В.Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

~~22.25~~
Б 48
УДК 53~~1~~

Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.

В книге систематически изложены вариационные принципы механики жидкости и газа и механики твердого деформируемого тела. Описаны прямые качественные методы вариационного исчисления (теория двойственности вариационных задач, двусторонние оценки, исследование функционалов, зависящих от малого параметра).

Рассмотрены приложения к проблеме осреднения периодически и случайно микронеоднородных сред, к построению теории упругих оболочек и стержней, теории дисперсных смесей.

Для специалистов в области механики сплошной среды и прикладной математики.

Табл. 2, илл. 60, библ. 420.

1703040000 – 087
Б ——————— 91-83
053 (02)-83

© Издательство „Наука"
Главная редакция физико-
математической литературы, 1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . .

Глава I. Вариационные уравнения . . . . . .

§ 1. **Предварительные сведения** . . . . . .
Сведения из механики сплошной среды (9). Сведения из математического анализа (11).

§ 2. **Вариационные уравнения** . . . . . .
Вариационные принципы (16). Вариационные принципы Мопертюи, Лагранжа, Гамильтона, Остроградского, Якоби, Пуанкаре (18). Принципы Гиббса (25). Принцип возможных перемещений (28). Принцип Даламбера и уравнение энергии для возможных перемещений (29). Вариационная формулировка первого начала термодинамики (30). Вариационное уравнение Седова (31). Вариационное уравнение Лагранжа (32). Вариационные уравнения и вариационные принципы (33).

§ 3. **Дополнительные сведения из механики и анализа** . . . . . .
Сведения из кинематики сплошной среды (34). Вариации основных кинематических характеристик (45). Варьирование функций от эйлеровых координат (48). Тензорные вариации (49). Сведения из теории поверхностей (53). Формула Гаусса – Остроградского (59). Классические модели сплошных сред (62). Условие непротиворечивости и обобщение принципов Гиббса (66).

§ 4. **Условия голономности вариационных уравнений** . . . . . .
Критерий голономности (67). Голономность интегральных функционалов (70). Потенциал (72). Голономность функционала на расширенном множестве функций (72).

Глава II. Прямые методы вариационного исчисления . . . . . .

§ 1. **Исследование существования и единственности решения** . . . . . .
Ограниченность снизу (74). Минимизирующие последовательности (80). Исследование существования минимизирующего элемента (80). Исследование единственности (83).

§ 2. **Двусторонние оценки** . . . . . .
Изменение множества допустимых функций (85). Изменение функционала (86). Существенные и несущественные ограничения (87). Оценка близости приближенного и точного решений (89).

§ 3. **Двойственные вариационные принципы** . . . . . .
Схема построения двойственных вариационных задач (90). Выпуклые функции (92). Преобразование Лежандра (95). Преобразование Юнга – Фенхеля (96). Задача Дирихле и задача Неймана (104).

Принцип Дирихле и принцип Томсона (107). Случай общего интегрального функционала (110). О невыпуклых функционалах (113). Оценки снизу нижней грани невыпуклых функционалов при помощи двойственной задачи (114).

§ 4. Вариационные задачи при наличии ограничений 114
Множители Лагранжа (114). Принцип максимума Понтрягина (124). Интегральные связи для производных (125). Принцип сечений (128).

§ 5. Вариационно-асимптотический метод 129

§ 6. Стохастические вариационные задачи 143

Глава III. Вариационные прииципы в классической механике сплошной среды. 146

§ 1. Статика геометрически линейного упругого тела. 146
Функционал энергии (146). Ограниченность снизу (148). Единственность решения (150). Дополнительная энергия (151). Вариационный принцип Рейсснера (151). Вариационный принцип Кастильяно (152). Принцип Кастильяно в функциях напряжений (153).

§ 2. Статика геометрически нелинейного унругого тела 156
Внутренняя энергия (157). Работа внешних объемных сил (159). Работа внешних поверхностных сил (160). Условия голономности притока тепла (162). Принцип Лагранжа (163). Уравнения состояния (163). О невыпуклостн внутренней энергии (165). Условие локального минимума (167). Принцип стационарности дополнительной работы (169). Анизотропные тела при малых деформациях (174). Расширенный принцип стационарности дополнительной работы (174). Задача о минимуме (175). Принцип минимума дополнительной работы (177). Фазовые переходы в упругих телах (180).

§ 3. О вариационных принципах динамики 184
Невозможность постановки задачи о минимуме (184). Вариационный принцип для нелинейных собственных колебаний (186). Линейные колебания. Принцип Рэлея (188).

§ 4. Динамика упругого тела. 189
Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в лагранжевых координатах (189). Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в эйлеровых координатах (190).

§ 5. Идеальная сжимаемая жидкость 195
Случаи голономности вариационного уравнения (195). Вариационные принципы в лагранжевых координатах (198). Вариационные прииципы в эйлеровых переменных (199). Принципы Бейтмена (209). Потенциальные течения (211). Движеиие твердого тела в жидкости (211). Движение жидкости со свободиой поверхностью (212).

§ 6. Идеальная несжимаемая жидкость. 212
Вариационный принцип Гамильтона – Остроградскогo (212). Вариационные принципы в эйлеровых координатах (216). Потенциальные течения (220).

§ 7. Установившнеся движения идеальной жидкости и упругого тела 222
Кинематика установившегося двнжения (222). Вариационные принципы в случае неизменного числа частиц (224). Вариационные принципы для идеальной жидкости в случае переменного числа частиц (227). Плоские течения (230). Вариационные прииципы на множестве равнозавихренных течений (231). Потенциальные течения (234). Регуляризация функционалов в неограниченных областях (236).

§ 8. Стоксово течение вязкой жидкости 237
Условня голономности вариационного уравнения (237). Вариацион-

ные принципы (238). Движение твердого тела в стоксовом потоке вязкой жидкости (241).
§ 9. Движение тела в идеальной несжимаемой жидкости 242
Уравнение Томсона – Тэта (242). Теорема Полиа – Шиффера (246).
§ 10. Движение тела в вязкой жидкости 248
§ 11. О вариационной формулировке произвольных систем уравнений . . . 255

Глава IV. Некоторые приложения вариационных методов к построению моделей сплошных сред 260

§ 1. Теория упругих изотропных оболочек 260
Эвристическая теория оболочек (261). Поверхностная плотность энергии (267). Трехмерная задача (269). Внутренняя задача (269). Малые параметры и классификация двумерных теорий оболочек (270). Вывод классической теории оболочек (272).
§ 2. Уточненные теории изотропных оболочек 280
Коротковолновая экстраполяция (280). Теория, учитывающая геометрическую поправку (282). Теория с учетом поперечного сдвига (284). Поверхностная плотность энергии в уточненных теориях оболочек (286). Кинетическая энергия (293). Связь тензоров $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ с интегральными характеристиками напряженного состояния (294). Теория, учитывающая геометрическую поправку, и итерационная теория Гольденвейзера (298). Асимптотическая теория с учетом поперечного сдвига и теория Рейсснера (300).
§ 3. Теория анизотропных неоднородных оболочек 301
Упругие модули (301). Зависимость упругих модулей от поперечной координаты (302). Основные случаи упругой симметрии (304). Функции y_α, y (304). Внутренняя энергия оболочки в классическом приближении (305). Внутренняя энергия оболочки с учетом геометрической поправки и поперечного сдвига (306). Однородные по толщине оболочки (311). Низкочастотные колебания неоднородных оболочек. Классическое приближение (311). Низкочастотные колебания однородных оболочек (312). Об оболочках с малой сдвиговой жесткостью (312).
§ 4. Высокочастотные колебания оболочек 313
Высокочастотные ветви (313). Уточнение формул для перемещений (315). Ортогональность по энергии (316). Уравнения для отдельных ветвей (317). Учет взаимодействия ветвей. Простейшие уравнения высокочастотных колебаний (321). Высокочастотные продольные колебания пластин (324).
§ 5. Теория упругих стержней 327
Постановка задачи (327). Эвристическая теория стержней (327). Теория Кирхгофа – Клебша (332). Асимптотический анализ функционала энергии трехмерного упругого тела (333). Исследование задачи на сечении (342). Энергия стержня из физически линейного материала (351).
§ 6. Теория мелкой воды 352
Постановка проблемы (352). Вывод уравнений мелкой воды (353). Формализация вывода (357). Другие коротковолновые экстраполяции (357).
§ 7. Модели дисперсных смесей 358
Определяющие функции (358). Кинетическая и внутренняя энергии (359). Вариационный принцип (361). Система уравнений (363). Суммарное уравнение импульсов (366).

§ 8. Модель зернистой среды 366
§ 9. Проблема осреднения микронеоднородных континуумов 368
Постановка проблемы (368). Осреднение периодических структур (369). Осреднение случайных структур (375).
§ 10. Осреднение в случае одного и двух измерений 380
Одномерные структуры (380). Слоистые среды (384). Двумерные структуры (386). Формулы Дыхне (388). Эффективные характеристики как функционалы (390). Некоторые нелинейные задачи (392). Плоские упругие композиты (393).
§ 11. Некоторые пространственные задачи осреднения 399
Смесь идеальных жидкостей (399). Смесь упругих сред с разными сжимаемостями (403). Теплопроводность периодически микронеоднородной среды. Задача на ячейке (405). Пространственные периодические гармонические функции (409). Решение задачи на ячейке для сферических включений (415). Эффективный коэффициент теплопроводности (418). Двусторонние оценки эффективного коэффициента теплопроводности для сферических включений (419). Об эффективных коэффициентах для несферических включений (420).

Основные обозначения 424

Библиографические замечания 427

Литература 433

ПРЕДИСЛОВИЕ

Все обратимые физические явления удается описать вариационными принципами – утверждениями о том, что в реально осуществляющихся процессах некоторые функционалы имеют стационарное значение.

Вариационные принципы диктуют специальную структуру уравнений физики и механики. Основная особенность этой структуры – взаимность физических эффектов: действие одного поля на другое порождает обратное и, в некотором смысле, симметричное воздействие. Если перекрестные взаимодействия отсутствуют или являются достаточно простыми, то при построении уравнений можно обойтись без вариационного подхода. Однако при нетривиальных взаимодействиях, которые имеют место, например, для взаимопроникающих сред типа дисперсных смесей, или при нетривиальном самодействии, например, за счет присутствия высших производных в функционале или наличия ограничений кинематического характера, вариационный подход становится единственным способом построения физически разумных уравнений.

В основе обобщений вариационного подхода на необратимые процессы по идее Л.И. Седова лежит некоторое базисное вариационное уравнение, которое представляет далеко идущее обобщение „золотого правила" механики и связано с записью в вариациях начал термодинамики.

В книге предпринята попытка осветить две стороны вариационного подхода: вариационный подход как универсальное средство описания физических закономерностей и как источник качественных методов исследования задач.

План изложения следующий. Даются вариационные формулировки начал термодинамики. Из них систематически выводятся вариационные принципы классической механики сплошной среды. Излагаются качественные методы вариационного исчисления. Качественные методы иллюстрируются, помимо ряда задач, на проблеме осреднения периодически и случайно микронеоднородных континуумов, проблеме построения теории оболочек и стержней, теории мелкой воды. Вариационный метод построения моделей сплошных сред разобран на моделях дисперсных смесей и зернистых сред.

Формулировке вариационных принципов механики предпослан минимум сведений по прямым методам вариационного исчисления (гл. II), необходимый для сознательного применения вариационного подхода. Основное внимание при этом уделено методу исследования функционалов, зависящих от малого параметра, и теории двойственности, систематически используемым на протяжении всей книги.

Книга написана на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читал на механико-математическом факультете МГУ. Изложение рассчитано на лиц, знакомых с курсами анализа и механики сплошной среды. Необходимые из этих курсов сведения вместе с некоторыми дополнениями приведены в §§ 1 и 3 гл. I .

На научное мировоззрение автора большое влияние оказало участие со студенческих лет в работе семинара Л.И. Седова. Автор пользуется возможностью выразить здесь своему учителю глубокую благодарность.

Рукопись книги прочитали Я.А. Каменярж, П.П. Мосолов и Б.А. Шойхет, их советы способствовали совершенствованию текста. Формулы были проверены А. Беляевым, Ле Хань Чау и В. Сутыриным. Полезные замечания сделали А.М. Виноградов и Н.Н. Колесников. Всем им автор глубоко признателен.

В. Л. Бердичевский

Наш ум так же немощен, как и наши чувства; он растерялся бы среди сложности мира, если бы эта сложность не имела своей гармонии; подобно близорукому человеку, он видел бы одни лишь детали и должен был бы забывать каждую из них, прежде чем перейти к изучению следующей, ибо он не был бы в состоянии охватить разом всю совокупность частностей. Только те факты достойны нашего внимания, которые вводят порядок в этот хаос и делают его доступным нашему восприятию.

А. Пуанкаре *"Наука и метод"*

Глава I

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сведения из механики сплошной среды. Напомним основные понятия кинематики сплошной среды.

Закон движения. В этой книге изучаются сплошные среды. Под сплошной средой понимают множество частиц, которому можно поставить во взаимно однозначное соответствие точки некоторой области $\overset{0}{V}$ в трехмерном пространстве R_3. В каждый момент времени t это множество частиц занимает некоторую область V в пространстве R_3, которая меняется с течением времени.

Введем в области $\overset{0}{V}$ и в пространстве R_3 некоторые координатные системы; координаты этих систем обозначим[1] соответственно через ξ^a и x^i, малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3. Положение частиц в каждый момент времени t определяется функциями

$$x^i = x^i(\xi^a, t). \tag{1.1}$$

Функции (1.1) называют законом движения сплошной среды, "номера" частиц ξ^a – лагранжевыми или сопутствующими координатами, координаты x^i – эйлеровыми координатами. Индексы, когда это не может вызвать недоразумений, опускаются, и для закона движения пишется $x = x(\xi, t)$.

Основным в определении сплошной среды является введение индивидуализации точек среды, каждой из которых присваивается свой "номер" ξ^a.

Группы преобразований. Уравнения механики имеют тензорный характер относительно двух групп преобразований: группы преобразований системы координат наблюдателя

$$x'^i = x'^i(x^j) \tag{1.2}$$

и группы преобразований сопутствующей системы координат

$$\xi'^a = \xi'^a(\xi^b). \tag{1.3}$$

[1] Основные обозначения см. в конце книги.

Индексы, по которым происходят преобразования относительно группы (1.2), будем называть индексами наблюдателя, а индексы, преобразование по которым происходит при преобразованиях сопутствующей системы координат, – сопутствующими индексами. Различать индексы наблюдателя и сопутствующие индексы будем следующим образом. Сопутствующие индексы будем обозначать первыми буквами латинского алфавита. Как правило, достаточно первых четырех букв a, b, c, d. Индексы наблюдателя будем обозначать малыми латинскими буквами i, j, k, l, m, n.

В механике встречаются также объекты, имеющие как индексы наблюдателя, так и сопутствующие индексы. Например, величины $x_a^i = \dfrac{\partial x^i(\xi^a, t)}{\partial \xi^a}$ преобразуются по индексу i как контравариантный вектор относительно группы (1.2) и по индексу a как ковариантный вектор относительно группы (1.3).

Определяющие функции. Движение сплошной среды полностью определяется функциями $x^i(\xi^a, t)$. Помимо них, поведение сплошной среды может характеризоваться другими функциями, например плотностью энтропии единицы массы $S(\xi^a, t)$ или температурой $T(\xi^a, t)$. При этом, особенно в связи с вариационным подходом, важно выделить параметры, которые могут в известных пределах меняться произвольно и независимо. Эти параметры будем называть определяющими функциями. Более точно, будем говорить, что поведение сплошной среды, известно, если известна зависимость от лагранжевых координат и времени некоторой системы величин u^κ, характеризующих состояние среды и называемых определяющими функциями.

Буквой [1] κ отмечается мультииндекс – индекс, нумерующий некоторый набор скаляров и компонент векторов и тензоров. Набор переменных u^κ будем обозначать также через u.

Построение любой модели сплошной среды начинается с перечисления ее определяющих функций.

Для всех сплошных сред в число определяющих функций входит закон движения $x^i(\xi^a, t)$ и энтропия $S(\xi^a, t)$ (или заменяющая энтропию термодинамическая переменная, скажем, температура). Если модель содержит также другие определяющие функции, то говорят, что модель имеет внутренние степени свободы.

Задание модели сплошной среды означает построение замкнутой системы уравнений для определяющих функций.

Функции u^κ в соответствии с физическим смыслом и постановкой задачи удовлетворяют некоторым ограничениям, которые выделяют множество допустимых функций $\mathcal{M}$.

Наименее стеснительные ограничения – ограничения на гладкость. Уменьшению гладкости соответствует увеличение числа степеней свободы. Например, отказ от непрерывности закона движения $x^i(\xi^a, t)$ и предоставление возможности функциям $x^i(\xi^a, t)$ терпеть разрыв вдоль некоторых поверхностей позволяет моделировать физически новые объекты – тре-

[1] Обратим внимание на то, что в использованном при наборе книги шрифте греческая буква κ (каппа) мало отлнчается по начертанию от латинской буквы k.

щины в упругом теле, дислокации в кристаллической решетке, каверны в жидкости; разрывами производных от $x^i(\xi^a, t)$ вдоль поверхности при условии непрерывности $x^i(\xi^a, t)$ можно моделировать ударные волны и т.п.

Приведем примеры других ограничений, выделяющих множество допустимых функций:

задание значений определяющих функций на границе области V,

$$u^\kappa = \widetilde{u}^\kappa \text{ на } \partial V; \tag{1.4}$$

условие безотрывности обтекания поверхности Σ с уравнением $f(x^i) = 0$ для точек среды ξ^a, лежащих на Σ,

$$f(x^i(\xi^a, t)) = 0; \tag{1.5}$$

условие непротекания через поверхность Σ (предполагается, что среда расположена в области $f(x^i) \leqslant 0$)

$$f(x^i(\xi^a, t)) \leqslant 0 \text{ при } \xi^a \in \partial \overset{\circ}{V}. \tag{1.6}$$

Сведения из математического анализа. *Вариации.* Пусть $u^\kappa(\xi^a, t)$ – некоторые функции из $\mathcal{M}$. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon)$, $\epsilon \geqslant 0$, которое лежит в $\mathcal{M}$, гладко зависит от ϵ, содержит исходные функции $u^\kappa(\xi^a, t)$ при $\epsilon = 0$, а в остальном произвольно.

Вариацией $\delta u^\kappa(\xi^a, t)$ функции $u^\kappa(\xi^a, t)$ называют величину

$$\delta u^\kappa = \left.\frac{\partial u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} d\epsilon = \bar{u}^\kappa\, d\epsilon. \tag{1.7}$$

С точностью до малых второго порядка по $d\epsilon$ можно написать, что сравниваемые функции $u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon)$ отличаются от исходных на величину δu^κ

$$u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon) = u^\kappa(\xi^a, t) + \delta u^\kappa.$$

Функции $\bar{u}^\kappa$ также называют вариацией u^κ (из контекста обычно ясно, идет речь о бесконечно малых вариациях δu^κ или о "конечных" вариациях $\bar{u}^\kappa$).

Приведем геометрическую интерпретацию вариаций. Для удобства геометрической интерпретации будем считать, что множество $\mathcal{M}$ лежит в некотором линейном пространстве H. Множество $\mathcal{M}$ можно представлять себе поверхностью в H. Выведем из точки $u \in \mathcal{M}$ кривую $u(\epsilon)$, $\epsilon \geqslant 0$ – параметр на кривой, $u(0) = u$. Кривую считаем достаточно гладкой в том смысле, что существует предел

$$\lim_{\epsilon \to +0} \frac{u(\epsilon) - u(0)}{\epsilon} = \bar{u};$$

$\bar{u}$, вообще говоря, не принадлежит $\mathcal{M}$ и является элементом пространства H, касательным к $\mathcal{M}$ в точке u.

Множество вариаций $\bar{u}$, построенное для всевозможных кривых $u(\epsilon)$ в $\mathcal{M}$, называют множеством допустимых вариаций.

Из определения следует, что множество допустимых вариаций образует конус в H, т.е. множество элементов, которое наряду с каждым элементом $\bar{u}$ содержит элемент $\lambda\bar{u}$ ($\lambda \geqslant 0$).

Основные типы множества допустимых вариаций представлены на рис. 1–2 (на рисунках стрелки – допустимые вариации). На рис. 1 элемент u – внутренняя точка множества $\mathcal{M}$, а множество допустимых вариаций – подпространство (касательная плоскость к $\mathcal{M}$). На рис. 2 элемент u – "угловая" точка $\mathcal{M}$, такие точки, как правило, имеются у множеств, задаваемых несколькими ограничениями. На рис. 3 элемент u – граничная точка множества $\mathcal{M}$.

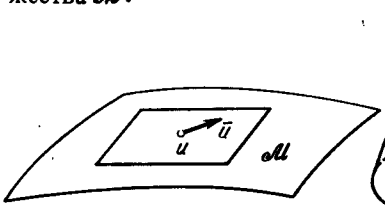


Рис. 1.



Рис. 2.

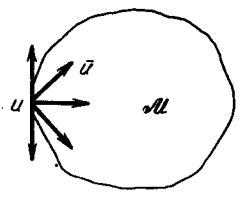


Рис. 3.

Рассмотрим, например, множество, выделяемое ограничениями (1.4). Семейство процессов сравнения $u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon)$ удовлетворяет на V условиям

$$u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon) = \tilde{u}^\kappa \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.8) по ϵ, получим, что на ∂V вариации δu^κ обращаются в нуль:

$$\delta u^\kappa = 0 \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{1.9}$$

Допустимые вариации (1.9), очевидно, образуют линейное подпространство.

Возьмем условие непротекания (1.6) сплошной среды через поверхность Σ. Для точек, лежащих на $\Sigma\,(f(x^i(\xi^a, t)) = 0)$, возможные смещения δx^i направлены в сторону, занятую средой

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\delta x^i \leqslant 0. \tag{1.10}$$

Если частица среды не лежит на $\Sigma\,(f(x^i(\xi^a, t)) < 0)$, то условие непротекания не накладывает ограничений на вариации. Следовательно, если в движении среды, задаваемой функциями $x^i(\xi^a, t)$, все точки границы среды не принадлежат Σ, то множество допустимых вариаций – все пространство, если часть границы среды лежит на Σ, то множество допустимых вариаций – конус, выделяемый соотношением (1.10).

Из определения вариаций (1.7) вытекает, что оператор δ обладает свойствами оператора дифференцирования

$$\delta(f+g) = \delta f + \delta g, \quad \delta(f \cdot g) = \delta f \cdot g + f \cdot \delta g.$$

Если F – заданная функция u^κ, то

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u^\kappa}\delta u^\kappa.$$

Если $u^\kappa(\xi^a, t)$ – действительный процесс, а в качестве функций сравнения выбираются функции $u^\kappa(\xi^a, t+\epsilon)$, то соответствующие вариации

называются действительными и обозначаются символом d. Полагая дополнительно $d\epsilon = dt$, имеем

$$du^{\kappa} = \frac{\partial u^{\kappa}(\xi^a, t)}{\partial t} dt.$$

Действительные вариации могут не содержаться в множестве всех вариаций. Например, если $u^{\kappa}(\xi^a, t)$ подчинены связи, зависящей от времени: $f(u^{\kappa}, \xi^a, t) = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial u^{\kappa}} \delta u^{\kappa} = 0$, однако $\frac{\partial f}{\partial u^{\kappa}} du^{k} = -\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$. Другой пример дают характеристики среды $K(\xi^a, t)$, заданные в функции координат и времени: $\delta K = 0$, однако $dK \neq 0$.

Функционалы. Говорят, что на множестве $\mathcal{M}$ задан функционал, если каждому элементу $u \in \mathcal{M}$ поставлено в соответствие число $I(u)$.

Функционал называется линейным (и, как правило, обозначается $L(u)$), если он определен в линейном пространстве H, и для любых двух элементов u и v из H и любых двух действительных чисел α и β

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

На пространстве H определена симметричная билинейная форма, если любым двум элементам $u, v \in H$ поставлено в соответствие число $E(u, v) = E(v, u)$, при каждом фиксированном v функционал $E(u, v)$ линеен по u и при каждом фиксированном u линеен по v. Функционал $E(u)$, задаваемый формулой

$$E(u) = E(u, u), \tag{1.11}$$

называется квадратичным.

Вариации функционалов. Пусть $I(u)$ некоторый функционал, определенный на множестве $\mathcal{M}$. Возьмем некоторый элемент u множества $\mathcal{M}$ и построим семейство процессов сравнения $u(\epsilon)$, $u(0) = u$, $\epsilon \geqslant 0$. На каждом семействе процессов сравнения $u(\epsilon)$ функционал I становится функцией ϵ. Предполагая, что эта функция дифференцируема по ϵ при $\epsilon \to +0$, введем величину

$$\delta I = \left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} d\epsilon,$$

которая называется вариацией функционала I. Будем считать, что производная $dI / d\epsilon|_{\epsilon=0}$ существует для любого пути $u(\epsilon)$ в $\mathcal{M}$, выходящего из точки u. Предположим, кроме того, что множество допустимых вариаций образует линейное пространство и δI – линейный функционал от δu. Такие функционалы называют дифференцируемыми в точке u. Для того чтобы подчеркнуть, что функционал δI зависит как от u, так и от δu используется обозначение $\delta I = I'(u, \delta u)$.

Элементы $\breve{u}$, которые для любых допустимых вариаций удовлетворяют равенству

$$I'(\breve{u}, \delta u) = 0, \tag{1.12}$$

называются стационарными точками функционала $I(u)$, а уравнения (1.12) или уравнения, эквивалентные им, – уравнениями Эйлера функционала $I(u)$.

Очевидно, что точки минимума и максимума функционала $I(u)$ на $\mathcal{M}$, в которых $I(u)$ дифференцируем, являются его стационарными точками.

Дальше будут встречаться бесконечно малые количества $\delta\Omega$, которые для каждого u есть некоторые линейные функционалы по δu:

$$\delta\Omega = \Omega(u, \delta u), \tag{1.13}$$

причем выражение (1.13), вообще говоря, не представляет вариации некоторого функционала. Подчеркивать различие бесконечно малых количеств $\delta\Omega$ и вариаций функционалов, когда это потребуется, будем следующим образом: в случае истинных вариаций функционал заключается в круглые скобки и пишется $\delta(I)$ вместо δI.

Вариация интегрального функционала. Рассмотрим функционал вида

$$I(u) = \int_V \Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_{,i})\, d^n x. \tag{1.14}$$

Здесь (и до конца этого параграфа) V – область в n-мерном пространстве R_n, $d^n x = dx^1 \ldots dx^n$, малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, ..., n. Через $u^\kappa_{,i}$ обозначены частные производные $\partial u^k / \partial x^i$. Множество допустимых функций $\mathcal{M}$ состоит из функций u^κ, определенных и непрерывных вместе со своими первыми производными в замкнутой области V. Функция предполагается дважды дифференцируемой функцией своих аргументов. Область V считаем ограниченной [1], для того чтобы не обсуждать вопроса о сходимости интеграла, а ее границу – кусочно-гладкой.

Функционал вида (1.14) называют интегральным.

Вычислим вариацию функционала (1.14). Введем семейство функций сравнения $u^\kappa(x^i, \epsilon)$ и обозначим через δu^κ величину $\delta u^\kappa = \left.\dfrac{\partial u^\kappa(x^i, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} d\epsilon$.

Очевидно, что $\delta u^\kappa_{,i} = (\delta u^\kappa)_{,i}$. Дифференцируя по ϵ функцию $I(u(\epsilon))$ и полагая $\epsilon = 0$, получим

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa}\, \delta u^\kappa + \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}} (\delta u^\kappa)_{,i} \right) d^n x. \tag{1.15}$$

Величины δu^κ и $(\delta u^\kappa)_{,i}$ зависимы, так как $(\delta u^\kappa)_{,i}$ полностью определяются по δu^κ. Для приведения выражения (1.15) в форме, содержащей только независимые вариации, проинтегрируем второй член подынтегрального количества по частям:

$$\delta I = \int_V \frac{\delta \Lambda}{\delta u^\kappa}\, \delta u^\kappa d^n x + \int_{\partial V} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}}\, \delta u^\kappa n_i d^{n-1} x. \tag{1.16}$$

Здесь $d^{n-1}x$ – элемент поверхности, n_i – вектор внешней нормали к ∂V, а через $\dfrac{\delta \Lambda}{\delta u^\kappa}$ обозначено выражение

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta u^\kappa} = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}} \tag{1.17}$$

[1] Это всегда предполагается и дальше; вопросы, связанные с неограниченными областями, обсуждаются отдельно.

Величину $\frac{\delta \Lambda}{\delta u^k}$ называют вариационной производной Λ.

В формуле (1.16) все слагаемые независимы, так как значения δu^k внутри области V и на ее границе можно менять независимо.

Формула (1.16) дает искомое выражение для вариаций функционала I. Дальше в том или ином виде она часто встречается. При этом ее вывод будет приводиться, только если он содержит новые элементы по сравнению с рассмотренным; в остальных случаях сразу формулируется результат.

Основная лемма вариационного исчисления. Дальше многократно будет использоваться утверждение, известное под названием основной леммы вариационного исчисления: если справедливо равенство

$$\int_V F_\kappa \bar{u}^\kappa d^n x = 0, \tag{1.18}$$

где величины F_κ есть функции координат, независимые от $\bar{u}^\kappa$, а $\bar{u}^\kappa$ – произвольные бесконечно дифференцируемые функции, обращающиеся в нуль на границе области V, то

$$F_\kappa = 0 \text{ в } V.$$

Эта лемма доказывается в курсах анализа.

Отметим очевидное следствие: если справедливо равенство

$$\int_V F_\kappa \bar{u}^\kappa d^n x + \int_{\partial V} f_\kappa \bar{u}^\kappa d^{n-1} x = 0, \tag{1.19}$$

где F_κ и f_κ – функции координат, независимые от $\bar{u}^\kappa$, $\bar{u}^\kappa$ – произвольные бесконечно дифференцируемые функции, то

$$F_\kappa = 0 \text{ в } V, \; f_\kappa = 0 \text{ на } \partial V.$$

Равенства (1.18) и (1.19) обычно встречаются умноженными на $d\epsilon$, например

$$\int_V F_\kappa \, \delta u^\kappa d^n x = 0.$$

Условия стационарности интегрального функционала. Из (1.12), (1.16) и основной леммы вариационного исчисления следует, что стационарные точки интегрального функционала (1.14) удовлетворяют в области V уравнениям

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta u^\kappa} = 0, \tag{1.20}$$

а на границе области V – краевым условиям

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}} n_i = 0. \tag{1.21}$$

Заметим, что неоднородные краевые условия

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}} n_i = P_i, \tag{1.22}$$

где P_i – заданные функции на ∂V, получается, если в функционал (1.14)

добавить поверхностный интеграл

$$-\int_{\partial V} P_\kappa u^\kappa \, d\sigma.$$

Сузим множество $\mathcal{M}$, задав значения u^κ на границе области V:

$$u^\kappa = \tilde{u}^\kappa, \tag{1.23}$$

где $\tilde{u}^\kappa$ — известные функции на ∂V. Тогда $\delta u^\kappa = 0$ на ∂V, и из (1.12), (1.16) и основной леммы вариационного исчисления вытекает, что стационарные точки удовлетворяют в области V уравнениям (1.20), а на границе области V — краевым условиям (1.23).

Если допустимые функции принимают заданные значения не на всей границе области V, а на некоторой ее части ∂V_u, то стационарные точки удовлетворяют в области V уравнениям (1.20), на ∂V_u — краевым условиям (1.23), а на остальной части границы — краевым условиям (1.22).

§ 2. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариационные принципы. История механики и физики — это история попыток объяснить происходящее в окружающем мире при помощи небольшого числа универсальных законов и общих принципов. Наиболее удачные и плодотворные попытки связаны с идеей о том, что явления, которые мы наблюдаем, обладают некоторыми экстремальными свойствами и искомые общие принципы имеют вариационный характер, т.е. утверждают, что в реально осуществляющихся процессах некоторые величины достигают своего максимального или минимального значения.

Эта будоражущая воображение идея возникла давно. Во всяком случае, еще Аристотель писал, что природа во всех своих проявлениях идет легчайшим путем, с наименьшими затратами [1]).

Первую отчетливую формулировку вариационного принципа применительно к физической проблеме удалось дать в 1662 г. французскому математику Пьеру Ферма. Ферма исследовал закон преломления света на границе двух сред с различными оптическими свойствами. До Ферма закон преломления света был рассмотрен Декартом. Декарт в своих рассуждениях использовал предположение, что в более плотной среде свет распространяется с большей скоростью [2]). Это предположение показалось Ферма неправдоподобным, и он решил пересмотреть вывод Декарта. В основу своих рассуждений Ферма положил постулат: "Природа действует наиболее легкими и доступными путями". Исходя из этого, он принял, что свет, распространяясь из точки A в точку B (рис. 4) выберет такой путь, чтобы время прохождения его оказалось минимальным. Легко проверить, что из принципа Ферма получается правильный закон преломления света (α_1 и α_2, c_1 и c_2 — углы между лучом и нормалью и значения скорости света сверху и снизу от поверхности раздела)

$$\frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2}.$$

[1]) Аристотель, как отмечает Эйлер [251], по-видимому, почерпнул эту мысль у своих предшественников.

[2]) Лейбниц так оправдывал впоследствии гипотезу Декарта. Луч света в плотной среде (стекле) рассеивается меньше, чем в разреженной (воздухе), и, подобно реке в более узком русле, в плотной среде движется быстрее.

Принцип Ферма дает простейший пример вариационного принципа: из различных допустимых путей, соединяющих точки A и B, реализуется тот, который доставляет минимум некоторой величине (в данном случае времени).

Успешное применение вариационного принципа в оптике поставило вопрос о поисках аналогий в механике.

В 1696 г. в лейпцигском журнале "Acta Eruditorum" Иоганн Бернулли поместил короткую заметку. Приведем ее полностью.

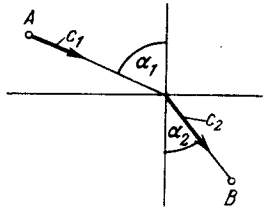


Рис. 4.

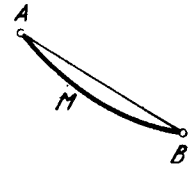


Рис. 5.

