left(\frac{\partial U^h}{\partial n}\right)dS, \tag{12}$$

где μ_1^h есть момент диполя величины U^h для направления x_1. Заметим, что вывод формул (10) — (12) справедлив для *любой* функции U, регулярной на бесконечности и удовлетворяющей условию $\int\int_{S''}(\partial U/\partial n)\,dS=0$.

Мы получили обобщение результата Тейлора [83], который рассматривал случай $h=1$. В этом случае $(\partial U^1/\partial n)\,\partial S$ есть dS_1, и интегрированием по частям по внутренней области Σ поверхности S мы находим, что $\int\int x_1\,dS_1=\int\int\int dR$ представляет собой объем тела Σ. Поэтому можно записать равенство

$$T_{11}=4\pi\rho\mu_1^1-\rho\cdot\text{объем }(\Sigma). \tag{12'}$$

Наличие величины объема тела Σ в формуле (12′) Тейлор объяснил тем, что заполненная жидкостью полость в Σ при поступательном движении увеличивает его присоединенную массу на величину, равную произведению ρ на объем полости, не изменяя дипольного момента U^1 на бесконечности.

Он также отметил, что в случае *тела Рэнкина* $\mu_1^1=\sum x_1^{(k)}e_k$. Следовательно, при поступательном движении вдоль оси x_1 присоединенная масса равна произведению момента диполя, определяющей тело системы источников и стоков, на величину $4\pi\rho$ минус масса вытесненной жидкости.

Формула для сферы, когда $\mu_1^1=a^3/2$, как в § 98 формула (1), является частным случаем выражения

$$T_{11}=2\pi\rho a^3-\rho\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)=\frac{2\pi\rho a^3}{3}.$$

Случаю вытянутого сфероида вращения соответствует линейное распределение источников между фокусами.

§ 103. Теория и эксперимент

Хотя мы начали с теоретического рассмотрения, но явление присоединенной массы впервые было открыто экспериментально. В 1776 г. Дюбуа [1]) наблюдал его влияние на период малых колебаний сферического маятника. Измеренные им значения k лежат в интервале 0,45—0,67.

В то время систематическое и точное определение периода колебаний маятников имело большое научное и практическое значение. Желательно было точно знать, чему равно g и каковы его аномалии, а для определения долготы во время длительных морских путешествий требовались хорошие хронометры. В пустоте мы имеем $ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta$, стало быть, g связано с периодом τ малых колебаний маятника длины l формулой $g = 4\pi^2 l/\tau^2$. Но необходимы поправки как на влияние воздуха, окружающего маятник, так и на трение в системе подвеса.

Очевидно, что из-за подъемной силы восстанавливающая сила $mg\sin\theta$ маятника плотности ρ уменьшается в отношении $1 - (\rho'/\rho)$, где ρ' — плотность воздуха. Благодаря очень точным измерениям Бейли [2]) было выяснено, что эта поправка, доходящая примерно до 5/р минут в день, является недостаточной. Отсюда ясно, какое большое значение имел результат Пуассона и Грина, что m в левой части уравнения маятника нужно заменить на «кажущуюся массу» m^*, что увеличивает величину τ в отношении $1 : [1 + (m'/m)]^{1/2}$. Такое вычисление a priori значения $m' = m^* - m$ для сферического маятника было поразительным результатом.

Однако точные измерения выявили то обстоятельство, что наблюдаемые значения $m' = k\rho \cdot$ объем (Σ), полученные по измененному уравнению маятника $(m + m')l\ddot{\theta} = m[1 - (\rho'/\rho)]\sin\theta$, систематически превышали значения, найденные по формулам Пуассона и Грина.

Это систематическое расхождение Стокс ([13], т. 3, стр. 1—101) объяснял влиянием *вязкости*. Его соображения будут конспективно изложены в § 115; из них следует, что указанная разность значений пропорциональна числу Стокса $S = \nu^{1/2}/\omega^{1/2}a$, где ω — частота, а a — радиус сферы. Стокс получил также вязкое *затухание*, которое в обычных условиях тоже пропорционально S.

Отсюда следует, что *при быстрых колебаниях малой амплитуды, когда S мало,* теория идеальной жидкости должна доста-

[1]) DuBuat, Principes d'hydraulique, 3-е изд., Paris, 1816, 221—251 (первое издание — в 1776 г.). Обзор более ранних работ см. в [13], т. 3, стр. 76—122 или в [79], стр. 97—101.

[2]) Baily F., *Trans. Roy. Soc., London* (1832), 399—492.

точно хорошо согласовываться с наблюдениями. И действительно, многие эксперименты [1]) показали хорошее согласование с теорией. К сожалению, амплитуды при этом обычно не измерялись, а погрешности эксперимента часто были одного порядка с поправкой на вязкость. Данные Бесселя, по-видимому, занимают особое место; некоторые побочные эффекты в этих опытах были проанализированы Стоксом ([13], т. 3, стр. 112).

Было установлено также, что вдали от всех твердых границ движение жидкости *при ускорении из начального состояния покоя* на протяжении примерно диаметра хорошо согласуется с теорией идеальной жидкости. Однако, после того как сфера подвинется на несколько диаметров, наблюдается отрыв потока (отделяется вихревой слой), и тогда стационарное значение C_D становится более важным [2]). Еще скорее это происходит при ускоренном движении диска перпендикулярно к его плоскости [3]); этого и следовало ожидать, так как острая кромка благоприятствует отрыву. Вообще говоря, тенденция к отрыву зависит от величины полного перемещения, выраженной в диаметрах; так, при периодическом движении она зависит от $U_{\max}\tau/d$, где τ — период.

§ 104. Коэффициенты устойчивости

При исследовании устойчивости стационарного движения в воде многих типов тел были использованы в соответствующем оформлении идеи, подсказываемые лагранжевыми формулировками (§ 99, 100). Если эти формулировки применимы, то можно подставить формулу (2) в соотношение (3), чтобы получить следующее уравнение:

$$Q_l = \sum T_{lj}(\mathbf{q})\,\ddot{q}_j + F_l(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}}), \tag{13}$$

где F_i выражаются формулой

$$F_l = \sum \Gamma_l^{jk}(\mathbf{q})\,\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{13'}$$

[1]) Laird L. H., *Phys. Rev.*, **7** (1898), 102—105; Krishnayar S., *Phil. Mag.*, **46** (1923), 1049—1053; Yu Y. T., *J. Appl. Phys.*, **13** (1942), 66—69 и **16** (1945), 727—729; Stelson T. H., Thesis Ph. D., Carnegie Inst. Tech. (1952). См. также предыдущие ссылки, а также примечания к § 104—115.

[2]) Cook G., *Phil. Mag.*, **39** (1920), 350—382; Hirsch P., *ZAMM*, **3** (1923), 93—107; Bagliarello G., *Ric. Sci.*, **26** (1956), 437—461. О вычислении расстояний, на которых происходит отрыв потока, см. Tollmien H., *Handbuch Exp. Phys.*, **4** (1931), ч. 1, 272—279; Goldstein S., Rosenhead L., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 392—401.

[3]) Luneau J., *C. R. Paris*, **227** (1948), 823—825 и **229** (1949), 227—228; Iverson H. W., Balent R., *J. Appl. Phys.*, **22** (1951), 324—328; в пяти случаях наблюдалось теоретическое k.

а $\Gamma_l^{jk} = (\partial T_{ij}/\partial q_k + \partial T_{ik}/\partial q_j - \partial T_{jk}/\partial q_i)/2$ суть компоненты тензора Кристоффеля ([76], стр. 39). Кроме того, входящие в эти формулы функции в принципе можно, как утверждал Лагранж (§ 1), определить *a priori* при помощи теории потенциала.

На практике предполагается известным лишь *вид* уравнений (13) и (13′), причем формула (13′) фактически соответствует принятию «инерциального моделирования» (§ 70). Указанные уравнения применяются обычно только к малым возмущениям стационарного движения, что позволяет считать T_{ij} и Γ_l^{jk} в уравнениях (13) и (13′) постоянными величинами. Эти постоянные (подобно C_D, C_L и др.) обычно определяют *эмпирически* — так, чтобы они соответствовали данным наблюдения; эмпирические константы, определяемые таким образом, называются *коэффициентами устойчивости.*

Во время первой мировой войны такие коэффициенты использовались, например, для исследования устойчивости вращающихся снарядов [1]). В настоящее время они применяются к анализу устойчивости полета ракет и управляемых снарядов; случай снарядов со стабилизатором гораздо проще для изучения.

Чрезвычайно важно и хорошо разработано их применение к анализу устойчивости полета самолетов. Тесно связан с этим анализ устойчивости движения дирижаблей (и подводных лодок). В этих случаях особенно большую роль играет инерция воздуха (воды), в котором находится движущееся тело. См. [45*].

Вдохновляемые идеями Лагранжа, различные авторы пытались вычислять коэффициенты устойчивости исходя из *априорных* соображений. Хотя для дирижаблей и подводных лодок удалось добиться некоторых успехов, эксперименты показали, что в действительности присоединенная масса при стационарном движении испытывает значительные изменения. Соответствующие вычисления коэффициентов устойчивости для самолетов гораздо труднее: нужно учитывать циркуляцию и распределение вихрей; большие сомнения вызывает использование условия Жуковского. Мы отсылаем читателя за подробностями к технической литературе [2]).

---

[1]) Fowler, Gallop, Lock, Richmond, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221 (1920), 295—387 и A222 (1922), 227—247; см. McShane E. Y., Kelley J. L., Reno F. V., Exterior ballistics, Denver, 1953.

[2]) Обзоры вместе с библиографией дали Reissner E., *Bull. Am. Math. Soc.*, 55 (1949), 825—850 и Garrick I. E., *Appl. Mech. Revs*, 5 (1952) 89—91; см. также Scruton W. R., Aer. Res. Comm. Rep., 1931. Относительно дирижаблей см. Cowley, Levy, Frazer, Relf, Jones, Adv. Comm. Aer., Tech. Rep., 1918, 1919, стр. 95—127; Szebehely V., Proc. Sec. Nat. Congr. Applied Mech. USA (1954), 771—776.

На практике кажущейся массой интересуются также в связи с тем влиянием, которое она оказывает на собственные частоты колебаний *корабля*, равно как и на частоты бортовой и килевой качки. В первом случае влияние свободной поверхности легко оценить. В виду относительно большой частоты можно положить при этом $U = 0$. В других случаях влияние образующихся на поверхности волн учесть сложнее. И на этот раз мы отсылаем читателя к литературе [1]). По-видимому, мало имеется систематических знаний относительно зависимости коэффициентов устойчивости от числа Фруда.

Наконец, многие авторы применяли понятие кажущейся массы для оценки ударных сил при посадке гидроплана на воду при входе снарядов в воду и другие жидкости. Краткое резюме по этому вопросу приведено в работе [17] [2], стр. 243—250.

Хотя дедуктивная теория § 99—102, строго говоря, не применима ни к одному из приведенных примеров, все же в каждом из них понятие тензора присоединенной массы оказалось плодотворным.

§ 105. Присоединенная масса и количество движения

В большинстве приложений влияние присоединенной массы сочетается с воздействием многих других факторов, в исследовании которых заинтересованы только специалисты. Поэтому мы сейчас вернемся к чистой теории кажущейся массы — теории, привлекательной и с эстетической и с математической точек зрения. Но прежде чем перейти к более абстрактным рассмотрениям (§ 108—112), мы приведем несколько частных результатов, которые помогут уяснить смысл вводимых нами абстракций.

Составляющие тензора присоединенной массы наиболее удовлетворительно определяются посредством интегралов кинетической *энергии* подобно формулам (2) и (4). Эти интегралы *сходятся* на бесконечности, так как (§ 7) $\nabla U = O(r^{-3})$ в пространстве. В случае плоских течений Дирихле интеграл кинетической энергии также сходится на бесконечности: и в этом случае интеграл $\iint (\nabla U \nabla U)\, dx\, dy = O\left(\int r^{-4} r\, dr\right)$ конечен.