"В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 5). Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до другой точки B за кратчайшее время.

Для того чтобы вызвать интерес со стороны любителей подобных вопросов и побудить их охотнее предпринять попытку разрешения указанной задачи, довожу до их сведения, что эта задача не сводится к пустой умственной спекуляции, лишенной какого бы то ни было практического значения, как это может кому-либо показаться. В действительности она представляет очень большой практический интерес и притом, кроме механики, также и для других дисциплин, что может всем показаться неправдоподобным.

Между прочим (указываю это с целью предупредить возможное неправильное суждение), хотя прямая AB и является кратчайшей линией между крайними точками A и B, тем не менее тело проходит ее не в кратчайшее время и существует кривая AMB, хорошо известная геометрам. Я назову эту линию, если по истечении текущего года никто другой ее не назовет".

Свой ответ Бернулли отправил Лейбницу с тем, чтобы тот через год опубликовал его.

Эта, по словам Лейбница, "столь прекрасная и до сих пор неслыханная задача", которая "своей красотой влечет к себе, как яблоко влекло Еву", взволновала многих ученых. Ее решением занимались, в частности, Якоб Бернулли и Ньютон. Искомой кривой оказалась циклоида.

В полученных решениях не удалось дать общих методов исследования подобных задач. Они были построены спустя пятьдесят лет учеником Иоганна Бернулли Леонардом Эйлером, заложившим основы современного вариационного исчисления.

После работ Ферма и Бернулли с новой остротой встал вопрос: "Не происходит ли движение тел так, что некоторая величина для реально осуществляющегося движения достигает минимума?" или на языке XVIII века: "Те-

ло, перемещаясь из одного положения в другое платит, и движение таково, что эта плата должна быть наименьшей".

Первая формулировка вариационного принципа в механике была дана в 1744 г. Пьером Мопертюи. Согласно принципу Мопертюи в истинном движении произведение его массы на скорость и на путь минимально. Эту величину

$$I = m\upsilon s$$

Мопертюи, следуя Лейбницу, назвал действием.

Мопертюи, ставший президентом Берлинской Академии наук, объявил принцип наименьшего действия общим законом природы и основным доказательством бытия божьего.

Математическое содержание в принцип Мопертюи внес Л. Эйлер. В частности, Эйлер понял, что выражение для действия, предложенное Мопертюи, пригодно только для малых участков пути ds, а для всего пути надо просуммировать все малые приращения действия.

Таким образом, для действия следует написать:

$$I = \int m\upsilon ds,$$

или, так как $\upsilon = ds/dt$,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} m\upsilon^2\, dt.$$

Подынтегральное количество с точностью до множителя совпадает с кинетической энергией (Лейбниц называл его живой силой, в отличие от давления – "мертвой" силы).

В годы президентства Мопертюи в "Acta Eruditorum" Кенигом были опубликованы письма, якобы принадлежащие перу покойного Лейбница, из которых можно было заключить, что Лейбницу был известен принцип экстремальности действия, причем утверждалось, что действие может достигать не только минимального, но и максимального значения. Возник спор, к которому примешались вопросы приоритета, философские и моральные проблемы. В бурные дискуссии включились не только ученые, но также философы, короли, придворные и писатели. Один из отголосков этих дискуссий дошел до нас в виде памфлета Ф. Вольтера "История доктора Акакия и уроженца Сен-Мало".

В результате выкристаллизовалась точка зрения, согласно которой в некоторых движениях действие достигает минимального значения, а в других максимального значения. На языке XVIII века это звучало так: "Природа является бережливой матерью, которая обходится наименьшим там, где это возможно, но там, где этого нельзя достичь, она платит честно и столько, сколько возможно, чтобы не прослыть скрягой" [1]).

Вариационные принципы Мопертюи, Лагранжа, Гамильтона, Остроградского, Якоби, Пуанкаре. Завершил разработку принципа наименьшего действия Лагранж. В окончательном виде этот принцип формируется следующим образом.

---

[1]) Письмо Г.В. Крафта к Л. Эйлеру от 28 августа 1753 г.

Рассмотрим механическую систему, которая описывается конечным числом обобщенных координат (определяющих функций) $q^1 \ldots q^n$. Совокупность переменных q^i ($i = 1, \ldots, n$) будем обозначать через q. Каждому движению системы отвечает в конфигурационном пространстве Q переменных q траектория $q = q(t)$. Пусть $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q} = dq/dt$. $\mathcal{U}(q)$ – потенциальная энергия. Кинетическую энергию будем считать положительной функцией, однородной второй степени по $\dot{q}$. Условие однородности означает, что имеют место равенства

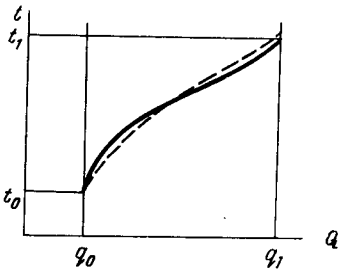


Рис. 6.

$$\mathcal{K}(q, \lambda\dot{q}) = \lambda^2 \mathcal{K}(q, \dot{q}), \quad \dot{q}^i \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i} = 2\mathcal{K}(q, \dot{q}). \tag{2.1}$$

При некоторых ограничениях на характер действующих на систему сил справедлив закон сохранения энергии

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) + \mathcal{U}(q) = \mathcal{E} = \text{const}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим в конфигурационном пространстве Q две точки q_0 и q_1 и всевозможные траектории $q(t)$, которые в некоторый фиксированный момент времени t_0 начинаются в точке q_0 и в некоторый момент времени t_1 заканчиваются в точке q_1 (рис. 6):

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество траекторий, которые выходят в момент времени t_0 из точки q_0, приходят в точку q_1 и удовлетворяют закону сохранения энергии (2.2) с одной и той же постоянной $\mathcal{E}$. Момент прихода траектории в точку q_1, очевидно, определяется по постоянной $\mathcal{E}$.

Действительно, согласно первому равенству (2.1), можно написать

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{\mathcal{K}(q, dq)}{dt^2}.$$

Отсюда

$$dt = \frac{\sqrt{\mathcal{K}(q, dq)}}{\sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{U}(q, t)}} \tag{2.4}$$

и

$$t_1 = t_0 + \int_{q_0}^{q_1} \sqrt{\frac{\mathcal{K}(q, dq)}{\mathcal{E} - \mathcal{U}(q)}}$$

Введем действие по формуле

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{K}\, dt. \tag{2.5}$$

Принцип стационарности действия в форме Мопертюи – Лагранжа утверждает, что истинное движение является стационарной точкой действия (2.5) на множестве $\mathcal{M}$.

Подчеркнем, что в принципе Мопертюи – Лагранжа варьированию подвергаются не только траектории системы, но и момент прихода в конечную точку.

Выведем уравнения для q из принципа Мопертюи–Лагранжа. Для того чтобы освободиться от ограничения (2.2), следует ввести множитель Лагранжа для этого ограничения $\lambda(t)$ (о правиле множителей Лагранжа см. § 4 гл. II) и переписать действие в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{K} + \lambda(t)(\mathcal{K} + \mathcal{U} - \mathcal{E}))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt. \tag{2.6}$$

Вычисление вариации функционала (2.6) не сводится к вычислению вариации функционала (1.14), потому что область интегрирования $[t_0, t_1]$ подвергается варьированию.

Пусть $q(t, \epsilon)$ – семейство функций сравнения. Функции $q(t, \epsilon)$ определены на отрезках $[t_0, t_1(\epsilon)]$, зависящих от ϵ, $t_1(0) = t_1$. Нам надо вычислить производную по ϵ интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1(\epsilon)} L\left(t, q(t, \epsilon), \frac{dq(t, \epsilon)}{dt}\right) dt. \tag{2.7}$$

Для этого удобно переписать его в виде интеграла по отрезку $[t_0, t_1]$, не зависящему от ϵ. Сделаем для этого замену переменной $t \to t'(t, \epsilon)$, которая переводит отрезок $[t_0, t_1]$ в отрезок $[t_0, t_1(\epsilon)]$. Тогда интеграл (2.7) примет вид

$$I(q(\epsilon)) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t'(t, \epsilon), q(t'(t, \epsilon), \epsilon), \frac{dq(t'(t, \epsilon), \epsilon)}{dt'}\right) \frac{dt'(t, \epsilon)}{dt}\, dt. \tag{2.8}$$

Обозначим через $\delta_{\text{п}} q$ (полную вариацию q) величину

$$\delta_{\text{п}} q = \left.\frac{\partial q(t'(t, \epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon = 0} d\epsilon,$$

а обозначение δq (вариация при постоянном t) сохраним за величиной

$$\delta q = \left.\frac{\partial q(t, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon = 0} d\epsilon.$$

Очевидно, что $\delta_{\text{п}} q$ и δq связаны соотношением

$$\delta_{\text{п}} q = \delta q + \frac{dq}{dt}\, \delta t,$$

где

$$\delta t = \left.\frac{\partial t'(t, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon = 0} d\epsilon.$$

Оператор δ перестановочен с оператором d/dt

$$\delta \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\, \delta q. \tag{2.9}$$

Оператор $\delta_{\text{п}}$ этим свойством не обладает. Связь между $\delta_{\text{п}} \dfrac{d}{dt}$ и $\dfrac{d}{dt} \delta_{\text{п}}$ имеет вид

$$\delta_{\text{п}} \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \delta_{\text{п}} q - \frac{dq}{dt} \frac{d\delta t}{dt} . \tag{2.10}$$

Она следует из тождеств

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{dq(t'(t,\epsilon),\epsilon)}{dt'} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{dq(t'(t,\epsilon),\epsilon)}{dt} \right) \left(\frac{dt'(t,\epsilon)}{dt} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \epsilon} q(t'(t,\epsilon),\epsilon) \right) \left(\frac{dt'(t,\epsilon)}{dt} \right)^{-1} -$$

$$- \frac{dq(t'(t,\epsilon),\epsilon)}{dt} \left(\frac{dt'(t,\epsilon)}{dt} \right)^{-2} \frac{d}{dt} \frac{\partial t'(t,\epsilon)}{\partial \epsilon} .$$

Покажем, что вариация функционала I имеет вид

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\delta L}{\delta q^i} \delta_{\text{п}} q^i - \frac{\delta L}{\delta q^i} \dot{q}^i \delta t + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_{\text{п}} q^i - H \delta t \right) \right] dt, \tag{2.11}$$

где $\delta L / \delta q^i$ – вариационная производная функции L :

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} ,$$

а H – дается формулой

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L.$$

Действительно, дифференцируя функционал (2.8) по ϵ, получим

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta_{\text{п}} q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_{\text{п}} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d\delta t}{dt} \right] dt. \tag{2.12}$$

При помощи (2.10) можно переписать равенство (2.12) в виде

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\delta L}{\delta q} \delta_{\text{п}} q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_{\text{п}} q \right) - H \frac{d\delta t}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right] dt. \tag{2.13}$$

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \equiv - \frac{\delta L}{\delta q^i} \dot{q}^i . \tag{2.14}$$

Под $\partial L / \partial t$ понимается частная производная по t фуикции $L(q, \dot{q}, t)$ (аргументы q, $\dot{q}$ фиксированы), под d/dt – производная, учитывающая измеиение всех аргументов со временем.

При помощи тождества (2.14) выражеиие для δI (2.13) легко переписывается в окоичательном виде (2.11).

Допустимые вариации $\delta_{\text{п}} q$ и δt подчинены на концах отрезка интегрирования следующим условиям:

$$\delta_{\text{п}} q = 0 \text{ при } t = t_0, t_1; \quad \delta t = 0 \text{ при } t = t_0.$$

Полагая сначала $\delta t = 0$, из равенства $\delta I = 0$ и основной леммы вариационного исчисления получим систему уравнений

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} = 0. \tag{2.15}$$

При ненулевых значениях δt из равенства $\delta I = 0$ следует, что

$$H = 0 \text{ при } t = t_1. \tag{2.16}$$

Мы имеем замкнутую систему уравнений для $n + 1$ функции $q^i(t)$, $\lambda(t)$, состоящую из уравнений (2.2) и (2.15) и краевых условий (2.3) и (2.16). Покажем что, функция $\lambda(t)$ находится явно. Вспомним, что $L = \mathcal{K} + \lambda(\mathcal{K} + \mathcal{U} - \mathcal{E}) = (1 + \lambda)\mathcal{K} + \lambda\mathcal{U} - \lambda\mathcal{E}$. Из определения H находим, что $H = (1 + 2\lambda)\mathcal{K}$ (при этом использовано уравненне энергии (2.2)). В силу (2.15) из тождества (2.14) следует равенство

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Явная зависимость L от времени возникает за счет зависнмости L от λ, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} = (\mathcal{K} + \mathcal{U} - \mathcal{E})\frac{d\lambda}{dt},$$

и в силу уравнения энергии (2.2) $\partial L/\partial t = 0$. Следовательно, $dH/dt = 0$, и $(1 + 2\lambda)\mathcal{K} = \text{const}$. Условие на краю (2.16) показывает, что значение этой константы равно нулю, и, так как $\mathcal{K} \neq 0, 1 + 2\lambda \equiv 0$. Итак, функция $\lambda(t)$ постоянная и равна $-1/2$. При $\lambda = -1/2$ функция L отличается от разности кинетической и потенциальной энергий на аддитивную постоянную

$$L = \frac{1}{2}(\mathcal{K} - \mathcal{U}) + \frac{1}{2}\mathcal{E},$$

а уравнения (2.15) принимают форму уравнений Лагранжа аналитической механики.

В книге Лагранжа "Аналитическая механика" принцип наименьшего действия был сформулирован не вполне ясно[1]). Это дало повод для дальнейших размышлений и привело Гамильтона, Остроградского, Якоби и Пуанкаре к некоторым модификациям принципа.

Якоби предложил исключить из действия время при помощи соотношения (2.4). Тогда действие принимает вид

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{K}\, dt = \int_{q_0}^{q_1} \sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{U}(q)}\sqrt{\mathcal{K}(q, dq)}. \tag{2.17}$$

Принцип стационарного действия в форме Якоби утверждает, что истинное движение является стационарной точкой функционала (2.17) на

[1]) Изложение принципа стационарного действия, приведенное выше, было опубликовано через три года после смерти Лагранжа и принадлежит Родригесу.

множестве всех траекторий, начинающихся в точке q_0 и заканчивающихся в точке q_1 и удовлетворяющих закону сохранения энергии (2.2).

Гамильтон заметил, что можно не требовать выполнения закона сохранения энергии на всех допустимых траекториях, если взять действие в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{K} - \mathcal{U})dt. \tag{2.18}$$

Оказывается, что закон сохранения энергии будет иметь место для действительной траектории в силу уравнений Эйлера функционала (2.18). Известным преимуществом такой модификации принципа наименьшего действия является возможность считать момент времени t_1 заданным и не варьируемым, а также отсутствие ограничения на допустимые траектории (2.2).

Принцип стационарного действия в форме Гамильтона утверждает, что истинная траектория является стационарной точкой функционала (2.18) на множестве траекторий, выходящих в момент времени t_0 из точки q_0 и попадающих в момент времени t_1 в точку q_1.

Несколько позже Гамильтона к этому же утверждению пришел и Остроградский.

Пуанкаре построил другую модификацию принципа стационарного действия, в которой действие определено на траекториях в фазовом пространстве – пространстве обобщенных координат $q^1 \ldots q^n$ и импульсов $p_1 \ldots p_n$. Действие есть функционал вида

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (p_i \dot{q}^i - \mathcal{H}(p,q))dt. \tag{2.19}$$

Функция $\mathcal{H}(p,q)$ представляет преобразование Лежандра функции $L(q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q)$ по скоростям $\dot{q}$ (определение и свойства преобразования Лежандра приведены в § 2 гл. II). Нетрудно убедиться, что стационарные точки функционала (2.18) являются также стационарными точками функционала (2.19), рассматриваемого на множестве всех функций $q(t)$, $p(t)$, которые в момент времени t_0, t_1 удовлетворяют условиям $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$.

Утверждение о стационарности функционалов (2.18) и (2.19) на истинной траектории называют принципом Гамильтона (или соответственно принципом Гамильтона–Остроградского и принципом Гамильтона в форме Пуанкаре).

Функцию $L(q,\dot{q}) = \mathcal{K} - \mathcal{U}$ называют функцией Лагранжа, функцию $H(p,q)$ – функцией Гамильтона. В соответствии с этим в физике метод вывода уравнений при помощи принципа Гамильтона–Остроградского и принципа Гамильтона–Пуанкаре называют соответственно лагранжевым и гамильтоновым формализмом.

Следует отметить, что основное распространение в настоящее время получили модификации принципа стационарного действия Гамильтона–Остроградского и Гамильтона–Пуанкаре, и в современной литературе исходная формулировка Мопертюи–Лагранжа, практически не встречается.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли все физические закономерности вывести из условия стационарности некоторого соответствующим образом подобранного действия?

Накопленные в физике результаты показывают, что все элементарные взаимодействия частиц, все фундаментальные поля (электромагнитное, гравитационное, внутриядерные сильные и слабые взаимодействия) таковы, что законы, ими управляющие, могут быть получены из условия стационарности некоторого действия. Более того, убеждение в справедливости этого факта укоренилось настолько глубоко, что в новых ситуациях, когда закономерности изучаемого явления заранее неизвестны, конструируется сразу действие, из условия стационарности которого и выводят искомые уравнения.

Таким образом, были получены многие уравнения квантовой механики, на этом пути А. Эйнштейн совершенствовал уравнения общей теории относительности. В настоящее время можно утверждать, что все известные фундаментальные физические поля удовлетворяют принципу стационарности действия.

Вместе с этим временная нелокальность принципа стационарного действия оставляла чувство неудовлетворенности. Приведем два высказывания, первое из которых принадлежит Пуанкаре [195], второе – Герцу [64]:

" . . . В самой формулировке принципа наименьшего действия есть что-то неприемлемое для разума. Чтобы попасть из одной точки в другую, материальная молекула, свободная от воздействия любой силы, но принужденная двигаться по какой-либо поверхности, будет двигаться по геодезической линии, т.е. по наикратчайшему пути.

Эта молекула как бы знает точку, куда ее хотят привести, предвидит время, которое у нее займет достижение этой точки, следуя по тому или иному пути, и выбирает затем наиболее подходящий путь. Формулировка представляет нам, так сказать, ее как существо одушевленное и свободное. Ясно, что следовало лучше заменить эту формулировку менее поражающей, в которой, как говорят философы, конечные цели не будут казаться заменяющими действующие причины".

" . . . Принцип Гамильтона . . . не только ставит происходящее в настоящий момент движение в зависимость от последствий, которые могут выявиться в будущем, предполагая существование у живой природы намерений, но, что еще хуже, он предполагает существование у природы бессмысленных намерений. Ибо интеграл, минимума которого требует принцип Гамильтона, не имеет простого физического значения; кроме того, представляется непонятной целью природы приведение математического выражения к минимуму или его вариации к нулю".

Ответ на вопрос о физическом смысле функции Лагранжа удалось дать после создания теории относительности. Если речь идет о движении материальной точки с массой покоя m_0 в поле сил, порождающих потенциальную энергию $\mathcal{U}(q)$, то полная энергия тела есть $m_0c^2 + \mathcal{U}(q)$ (c – скорость света). Пусть t – время наблюдателя. Тогда собственное время частицы t^* дается формулой

$$dt^* = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

Возьмем действие в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (m_0 c^2 + \mathcal{U}(q))\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

Если учесть, что $\frac{v}{c} \ll 1$, $\frac{\mathcal{U}(q)}{m_0 c^2} \ll 1$, и сохранить в подынтегральном количестве только главные члены

$$(m_0 c^2 + \mathcal{U}(q))\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\mathcal{U}(q)}{m_0 c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \approx$$

$$\approx m_0 c^2 + \mathcal{U}(q) - \frac{m_0 v^2}{2},$$

то после отбрасывания постоянного слагаемого $m_0 c^2$ придем к функции Лагранжа материальной точки (с обратным знаком).

Величина $m_0 c^2 + \mathcal{U}(q)$ есть энергия покоя материальной точки. Таким образом, действие представляет сумму по всем моментам собственного времени величины, имеющей ясный физический смысл полной энергии покоя точки. "Странное" выражение для функции Лагранжа в виде разности кинетической и потенциальной энергии представляет ньютонианский предел плотности действия, отнесенного к единице времени наблюдателя.

Второй вопрос, поднятый в процитированных высказываниях Пуанкаре и Герца, – вопрос о локальной формулировке основных принципов механики – будет обсуждаться ниже.

После Лагранжа, Гамильтона и Якоби следующий принципиально новый вклад внес Уиллард Гиббс[1]).

Принципы Гиббса. Системы с конечным числом степеней свободы характеризуются двумя функциями – кинетической энергией $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ и внутренней энергией $\mathcal{U}(q)$, по которым восстанавливается функция Лагранжа $L = \mathcal{K} - \mathcal{U}$ и, следовательно, все свойства системы. При переходе к сплошным средам кинетическая и внутренняя энергии становятся некоторыми функционалами от определяющих функций. Кроме того, поскольку сплошная среда описывает некоторые статистические закономерности для большого числа хаотически двигающихся частиц, как и во всех стохастических задачах, возникает новая характеристика – энтропия системы $\mathcal{S}$

Энтропию можно рассматривать как меру неопределенности (меру потери информации), возникающую при переходе от "подробного" микроскопического описания к макроскопическому описанию. Энтропия также является функционалом от определяющих функций.

Мы будем предполагать, что внутренняя энергия и энтропия аддитивны по массе и представляются в виде

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U\, dv, \qquad \mathcal{S} = \int_V \rho S\, dv,$$

где ρ – плотность массы, dv – элемент объема области V, U и S – плотности

[1]) Обзор по "догиббсовскому периоду" истории создания вариационных принципов механики, разумеется, не претендует на полноту. В частности, не упомянуты принципы Гаусса и Герца, результаты по механике неголономных систем. Были отмечены только те моменты, которые связаны с дальнейшим изложением.

внутренней энергии и энтропии на единицу массы, а кинетическая энергия задается выражением

$$\mathcal{K} = \int_V \frac{1}{2}\,\rho v_i v^i\,dv, \quad v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}.$$

Обычно U есть функция u^κ и производных $\partial u^\kappa / \partial \xi^a$.

В 1875 г. появилась основополагающая работа Гиббса "Термодинамика гетерогенных систем", в которой теория термодинамического равновесия была построена, по существу, в современном виде, исходя из двух (эквивалентных) вариационных принципов.

Первый принцип Гиббса. В состоянии термодинамического равновесия изолированной системы энтропия системы $\mathcal{S}$ достигает максимального значения на всех возможных состояниях системы с заданным уровнем энергии $\mathcal{U}$.

Второй принцип Гиббса. В состоянии термодинамического равновесия изолированной системы энергия системы $\mathcal{U}$ достигает минимума на всех возможных состояниях системы с заданным уровнем энтропии $\mathcal{S}$.

Гиббс рассматривал эти принципы как основные исходные утверждения равновесной термодинамики. Впоследствии мало кто придерживался точки зрения Гиббса; вариационные принципы Гиббса обычно приводились в курсах термодинамики как некоторые интересные экстремальные свойства термодинамически равновесных состояний. И лишь в последнее время, в особенности в связи с тем, что всю статистическую теорию термодинамического равновесия удалось изложить, исходя из первого принципа Гиббса, принципы Гиббса становятся общепризнанной основой теории термодинамического равновесия.

Пример. В качестве примера применения принципов Гиббса покажем, что в состоянии термодинамического равновесия сплошной среды ее температура не меняется от точки к точке. Предположим, что для покоящейся среды плотность внутренней энергии единицы массы есть функция только от плотности энтропии: $U = U(S)$. Тогда полная энергия среды есть

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U(S)\,dv.$$

В состоянии термодинамического равновесия среды $\mathcal{U}$ должна быть минимальна на множестве всех допустимых полей S, удовлетворяющих ограничению $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \text{const}$. В соответствии с правилом множителей Лагранжа (см. § 4 гл. II) истинное поле энтропии является стационарной точкой функционала

$$\int_V \rho U(S)\,dv + \lambda\left(\int_V \rho S\,dv - \mathcal{S}_0\right),$$

где число λ — множитель Лагранжа для ограничения $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. Уравнение Эйлера этого функционала имеет вид $dU/dS = \lambda$. Величина dU/dS называется абсолютной температурой, и уравнение Эйлера показывает, что в состоянии термодинамического равновесия температура постоянна.

Докажем эквивалентность принципов Гиббса в случае систем с конечным числом степеней свободы $\{u_1, \ldots, u_n\} = u$. Будем предполагать, что: 1) переменные u изменяются в n-мерном пространстве R_n; 2) $\mathcal{S}(u)$ и $\mathcal{U}(u)$ – гладкие функции; 3) состояние

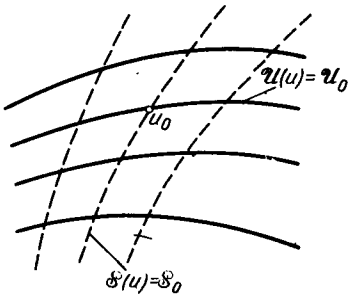


Рис. 7.

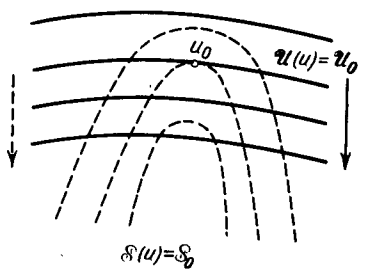


Рис. 8.

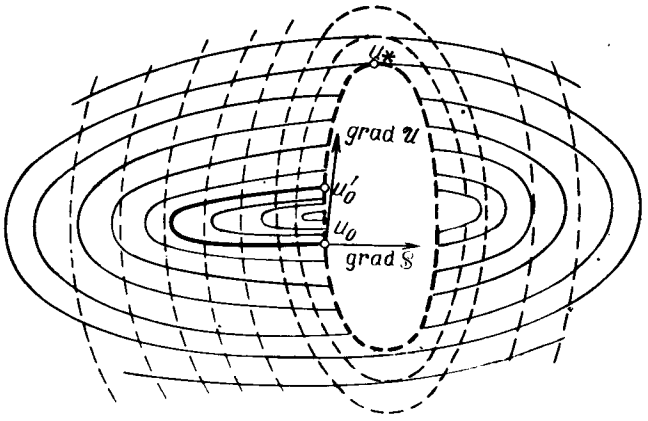


Рис. 9.

термодинамического равновесия не есть стационарная точка ни $\mathcal{S}(u)$, ни $\mathcal{U}(u)$; 4) функция $\mathcal{S}(u)$ в каждой точке u возрастает в направлении $\partial\mathcal{U}/\partial u_i$ и 5) в каждой из рассматриваемых вариационных задач имеется изолированное число стационарных точек. Условие 4 есть, по существу, условие положительности температуры.

Пусть справедлив первый принцип Гиббса, т.е. существует точка u_0, в окрестности которой энтропия $\mathcal{S}(u)$ достигает максимального значения $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(u_0)$ на поверхности уровня $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}(u_0)$. Покажем, что энергия $\mathcal{U}(u)$ на поверхности уровня $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}_0$ достигает минимума в точке u_0.

Проведем через точку u_0 какую-нибудь двумерную плоскость P, не касательную к поверхности $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0$ в точке u_0. Представим картину линий уровня энергии и энтропии на плоскости P. Линия уровня энтропии $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}_0$ не может пересекать линию уровня энергии $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0$. Действительно, в этом случае реализуется картина линий уровней, изображенная на рис. 7. Сплошные линии изображают линии уровня энергии, штриховые – линии уровня энтропии. При этом использовано, что $\partial\mathcal{U}/\partial u^i$ и $\partial\mathcal{S}/\partial u^i$ не обращаются в нуль в окрестности точки u_0. Очевидно, что при таком расположении линий уровня энтропия не может иметь максимума на линии уровня $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0$. Поэтому остается случай, изображенный на рис. 8. В силу гладкости $\mathcal{S}(u)$ и $\mathcal{U}(u)$ линии уровней $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}_0$ и $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0$ касаются в точке u_0.

Поскольку в точке u_0 энтропия имеет значение большее, чем ее значения в других точках линии уровня $\mathcal{U}(u) = \mathcal{U}_0$, возрастание энтропии происходит в направлении, отмеченном на рис. 8 штриховой стрелкой. В силу предположения 4) энергия $\mathcal{U}(u)$ возрастает в направлении, отмеченном на рис. 8 сплошной стрелкой. Поэтому на поверхности $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}_0$ функция $\mathcal{U}(u)$ достигает в точке u_0 своего минимального значения.

Приведенные рассуждения можно обобщить и на бесконечномерный случай.

Предположения, сделанные при доказательстве эквивалентности принципов Гиббса, существенны. Покажем, например, что принципы Гиббса перестают быть эквивалентными, если отказаться от предположения 1).

Пусть имеются две переменные u_1, u_2, которые изменяются не во всем пространстве, а в области, выделенной ограничением $\mathscr{E}(u_1, u_2) \leqslant \mathscr{E}_0$. Линии уровня функции $\mathscr{E}$ изображены на рис. 9 штриховыми линиями, линии уровня функции $\mathscr{U}$ – сплошными линиями, линии $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{U}=\mathscr{U}_0$ – соответствующими жирными линиями. Направление возрастания $\mathscr{E}$ и $\mathscr{U}$ указаны стрелками. На линии $\mathscr{U}=\mathscr{U}_0$ энтропия достигает максимума в точках u_0 и u_0', на линии $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$ энергия достигает минимума в точке u_*, при этом $u_* \neq u_0$, $u_* \neq u_0'$.

В известных физических приложениях оба принципа Гиббса эквивалентны.

Принципы Гиббса существенно отличаются от вариационных принципов аналитической механики. В механике варьируется только положение частиц. В принципах Гиббса варьированию подвергаются, по существу, все параметры, которые могут изменяться в исследуемых процессах. Например, если рассматривается равновесие двух веществ, на поверхности раздела которых может происходить превращение одного вещества в другое (фазовый переход), то варьированию подвергаются также поверхность раздела и массы этих веществ. Пример использования принципов Гиббса для вывода условий равновесия двух упругих фаз будет приведен в § 2 гл. III.

Перейдем к рассмотрению вопроса о физическом смысле вариационных принципов. Оказывается, что в основе вариационного подхода лежит некоторое вариационное уравнение, связанное с вариационной формулировкой первого и второго начал термодинамики. В обсуждавшихся случаях это вариационное уравнение эквивалентно вариационным принципам. В общем случае вариационное уравнение неголономно и не сводится к условию стационарности какого-либо функционала. Приступим к изложению соответствующего круга вопросов.

Принцип возможных перемещений. Исторически первым вариационным уравнением было "золотое правило" механики – принцип возможных перемещений. Его формулировка для рычага содержалась еще в "Физике" Аристотеля (IV в. до н.э.). Дальнейшие существенные этапы связаны с именами Стевина и Галилея. В практически современном виде принцип возможных перемещений сформулировал Иоган Бернулли.

Приведем принцип возможных перемещений для системы материальных точек, подчиненных некоторым кинематическим связям. Связи считаем идеальными (содержание этого термина будет пояснено ниже). Пусть $\mathbf{x}_{(s)}$ – радиус-вектор точки с номером s, $\mathbf{F}_{(s)}$ – действующая на s-ю точку внешняя сила, $\delta\mathbf{x}_{(s)}$ – бесконечно малые перемещения, совместимые со связями. Тогда, для того чтобы система находилась в состоянии равновесия, необходимо и достаточно, чтобы суммарная работа внешних сил на возможных перемещениях была равна нулю

$$\sum_s \mathbf{F}_{(s)} \cdot \delta\mathbf{x}_{(s)} = 0. \tag{2.20}$$

Если кинематические ограничения отсутствуют, то утверждение (2.20) "тривиально", так как эквивалентно равенствам $\mathbf{F}_{(s)} = 0$. "Нетривиальные" следствия получаются при наличии ограничений.

В работах XIX в. принцип виртуальных перемещений называли также принципом виртуальных скоростей или принципом виртуальных мощнос-

тей, поскольку $\delta x_{(s)}$ в (2.20) можно заменить на кинематически допустимые скорости: с точностью до бесконечно малого множителя они пробегают то же множество, что и $\delta x_{(s)}$.

Принцип Даламбера и уравнение энергии для возможных перемещений. В задачах динамики вариационное уравнение (2.20) остается справедливым, если к силам $\mathbf{F}_{(s)}$ добавить силы инерции $-m_{(s)}\mathbf{a}_{(s)}$ ($m_{(s)}$ и $\mathbf{a}_{(s)}$ – масса и ускорение s-й частицы)

$$\sum_s (\mathbf{F}_{(s)} - m_{(s)}\mathbf{a}_{(s)})\,\delta\mathbf{x}_{(s)} = 0. \qquad (2.21)$$

Это утверждение носит название принципа Даламбера.

Если связи отсутствуют, то из вариационного уравнения (2.21) следуют уравнения движения Ньютона. При наличии связей вариационное уравнение (2.21) "становится нетривиальным".

В принципе Даламбера силы инерции играют в некотором смысле равноправную роль с остальными силами: для составления основных уравнений надо в статические уравнения добавить еще одну силу, связанную с ускоренным движением тела относительно инерциальной системы отсчета. Заметим, что в сопутствующей системе отсчета тела покоятся, и уравнения Ньютоиа можно рассматривать как уравнения равновесия системы сил, включающих силу иперции.

Вариационное уравнение (принцип) Даламбера можно считать исходным постулатом механики систем с конечным числом степеней свободы.

Л.И. Седовым была высказана мысль, что вариационное уравнение механики есть уравнение энергии, записанное для возможных перемещений. Покажем, как придать принципу Даламбера форму уравнения энергии.

Величина $\sum_s \mathbf{F}_{(s)}\,\delta\mathbf{x}_{(s)}$ имеет, очевидно, смысл работы внешних сил; обозначим ее через $\delta\mathcal{A}^{(e)}$:

$$\delta\mathcal{A}^{(e)} = \sum_s \mathbf{F}_{(s)}\,\delta\mathbf{x}_{(s)}.$$

Рассмотрим выражение $m\mathbf{a}\,\delta\mathbf{x} = m\,\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{x}$. Прибавим и отнимем в правой части $m\mathbf{v}\,\delta\mathbf{v}$. Тогда

$$m\mathbf{a}\,\delta\mathbf{x} = \delta\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right) + m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,\delta\mathbf{x} - m\mathbf{v}\,\delta\,\frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Введем кинетическую энергию

$$\mathcal{K} = \sum_s \frac{1}{2}\,m_{(s)}\,v_{(s)}^2,$$

и функционал $\delta\Omega$

$$\delta\Omega = -\sum_s \left(m_{(s)}\,\frac{d\mathbf{v}_{(s)}}{dt}\,\delta\mathbf{x}_{(s)} - m_{(s)}\mathbf{v}_{(s)}\,\delta\,\frac{d\mathbf{x}_{(s)}}{dt}\right).$$

Тогда принцип Даламбера можно переписать в виде

$$\delta\mathcal{K} = \delta\mathcal{A}^{(e)} + \delta\Omega. \qquad (2.22)$$

Функционал $\delta\Omega$ обладает следующим свойством — на действительном движении он обращается в нуль:

$$\delta\Omega \mid_{\delta = d} = 0.$$

Поэтому на действительном движении вариационное уравнение переходит в уравнение энергии

$$d\mathcal{K} = d\mathcal{A}^{(e)}.$$

Вариационное уравнение (2.22) можно рассматривать как запись первого начала термодинамики (уравнения энергии) для возможных перемещений в случае систем с конечным числом степеней свободы.

На возможных перемещениях уравнение энергии содержит дополнительный вклад $\delta\Omega$, не проявляющийся в уравнении энергии для действительных перемещений.

Теперь можно пояснить смысл ограничения на связи, которое было выставлено при выписывании вариационного уравнения и названо условием идеальности связи. Как видно из (2.22), в вариационное уравнение не вошел приток энергии, связанный с диссипацией. Это по существу и означает "идеальность" связей. Для "неидеальных" связей вариационное уравнение (2.22) содержало бы соответствующий дополнительный приток энергии.

Вариационная формулировка первого начала термодинамики. Перейдем к рассмотрению вариационного уравнения в механике сплошной среды. В действительном процессе уравнение первого начала термодинамики имеет вид

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{A}^{(e)} + d\mathcal{Q}, \tag{2.23}$$

где $\mathcal{E}$ — энергия системы, $d\mathcal{A}^{(e)}$ — работа внешних макроскопических сил, $d\mathcal{Q}$ — приток тепла и всех остальных видов энергии.

Если заменить в (2.23) символ приращения в действительном процессе d на произвольное допустимое приращение δ [1]), то равенство (2.23), вообще говоря, не будет иметь места. Обозначая через $\delta\Omega$ соответствующую "невязку", можно написать

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{A}^{(e)} + \delta\mathcal{Q} + \delta\Omega. \tag{2.24}$$

Функционал $\delta\Omega$ обращается в нуль на действительных вариациях

$$\delta\Omega \mid_{\delta = d} = 0. \tag{2.25}$$

Если функционалы $\mathcal{E}$, $\delta\mathcal{A}^{(e)}$, $\delta\mathcal{Q}$ и $\delta\Omega$ определены, то уравнение (2.24) превращается в вариационное уравнение, выражающее первое начало термодинамики для возможных приращений определяющих функций. Функционал $\delta\mathcal{E}$ есть по условию вариация функционала $\mathcal{E}$. Функционал $\delta\mathcal{A}^{(e)}$ также определяется просто. Обычно $d\mathcal{A}^{(e)}$ есть линейный функционал от приращений определяющих функций du^{κ}, поэтому под $\delta\mathcal{A}^{(e)}$ следует понимать значения функционала $d\mathcal{A}^{(e)}$ на полях δu^{κ}.

---

[1]) Здесь и дальше предполагается, что действительные вариации принадлежат множеству допустимых вариаций.

Пусть $d\mathcal{Q}$ – приток тепла. Для введения функционала $\delta\mathcal{Q}$ рассмотрим определение $\delta\mathcal{Q}$, основанное на уравнении второго начала термодинамики

$$d\mathcal{Q} = \int_V \rho T\, dS\, dv - d\mathcal{Q}', \tag{2.26}$$

где $d\mathcal{Q}'$ – некомпенсированное тепло. Для классических моделей $d\mathcal{Q}'$ есть линейный функционал по приращениям определяющих параметров du^κ. Поэтому приток тепла в форме (2.26) также представляет линейный функционал по du^κ. Следовательно, приток тепла на любом допустимом процессе можно определить как значения этого линейного функционала на δu^κ и

$$\delta\mathcal{Q} = \int_V \rho T\, \delta S\, dv - \delta\mathcal{Q}'. \tag{2.27}$$

Вариационное уравнение первого начала термодинамики примет форму

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{A}^{(e)} + \int_V \rho T\, \delta S\, dv - \delta\mathcal{Q}' + \delta\Omega. \tag{2.28}$$

Подчеркнем, что в вариационной формулировке первого начала термодинамики (2.28) использовано второе начало термодинамики в виде (2.27).

Вариационное уравнение Седова. В вариационном уравнении (2.28) не все величины можно задавать независимо – задается лишь часть из них, а остальные определяются. Выделим явно задаваемые и определяемые величины. Для определенности положим

$$\mathcal{E} = \int_V \rho\left(\frac{1}{2}\, v^2 + U\right) dv, \qquad \delta\Omega = \int_V \rho\left(v_i\, \frac{d\delta x^i}{dt} - \frac{dv_i}{dt}\, \delta x^i\right) dv.$$

Кроме того, представим работу внешних сил в виде суммы работ объемных и поверхностных сил:

$$\delta\mathcal{A}^{(e)} = \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{об}} + \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{пов}}.$$

Тогда вариационное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\delta \int_V \rho\left(\frac{1}{2}\, v_i v^i - U\right) dv - \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i\, \delta x^i\, dv + \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{пов}} + \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{об}} +$$

$$+ \int_V \rho T\, \delta S\, dv - \delta\mathcal{Q}' = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по некоторому произвольному отрезку $[t_0, t_1]$.

Вводя обозначения

$$\Lambda = \rho\left(\frac{1}{2}\, v_i v^i - U\right),$$

$$\delta W = -\left[\int_V \rho v_i\, \delta x^i\, dv\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{пов}}\, dt,$$

$$\delta W^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \rho T\, \delta S\, dv - \delta\mathcal{Q}' + \delta\mathcal{A}^{(e)}_{\text{об}}\right) dt,$$

получим

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \Lambda\, dv\, dt + \delta W^* + \delta W = 0. \tag{2.29}$$

Вариационное уравнение (2.29) имеет место для любого объема V и любого интервала времени $[t_0, t_1]$, и поэтому эквивалентно вариационному уравнению энергии в локальной форме.

Функционал δW представляется в виде интеграла по границе четырехмерной области $V \times [t_0, t_1]$ от линейной комбинации вариаций определяющих функций и их производных.

Как будет видно из дальнейших примеров, лагранжиан Λ и функционал δW^* есть задаваемые величины, а функционал δW находится из вариационного уравнения (2.29).

Задание функционала δW^* означает задание соответствующих коэффициентов при вариациях. Коэффициенты при вариациях могут быть указаны либо в функции координат, либо в функции определяющих функций, либо неявно при помощи дополнительных уравнений. В основу задания коэффициентов при вариациях можно положить связь функционала δW^* с некомпенсированным теплом $\delta \mathcal{Q}$ и постулаты термодинамики необратимых процессов. В число замыкающих уравнений войдет уравнение второго начала термодинамики.

Ясно, что вариационное уравнение (2.29) можно рассматривать также, как запись второго начала термодинамики для возможных приращений определяющих функций. При этом U следует считать независимой термодинамической переменной, а S — известной функцией от U и других определяющих функций. В качестве замыкающего соотношения можно взять уравнение энергии.

Вариационное уравнение (2.29) имеет две основные отличительные черты. Во-первых, оно записано не для всего объема, занятого сплошной средой, а для любой части сплошной среды — именно это приближает вариационное уравнение по форме к уравнению энергии. С этим связано и возникновение в вариационном уравнении определяемого из него функционала δW. Вычисление δW соответствует установлению уравнений состояния. Во-вторых, вариационное уравнение содержит вклады, связанные с необратимыми процессами.

Вариационное уравнение (2.29) было построено Л.И. Седовым в связи с проблемой конструирования новых моделей сплошных сред с усложненными свойствами. Л.И. Седов предложил взять вариационное уравнение (2.29) в качестве основного исходного постулата механики сплошной среды. Построение новых моделей в рамках вариационного подхода заключается в фиксировании набора определяющих функций и задании Λ и δW^*.

Вариационное уравнение Лагранжа. Для качественного анализа решения и других приложений важное значение имеет вариационное уравнение, написанное для случая, когда V — весь объем, занятый сплошной средой, а t_0 и t_1 — моменты времени, в которые значения определяющих функций предполагаются заданными. Если необходимо подчеркнуть, что V — весь объем, а t_0, t_1 — начальный и конечный моменты времени, то над V, t_0, t_1 ставится черта и пишется $\bar{V}$, $\bar{t}_0$, $\bar{t}_1$. При $t = \bar{t}_0$, $t = \bar{t}_1$, $\delta x^i = 0$, а функционал δW можно считать известным в силу краевых условий

$$\delta W \Big|_{\substack{V = \bar{V}, \\ t_0 = \bar{t}_0, \\ t_1 = \bar{t}_1.}} = \overline{\delta W}.$$

Действие для всего объема сплошной среды будем обозначать через I, функционал δW^* – через $\delta \overline{W^*}$, а сумму

$$\overline{\delta W^*} + \overline{\delta W}$$

– через $\delta \mathcal{A}$.

Вариационное уравнение для всего объема будем записывать в виде

$$\delta I + \delta \mathcal{A} = 0$$

или, желая подчеркнуть, что δI есть вариация некоторого функционала I, в виде

$$\delta (I) + \delta \mathcal{A} = 0. \qquad (2.30)$$

Вариационное уравнение (2.30) обычно называют уравнением Лагранжа.

Из вариационного уравнения Лагранжа следует замкнутая система уравнений сплошной среды, а также и краевые условия.

Варнационные уравнения и вариационные принципы. В некоторых случаях вариационное уравнение сводится к равенству вида $\delta (I) = 0$ и означает, что действие I имеет стационарное значение на действительном процессе.

Вариационные принципы справедливы, как уже отмечалось, для всех фундаментальных физических полей, а также для макроявлений, которые можно считать обратимыми. Последнее, по-видимому, связано с тем, что осредненное описание процессов, в которых отсутствует "необратимая стохастичность", можно дать при помощи непосредственного осреднения микроскопического действия.

Действие в физических проблемах является интегральным функционалом с лагранжианом Λ, зависящим от полевых переменных $u^\kappa (x^i, t)$ и конечного числа[1]) их производных по координатам и времени. Если лагранжиан Λ зависит от u^κ и первых производных u^κ, то система уравнений вариационного типа записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,t}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_{,i}} = 0.$$

Такую форму имеют, в частности, уравнения электродинамики, гравитации, уравнения механики идеальной жидкости, уравнения теории упругости. Во всех этих теориях система уравнений полностью определяется заданием одной функции – лагранжиана Λ.

Важная особенность явлений, описываемых уравнениями с вариационной структурой, – взаимность физических эффектов. Если в рассмотрение включено перекрестное взаимодействие между двумя полями, то действие одного поля на другое автоматически порождает обратное и, в некотором смысле, симметричное воздействие. Например, если лагранжиан Λ содержит перекрестный член $u^1_{,t} u^2_{,t}$, то в уравнении для поля u^1 появится "сила" со стороны поля 2, равная $u^2_{,tt}$, а в уравнении для поля u^2 – "симметричная" ей "сила" со стороны поля 1, равная $u^1_{,tt}$. В связи с этим во всех случаях, когда взаимодействие нетривиально, вариационный подход становится единственным способом построения физически разумных уравнений.

[1]) При условии локальности взаимодействий.

Уравнениям, которые учитывают необратимые процессы, по-видимому, также свойственна специальная структура. Для малых отклонений от положения термодинамического равновесия на это указывает принцип Онсагера. В вариационных терминах принцип Онсагера означает, что функционал δW^* имеет специальный вид:

$$\delta W^* = \int_V \int_{t_0}^{t_1} A_{\kappa\kappa'} u^{\kappa}_{,t} \delta u^{\kappa} \, dv \, dt,$$

где коэффициенты $A_{\kappa\kappa'}$ симметричны по κ, κ'.

Специальная структура уравнений, описывающих необратимые процессы, прослеживается и на некоторых рассматриваемых ниже примерах нелокальных во времени взаимодействий (см. § 10 гл. III); определенное значение имеет утверждение о вариационной структуре уравнений для вероятностных характеристик случайных полей, поведение которых описывается вариационными принципами (см. § 6 гл. II), однако разумные и универсальные обобщения вариационных принципов на необратимые процессы пока неизвестны.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ И АНАЛИЗА[1])

Сведения из кинематики сплошной среды. *Дисторсия.* Величины $x^i_a = \partial x^i(\xi^b, t)/\partial \xi^a$ называют дисторсией, а компоненты ξ^a_i матрицы, обратной к матрице $\| x^i_a \|$, — обратной дисторсией.

Обозначим через X детерминант матрицы с компонентами x^i_a: $X = \det \| x^i_a \|$.

Если $a^{(-1)ij}$ — компоненты матрицы, обратной к матрице $\| a_{ij} \|$, то, как известно из алгебры,

$$a^{(-1)ij} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a_{ij}}, \tag{3.1}$$

где a — определитель матрицы $\| a_{ij} \|$.

В соответствии с этим

$$\xi^a_i = \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial x^i_a}. \tag{3.2}$$

Если разрешить уравнения $x^i = x^i(\xi^a, t)$ относительно лагранжевых координат

$$\xi^a = \xi^a(x^i, t), \tag{3.3}$$

то для ξ^a_i можно написать

$$\xi^a_i = \frac{\partial \xi^a(x^k, t)}{\partial x^i}.$$

[1]) Этот параграф при первом чтении можно пропустить, возвращаясь к нему по мере надобности за определениями и вспомогательными формулами. Часть параграфа предназначена для углубленного изучения предмета и не используется в дальнейшем; сюда относится, в частности, теория тензорных вариаций (всюду в книге, для того чтобы не отвлекать внимание на технические детали, применяется декартова система координат наблюдателя).

Метрика. Ковариантные и контравариантные составляющие метрического тензора в системе координат наблюдателя обозначим соответственно через g_{ij} и g^{ij}, а $\det \| g_{ij} \|$ через g. Компоненты метрического тензора в сопутствующей системе координат зависят от сопутствующих координат и времени и вычисляются через закон движения по формулам

$$g_{ab} = g_{ij} x^i_a x^j_b, \quad g^{ab} = g^{ij} \xi^a_i \xi^b_j. \tag{3.4}$$

Детерминант матрицы $\| g_{ab} \|$ обозначим через $\hat{g}$. В соответствии с (3.1)

$$g^{ab} = \frac{1}{\hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial g_{ab}}. \tag{3.5}$$

Тензор Леви-Чивита. Систему чисел $e_{ijk} = e^k_{ij} = e^{ijk}$, в которой

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

а остальные e_{ijk} равны нулю, называют трехмерным символом Леви-Чивита.

Для любого тензора a^i_j справедливы равенства

$$e_{ijk} a^i_1 a^j_2 a^k_3 = \det \| a^i_j \|, \quad e_{ijk} a^i_m a^j_n a^k_s = \det \| a^i_j \| e_{mns}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) легко вывести, что величины ϵ_{ijk}, равные $\sqrt{g} e_{ijk}$ в системах координат одной ориентации и $-\sqrt{g} e_{ijk}$ в системах координат противоположной ориентации, образуют компоненты тензора. Объект ϵ_{ijk} называют тензором Леви-Чивита, а вектор с компонентами $\epsilon_{ijk} a^j b^k$ – векторным произведением векторов с компонентами a^i и b^k. Можно ввести два отличающихся знаком тензора Леви-Чивита в зависимости от того, в какой – правой или левой – системе координат было положено $\epsilon_{123} = \sqrt{g}$. Дальше, в тех случаях, когда приходится пользоваться тензором Леви-Чивита, условимся считать $\epsilon_{123} = \sqrt{g}$ в правой системе координат, т.е. системе, у которой вращение по кратчайшему пути от вектора базиса $\mathfrak{e}_1$ к вектору базиса $\mathfrak{e}_2$ вокруг вектора $\mathfrak{e}_3$ происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathfrak{e}_3$.

Присутствие в теории тензора Леви-Чивита указывает на неравноправие правой и левой системы координат[1]).

Отметим равенства

$$\epsilon^{ijk} = g^{ii'} g^{jj'} g^{kk'} \epsilon_{i'j'k'} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk}, \tag{3.7}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{lmk} = \delta^l_i \delta^m_j - \delta^m_i \delta^l_j, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} = 2\delta^l_i. \tag{3.8}$$

Здесь δ^i_j – символ Кронекера ($\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$, $\delta^i_j = 0$ при $i \neq j$). В декартовой системе координат $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = e_{ijk}$.

Начальное положение. Фиксируем некоторый начальный момент времени t_0. В этот момент сплошная среда занимает положение

$$x^i = x^i(\xi^a, t_0) = \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a). \tag{3.9}$$

[1]) За исключением случаев, когда ϵ_{ijk} входят в произведения типа $\epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn}$, которые можно выразить через метрический тензор.

Лагранжевы координаты всегда можно выбрать так, чтобы функции (3.9) приняли вид

$$\overset{\circ}{x}{}^1(\xi^a) = \xi^1, \quad \overset{\circ}{x}{}^2(\xi^a) = \xi^2, \quad \overset{\circ}{x}{}^3(\xi^a) = \xi^3. \tag{3.10}$$

Однако под действием группы (1.3) равенства (3.10) нарушатся. Поэтому, для того чтобы иметь возможность следить за инвариантностью всех соотношений относительно группы преобразований сопутствующих координат, будем описывать начальное положение среды при помощи функции (3.9) общего вида. Компоненты метрического тензора в начальном состоянии определяются равенствами

$$\overset{\circ}{g}_{ab} = g_{ab}(\xi^c, t_0) = g_{ij}\,\overset{\circ}{x}{}^i_a\,\overset{\circ}{x}{}^j_b, \quad \overset{\circ}{g}{}^{ab} = g^{ij}\,\overset{\circ}{\xi}{}^a_i\,\overset{\circ}{\xi}{}^b_j.$$

Здесь

$$\overset{\circ}{x}{}^i_a = \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a}, \quad \overset{\circ}{\xi}{}^a_i = \frac{1}{\overset{\circ}{X}}\,\frac{\partial \overset{\circ}{X}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i_a}, \quad \overset{\circ}{X} = \det \| \overset{\circ}{x}{}^i_a \|.$$

Все величины в начальном положении снабжаются значком $^\circ$.

Состояние в момент времени t, в отличие от начального, называют актуальным.

Величины $\overset{\circ}{g}_{ab}$ представляют ковариантные компоненты тензора второго ранга относительно группы (1.3).

В связи с этим, помимо исходного определения, по которому начальное и актуальное состояния есть два положения сплошной среды, возникает другая интерпретация. Можно рассматривать сплошную среду в момент времени t как трехмерное многообразие, отнесенное к лагранжевым координатам, на котором определены два метрических тензора g_{ab} и $\overset{\circ}{g}_{ab}$.

Жонглирование индексами производится как при помощи актуальной метрики g_{ab}, так и при помощи начальной $\overset{\circ}{g}_{ab}$. Дальше условимся, что под g^{ab} понимаются компоненты матрицы, обратной к g_{ab}. Во всех остальных случаях, если не оговорено противное, жонглирование индексами происходит при помощи начальной метрики.

Переход от эйлеровых координат к лагранжевым. Пусть имеется скалярная функция эйлеровых координат $f(x^i, t)$. По ней можно построить две различные функции лагранжевых координат $f(\overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a), t)$ и $f(x^i(\xi^a, t), t)$. Предполагается, что функция $f(x^i, t)$ определена во всем пространстве. Дальше всюду, если оговорено противное, подразумевается переход от эйлеровых координат к лагранжевым и обратно при помощи закона движения (1.1) и его обращения (3.3).

Ковариантное дифференцирование. Пусть $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{e}^i$ – векторы базиса системы координат наблюдателя. Обозначим через Γ^k_{ij} компоненты объекта связности:

$$d\mathfrak{e}_i = \Gamma^k_{ij}\,dx^j\mathfrak{e}_k, \quad d\mathfrak{e}^i = -\,\Gamma^i_{kj}\,dx^j\mathfrak{e}^k. \tag{3.11}$$

В евклидовом пространстве под $d\mathfrak{e}_i$ и $d\mathfrak{e}^i$ можно понимать истинные приращения векторов $\mathfrak{e}_i$ и $\mathfrak{e}^i$ при смещении из точки с координатами x^i в точку с координатами $x^i + dx^i$, при этом $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Из равенств $\dfrac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j) =$

= 0 можно найти выражение Γ^k_{ij} через производные метрического тензора

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{km}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right). \tag{3.12}$$

Свертывая уравнения (3.12) по k, j и привлекая соотношение $g^{ij} = g^{-1}\,\partial g/\partial g_{ij}$, следующее из (3.1), получим полезное равенство

$$\Gamma^j_{ij} = \frac{1}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим величины с индексами наблюдателя $T^{i_1 \ldots i_k}{}_{j_1 \ldots j_m}$. По ним можно построить объект $\mathbf{T} = T^{i_1 \ldots i_k}{}_{j_1 \ldots j_m}\, \mathfrak{e}_{i_1} \ldots \mathfrak{e}_{i_k}\, \mathfrak{e}^{j_1} \ldots \mathfrak{e}^{j_m}$. По определению результатом параллельного переноса объекта $\mathbf{T}$ из точки $x + dx$ в точку x называется величина $\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(x + dx)$, в которой векторы базиса $\mathfrak{e}_i(x + dx)$, $\mathfrak{e}^j(x + dx)$ заменены на $\mathfrak{e}_i(x) + \Gamma^k_{ij} dx^j \mathfrak{e}_k(x)$, $\mathfrak{e}^j(x) - \Gamma^j_{ik} dx^i \mathfrak{e}^k$ (x) и сохранены только малые первого порядка. Ковариантные производные $\nabla_i T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_m}$ определены равенством

$$\widetilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}(x) = \nabla_i T^{i_1 \ldots i_k}{}_{j_1 \ldots j_m}\, \mathfrak{e}_{i_1} \ldots \mathfrak{e}_{i_k}\, \mathfrak{e}^{j_1} \ldots \mathfrak{e}^{j_m}\, dx^i.$$

Отсюда, например для вектора $T^i \mathfrak{e}_i$, имеем $\nabla_j T^i = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} T^k$.

Пусть $\mathfrak{e}_a$, $\mathfrak{e}^a$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{e}}_a$, $\overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^a$ – векторы базиса сопутствующей системы координат в начальном и деформированном состояниях

$$\mathfrak{e}_a = x^i_a\, \mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{e}^a = \xi^a_i\, \mathfrak{e}^i, \quad \overset{\circ}{\mathfrak{e}}_a = \overset{\circ}{x}{}^i_a\, \mathfrak{e}_i, \quad \overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^a = \overset{\circ}{\xi}{}^a_i\, \mathfrak{e}^i,$$

а Γ^c_{ab} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ – соответствующие объекты связности:

$$d\mathfrak{e}_a = \Gamma^c_{ab}\, d\xi^b\, \mathfrak{e}_c, \quad d\mathfrak{e}^a = -\Gamma^a_{cb}\, d\xi^b\, \mathfrak{e}^c,$$

$$d\overset{\circ}{\mathfrak{e}}_a = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}\, d\xi^b\, \mathfrak{e}_c, \quad d\overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^a = -\overset{\circ}{\Gamma}{}^a_{cb}\, d\xi^b\, \overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^c$$

Объекты связности Γ^c_{ab} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ выражаются через g_{ab} и $\overset{\circ}{g}_{ab}$ по формулам, аналогичным (3.12). Отметим также выражение для Γ^c_{ab} через закон движения

$$\Gamma^c_{ab} = \Gamma^k_{ij} x^i_a x^j_b\, \xi^c_k + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^a\, \partial \xi^b}\, \xi^c_i. \tag{3.14}$$

Рассмотрим величины с сопутствующими индексами T^b. По ним можно построить два вектора $\mathbf{T} = T^b\, \mathfrak{e}_b$ и $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = T^b\, \overset{\circ}{\mathfrak{e}}_b$. В соответствии с этим возникают два оператора ковариантного дифференцирования ∇_a и $\overset{\circ}{\nabla}_a$.

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^a} = \nabla_a T^b\, \mathfrak{e}_b, \qquad \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{T}}}{\partial \xi^a} = \overset{\circ}{\nabla}_a T^b\, \overset{\circ}{\mathfrak{e}}_b.$$

Для тензоров число возможностей возрастает. Дальше будут применяться две ковариантные производные ∇_a и $\overset{\circ}{\nabla}_a$, соответствующие дифференцированию объектов $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_m}\, \mathfrak{e}_{a_1} \ldots \mathfrak{e}_{a_k}\, \mathfrak{e}^{b_1} \ldots \mathfrak{e}^{b_m}$ и

$T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_m} \overset{\circ}{\mathfrak{e}}_{a_1} \ldots \overset{\circ}{\mathfrak{e}}_{a_k} \overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^{b_1} \ldots \overset{\circ}{\mathfrak{e}}{}^{b_m}$. При этом в операторе ∇_a параллельный перенос по каждому сопутствующему индексу производится при помощи связности Γ^c_{ab}, а в операторе $\overset{\circ}{\nabla}_a$ – при помощи связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$. В частности,

$$\nabla_a T^b = \frac{\partial T^b}{\partial \xi^a} + \Gamma^b_{ac} T^c, \quad \overset{\circ}{\nabla}_a T^b = \frac{\partial T^b}{\partial \xi^a} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^b_{ac} T^c.$$

Разность $\Delta^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ есть тензор. Это следует, например, из легко проверяемой формулы

$$\Delta^c_{ab} = {}^1\!/_2\, g^{cd} (\overset{\circ}{\nabla}_b g_{ad} + \overset{\circ}{\nabla}_a g_{bd} - \overset{\circ}{\nabla}_d g_{ab}). \qquad (3.15)$$

Ковариантную производную ∇_a можно выразить через ковариантную производную $\overset{\circ}{\nabla}_a$ и тензор Δ^c_{ab}. Например, для ковариантных производных вектора соответствующая связь имеет вид

$$\nabla_a T^b = \overset{\circ}{\nabla}_a T^b + \Delta^b_{ac} T^c.$$

При дифференцировании тензоров с индексами наблюдателя и сопутствующими индексами в ковариантную производную будем включать члены, соответствующие параллельному переносу по каждому индексу. Например,

$$\nabla_b x^i_a = \frac{\partial x^i_a}{\partial \xi^b} + \Gamma^i_{jk} x^j_a x^k_b - \Gamma^c_{ab} x^i_c.$$

Отметим, что из (3.14) следует

$$\nabla_b x^i_a = 0.$$

Производные по времени. Для производных по времени при постоянных эйлеровых и лагранжевых координатах используются обозначения $\partial_t \equiv (\cdot)_{,t} \equiv (\cdot)_t \equiv \partial/\partial t$ и d/dt. Производные $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i \equiv (\cdot)_{,i}$, ∇_i перестановочны с производной ∂_t, производные $\partial/\partial \xi^a \equiv \partial_a \equiv (\cdot)_{,a}$, $\overset{\circ}{\nabla}_a$ с d/dt.

В результате применения оператора ∂_t к компонентам тензора с индексами наблюдателя получаются компоненты тензора с тем же строением индексов. Аналогична ситуация для оператора d/dt, применяемого к компонентам тензора с сопутствующими индексами. При дифференцировании компонент тензора с индексами наблюдателя при постоянных лагранжевых координатах тензора уже не получится. Например,

$$\frac{dx^i_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial \xi^a} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^a} = x^k_a \frac{\partial v^i}{\partial x^k}.$$

Здесь $v^i = dx^i/dt$ – проекции скорости среды на оси координат наблюдателя. Величины dx^i_a/dt не преобразуются по тензорному закону, так как выражаются через $\partial_k v^i$.

Тензорную производную по времени $\widetilde{d}/dt$ при постоянных лагранжевых координатах введем следующим образом. Пусть $u^{\kappa i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m}$ – компоненты тензора, через κ обозначен некоторый набор сопутствующих индексов. Определим объект

$$v^\kappa = u^{\kappa i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} \mathfrak{e}_{i_1} \ldots \mathfrak{e}_{i_n} \mathfrak{e}^{j_1} \ldots \mathfrak{e}^{j_m}.$$

Производные dv^κ/dt преобразуются как компоненты тензора. Вычислим dv^κ/dt. Так как

$$\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial x^k} v^k = \Gamma^l_{ik}\, \mathfrak{e}_l\, v^k, \quad \frac{d\mathfrak{e}^i}{dt} = -\Gamma^i_{lk}\, \mathfrak{e}^l\, v^k,$$

получим

$$\frac{dv^\kappa}{dt} = \left(\frac{du^\kappa {}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m}}{dt} + u^{\kappa l i_2 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} \Gamma^i_{lk} v^k + \dots \right.$$

$$\left. \dots - u^{\kappa i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_{m-1} l} \Gamma^l_{j_m k} v^k \right) \mathfrak{e}_{i_1} \dots \mathfrak{e}_{i_n} \mathfrak{e}^{j_1} \dots \mathfrak{e}^{j_m} =$$

$$= \frac{\tilde{d} u^{\kappa i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m}}{dt} \mathfrak{e}_{i_1} \dots \mathfrak{e}_{i_n} \mathfrak{e}^{j_1} \dots \mathfrak{e}^{j_m}.$$

Из последнего равенства следует, что величины $\frac{\tilde{d}}{dt} u^{\kappa i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m}$ образуют компоненты тензора. Например, для тензорной производной по времени от дисторсии получим

$$\frac{\tilde{d} x^i_a}{dt} = \frac{dx^i_a}{dt} + \Gamma^i_{lk} x^l_a v^k = x^k_a \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} x^k_a v^l = x^k_a \nabla_k v^i.$$

Для оператора $\tilde{d}/dt$ справедливы обычные правила дифференцирования сумм и произведений. При дифференцировании скалярных сверток можно применять как операторы d/dt, так и $\tilde{d}/dt$

$$\frac{d}{dt}(a_i b^i) = \frac{da_i}{dt} b^i + a^i \frac{db^i}{dt} = \frac{\tilde{d} a_i}{dt} b^i + a_i \frac{\tilde{d} b^i}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}(a_i b^i). \qquad (3.16)$$

Меры деформации. Дисторсия $x^i_a(\xi^b, t)$ описывает аффинную деформацию бесконечно малого элемента сплошной среды, расположенного в окрестности точки ξ^b. Применяются два способа выделения из дисторсии собственно деформации – части аффинной деформации, на которую не влияет движение элемента как твердого тела. Первый связан с введением метрического тензора сопутствующей системы координат. Очевидно, что тензор g_{ab} не зависит от вращения элемента среды как твердого целого. Тензор

$$\epsilon_{ab} = {}^1\!/_2 (g_{ab} - \overset{\circ}{g}_{ab}) \qquad (3.17)$$

можно рассматривать как меру деформации.

Второй способ определения деформации связан с представлением матрицы $\| x^i_a \|$ в виде произведения симметричной положительно определенной матрицы с компонентами $| x |_{ab}$ и ортогональной матрицы с компонентами λ^{ib}

$$x^i_a = | x |_{ab} \lambda^{ib}. \qquad (3.18)$$

Ортогональность матрицы $\| \lambda^{ib} \|$ понимается в том смысле, что

$$g_{ij} \lambda^{ib} \lambda^{jc} = \overset{\circ}{g}{}^{bc}, \quad \overset{\circ}{g}_{bc} \lambda^{ib} \lambda^{jc} = g^{ij}. \qquad (3.19)$$

Представление матриц (3.18) называют полярным разложением.

Тензоры $|x|_{ab}$ и g_{ab} связаны соотношением

$$g_{ab} = g_{ij} x^i_a x^j_b = \overset{\circ}{g}{}^{cd} |x|_{ac} |x|_{bd}. \qquad (3.20)$$

Согласно (3.20) g_{ab} и $|x|_{ab}$ можно привести к диагональному виду ортогональным относительно метрики $\overset{\circ}{g}_{ab}$ преобразованием. Для того чтобы найти $|x|_{ab}$ по g_{ab}, надо ортогональным преобразованием привести g_{ab} к диагональному виду и извлечь квадратные корни из g_{11}, g_{22} и g_{33}. При $\overset{\circ}{g}_{ab} = \delta_{ab}$ (δ_{ab} – символы Кронекера) имеем

$$|x|_{11} = \sqrt{g_{11}}, \quad |x|_{22} = \sqrt{g_{22}}, \quad |x|_{33} = \sqrt{g_{33}}.$$

В связи с тем, что g_{ab} – "квадрат" дисторсии x^i_a, тензор $|x|_{ab}$ называют модулем дисторсии. Систему координат, в которой тензор имеет диагональный вид, будем называть главной системой координат этого тензора.

Тензор $|x|_{ab}$ зависит от дисторсии полулинейно, т.е. при умножении дисторсии на положительную постоянную такой же множитель приобретает $|x|_{ab}$.

Тензор λ^{ib} восстанавливается по x^i_a при помощи соотношения $\lambda^{ib} = |x|^{(-1)ba} x^i_a$, где $|x|^{(-1)ba}$ – тензор, обратный к тензору $|x|_{ab}$: $|x|_{ab} |x|^{(-1)bc} = \delta^c_a$. В системе координат, в которой тензор $|x|_{ab}$ имеет диагональный вид,

$$|x|^{(-1)11} = \frac{1}{|x|_{11}}, \quad |x|^{(-1)22} = \frac{1}{|x|_{22}}, \quad |x|^{(-1)33} = \frac{1}{|x|_{33}}.$$

Таким образом, по дисторсии x^i_a тензоры $|x|_{ab}$ и λ^{ib} определяются единственным образом.

При помощи тензора $|x|_{ab}$ можно построить вторую меру деформации

$$\gamma_{ab} = |x|_{ab} - \overset{\circ}{g}_{ab}. \qquad (3.21)$$

Заметим, что $|\overset{\circ}{x}|_{ab} \equiv |x|_{ab}\big|_{t=t_0} = \overset{\circ}{g}_{ab}$ (в справедливости этого соотношения можно убедиться, если перейти в главную систему координат тензора $|\overset{\circ}{x}|_{ab}$).