[1]) Nicholls H. W., *Trans. Inst. Nav. Arch.*, (1924), 141—163; Lewis F. M., *Trans. Nav. Arch. Mar. Eng.*, **37** (1929), 1—18; Moullin E. B., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **24** (1928), 400—413 и 531—558; Brown A. D. и др., там же, **26** (1930), 258—262; Weinblum G., *Schiffbau*, **32** (1931), 488—495; 509—511 и 525—529; Хаскинд М. Д., *Изв. АН СССР* (1946), 23—34 и *ПММ*, **10** (1946), 475—480; Wendel K., *Jahr. der Schiffsbau Ges.*, **44** (1950), 207—255.

[2]) Первая задача о присоединенной массе плавающего тела была решена Н. Е. Жуковским [28*]. Современное состояние вопроса см. в работах [7*], [17*], [26*—33*]. — *Прим. ред.*

Сейчас мы будем интерпретировать T_{hk} как интегралы количества движения. Различные авторы отмечали [1]), что интегралы количества движения расходятся в обычном смысле. Поэтому при интерпретации величин T_{hk} с помощью количества движения нужно соблюдать осторожность. А теперь рассмотрим это подробнее.

Коэффициенты T_{hk} из формулы (8) представляют собой интегралы, взятые по границе S тела Σ, и в новых обозначениях их можно записать в виде

$$T_{hk} = \rho \int_S \int U \, dS_{\mathbf{K}}, \tag{14}$$

где $U = U^h$ — гармоническая функция и $dS_K = \sum_{i=1}^{3} K_i \, dS_i$ выражает дифференциал потока векторного поля $\mathbf{K} = (K_1(\mathbf{x}), K_2(\mathbf{x}), K_3(\mathbf{x}))$ через S. Так, в случае переносов, параллельных оси x_1, $\mathbf{K} = (1, 0, 0)$; в случае поворотов вокруг оси x_1 получим $\mathbf{K} = (0, x_3, -x_2)$ и т. д. Посредством этого удобного обозначения определяется полезный класс интегралов Стильтьеса по поверхностям при условии, что интеграл $\int\int |dS_{\mathbf{K}}|$ конечен. Заметим, что всегда, когда $\mathbf{K}$ есть поле скоростей твердого тела, $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$. Это условие и еще то, что U есть гармоническая функция, регулярная на бесконечности ([4], стр. 217), — вот и все, что нам потребуется для дальнейших выводов.

Определим «$\mathbf{K}$-линию» как интегральную кривую системы $dx_i/dt = K_i(\mathbf{x})$, или $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{K}(dx_i = K_i dt)$. Таким образом, если $\mathbf{K}$ соответствует поступательному движению параллельно оси x_1, то $\mathbf{K}$-линии суть прямые, параллельные этой оси; если $\mathbf{K}$ соответствует винтовому движению относительно оси x_1, то $\mathbf{K}$-линии представляют собой винтовые линии вокруг этой оси и т. д. Теперь к векторному полю $U\mathbf{K}$ над областями R, ограниченными поверхностями $S \cup S' \cup S''$, где S'' состоит из $\mathbf{K}$-линий, мы применим теорему о дивергенции. Так как $dS_{\mathbf{K}} \equiv 0$ на поверхности S', состоящей из $\mathbf{K}$-линий, и так как

$$\operatorname{div}(U\mathbf{K}) = K_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + U \operatorname{div} \mathbf{K},$$

то, пользуясь равенством $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$, мы получаем из формулы (14) следующее соотношение:

$$T_{hk} = \rho \int_P \int \int \left(K_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) dR - \rho \int_S \int U \, dS_{\mathbf{K}}. \tag{14'}$$

[1]) [7], 119; Tollmien H., *ZAMM*, **18** (1938), 154.

Показанные здесь знаки перед двойным и тройным интегралами верны, если нормали направлены *внутрь* области R. В частности, если R — *бесконечная* область и поверхность S' отодвигается на бесконечность и если интеграл в области R сходится, то получим формулу

$$T_{hk} = \rho \int\int_P \int \left(K_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) dR. \qquad (14^*)$$

Теперь рассмотрим различные случаи, соответствующие частным значениям коэффициентов в выражении для присоединенной массы.

Если $k = 1$, то $\mathbf{K} = (1, 0, 0) = \operatorname{grad} x_1 = \nabla x_1$ в зависимости от обозначений. Пусть S'' есть бесконечно длинный *цилиндр*, ось которого параллельна оси x_1 и который содержит тело Σ. Тогда, поскольку интеграл от количества движения

$$T_{h1} = T_{1h} = \rho \int_S \int U^h \, dx_2 \, dx_3 = \rho \int\int_R \int \left(\frac{\partial U^h}{\partial x}\right) dR \qquad (15а)$$

сходится на бесконечности, мы получаем следующий результат. *Коэффициенты в выражении для присоединенной массы, соответствующие поступательному движению параллельно оси* x_1, *равны составляющей по* x_1 *количества движения жидкости внутри любого бесконечного цилиндра, соосного с* x_1 *и содержащего тело* Σ *при движении с единичной скоростью в направлении* h. Область R проще всего брать в виде цилиндра, описанного вокруг тела Σ. Этот результат применительно к величине T_{11} получил Теодорсен [84].

Далее, если $k = 4$, то $\mathbf{K} = (0, x_3, -x_2) = x_3 \nabla x_2 - x_2 \nabla x_2$. Пусть S'' ограничивает любое *твердое тело вращения*, которое содержит тело Σ и для которого ось x_1 есть ось симметрии. Тогда граница $S \cup S''$ области R состоит из поверхности S и из $\mathbf{K}$-линий (кругов), так что формула (14*) сводится к виду

$$T_{h4} = \rho \int\int_R \int \left(x_2 \frac{\partial U^h}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial U^h}{\partial x_2}\right) dR = \rho \int\int_R \int \left(\frac{\partial U^h}{\partial \theta}\right) dR, \qquad (15б)$$

где $\theta = \operatorname{arc\,tg} x_3/x_2$. Следовательно, T_{h4} — *момент количества движения* относительно оси x_1 жидкости, находящейся в области R.

С помощью циклической перестановки осей из (15а) и (15б) можно легко получить остальные величины T_{hk}. Случай *винтового движения* вокруг оси x_1, когда $\mathbf{K} = \alpha \nabla x_1 + \beta(x_2 \nabla x_3 - x_3 \nabla x_2)$, легко получить суперпозицией двух предыдущих формул. Пусть поверхность S'' — *круговой цилиндр*, описанный во-

круг тела Σ. Тогда присоединенная масса равна количеству винтового движения жидкости, находящейся внутри поверхности S'', а именно $\rho \int\int (\alpha\, \partial U^h/\partial x_1 + \beta\, \partial U^h/\partial\theta)\, dR$; то же самое верно для всех цилиндров, соосных с x_1 и содержащих тело Σ.

§ 106. Другие интерпретации

Совсем недавно Ч. Дарвин [1]) дал новую и очень простую интерпретацию теоретической присоединенной массы твердого тела, введя представление о *дрейфе*, т. е. о смещении поперечной поверхности жидкости, вызываемом поступательным движением тела Σ из $-\infty$ в $+\infty$ вдоль данной оси. Он показал, что *присоединенный объем* μ_1/ρ, определяемый как отношение величины присоединенной массы при поступательном движении к плотности жидкости, равен объему, заключенному между начальным и конечным положениями любой такой поверхности.

В случае *плоско-параллельного* обтекания некоторой плоской области Σ можно дать другую, совсем простую интерпретацию в терминах конформного отображения:

$$z' = az + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots, \qquad a > 0, \tag{16}$$

переводящего внешность единичного круга на внешность области Σ. Как уже отмечалось в § 8, имеется одно и только одно такое преобразование. Заметим, что если V есть функция тока, то дифференциал $(\nabla V \cdot \nabla V)\, dx\, dy$ кинетической энергии сохраняется при конформном отображении и скорость на бесконечности изменяется при этом в отношении $1 : a$. С другой стороны, функция V из уравнения $V + u_\infty y = \phi$ удовлетворяет краевому условию $V = 0$ на Σ.

Непосредственная асимптотическая оценка, учитывающая эти данные ([86], стр. 204), показывает, что в случае течений, параллельных оси x_1, присоединенная масса M_{11} тела Σ удовлетворяет уравнению [2])

$$M_{11}/\rho + \text{площадь}(\Sigma) = 2\pi a^2 [1 - \mathrm{Re}\,(c_1)]. \tag{17}$$

Формулой (17) задача вычисления присоединенной массы сводится к задаче конформного отображения.

Другой интересный результат — это теорема Пойа о том, что из всех плоских областей, имеющих данную площадь, круглый диск обладает наименьшей усредненной присоединенной массой

[1]) *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 342—354; см. также Lighthill M. Y., *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 31—53 и 311—312.

[2]) В [7*] даны выражения для всех коэффициентов присоединенных масс. — *Прим. ред.*

(усредненной по всевозможным ориентациям). Аналогичный результат для сфер в пространстве недавно получил Шиффер [1]).

Наконец, имеется замечательный результат, выявляющий связь понятия присоединенной массы с теорией струй, рассмотренной в гл. III. Как впервые доказал Рябушинский, в семействе границ, охватывающих один и тот же объем (или, в случае плоских течений, — одну и ту же площадь), *экстремальное значение присоединенной массы дают свободные границы*. Относительно вывода и применений этой теоремы мы отсылаем читателя к [17], стр. 85—89 и 177—184.

§ 107. Каноническая форма

Как уже пояснялось в § 101, тензор кажущейся массы тела Σ зависит от выбора осей координат, связанных с телом, и изменяется с изменением положения тела относительно некоторого заданного начального положения отсчета $\mathbf{q} = 0$. Случай сферы весьма прост. Если оси проходят через центр сферы, то в обозначениях из § 100 справедливы равенства

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = m^*, \quad T_{44} = T_{55} = T_{66} = 2ma^2/5,$$

а все T_{ij} вне главной диагонали $[i \neq j]$ равны нулю.

Другой известный частный случай — это твердое тело в *пустоте*. Если за начало координат взять центр тяжести, то все T_{ij} $[i \neq j$ и $i, j = 1, 2, 3]$ обратятся в нуль, а $T_{11} = T_{22} = T_{33} = m$, где m — масса тела. Далее, приняв главные оси инерции в качестве декартовых осей координат, мы можем обратить в нуль все $T_{ij} (i \neq j$ и $i, j = 4, 5, 6)$. Следовательно, тензор инерции определяется четырьмя скалярными величинами T_{11}, T_{44}, T_{55}, T_{66}, которые путем изменения единиц длины и времени можно свести к *двум*. Затем, $T_{44} + T_{55} \geqslant T_{66}$ и т. д. при циклической замене индексов; случай эллипсоида является вполне общим.

В двух указанных случаях матрица $\|T_{ij}\|$ приводится к диагональной форме с помощью надлежащего выбора осей координат. Представляет интерес выяснить, насколько можно упростить матрицу инерциальных коэффициентов T_{ij} при помощи надлежащего выбора декартовой системы координат и центральной точки [2]) для общего случая жидкости с положительной плотностью. Это представляет собой простое упражнение по теории квадратичных форм.

---

[1]) Polya G., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **33** (1947), 218—221; Schiffer M., *Comptes Rendus*, Paris, **244** (1957), 3118—3121.

[2]) Относительно центральной точки см. [34*]. По вопросу об упрощении матрицы инерциальных коэффициентов см. [25*]. — *Прим. ред.*

На примере весла (§ 98) видно, что кажущаяся инерция может быть различной при поступательном движении в различных направлениях; гораздо легче создать ускорение, рассекая веслом воду, чем загребая. Однако так как всякая квадратичная форма эквивалентна [1]) относительно группы вращений диагональной форме, то мы всегда можем повернуть оси так, чтобы получить $T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$, причем величины T_{11}, T_{22}, T_{33} будут соответствовать «главным направлениям» поступательного движения.