Тензоры деформаций ϵ_{ab} и γ_{ab}, согласно (3.20) и (3.21), связаны соотношением

$$2\epsilon_{ab} = \gamma_{ab} + \overset{\circ}{g}{}^{cd} \gamma_{ac} \gamma_{bd}. \qquad (3.22)$$

Тензор Δ^c_{ab}. Тензор $\Delta^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ может быть выражен только через метрику в начальном состоянии $\overset{\circ}{g}_{ab}$, тензор деформаций ϵ_{ab} и его производную $\overset{\circ}{\nabla}_c \epsilon_{ab}$.

Действительно, тензору Δ^c_{ab} (3.15) в силу ковариантного постоянства метрики $\overset{\circ}{g}_{ab}$ относительно начальной связности можно придать форму

$$\Delta^c_{ab} = g^{cd} (\overset{\circ}{\nabla}_b \epsilon_{ad} + \overset{\circ}{\nabla}_a \epsilon_{bd} - \overset{\circ}{\nabla}_d \epsilon_{ab}). \qquad (3.23)$$

Тензор g^{cd} полностью определяется по $\overset{\circ}{g}_{ab}$ и ϵ_{ab}.

Представление ортогональных матриц. Матрица с компонентами λ^{ia}, ортогональная в смысле (3.19), будет ортогональна в обычном смысле, если

умножнть ее на матрицу $\| \overset{\circ}{x}{}^i_a \|$: $\alpha^{ij} = \overset{\circ}{x}{}^i_a \lambda^{ja}$,

$$\alpha^{ij} \alpha_{kj} = \delta^i_k, \quad \alpha^{ij} \alpha_{ik} = \delta^j_k. \tag{3.24}$$

Ортогональное преобразование в трехмерном пространстве оставляет неподвижной некоторую прямую C. Обозначим через c_i единичный вектор, направленный вдоль этой прямой

$$\alpha^{ij} c_j = c^i.$$

В силу ортогональности α^{ij} можно также написать

$$\alpha^{ij} c_i = c^j.$$

Ортогональное преобразование можно задать вектором c_i и углом поворота θ вокруг прямой C против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора c_i (всего три параметра, так как $c_i c^i = 1$). При этом пара (c_i, θ) и $(-c_i, -\theta)$ по условию определяют одно и то же преобразование. Величина α^{ij} выражается через c^i и θ по формуле

$$\alpha^{ij} = \cos\theta g^{ij} + (1 - \cos\theta) c^i c^j - \sin\theta \epsilon^{ijk} c_k. \tag{3.25}$$

Обратно, если известны компоненты матрицы α^{ij}, то угол θ находится из равенства

$$\cos\theta = {}^1/_2 (\alpha^i_i - 1), \tag{3.26}$$

и затем строится вектор

$$c_i = \frac{1}{2 \sin\theta} \epsilon_{ijk} \alpha^{jk}.$$

Нетрудно проверить, что определенный этими соотношениями вектор c_i действительно является собственным вектором матрицы $\| \alpha^{ij} \|$, а угол θ, вычисленный из уравнения (3.26), есть угол поворота в плоскости, перпендикулярной вектору c_i. (Для доказательства удобно перейти в систему координат, в которой вектор c_i имеет единственную отличную от нуля компоненту.)

Аналогичное представление ортогональной матрицы с детерминантом, равным -1, имеет вид

$$\alpha^{ij} = \cos\theta g^{ij} - (1 + \cos\theta) c^i c^j - \sin\theta \epsilon^{ijk} c_k. \tag{3.27}$$

Тензор скоростей деформаций. Компоненты тензора скоростей деформаций в сопутствующей системе координат e_{ab} определены формулами

$$e_{ab} = \frac{d\epsilon_{ab}}{dt}.$$

Дифференцируя по времени (3.17), имеем

$$2e_{ab} = \frac{dg_{ij}}{dt} x^i_a x^j_b + \left(g_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \xi^a} x^j_b \right) + (a \longleftrightarrow b). \tag{3.28}$$

Символом $(a \longleftrightarrow b)$ обозначается выражение в предыдущей скобке,

в котором осуществлена замена индексов $a \to b$, $b \to a$. Так как

$$\frac{dg_{ij}(x^k(\xi^a, t))}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^k,$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{mj}\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\Gamma^m_{jk}, \tag{3.29}$$

из (3.28), (3.29) получим

$$2e_{ab} = x^i_a x^j_b (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Отсюда вытекают следующие выражения для компонент тензора скоростей деформаций в системе координат наблюдателя e_{ij}:

$$e_{ij} = \nabla_{(i} v_{j)}. \tag{3.30}$$

Круглыми скобками в индексах обозначается симметризация: $a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Подчеркнем, что $e_{ij} \neq d\epsilon_{ij}/dt$.

Твердые движения. Рассмотрим движение, в котором дисторсия x^i_a не зависит от лагранжевых координат. В этом случае закон движения принимает вид

$$x^i = r^i(t) + \alpha^i_a(t)\,\xi^a. \tag{3.31}$$

Функции $x^i = r^i(t)$ определяют закон движения точки с нулевыми лагранжевыми координатами.

Пусть система координат наблюдателя прямолинейная. Тогда сопутствующие координаты ξ^a также можно считать некоторыми прямолинейными координатами в начальном состоянии.

Движение (3.31) называют однородной деформацией. Движение (3.31) называется твердым, если дисторсия $\alpha^i_a = x^i_a$ является ортогональной матрицей, в том смысле, что

$$g_{ij}\alpha^i_a\alpha^j_b = \overset{\circ}{g}_{ab}, \quad \overset{\circ}{g}^{ab}\alpha^i_a\alpha^j_b = g^{ij}. \tag{3.32}$$

Величины α^i_a являются компонентами ортогональной матрицы (в обычном смысле), если $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\overset{\circ}{g}_{ab} = \delta_{ab}$.

Отметим, что из первого равенства (3.32) следует второе, и наоборот. Действительно, обозначим $\overset{\circ}{g}^{ab}\alpha^i_a\alpha^j_b$ через $\widetilde{g}^{ij}$. Сворачивая первое равенство (3.32) с $\overset{\circ}{g}^{ac}\alpha^k_c$, получим соотношение $g_{ij}\widetilde{g}^{ik}\alpha^j_b = \alpha^k_b$, из которого в силу невырожденности матрицы $\| \alpha^i_a \|$ следует, что $g_{ij}\widetilde{g}^{ik} = \delta^k_j$, поэтому $\widetilde{g}^{ik} = g^{(-1)ik} = g^{ik}$, что и требовалось; аналогично доказывается, что из второго равенства (3.32) следует первое.

Очевидно, что тензор деформаций в твердом движении обращается в нуль. Можно показать, что верно и обратное: если во всех точках среды тензор деформации равен нулю, то закон движения в некоторой прямоугольной системе координат наблюдателя имеет вид (3.31) с ортогональной матрицей α^i_a. Таким образом, твердое движение можно определить как движение сплошной среды, при котором расстояние между любыми двумя точками среды в процессе движения не меняется.

Сплошную среду, совершающую только твердые движения, называют абсолютно твердым телом. Скорости точек абсолютно твердого тела

находятся дифференцированием (3.31)

$$v^i(\xi^a, t) = u^i(t) + \frac{d\alpha^i_a(t)}{dt}\ \xi^a. \tag{3.33}$$

Здесь $u^i = dr^i/dt$ – скорость точки с нулевыми лагранжевыми координатами.

Найдем поле скорости v^i в функции эйлеровых координат. Для этого надо выразить лагранжевы координаты ξ^a через эйлеровы из (3.31):

$$\xi^a(x^i, t) = \alpha^{ja}(t)\,(x_j - r_j(t)). \tag{3.34}$$

Обратная дисторсия α^a_j в силу (3.32) дается равенством

$$\alpha^{ja}(t) = \overset{\circ}{g}{}^{ab}\,\alpha^j_b(t). \tag{3.35}$$

Подстановка (3.34) в (3.33) приводит к соотношению

$$v^i(x^k, t) = u^i(t) + \omega^{ji}(t)\,(x_j - r_j(t)). \tag{3.36}$$

Тензор $\omega^{ji} = \alpha^{ja}(t)\,d\alpha^i_a/dt$ антисимметричен по i, j. Действительно, дифференцируя второе равенство (3.32) по t и используя (3.35), найдем

$$\frac{d}{dt}\ (\alpha^i_a\,\alpha^j_b\,\overset{\circ}{g}{}^{ab}) = \omega^{ij} + \omega^{ji} = 0.$$

Каждый антисимметричный тензор второго ранга ω^{ij} в трехмерном пространстве связан взаимно однозначным соответствием с вектором ω_k соотношениями

$$\omega^{ij} = \epsilon^{ijk}\,\omega_k,\quad \omega_k = {}^1/_2\,\epsilon_{kij}\,\omega^{ij}.$$

Вектор

$$\omega_k = \frac{1}{2}\ \epsilon_{kij}\,\alpha^{ia}\ \frac{d\alpha^j_a}{dt}$$

называют вектором угловой скорости абсолютно твердого тела, ω^{ij} – тензором угловой скорости, $\omega^{ij}\,dt$ – тензором бесконечно малого поворота, $d\varphi_i = \omega_i\,dt$ – бесконечно малым углом поворота. Кинематическое соотношение (3.36) в терминах вектора угловой скорости приобретает форму

$$v^i(x^k, t) = u^i(t) + \epsilon^{ikj}\,\omega_k(x_j - r_j(t)). \tag{3.37}$$

Инвариантное интегрирование. Введем элементы объема в актуальном состоянии

$$dv = \sqrt{\hat{g}}\ d\xi^1\ d\xi^2\ d\xi^3 \tag{3.38}$$

и в начальном состоянии

$$d\overset{\circ}{v} = \sqrt{\overset{\circ}{g}}\ d\xi^1\ d\xi^2\ d\xi^3,\quad \overset{\circ}{g} = \det\|\,\overset{\circ}{g}_{ab}\,\|. \tag{3.39}$$

Можно проверить, что они являются скалярами при преобразованиях $\xi^a \to \xi'^a(\xi^b)$, не меняющих ориентации системы координат (которыми мы и

ограничимся). Интегралы

$$\int_V \Phi\, dv, \quad \int_V \Phi\, d\overset{\circ}{v}$$

имеют одинаковый вид во всех координатных системах ξ^a, если Φ – скаляр относительно группы (1.3).

В системе координат наблюдателя инвариантный элемент объема dv имеет вид

$$dv = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{3.40}$$

Здесь g – детерминант матрицы, составленной из ковариантных компонент метрического тензора системы наблюдателя. Формула (3.40) следует из определения dv (3.38) и соотношения

$$\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{g}\,|X|, \tag{3.41}$$

где X – детерминант дисторсии.

Справедливо равенство

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \Phi \sqrt{\hat{g}}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3 = \int_V \Phi \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{3.42}$$

где V – область, занятая средой в актуальном состоянии. Формула (3.42) позволяет переводить интегралы по эйлеровым переменным в интегралы по лагранжевым переменным и обратно.

Уравнение неразрывности. Если масса любого сопутствующего объема $dm = \rho\, dv$ в процессе движения не меняется, то плотность массы ρ удовлетворяет уравнению

$$\rho\, dv = \rho_0\, d\overset{\circ}{v}, \tag{3.43}$$

где $\rho_0(\xi^a)$ – плотность массы в начальный момент времени. Из (3.38), (3.39) и (3.43) следует так называемое уравнение неразрывности

$$\rho \sqrt{\hat{g}} = \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \tag{3.44}$$

В начальном состоянии плотность массы ρ_0 и метрика считаются известными функциями ξ^a. Поэтому в силу (3.41) уравнение неразрывности можно рассматривать как уравнение, определяющее плотность массы ρ по закону движения.

Дифференцируя (3.44) по времени при постоянных лагранжевых координатах и используя равенства (3.5), (3.30), получим уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0. \tag{3.45}$$

Формулу (3.44) можно рассматривать как общее решение уравнения (3.45).

Отметим, что на основании равенства (3.43) интегралы от массовых плотностей по эйлеровым переменным легко переводятся в интегралы по лагранжевым переменным; например, для плотности внутренней энергии

можно написать

$$\int_V \rho U\, dv = \int_{\mathring{V}} \rho_0 U\, d\mathring{v}. \tag{3.46}$$

Характерный масштаб. Часто при описании свойств функции естественно указывать расстояние (характерный масштаб), на котором она изменяется на некоторое характерное значение. В термин "характерный масштаб" можно вкладывать различное формальное содержание. Мы будем использовать следующее определение.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемую на нем нужное число раз. Обозначим через $\bar{f}$ амплитуду колебания функции на $[a, b]$:

$$\bar{f} = \max_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|.$$

Для достаточно малых чисел l справедливо неравенство

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leqslant \frac{\bar{f}}{l}. \tag{3.47}$$

Наилучшую постоянную в неравенстве (3.47) (наибольшее из чисел l, для которых справедливо неравенство (3.47) для всех точек из $[a, b]$) назовем характерным масштабом изменения функции. Такое определение удобно тем, что утверждения относительно характерных масштабов влекут некоторые оценки для производных.

Если требуется оценить более высокие производные, то соответствующие оценки включаются в определение l, и характерным масштабом называется наилучшая постоянная в системе неравенств

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leqslant \frac{\bar{f}}{l}, \quad \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| \leqslant \frac{\bar{f}}{l^2}, \quad \ldots, \quad \left| \frac{d^k f}{dx^k} \right| \leqslant \frac{\bar{f}}{l^k}. \tag{3.48}$$

Если производные функции сильно изменяются в рассматриваемой области, то более адекватной характеристикой является функция $l(x)$ – наилучшая постоянная в неравенствах (3.48), которые написаны для точки x, а не сразу для всех точек отрезка $[a, b]$.

Вариации осиовных киинематических характеристик. Вычислим вариации некоторых величин, связанных с законом движения.

Вариация компонент скорости. Вариации δu^κ были определены как вариации при постоянных лагранжевых координатах

$$\delta u^\kappa = \left. \frac{\partial u^\kappa(\xi^a, t, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon = 0} d\epsilon.$$

Поэтому оператор δ перестановочен с оператором d/dt и $\partial/\partial\xi^a$. Из перестановочности операторов δ и d/dt непосредственно следует

$$\delta v^i = \frac{d\, \delta x^i}{dt}.$$

Если δx^i рассматривать как функции эйлеровых координат и времени, то

их надо дифференцировать по t как суперпозицию функций; при этом

$$\delta v^i = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^k} \tag{3.49}$$

Вариации детерминанта дисторсии X. Из формулы для компонент обратной матрицы (3.1) и перестановочности операторов δ и $\partial/\partial\xi^a$ имеем

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial x^i_a}\, \delta x^i_a = \frac{\partial X}{\partial x^i_a} \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial \xi^a} = X \xi^a_i \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial \xi^a}.$$

Будем рассматривать теперь вариации закона движения $\delta x^i(\xi^a, t)$ как функции эйлеровых координат, используя для пересчета зависимость (3.3). Тогда

$$X \xi^a_i \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial \xi^a} = X \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial \xi^a} = X \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^i},$$

и для вариации детерминанта дисторсии окончательно получим

$$\delta X = X \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^i}. \tag{3.50}$$

Вариации плотности. Плотность связана с детерминантом дисторсии соотношениями (3.44) и (3.41)

$$\rho = \frac{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\sqrt{g}\,|X|}. \tag{3.51}$$

Варьируя равенство (3.51), найдем (считая $X > 0$)

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{X}\, \delta X - \frac{\rho}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i}\, \delta x^i.$$

Остается воспользоваться формулой (3.50) и соотношением (3.13):

$$\delta\rho = -\rho\, \nabla_i\, \delta x^i. \tag{3.52}$$

Вариация компонент тензора деформации. Из определения (3.17) и (3.4) имеем

$$\delta\epsilon_{ab} = \frac{1}{2}\, \delta g_{ab} = \frac{1}{2}\, \delta (g_{ij}\, x^i_a\, x^j_b) =$$

$$= \frac{1}{2}\, g_{ij} \left(x^i_a \frac{\partial\, \delta x^j}{\partial \xi^b} + \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial \xi^a}\, x^j_b \right) + \frac{1}{2}\, x^i_a\, x^j_b\, \delta x^k \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{3.53}$$

Будем рассматривать δx^i в (3.53) как функции эйлеровых координат и заменим $\partial\, \delta x^i/\partial \xi^a$ на $x^k_a\, \partial\, \delta x^i/\partial x^k$. Кроме того, заменим в (3.53) производные от компонент метрического тензора g_{ij} через компоненты связности Γ^k_{ij}

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^m_{ik}\, g_{mj} + \Gamma^m_{jk}\, g_{im}. \tag{3.54}$$

Из равенств (3.53) и (3.54) следует

$$\delta\epsilon_{ab} = {}^1\!/_2\, g_{ij}(x^k_a x^i_b + x^k_b x^i_a)\ \frac{\partial\,\delta x^i}{\partial x^k} + {}^1\!/_2\,\Gamma^m_{ik}\, g_{mj}\, x^i_a\, x^j_b\,\delta x^k +$$

$$+ {}^1\!/_2\,\Gamma^m_{jk}\, g_{im}\, x^i_a\, x^j_b\,\delta x^k = {}^1\!/_2\, x^i_a\, x^j_b(\nabla_i\,\delta x_j + \nabla_j\,\delta x_i) = x^i_a\, x^j_b\,\nabla_{(i}\,\delta x_{j)}. \tag{3.55}$$

Здесь $\delta x_i = g_{ij}\,\delta x^j$. Если ввести проекции δx_a вектора $\delta x^i \cdot \mathfrak{e}_i$ на сопутствующие оси

$$\delta x_a = x^i_a\,\delta x_i,$$

то в силу тензорных свойств ковариантной производной формулам (3.55) можно придать простую форму:

$$\delta\epsilon_{ab} = {}^1\!/_2\,\delta g_{ab} = \hat{\nabla}_{(a}\,\delta x_{b)}. \tag{3.56}$$

Подчеркнем, что $\delta x_i = g_{ij}(x^k)\,\delta x^j$ и $\delta x_a = g_{ij}(x^k)\,x^i_a\,\delta x^j$ — суть некоторые бесконечно малые количества, не представляющие вариаций каких-либо величин.

Вариации компонент обратной дисторсии. Вариации ξ^a_i проще всего найти непосредственно из определения ξ^a_i как компонент матрицы, обратной к x^i_a. Варьируя равенство $x^j_b\,\xi^b_i = \delta^j_i$, получим

$$x^j_b\,\delta\xi^b_i + \xi^b_i\,\delta x^j_b = 0. \tag{3.57}$$

Свернем (3.57) с ξ^a_j по индексу j. Так как $x^j_b\,\xi^a_j = \delta^a_b$, то равенство (3.57) примет вид

$$\delta\xi^a_i = -\,\xi^a_j\,\xi^b_i\,\delta x^j_b. \tag{3.58}$$

Осталось использовать перестановочность операторов δ и ∂_b и принять, что δx^j — функция эйлеровых координат. Окончательно получим

$$\delta\xi^a_i = -\,\xi^a_j\ \frac{\partial\,\delta x^j}{\partial x^i}\ . \tag{3.59}$$

Вариация контравариантных компонент сопутствующей метрики. Контравариантные компоненты метрического тензора представляют компоненты матрицы, обратной к матрице $\| g_{ab} \|$. Поэтому, аналогично (3.58), имеем

$$\delta g^{ab} = -\,g^{ac}\,g^{bd}\,\delta g_{cd}. \tag{3.60}$$

Из соотношений (3.60) и (3.56) получим

$$\delta g^{ab} = -\,\hat{\nabla}^{(a}\,\delta x^{b)}. \tag{3.61}$$

Здесь $\delta x^b = g^{ba}\,\delta x_a = \xi^b_i\,\delta x^i$.

Вариация компонент объекта связности. Вычислим вариацию объекта связности Γ^c_{ab} сопутствующей системы координат. При этом воспользуемся формулой (3.54), записанной в сопутствующей системе координат

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial\xi^c} = \Gamma^d_{ac}\,g_{bd} + \Gamma^d_{bc}\,g_{ad}. \tag{3.62}$$

Варьируя равенства (3.62), переставляя δ и ∂_a и перенося члены с вариацией метрики в левую часть равенства, получим

$$\frac{\partial\,\delta g_{ab}}{\partial\xi^c} - \Gamma^d_{ac}\,\delta g_{bd} - \Gamma^d_{bc}\,\delta g_{ad} = g_{bd}\,\delta\Gamma^d_{ac} + g_{ad}\,\delta\Gamma^d_{bc}. \tag{3.63}$$

Левая часть (3.63) совпадает с ковариантной производной $\hat{\nabla}_c\,\delta g_{ab}$. Уравнения (3.63) представляют систему линейных уравнений относительно $\delta\Gamma^c_{ab}$. Легко проверить, что эта система имеет следующее решение:

$$\delta\Gamma^c_{ab} = {}^1\!/_2 g^{cd}(\hat{\nabla}_a\,\delta g_{bd} + \hat{\nabla}\,\delta g_{ad} - \hat{\nabla}_d\,\delta g_{ab}). \tag{3.64}$$

Подстановка в (3.64) выражений (3.65) дает

$$\delta\Gamma^c_{ab} = \hat{\nabla}_a\,\hat{\nabla}_b\,\delta x^c. \tag{3.65}$$

Вариация закона движения абсолютно твердого тела. Движение абсолютно твердого тела задается функциями $r^i(t)$ и $\alpha^i_a(t)$ (см. (3.31)). Если на движение нет дополнительных ограничений, то функции $r^i(t)$ могут варьироваться независимо, а функции $\alpha^i_a(t)$ варьируются так, чтобы удовлетворялись условия ортогональности (3.32). Варьируя второе соотношение (3.32), имеем

$$\delta(\overset{\circ}{g}{}^{ab}\,\alpha^i_a\,\alpha^j_b) = \alpha^{ia}\,\delta\alpha^j_a + \alpha^{ja}\,\delta\alpha^i_a = 0. \tag{3.66}$$

Равенства (3.66) означают, что бесконечно малые величины $\delta\omega^{ij} = \alpha^{ia}\delta\alpha^j_a$ антисимметричны по индексам i, j, а в остальном произвольны. Для вариации закона движения в эйлеровых координатах получим

$$\delta x^i = \delta r^i(t) + (x_j - r_j(t))\,\delta\omega^{ji}. \tag{3.67}$$

Если ввести вектор $\delta\varphi_k$, соответствующий антисимметричному тензору $\delta\omega^{ij}$,

$$\delta\varphi_k = {}^1\!/_2\,\epsilon_{ijk}\,\delta\omega^{ij}, \quad \delta\omega^{ij} = \epsilon^{ijk}\,\delta\varphi_k,$$

то формуле для вариации закона движения (3.67) можно придать вид

$$\delta x^i = \delta r^i + \epsilon^{ijk}\,\delta\varphi_j\,(x_k - r_k(t)). \tag{3.68}$$

Подчеркнем, что $\delta\omega^{ij}$ и $\delta\varphi_j$ — суть некоторые бесконечно малые, не являющиеся вариациями каких-либо величин.

Тензор $\delta\omega^{ij}$ аналогичен тензору бесконечно малого поворота, а $\delta\varphi_j$ — бесконечно малому углу поворота.

Формулы (3.67) и (3.68) при $\delta = d$ совпадают соответственно с (3.36) и (3.37).

Варьирование функций от эйлеровых координат. Определяющие функции u^κ можно рассматривать как функции эйлеровых координат и строить соответствующее семейство сравнения $u^\kappa(x^i, t, \epsilon)$.

Величину

$$\partial u^\kappa = \left.\frac{\partial u^\kappa(x^i, t, \epsilon)}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0,\ x^i=\mathrm{const}} d\epsilon$$

называют вариацией при постоянных эйлеровых координатах. Вариация δ

при постоянных ξ^a и вариация ∂ при постоянных x^i связаны формулой

$$\delta u^\kappa = \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\kappa (x^i(\xi^a, t, \epsilon), t, \epsilon)\Big|_{\epsilon=0,\ \xi^a=\text{const}} d\epsilon = \partial u^\kappa + \delta x^i \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}. \tag{3.69}$$

Оператор ∂ перестановочен с операторами $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$ и не перестановочен с операторами $\frac{\partial}{\partial \xi^a}$ и $\frac{d}{dt}$.

Формулы, связывающие $\partial \frac{d}{dt}$, $\partial \frac{\partial}{\partial \xi^a}$ с $\frac{d}{dt}\partial$ и $\frac{\partial}{\partial \xi^a}\partial$, легко получаются при помощи (3.69). Для произвольной функции F

$$\partial \frac{d}{dt} F = \delta \frac{d}{dt} F - \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{d}{dt} F = \frac{d}{dt} \delta F - \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dF}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt} \partial F + \frac{d}{dt}\left(\delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} F\right) - \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dF}{dt},$$

$$\partial \frac{\partial}{\partial \xi^a} F = \delta \frac{\partial}{\partial \xi^a} F - \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^a} F =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi^a}\left(\partial F + \delta x^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} F\right) - \delta x^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^a} F.$$

Приведем соотношения для вариаций некоторых величин, связанных с законом движения, при постоянных эйлеровых координатах.

Вариация компонент скорости. Применяя соотношение (3.69), получим

$$\partial v^i = \delta v^i - \delta x^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} = \frac{d\,\delta x^i}{dt} - \delta x^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k}. \tag{3.70}$$

Вариация плотности. Из (3.52) и (3.69) имеем

$$\partial \rho = \delta \rho - \delta x^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = -\rho \nabla_i \delta x^i - \delta x^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = -\nabla_i (\rho\, \delta x^i). \tag{3.71}$$

Вариация лагранжевых координат. Записывая условие обращения в нуль вариации δ лагранжевых координат

$$\delta \xi^a = \partial \xi^a + \delta x^i \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} = 0,$$

для вариации $\partial \xi^a$ лагранжевых координат при постоянных x^i получим

$$\partial \xi^a = -\xi^a_i \delta x^i. \tag{3.72}$$

Тензорные вариации. В принципе приведенных определений достаточно для рассмотрения вариационных подходов в механике сплошных сред. Однако структура пространственно-временного континуума как дифференцируемого многообразия ставит ряд дополнительных требований и прежде

всего требование инвариантности построений относительно выбора системы координат. Остановимся на этом подробнее.

Законы преобразования величин и их вариаций при переходе от одной системы координат к другой, вообще говоря, различны. Рассмотрим, например, закон движения $x^i(\xi^a, t)$. Функции $x^i(\xi^a, t)$ не преобразуются по тензорному закону. В новой системе координат $x'^i = f^i(x^j)$ закон движения записывается в виде

$$x'^i(\xi^a, t) = f^i(x^j(\xi^a, t)).$$

Однако вариации закона движения δx^i образуют компоненты вектора

$$\delta x'^i(\xi^a, t) = \delta f^i(x^j(\xi^a, t)) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\ \delta x^j.$$

Объект связности сопутствующей системы координат Γ^c_{ab} не является тензором, в то время как вариация компонент объекта связности $\delta\Gamma^c_{ab}$, согласно (3.64), представляет тензор третьего ранга.

Формула (3.59) показывает, что справедливо и обратное: вариации компонент тензора могут не быть компонентами тензора. В целом это не вызывает затруднений, однако в таких вопросах, как вывод основных уравнений, удобно иметь дело с тензорными вариациями. Дадим здесь их определение.

Пусть u^κ – компоненты тензора, а мультииндекс κ отвечает набору сопутствующих индексов. Вариации δu^κ образуют компоненты тензора с тем же строением индексов, что у тензора u^κ, поскольку матрицу перехода от одной сопутствующей системы координат к другой $\partial\xi'^a/\partial\xi^b$ можно выносить за знак вариации.

Рассмотрим тензор с компонентами $u^{\kappa i}_j$; мультииндекс κ по-прежнему отвечает набору сопутствующих индексов, i, j – индексы наблюдателя. Вариация $\delta u^{\kappa i}_j$, определенная так, как это было сделано выше, тензором уже не является, так как матрица перехода к новой системе координат наблюдателя $\partial x'^j/\partial x^i$ зависит от x^i и не может быть вынесена за знак вариации.

Введем объект

$$v^\kappa = u^{\kappa i}_j\, \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{e}^j. \tag{3.73}$$

Объект v^κ имеет только сопутствующие индексы, поэтому δv^κ преобразуются так же, как компоненты тензора в сопутствующей системе координат. Вычислим связь δv^κ и $\delta u^{\kappa i}_j$. Так как

$$\delta \mathfrak{e}_i = \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial x^k}\ \delta x^k = \Gamma^j_{ik}\, \mathfrak{e}_j\, \delta x^k, \quad \delta \mathfrak{e}^j = -\Gamma^j_{ik}\, \mathfrak{e}^i\, \delta x^k,$$

то варьирование равенства (3.73) дает

$$\delta v^\kappa = (\delta u^{\kappa i}_j + \Gamma^i_{ik}\, u^{\kappa l}_j\, \delta x^k - \Gamma^j_{lk}\, u^{\kappa i}_l\, \delta x^k)\, \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{e}^j. \tag{3.74}$$

Соотношение (3.74) показывает, что величины

$$\widetilde{\delta} u^{\kappa i}_j = \delta u^{\kappa i}_j + \Gamma^i_{ik}\, u^{\kappa l}_j\, \delta x^k - \Gamma^l_{ij}\, u^{\kappa i}_l\, \delta x^k \tag{3.75}$$

представляют компоненты тензора как относительно преобразований сопутствующей системы координат, так и относительно преобразований системы координат наблюдателя. Формула (3.75) очевидным образом обобщается

на тензоры с произвольным строением индексов наблюдателя. Вариацию $\widetilde{\delta}$ (3.75) будем называть тензорной вариацией.

Тензорную вариацию $\widetilde{\delta}$ можно ввести также при помощи формулы типа (1.7). Для этого надо заменить процесс сравнения $u_j^{\kappa i}(\xi^a, t, \epsilon)$ на $\widetilde{u}_j^{\kappa i}(\xi^a, t, \epsilon)$, где волна есть знак параллельного переноса тензора $u_j^{\kappa i}$ по индексам наблюдателя из точки с координатами $x^i(\xi^a, t, \epsilon)$ в точку $x^i(\xi^a, t)$:

$$\widetilde{\delta} u_j^{\kappa i} = \left.\frac{\partial \widetilde{u}_j^{\kappa i}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon = 0} a\epsilon. \tag{3.76}$$

Нетрудно проверить, что определения (3.75) и (3.76) совпадают.

Приведем выражения для тензорной вариации скорости, дисторсии и обратной дисторсии:

$$\widetilde{\delta} v^i = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial t} + v^k \nabla_k \delta x^i = \frac{\widetilde{d}\, \delta x^i}{dt},$$

$$\widetilde{\delta} x_a^i = \delta x_a^i + \Gamma_{lk}^i x_a^l \delta x^k = x_a^k \nabla_k \delta x^i, \tag{3.77}$$

$$\widetilde{\delta} \xi_l^a = \delta \xi_l^a - \Gamma_{ik}^l \xi_l^a \delta x^k = -\xi_j^a \nabla_i \delta x^j.$$

Формулы (3.77) отличаются от формул (3.49) и (3.59) заменой частной производной по x^i на ковариантную. Аналогично различие между (3.50) и формулой для тензорной вариации X:

$$\widetilde{\delta} X = \frac{\partial X}{\partial x^i} \widetilde{\delta} x_a^i = X \xi_i^a \widetilde{\delta} x_a^i = X \nabla_i \delta x^i. \tag{3.78}$$

При варьировании ковариантной производной от тензора u^κ оператор δ, очевидно, можно переставить с оператором $\overset{\circ}{\nabla}_a$:

$$\delta \overset{\circ}{\nabla}_a u^\kappa = \overset{\circ}{\nabla}_a \delta u^\kappa.$$

Однако

$$\delta \hat{\nabla} u^\kappa \neq \hat{\nabla}_a \delta u^\kappa,$$

поскольку $\delta \Gamma_{ab}^c \neq 0$. Коммутатор $\delta \hat{\nabla}_a - \hat{\nabla}_a \delta$ операторов δ и $\hat{\nabla}_a$ легко вычислить при помощи соотношения (3.65).

Рассмотрим тензор с компонентами $u^\kappa(x^i, t)$; мультииндекс κ отвечает некоторому набору индексов наблюдателя. Вариация ∂u^κ при постоянных x^i представляет компоненты тензора с тем же строением индексов, что и u^κ, так как $\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^i}$ можно выносить за знак вариации ∂. Для тензорной вариации δ при постоянных ξ^a из определений операторов $\widetilde{\delta}$ и ∂ имеем

$$\widetilde{\delta} u^\kappa = \partial u^\kappa + \delta x^i \nabla_i u^\kappa. \tag{3.79}$$

Из формулы (3.79) следует, в частности, что тензорная вариация метрического тензора $\widetilde{\delta} g_{ij}$ равна нулю, так как $\partial g_{ij} = 0$ и $\nabla_k g_{ij} = 0$. Напомним, что вариация $\delta g_{ij} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k$ в криволинейных системах координат наблюдателя отлична от нуля.

Вариация ∂ при постоянных x^i перестановочна с ковариантной производной ∇_i, поскольку $\partial\Gamma^k_{ij} = 0$:

$$\partial\nabla_i u^\kappa = \nabla_i \partial u^\kappa. \tag{3.80}$$

Вариация $\widetilde{\delta}$ не коммутирует с ∇_i. Выведем формулу для перестановки $\widetilde{\delta}$ и ∇_i. Из равенств (3.79) и (3.80) имеем

$$\widetilde{\delta}\nabla_i u^\kappa = \partial\nabla_i u^\kappa + \delta x^k \nabla_k \nabla_i u^\kappa = \nabla_i \partial u^\kappa + \delta x^k \nabla_k \nabla_i u^\kappa =$$

$$= \nabla_i (\widetilde{\delta} u^\kappa - \delta x^k \nabla_k u^\kappa) + \delta x^k \nabla_k \nabla_i u^\kappa =$$

$$= \nabla_i \widetilde{\delta} u^\kappa - \nabla_k u^\kappa \nabla_i \delta x^k + \delta x^k (\nabla_k \nabla_i u^\kappa - \nabla_i \nabla_k u^\kappa). \tag{3.81}$$

В пространстве с нулевым тензором кривизны $\nabla_k \nabla_i u^\kappa = \nabla_i \nabla_k u^\kappa$, и формула (3.81) принимает вид

$$\widetilde{\delta}\nabla_i u^\kappa = \nabla_i \widetilde{\delta} u^\kappa - \nabla_k u^\kappa \nabla_i \delta x^k. \tag{3.82}$$

В пространствах с ненулевой кривизной последнее слагаемое в (3.81) существенно.

Варьирование скалярной функции. Пусть скаляр Λ есть функция от некоторого набора тензоров с компонентами u^κ: $\Lambda = \Lambda(u^\kappa)$, где через κ обозначен некоторый набор индексов наблюдателя и сопутствующих индексов. Имеет место равенство

$$\delta\Lambda = \widetilde{\delta}\Lambda \tag{3.83}$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u^\kappa}\,\delta u^\kappa = \frac{\partial\Lambda}{\partial u^\kappa}\,\widetilde{\delta} u^\kappa. \tag{3.84}$$

Действительно, поскольку Λ не меняется при параллельном переносе u^κ из точки $x^i(\xi^a, t, \epsilon)$ в точку $x^i(\xi^a, t)$, можно написать

$$\Lambda(u^\kappa(x(\xi, t, \epsilon), \epsilon)) = \Lambda(\widetilde{u}^\kappa(x(\xi, t, \epsilon), \epsilon)), \tag{3.85}$$

где волна над u^κ — знак параллельного переноса по индексам наблюдателя. Дифференцируя (3.85) по ϵ и полагая $\epsilon = 0$, получим (3.84).

Поясним равенство (3.84) примером. Пусть плотность внутренней энергии U является функцией компонент дисторсии x^i_a. Поскольку только из x^i_a нельзя образовать скалярные свертки, U содержит также другие тензоры с индексами наблюдателя и сопутствующими индексами. Эти тензоры характеризуют свойства среды и наблюдателя. Примем, что характеристики среды с сопутствующими индексами K^κ являются известными функциями лагранжевых координат, и, следовательно, $\delta K^\kappa = 0$. Предположим также, что из тензоров с индексами наблюдателя в U входит только метрический тензор g_{ij}. Тогда

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial g_{ij}}\,\delta g_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x^i_a}\,\delta x^i_a, \tag{3.86}$$

причем $\delta g_{ij} = g_{ij,k}\,\delta x^k$. Согласно (3.84), поскольку $\widetilde{\delta} g_{ij} = 0$, должно иметь

место равенство

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_a^i}\,\widetilde{\delta} x_a^i. \tag{3.87}$$

Выведем равенство (3.87) непосредственно из (3.86). Запишем условие скалярности U при преобразованиях координат наблюдателя $x^i \to x'^i$, $x^k = b_i^k x'^i$, $x'^i = b_k^{(-1)i} x^k$:

$$U(g'_{ij}, x'^i_a, K^\kappa) = U(g_{ij}, x^i_a, K^\kappa), \tag{3.88}$$

где $g'_{ij} = g_{mn}\, b_i^m\, b_j^n$, $x'^i_a = b_j^{(-1)i} x^j_a$. Дифференцируя (3.88) по b_j^i и полагая $b_j^i = \delta_j^i$, приходим к тождеству

$$\frac{\partial U}{\partial x_a^i}\, x_a^k = 2\, \frac{\partial U}{\partial g_{mk}} g_{mi}. \tag{3.89}$$

Из (3.86), (3.89), (3.77) и (3.54) следует (3.87). Таким образом, в зависимости от удобства можно пользоваться либо оператором δ, либо оператором $\widetilde{\delta}$.

Сведения из теории поверхностей. *Поверхностные тензоры.* Рассмотрим некоторую поверхность Ω, заданную уравнениями

$$x^i = r^i(\xi^\alpha). \tag{3.90}$$

Малые греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают значения 1, 2, ξ^α — параметры на поверхности.

Параметрическая форма записи уравнений поверхности (3.90) содержит больше информации, чем просто задание поверхности, так как включает индивидуализацию точек поверхности при помощи параметров ξ^α. Способ индивидуализации точек поверхности несуществен, и появляется необходимость следить за инвариантностью относительно группы преобразований координат на поверхности

$$\xi'^\alpha = \xi'^\alpha(\xi^\beta). \tag{3.91}$$

Векторы и тензоры относительно этой группы будем называть поверхностными векторами и тензорами, а соответствующие тензорные индексы — поверхностными индексами.

Касательные векторы и метрика. Величины $r_\alpha^i = \partial r^i / \partial \xi^\alpha$ представляют собой вектор в пространстве наблюдателя по индексу i и поверхностный ковектор по индексу α. При этом r_1^i и r_2^i можно рассматривать как компоненты двух касательных к Ω векторов $\mathfrak{e}_\alpha = r_\alpha^i\, \mathfrak{e}_i$.

Метрика наблюдателя индуцирует на Ω поверхностную метрику, задаваемую метрическим тензором поверхности

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\, r_\alpha^i\, r_\beta^i. \tag{3.92}$$

Контравариантные компоненты поверхностного метрического тензора определяются по формуле

$$a^{\alpha\beta} = \frac{1}{a}\, \frac{\partial a}{\partial a_{\alpha\beta}}, \tag{3.93}$$

где a — детерминант матрицы $\| a_{\alpha\beta} \|$.

При помощи пространственной и поверхностной метрик можно жонглировать индексами у объекта r^i_α. Именно через $r_{i\alpha}$ и r^α_i будем обозначать следующие величины:

$$r_{i\alpha} = g_{ij} r^j_\alpha, \quad r^\alpha_i = a^{\alpha\beta} r_{i\beta}.$$

Нормаль. Рассмотрим вектор с компонентами

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{a}} \epsilon_{ijk} r^j_1 r^k_2 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{ijk} r^j_\alpha r^k_\beta. \tag{3.94}$$

Здесь $\epsilon^{\alpha\beta}$ – двумерный тензор Леви-Чивита: $\epsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\alpha\beta}$, $e^{\alpha\beta}$ – двумерный символ Леви-Чивита.

Этот вектор ортогонален к поверхности, так как в силу (3.94)

$$n_i r^i_\alpha = 0. \tag{3.95}$$

Покажем, что вектор n_i имеет единичную длину

$$g^{ij} n_i n_j = 1. \tag{3.96}$$

Используя (3.8), можно написать

$$g^{ij} n_i n_j = \frac{1}{a} g^{ij} \epsilon_{ikl} r^k_1 r^l_2 \epsilon_{jmn} r^m_1 r^n_2 =$$

$$= \frac{1}{a} (g_{km} g_{ln} - g_{kn} g_{ml}) r^k_1 r^l_2 r^m_1 r^n_2 = \frac{1}{a} (a_{11} a_{22} - a^2_{12}) = 1.$$

Таким образом, n_i есть компоненты единичного вектора, нормального к Ω.

Поверхность в начальном состоянии. Пусть положение поверхности Ω в пространстве меняется с течением времени и задается функциями $x^i = r^i(\xi^\alpha, t)$. Положение поверхности Ω в начальный момент времени обозначается через $\mathring{\Omega}$, и все величины в этом положении снабжаются индексом $\circ$. В частности,

$$r^i(\xi^\alpha, t_0) \equiv \mathring{r}^i(\xi^\alpha), \quad \mathring{r}^i_\alpha \equiv \frac{\partial \mathring{r}^i}{\partial \xi^\alpha}, \quad \mathring{a}_{\alpha\beta} = g_{ij} \mathring{r}^i_\alpha \mathring{r}^j_\beta,$$

$$\mathring{a} = \det \| \mathring{a}_{\alpha\beta} \|, \quad \mathring{a}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathring{a}} \frac{\partial \mathring{a}}{\partial \mathring{a}_{\alpha\beta}}, \quad \mathring{n}_i = \frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}} \epsilon_{ijk} \mathring{r}^j_1 \mathring{r}^k_2, \tag{3.97}$$

$$\mathring{r}_{i\alpha} = g_{ij} \mathring{r}^i_\alpha, \quad \mathring{r}^\alpha_i = \mathring{a}^{\alpha\beta} \mathring{r}_{i\beta}.$$

Если ξ^1, ξ^2 – две из лагранжевых координат, то Ω – поверхность, неподвижная по частицам, при этом на $\mathring{\Omega}$ $\mathring{x}^i_\alpha \equiv \mathring{r}^i_\alpha$, на Ω $x^i_\alpha \equiv r^i_\alpha$, а векторы $\mathring{n}_a = \mathring{x}^i_a \mathring{n}_i$ и $n_a = x^i_a n_i$ имеют по одной отличной от нуля компоненте $\mathring{n}_3$ и n_3. Из формул (3.94), (3.97) и (3.7) видно, что $\mathring{n}_3 = \sqrt{\mathring{g}}/\sqrt{\mathring{a}}$, $n_3 = \sqrt{\hat{g}}/\sqrt{a}$. Поэтому в любой сопутствующей системе координат (в том числе и такой, где координатные линии ξ^1, ξ^2 не лежат на рассматриваемой материальной поверхности) имеет место равенство

$$\frac{\sqrt{\mathring{a}}}{\sqrt{\mathring{g}}} \mathring{n}_c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\hat{g}}} n_c. \tag{3.98}$$

Введем элементы площади поверхности в актуальном и начальном состояниях

$$d\sigma = \sqrt{a}\, d\xi^1\, d\xi^2, \quad \overset{\circ}{d\sigma} = \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\xi^1\, d\xi^2 . \tag{3.99}$$

Тогда, используя уравнение неразрывности (3.44), равенство (3.98) можно переписать в следующей форме:

$$\rho_0 \overset{\circ}{n}_c\, \overset{\circ}{d\sigma} = \rho n_c\, d\sigma. \tag{3.100}$$

Соотношение (3.100) позволяет пересчитывать интегралы по актуальному состоянию, содержащие вектор нормали, в интегралы по начальному состоянию и обратно. Например:

$$\int_{\Omega} P^a n_a\, d\sigma = \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \frac{\rho_0}{\rho}\, P^a\, \overset{\circ}{n}_a\, \overset{\circ}{d\sigma}. \tag{3.101}$$

Разбиение единичного тензора. Имеет место тождество

$$r^i_\alpha r^\alpha_j + n^i n_j = \delta^i_j. \tag{3.102}$$

Для доказательства достаточно спроектировать (3.102) на касательные векторы и нормаль (свернуть с r^i_α и n^i) и убедиться, что тождествами являются получающиеся при этом равенства.

Разбиение единичного тензора (3.102) используется для построения проекций на касательную плоскость и нормаль. Например, вектор с компонентами T^i можно представить в виде суммы вектора, касательного к поверхности, и вектора, направленного по нормали,

$$T^i = T^j \delta^i_j = T^j r^i_\alpha r^\alpha_j + T^j n_j n^i = T^\alpha r^i_\alpha + T n^i.$$

Здесь $T^\alpha = T^i r^\alpha_i$ – поверхностный вектор, $T^\alpha r^i_\alpha$ – вектор, касательный к поверхности ($T^\alpha r^i_\alpha n_i = 0$), $T = T^j n_j$ – скаляр. Аналогично тензор второго ранга можно представить в виде следующей суммы:

$$T^{ij} = T^{kl} \delta^i_k \delta^j_l = T^{kl}(r^i_\alpha r^\alpha_k + n^i n_k)(r^j_\beta r^\beta_l + n^j n_l) =$$

$$= T^{\alpha\beta} r^i_\alpha r^j_\beta + T^\alpha_1 r^i_\alpha n^j + T^\alpha_2 r^j_\alpha n^i + T n^i n^j. \tag{3.103}$$

Здесь $T^{\alpha\beta} = T^{kl} r^\alpha_k r^\beta_l$ – поверхностный тензор, $T^\alpha_1 = T^{kl} r^\alpha_k n_l$, $T^\alpha_2 = T^{kl} n_k r^\alpha_l$ – поверхностные векторы, совпадающие в случае симметричного тензора T^{ij}, $T = T^{ij} n_i n_j$ – скаляр. Первый член суммы (3.103) "лежит в касательной плоскости" в том смысле, что ортогонален вектору нормали по обоим индексам, второй член суммы ортогонален вектору нормали по индексу i, третий – по индексу j, четвертый "ортогонален поверхности" (его свертка с касательными векторами равна нулю).

При помощи разбиения единичного тензора производится разложение производной по касательным направлениям и нормали

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \delta^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} = (r^j_\alpha r^\alpha_i + n^j n_i) \frac{\partial}{\partial x^j} = r^\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi^a} + n_i \frac{\partial}{\partial n}. \tag{3.104}$$

Здесь $\partial/\partial\xi^\alpha \equiv r^j_\alpha\, \partial/\partial x^j$ – производная вдоль поверхности, $\partial/\partial n \equiv n^j \partial/\partial x^j$ – производная по направлению нормали.

Аналогично выглядит разбиение единичного тензора в терминах начального состояния $\overset{\circ}{r}{}^i_\alpha \overset{\circ}{r}{}^\alpha_j + \overset{\circ}{n}{}^i \overset{\circ}{n}_j = \delta^i_j$. Соответствующие изменения в формулах (3.103), (3.104) очевидны.

Замечание. Разбиение единичного тензора (3.102) использует пространственную метрику. Возможны разбиения типа (3.102), не привлекающие метрических свойств. Действительно, рассмотрим на Ω векторное поле r^i_3, ни в одной точке не касающееся Ω. Последнее означает, что детерминант r матрицы со строками r^i_1, r^i_2, r^i_3 отличен от нуля. Построим три векторных поля g^1_i, g^2_i, g^3_i, определив их из системы линейных уравнений

$$r^i_\alpha g^\alpha_j + r^i_3 g^3_j = \delta^i_j. \tag{3.105}$$

Так как $r \neq 0$, решение системы уравнений (3.105) существует и единственно. Формула (3.105) представляет искомое разбиение единичного тензора. Отметим, что вектор g^3_i направлен по нормали к Ω в том смысле, что

$$g^3_i r^i_\alpha = 0.$$

В самом деле,

$$g^3_i r^i_\alpha = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r^i_3} \right) r^i_\alpha = \left(\frac{1}{r} e_{ijk} r^j_1 r^k_2 \right) r^i_\alpha \equiv 0.$$

Вторая квадратичная форма. Рассмотрим приращение касательных векторов $\mathfrak{e}_\alpha = r^i_\alpha \mathfrak{e}_i$ при смещении вдоль поверхности:

$$d\mathfrak{e}_\alpha = (r^i_{\alpha,\beta} \mathfrak{e}_i + r^i_\alpha \Gamma^k_{ij} r^j_\beta \mathfrak{e}_k)\, d\xi^\beta. \tag{3.106}$$

Запятой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по ξ^β: $r^i_{\alpha,\beta} \equiv \partial r^i_\alpha / \partial \xi^\beta$.

Разложим векторы $\mathfrak{e}_k$ при помощи (3.102) по касательным направлениям и направлению нормали

$$\mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_i \delta^i_k = \mathfrak{e}_\gamma r^\gamma_k + n_k (\mathfrak{e}_i n^i). \tag{3.107}$$

Подстановка (3.107) в (3.106) дает

$$d\mathfrak{e}_\alpha = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \mathfrak{e}_\gamma\, d\xi^\beta + b_{\alpha\beta}\, d\xi^\beta (n^i \mathfrak{e}_i). \tag{3.108}$$

Здесь введены обозначения

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = r^k_{\alpha,\beta} r^\gamma_k + r^i_\alpha \Gamma^k_{ij} r^j_\beta r^\gamma_k, \quad b_{\alpha\beta} = r^k_{\alpha,\beta} n_k + r^i_\alpha \Gamma^k_{ij} r^j_\beta. \tag{3.109}$$

Величины $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ совпадают с символами Кристоффеля для метрики на поверхности $a_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = {}^1\!/_2\, a^{\gamma\delta} (a_{\alpha\delta,\beta} + a_{\beta\delta,\alpha} - a_{\alpha\beta,\delta}). \tag{3.110}$$

Ковариантное дифференцирование поверхностных тензоров относительно связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ будем обозначать ∇_α, ковариантное дифференцирование относительно связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$, построенной по метрике поверхности в начальном состоянии $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$, — точкой с запятой в индексах. При ковариантном дифференцировании тензоров с пространственными и поверхностными индексами параллельный перенос производится по обоим индексам. В частности,

$$\nabla_\beta r^i_\alpha = r^i_{;\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r^i_\gamma + \Gamma^i_{jk} r^j_\alpha r^k_\beta, \quad \nabla_\alpha n^i = n^i_{;\alpha} + \Gamma^i_{jk} n^j r^k_\alpha. \tag{3.111}$$

Величины $b_{\alpha\beta}$ образуют компоненты поверхностного тензора. Их называют компонентами второй квадратичной формы поверхности. Согласно (3.111)

и (3.95) определение $b_{\alpha\beta}$ (3.109) можно переписать в других формах:

$$b_{\alpha\beta} = n_i \nabla_\alpha r^i_\beta = - r^i_\beta \nabla_\alpha n_i, \quad \nabla_\beta r^i_\alpha = b_{\alpha\beta} n^i. \tag{3.112}$$

Из (3.112), разбиения единичного тензора (3.102) и равенства

$$n^i \nabla_\beta n_i = 0,$$

которое получается дифференцированием (3.96), следует

$$\nabla_\alpha n^i = - r^i_\beta b^\beta_\alpha. \tag{3.113}$$

Последнее соотношение можно взять в качестве исходного определения второй квадратичной формы. Оно показывает, что b^β_α являются мерой изменения вектора нормали при движении вдоль поверхности.

Собственные значения матрицы с компонентами b^β_α называются кривизнами поверхности Ω, обратные к ним величины – радиусами кривизны, $H = {}^1/_2\, b^\alpha_\alpha$ – средней кривизной, $K = \det \| b_{\alpha\beta} \| / \det \| a_{\alpha\beta} \|$ – гауссовой кривизной.

Вариации величин, связанных с поверхностью. Пусть функции $r^i(\xi^\alpha, t)$ получают бесконечно малые приращения δr^i. Найдем соответствующие приращения вектора нормали и первой и второй квадратичных форм. Для простоты систему координат наблюдателя будем считать декартовой.

Варьируя равенство (3.92), получим

$$\delta a_{\alpha\beta} = r_{i\alpha} (\delta r^i)_{,\beta} + (\alpha \to \beta). \tag{3.114}$$

Здесь учтено, что $\delta r^i_\alpha = (\delta r^i)_{,\alpha}$ в силу перестановочности операторов δ и $\partial/\partial\xi^\alpha$.

Из (3.114) и (3.93) для вариации элемента поверхности (3.99) получаем следующее выражение:

$$\delta\, d\sigma = r^\alpha_i (\delta r^i)_{,\alpha}\, d\sigma. \tag{3.115}$$

Если ввести проекции вектора δr^i на касательные векторы и нормаль ($\delta r_\alpha = r_{i\alpha}\, \delta r^i$, $\delta r = n_i \delta r^i$), то формулы (3.114), (3.115) можно переписать в виде

$$\delta a_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \delta r_\alpha + \nabla_\alpha \delta r_\beta - 2 b_{\alpha\beta} \delta r,$$

$$\delta\, d\sigma = (\nabla_\alpha \delta r^\alpha - 2H \delta r)\, d\sigma. \tag{3.116}$$

Вариацию нормали можно найти, варьируя равенства $n_i r^i_\alpha = 0$, $n_i n^i = 1$. Имеем

$$r^i_\alpha\, \delta n_i = - n_i \delta r^i_\alpha, \quad n_i \delta n^i = 0. \tag{3.117}$$

Формулы (3.117) определяют проекции вектора δn^i на касательные векторы и нормаль, следовательно,

$$\delta n_i = - r^\alpha_i n_k (\delta r^k)_{,\alpha}, \tag{3.118}$$

Найдем $\delta b_{\alpha\beta}$. Поскольку (в декартовой системе координат) $b_{\alpha\beta} \equiv n_i r^i_{,\alpha\beta}$, $\delta b_{\alpha\beta} = n_i (\delta r^i)_{,\alpha\beta} + r^i_{,\alpha\beta}\, \delta n_i$. Отсюда, учитывая (3.118) и (3.109), получим

$$\delta b_{\alpha\beta} = n_i \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta r^i. \tag{3.119}$$

Поверхности, подвижные по частицам. Если поверхность движется по частицам, то ее уравнения можно записать в виде

$$\xi^a = r^a(\zeta^\alpha, t), \tag{3.120}$$

где ζ^α – параметры на поверхности. Скорость движения "индивидуализированной" точки поверхности с координатами ζ^α $r_t^a = \left.\dfrac{\partial r^a}{\partial t}\right|_{\zeta^\alpha = \text{const}}$ имеет составляющие как по касательным, так и по нормали. Величина $c_\xi = r_t^a n_a$ представляет скорость движения поверхности по частицам по нормали к себе и не зависит от способа параметризации поверхности, даже если ζ^α и ζ'^α связаны преобразованием, содержащим время:

$$c_\xi = \left.\frac{\partial r^a(\zeta^\alpha(\zeta'^\beta, t), t)}{\partial t}\right|_{\zeta^\alpha = \text{const}} n_a = \left.\frac{\partial r^a}{\partial t}\right|_{\zeta'^\alpha = \text{const}} n_a.$$

Поверхности в системе координат наблюдателя. Образ поверхности (3.120) в координатах наблюдателя находится при помощи закона движения

$$x^i = r^i(\zeta^\alpha, t) = x^i(r^a(\zeta^\alpha, t), t). \tag{3.121}$$

Скорость движения поверхности Ω по нормали к себе в пространстве наблюдателя c_x находится по скорости c_ξ движения поверхности Ω по частицам и скорости частиц v^i в результате дифференцирования (3.121) по времени

$$c_x = n_i \left.\frac{\partial r^i}{\partial t}\right|_{\zeta^\alpha = \text{const}} = n_i v^i + c_\xi.$$

Скорость движения поверхности по начальному состоянию получается дифференцированием соответствующего закона движения

$$x^i = \overset{\circ}{r}{}^i(\zeta^\alpha, t) = \overset{\circ}{x}{}^i(r^a(\zeta^\alpha, t)).$$

Имеем

$$\overset{\circ}{c} = \overset{\circ}{n}_i \frac{\partial \overset{\circ}{r}{}^i}{\partial t} = \overset{\circ}{n}_i \overset{\circ}{x}{}^i_a r_t^a = \overset{\circ}{n}_a r_t^a.$$

Условия совместности на поверхности разрыва. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi^a)$, производные которой терпят разрыв на некоторой поверхности Σ, заданной уравнениями $\xi^a = r^a(\zeta^\alpha)$. Сама функция φ предполагается непрерывной на Σ. Тогда разрывы производных функции φ на Σ не произвольны и удовлетворяют соотношениям совместности

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^a}\right] = \lambda \overset{\circ}{n}_a. \tag{3.122}$$

Через $[A]$ обозначается разность значений величины A на двух сторонах поверхности разрыва.

Для доказательства формулы (3.122) достаточно применить разбиение производной типа (3.104)

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} = (r^b_\alpha \overset{\circ}{g}_{ac} a^{\alpha\beta} r^c_\beta + \overset{\circ}{n}_a \overset{\circ}{n}^b) \frac{\partial}{\partial \xi^b} =$$

$$= \overset{\circ}{g}_{ac} \overset{\circ}{a}^{\alpha\beta} r^c_\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} + \overset{\circ}{n}_a \overset{\circ}{n}^b \frac{\partial}{\partial \xi^b},$$

воспользоваться тем, что $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^\alpha} \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} [\varphi] = 0$, так как $[\varphi] = 0$, и ввести обозначение $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^a} \right] \overset{\circ}{n}^a = \lambda$.

Соотношения (3.122) остаются справедливыми и для поверхностей, движущихся по частицам (время входит в них как параметр). Однако в этом случае к ним следует добавить еще одно равенство, соответствующее проекции на ось времени условий совместности, написанных для поверхности разрыва, которая рассматривается как гиперповерхность в пространстве-времени. Нетрудно проверить, что это соотношение имеет вид

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = -\lambda \overset{\circ}{c}.$$

Формула Гаусса – Остроградского. Приведем некоторые формулировки теоремы Гаусса – Остроградского, которые потребуются для вычисления вариации интегральных функционалов.

Рассмотрим в пространстве R_3 область V, ограниченную поверхностью ∂V. Запишем уравнение поверхности ∂V в параметрической форме $x^i = r^i(\zeta^\alpha)$. Функции $r^i(\zeta^\alpha)$ будем считать кусочно дифференцируемыми. Координаты ζ^1, ζ^2 и x^i согласованы так, что дополнение ζ^1 и ζ^2 координатой ζ^3, возрастающей при удалении от ∂V внутрь V, приводит к системе координат $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ в окрестности ∂V с ориентацией, противоположной ориентации системы координат x^i, т.е. $\det \left\| \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right\| < 0$.

Введем на ∂V величины

$$N_i = e_{ijk} r^j_1 r^k_2, \quad r^i_\alpha = \frac{\partial r^i}{\partial \zeta^\alpha}. \tag{3.123}$$

Они образуют объект, "ортогональный" к ∂V_i в том смысле, что свертка N_i с касательными векторами r^i_α дает нуль

$$N_i r^i_\alpha = 0.$$

Пусть в замкнутой области V определены непрерывные дифференцируемые функции Ω^i $(i = 1, 2, 3)$. Тогда имеет место равенство (формула Гаусса – Остроградского)

$$\int_V \frac{\partial \Omega^i}{\partial x^i} dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\partial V} \Omega^i N_i d\zeta^1 d\zeta^2. \tag{3.124}$$

Формулу (3.124) можно записать в "инвариантном" виде, если $\Omega^i = \sqrt{g}\,\omega^i$, где ω^i – компоненты вектора. Для этого используем соотношение

$$\nabla_i \omega^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\,\omega^i}{\partial x^i}, \tag{3.125}$$

которое следует из (3.13), и связь между N_i и единичным вектором внешней нормали n_i, вытекающую из (3.94),

$$N_i = n_i \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}}.$$

Вводя инвариантные элементы объема $dv = \sqrt{g}\,dx^1 dx^2 dx^3$ и поверхности $d\sigma = \sqrt{a}\,d\zeta^1 d\zeta^2$, можно переписать (3.124) в виде

$$\int_V \nabla_i \omega^i\, dv = \int_{\partial V} \omega^i n_i\, d\sigma. \tag{3.126}$$

Обратим внимание на то, что, несмотря на "тензорную" форму, равенство (3.126) имеет исключительно аналитический характер и не связано с понятиями параллельного переноса или метрики. Это следует из вывода (3.126) из (3.124).

Если под x^i в (3.126) понимать сопутствующие координаты ξ^a, под g_{ij} – компоненты метрики начального состояния $\overset{\circ}{g}_{ab}$, а под ω^i – компоненты вектора в сопутствующей системе координат ω^a, то равенство (3.126) приобретает форму

$$\int_V \overset{\circ}{\nabla}_a \omega^a\, d\overset{\circ}{v} = \int_{\partial V} \omega^a \overset{\circ}{n}_a\, d\overset{\circ}{\sigma}. \tag{3.127}$$

Аналогично, если под g_{ij} понимать не начальную, а актуальную метрику g_{ab}, то вместо (3.127) получим

$$\int_V \nabla_a \omega^a\, dv = \int_{\partial V} \omega^a n_a\, d\sigma. \tag{3.128}$$

Дадим теперь формулировку теоремы Гаусса – Остроградского в четырехмерном пространстве. Пусть V_4 – область в четырехмерном пространстве-времени R_4, образованная движением некоторой трехмерной области V_3. Обозначим через ζ^1, ζ^2 параметры на границе ∂V_3 области V_3 и запишем уравнения "временной" части границы ∂V_4 области V_4 в виде

$$x^i = r^i(\zeta^1, \zeta^2, t), \quad x^4 = t. \tag{3.129}$$

Малые латинские индексы соответствуют проекциям на пространственные координаты, индекс 4 – проекциям на ось времени. Обозначим через N_i величины, определяемые формулой (3.123), в которой под r^i_α понимаются производные функции (3.129) по ζ^α.

Для любых непрерывных дифференцируемых в замкнутой области V_4 функций Ω, Ω^i имеет место равенство

$$\int_{V_4} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega^i}{\partial x^i} \right) dx^1 dx^2 dx^3 dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{\partial V_3} (\Omega^i - \Omega r^i_t)\, N_i\, d\zeta^1 d\zeta^2 dt + \left[\int_{V_3} \Omega\, dx^1 dx^2 dx^3 \right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3.130}$$

Здесь $r^i_t \equiv \partial r^i / \partial t \Big|_{\zeta^\alpha = \text{const}}$.

Введем в сечениях V_4 плоскостями $t = \text{const}$ пространственную метрику $g_{ij}(x^k, t)$ и положим

$$\Omega = \sqrt{g}\,\omega, \qquad \Omega^i = \sqrt{g}\,\omega^i,$$

$$dv = \sqrt{g}\,dx^1 dx^2 dx^3, \qquad d\sigma = \sqrt{a}\,d\zeta^1 d\zeta^2,$$

где ω^i – компоненты пространственного вектора. Тогда из (3.130) получим

$$\int_{V_4}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\omega\sqrt{g}}{\partial t} + \nabla_i\,\omega^i\right)dv\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\partial V_3}(\omega^i - \omega r_t^i)\,n_i\,d\sigma\,dt + \left[\int_{V_3}\omega\,dv\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3.131}$$

Величина $r_t^i n_i$ имеет смысл скорости движения поверхности "по нормали к себе".

Отождествляя x^i с сопутствующими координатами, а метрику g_{ij} с начальной метрикой, из (3.131) имеем

$$\int_{V_4}\left(\frac{d\omega}{dt} + \mathring{\nabla}_a\,\omega^a\right)d\mathring{v}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\partial V_3}(\omega^a - \omega r_t^a)\,\mathring{n}_a\,d\mathring{\sigma}\,dt + \left[\int_{V_3}\omega\,d\mathring{v}\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3.132}$$

Величина $r_t^a \mathring{n}_a$ имеет смысл скорости движения границы области V_3 по частицам.

Если в качестве g_{ij} берется актуальная метрика, то (3.131) принимает следующую форму:

$$\int_{V_4}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\,\frac{d}{dt}\,\omega\sqrt{\hat{g}} + \nabla_a\,\omega^a\right)dv\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\partial V_3}(\omega^a - \omega r_t^a)\,n_a\,d\sigma\,dt + \left[\int_{V_3}\omega\,dv\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.133}$$

Если сделать замену $\omega \to \rho\omega$ и использовать уравнение неразрывности (3.44), то равенство (3.113) можно записать также в виде

$$\int_{V_4}\left(\rho\,\frac{d\omega}{dt} + \nabla_a\,\omega^a\right)dv\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\partial V_3}(\omega^a - \rho\omega r_t^a)\,n_a\,d\sigma\,dt + \left[\int_{V_3}\rho\omega\,dv\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3.134}$$

В частности, при $\omega^a = 0$ из (3.134) следует соотношение

$$\int_{V_4}\rho\,\frac{d\omega}{dt}\,dv\,dt = -\int_{t_0}^{t}\int_{\partial V_3}\omega r_t^a\,n_a\,d\sigma\,dt + \left[\int_{V_3}\rho\omega\,dv\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{3.135}$$

Классические модели сплошных сред. Система уравнений классических моделей сплошных сред содержит уравнения баланса импульса

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \nabla_j p^{ij} + \rho F^i, \tag{3.136}$$

уравнение энергии (уравнение притока тепла)

$$\rho \frac{dU}{dt} = p^{ij} \nabla_j v_i - \nabla_i q^i, \tag{3.137}$$

уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{dS}{dt} + \nabla_i J^i = \sigma \geqslant 0. \tag{3.138}$$

Здесь p^{ij} – компоненты тензора напряжений, F^i – внешние массовые силы, q^i – компоненты вектора притока тепла, J^i – компоненты вектора притока энтропии, σ – производство энтропии.

Рассмотрим модели с определяющими функциями $x^i(\xi^a, t)$ и $S(\xi^a, t)$. Для того чтобы все члены в уравнениях (3.136) – (3.138) были определены, надо указать уравнения состояния – зависимость p^{ij}, U, q^i, J^i, σ от определяющих функций (и, быть может, друг от друга). Подчеркнем, что эти зависимости должны быть указаны для всех функций p^{ij}, U, q^i, J^i, σ, поскольку каждая из них представляет важную физическую характеристику среды; в противном случае мы не располагаем полной информацией о модели. Кроме того, должны быть заданы внешние силы F_i, однако уравнения для F_i не включают в число уравнений состояния, поскольку F_i характеризуют не среду, а ее взаимодействие с внешними объектами.

Условие непротиворечивости. Будем считать, что плотность ρ в (3.136) – (3.138) выражена через закон движения при помощи уравнения неразрывности (3.44). Если модель определена, т.е. все величины p^{ij}, U, q^i, J^i и σ указаны как функции или функционалы от $x^i(\xi^a, t)$, $S(\xi^a, t)$, мы получаем для четырех определяющих функций пять уравнений (3.136) – (3.138). В связи с этим возникает необходимость в постулировании следующего условия: одно из уравнений (3.136) – (3.138) является тождеством в силу остальных уравнений модели. Это утверждение будем называть условием непротиворечивости.

Поскольку три уравнения (3.136) равноправны, в качестве тождественно выполняющегося естественно взять либо уравнение энергии, либо уравнение баланса энтропии. При этом условие непротиворечивости приобретает следующую форму: либо уравнение энергии, либо уравнение баланса энтропии является тождеством в силу остальных уравнений модели.

Если модель содержит внутренние степени свободы, то для них надо составлять дополнительные уравнения, поэтому также возникает необходимость в постулировании условия непротиворечивости.

Условие непротиворечивости накладывает существенные ограничения на вид уравнений состояния.

Пример. Разберем в качестве примера вопрос о термодинамической непротиворечивости закона теплопроводности Каттанео.