За исключением случая вырождения (случай невесомой тонкой пластинки), когда одна из величин T_{ii} [$i = 1, 2, 3$] обращается в нуль, возможно дальнейшее упрощение надлежащим выбором начала координат в центральной точке. Пусть w_1, w_2, w_3 обозначают вращения со скоростью один радиан в секунду относительно некоторой системы осей, параллельных главным направлениям поступательного движения; пусть X, Y, Z обозначают перемещения в главных направлениях при единичной скорости, и пусть w_1', w_2', w_3' обозначают вращения относительно осей, смещенных на вектор (x, y, z). Тогда

$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 + yZ - zY, \\ w_2' &= w_2 + zX - xZ, \\ w_3' &= w_3 + xY - yX. \end{aligned} \tag{18}$$

Подстановка w_1' вместо w_1 не изменяет T_{14} — энергию взаимодействия между X и w_1, поскольку энергия взаимодействия между X и Y или Z равна нулю. С другой стороны, при этом величина $T_{15} = T_{51}$ увеличивается на zT_{11}, величина $T_{16} = T_{61}$ — на xT_{22}, а величина T_{24} уменьшается на zT_{22} и т. д.

Поэтому надлежащим выбором z можно добиться равенства $T_{15} = T_{24}$ и аналогично получить $T_{16} = T_{34}$ и $T_{26} = T_{35}$. Таким образом, *матрицу инерциальных коэффициентов можно привести* к упрощенной форме, которая указана на рис. 27.

В эту каноническую форму входят *пятнадцать произвольных постоянных,* число которых можно свести к тринадцати, изменив масштаб длины и времени. Итак, общий случай характеризуется *тринадцатью* безразмерными отношениями и двумя преобразованиями единиц измерения.

Если тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, как эллипсоид, то их можно взять в качестве коор-

[1]) Используемые здесь алгебраические теоремы доказаны, например, в [45], гл. IX, теорема 21. По поводу самих результатов см. [7], § 126; общий случай рассмотрел Clebsch, *Math. Annalen,* 3 (1870), 238. Относящиеся сюда другие результаты см. Morgan G. W., *Quar. Appl. Math.,* 12 (1954). 277—285.

динатных плоскостей. Отражение, скажем, в плоскости (x, y) оставляет Z, w_1, w_2 неизменными, но меняет знак на противоположный у X, Y, w_3; кинетическая энергия при этом не изменяется. В силу этого $T_{13} = -T_{31} = 0$, и аналогично

$$T_{32} = T_{36} = T_{41} = T_{42} = T_{46} = T_{51} = T_{52} = T_{56} = 0.$$

Повторяя это рассуждение для других координатных плоскостей, мы видим, что матрицу инерциальных коэффициентов

Перенос			*Вращение*		
α	0	0	ρ	ξ	η
0	β	0	ξ	σ	ζ
0	0	γ	η	ζ	τ
ρ	ξ	η	T_{44}	T_{45}	T_{46}
ξ	σ	ζ	T_{45}	T_{55}	T_{56}
η	ζ	τ	T_{46}	T_{56}	T_{66}

Рис. 27.

можно диагонализировать. Таким образом, у нас остаются *шесть* произвольных постоянных и *четыре* безразмерных отношения (их только два в случае твердого тела в вакууме).

Другой интересный случай — симметрия относительно трех взаимно перпендикулярных осей, но без симметрии относительно плоскостей, проходящих через эти оси. Типичным примером является винтовая линия: $x = r\cos z$, $y = r\sin z$, $|r| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 2\pi$.

В силу симметрии относительно оси z остаются неизменными Z, w_3, но меняется знак на противоположный у величин X, Y, w_1, w_2. Поэтому, как и выше, получаем равенства

$$T_{13} = T_{23} = T_{43} = T_{53} = T_{16} = T_{26} = T_{46} = T_{56} = 0.$$

Повторив это рассуждение для других координатных плоскостей, мы видим, что, кроме «винтовых произведений инерции» ρ, σ, τ, все коэффициенты, стоящие вне главной диагонали, обращаются в нуль. Таким образом, здесь мы имеем *девять* коэффициентов инерции, и при помощи изменения масштабов длины и времени их можно свести к *семи* существенно независимым параметрам.

Приведенные выше рассуждения можно равным образом применить к тензору присоединенной массы, хотя, вообще го-

воря, главные оси будут при этом другими, если только они не являются осями симметрии. Мы рассматривали тензор кажущейся массы с целью включить сюда известный случай твердого тела *в пустоте* в качестве частного [1]).

§ 108. Геометрическая интерпретация

Теперь мы будем трактовать теорию кажущихся масс как раздел чистой геометрии. Начнем с того результата из § 100, 101, что система, состоящая из твердого тела Σ в идеальной жидкости, *есть инерциальная лагранжева система* с кинетической энергией, равной $T = \frac{1}{2} T_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$. Отсюда можно легко вывести классический результат [2]), заключающийся в том, что «естественные» траектории, получающиеся при отсутствии внешних сил, представляют собой *геодезические линии*. В частности, $Q = 0$ в формуле (3) тогда и только тогда, когда $\int T\,dt$ принимает минимальное значение. Это очевидное следствие из уравнений Эйлера представляет собой простейший случай принципа наименьшего действия — вариационной формулировки динамических задач.

Точнее, пространство «конфигураций» $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_6)$ нашей системы есть риманово многообразие с «длиной дуги»

$$ds^2 = \sum T_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i\, dq_j. \tag{19}$$

Кроме того, поскольку энергия не изменяется, ds/dt есть величина постоянная, и поэтому как $\int T\,ds$, так и $\int T\,dt$ принимают экстремальные значения (локальный минимум). Эти положения легко проверить на известных примерах.

Так, если $V = V_2$ есть поверхность без трения $x = x(q_1, q_2)$ в обычном пространстве, мы видим, что реакция связи перпендикулярна поверхности V_2; поэтому при отсутствии внешних сил нормаль к траектории частицы служит нормалью к V_2; как известно, это условие характеризует геодезические линии. В более общем случае рассмотрим произвольную траекторию γ на поверхности V_2. Нормальной к поверхности V_2 составляющей силы реакции обычно пренебрегают. Остается сила в плоскости, касательной к поверхности V_2. Она разлагается на две составляющие: на составляющую s, *касательную* к γ, которую можно вы-

[1]) Относительно материала § 107 см. [30].

[2]) Герц Г., Принципы механики, М., 1959; [76], § 100; Synge J. L., *Phil. Trans.*, **A226** (1926), 31—106.

числить по формуле $\ddot{s} = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2$, используя выражение $T = \frac{1}{2}\sum \dot{x}_k^2$, и на составляющую, *нормальную* к γ в плоскости, касательной к поверхности V_2, равную произведению геодезической кривизны на $v^2 = \dot{s}^2$.

Аналогичные формулы справедливы во всяком римановом пространстве V. В частности, Q преобразуется как (контравариантный) *вектор*, а ее нормальная составляющая равна произведению вектора геодезической кривизны на v^2. Следовательно, задачи *динамики* инерциальных лагранжевых систем эквивалентны *геометрическим* задачам.

§ 109. Доказательство того, что система является лагранжевой

Теперь для трехмерного тела ограниченного объема мы докажем справедливость предположения, что обобщенные силы Q_i, определяемые вариационными уравнениями Лагранжа (3), действительно являются компонентами Q^{*i} результирующего давления или соответственно момента силы давления в обычном смысле [1]). Последние, конечно, определяются математически как интегралы по поверхности тела

$$Q_i^* = \int\int pN_i\, dS. \tag{20}$$

Здесь N_i обозначает нормальную составляющую смещения поверхности при поступательном или вращательном движении, соответствующую i-й обобщенной координате, а p определяется из уравнения Бернулли

$$p + \rho\left[\frac{1}{2}\nabla U \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t}\right] = p_0(t) \tag{21}$$

для неустановившегося движения в идеальной жидкости [гл. I, (5)], если, как обычно, пренебречь гидростатическими подъемными силами.

Строгое проведение доказательства затрудняется тем, что полная масса рассматриваемой системы бесконечная, а также бесконечно число измерений «пространства конфигураций» в со-

[1]) Возможность принять уравнения (3) ставили под вопрос Больцман (*Crelle*, т. 73, стр. 111) и Персер; см. также Mises R., *ZAMM*, 4 (1924), 155—181 и 193—213.

ответствии с бесконечностью числа степеней свободы при движении жидкости. Вопросом преодоления этих трудностей занимался лишь Ламб ([82] и [7], § 135, 136), и, как кажется, не совсем успешно [1]). Поэтому мы приведем новое и весьма изящное вариационное доказательство, принадлежащее, с точностью до небольших видоизменений, Дж. Брейквеллу. При изложении этого доказательства мы будем пользоваться выразительной δ-символикой для вариаций, общеупотребительной в динамике, хотя большинство современных авторов, занимающихся вариационным исчислением [2]), предпочитают обычные обозначения дифференциального исчисления.

Мы применим без доказательства две общие теоремы. Первая из них представляет собой тождество Эйлера для первой вариации

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} Q_i \delta q_i(t)\,dt, \tag{22}$$

где Q_i те же, что и в уравнениях (3), и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Вторая теорема заключается в том, что в тождестве (22) возможны все вариации $\delta q_i(t)$, лишь бы они удовлетворяли условиям $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Это равносильно «голономности» пространства конфигураций для твердого тела. Отсюда следует, что для доказательства тождества $Q_i = Q_i^*$ при сравнении формул (3) и (2) достаточно доказать первое тождество из следующих двух:

$$\int_{t_0}^{t_1} Q_i^* \delta q_i(t)\,dt \overset{?}{=} \delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta \int\int\int \frac{1}{2} \nabla U \nabla U\, dm \right\}. \tag{23}$$

Второе тождество становится очевидным, если дифференциал массы dm в формуле (23) записать в виде $\rho\, dR$.

Тождество (23) можно доказать, преобразуя правую часть следующим образом. Наше преобразование допустимо, поскольку, как и раньше, $\nabla U \nabla U = O(1/r^6)$, благодаря чему четырехкратный интеграл по пространству и времени сходится абсолютно, и, следовательно, можно менять порядок интегрирования. Прежде всего, воспользовавшись лагранжевой системой координат, дви-

[1]) Так, рассматриваемые в [82] интегралы не сходятся, а в [7] точный смысл принятых там за основу допущений, как нам кажется, не вполне ясен.

[2]) Morse M., The Calculus of Variations in the Large, New York, 1934; Блисс Дж. А., Лекции по вариационному исчислению, М., 1950.

жущейся вместе с жидкостью, мы непосредственно получаем соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta\int\int\int \frac{1}{2}\nabla U\nabla U\, dm\right\} = \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\int\int\int u_i\,\delta u_i\, dm\right\} = \int\int\int dm\left\{\int_{t_0}^{t_1} u_i\,\delta u_i\, dt\right\}, \quad (24)$$

где $u_i = \partial U/\partial x_i$. Интегрируя по частям, для каждой частицы жидкости находим соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} u_i\,\delta u_i\, dt = [u_i\,\delta x_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} a_i\,\delta x_i\, dt, \quad (25)$$

где $a_i = du_i/dt$ обозначает ускорение.

Из уравнений движения (гл. I, (2)) следует, что если можно пренебречь гидростатической подъемной силой (§ 21, теорема 1), то $-a_i = \partial p/\rho\partial x_i$, и, следовательно,

$$\operatorname{div}(p\,\delta\mathbf{x}) = \sum \delta x_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + p\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}) = \sum \delta x_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = -\rho\sum a_i\,\delta x_i, \quad (26)$$

так как $\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}) = 0$ для несжимаемой жидкости. Аналогично $\operatorname{div}(U\delta\mathbf{x}) = \sum u_i\delta x_i$. Снова подставим формулу (25) в последнее выражение в формуле (24) и, кроме того, воспользуемся для преобразования (24) формулами (26) и аналогичным ему соотношением. Мы получим следующий результат:

$$\int\int\int dR\,[\operatorname{div}(\rho U\,\delta\mathbf{x})]_{t_0}^{t_1} + \int\int\int dR\left\{\int_{t_0}^{t_2}\operatorname{div}(p\,\delta\mathbf{x})\,dt\right\}. \quad (27)$$

Так как $p = O(1/r^6)$, $\delta\mathbf{x} = O(r)$ и $dR = 4\pi r^2 dr$, четырехкратный интеграл, как и раньше, сходится абсолютно. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования и затем, применив теорему о дивергенции [1]), получим равенство

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \left[\int_S\int \rho U\,\delta x_n\, dS\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\int_S\int p\,\delta x_n\, dS\right\}. \quad (28)$$

[1]) Чтобы оправдать такое применение, необходимо воспользоваться теоремой Лагранжа о том, что частицы жидкости, соприкасающиеся с твердым

Здесь δx_n обозначает составляющую вектора $\delta\mathbf{x}$, нормальную к общей границе S твердого тела и жидкости. Так как твердое тело и жидкость соприкасаются, то в обозначениях формулы (20) $\delta x_n = \sum N_i \delta q_i$. В частности, $\delta x_n = 0$ в точках t_0 и t_1 и первый член в правой части равенства (28) обращается в нуль, так как $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Из равенства $\delta x_n = \sum N_i \delta q_i$ мы получим также в силу формулы (20) следующее выражение:

$$\int_S \int p\,\delta x_n\,dS = \sum \int_S \int pN_i\,\delta q_i\,dS = \sum Q_i^*\,\delta q_i.$$

Подставив это в равенство (28), получим соотношение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0 + \int_{t_0}^{t_1} Q_i^*\,\delta q_i(t)\,dt. \tag{29}$$

Это соотношение доказывает тождества (23), следовательно, $Q_i^* = Q_i$.

§ 110. Однородность

Риманово многообразие V, определяемое формулой (19) по пространству конфигураций твердого тела $\boldsymbol{\Sigma}$ в бесконечной идеальной жидкости, замечательно тем, что оно обладает простой транзитивной группой «изометрий» (движений твердого тела), оставляющих инвариантным ds. По современной математической терминологии оно является *однородным пространством*. Это объясняется следующим очевидным теоретико-групповым принципом относительности: *относительно рассматриваемого тела все положения эквивалентны*. Формально это можно выразить следующим образом.

Различные положения $\mathbf{q} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ тела в пространстве взаимно однозначно соответствуют различным движениям твердого тела, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, перемещающим тело из фиксированного начального положения отсчета $\mathbf{0}$ в положения $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$. Поэтому мы можем отождествить точки пространства конфигураций с элементами *евклидовой группы* [45, стр. 259]. Кроме того, если α есть некоторое отдельное движение твердого тела, то для наблюдателя в положении $\mathbf{a}$ положение $\alpha\sigma$ представляется точно та-

---

телом, образуют инвариантное множество ([11], т. 1, п. 50). Нужно также отметить, что поверхностные интегралы от $U\delta x_n$ и $p\delta x_n$, взятые по большим сферам, стремятся к нулю, так как $\delta x_n = O\left(\int u\,dt\right) = O(1/r^3)$.

ким же, каким σ представляется наблюдателю в **0**, поскольку все декартовы системы координат эквивалентны. Поэтому «группа переносов» $\sigma \to \alpha\sigma$ не может изменить метрику (19), определяемую кинетической энергией.

Пусть теперь α изменяется: рассматривая V как групповое многообразие евклидовых групп, мы видим, что V имеет «просто транзитивную»[1]) группу «изометрий» (т. е. движений, оставляющих инвариантной метрику ds^2). Подобное многообразие мы будем называть *римановым групповым многообразием*; и мы всегда можем рассматривать изометрии как левые переносы.

Кроме изложенного, можно сделать еще одно теоретико-групповое замечание. «Стационарным движением» в динамике называют движение, которое, если рассматривать его по отношению к осям, связанным с телом, не зависит от времени. Как и в формуле (13), ускорение $\ddot{\mathbf{q}}$ стационарного движения увеличивает значение $Q_i = \sum d(T_{ij}\dot{q}_j)/dt + (\partial T_{hk}/\partial q_i)\dot{q}_h\dot{q}_k$ на величину $T_{ij}\ddot{q}_j$. Следовательно, для того чтобы получить силы при произвольном движении, мы просто можем сложить силы, соответствующие ускорению $\ddot{\mathbf{q}}$ из начального состояния покоя, рассмотренные в § 100—102, и силы, действующие при стационарном движении. Так, если мы хотим определить силы, действующие на твердое тело при его *стационарном движении* в идеальной (т. е. несжимаемой невязкой) жидкости, то мы можем определить силы и при любом движении. Поэтому мы ограничимся задачей определения сил, действующих при стационарном движении.

Хорошо известно[2]), что единственными геометрически возможными стационарными движениями твердого тела в евклидовом пространстве являются поступательное и вращательное движения с постоянной скоростью и винтовое движение с фиксированным шагом и тоже с постоянной скоростью.

По определению, если $\alpha(t)$ — стационарное движение, то смещение σ, необходимое для перехода от $\alpha(t)$ к $\alpha(t+h)$, зависит только от h, т. е. σ есть $\sigma(h)$. Поэтому

$$\alpha(0)\sigma(h+h') = \alpha(h+h') = \alpha(h)\sigma(h') = \alpha(0)\sigma(h)\sigma(h').$$

Сократив в равенстве слева на величину $\alpha(0)$, получим тогда $\sigma(h+h') = \sigma(h)\sigma(h')$; следовательно, перемещения $\sigma(h)$ образуют *однопараметрическую подгруппу* относительно канонических

---

[1]) Под этим подразумевается, что при данных $\sigma, \tau \in V$ существует одно и только одно α, такое, что $\sigma\alpha = \tau$. Мы предполагаем здесь некоторое знакомство с левыми переносами абстрактной группы.

[2]) См., например, Ames J. S., Murnaghan F. D., Theoretical Mechanics, стр. 87.

параметров[1]), а $\alpha(t)$ является ее отображением при изометрии, а именно при групповом переносе $\sigma(t) \to \alpha(0)\sigma(t) = \alpha(t)$.

Кроме того, так как полная кинетическая энергия при стационарном движении постоянна, то, очевидно, $\dot{s} = v$ постоянна в соответствующем римановом многообразии V. Отсюда, согласно § 108, при стационарном движении вектор силы $\mathbf{Q}$ равен произведению вектора геодезической кривизны однопараметрической подгруппы $\sigma(h)$ на постоянную v^2. Следовательно, *сила, действующая на твердое тело при его стационарном движении в идеальной жидкости, пропорциональна вектору геодезической кривизны соответствующей однопараметрической подгруппы евклидовой группы V при надлежащей «лево-инвариантной» метрике в группе V.* А эта лево-инвариантная метрика определяется во всех точках уже рассмотренными в § 100—102 «инерциальными коэффициентами» T_{ij} (0).

§ 111. Сведения из теории групп Ли

Теперь мы выведем формулу для геодезической кривизны однопараметрических подгрупп произвольного риманова группового многообразия. Этот результат, между прочим, представляет интерес и в геометрии групп Ли — это еще одно свидетельство того, что вся математика по существу едина.

Объем книги не позволяет изложить теорию групп Ли достаточно полно, для того чтобы все подробности вывода были ясны. Все же хочется дать достаточно сведений для того, чтобы можно было уяснить себе смысл окончательной формулы, по крайней мере в случае евклидовой группы.

Если твердое тело движется с единичной скоростью параллельно оси x_1, то скорость любой частицы тела равна (1, 0, 0). Поэтому если $F(x_1, x_2, x_3)$ есть произвольная функция, определенная во всем пространстве, то скорость изменения значения этой функции по отношению к такой частице равна $\partial F/\partial x_1$. Оператор $\partial/\partial x_1$, определенный таким образом, называется символом Лагранжа и выражает *бесконечно малое преобразование*, связанное с поступательным движением твердого тела в направлении, параллельном оси x_1.

Если твердое тело вращается с единичной угловой скоростью (один радиан за секунду) вокруг оси x_1, частица с координатами (x_1, x_2, x_3) будет иметь скорость $(0, -x_3, x_2)$. Скорость изменения функции $F(x_1, x_2, x_3)$ относительно данной частицы равна $x_2\partial F/\partial x_3 - x_3\partial F/\partial x_2$. Поэтому бесконечно малое преобразование, связанное с вращением относительно оси x_1, выражается

[1]) О них см. в следующем параграфе. — *Прим. перев.*

символом Лагранжа (линейным дифференциальным оператором) $x_2\partial/\partial x_3 - x_3\partial/\partial x_2$.

Итак, в соответствии с шестью степенями свободы движения твердого тела мы будем иметь шесть бесконечно малых преобразований, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & E_4 &= x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2}, & E_5 &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3}, & E_6 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Им соответствуют векторные поля (поля скоростей) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -x_3, x_2)$, $(x_3, 0, -x_1)$, $(-x_2, x_1, 0)$.

Результат действия поля скоростей (бесконечно малого преобразования) E_i в течение времени t обозначается через $\exp(tE_i)$; таким образом, $\exp(2E_4)$ обозначает поворот около оси x_1 на два радиана. Если $t < 0$, то $\exp(tE_i)$ будет обозначать преобразование, обратное преобразованию $\exp(-tE_i)$. Таким образом, для всех действительных t, u имеем тождество

$$\exp(tE_i)\exp(uE_i) = \exp(\{t+u\}E_i). \tag{31}$$

Каноническими параметрами, например евклидовой группы, называются параметрические представления «твердых» движений при помощи векторов, так что движение твердого тела, которому соответствует вектор $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_6)$, представляет собой конечное преобразование

$$\exp(t_1E_1 + \ldots + t_6E_6), \tag{32}$$

которое выражает полное перемещение тела при воздействии на него поля скоростей $t_1E_1 + \ldots + t_6E_6$ в течение единицы времени.

Наконец, *скобка Пуассона,* или *коммутатор* $[E_i, E_j]$ двух бесконечно малых преобразований E_i и E_j, определяется как двойной предел

$$\lim_{t,\, u\to 0}\left[\frac{1}{tu}\exp(-tE_i)\exp(-uE_j)\exp(tE_i)\exp(uE_j)\right]. \tag{33}$$

Известно, что этот предел представляет собой дифференциальный оператор [1])

$$E_iE_j - E_jE_i = \sum_{h,\ k}\left(E_j^{(h)}\frac{\partial E_i^{(k)}}{\partial x_h} - E_i^{(h)}\frac{\partial E_j^{(k)}}{\partial x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{34}$$

[1]) Запись E_iE_j всюду означает, что сначала применяется оператор E_i, а потом E_j.

который можно легко вычислить. Так, например, в случае евклидовой группы получим тождества:

$$[E_1, E_2] = [E_1, E_4] = 0;$$
$$[E_1, E_5] = -E_3; \quad [E_4, E_5] = -E_6. \tag{35}$$

С помощью очевидного тождества $[E_i, E_j] = -[E_j, E_i]$, из которого, в частности, следует $[E_i, E_i] = 0$, и циклических перестановок индексов в тождествах (35) можно вычислить также и все другие скобки Пуассона $E_1, \ldots, E_6$.

Интересно отметить, что в случае бесконечно малых вращений E_4, E_5, E_6, скобка $[E_i, E_j]$ есть просто внешнее, или векторное, произведение $E_j \times E_i$. Опять-таки, если E_i и E_j (или эквивалентные $\exp(tE_i)$ и $\exp(uE_j)$) *перестановочны*, так что $E_iE_j = E_jE_i$, то $[E_i, E_j] = 0$, и наоборот.

Заметим, что в тождествах (35) всегда справедливо соотношение

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_k^{ij} E_k, \tag{36}$$

где c_k^{ij} — соответствующие постоянные. Основная теорема Ли заключается в том, что соотношения, аналогичные (36), справедливы для *любой* конечно-параметрической группы. Постоянные c_k^{ij} называются *структурными постоянными* группы и определяют группу с точностью до изоморфизма.

Мы надеемся, что приведенные только что объяснения позволят понять излагаемые ниже результаты, даже несмотря на то, что их доказательства может понять лишь тот, кто уже знаком с теорией групп Ли.

§ 112. Силы и коммутаторы

Пусть теперь G — произвольное r-параметрическое риманово групповое многообразие, и пусть C — любая однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная бесконечно малым преобразованием E.