Рассмотрим процесс теплопроводности в покоящейся среде ($v^i = 0$). Он описывается уравнениями

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\nabla_i q^i, \qquad \rho \frac{dS}{dt} + \nabla_i J^i = \sigma \geqslant 0, \tag{3.139}$$

которые надо замкнуть уравнениями состояния. В рассматриваемом примере в качестве независимой термодинамической переменной удобно выбрать функцию $U(\xi^a, t)$. В модели теплопроводности Фурье термодинамические свойства среды задаются уравнениями состояния (κ – коэффициент теплопроводности)

$$S = S_0(U), \quad J^i = \frac{1}{T} q^i, \quad \sigma = \frac{1}{\kappa} q_i q^i, \tag{3.140}$$

$$q^i = \kappa \nabla^i \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{T} = \frac{dS_0(U)}{dU}. \tag{3.141}$$

Уравнение энергии вместе с уравнениями (3.141) образует замкнутую систему уравнений; уравнение баланса энтропии будет тождеством в силу этой системы и уравнений (3.140).

По теории Фурье тепло распространяется с бесконечной скоростью. Для устранения этого парадокса Каттанео предложил заменить уравнения (3.141) уравнениями

$$q^i + \alpha \frac{dq^i}{dt} = \kappa \nabla^i \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{T} = \frac{dS_0(U)}{dU}. \tag{3.142}$$

Уравнение энергии вместе с уравнениями (3.142) образуют замкнутую систему уравнений. Однако нельзя принять формулы (3.142) и сохранить при этом все формулы (3.140). Действительно, из (3.139), (3.140) и (3.142) следует

$$q^i \nabla_i \frac{1}{T} = \sigma.$$

В теории теплопроводности Каттанео в начальный момент времени q^i и U можно задавать независимо, поскольку уравнение энергии и уравнение для q^i (3.142) содержат первые производные q^i и U по времени. За счет выбора начальных данных свертку $q^i \nabla_i \frac{1}{T}$ можно сделать отрицательной, что противоречит условию $\sigma \geqslant 0$. Следовательно, в теории Каттанео все формулы (3.140) нельзя оставить без изменений.

Возникает вопрос, можно ли указать такие уравнения состояния для S, J^i и σ, чтобы уравнение баланса энтропии было тождеством в силу уравнений теории Каттанео. Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы, что теория Каттанео неудовлетворительна.

Оказывается, что уравнения состояния для S, J^i и σ, удовлетворяющие условию непротиворечивости, существуют. Они имеют вид

$$S = S_0(U) - \frac{\alpha}{2\kappa} q_i q^i, \quad J^i = \frac{1}{T} q^i, \quad \sigma = \frac{1}{\kappa} q^i q_i.$$

Примечательно, что изменяется лишь выражение для энтропии, а формулы для вектора притока энтропии и диссипации остаются такими же, как в

теории теплопроводности Фурье. Ясный смысл имеет и знак в формуле для энтропии — поток тепла вызывает некоторую упорядоченность, и энтропия частицы уменьшается.

Предоставляем читателю убедиться, что условие непротиворечивости выполняется также в следующих моделях сплошных сред.

Идеальная сжимаемая теплопроводная жидкость. Модель определяется заданием внутренней энергии U как функции от ρ и S, при этом

$$p^{ij} = -pg^{ij}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U(\rho, S)}{\partial \rho}, \quad q^i = \kappa \nabla^i \frac{1}{T},$$

$$J^i = \frac{1}{T} q^i, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \sigma = q^i \nabla_i \frac{1}{T}. \tag{3.143}$$

Идеальная несжимаемая нетеплопроводная жидкость. В этой модели принимается, что плотность массы частиц не меняется ($d\rho/dt = 0$) и, следовательно, ρ можно считать известной функцией лагранжевых координат

$$\rho = \rho_0(\xi^a). \tag{3.144}$$

При этом уравнение неразрывности приобретает форму

$$\nabla_i v^i = 0. \tag{3.145}$$

Замыкающие соотношения имеют вид

$$p^{ij} = -pg^{ij}, \quad q^i = 0, \quad J^i = 0, \quad \sigma = 0. \tag{3.146}$$

Уравнения (3.136), (3.144), (3.145) вместе с условием (3.146) для p^{ij} образуют замкнутую систему уравнений. Уравнения (3.137) и (3.138) переходят в условие сохранения в каждой частице внутренней энергии и энтропии.

Вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость. В модели вязкой жидкости принимается, что $U = U(S)$ и

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = 2\mu e^{ij}, \quad q^i = \kappa \nabla^i \frac{1}{T}, \quad J^i = \frac{1}{T} q^i, \tag{3.147}$$

$$\sigma = \frac{1}{T} 2\mu e^{ij} e_{ij} + \frac{1}{\kappa} q_i q^i.$$

Упругое теплопроводное тело. Модель упругого тела определяется заданием внутренней энергии U как функции от компонент тензора деформаций и энтропии $U = U(\epsilon_{ab}, S)$. Тензор напряжений задается формулой

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ab}} x^i_a x^j_b, \tag{3.148}$$

а остальные замыкающие соотношения имеют вид

$$q^i = \kappa \nabla^i \frac{1}{T}, \quad J^i = \frac{1}{T} q^i, \quad \sigma = \frac{1}{\kappa} q^i q_i, \quad T = \frac{\partial U(x^i_a, S)}{\partial S}.$$

При решении задач о деформации упругих тел удобно использовать лагранжевы координаты. Для записи уравнений движения в лагранжевых

координатах вводится так называемый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа с одним сопутствующим индексом и одним индексом наблюдателя[1])

$$p^{ia} = \frac{\rho_0}{\rho} p^{ij} \xi^a_j = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ab}} x^i_b . \tag{3.149}$$

Если внутренняя энергия U рассматривается как функция компонент дисторсии, то уравнения состояния для тензора Пиола–Кирхгофа имеют вид

$$p^a_i = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x^i_a} . \tag{3.150}$$

Дивергенцию тензора напряжений Коши в силу ковариантного постоянства дисторсии $\nabla_k \xi^a_i = 0$ можно представить в виде дивергенции по лагранжевым координатам от тензора напряжений Пиола–Кирхгофа

$$\nabla_i p^{ij} = \nabla_a \frac{\rho}{\rho_0} p^{ia}. \tag{3.151}$$

Соотношение (3.151) позволяет записать уравнение импульсов в форме, содержащей только производные по лагранжевым координатам,

$$\rho \frac{\partial^2 x^i(\xi^a, t)}{\partial t^2} = \nabla_a \frac{\rho}{\rho_0} p^{ia} + \rho F^i .$$

Иногда удобно, чтобы в уравнениях импульсов вместо ковариантной производной по деформированному состоянию ∇_a присутствовали ковариантные производные по недеформированному состоянию $\overset{\circ}{\nabla}_a$. Эти уравнения получаются при помощи соотношения

$$\nabla_c \frac{\rho}{\rho_0} A^c = \frac{\rho}{\rho_0} \overset{\circ}{\nabla}_c A^c, \tag{3.152}$$

которое имеет место для любого объекта с одним ковариантным сопутствующим индексом.

Равенство (3.152) следует из формулы (3.125), записанной в сопутствующих координатах

$$\nabla_c A^c = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}} A^c}{\partial \xi^c} . \tag{3.153}$$

Действительно из (3.153) и уравнения неразрывности (3.44) имеем

$$\overset{\circ}{\nabla}_c A^c = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \sqrt{\overset{\circ}{g}} A^c}{\partial \xi^c} = \frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial \xi^c} \frac{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\sqrt{\hat{g}}} \sqrt{\hat{g}} A^c =$$

$$= \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial \xi^c} \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\hat{g}} A^c = \frac{\rho_0}{\rho} \nabla_c \frac{\rho}{\rho_0} A^c .$$

[1]) Тензор напряжений (3.148) называют тензором напряжений Коши.

Согласно (3.152) уравнениям импульсов можно придать форму

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x^i(\xi^a, t)}{\partial t^2} = \overset{\circ}{\nabla}_a p^{ia} + \rho_0 F^i. \qquad (3.154)$$

Если лагранжевы координаты ξ^a являются декартовыми координатами в начальном состоянии и координаты наблюдателя x^i также декартовы, то $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = \Gamma^k_{ij} = 0$ и оператор $\overset{\circ}{\nabla}_a$ совпадает с оператором дифференцирования $\partial/\partial\xi^a$. При этом уравнения (3.154) имеют дивергентную форму, содержащую частные производные по ξ^a и t.

Условие непротиворечивости и обобщение принципов Гиббса. Каждый из принципов Гиббса приводит к двум равенствам:

$$\delta\mathscr{U} = 0, \quad \delta\mathscr{S} = 0.$$

Кажется правдоподобным, что первое из этих равенств для неравновесных процессов переходит в уравнение первого начала термодинамики, а второе — в уравнение второго начала термодинамики, записанные как вариационные уравнения, т.е. для всех допустимых приращений определяющих функций. В соответствии с этим принципы Гиббса для неравновесных процессов заменяются утверждениями:

1. Для всех допустимых приращений определяющих функций, удовлетворяющих вариационному уравнению энергии, имеет место вариационное уравнение второго начала термодинамики.

2. Для всех допустимых приращений определяющих функций, удовлетворяющих вариационному уравнению второго начала термодинамики, имеет место вариационное уравнение энергии.

Связь на вариации в виде первого или второго начала термодинамики, записанная для действительных вариаций, переходит соответственно в уравнение энергии или уравнение баланса энтропии.

Вариационное уравнение является тождеством в силу всех следующих из него соотношений. Поэтому в первом обобщенном принципе Гиббса тождеством, в силу всех остальных уравнений модели, будет уравнение баланса энтропии, а во втором — уравнение энергии. Это находится в полном соответствии с условием непротиворечивости.

В качестве примера сформулируем второй обобщенный принцип Гиббса для упругого теплопроводного тела. Введем вектор[1]) $\dot{J}^i$ уравнением $\frac{d}{dt} J^i = J^i$. Будем варьировать закон движения $x^i(\xi^a, t)$ и энтропию $S(\xi^a, t)$, причем вариация энтропии не произвольна, а выражается через вариацию вектора $\dot{J}^i$ из уравнения

$$\rho\delta S = -\nabla_i \delta \dot{J}^i + \frac{1}{\kappa'} J_i \delta J^i. \qquad (3.155)$$

На действительном процессе уравнение (3.155) переходит в уравнение баланса энтропии теплопроводного упругого тела (при $\kappa' = \kappa/T^2$), поэтому его естественно считать записью в вариациях второго начала термодинамики.

[1]) Точкой под буквой отмечаются первообразные (в отличие от точки над буквой, обозначающей дифференцирование).

Приток тепла к объему V на возможных приращениях определим равенством

$$\delta Q = -\int_V h\delta \overset{\cdot}{J}^k n_k \, d\sigma, \tag{3.156}$$

где h — некоторая заданная функция. На действительных приращениях при $h = T$ формула (3.156) переходит в обычную.

Из (2.24) и (3.156) следует, что уравнение энергии можно записать в виде

$$\delta \int_V \rho\left(\frac{1}{2} v_i v^i + U(x_a^i, S)\right) dv = \int_V \rho F_i \delta x^i \, dv + \int_{\partial V} (P_i \delta x^i - h\delta \overset{\cdot}{J}^k n_k) \, d\sigma +$$

$$+ \int_V \rho\left(v_i \frac{d\delta x^i}{dt} - \frac{dv_i}{dt} \delta x^i\right) dv. \tag{3.157}$$

Нетрудно убедиться, что из вариационного уравнения (3.157), в котором вариации энтропии подчинены связи (3.155), вытекают динамические уравнения и краевые условия для упругого теплопроводного тела.

В равновесном состоянии ($v^i = dv^i/dt = J^i = 0$) для изолированной системы ($F^i = 0$ в V, $P^i = 0$, $J^i n_i = 0$, $\delta \overset{\cdot}{J}^k n_k = 0$ на ∂V) сформулированное утверждение переходит во второй принцип Гиббса. Действительно, из (3.157) следует, что $\delta \mathcal{U} = 0$, а любая вариация δS, удовлетворяющая условию $\delta \mathcal{S} = 0$, может быть реализована заданием некоторого вектора $\delta \overset{\cdot}{J}^k$ такого, что

$$\rho \delta S = -\nabla_k \delta \overset{\cdot}{J}^k \quad \text{в } V, \qquad \delta \overset{\cdot}{J}^k n_k = 0 \quad \text{на } \partial V.$$

Для вязкой теплопроводной жидкости в сформулированном утверждении надо произвести следующие изменения: ограничение на вариации (3.155) заменяется на ограничение

$$\rho \delta S = -\nabla_i \delta \overset{\cdot}{J}^i + \frac{1}{\kappa'} J^k \delta \overset{\cdot}{J}^k + \frac{2}{T} \mu e^{ab} \delta \epsilon_{ab},$$

а функция $U(x_a^i, S)$ в (3.157) — на функцию $U(\rho, S)$.

§4. УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариационное уравнение называется голономным, если его левая часть представляет вариацию некоторого функционала. Рассмотрим необходимые и достаточные условия голономности вариационных уравнений.

Критерий голономности. Начнем с конечномерного случая. "Конечномерная модель" левой части вариационного уравнения — это линейная дифференциальная форма вида $F_\kappa(u)\delta u^\kappa$, где $u = \{u^\kappa\} \in R_n$. Обозначим ее через $\delta\Omega$ (в математике принято обозначение $\Omega(\delta)$, "термодинамическое" обозначение $\delta\Omega$ соответствует обозначениям, применявшимся выше). Спрашивается, при каких условиях форма $\delta\Omega$ представляет вариацию некоторой функции $\varphi(u)$ ($\delta\Omega = \delta(\varphi)$), или, что то же, при каких условиях вектор $F_\kappa(u)$ потенциален ($F_\kappa = \partial\varphi/\partial u^\kappa$)?

Пусть функции $F_\kappa(u)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой области A пространства R_n. Определим в A два бесконечно малых поля

δu^κ и $\delta' u^\kappa$. Обозначим через $\delta'\delta\Omega$ вариацию формы $\delta\Omega$ вдоль поля $\delta' u^\kappa$, по определению $\delta'\delta\Omega$ задается равенством

$$\delta'\delta\Omega = F_\kappa(u + \delta' u)\delta u^\kappa - F_\kappa(u)\delta u^\kappa, \tag{4.1}$$

в котором отброшены члены более чем второго порядка малости. Из (4.1) следует, что

$$\delta'\delta\Omega = \frac{\partial F_\kappa(u)}{\partial u^{\bar\kappa}}\ \delta' u^{\bar\kappa}\,\delta u^\kappa, \tag{4.2}$$

суммирование происходит по индексам κ и $\bar\kappa$.

Справедлива следующая теорема: для того чтобы форма $\delta\Omega$ представляла в области A вариацию некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области было выполнено равенство

$$\delta'\delta\Omega = \delta\delta'\Omega. \tag{4.3}$$

Из (4.1) – (4.3) следуют хорошо известные условия голономности дифференциальных форм (условия потенциальности вектора F_κ)

$$\frac{\partial F_\kappa(u)}{\partial u^{\bar\kappa}} = \frac{\partial F_{\bar\kappa}(u)}{\partial u^\kappa}. \tag{4.4}$$

Условия голономности (4.3) имеют локальный характер, т.е. их выполнение в окрестности некоторой точки гарантирует существование в этой окрестности функции $\varphi(u)$ такой, что $\delta\Omega = \delta(\varphi)$. Продолжение $\varphi(u)$ на всю область A может быть многозначным. Однозначную функцию $\varphi(u)$ можно указать, если область A односвязна.

Идея доказательства формулы (4,3) заключается в следующем. Для того чтобы форма $\delta\Omega$ была вариацией некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от $\delta\Omega$ по любому замкнутому контуру Γ, проведенному в области изменения параметров u^κ, обращался в нуль:

$$\oint_\Gamma \delta\Omega = 0. \tag{4.5}$$

Предположим, что в области изменения параметров u^κ на каждый замкнутый контур можно натянуть двумерную поверхность Σ. Возьмем в каждой точке Σ два линейно независимых направления, непрерывно меняющихся вдоль Σ. Бесконечно малые изменения вдоль этих направлений обозначим через δu^κ и $\delta' u^\kappa$. По формуле Стокса

$$\oint_\Gamma \delta\Omega = \int_\Sigma (\delta\delta'\Omega - \delta'\delta\Omega). \tag{4.6}$$

В силу произвольности контура Γ и поверхности Σ из (4.5) и (4.6) следует, что для голономности линейной дифференциальной формы $\delta\Omega$ необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке u^κ для любых бесконечно малых приращений δu^κ и $\delta' u^\kappa$ выполнялось равенство (4.3).

Оказывается [48, 49], что это рассуждение можно обобщить и на бесконечномерные пространства, и в качестве критерия голономности получается формула (4.3).

Пример 1. Рассмотрим функционал $\delta\Omega$ вида

$$\delta\Omega = \int_V F(x,\ u,\ u_i,\ u_{ij})\delta u\, d^n x, \tag{4.7}$$

где $x = \{x^i\} \in R_n$, $u_i \equiv u_{,i}$, $u_{ij} \equiv u_{,ij}$, а F – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Функцию $F(x,\ u,\ u_i,\ u_{ij})$ можно рассматривать как оператор, действующий на $u(x)$. Оператор F называется потенциальным, если $\delta\Omega$ есть вариация некоторого функционала. Выведем условия голономности $\delta\Omega$ (или, что то же, условия потенциальности оператора F). Для простоты будем считать, что допустимые функции $u(x)$ обращаются в нуль на ∂V, так что

$$\delta u = 0 \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{4.8}$$

Вычислим вариацию функционала $\delta\Omega$:

$$\delta'\delta\Omega = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u}\ \delta' u + \frac{\partial F}{\partial u_i}\ (\delta' u)_{,i} + \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ (\delta' u)_{,ij} \right) \delta u\, d^n x.$$

Согласно (4.3) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} &\int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u}\ \delta' u + \frac{\partial F}{\partial u_i}\ (\delta' u)_{,i} + \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ (\delta' u)_{,ij} \right) \delta u\, d^n x = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u}\ \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_i}\ (\delta u)_{,i} + \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ (\delta u)_{,ij} \right) \delta' u\, d^n x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Преобразуем левую часть (4.9) к тому же виду, что и правую. Для этого надо перекинуть производные с $\delta' u$ на δu при помощи интегрирования по частям. Учитывая, что интегралы по границе области V в силу (4.8) обращаются в нуль, можно написать

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{\partial F}{\partial u_i}\ (\delta' u)_{,i}\, \delta u\, d^n x = -\int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\ \delta u \right)_{,i} \delta' u\, d^n x, \\ &\int_V \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ (\delta' u)_{,ij}\, \delta u\, d^n x = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ \delta u \right)_{,ij} \delta' u\, d^n x. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) в силу произвольности $\delta' u$ в области V следует, что должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial u}\ \delta u - \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\ \delta u \right)_{,i} + \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ \delta u \right)_{,ij} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}\ \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_i}\ (\delta u)_{,i} + \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ (\delta u)_{,ij}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Равенство (4.11) имеет место в каждой точке области V для произвольной функции δu. В каждой точке δu и производные δu по координатам можно считать независимыми. Поэтому надо приравнивать нулю коэффициенты при δu, $(\delta u)_{,i}$ и $(\delta u)_{,ij}$. Полагая равным нулю коэффициент при $(\delta u)_{,i}$,

получим условие

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} = 0. \tag{4.12}$$

Коэффициент при δu равен нулю в силу (4.12), коэффициент при $(\delta u)_{,ij}$ равен нулю тождественно.

Итак, необходимое и достаточное условие голономности функционала (4.7) сводится к равенствам (4.12).

Легко проверить, что при $F = \delta\Lambda/\delta u$, где $\Lambda = \Lambda(x, u, u_i)$, условия (4.12) тождественно выполняются.

Из (4.12) следует, что при $F = F(x, u)$ функционал (4.7) всегда голономен, а при $F = F(x, u, u_i)$ $(\partial F/\partial u_i \neq 0)$ всегда неголономен.

Покажем, что в голономном случае F может зависеть от вторых производных только линейно. Перепишем (4.12) более подробно

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^j\,\partial u_{ij}} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u_{ij}}u_j - \frac{\partial^2 F}{\partial u_k\,\partial u_{ij}}u_{kj} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\,\partial u_{kl}}u_{klj} = 0.$$

Третьи производные от u входят только в последнее слагаемое, и, так как u и производные u в каждой фиксированной точке могут принимать произвольные значения,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\,\partial u_{kl}} = 0,$$

что и доказывает сделанное утверждение.

Голоиомность интегральных функционалов. Аналогично исследуется вопрос о голономности функционалов вида

$$\delta\Omega = \int_V F_\kappa(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i, \ldots, u^\kappa_{i_1\ldots i_N})\,\delta u^\kappa d^n x. \tag{4.13}$$

Здесь

$$u^\kappa_{i_1\ldots i_k} \equiv \partial^k u^\kappa/\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k},$$

F_κ – дифференцируемая нужное число раз функция от u^κ и производных u^κ до порядка N.

Будем считать, что u^κ на ∂V подчинены условиям

$$u|_{\partial V} = \tilde{u}^\kappa, \quad \left.\frac{\partial u^\kappa}{\partial \nu}\right|_{\partial V} = \tilde{u}^\kappa_1, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_{\partial V} = \tilde{u}^\kappa_2, \ldots \tag{4.14}$$

Здесь $\partial/\partial\nu$ – производная по какому-нибудь направлению, выводящему с поверхности ∂V. Число заданных производных зависит от N. При четном N будем считать его равным $N/2$ (включая производную нулевого порядка), при нечетном N – равным $(N+1)/2$. Граничные условия (4.14) эквивалентны заданию на ∂V функций u^κ и соответствующего числа производных u^κ по x^i. Поэтому

$$\delta u^\kappa = 0, \quad \delta u^\kappa_i = 0, \quad \delta u^\kappa_{i_1 i_2} = 0, \ldots \quad \text{на } \partial V. \tag{4.15}$$

Условие голономности (4.3) для функционала (4.13) сводится к соотношениям

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial u^{\overline{\kappa}}_{i_1 \dots i_k}} = \sum_{s=0}^{N-k} (-1)^{k+s} C^s_{k+s} \frac{\partial^s}{\partial x^{i_{k+1}} \dots \partial x^{i_{k+s}}} \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^{\kappa}_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_{k+s}}}, \tag{4.16}$$

которые должны выполняться тождественно для любых функций $u^\kappa(x^i)$. Здесь $C^m_k = k!/(m!(k-m)!)$, и для более компактной записи формул принято следующее соглашение: если в сумме встречается величина $T^{i_1 \dots i_k}$ при значении $k = 0$, то это означает, что у нее нет индексов $i_1 \dots i_k$, в частности под $u^\kappa_{i_1 \dots i_k}$ при $k = 0$ понимается производная от u^κ нулевого порядка, т.е. u^κ.

Пример 1 (*продолжение*). В случае функционала вида (4.7) условие голономности (4.16) содержит три равенства, соответствующих $k = 0, 1, 2$. При $k = 2$ имеем тождество, при $k = 0, 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial u_i} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}, \\ \frac{\partial F}{\partial u_i} &= -\frac{\partial F}{\partial u_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Второе соотношение (4.17) можно переписать в виде (4.12), а первое соотношение (4.17) является тождеством в силу (4.12).

Пример 2. Пуоть F_κ зависит от производных u^κ не выше второго порядка. Тогда (4.16) сводятся к трем равенствам, соответствующим значениям $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_\kappa}{\partial u^{\overline{\kappa}}} = \frac{\delta F_{\overline{\kappa}}}{\delta u^\kappa}, \quad \left(\frac{\delta F_{\overline{\kappa}}}{\delta u^\kappa} = \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_i} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u_{ij}} \right), \\ &\frac{\partial F_\kappa}{\partial u^{\overline{\kappa}}_i} = -\frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_{ij}}, \\ &\frac{\partial F_\kappa}{\partial u^{\overline{\kappa}}_{ij}} = \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_{ij}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Второе соотношение (4.18), используя третье, можно преобразовать к виду

$$2 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa_{ij}} + \frac{\partial F_\kappa}{\partial u^{\overline{\kappa}}_{ij}} \right).$$

После этого оно принимает симметричную форму

$$\frac{\delta F_\kappa}{\delta u^{\overline{\kappa}}_i} + \frac{\delta F_{\overline{\kappa}}}{\delta u^\kappa_i} = 0.$$

Здесь введено обозначение $\frac{\delta F}{\delta u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$. Преобразуя анало-

гично первое равенство (4.18), придем к следующим условиям голономности:

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial \overline{u^\kappa}} - \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u^\kappa} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\delta F_\kappa}{\delta \overline{u_i^\kappa}} - \frac{\delta F_{\overline{\kappa}}}{\delta u_i^\kappa}\right),$$

$$\frac{\delta F_\kappa}{\delta \overline{u_i^\kappa}} + \frac{\delta F_{\overline{\kappa}}}{\delta u_i^\kappa} = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial \overline{u_{ij}^\kappa}} - \frac{\partial F_{\overline{\kappa}}}{\partial u_{ij}^\kappa} = 0.$$

Общие условия голономности (4.16) можно переписать более компактно при помощи следующего построения. Будем считать u^κ функциями $n+1$ переменных x^i $(i = 1, \ldots, n)$ и $\tau(u^\kappa(x^i) = u^\kappa(x^i, \tau)$ при $\tau = 0)$ и введем "лагранжиан"

$$L = F_\kappa(x^i, u^\kappa, u_i^\kappa, \ldots)\frac{\partial u^\kappa}{\partial \tau}.$$

Тогда равенства (4.16) эквивалентны соотношению

$$\frac{\delta L}{\delta u^\kappa} = 0, \tag{4.20}$$

где вариационная производная берется по функциям $u^\kappa(x^i, \tau)$, а затем полагается $\tau = 0$.

Потенциал. Если условия голономности функционала $\delta\Omega$ выполняются, то "потенциал" J можно восстановить по формуле

$$J(u) = \int_{u_0}^{u} \delta\Omega,$$

где интеграл берется по какому-нибудь пути в функциональном пространстве, соединяющему фиксированный элемент u_0 с текущим элементом u. В конкретных случаях потенциал голономных функционалов, как правило, нетрудно угадать. Проверка условий голономности нужна для того, чтобы узнать, следует ли заниматься поисками потенциала.

Голономность функционалов на расширенном множестве функций. Отметим, что голономность функционала во многом предопределяется выбором множества функций, на котором он рассматривается. Ряд примеров подобного рода будет обсуждаться в § 11 гл. III. Здесь мы приведем один общий признак голономности.

Пусть имеются две сплошные среды, занимающие области V_1 и V_2. Эти области имеют общий участок границы Σ. Все внешние воздействия на сплошную среду 1 сводятся к воздействию со стороны сплошной среды 2 через поверхность Σ. Нас интересует вопрос о голономности вариационного уравнения среды 1. Вариационные уравнения для среды 1, среды 2 и системы среда 1 + среда 2 имеют вид

$$\delta(I_1) + \delta A_1 = 0, \quad \delta(I_2) + \delta A_2 = 0, \quad \delta(I_1 + I_2) + \delta A_{12} = 0.$$

Отсюда

$$\delta A_{12} = \delta A_1 + \delta A_2.$$

Если функционал δA_{12}, описывающий внешние воздействия на систему среда 1 + среда 2, голономен, то голономно и вариационное уравнение для среды 1, так как

$$\delta A_1 = \delta A_{12} + \delta(I_2).$$

Голономность достигается за счет расширения числа определяющих функций в результате введения в рассмотрение характеристик второй сплошной среды.

Вариационное уравнение для среды 1 голономно, в частности, при

$$\delta A_{12} = 0.$$

Последнее равенство имеет место, например, в случае изолированной системы среда 1 + среда 2 или в случае, когда на границе среды 2 выставлены условия типа "заделки".

Пример 3. Рассмотрим упругое тело, часть границы которого Σ находится в контакте с абсолютно твердым телом T. Будем считать, что упругое тело "склеено" с T вдоль Σ. Это означает по определению, что перемещения упругого тела и абсолютно твердого тела на Σ совпадают. Остальная часть границы упругого тела для простоты свободна от нагрузок.

Работа на возможных перемещениях внешних сил, действующих со стороны абсолютно твердого тела,

$$\delta A = \int_{t_0}^{t} \int_{\Sigma} \bar{p}_i \, \delta x^i \, d\sigma \, dt, \tag{4.21}$$

может быть выражена через работу на δr^i и $\delta\varphi^i$ (см. (3.68)). Подстановка (3.68) в (4.21) дает

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} (F_i \delta r^i + M_i \delta\varphi^i) dt. \tag{4.22}$$

Здесь F_i и M_i – главные векторы сил и моментов, действующих на упругое тело,

$$F_i = \int_{\Sigma} \bar{p}_i \, d\sigma, \qquad M_i = \epsilon_{ijk} \int_{\Sigma} \bar{p}^j (x^k - r^k(t)) d\sigma.$$

Если F_i и M_i являются известными функциями от параметров $r^i(t)$ и $\alpha_a^i(t)$, определяющих движение абсолютно твердого тела, то голономность δA исследуется при помощи соотношений, выведенных выше. Однако если твердое тело не испытывает других внешних воздействий, кроме воздействий со стороны упругого тела, то для него голономность очевидна, так как справедливо вариационное уравнение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{K}_T \, dt - \int_{t_0}^{t_1} (F_i \delta r^i + M_i \delta\varphi^i) dt = 0,$$

где $\mathcal{K}_T$ – кинетическая энергия абсолютно твердого тела – известная функция dr^i/dt, α_a^i и $d\alpha_a^i/dt$. Потенциалом для δA является действие абсолютно твердого тела.

Глава II
ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Голономное вариационное уравнение, т.е. вариационное уравнение, записывающееся в форме

$$\delta(I) = 0,$$

называют также вариационным принципом. Вариационный принцип утверждает, что искомое решение есть стационарная точка функционала I. Значение вариационных принципов связано с тем, что исследование решений можно свести к исследованию стационарных точек функционала без обращения к дифференциальным уравнениям. Методы исследования решений, основанные на анализе стационарных точек, называют прямыми. Прямые методы особенно эффективны в тех случаях, когда функционал I имеет единственную стационарную точку, и она является его точкой максимума или минимума.

Существует много разнообразных прямых методов построения приближенных решений, а также прямых методов качественного анализа типа анализа существования и единственности решения или вывода априорных оценок. В этой главе будет дано представление о некоторых идеях, лежащих в основе качественных прямых методов. Как и все соображения, используемые в энергетических подходах, эти идеи просты и наглядны, однако их фактическая реализация в конкретных задачах нередко требует изобретательности, определенных навыков и привлечения тонких математических результатов.

§ 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Ограниченность снизу. Рассмотрим функционал $I(u)$, определенный на некотором множестве $\mathcal{M}$ элементов u. Термин "определен" подразумевает, что в каждой точке множества $\mathcal{M}$ функционал $I(u)$ имеет конечное значение. Это, однако, не означает, что $I(u)$ ограничен на $\mathcal{M}$: могут найтись последовательности элементов из $\mathcal{M}$, на которых $I(u)$ неограниченно возрастает или убывает.

Поставим задачу о нахождении нижней грани $\underline{I} = \inf\limits_{u \in \mathcal{M}} I(u)$ функционала $I(u)$ на множестве $\mathcal{M}$. Для этой задачи используется обозначение

$$I(u) \to \inf \quad \text{или} \quad I(u) \to \inf_{\mathcal{M}}.$$

Будем говорить, что задача корректна, если существуют элементы $\check{u}$ из $\mathcal{M}$, на которых нижняя грань достигается:

$$I(\check{u}) = \underline{I} = \inf I(u). \tag{1.1}$$

Элементы $\breve{u}$ называются минимизирующими элементами функционала $I(u)$.

Задача о минимуме $I(u)$ имеет смысл для любого не обязательно дифференцируемого функционала, однако в дальнейшем мы будем иметь дело только с дифференцируемыми функционалами.

Из конечности значений функционала $I(u)$ в любой точке множества $\mathcal{M}$ следует, что в корректно поставленной вариационной задаче функционал $I(u)$ ограничен снизу на $\mathcal{M}$. Некорректность вариационных задач может быть связана с двумя причинами: либо функционал неограничен снизу на $\mathcal{M}$, либо он ограничен снизу, но его нижняя грань не достигается, т.е. не существует такого элемента $\breve{u}$, что $I(\breve{u}) = \underline{I}$. Исследование корректности вариационной задачи для функционала естественно начать с выяснения более простого вопроса о его ограниченности снизу на $\mathcal{M}$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности функционала на нескольких примерах.

Пример 1. Возьмем множество $\mathcal{M}$ функций одной переменной, дифференцируемых на отрезке $[0, a]$, и рассмотрим на $\mathcal{M}$ функционал

$$I(u) = E(u) - L(u), \tag{1.2}$$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^a A(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \quad L(u) = \int_0^a f(x)u\,dx + p_a u(a) - p_0 u(0). \tag{1.3}$$

Примем, что функции $A(x)$ и $f(x)$ – кусочно гладкие, и функция $A(x)$ положительна:

$$A(x) \geqslant A_0 = \text{const} > 0. \tag{1.4}$$

Функционал $E(u)$ неотрицателен и, следовательно, ограничен снизу нулем. Функционал $L(u)$ линеен и поэтому неограничен. Сумма $E(u) - L(u)$ может оказаться ограниченной снизу за счет того, что с ростом $L(u)$ растет и $E(u)$, причем $E(u)$, как квадратичный функционал, растет быстрее. Однако заранее ясно, что функционал $E(u)$ не сможет "компенсировать" $L(u)$ на тех функциях u, на которых $E(u) = 0$, т.е. на функциях $\bar{u} = \text{const}$. Это подсказывает, что необходимым условием ограниченности функционала $I(u)$ снизу является обращение $L(\bar{u})$ в нуль для всех $\bar{u} \equiv \text{const}$:

$$L(\bar{u}) = 0. \tag{1.5}$$

Действительно, допустим противное: для некоторого $\bar{u}$ $L(\bar{u}) \neq 0$. Пусть для определенности $L(\bar{u}) > 0$. Возьмем функции $u = \lambda\bar{u}$, $\lambda > 0$. Так как $E(\lambda\bar{u}) = 0$, $L(\lambda\bar{u}) = \lambda L(\bar{u})$, устремляя λ к $+\infty$, получим, что $I(\lambda\bar{u}) \to -\infty$. Если $L(\bar{u}) < 0$, то неограниченного уменьшения $I(\lambda\bar{u})$ можно добиться, устремляя λ к $-\infty$.