В группе G вблизи тождественного преобразования всегда можно ([78], стр. 47) так ввести *канонические параметры* с базисом из бесконечно малых преобразований $E_1, E_2, \ldots, E_n$, что если $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — любой достаточно малый векторный элемент группы G, то

$$\mathbf{q} = \exp(q_1E_1 + \ldots + q_nE_n). \tag{37}$$

С помощью этого обобщения формулы (32) можно получить следующее обобщение тождества (31):

$$\lambda\mathbf{q} \cdot \mu\mathbf{q} = (\lambda + \mu)\,\mathbf{q}, \tag{38}$$

где $r \cdot s$ обозначает («групповое») произведение r и s в группе G.

Теперь рассмотрим геодезическую кривизну подгруппы C при $\mathbf{q} = 0$ в метрике $ds^2 = \sum T_{ij}\, dq_i\, dq_j$. В силу § 108, ее величина пропорциональна следующей величине:

$$Q_l = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}(T_{lk}\dot{q}_k) - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_l}\dot{q}_h\dot{q}_k =$$

$$= T_{lk}\ddot{q}_k + \dot{q}_k\frac{\partial T_{lk}}{\partial q_h}\dot{q}_h - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_l}\dot{q}_h\dot{q}_k = \frac{\partial T_{l1}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{11}}{\partial q_l}, \quad (39)$$

так как $\dot{q}_1 = 1$, $\dot{q}_j = 0$ при $j = 2, \ldots, r$ и $q_k = 0$ при всех k. Это — видоизмененный тензор Кристоффеля (13′); согласно § 110, коэффициент пропорциональности $v^2 = T_{11}$ подходящим выбором масштаба времени можно свести к единице. В конечном счете в действительности нас интересует не геодезическая кривизна, а величина $\mathbf{Q}$, так что вопрос о коэффициенте пропорциональности не должен нас занимать.

Вычислим теперь частные производные, входящие в последнюю из формул (39). Для этого заметим, что, по определению, бесконечно малый вектор $d\mathbf{q}'$ с началом в $\exp(tE_i)$ эквивалентен при левом сдвиге бесконечно малому вектору $d\mathbf{q}$ с началом в тождественном преобразовании $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда

$$\exp(tE_i + d\mathbf{q}') = \{\exp(tE_i)\} \cdot d\mathbf{q}. \quad (40)$$

Но правую часть выражения (40) с помощью разложения в ряд Шура — Кэмпбелла — Хаусдорфа [1]) можно представить в виде

$$\{\exp(tE_i)\} \cdot d\mathbf{q} = \exp\left(tE_i + d\mathbf{q} + \frac{1}{2}t\,[E_i,\ d\mathbf{q}] + \ldots\right), \quad (41)$$

где опущены члены, содержащие t во второй степени. Поскольку $d\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}'$ эквивалентные бесконечно малые, отсюда следует соотношение

$$d\mathbf{q} = d\mathbf{q}' - \frac{1}{2}t\,[E_i,\ d\mathbf{q}'] + \ldots. \quad (41')$$

Теперь, записав, что $d\mathbf{q} = dq_1E_1 + \ldots + dq_nE_n$ и $d\mathbf{q}' = dq_1'E_1 + \ldots + dq_n'E_n$, получим, по определению, подобно формуле (36) следующее равенство:

$$[E_i,\ d\mathbf{q}'] = dq_j'\,[E_i,\ E_j] = dq_j'c_h^{ij}E_h.$$

---

[1]) Эта классическая формула доказана при весьма общих условиях на стр. 92 статьи автора «Analytical groups» (теорема 14), *Trans. Am. Math. Soc.*, **43** (1938), 61—101.

Подставив его в векторное уравнение (41′) и приравнивая соответствующие компоненты, получим основное соотношение

$$dq_h = dq'_h - \frac{1}{2} t c_h^{ij} dq'_j + \ldots, \tag{42}$$

где отброшены члены со степенями t выше первой.

Но, по определению риманового группового многообразия, ds^2 инвариантно относительно левых переносов. Поэтому, в силу условия (40) и соотношения (42), можно записать следующие равенства:

$$dq'_h T_{hk}(tE_i)\, dq'_k = dq_h T_{hk}(0)\, dq_k =$$
$$= \left(dq'_h - \frac{1}{2} t c_h^{ij} dq'_j\right) T_{hk}(0) \left(dq'_k - \frac{1}{2} t c_h^{il} dq'_l\right) =$$
$$= dq'_h T_{hk}(0)\, dq'_k - \frac{1}{2} t \left\{c_h^{ij} dq'_j T_{hk}(0)\, dq'_k + c_k^{il} dq'_h T_{hk}(0)\, dq'_l\right\}$$

с точностью до членов выше первой степени относительно t. Переставляя «немые индексы» суммирования j, h и l, k в фигурных скобках, чтобы приравнять коэффициенты, получаем соотношение

$$T_{kh}(tE_i) = T_{hk}(0) - \frac{1}{2} t \left\{c_j^{ih} T_{jk}(0) + c_l^{ik} T_{hl}(0)\right\} + \ldots.$$

Теперь, продифференцировав по t и обозначив оба индекса суммирования через j, получим формулу

$$\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \left\{c_j^{ih} T_{jk} + c_j^{ih} T_{hj}\right\} \text{ при } \mathbf{0}. \tag{43}$$

Далее, подставив формулу (43) в выражение (39), получим равенство

$$4Q_i = -2c_j^{1i} T_{j1} - 2c_j^{11} T_{ij} + c_j^{i1} T_{j1} + c_j^{11} T_{1j}.$$

Кроме того, в силу известной антисимметрии $[E_i, E_1] = -[E_1, E_i]$ получаем для структурных постоянных $-c_j^{1i} = c_j^{i1}$ и $c_j^{11} = 0$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу и сокращая на четыре, мы получаем окончательную формулу [1])

$$Q_i = c_j^{i1} T_{1j}. \tag{44}$$

[1]) Формула (44) была получена в 1945 г. Джоном Брейкуэллом и автором независимо друг от друга. См. Abstract, 52—7—242, *Bull. Am. Math. Soc.*, 52 (1946), 617.

Очевидно, что в случае стационарного движения вдоль оси E_h соответствующая формула будет иметь вид

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_j^{ih} T_{hj} = -\sum_{j=1}^{n} c_j^{hi} T_{hj}. \qquad (44^*)$$

Следовательно, *для существования стационарного движения частицы в некотором римановом групповом многообразии G вдоль E_h требуется внешняя сила* (44*). Другими словами, $c_j^{ih} T_{hj}/T_{hh}$ (суммирование по j, но не по h) есть геодезическая кривизна однопараметрической подгруппы $\exp(tE_h)$ на группе G. Если мы выберем нормальный ортогональный базис $E_1, \ldots, E_n$ в метрике ds^2 при **0**, то эта кривизна будет равняться просто c_h^{ih}

§ 113. Приложения

Пользуясь только общей формулой (44*) и соотношениями коммутативности (35) евклидовой группы, можно вывести выражение для внешней силы, которая необходима, чтобы поддерживать стационарное поступательное или вращательное движение в идеальной жидкости. (Сила, с которой жидкость действует на тело, конечно, равна этой силе по величине и противоположна по направлению.) Так, при стационарном переносе E_1, вдоль оси x_1 эта сила равна

$$(0,\ 0,\ 0;\ 0,\ T_{13},\ -T_{12}). \qquad (45)$$

Аналогично при стационарном вращении E_4 с угловой скоростью в один радиан за секунду вокруг оси x_1 требуется сила

$$(0,\ T_{43},\ -T_{42};\ 0,\ T_{46},\ -T_{45}). \qquad (46)$$

Это классические формулы Кирхгофа и Кельвина [1]; заметим, что формула (45) сводится к **0** (стационарное движение при отсутствии внешних сил), если тензор кинетической энергии $\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} q_i' q_j'$ *поступательного движения* диагонализирован. Иначе говоря, стационарное поступательное движение при отсутствии внешних сил (теоретически) возможно вдоль главных осей тензора кинетической энергии поступательного движения и ни в каком другом случае [2].

---

[1]) Относительно формулы (45) см. [7], п. 124, формула (4); в § 125 из [7] формула (46) дана неявно; см. также приведенную там библиографию.

[2]) Устойчивость таких поступательных движений исследовал Ursell H. D., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 37 (1941), 150—167.

Несмотря на то что предшествующие формулы сугубо теоретические и что стационарное поступательное движение при отсутствии внешних сил физически невозможно, формула (45) дает классическое объяснение *стремлению плоской пластинки стать широкой стороной* перпендикулярно к течению. Нетрудно показать с помощью (45), что *устойчивым* будет стационарное поступательное движение вдоль главной оси, соответствующей *максимальному компоненту* тензора кинетической энергии. Этот вывод качественно согласуется с экспериментом.

В качестве другого приложения общей формулы (44*) мы можем отметить, что составляющая обобщенной силы равна нулю в любом направлении, соответствующем бесконечно малому преобразованию, *перестановочному* с рассматриваемым стационарным движением. Это следует из того, что если $[E_h, E_i] = 0$, то Q_i равно нулю.

Указанное свойство дает теоретико-групповое обоснование парадокса Даламбера. Стационарное поступательное движение вдоль любой оси не вызывает (теоретически) никакого противодавления, а только вращательный момент, поскольку все поступательные движения перестановочны. Так как поступательные и вращательные движения относительно одной и той же оси перестановочны, поступательное движение не вызывает и никакого вращательного момента вокруг оси переноса, — ось момента перпендикулярна оси поступательного движения.

То же самое рассуждение непосредственно приводит к тому, что можно назвать парадоксом пропеллера. При винтовом движении вокруг оси (в классической теории) нет ни противодавления в направлении этой оси, ни вращательного момента относительно нее! Поэтому для винта самолета или для какого-либо другого предмета, обладающего n-кратной вращательной симметрией относительно этой оси ($n > 1$), все компоненты силы (теоретически) равны нулю [1]).

Как показано в [2], гл. V, § 14, приведенные результаты можно обобщить на случай воображаемых абсолютно твердых тел в идеальной жидкости, заполняющей *неевклидово* пространство. Однако мы не будем приводить этого здесь, поскольку физическое значение таких результатов далеко не ясно. Основное же состоит в том, что *классическую теорию движения абсолютно твердого тела в идеальной жидкости можно рассматривать как часть теории Ли однородных пространств* [2]).

---

[1]) Так как область вне пропеллера односвязна, то это положение нельзя исправить введением «циркуляции» вокруг лопастей пропеллера — без значительных оговорок.

[2]) Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1—2, 1948—1958.

§ 114. Стоксово затухание

В случае малых колебаний лагранжевы методы предыдущих параграфов приводят к выводу о наличии присоединенной массы, из-за чего удлиняется период свободных колебаний, но затухания колебаний они не дают. Первое теоретическое исследование затухания свободных колебаний, вызванного *вязкостью*, было выполнено Стоксом в 1850 г. При этом Стокс пренебрегал конвекцией, что обосновано в случае достаточно малых колебаний, и линеаризовал уравнения движения. Вследствие этой линеаризации он получил «логарифмический декремент» (определяемый как логарифм отношения амплитуд последовательных колебаний), который не зависит от амплитуды. Мы кратко изложим схему вычислений.

При обычной трактовке подъемной силы линеаризованные уравнения движения сводятся лишь к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{47}$$

Мы можем исключить p, применив к обеим сторонам (47) операцию ротор. Обозначив вихрь $\nabla \times \mathbf{u}$ через $\boldsymbol{\zeta}$, получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}. \tag{48}$$

В случае *вынужденных* синусоидальных колебаний постоянной амплитуды и угловой частоты ω уравнение (48) эквивалентно уравнению

$$\nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{i\omega}{\nu}\right) \boldsymbol{\zeta}. \tag{48*}$$

При этом мы придерживаемся обычного соглашения, что *физический* вихрь скорости есть *действительная* часть комплексной функции пространственных координат и времени, аналитической по времени.

В случае плоских и осесимметричных течений (т. е. в случае поперечных колебаний цилиндров и продольных колебаний тел вращения) величину $\boldsymbol{\zeta}$ можно выразить через стоксову функцию тока V. (Так, для плоского течения $\zeta = \nabla^2 V$). Это намного упрощает краевые условия.

Детали довольно длинных вычислений ([13], т. 3, стр. 22—54, или [7], § 345—354) мы опускаем. Для *сферы* радиуса a пол-

ной динамической характеристикой является сила ([7], § 354, (26))

$$-X=\rho\cdot\text{объем }(\Sigma)\left\{\frac{1}{2}\ddot{q}+\frac{9S}{2\sqrt{2}}\dot{q}+\frac{9}{2}\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+S^2\right)q\right\},\qquad S=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \tag{49}$$

Это значит, что помимо находящейся в той же фазе силы инерции присоединенной массы $\frac{1}{2}\rho\cdot$объем (Σ) (согласно § 98), имеется еще синусоидальная сила с амплитудой в $9S$ раз большей и со сдвигом фазы на 135° и другая синусоидальная сила с амплитудой в $9S^2$ раз большей и со сдвигом фазы на 180° по отношению к фазе колебаний.

Последняя сила — это просто сопротивление стационарному «ползущему обтеканию» сферы, движущейся с постоянной скоростью (§ 30). Первую же силу можно истолковать как силу *торможения пограничного слоя*, и такую схему мы рассмотрим сейчас в общем случае.

§ 115. Торможение пограничного слоя

В 1850 г. Стокс ([13], т. 3, стр. 21) предположил, что «воздействие жидкости можно вычислить с весьма большой степенью точности, если рассматривать каждый элемент поверхности твердого тела как элемент некоторой бесконечной плоскости, колеблющейся с той же линейной скоростью». Хотя Стокс предложил это только для крутильных колебаний твердого тела вращения вокруг его оси, то же самое приближение было предложено и для малых поступательных колебаний [1]). Поскольку эта идея вытекает из теории пограничного слоя Прандтля (§ 27), если пренебречь конвекцией, то вычисленную выше силу мы будем называть силой *пограничного слоя*.

Для синусоидальных продольных колебаний ее можно легко вычислить. Эта сила сдвинута по фазе на 135° относительно движения ([7], стр. 620). Поэтому если F есть максимальное значение силы и $-\dot{E}$ есть усредненная скорость рассеяния энергии, то, очевидно, $-\dot{E}=F\dot{q}/2\sqrt{2}$, где $\dot{q}$ — максимальная скорость колебаний твердого тела Σ. Но средняя скорость рассеяния энер-

[1]) Boussinesq J., *J. de Math.*, 4 (1878), 335—376. Carrier G. F., Prima R. C., *J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 601—605, предложили поправку второго порядка.

гии в расчете на элемент поверхности площади dS равна ([7], стр. 620, (9)) величине

$$-d\dot{E} = \rho \sqrt{\frac{\nu\omega}{8}}\, v_t^2(\mathbf{x})\, dS, \tag{50}$$

где $v_t(\mathbf{x})$ есть максимальная локальная тангенциальная скорость в течении Эйлера. Зная $v_t(\mathbf{x})$, можно вычислить $-\dot{E}$ и, следовательно, силу F, проинтегрировав выражение (50) по поверхности тела.

Так, если Σ — сфера радиуса a, то $v_t(\mathbf{x}) = (3\dot{q}/2)\sin\theta$. Интегрируя, получаем $-\dot{E} = 3\pi\rho\sqrt{\nu\omega/2}\,\dot{q}^2a^2$. Следовательно, сила, действующая на сферу со стороны пограничного слоя, равна

$$F = 6\pi\rho q\sqrt{\nu\omega} = \left[\frac{9}{2}\rho \cdot \text{объем } (\Sigma)\right]\left(\frac{\sqrt{\nu\omega}}{a}\right) = 9m'S. \tag{51}$$

Аналогичную формулу можно вывести для синусоидальных колебаний твердого тела произвольной формы [1]).

Применив к уравнению (48) преобразование Фурье, можно также вычислить результирующую силу в случае малого движения при любом его протекании в прошлом [2]). Однако основной вопрос таков: *применимы* ли полученные таким образом формулы, и его мы сейчас рассмотрим.

§ 116. Колебания с большой амплитудой

Хотя часы с маятником сейчас имеют куда меньше значения, чем в 1800 г., однако было выполнено много опытов с тем, чтобы проверить правильность формулы Стокса (49) [3]). Очевидно, что множитель присоединенной массы k и коэффициент затухания являются функциями как относительной амплитуды α, так и числа Стокса S. К сожалению, при свободном затухании величина α — переменная, и в большинстве опытов она не замерялась; по этой и по другим причинам значение многих опытов остается неясным.

Пожалуй, наиболее важными для случая больших амплитуд и малых S являются опыты Кейлегана и Карпентера [4]) с ци-

[1]) Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A224** (1954), 1—23.

[2]) Rayleigh, *Phil. Mag.*, **21** (1911), 697—710; еще раньше такие формулы получили Boussinesq и Basset.

[3]) Meyer O. E., *J. f. Math.*, **73** (1871), 31—68; Northway M. Y., Mackenzi, *Phys. Rev.*, **13** (1901), 145—164; McEwen G. F., там же, **33** (1911), 492—511; Marty L., *J. de Phys. et Radium* (Paris), **6** (1935), 373—382; Valensi J., Clarion C., Bull. Soc. France Mec., № 8; Richardson E. G., Tait R. I., *Ost. Ing.-Archiv*, **8** (1954), 200—207. Другие ссылки даны ниже и в § 103—104; см. также § 31—32.

[4]) Keulegan G. H., Carpenter L. H., *J. Res. Nat. Bu.* Standards, **60** (1958), 423—440.

линдрами и пластинками, помещенными в колеблющуюся жидкость. Полученные в этих опытах данные показывают любопытную зависимость присоединенной массы и затухания от относительной амплитуды, чего нет в формуле Стокса.

Пусть $x = A\sin\beta t$ обозначает зависящее от времени смещение, так что $T = 2\pi/\beta$ есть период, $\theta = \beta t$ — фаза и $u_m = A\beta$ — максимальная скорость. Сила $X(\theta)$ измерялась как функция фазы; ввиду симметрии, $X(\theta + \pi) = -X(\theta)$. Обозначим диаметр тела Σ через d, так что относительная амплитуда равна $\alpha = 2A/d$.

Для измеренных значений функции $X(\theta)$ оказалась подходящей полуэмпирическая формула

$$-X(\theta) \simeq c\dot{x}|\dot{x}| + M\ddot{x}. \tag{52}$$

В основе этой формулы лежит предположение, что сила $-X(\theta)$ должна быть суммой силы лобового сопротивления $D = \frac{1}{2}\rho d\dot{x}^2 C_D$, пропорциональной квадрату скорости, и инерциальной силы $M\ddot{x} = (\pi\rho d^2/4)C_M\ddot{x}$, пропорциональной ускорению. Если бы действительно было так, то C_D и C_M можно было бы вычислять по формулам

$$C_D = \frac{-3}{4\rho u_m^2 d}\int_0^{2\pi} X(\theta)\cos\theta\, d\theta \tag{53}$$

и

$$C_M = \frac{4A}{\pi^2\rho u_m^2 d^2}\int_0^{2\pi} X(\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{53'}$$

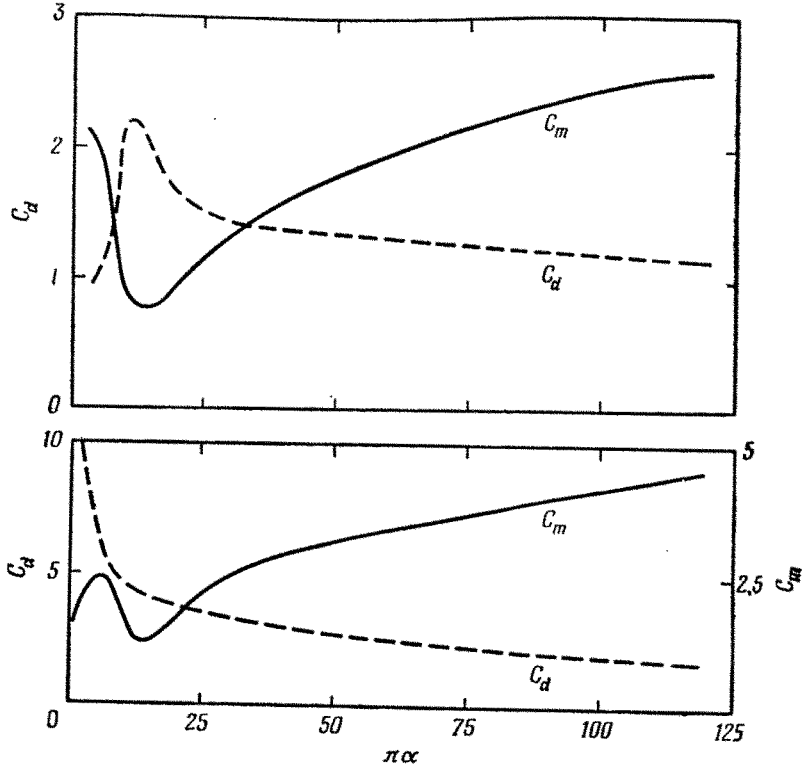
Эмпирически было найдено, что для данных, полученных при колебаниях с большой амплитудой, вполне справедлива формула (52), когда эмпирические постоянные C_D и C_M определяются по формулам (53) и (53'). Измеренные значения постоянных C_D и C_M зависят в первую очередь от относительной амплитуды $\alpha = 2A/d$ и сравнительно мало [1]) — от числа Стокса S. Графики измеренных значений C_D и C_M изображены на рис. 28.

Интересно сопоставить формулу (52) с формулой, которая получается при стоксовых приближениях для малой амплитуды, т. е. с формулой

$$-X(\theta) = c_1'\dot{x} + m^*\ddot{x}, \qquad m^* = (m' + m_0), \tag{52'}$$

[1]) Когда $\alpha \gg 1$, можно ожидать, что связь с «числом Рейнольдса» $\mathrm{Re} = u_m d/\nu = \alpha/2S^2$ будет иметь большое значение; см. Bagliarello — работу, цитированную в § 103.

где m' — теоретическая присоединенная масса, а масса вытесненной жидкости — $m_0 = \rho \cdot$ объем (Σ). Для плоской пластинки, поставленной поперек течения, или для кругового цилиндра известно ([7], стр. 85), что $m' = \pi\rho d^2/4$. В формулу (52′) необходимо



Р и с. 28. Присоединенная масса цилиндра (вверху) и пластинки (внизу).

включить член m_0, так как препятствие удерживается неподвижным в колеблющейся жидкости; этого слагаемого не было бы, если бы препятствие колебалось в неподвижной жидкости. Эту разность можно вычислить, если учесть, что в системе жидкость постоянной плотности ρ и твердое тело при синусоидальных поступательных колебаниях всей системы на твердое тело Σ действует сила $m_0\ddot{x}$. Очевидно, что $X(\theta)$ не зависит от ρ.

Для сравнения были вычерчены также кривые значений C_M — для цилиндров и пластинок соответственно, — полученных

по линеаризованной теории Стокса. Очевидно, что формулы Стокса совершенно неприменимы к колебаниям с большой амплитудой.

§ 117. Заключительный параграф

Цель книги — кое-что внести в науку о природе. Заимствуя слова у Ньютона [1]), можно было бы сказать, что «сочинение это предлагается в качестве математических принципов науки, ибо, по-видимому, все трудное дело науки состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать, каковы силы природы, и по этим силам объяснить явления». Мы старались следовать высказыванию Аристотеля: «Давайте сначала поймем факты, а тогда мы уже сможем искать причины», памятуя также о принципе Ньютона (цит. соч., стр. 398): «Нам, конечно, не следует отбрасывать свидетельства экспериментов ради видений и призрачных измышлений, придуманных нами самими» [2]).

В соответствии с этим мы начали с описания ряда парадоксов, которые получаются при изучении движений жидкости как чисто логические выводы и при изучении сложных явлений действительности. Эта тема была основной в первых трех главах, она проходит и в четвертой, где указаны некоторые спорные места в обычной теории моделирования, и время от времени мы обращались к ней до последних параграфов включительно.