Равенство (1.5) эквивалентно следующему ограничению на величины f, p_a, p_0:

$$\int_0^a f(x)dx + p_a - p_0 = 0. \tag{1.6}$$

Для выяснения смысла ограничения (1.6) выпишем уравнения Эйлера функционала (1.2), (1.3), предполагая функцию $u(x)$ дважды непрерывно

дифференцируемой на $[0, a]$

$$\frac{d}{dx} A(x) \frac{du}{dx} + f(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{1.7}$$

$$A \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = p_0, \quad A \frac{du}{dx}\Big|_{x=a} = p_a. \tag{1.8}$$

Интегрирование (1.7) по $[0, a]$ с использованием краевых условий (1.8) приводит к равенству (1.6). Таким образом, (1.6) есть необходимое условие разрешимости краевой задачи (1.7), (1.8). Покажем, что при выполнении условия (1.6) функционал (1.2), (1.3) ограничен снизу.

Если (1.6) имеет место, то функционал $I(u)$ инвариантен относительно сдвигов по u на постоянную. Поэтому можно либо отождествить в $\mathcal{M}$ все функции, отличающиеся на постоянную, либо взять подмножество множества $\mathcal{M}$ в котором сдвиг на постоянную исключен при помощи какого-нибудь ограничения. Для определенности в качестве такого ограничения возьмем равенство

$$\int_0^a u(x)dx = 0. \tag{1.9}$$

Дальше потребуется следующая лемма.

Л е м м а. Для дифференцируемых функций, удовлетворяющих ограничению (1.9), справедливо неравенство

$$\lambda^2 u^2(x) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \tag{1.10}$$

где λ – некоторая постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем тождество

$$u(x) - u(y) = \int_y^x \frac{du(z)}{dz}\, dz$$

и проинтегрируем его по y в пределах от 0 до a. Используя (1.9), получим

$$au(x) = \int_0^a dy \int_y^x \frac{du(z)}{dz}\, dz. \tag{1.11}$$

Возведем (1.11) в квадрат и используем неравенство Коши – Буняковского

$$a^2 u^2(x) = \left[\int_0^a \left(1 \cdot \int_y^x \frac{du(z)}{dz}\, dz\right) dy\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^a 1^2\, dy \int_0^a \left[\int_y^x 1 \cdot \frac{du}{dz}\, dz\right]^2 dy \leqslant a \int_0^a \left[\int_y^x 1^2\, dz \int_y^x \left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz\right] dy. \tag{1.12}$$

Поставив в (1.12) в качестве пределов интегрирования 0 и a вместо x и y и увеличив этим правую часть, получим

$$a^2u^2(x) \leqslant a^3 \int_0^a \left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz. \qquad (1.13)$$

Таким образом, справедливо неравенство (1.10) с постоянной λ, равной по крайней мере 1 (наилучшее значение постоянной λ может быть больше).

Из (1.10) вытекает очевидное

Следствие. Дифференцируемые функции, удовлетворяющие ограничению (1.9), удовлетворяют также неравенствам

$$\lambda^2u^2(0) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \quad \lambda^2u^2(a) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \qquad (1.14)$$

$$\mu^2 \int_0^a u^2 dx \leqslant a^2 \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx. \qquad (1.15)$$

Неравенство (1.15) называют неравенством Виртингера.

Из (1.13) следует, что μ не меньше 1. Менее грубый анализ показывает, что наилучшее значение μ равно 2π. Значение наилучших постоянных зависит от того, как выбраны ограничения, исключающие сдвиг по u на постоянную. Если вместо ограничения (1.9) взять ограничение $u(0) = 0$, то наилучшая постоянная μ уменьшится и станет равной $\pi/2$, а при $u(0) = u(a) = 0$ она равна π.

Вернемся к доказательству достаточности условий (1.6) для ограниченности снизу функционала (1.2), (1.3). Согласно неравенству Коши – Буняковского

$$|L(u)| = \left|\int_0^a f(x)u(x)dx + p_au(a) - p_0u(0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^a f(x)u(x)dx\right| + |p_au(a)| + |p_0u(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^a \frac{a}{\sqrt{A_0}} f(x) \frac{\sqrt{A_0}}{a} u(x)dx\right| + |p_au(a)| + |p_0u(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^a \frac{a^2}{A_0} f^2 dx} \sqrt{\int_0^a \frac{A_0}{a^2} u^2 dx} + \frac{\sqrt{a}|p_a|}{\sqrt{A_0}} \sqrt{\frac{A_0u^2(a)}{a}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}|p_0|}{\sqrt{A_0}} \sqrt{\frac{A_0u^2(0)}{a}}. \qquad (1.16)$$

Увеличим теперь правую часть в (1.16) на основании (1.14), (1.15) и (1.4). Получим

$$|L(u)| \leqslant c\sqrt{E(u)}, \qquad (1.17)$$

$$c = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\mu} \sqrt{\int_0^a \frac{a^2}{A_0} f^2 dx} + \frac{\sqrt{a}(|p_0| + |p_a|)}{\lambda\sqrt{A_0}}\right).$$

Уменьшим функционал $I(u)$ при помощи оценки (1.17)

$$I(u) = E(u) - L(u) \geqslant E(u) - |L(u)| \geqslant E(u) - c\sqrt{E(u)} = I_1(u).$$

Функционал $I_1(u)$ есть квадратичная функция от $\sqrt{E(u)}$. Следовательно, $I_1(u)$ ограничен снизу постоянной $-c^2/4$. Поэтому такой же постоянной ограничен снизу и функционал $I(u)$.

Выше мы предполагали кусочную гладкость функции $f(x)$. Из формулы (1.14) видно, что для ограниченности снизу достаточно потребовать лишь интегрируемости $f^2(x)$.

В рассмотренном примере имеется группа G: $g\mathcal{M} = \mathcal{M}$, $g \in G$ (группа сдвигов по u на постоянную), которая оставляет функционал E неизменным: $E(gu) = E(u)$, $g \in G$, $u \in \mathcal{M}$. Если группа G не сводится к тождественному преобразованию, то говорят, что функционал E имеет ядро. В механике обычно E — энергия, а G — группа преобразований, соответствующих перемещениям тела как твердого.

Так же, как в примере 1, доказывается утверждение: если G — группа сдвигов по u: $gu = u + \bar{u}_g$, причем множество $\bar{\mathcal{M}}$ элементов $\bar{u}_g$ является конусом, т.е. наряду с каждым элементом $\bar{u}$ содержит элемент $\lambda\bar{u}$ при $\lambda > 0$, то для ограниченности снизу функционала $I(u)$ вида (1.2) необходимо, чтобы для всех $\bar{u} \in \bar{\mathcal{M}}$ выполнялось неравенство

$$L(\bar{u}) \leqslant 0. \tag{1.18}$$

Для множеств $\bar{\mathcal{M}}$, которые наряду с каждым элементом $\bar{u}$ содержат элемент $-\bar{u}$, из (1.18) в качестве необходимого условия ограниченности снизу функционала $E(u)$–$L(u)$ вытекает равенство

$$L(\bar{u}) = 0 \tag{1.19}$$

для всех $\bar{u} \in \bar{\mathcal{M}}$.

Свойство функционала $E(u)$ иметь или не иметь ядро зависит от множества, на котором он рассматривается. Это видно из следующего примера.

Пример 2. Возьмем в качестве множества $\mathcal{M}$ множество дифференцируемых на $[0, a]$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$u(0) = 0. \tag{1.20}$$

В этом случае функционал $E(u)$ (1.3) не имеет ядра — сдвиги на постоянную исключены условием (1.20). Функционал $I(u)$ будет ограничен снизу при любом выборе $f(x)$ и p_a, поскольку, как легко видеть, на множестве функций, подчиненных ограничению (1.20), справедливо неравенство (1.10) и, следовательно, оценка (1.17).

Приведем теперь пример функционала, который не имеет ядра на множестве всех дифференцируемых функций $u(x)$.

Пример 3. Изменим несколько функционал $E(u)$ (1.3), добавив в него интеграл от u^2:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^a \left(A(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + B(x)u^2\right)dx, \quad B(x) \geqslant B_0 > 0. \tag{1.21}$$

Функционал $E(u)$ (1.21) не инвариантен относительно сдвигов. Функционал $E(u)$–$L(u)$ ограничен снизу на множестве дифференцируемых функций $u(x)$. Доказательство ограниченности проводится так же, как

и в примере 1, с той разницей, что вместо неравенств (1.14) надо использовать неравенства

$$\lambda^2 u^2(0) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{a} \int_0^a u^2 dx,$$
$$\lambda^2 u^2(a) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{a} \int_0^a u^2 dx, \tag{1.22}$$

которые устанавливаются так же, как (1.14).

Можно проверить, что при $B \to 0$ минимальное значение функционала $E(u)-L(u)$ остается ограниченным, если выполнено условие (1.6). В противном случае $\inf(E(u)-L(u)) \to -\infty$ при $B \to .0$.

Пример 4. Рассмотрим функционал $I(u) = E(u)-L(u)$, определенный на функциях $u(x)$ нескольких переменных $x = \{x^i\}$, $x \in R_n$, в котором $E(u)$ и $L(u)$ определены формулами

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_V A^{ij}(x) u_{,i} u_{,j} d^n x,$$
$$L(u) = \int_V f(x) u \, d^n x + \int_{\partial V} p(x) u \, d^{n-1} x. \tag{1.23}$$

Квадратичная форма $A^{ij}u_i u_j$ предполагается положительно определенной: $A^{ij}u_i u_j \geqslant A_0 u_i u^i$, $A_0 = \text{const} > 0$.

Функционал $E(u)$ инвариантен относительно сдвигов на постоянные функции $u(x) = \bar{u} = \text{const}$. Необходимое условие ограниченности функционала $I(u)$ снизу (1.19) эквивалентно следующему соотношению для заданных функций $f(x)$ и $p(x)$:

$$\int_V f(x) d^n x + \int_{\partial V} p(x) d^{n-1} x = 0. \tag{1.24}$$

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют функции $u(x)$, являющиеся стационарными точками функционала $E(u)-L(u)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} A^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} + f = 0 \quad \text{в } V, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} n^i = p \quad \text{на } \partial V. \tag{1.26}$$

Интегрируя (1.25) по V и используя краевые условия (1.26) на ∂V, получим (1.24). Таким образом, равенство (1.24) есть необходимое условие разрешимости краевой задачи (1.25), (1.26). В случае уравнения Лапласа ($A^{ij} = \delta^{ij}$, $f = 0$) оно переходит в известное условие разрешимости задачи Неймана.

Доказательство достаточности условия (1.24) для ограниченности снизу функционала $I(u)$ основано на неравенствах Пуанкаре – Стеклова – Фридрихса – Эрлиха

$$\lambda^2 \int_{\partial V} u^2 d^{n-1} x \leqslant \int_V u_{,i} u^{,i} d^n x, \quad \mu^2 \int_V u^2 d^n x \leqslant \int_V u_{,i} u^{,i} d^n x \tag{1.27}$$

и проводится по той же схеме, что и в примере 1. В качестве условий,

исключающих в (1.27) сдвиг $u(x)$ на постоянную, можно взять равенство

$$\int_V u\, d^n x = 0. \tag{1.28}$$

Минимизирующие последовательности. Пусть функционал $I(u)$ ограничен на $\mathcal{M}$ снизу. По определению нижней грани найдутся последовательности $\{u_n\}$ из $\mathcal{M}$ такие, что $I(u_n) \to \underline{I}$ при $n \to \infty$. Они называются минимизирующими последовательностями.

Пример 5. Пусть $\mathcal{M}$ — множество непрерывных функций $u(x)$ одной переменной, определенных на отрезке $[0, a]$ и принимающих при $x = 0$ значение 1: $u(0) = 1$. Рассмотрим на $\mathcal{M}$ функционал

$$I(u) = \int_0^a u^2\, dx.$$

Функционал ограничен снизу нулем. Покажем, что нуль — нижняя грань $I(u)$. Возьмем последовательность функций $u_n(x)$, линейных на отрезке $\left[0, \frac{a}{n}\right]$ и равных нулю вне его. Очевидно, что $I(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, построенная последовательность — минимизирующая. Вместе с тем ясно, что у функционала $I(u)$ на множестве непрерывных функций нет минимизирующего элемента, так как не существует непрерывной функции, принимающей при $x = 0$ значение 1 и обращающей интеграл от u^2 в нуль.

Вариационные задачи, у которых некорректность связана с отсутствием минимизирующего элемента, встречаются в приложениях. В частности, они иногда возникают в проблемах теории оптимального управления. Решить такую задачу — значит найти нижнюю грань $\underline{I}$ и построить какую-нибудь минимизирующую последовательность. В вариационных задачах физики и механики, как правило, можно рассчитывать на существование минимизирующего элемента.

Исследование существования минимизирующего элемента. Теоремы существования представляют обобщения на бесконечномерный случай теоремы о том, что непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\mathcal{M}$ функция достигает на нем своих нижней и верхней граней. Анализ этой теоремы показывает, что основные заложенные в ней конструкции — это понятие сходимости элементов в $\mathcal{M}$, понятие непрерывности функции (функционала) на $\mathcal{M}$ и структура множества $\mathcal{M}$: множество $\mathcal{M}$ должно обладать следующим свойством — из любой бесконечной последовательности элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу из $\mathcal{M}$.

Понятие непрерывности функционала (функционал непрерывен в точке u_0, если для любой последовательности $\{u_n\}$, сходящейся к u_0, $I(u_n) \to I(u_0)$), так же как и указанное свойство множества $\mathcal{M}$ (его называют компактностью), связано с тем, как введено понятие сходимости, или, что то же, как задана топология на $\mathcal{M}$.

Для одних и тех же функционалов $I(u)$ и множества $\mathcal{M}$ можно определять сходимость элементов различным образом. Относительно одной сходимости функционал $I(u)$ может быть непрерывным и множество $\mathcal{M}$ компактным, относительно другой — нет. Если удалось ввести сходимость

элементов так, что относительно нее множество $\mathcal{M}$ является компактным, а функционал $I(u)$ – непрерывным, то $I(u)$ имеет на $\mathcal{M}$ минимизирующий элемент. Это утверждение доказывается так же, как соответствующая теорема для функции одной переменной в курсе анализа.

Легко проверить, что предположение о непрерывности функционала можно ослабить и потребовать лишь его полунепрерывности снизу. Функционал называется полунепрерывным снизу в точке u_0, если для любой сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}$, для которой сходится последовательность $\{I(u_n)\}$,

$$I(u_0) \leqslant \lim I(u_n).$$

Опишем основные типы сходимости.

Как правило, множество $\mathcal{M}$ можно считать подмножеством банахова пространства. Банаховым называется линейное пространство **B**, в котором определена норма – неотрицательный функционал $\|u\|$, однородный ($\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$), невырожденный ($\|u\| = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$), выпуклый ($\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$), и пространство **B** полно по норме, т.е. любая фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ ($\|u_n - u_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$) сходится в **B**.

В банаховом пространстве естественно возникает понятие сходимости по норме или сильной сходимости. Именно, последовательность $\{u_n\}$ сильно сходится к u_0, если $\|u_n - u_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Однако сильная сходимость не очень полезна для теорем существования минимизирующего элемента, так как ограниченные замкнутые множества (замкнутые множества, лежащие в шаре $\|u\| \leqslant R$ конечного радиуса R), в отличие от конечномерного пространства некомпактны. Оказывается, что ограниченные замкнутые множества в банаховом пространстве могут быть компактны относительно слабой сходимости: последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к u_0, если для любого линейного непрерывного[1]) функционала $l(u)$ $l(u_n) \to l(u_0)$ при $n \to \infty$. Подобные банаховы пространства часто возникают в приложениях; к их числу относятся, например, гильбертовы пространства (линейные пространства, в которых определено скалярное произведение (u, v), а норма вводится по правилу: $\|u\| = (u, u)$). В дальнейшем, говоря о банаховом пространстве, будем считать, что его ограниченные замкнутые множества слабо компактны.

Таким образом, теорема существования минимизирующего элемента справедлива в задачах о минимуме на замкнутом ограниченном множестве банахова пространства функционалов $I(u)$, полунепрерывных снизу относительно слабой сходимости. Случай, когда множество $\mathcal{M}$ неограничено (например, $\mathcal{M}$ – конус), сводится к случаю ограниченного множества, если функционал $I(u)$ удовлетворяет дополнительному условию $I(u) \to +\infty$ при $\|u\| \to \infty$.

Можно доказать, что функционал $\|u\|$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости. На этом свойстве основано доказательство теорем существования для функционалов $I(u)$ вида

$$I(u) = E(u) - L(u),$$

где при некотором α, $0 < \alpha < 1$, функционал $E^{\alpha}(u)$ обладает свойствами

[1]) Подразумевается непрерывность относительно сильной сходимости.

нормы[1]), а $L(u)$ – линейный функционал. Для доказательства существования минимизирующего элемента берется естественно в рассматриваемой задаче линейное пространство функций и пополняется по энергетической норме $\|u\| = E^{\alpha}(u)$. Это означает, что в линейное пространство добавляются пределы всех фундаментальных последовательностей. Получается так называемое энергетическое пространство. Пусть линейный функционал $L(u)$ непрерывен в энергетической норме (это эквивалентно справедливости неравенства $|L(u)| \leqslant cE^{\alpha}(u)$). Легко видеть, что сильно непрерывный линейный функционал также и слабо непрерывен. Поэтому, а также в силу слабой полунепрерывности снизу нормы будет полунепрерывен снизу и функционал $I(u)$. Следовательно, $I(u)$ достигает минимума на замкнутом, ограниченном (в энергетической норме) выпуклом множестве.

В рассмотренных выше примерах энергия $E(u)$ не обладает свойствами нормы, так как имеет ядро (обращается в нуль на ненулевых элементах). Однако после исключения ядра при помощи ограничений типа (1.9), (1.28) $\sqrt{E(u)}$ приобретает свойства нормы, и доказательство существования минимизирующего элемента может быть проведено по изложенной выше схеме.

Пусть ядро квадратичного функционала $E(u)$ исключено, и $\sqrt{E(u)}$ – норма в энергетическом пространстве. Задаче о минимуме функционала $E(u)-L(u)$ можно дать простую геометрическую интерпретацию.

Поставим в соответствие каждому элементу энергетического пространства u элемент на единичной сфере:

$$v = \frac{u}{\sqrt{E(u)}}, \qquad E(v) = 1.$$

Минимум функционала $E(u)-L(u)$ можно искать последовательно, отыскивая сначала минимум вдоль каждого луча $u = \lambda v$, а затем минимум по сфере $E(v) = 1$. Отыскание минимума вдоль луча сводится к минимизации функции одной переменной $\lambda^2 - \lambda L(v)$. Здесь использовано, что $E(\lambda v) = \lambda^2$. Минимум равен $-\frac{1}{4}(L(v))^2$. Минимизация этого выражения по v эквивалентна максимизации линейного функционала $L(v)$ на единичной сфере:

$$\underline{I} = -\tfrac{1}{4}\bar{L}^2, \qquad \bar{L} = \sup_{E(v)=1} L(v). \tag{1.29}$$

Вариационную задачу (1.29) можно переписать также в двух других эквивалентных формах – в виде задачи о максимуме линейного функционала по шару:

$$\bar{L} = \sup_{E(v)\leqslant 1} L(v) \tag{1.30}$$

и в виде задачи о максимуме по всему пространству функционала нулевой

[1]) Условие "функционал $E^{\alpha}(u)$ обладает свойствами нормы" можно ослабить, заменив его следующими условиями: функционал $E(u)$ является выпуклым (см. дальше), непрерывным относительно некоторой нормы $\|u\|$ и коэрцитивным, т.е. $E(u)/\|u\| \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$.

степени однородности:

$$\bar{L} = \sup_{u} \frac{L(u)}{\sqrt{E(u)}} . \tag{1.31}$$

Действительно, расширяя в исходной вариационной задаче множество допустимых функций, имеем

$$\sup_{E(v)\leqslant 1} L(v) \geqslant \sup_{E(v)=1} L(v). \tag{1.32}$$

Допустим, что в (1.32) имеет место строгое неравенство. Тогда найдется последовательность $\{v_n\}$ такая, что $L(v_n) > \bar{L}$ и $E(v_n) \leqslant 1$. Введем числа λ_n так, чтобы $E(\lambda_n v_n) = 1$. Очевидно, что $\lambda_n \geqslant 1$. Поэтому $L(\lambda_n v_n) > \bar{L}$, но это противоречит определению $\bar{L}$ (1.29), так как последовательность $\{\lambda_n v_n\}$ лежит на сфере $E(v) = 1$.

Формула (1.31) следует из того, что функционал $L(u)/\sqrt{E(u)}$ не меняется вдоль лучей $u = \lambda v$.

Формулы (1.30) и (1.31) иногда оказываются полезными, так как служат источниками аналогий с соответствующей задачей в конечномерном пространстве.

Элементы энергетического пространства не имеют гладкости, которую можно ожидать от решений физических задач. Поэтому возникает независимая проблема исследования свойств гладкости минимизирующего элемента, которая не столь элементарна, как проблема существования решения в энергетическом пространстве.

Исследование единственности. Основной критерий единственности минимизирующего элемента связан с понятием выпуклости.

Множество $\mathcal{M}$, которое наряду с любыми двумя элементами u, v содержит соединяющий их отрезок $\alpha u + (1-\alpha) v$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, называют выпуклым.

Функционал $I(u)$, определенный на выпуклом множестве $\mathcal{M}$, называется выпуклым, если для любых двух элементов u и v из $\mathcal{M}$ и любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha I(u) + (1-\alpha) I(v), \tag{1.33}$$

и строго выпуклым, если при $u \neq v$

$$I(\alpha u + (1-\alpha) v) < \alpha I(u) + (1-\alpha) I(v), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.33}$$

Иногда в качестве условий выпуклости принимается неравенство

$$I\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,(I(u) + I(v)). \tag{1.34}$$

Оно следует из (1.33) при $\alpha = ½$. Можно показать, что для полунепрерывных снизу функционалов условия (1.33) и (1.34) эквивалентны.

Пример 6. Покажем, что интегральный функционал

$$I(u) = \int_V \Lambda\left(x,\ u^k,\ \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right) dv$$

является выпуклым (строго выпуклым), если Λ – выпуклая (строго

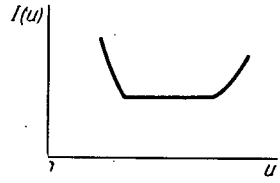
выпуклая) функция u^κ и $\partial u^\kappa/\partial x^i$. Действительно,

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) = \int_V \Lambda\left(x,\ \alpha u^\kappa + (1-\alpha)v^\kappa,\ \alpha\frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i} + (1-\alpha)\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^i}\right) dv \leqslant$$

$$\leqslant \int_V \left[\alpha\Lambda\left(x,\ u^\kappa,\ \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) + (1-\alpha)\Lambda\left(x,\ v^\kappa,\ \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^i}\right)\right] dv = \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v),$$

что и требовалось.

Строго выпуклый функционал не может иметь на выпуклом множестве более одного минимизирующего элемента. Действительно, допустим, что



Р и с. 10.

строго выпуклый функционал имеет на $\mathcal{M}$ два минимизирующих элемента u и v, $I(u) = I(v) = \underline{I}$. Элемент $\frac{1}{2}(u+v)$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$ в силу его выпуклости. Из строгой выпуклости функционала $I(u)$ следует, что его значение в точке $\frac{1}{2}(u+v)$ меньше нижней грани

$$I\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}(I(u) + I(v)) = \underline{I},$$

а это противоречит определению нижней грани.

Рассмотрим квадратичный функционал $E(u)$, т.е. функционал, который может быть получен из симметричной билинейной формы $E(u, v)$ $E(u) = E(u, u)$.

Квадратичный функционал $E(u)$, очевидно, удовлетворяет равенству

$$E\left(\frac{u+v}{2}\right) + E\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(u) + E(v)\right). \qquad (1.35)$$

Поэтому, если билинейная форма положительна, $E(u, u) \geqslant 0$ и $E(u, u) = 0$ только при $u = 0$, то, отбрасывая в левой части (1.35) неотрицательное слагаемое $E\left(\frac{u-v}{2}\right)$, получим, что функционал $E(u)$ удовлетворяет условию строгой выпуклости: при $u \neq v$

$$E\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(E(u) + E(v)\right).$$

Примеры 1–4 (*продолжение*). Квадратичные функционалы $E(u)$ в примерах 1–4 могут быть получены из билинейных форм, которые, если исключено ядро, положительны. Следовательно, эти функционалы строго выпуклы. Линейный функционал $L(u)$ выпукл. Поэтому строго выпукл функционал $I(u) = E(u) - L(u)$. Множество $\mathcal{M}$ в примерах 1–4 выпукло.

Таким образом, в соответствующих вариационных задачах имеется единственный минимизирующий элемент.

Выпуклый, но не обязательно строго выпуклый функционал может иметь несколько минимизирующих элементов (соответствующий пример изображен на рис. 10 — множество минимизирующих точек функции представляет отрезок на прямой).

Множество минимизирующих элементов выпуклого функционала выпукло. В самом деле, если u и v — минимизирующие элементы, $I(u) = \underline{I}$, $I(v) = \underline{I}$, то

$$\underline{I} \leqslant I(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v) = \underline{I}.$$

Следовательно, $I(\alpha u + (1-\alpha)v) = \underline{I}$, и все точки отрезка $\alpha u + (1+\alpha)v$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, являются минимизирующими.

§ 2. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ

Во многих задачах важна информация о нижней грани функционала $I(u)$. Иногда она представляет основной интерес (дальше будет приведено много примеров).

В механических задачах нижняя грань обычно связана со значением энергии на минимизирующем элементе. Эта связь очевидна, если функционал $I(u)$ совпадает с энергией. Покажем, что она имеет также место в задачах о минимуме на некотором линейном пространстве $\mathcal{M}$ функционала $I(u)$ вида

$$I(u) = E(u) - L(u), \tag{2.1}$$

где $E(u)$ — квадратичный функционал, порождаемый симметричной билинейной формой $E(u, v) = E(v, u)$: $E(u) = E(u, u)$ и имеющий смысл энергии, $L(u)$ — линейный функционал, задающий работу внешних сил. Варьируя (2.1), найдем, что стационарные точки $\breve{u}$ при произвольных $\delta u \in \mathcal{M}$ должны удовлетворять уравнению

$$2E(\breve{u}, \delta u) - L(\delta u) = 0. \tag{2.2}$$

Полагая в (2.2) $\delta u = \epsilon\breve{u}$, получим

$$2E(\breve{u}) = L(\breve{u}). \tag{2.3}$$

Соотношение (2.3) в теории упругости называют теоремой Клапейрона.

Из (2.3) следует, что значение функционала $I(u)$ в стационарной точке отличается знаком от значений в стационарной точке энергии

$$I(\breve{u}) = -E(\breve{u}). \tag{2.4}$$

Оценки нижней грани связаны с построением некоторых вспомогательных вариационных задач, более простых, чем исходная. При построении вспомогательных задач изменяется либо множество $\mathcal{M}$, либо функционал $I(u)$.

Изменение множества допустимых функций. Рассмотрим два множества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, одно из которых содержит $\mathcal{M}$, а другое содержится в $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}_2 \subset \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Предположим, что функционал $I(u)$ может быть доопределен на множестве $\mathcal{M}_1$. Обозначим через $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ нижние грани функционала

$I(u)$ на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Очевидно, что

$$\underline{I}_1 \leqslant \underline{I} \leqslant \underline{I}_2. \tag{2.5}$$

В качестве $\mathcal{M}_2$ можно брать, например, отдельные элементы множества $\mathcal{M}$. Тогда для $\underline{I}$ будем получать оценки типа

$$\underline{I} \leqslant I(u). \tag{2.6}$$

В случае функционалов вида (2.1) оценке нижней грани сверху соответствует, согласно (2.4), оценка энергии снизу, оценке нижней грани снизу – оценка энергии сверху.

Метод Рэлея–Ритца. Наиболее распространенным методом построения приближенного решения вариационных задач является метод Рэлея–Ритца. Метод Рэлея–Ритца заключается в следующем. В множестве $\mathcal{M}$ выбирается некоторое k-мерное подмножество $\mathcal{M}_k$, состоящее из элементов вида $a^1u_1 + \ldots + a^ku_k$, где $u_1, \ldots, u_k$ – фиксированные элементы из $\mathcal{M}$, $a^1, \ldots, a^k$ – числовые параметры. Функционал I на $\mathcal{M}_k$ становится функцией k переменных $a^1, \ldots, a^k$. Обозначим через $\breve{a}^1, \ldots, \breve{a}^k$ – стационарную точку (точки) этой функции, через $\breve{u}_k$ – элемент $\breve{a}^1u_1 + \ldots + \breve{a}^ku_k$. Элемент $\breve{u}_k$ можно рассматривать как некоторое приближение к стационарной точке функционала I на $\mathcal{M}$; кроме того, $\underline{I} \leqslant I(\breve{u}_k)$, и если $\breve{u}_k$ – минимизирующий элемент I на $\mathcal{M}_k$, то эта оценка – наилучшая среди всех элементов множества $\mathcal{M}_k$.

Выбирая в качестве $u_1, u_2, \ldots$ некоторый базис в функциональном пространстве H, содержащем множество $\mathcal{M}$, и увеличивая размерность подмножеств $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3 \subset \ldots$, можно получать все лучшие приближения к стационарной точке $\breve{u}$ и все более точные оценки нижней грани. Для широкого класса вариационных задач доказана сходимость этого процесса.

Метод размораживания связей. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано некоторой системой уравнений или неравенств. Отбрасывая часть из них, получим более широкое множество $\mathcal{M}_1$, и $\underline{I}_1 \leqslant \underline{I}$. Такой прием построения оценок снизу называется методом размораживания связей.

Изменение функционала. Другой прием построения оценок связан с изменением функционала. Строятся функционалы I_1 и I_2 такие, что на $\mathcal{M}$ $I_1 \leqslant I \leqslant I_2$. Тогда

$$\underline{I}_1 \leqslant \underline{I} \leqslant \underline{I}_2. \tag{2.7}$$

Этот способ эффективен, если нижние грани $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ функционалов I_1 и I_2 на $\mathcal{M}$ легко найти.

Пусть, например, функционал I представляет собой сумму двух функционалов

$$I = I' + I'',$$

каждый из которых ограничен снизу на $\mathcal{M}$, и минимумы их легко находятся. Тогда в качестве функционала I_1 можно взять функционал

$$I_1 = I' + \inf_{\mathcal{M}} I'' \leqslant I.$$

Нижняя оценка (2.7) принимает вид

$$\inf_{\mathcal{M}} I' + \inf_{\mathcal{M}} I'' \leqslant \inf_{\mathcal{M}} I. \tag{2.8}$$

Пример 1. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = E(u) - L(u), \qquad E(u) = \int_V \Lambda\left(x^i,\ u^\kappa,\ \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) d^n x,$$

$$L(u) = \int_V F_\kappa(x)\, u^\kappa\, d^n x + \int_{\partial V_f} f_\kappa(x) u^\kappa\, d^{n-1} x,$$

где ∂V_f – часть границы ∂V области V, на которой заданы "внешние поверхностные силы" f_κ.

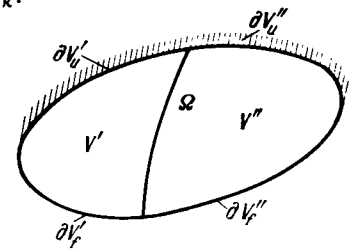


Рис. 11.

Минимум ищется по всем функциям u^κ, принимающим на поверхности $\partial V_u = \partial V - \partial V_f$ заданные значения

$$u^\kappa = \tilde{u}^\kappa(x^i). \tag{2.9}$$

Разобьем область V на две подобласти V' и V'' поверхностью Ω (рис. 11). Поверхность Ω разделит поверхность ∂V_u на две части $\partial V_u'$ и $\partial V_u''$ и поверхность ∂V_f – на части $\partial V_f'$ и $\partial V_f''$. Граница области V' состоит из поверхностей $\partial V_f'$, $\partial V_u'$ и Ω, области V'' – из поверхностей $\partial V_u''$, $\partial V_f''$ и Ω. Определим на Ω некоторые функции $p_\kappa(x)$ и составим функционалы

$$I'(u) = E'(u) - L'(u), \quad I''(u) = E''(u) - L''(u); \tag{2.10}$$

$$E'(u) = \int_{V'} \Lambda\, d^n x, \quad L'(u) = \int_{V'} F_\kappa u^\kappa\, d^n x + \int_{\partial V_f'} f_\kappa u^\kappa\, d^{n-1} x + \int_\Omega p_\kappa u^\kappa\, d^{n-1} x,$$

$$E''(u) = \int_{V''} \Lambda\, d^n x, \quad L''(u) = \int_{V''} F_\kappa u^\kappa\, d^n x + \int_{\partial V_f''} f_\kappa u^\kappa\, d^{n-1} x -$$

$$- \int_\Omega p_\kappa u^\kappa\, d^{n-1} x. \tag{2.11}$$

Из определения I' и I'' следует, что

$$I' + I'' = I,$$

Согласно (2.8) для I получим оценку

$$\underline{I}' + \underline{I}'' \leqslant \underline{I}. \tag{2.12}$$

Если минимальные значения $\underline{I}'$, $\underline{I}''$ и $\underline{I}$ связаны со значениями энергии на соответствующих минимизирующих элементах, то неравенство (2.12) дает оценку энергии тела через энергии его частей. В различных разделах механики эта оценка приобретает разнообразные интерпретации.

Существенные и несущественные ограничения. В связи с оценками нижней грани возникает важное понятие существенных и несущественных

ограничений. Ограничения, добавление которых не меняет нижней грани функционала, называются несущественными. В противном случае говорят, что ограничение существенно. Приведем примеры несущественных ограничений.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = \int_0^a \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \to \inf \tag{2.13}$$

на всех непрерывных и кусочно дифференцируемых на отрезке $[0, a]$ функциях $u(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = 1, \quad u(a) = 0. \tag{2.14}$$

Минимум функционала $I(u)$ без ограничений (2.14) равен нулю. Накладывание ограничений (2.14) увеличивает нижнюю грань. Действительно, любую функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям (2.14), можно представить в виде

$$u(x) = \frac{a-x}{a} + v(x), \tag{2.15}$$

где функция $v(x)$ подчинена ограничениям

$$v(0) = v(a) = 0. \tag{2.16}$$

Зависимость функционала I от v дается формулой

$$I(v) = \frac{1}{a} + \int_0^a \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx. \tag{2.17}$$

Следовательно, нижняя грань функционала $I(u)$ ограничена снизу числом $1/a$, и ограничения (2.14) существенны для $I(u)$.