Новизна нашего способа изложения состоит в том, что мы видим причину парадоксов в недостаточной строгости исследования: правда, некоторые специалисты объявляют этот недостаток проявлением мужественной силы, — но, конечно, под такое знамя не стали бы ни Ньютон, ни Эйлер, ни Лагранж, ни Стокс и никто другой из основоположников науки о движении жидкостей. И, пожалуй, главная заслуга (критического характера) этой книги — строгий анализ теоретических основ механики реальных жидкостей.

В качестве нашего главного положительного достижения мы укажем на применение в механике жидкостей понятия группы. Так, в четвертой главе обнаруживается, что это понятие является ключевым в теории моделирования (теории «подобия»). Не-

---

[1]) Предисловие к его Principa Mathematica. Автор пользовался английским переводом в издании F. Cajori, Berkeley, 1947, стр. XVII—XVIII.

[Ср. с переводом на русский яз. А. Н. Крылова в VII томе его «Собрания трудов», М.—Л., 1936, стр. 3.] — *Прим. перев.*

[2]) В переводе А. Н. Крылова (см. предыдущее примечание) это место передано более энергично: «Понятно, что в противность ряду опытов не следует измышлять на авось каких-либо бредней...» (цит. соч., стр. 503). — *Прим. перев.*

мало других применений теории групп дано в пятой и шестой главах. Кульминацией здесь было истолкование силы, действующей на твердое тело при любом его стационарном движении в идеальной жидкости, как кривизны соответствующей однопараметрической подгруппы в пространстве евклидовых групп, метрика которого определяется кинетической энергией.

Итак, автор пытался перебросить два моста через расширяющийся провал между чистой математикой и физикой. Об успехе этого надо судить по будущим работам тех читателей книги, для которых она окажется стимулом к исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

К главам I и II

1. Биркгоф (Birkhoff G.), Reversibility paradox and twodimensional airfoil theory, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 247—256.
2. Биркгоф Г., Гидродинамика, ИЛ, М., 1954.
3. Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I и II, ИЛ, М., 1948.
4. Келлог (Kellogg O. D.), Potential Theory, Springer, 1929.
5. Кранц (Cranz C.), Lehrbuch der Ballistik, Berlin, 1925.
6. Курант Р. и Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
7. Ламб Г., Гидродинамика, М.—Л., 1947. См. также Приложение ко 2-му нем. изд. Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1931.
8. Милн-Томсон (Milne-Thomson L. M.), Theoretical Hydrodynamics, Oxford, 1955 (готовится русский перевод 4 изд., ИЛ).
9. Озеен (Oseen C. W.), Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.
10. Осватич (Oswatitsch K.), Gasdynamik, Wien, Springer, 1952.
11. Прандтль Л. и Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, тт. 1, 2, М.—Л., ГТТИ, 1932—1935.
12. Рэлей (Rayleigh J. W.), Scientific Papers, v. 1—6, Cambridge University Press, 1899—1920.
13. Стокс (Stokes G.), Mathematical and physical papers, Cambridge Univ. Press, 1880—1905.
14. Хейз У. и Пробстин Р., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.
15. Хоуарт Л., (ред.), Современное состояние аэродинамики больших скоростей, тт. 1, 2, ИЛ, М., 1955, 1956.
16. Эммонс Г., (ред.), Основы газовой динамики, ИЛ, М., 1963.

К главе III

17. Биркгоф и Царантонелло (Birkhoff G., Zarantonello E. H.), Jets, Wakes and Cavities, Academic Press, 1957 (готовится русский перевод, ИЛ).
18. Биркгоф (Birkhoff G.), Formation of vortex streets, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953), 98—103.
19. Бриллюэн (Brillouin M.), Les surfaces de glissement de Helmholtz..., *Ann. de Chim. Phys.*, **23** (1911), 145—230.
20. Бэтчелор и Дэвис (Batchelor G. K., Davies R. M.), Surveys in Mechanics, Cambridge Univ. Press, 1956.
21. Вайнштейн (Weinstein A.), Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, *Math. Z.*, **31** (1929), 424—433.

22. Вилла (Villat H.), Sur la résistance des fluides, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **28** (1911), 203—240.
23. Вортингтон (Worthington A. M.), A study of splashes, Longmans, 1908.
24. Гарабедян, Левн и Шиффер (Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.), Axially symmetric cavitational flow, *Ann. Math.*, **56** (1952), 560—602.
25. Гарабедян (Garabedian P. R.), Calculation of axially symmetric cavities and jets, *Pacif. J. Math.*, **6** (1956), 611—684.
26. Гарабедян (Garabedian P. R.), ... three dimensional cavities and ets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), 219—235.
27. Гельмгольц (Helmholtz H.), Uber discontinuierliche Flussigkeitsbewegungen, Monatsber Berlin. Akad. (1868), 215—228. [Имеется русский перевод этой статьи: Гельмгольц, Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении. II. О прерывном движении жидкости, перевод под ред. С. А. Чаплыгина, 1902. — *Прим. ред.*]
28. Гильбарг (Gilbarg D.), Uniqueness of axially symmetric flows with free boundaries, *J. Rational Mech. and Analysis*, **1** (1952), 309—320.
29. Гильбарг и Андерсон (Gilbarg D., Anderson R. A), Influence of atmospheric pressure on... entry of spheres into water, *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 157—169.
30. Кельвин (Kelvin W.), *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **7** (1869), 384—390, 668—672. См. также Math. and Phys. Papers, vol. **4**, 69—75, 93—97, 101—114.
31. Кирхгоф (Kirchhoff G.), Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, *Crelle's Jour. für Math.*, **70** (1869), 289—298.
32. Купер (Cooper R. D.) (ред.), Naval Hydrodynamics, vol. 2, Publication ACR—38, U. S. Govt. Printing Office, 1960.
33. Леви-Чивита (Levi-Civita T.), Scie e leggi de resistenzia, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, **23** (1907), 1—37.
34. Левинсон (Levinson N.), The asymptotic shape of the cavity..., *Ann. Math.*, **47** (1946), 704—730.
35. Лерэ (Leray J.), Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz, théorie des sillages et des proues, *Comment. math. helv.*, **8** (1935), 149—180 and 250—263.
36. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.
37. Прандтль и Бетц (Prandtl L., Betz A.), Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Goettingen, 1927.
38. Рэлей Дж., Теория звука, т. I, изд. 2-е, Физматгиз, 1955, гл. XX, XXI.
39. Рябушинский (Riabouchinsky D.), *Proc. London, Math. Soc.*, **19** (1921), 206—215. См. там же, **25** (1926), 185—194 и Пул (Poole E. G. C.), там же, **25** (1926), 195—212.
40. Саусвелл и Вайси (Southwell R. V., Vaisey G.), Fluid motions characterized by free streamlines, *Philos. Trans.*, **240** (1946), 117—161.
41. Тейлор (Taylor G.), The instability of liquid surfaces..., *Proc. Roy. Soc.*, **201** (1950), 192—196.
42. Шерман (Sherman F. S.), (ред.), Naval Hydrodynamics, vol. 1, Publ. 515, National Acad. Sci.-Nat'l. Res. Council, Washington, 1957.
43. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956.
44. Cavitation in Hydrodynamics, H. M. Stationery Office, London, 1936.

К главе IV

45. Биркгоф и Маклэйн (Birkhoff G., MacLane S.), Survey of Modern Algebra, N. Y., 1953.
46. Бриджмен П., Анализ размерностей, М.—Л., 1934.
47. Букингем (Buckingham E.), On physically similar systems, *Phys. Rev.*, 4 (1914), 354—376.
48. Букингем (Buckingham E.), Model experiments and the forms of empirical equations, *Trans. ASME*, 37 (1915), 263—296.
49. Бюргерс, Доббинга, Труст и Боссен (Burgers J. M., Dobbinga E., Troost L., Bossen M. J.), Modelproeven en Kengrootheden op Stromingsgebied, Amsterdam, 1947.
50. Крейа (Craya A.), Similitude des modèles fluviaux à fond fixe, *Houille blanche*, 3 (1948), 335—346.
51. Лангхар (Langhaar H. L.), Dimensional analysis and theory of models, Wiley, 1951.
52. Мартино-Лагард (Martinot-Lagarde A.), Analyse dimensionelle. Applications à la mécanique des fluides, Lille, 1946.
53. Мартино-Лагард (Martinot-Lagarde A.), Similitude physique: exemples d'applications a la mécanique des fluides, Memorial 66 des Sciences Physiques. Gauthier-Villars, 1960.
54. Портер (Porter A. W.), The Method of Dimensions, Methuen. 1933.
55. Рейнольдс (Reynolds O.), Collected Papers, особенно Vol. I, 257—390 and Vol. II, 51—105.
56. Руарк (Ruark A. E.), Inspectional Analysis: A method which supplements dimensional analysis, *J. Elisha Mitchell Scient Soc.*, 51 (1935), 127—133.
57. Седов Л. И., Методы подобия и размерностей в механике, изд. 4-е, М., Гостехиздат, 1957.
58. Стокер Дж., Волны на воде, М., ИЛ, 1959.
59. Фурье (Fourier J. B. J.), Théorie analytique de la chaleur, 1822.
60. Эренфест-Афанасьева (Ehrenfest-Afanassjewa T.), Dimensionsbegriff und Bau physikalischer Gleichungen, *Math. Ann.*, 77 (1915), 259—276.
61. Эренфест-Афанасьева (Ehrenfest-Afanassjewa T.), Dimensional analysis... theory of similitudes, *Philos. Mag.*, 1 (1926), 257—272.

К главе V

62. Бехерт (Bechert K.), Differentialgleichungen der Wellenaus breitung in Gasen, *Ann. Physik*, 39 (1941), 357—372; Ebene Wellen in idealen Gasen mit Reibung und Warmeleitung, там же, 40 (1941), 207—248.
63. Биркгоф (Birkhoff G.), Dimensional analysis and partial differential equations, *Electr. Engng.*, 67 (1948), 1185—1188.
64. Биркгоф (Birkhoff G. D.), The principle of sufficient reason, *Rice Inst. Pamphlet*, 28 (1941), № 1, 24—50.
65. Блазиус (Blasius H.), Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. angew. Math.* und *Phys.*, 56 (1908), 1—37.
66. Вейль (Weyl H.), The differential equations of the simplest boundary-layer problems, *Ann. Math.*, 43 (1942), 381—407.
67. Гэйс (Geis Th.), Ahnlichen dreidimensionalen Grenzschichten, *J. Rational. Mech. and Analysis*, 5 (1956), 643—686.
68. Диксон (Dickson L. E.), Differential equations from the group standpoint, *Ann. Math.*, 25 (1924), 287—378.

69. Прандтль (Prandtl L.), Neuere Untersuchungen über die strömende Bewegungen der Gase und Dämpfe, *Phys. Zeits.*, **8** (1907), 23—31.
70. Редхеффер (Redheffer R. M.), Separation of Laplace's equation, Doctoral Thesis, Mass. Inst. Techn (1948). См. также Левинсон, Боджерт, Редхеффер (Levinson N., Bogert B., Redheffer R.), Separation of Laplace's equation, *Quart. Appl. Math.*, **7** (1949), 241—262.
71. Розенблат (Rosenblatt A.), Solutions exactes des equations du mouvement des liquides visqueux, *Mem. Sci. Math.*, **72** (1935), 63.
72. Седов Л. И., О нестационарных движениях сжимаемой жидкости, *ДАН СССР*, **47** (1945), 91—93 и 52 (1946), 17—20.
73. Станюкович К. П., Нестационарное движение сплошной среды, М., 1955.
74. Станюкович К. П., Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией, *ДАН СССР*, **48** (1945), 310—312 (1948), 1141—1144; **64** (1949), 29—32, 179—181 и 467—470.
75. Тейлор и Маккол (Taylor G. I., Maccoll J. W.), The air pressure on a cone moving at high speeds, *Proc. Royal Soc.*, **A 139** (1933), 278—311; Маккол (Maccoll J. W.), The conical shock wave formed by a cone moving at high speed, там же, **A 159** (1937), 459—472.
76. Уиттекер Э., Аналитическая динамика, М.—Л., ОНТИ, 1937.
77. Фокнер и Скан (Falkner V. M., Skan S. W.), Solutions of the boundary layer equations, *Philos. Mag.*, **12** (1931), 865—896.
78. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, М., 1947.

К главе VI

79. Драйден, Мурнаган и Бейтмен (Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H.), Hydrodynamics, Bull. 84 Nat. Res. Council, Washington, 1932.
80. Кельвин (Kelvin W.), Hydrokinetic solutions and observations, *Philos. Mag.*, **42** (1871), 362—380.
81. Кирхгоф (Kirchhoff G.), Über die Bewegung eines Rotationskorpers in einer Flussigkeit, *Crelle's, J. für Math.*, **71** (1869), 237—273.
82. Ламб (Lamb H.), On the forces experienced by a solid moving through a liquid, *Quar. Journ.*, **19** (1883), 66—70.
83. Тейлор (Taylor G. I.), The energy of a body moving in an infinite fluid, with an application to airships, *Proc. Royal Soc.*, **A 120** (1928), 13—22 и 260—283.
84. Теодорсен (Teodorsen Th.), Impulse and momentum in an infinite Fluid, Th. Karman Anniversary Volume, Calif. Inst. Techn., 1941, 49—58.
85. Томсон и Тэт (Thomson W., Tait P. G.), Principles of Natural Philosophy, v. 1—2, особенно раздел 313.
86. Шиффер и Сегё (Schiffer M., Szegö G.), Virtual mass and polarization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 130—205.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. I, II, М.—Л., 1948.
2*. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946.
3*. Келдыш М. В., Франкль Ф. И., Внешняя задача Неймана для линейных эллиптических уравнений в приложениях к теории крыла в сжимаемом газе, Изв. *АН СССР*, сер. мат., № 4, 1934.

4*. Никольский А. А. и Таганов Г. И., Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения, *ПММ*, т. X, вып. 4 (1946).
5*. Франкль Ф. И., *ПММ*, т. XI, вып. 1 (1947).
6*. Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, М.—Л., 1948.
7*. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., 1950.
8*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, М., 1954.
9*. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, М., 1957.
10*. Жуковский Н. Е., Полное собрание сочинений, т. VII. М.—Л., 1937.
11*. Булах Б. М., Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса, *ПММ*, т. XXVI, вып. 2 (1962).
12*. Willet J. E., Supersonic flow at the surface of a circular cone at angle of attack, *Journ. Aero/Sp. Sci.*, 27, № 12 (1960).
13*. Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, М., 1962.
14*. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, М., 1957.
15*. Жуковский Н. Е., Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока, Собр. соч., т. II, 1935.
16*. Эфрос Д. А., Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения. *ДАН СССР*, 51, № 4 (1946).
17*. Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.
18*. Чаплыгин С. А., К вопросу о струях в несжимаемой жидкости, Труды отдел. физ. наук общ. любителей естеств. наук, т. 10, вып. 1, 1899.
19*. Гуревич М. М., Сретенский Л. Н., О работах С. А. Чаплыгина по гидродинамике (в т. III Собр. соч. С. А. Чаплыгина, 1950).
20*. Некрасов А. И., О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. *Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та*, № 5 (1922).
21*. Лаврентьев М. А., О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй, *Матем. сб.*, новая серия, 4 (46), № 3 (1938).
22*. Лаврентьев М. А., Кумулятивный заряд и принцип его работы, *Усп. матем наук*, т. XII, вып. 4 (76) (1957).
23*. Жуковский Н. Е., Определение движения жидкости при какомнибудь условии, данном на линии тока, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва*, *XXII* (1891).
24*. Кочин Н. Е., О неустойчивости вихревых цепочек Кармана, *ДАН СССР*, XXIV, № 1 (1939).
25*. Седов Л. И., О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения, Труды ЦАГИ, № 519, 1940.
26*. Риман И. С., Крепс Р. Л., Присоединенные массы тел различной формы, Труды ЦАГИ, № 635, 1947.
27*. Седов Л. И., Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, Труды ЦАГИ, № 182, 1935.
28*. Жуковский Н. Е., Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости, Избр. соч., т. I, М.—Л., 1948.
29*. Хаскинд М. Д., Приближенные методы определения гидродинамических характеристик качки, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 11 (1954).
30*. Блох Э. Л., Горизонтальный удар эллипсоида вращения об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности, *ПММ*, т. XVII, вып. 6 (1953).

31*. Иванова Л. С., Присоединенная масса жидкости, наполняющей открытый прямоугольный сосуд, *ПММ*, т. **XVII**, вып. 4 (1953).
32*. Хаскинд М. Д., Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости, *Журн. эксп. и теорет. физики*, **16**, вып. 7 (1946).
33*. Справочник авиаконструктора, т. II, Гидромеханика гидросамолета, М., 1938.
34*. Жуковский Н. Е., Лекции по гидродинамике, Собр. соч., т. II, М., 1949.
35*. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., 1948.
36*. Бобылев Д. К., Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва, XIII* (1881).
37*. Мещерский И. В., К вопросу о сопротивлении жидкостей, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва*, **XVIII** (1886).
38*. Котельников А. П., О давлении жидкой струи на клин, Собрание протоколов секции физико-математических наук в Казани, VIII (1889).
39*. Секерж-Зенькович Я. И., К задаче об обтекании дуги круга с отрывом струи, *ДАН СССР*, **2**, № 6—7 (1934).
40*. Эфрос Д. А., Построение струйных течений методом электрического моделирования, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 9 (1947).
41*. Секерж-Зенькович Я. И., Обобщенная схема Кирхгофа и ее применение к изучению поляры Лилиенталя, Труды ЦАГИ, № 170, 1934.
42*. Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., О решении задач на удар о воду, Труды ЦАГИ, № 152, 1935.
43*. Чаплыгин С. А., Лаврентьев М. А., О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности, Труды ЦАГИ, № 123, 1933.
44*. Никольский А. А., Сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.
45*. Ведров В. С., Динамическая устойчивость самолета, Обороигиз, 1938.
46*. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В., Теория точечного взрыва, Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму русскому изданию . . . 5
Из предисловия автора 13

Глава I. Парадоксы невязкого течения 15

§ 1. Теоретическая гидродинамика 15
§ 2. Гидродинамические парадоксы 17
§ 3. Уравнения Эйлера 18
§ 4. Потенциал скорости 21
§ 5. Стационарные безвихревые течения 23
§ 6. Парадокс обратимости 25
§ 7. Парадокс Даламбера 27
§ 8. Теория крылового профиля 29
§ 9. Эффект Магнуса; деривация 31
§ 10. Волновое лобовое сопротивление тонких крыльев 34
§ 11. Тонкие тела вращения 36
§ 12. Парадокс Эршоу 37
§ 13. Возникновение ударной волны 38
§ 14. Термодинамика невязких жидкостей 39
§ 15. Буруны и боры 41
§ 16. Парадокс Ферри 42
§ 17. Парадокс тройной ударной волны 44
§ 18. Значение уравнений Эйлера 45

Глава II. Парадоксы вязкого течения 47

§ 19. Уравнения Навье — Стокса 47
§ 20. Реальные газы и жидкости 49
§ 21. Несжимаемые вязкие жидкости 50
§ 22. Парадокс неаналитичности 53
§ 23. Существование и единственность 54
§ 24. Течение Пуазейля 55
§ 25. Парадокс турбулентности 56

§ 26. Другие парадоксы симметрии 59
§ 27. Теория пограничного слоя 60
§ 28. Парадоксы Эйфеля и Дюбуа 62
§ 29. Регулирование пограничного слоя 63
§ 30. Парадокс Стокса 66
§ 31. Уравнения Озеена 68
§ 32. Парадокс пузырька 69
§ 33. «Вторая» вязкость 70
§ 34. Молекулярные эффекты 72
§ 35. Выводы 74

Глава III. Струи, следы и кавитация 76

§ 36. Разрывные течения 76
§ 37. Годографы в виде полукруга 78
§ 38. Истечение струи из щели 80
§ 39. Схема обтекания по Кирхгофу 81
§ 40. Влияние стенок 82
§ 41. Неустойчивость течений Гельмгольца 84
§ 42. Кавитация 86
§ 43. Параметры ϱ'/ϱ и Q 88
§ 44. Модели течений при $Q \neq 0$ 90
§ 45. Криволинейные препятствия 92
§ 46. Прямая задача 95
§ 47. Неопределенность точки отрыва 97
§ 48. Осесимметричные течения Гельмгольца 99
§ 49. Законы сохранения 100
§ 50. Кавитационные течения как течения Гельмгольца 103
§ 51. Пузырьки 105
§ 52. Неустойчивость по Тейлору 107
§ 53. Масштабные эффекты при входе в воду 109
§ 54. Реальные следы 111
§ 55. Вихревые модели следов 112
§ 56. Вихревые дорожки 114
§ 57. Количество движения в следе 115

Глава IV. Моделирование и анализ размерностей 118

§ 58. О моделях 118
§ 59. Анализ размерностей 119
§ 60. Группа подобия 120
§ 61. Соотношения, не зависящие от единиц измерения 122
§ 62. Числа Рейнольдса и Маха 125
§ 63. П-теорема 127

§ 64. Обсуждение доказательства 129
§ 65. Независимы ли физические законы от выбора единиц? . . 133
§ 66. Инспекционный анализ 135
§ 67. Связь с теорией групп 136
§ 68. Теория моделирования 138
§ 69. Частный инспекционный анализ 139
§ 70. Инерциальное моделирование 140
§ 71. Моделирование по числу Рейнольдса 142
§ 72. Моделирование по числу Фруда и по числу кавитации . . 143
§ 73. Моделирование по числу Маха 145
§ 74. Асимптотическое изменение масштаба 149
§ 75. Аэродинамические трубы 151
§ 76. Опытовые бассейны 152
§ 77. Модели рек и гаваней 154
§ 78. Моделирование входа в воду 156

Глава V. Теория групп и гидромеханика 159

§ 79. Введение 159
§ 80. Симметричные решения уравнения теплопроводности . . . 160
§ 81. Спиральные течения вязкой жидкости 162
§ 82. Пограничные слои у клиньев 165
§ 83. Струи и следы в вязкой жидкости 166
§ 84. Течения Прандтля — Мейера 167
§ 85. Конические течения Тейлора — Маккола 170
§ 86. Расходящиеся волны давления 172
§ 87. Политропная симметрия 174
§ 88. Конические течения 175
§ 89. Локальные и глобальные решения 177
§ 90. Теория групп и метод разделения переменных 181
§ 91. Случай вязкой жидкости 183
§ 92. Обратные методы 185
§ 93. Общие замечания 188
§ 94. Метод годографа 189
§ 95. Инерциальное плоское движение 191
§ 96. Теорема Бьянки 193
§ 97. Заключение 195

Глава VI. Присоединенные массы 196

§ 98. Присоединенная масса сферы 196
§ 99. Приложения 197
§ 100. Инерциальные лагранжевы системы 198
§ 101. Тензор присоединенной массы 200

§ 102. Геометрические фигуры частных видов; тело Рэнкина . . 202
§ 103. Теория и эксперимент 205
§ 104. Коэффициенты устойчивости 206
§ 105. Присоединенная масса и количество движения 208
§ 106. Другие интерпретации 211
§ 107. Каноническая форма 212
§ 108. Геометрическая интерпретация 215
§ 109. Доказательство того, что система является лагранжевой . 216
§ 110. Однородность 219
§ 111. Сведения из теории групп Ли 221
§ 112. Силы и коммутаторы 223
§ 113. Приложения 226
§ 114. Стоксово затухание 228
§ 115. Торможение пограничного слоя 229
§ 116. Колебания с большой амплитудой 230
§ 117. Заключительный параграф 233

Литература 235
Дополнительная литература 238

Г. Биркгоф
ГИДРОДИНАМИКА

Редактор *А. С. Попов* Технический редактор *М. П. Грибова*
Художник *В. М. Новоселова* Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 5/III 1963 г. Подписано к печати 10/IX 1963 г. Бумага 60×90¹/₁₆ = =7,8 бум. л. 15,25 печ. л. в т/ч. 2 вкл. Уч.-изд. л. 14,4 Изд. № 1/1483. Цена 1 р. 22 к. Зак. 1209.

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.