Заметим, что $\underline{I} = 1/a$. Это вытекает из оценки сверху $\underline{I} \leqslant I(v)\,|_{v=0} = 1/a$.

Добавим к (2.14) ограничение

$$\frac{du}{dx} = c_0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{2.18}$$

Покажем, что оно несущественно.

После замены (2.14) ограничение (2.18) примет вид

$$\frac{dv}{dx} = c = c_0 + a^{-1} \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.19}$$

Построим последовательность функций $\{v_n(x)\}$ (рис. 12) (для определенности принято, что $c > 0$):

$$v_n(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leqslant x \leqslant a_n/c, \\ -cx + 2a_n, & a_n/c \leqslant x \leqslant 2a_n/c, \\ 0, & 2a_n/c \leqslant x \leqslant a. \end{cases} \quad \{a_n\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

Функции $v_n(x)$ удовлетворяют ограничениям (2.16) и (2.19), и на них $I(v_n) = 1/a + 2c^2 a_n \to 1/a$ при $n \to \infty$. Следовательно, нижняя грань функцио-

нала $I(u)$ при накладывании дополнительного ограничения (2.19) не меняется и остается равной $1/a$.

Положим теперь $a = +\infty$. При этом под вторым ограничением (2.14) будем понимать условие

$$u(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Тогда ограничения (2.14) также становятся несущественными. Для того

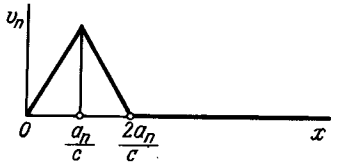


Рис. 12.

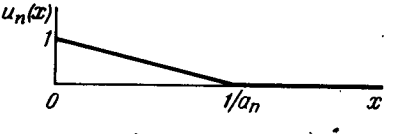


Рис. 13.

чтобы в этом убедиться, достаточно взять последовательность $u_n(x)$ (рис. 13):

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - a_n x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/a_n, \\ 0, & 1/a_n \leqslant x, \end{cases} \quad \{a_n\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

На ней $I(u_n) = a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Про несущественные ограничения говорят, что "функционал не чувствует ограничения" или "функционал не удерживает ограничения".

Оценка близости приближенного и точного решений. Пусть для нижней грани I строго выпуклого функционала $I(u)$ построена достаточно узкая вилка

$$a \leqslant \underline{I} \leqslant b,$$

и пусть найден элемент u такой, что значение функционала на нем заключено в тех же пределах

$$a \leqslant I(u) \leqslant b.$$

Что можно сказать о близости элемента u и минимизирующего элемента $\breve{u}$? Различие u и $\breve{u}$ по разнице значений на них функционала удается оценить для сильно выпуклых функционалов. Функционал $I(u)$ называется сильно выпуклым, если существует такой положительный функционал $B(u)$, что

$$I\left(\frac{u+v}{2}\right) + B\left(\frac{u-v}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\Big(I(u) + I(v)\Big). \tag{2.20}$$

Равенство (1.35) показывает, что к числу сильно выпуклых принадлежат квадратичные функционалы, причем для них $B(u) = E(u)$.

В случае сильно выпуклых функционалов можно охарактеризовать близость элементов u и $\breve{u}$ в терминах функционала $B(u)$. Положим в (2.20) $v = \breve{u}$:

$$I\left(\frac{u+\breve{u}}{2}\right) + B\left(\frac{u-\breve{u}}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(I(u) + I(\breve{u})\Big). \tag{2.21}$$

Уменьшим левую часть в (2.21), заменив $I\left(\frac{u+\check{u}}{2}\right)$ на $I(\check{u})$. Получим

$$B\left(\frac{u-\check{u}}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(I(u)-I(\check{u})\right). \tag{2.22}$$

Таким образом, если значение функционала на приближенном решении u близко к нижней грани, то мала и мера разности между приближенным и точным решением $B\left(\frac{u-\check{u}}{2}\right)$. Для квадратичных функционалов $B\left(\frac{u-\check{u}}{2}\right)=E\left(\frac{u-\check{u}}{2}\right)$ и (2.22) дает энергетическую оценку погрешности приближенного решения.

§ 3. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Схема построения двойственных вариационных задач. Давно было замечено, что одна и та же система уравнений может быть системой уравнений Эйлера для разных функционалов. Например, уравнения аналитической механики систем с конечным числом степеней свободы могут быть получены из двух различных вариационных принципов: принципа Гамильтона–Остроградского и принципа Гамильтона–Пуанкаре. В других разделах механики также предлагались различные вариационные принципы для одних и тех же систем уравнений: принцип Дирихле и принцип Томсона в механике идеальной несжимаемой жидкости и в электростатике, принцип Лагранжа, принцип Кастильяно и принцип Рейсснера в теории упругости, принцип максимума Понтрягина в вариационных задачах с ограничениями и т.п. На протяжении последних двух десятилетий было осознано, что в основе построения всех таких принципов лежит одна простая общая идея – идея двойственности. Ее изложению посвящен настоящий параграф.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала $I(u)$ на некотором множестве $\mathcal{M}$:

$$\underline{I} = \inf_{u\in\mathcal{M}} I(u). \tag{3.1}$$

Предположим, что можно построить функционал $\Phi(u, v)$ двух переменных u и v, $u\in\mathcal{M}$, $v\in\mathcal{N}$, такой, что

$$I(u) = \sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v). \tag{3.2}$$

Тогда исходную вариационную задачу можно представить как задачу минимаксную

$$\underline{I} = \inf_{u\in\mathcal{M}} \sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v). \tag{3.3}$$

Примем, что в (3.3) можно изменить последовательность вычисления нижней и верхней граней:

$$\underline{I} = \sup_{v\in\mathcal{N}} \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v). \tag{3.4}$$

Пусть функционал $\Phi(u, v)$ подобран так, что $\inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v)$ легко находится. Обозначим его через $J(v)$:

$$J(v) = \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v). \tag{3.5}$$

Исходная задача о вычислении нижней грани функционала $I(u)$ эквивалентна задаче о построении верхней грани функционала $J(v)$ на множестве $\mathcal{N}$ элементов v

$$\sup_{v\in\mathcal{N}} J(v) = \underline{I}. \tag{3.6}$$

Вариационную задачу (3.6) называют двойственной к исходной вариационной задаче (3.1).

Можно строить различные двойственные вариационные задачи, выбирая по-разному функционал $\Phi(u, v)$ и множество $\mathcal{N}$. Этот выбор ограничен двумя условиями. Во-первых, должна быть обеспечена возможность менять последовательность вычисления нижней и верхней граней:

$$\inf_{u\in\mathcal{M}} \sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v) = \sup_{v\in\mathcal{N}} \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v). \tag{3.7}$$

Во-вторых, функционал $J(v)$ (3.5) должен вычисляться явно.

В перечисленных в начале параграфа вариационных принципах последнее условие выполняется за счет того, что функционал $\Phi(u, v)$ берется линейным по v.

Для справедливости (3.7) установлены различной степени общности достаточные условия, однако проверить накладываемые в них требования иногда бывает не проще, чем непосредственно исследовать возможность перестановки нижней и верхней граней. Как правило, равенство (3.7) можно проверить следующим образом.

Прежде всего покажем, что для любого функционала $\Phi(u, v)$ и любых непустых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$

$$\sup_{v\in\mathcal{N}} \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v) \leqslant \inf_{u\in\mathcal{M}} \sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v). \tag{3.8}$$

Действительно,

$$\inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v) \leqslant \Phi(u, v). \tag{3.9}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент u в правой части (3.9). Неравенство (3.9) тогда означает, что функционал от v $\inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v)$ не превосходит функционала от v $\Phi(u, v)$. Поэтому

$$\sup_{v\in\mathcal{N}} \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v) \leqslant \sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v). \tag{3.10}$$

Согласно (3.10) функционал от u $\sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(u, v)$ ограничен снизу числом $\sup_{v\in\mathcal{N}} \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u, v)$. Следовательно, оно ограничивает снизу и нижнюю грань этого функционала, и имеет место неравенство (3.8).

Неравенство (3.8) можно переписать также в форме

$$\sup_{v\in\mathcal{N}} J(v) \leqslant \inf_{u\in\mathcal{M}} I(u). \tag{3.11}$$

Обозначим через $\check{u}$ минимизирующий элемент исходной вариационной задачи (3.1), а через $\check{v}$ – элемент, на котором достигается

$$\sup_{v\in\mathcal{N}} \Phi(\check{u}, v).$$

Используя (3.11), получим оценку

$$J(\check{v}) \leqslant \sup_{v \in \mathcal{N}} J(v) \leqslant \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) = I(\check{u}). \tag{3.12}$$

Как правило, удается сравнить $J(\check{v})$ и $I(\check{u})$, и если оказывается, что $I(\check{u}) = J(\check{v})$, то и $\sup_{v \in \mathcal{N}} J(v) = \underline{I}$.

Замечательно, что двойственный вариационный принцип (3.6) позволяет легко строить оценки $\underline{I}$ снизу. Напомним, что построение оценок $\underline{I}$ сверху тривиально – достаточно вычислять значения функционала $I(u)$ на элементах множества $\mathcal{M}$. Тогда из определения нижней грани следует, что

$$\underline{I} \leqslant I(u).$$

Если же построена двойственная вариационная задача, то оценки $\underline{I}$ снизу получаются столь же просто. Достаточно вычислять значения функционала $J(v)$ на элементах множества $\mathcal{N}$

$$J(v) \leqslant \underline{I}.$$

В некоторых случаях не удается указать линейный по v функционал $\Phi(u, v)$ так, чтобы выполнялось равенство (3.2), и можно гарантировать лишь справедливость неравенства

$$\sup_{v} \Phi(u, v) \leqslant I(u).$$

Из (3.8) тогда получим

$$\sup_{v \in \mathcal{N}} J(v) \leqslant \underline{I}.$$

Поэтому сохраняется возможность строить оценки $\underline{I}$ снизу.

Существенную роль в конструировании функционала $\Phi(u, v)$ играют преобразования Юнга – Фенхеля и другие понятия выпуклого анализа, к изложению которых мы переходим.

Выпуклые функции. Рассмотрим функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$, которая принимает в точках R_n либо конечные значения, либо значение $+\infty$. Множество точек $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1} с координатами $x^1, \ldots, x^n, y$, определенными условием $y \geqslant f(x^1, \ldots, x^n)$, называют надграфиком (эпиграфом) функции $f(x)$ и обозначают через $\operatorname{epi} f$. Множество точек R_n, в которых $f(x) < +\infty$, называют эффективным множеством и обозначают $\operatorname{dom} f$. Будем считать, что множество $\operatorname{dom} f$ есть непустая подобласть R_n, во всех точках $\operatorname{dom} f$ функция $f(x)$ непрерывна и $f(x)$ ограничена снизу на $\operatorname{dom} f$.

Условия: $\operatorname{epi} f$ – выпуклое множество и $f(x)$ – выпуклая функция эквиваленты. Из непрерывности $f(x)$ следует, что $\operatorname{epi} f$ – замкнутое множество. Если $f(x)$ – выпуклая функция, то $\operatorname{dom} f$ – выпуклое множество.

Если выпуклая функция задана на некотором выпуклом множестве $V \subset R_n$, то ее можно продолжить на все пространство R_n с сохранением выпуклости, положив $f(x) = +\infty$ вне V.

Пример 1. Выпуклыми являются функции: $|x|$, x^2, $e^{\alpha x}$, линейная функция $a_i x^i$, положительно определенная квадратичная форма $a_{ij} x^i x^j$, однородная функция

первой степени $\sqrt{a_{ij}x^i x^j}$, функции

$$f(x)=\begin{cases}-\log x, & 0<x,\\ +\infty, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^p, & 0\leqslant x,\ 1\leqslant p<+\infty,\\ +\infty, & x<0.\end{cases}$$

Имеется ряд операций над выпуклыми функциями, сохраняющих выпуклость.

1. Линейная комбинация $a_1 f_1(x)+\ldots+a_m f_m(x)$ выпуклых функций $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ с положительными коэффициентами есть выпуклая функция.

2. Суперпозиция $\varphi(f(x))$, где $\varphi(y)$ – неубывающая выпуклая функция одного переменного, $f(x)$ – выпуклая функция, является выпуклой функцией.

3. Функция

$$f(x)=\inf_{x=x_1+\ldots+x_m}(f_1(x_1)+\ldots+f_m(x_m)),$$

где $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ – выпуклые функции, $x\in R_n$, также выпукла. Она называется конволюцией $f_1,\ldots,f_m$ и обозначается через $f_1\oplus\ldots\oplus f_m$. Термин конволюция связан с тем, что для двух функций операция напоминает интегральную свертку.

4. Поточечная верхняя грань нескольких выпуклых функций

$$f(x)=\sup(f_1(x),\ldots,f_m(x))$$

есть выпуклая функция.

Удобным критерием выпуклости является следующее утверждение.

Лемма 1. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$, $x\in R_n$, была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух точек x_1 и x_2 выполнялось неравенство

$$0\leqslant\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_1}-\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_2}\right)(x_1^i-x_2^i). \tag{3.13}$$

Доказательство. Доказательство проведем при дополнительном предположении, что f дважды непрерывно дифференцируема.

Необходимость. Возьмем выпуклую дважды дифференцируемую функцию одной переменной $\varphi(\tau)$:

$$\varphi\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\varphi(\tau_1)+\varphi(\tau_2)). \tag{3.14}$$

Обозначим в (3.14) $\tau=\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)$, $\Delta\tau=\frac{1}{2}(\tau_2-\tau_1)$. Считая $\Delta\tau$ малым, разложим правую часть в ряд по $\Delta\tau$ и удержим члены до второго порядка малости включительно

$$\varphi(\tau)\leqslant\frac{1}{2}\left(\varphi(\tau)-\frac{d\varphi}{d\tau}\Delta\tau+\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}(\Delta\tau)^2+\varphi(\tau)+\frac{d\varphi}{d\tau}\Delta\tau+\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}(\Delta\tau)^2\right).$$

Отсюда $0 \leqslant d^2\varphi/d\tau^2$. Следовательно, производная выпуклой функции $\varphi(\tau)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau) = f(x^i + \tau y^i)$ одной переменной τ. Функция $\varphi(\tau)$ выпукла. Так как $d\varphi/d\tau\big|_{\tau=0} \leqslant d\varphi/d\tau\big|_{\tau=1}$, то

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x y^i \leqslant \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x+y} y^i. \tag{3.15}$$

Полагая в (3.15) $x = x_1$, $y = x_2 - x_1$, придем к (3.13).

Достаточность. Пусть имеет место (3.13). Для некоторого $0 < \alpha < 1$ рассмотрим выражение

$$\Delta = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(\alpha x + (1-\alpha) y).$$

Перепишем Δ в виде

$$\Delta = \alpha(f(x) - f(x + (1-\alpha)(y-x))) + (1-\alpha)(f(y) - f(y + \alpha(x-y))).$$

Применим теорему Лагранжа о конечных приращениях

$$\Delta = -\alpha \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x+\tau_1(1-\alpha)(y-x)} (1-\alpha)(y^i - x^i) -$$

$$- (1-\alpha) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{y+\tau_2\alpha(x-y)} \alpha(x^i - y^i).$$

Здесь $0 \leqslant \tau_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$. Положим $x_1 = x + \tau_1(1-\alpha)(y-x)$, $x_2 = y + \tau_2\alpha(x-y)$. Так как $x_1 - x_2 = (x-y)[(1-\tau_1)(1-\alpha) + (1-\tau)\alpha]$ и выражение в квадратных скобках больше нуля, то

$$\Delta[(1-\tau_1)(1-\alpha) + (1-\tau_2)\alpha] = \alpha(1-\alpha)\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_2}\right)(x_1^i - x_2^i),$$

и в силу (3.13) величина $\Delta \geqslant 0$. Это и доказывает выпуклость $f(x)$.

Условие строгой выпуклости дифференцируемой функции $f(x)$ эквивалентно строгому неравенству

$$0 < \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_2}\right)(x_1^i - x_2^i) \text{ при } |x_1 - x_2| \neq 0. \tag{3.16}$$

Для приложений особенно полезен следующий критерий выпуклости, непосредственно вытекающий из леммы 1.

Лемма 2. Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая функция была выпукла в некоторой выпуклой области, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке x этой области была неотрицательна квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \bar{x}^i \bar{x}^j \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Полагая в (3.13) $x_2^i = x_1^i + \epsilon\bar{x}^i$ и устремляя ϵ к нулю, получим, что (3.17) есть необходимое условие выпуклости. Обрат-

но, пусть имеет место (3.17). Тогда

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 f(x^k + t\bar{x}^k)}{\partial x^i \partial x^j} \bar{x}^i \bar{x}^j \, dt \geqslant 0.$$

Этот интеграл можно переписать в виде

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(x^k + t\bar{x}^k)}{\partial x^i} \bar{x}^i \right) dt = \left(\frac{\partial f(x^k + \bar{x}^k)}{\partial x^k} - \frac{\partial f(x^k)}{\partial x^k} \right) \bar{x}^k. \qquad (3.18)$$

Полагая $\bar{x}^k = x_2^k - x_1^k$, $x^k = x_1^k$, из (3.18) получим (3.13).

Преобразование Лежандра. Возьмем в R_n дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$ и рассмотрим систему нелинейных уравнений относительно x^i

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = x_i^*, \qquad (3.19)$$

где x_i^* — заданные числа. Если для некоторых значений x_i^* решение системы уравнений (3.19) есть x^i, и в точке x^i гессиан $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right|$ отличен от нуля, то по теореме о неявных функциях существует окрестность O этой точки, в которой между x^i и x_i^* имеется взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие

$$x^i = x^i(x_k^*). \qquad (3.20)$$

Составим величину

$$f^\times = x_k^* x^k - f(x). \qquad (3.21)$$

Будем считать, что в (3.21) x^i выражены через x_k^* при помощи соотношений (3.20). Тогда $f^\times$ станет функцией от x_k^*. Она называется преобразованием Лежандра функции $f(x)$.

Пример 2. Вычислим преобразование Лежандра квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j$. Система уравнений (3.19) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = a_{ij} x^j = x_i^*. \qquad (3.22)$$

Будем считать, что $\det \| a_{ij} \| \neq 0$. Тогда решение уравнений (3.22) запишется в форме $x^i = a^{(-1)\,ij} x_j^*$.

Для $f^\times(x^*)$ получим

$$f^\times(x^*) = x_i^* x^i - \tfrac{1}{2} a_{ij} x^i x^j = \tfrac{1}{2} x_i^* x^i = \tfrac{1}{2} a^{(-1)\,ij} x_i^* x_j^*.$$

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{1}{p} |x|^p$, $p > 1$. Легко убедиться, что $f^\times(x^*) = \frac{1}{q} |x^*|^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Если $f = \frac{a}{p} |x|^p$, $a > 0$, то $f^\times = a^{1-q} \frac{1}{q} |x^*|^q$.

Для функции $f = \frac{a}{p} (x_i x^i)^{p/2}$ преобразование Лежандра дается формулой $f^\times = a^{1-q} \frac{1}{q} (x_i^* x^{*i})^{q/2}$.

По построению преобразование Лежандра определено только в малой окрестности точки x. Однако если функция строго выпукла в R_n, то преобразование Лежандра можно сделать во всех точках R_n. Действительно, между $\partial f/\partial x^i$ и x^i имеется взаимно однозначное соответствие: если бы нашлись две различные точки x_1 и x_2, в которых значения $\partial f/\partial x^i$ одинаковы, то $((\partial f/\partial x^i)|_{x_1} - (\partial f/\partial x^i)|_{x_2})(x_1^i - x_2^i) = 0$, а это противоречит (3.16).

Пример 2 показывает, что функция $f(x)$ может быть невыпукла (если матрица a_{ij} имеет как положительные, так и отрицательные собственные значения), однако преобразование Лежандра определено во всем пространстве R_n.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Уравнение (3.19) принимает форму $\pm 1 = x^*$ и однозначно неразрешимо. Для функции $|x|$ преобразование Лежандра не имеет смысла.

Пример 5. Преобразование Лежандра не определено для произвольной функции первой степени однородности, так как для нее тождественно $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right| = 0$. Действительно, дифференцируя по x^i тождество Эйлера для однородной функции первой степени

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = f,$$

получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^j = 0. \tag{3.23}$$

Равенство (3.23) означает, что строки матрицы $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\|$ линейно зависимы и, следовательно, $\det \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\| = 0$.

Отсутствие однозначной неразрешимости можно усмотреть непосредственно из системы уравнений (3.19) на примере функции $f = \sqrt{x_i x^i}$. Для этой функции

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x^k}} = x_i^*. \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует, что x_i^* лежат на сфере единичного радиуса $x_i^* x^{*i} = 1$, поэтому между x^i и x_i^* не может быть взаимно однозначного соответствия.

Преобразование Юнга – Фенхеля. Рассмотрим в R_n функцию $f(x)$ и построим по ней функцию $f^*(x^*)$ по правилу

$$f^*(x^*) = \sup_x (x_i^* x^i - f(x)). \tag{3.25}$$

Функция $f^*(x^*)$ называется преобразованием Юнга – Фенхеля функции $f(x)$. Определение (3.25) можно переписать также в виде

$$-f^*(x^*) = \inf_x (f(x) - x_i^* x^i). \tag{3.26}$$

Равенство (3.26) имеет простой геометрический смысл. Построим в R_{n+1} график функции $f(x)$: $y = f(x)$ и график линейной функции $y = x_i^* x^i$ (рис. 14). Величина $-f^*(x^*)$ есть минимальное расстояние между ними по вертикали.

Пусть функция $f(x)$ строго выпукла и дифференцируема. Тогда нижняя грань в (3.26) достигается в единственной точке, и в этой точке

$$f^* = x_i^* x^i - f(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = x_i^*.$$

Таким образом, для строго выпуклых дифференцируемых функций преобразование Юнга – Фенхеля совпадает с преобразованием Лежандра. Однако преобразование Юнга – Фенхеля определено и для функций, для которых преобразование Лежандра может не иметь смысла.

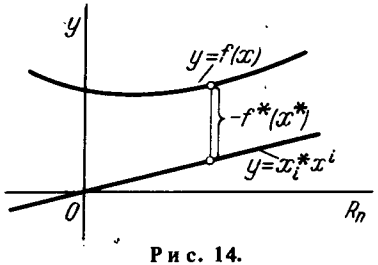


Рис. 14.

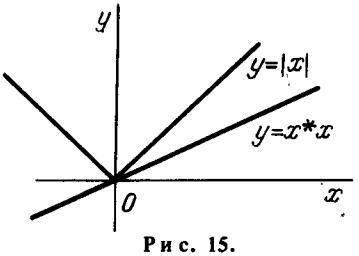


Рис. 15.

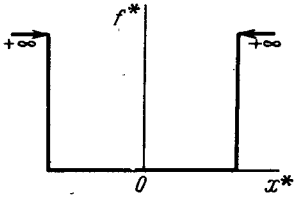


Рис. 16.

Пример 6. Рассмотрим преобразование Юнга – Фенхеля функции $f(x) = |x|$. Вычислим $\inf(|x| - x^*x)$. Из рис. 15 видно, что $\inf(|x| - x^*x) = 0$ при $-1 < x^* < 1$ и достигается при $x = 0$. При $x^* = \pm 1$ $\inf(|x| - x^*x) = 0$ и достигается соответственно на положительной и отрицательной полуосях x. При $x^* < -1$ и $x^* > +1$ функция $|x| - x^*x$ стремится к $-\infty$ соответственно при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Итак,

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & |x^*| \leqslant 1, \\ +\infty, & 1 < |x^*|. \end{cases}$$

Символический график функции f^* представлен на рис. 16.

Пример 7. Аналогично вычисляется преобразование Юнга – Фенхеля однородной функции первой степени вида $f = \sqrt{x_i x^i}$:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & x_i^* x^{*i} \leqslant 1, \\ +\infty, & 1 < x_i^* x^{*i}. \end{cases}$$

Преобразование Юнга – Фенхеля обладает рядом замечательных свойств.

1. *Для любой функции $f(x)$ ее преобразование Юнга – Фенхеля есть выпуклая функция.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. По определению (3.25)

$$f^*(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*) = \sup_x [(\alpha x_i^* + (1-\alpha)z_i^*)x^i - f(x)] =$$

$$= \sup_x [\alpha(x_i^* x^i - f(x)) + (1-\alpha)(z_i^* x^i - f(x))].$$

Используем теперь оценку $\sup(f+g) \leqslant \sup f + \sup g$. Получим

$$f(\alpha x^* + (1-\alpha)z^*) \leqslant \alpha \sup_x (x_i^* x^i - f(x)) + (1-\alpha) \sup_x (z_i^* x^i - f(x)) =$$

$$= \alpha f^*(x^*) + (1-\alpha) f^*(z^*),$$

что и требовалось.

Пример 8. Рассмотрим термодинамические потенциалы идеального сжимаемого газа. Модель идеального сжимаемого нетеплопроводного газа задается плотностью внутренней энергии $U(\rho, S)$. Будем считать, что задача Коши для системы уравнений идеального сжимаемого газа корректна. Для выполнения этого требования достаточно, чтобы система уравнений была гиперболической. Нетрудно проверить, что условие гиперболичности сводится к условию возрастания давления $p = \rho^2 \partial U(\rho, S)/\partial \rho$ с ростом плотности. Таким образом, плотность внутренней энергии должна удовлетворять ограничению

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial U(\rho, S)}{\partial \rho} > 0. \tag{3.27}$$

Возможны две интерпретации неравенства (3.27). Введем удельный объем $\vartheta = 1/\rho$. После умножения на ρ^2 неравенство (3.27) можно переписать в терминах производной по ϑ:

$$\frac{\partial^2 U(\vartheta, S)}{\partial \vartheta^2} > 0. \tag{3.28}$$

Неравенство (3.28) означает, что функция $U(\vartheta, S)$ при каждом фиксированном значении S есть выпуклая функция удельного объема ϑ.

Неравенство (3.28) после деления на ρ можно переписать также в другом виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho U(\rho, S) > 0. \tag{3.29}$$

Здесь использовано, что для любой функции $f(\rho)$ имеет место тождество

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{df(\rho)}{d\rho} = \frac{d^2}{d\rho^2} \rho f(\rho).$$

Согласно неравенству (3.29) функция $\rho U(\rho, S)$ при каждом фиксированном S выпукла по ρ.

Для примера приведем выражение для плотности внутренней энергии совершенного газа

$$U = a \rho^{\gamma - 1} e^{S/c_v}. \tag{3.30}$$

Здесь a, γ, c_v – положительные постоянные, $\gamma > 1$. Из (3.30) видно, что функция $U(\rho, S)$ не выпукла по ρ (при $\gamma < 2$), но функция $\rho U(\rho, S)$ – выпуклая функция ρ. Плотность внутренней энергии совершенного газа в переменных ϑ, S имеет вид $U = a \dfrac{1}{\vartheta^{\gamma-1}} e^{S/c_v}$ и является выпуклой функцией ϑ, так как функция $f(x) = b/x^r$, $r > 0$, $b > 0$, $x > 0$ есть выпуклая функция x.

На внутреннюю энергию естественно наложить также требование о монотонном росте U с ростом S (условие положительности абсолютной температуры $T = \partial U/\partial S$) и условие монотонного увеличения температуры с ростом S ($\partial T/\partial S = \partial^2 U/\partial S^2 > 0$). Тогда U при каждом фиксированном ϑ будет выпуклой функцией S. Область изменения ϑ и S есть выпуклое множество $\vartheta \geqslant 0$, $S \geqslant 0$. Можно экстраполировать U на все ϑ, S с сохранением свойства выпуклости, если положить

$$\bar{U}(\vartheta, S) = \begin{cases} U(\vartheta, S), & \vartheta \geqslant 0,\ S \geqslant 0, \\ +\infty \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Введем свободную энергию $F(\vartheta, T)$ по формуле

$$F(\vartheta, T) = \inf_{S \geqslant 0} (U(\vartheta, S) - TS).$$

Это определение можно также переписать при помощи функции $\bar{U}$ в терминах минимума по всем значениям S:

$$F(\vartheta, T) = \inf_{S} (\bar{U}(\vartheta, S) - TS).$$

Обозначим преобразование Юнга – Фенхеля функции $\bar{U}(\vartheta, S)$ по S через $U^*(\vartheta, S^*)$, по ϑ через $U^*(\vartheta^*, S)$, по ϑ и S через $U^*(\vartheta^*, S^*)$. Свободная энергия отличается знаком от преобразования Юнга – Фенхеля $\bar{U}$ по S:

$$F(\vartheta, T) = -U^*(\vartheta, S^*)\Big|_{S^* = T}.$$

Поэтому $F(\vartheta, T)$ – вогнутая[1]) функция температуры. Отметим, что при рассмотрении приращения ΔF, вызванного малыми приращениями аргументов, коэффициент в квадратичном члене по приращению температуры в ΔF, в силу вогнутости F, будет отрицательным.

В случае совершенного газа свободная энергия имеет вид

$$F(\vartheta, T) = c_v T\left(1 - \ln\left(\frac{c_v}{a}\,\vartheta^{\gamma-1}T\right)\right).$$

Эта функция выпукла по ϑ и ее график в окрестности каждой точки устроен как седло.

Энтальпия (или теплосодержание) определяется формулой

$$i(p, S) = \inf_{\vartheta}(\bar{U}(\vartheta, S) + p\vartheta) = -U^*(\vartheta^*, S)\Big|_{\vartheta^* = -p}.$$

Аргумент p у энтальпии отличается знаком от двойственной переменной ϑ^* в связи с тем, что обычно U – убывающая функция ϑ и $\vartheta^* = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} < 0$, а $p = -\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} > 0$.

Согласно своему определению энтальпия есть вогнутая функция p.

Для совершенного газа

$$i(p, S) = \gamma\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\left(ae^{S/c_v}\right)^{\frac{1}{\gamma}}p^{\frac{1}{\gamma'}},\quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1.$$

Термодинамический потенциал Гиббса (химический потенциал) вводится соотношением

$$\Psi(p, T) = \inf_{\vartheta, S}(\bar{U}(\vartheta, S) + p\vartheta - TS) = -U^*(\vartheta^*, S^*)\Big|_{\substack{S^* = T \\ \vartheta^* = -p}}.$$

Термодинамический потенциал Гиббса есть вогнутая функция по p и T.

В случае совершенного газа

$$\Psi(p, T) = c_v T\left\{\ln\left[\frac{a}{c_v T}\left(\frac{p}{c_v T}\right)^{\gamma-1}\right] + \gamma - (\gamma - 1)\ln(\gamma - 1)\right\}.$$

Для выпуклых функций $F(\vartheta, T)$ давление $p = -\partial F/\partial \vartheta$ взаимно однозначно связано с удельным объемом ϑ при каждом значении температуры T. Имеется важный класс моделей, в которых вводятся невыпуклые функции $F(\vartheta, T)$. Это модели, описывающие фазовые переходы. В таких моделях одному значению p может соответствовать несколько значений ϑ. Типичный пример – газ Ван-дер-Ваальса, для которого

$$F(\vartheta, T) = f(T) - \frac{c}{\vartheta} - RT\ln\left(\frac{\vartheta}{b} - 1\right),$$

где c, R, b – положительные постоянные, $f(T)$ – некоторая функция температуры.

[1]) Вогнутыми называют функции $f(x)$, для которых $-f(x)$ является выпуклой функцией x.

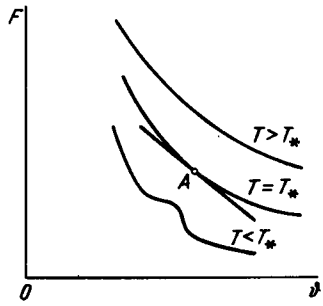


Рис. 17.

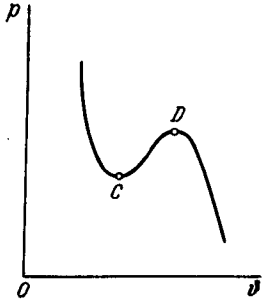


Рис. 18.

Схематический график свободной энергии газа Ван-дер-Ваальса представлен на рис. 17. При больших значениях T свободная энергия выпукла по ϑ (верхняя кривая). При уменьшении T для некоторой температуры $T = T_*$ возникает точка перегиба A, в которой производная $F_{\vartheta\vartheta}$ обращается в нуль (средняя кривая). При $T < T_*$ свободная энергия имеет участок невыпуклости, а каждому значению p отвечает от одного до трех значений ϑ (рис. 18). Левая часть кривой (левее точки C) соответствует жидкости, правая часть (правее точки D) – пару. Участок CD в некотором смысле не реализуется.

Продолжим рассмотрение свойств преобразования Юнга – Фенхеля.

2. *Для любой функции $f(x)$ и любых x и x^* имеет место неравенство*

$$x_i^* x^i \leqslant f(x) + f^*(x^*). \tag{3.31}$$

Это неравенство следует непосредственно из определения (3.25). Его называют неравенством Юнга – Фенхеля.

Обозначим через $f^{**}(x)$ преобразование Юнга – Фенхеля функции $f^*(x^*)$.

3. *Для любой функции $f(x)$ справедливо неравенство*

$$f^{**}(x) \leqslant f(x). \tag{3.32}$$

Доказательство. Запишем определение $f^{**}(x)$ через $f(x)$:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*}(x^i x_i^* - f^*(x^*)) = \sup_{x^*}[x^i x_i^* + \inf_z (f(z) - x_i^* z^i)].$$

Увеличим inf, заменив его значением функции $f(z) - x_i^* z^i$ в точке $z^i = x^i$. Тогда

$$f^{**}(x) \leqslant \sup_{x^*} f(x) = f(x).$$

4. *Для того чтобы имело место равенство*

$$f^{**}(x) = f(x), \tag{3.33}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была выпуклой и полунепрерывной снизу.

Доказательство проведем в случае непрерывных функций $f(x)$. *Необходимость.* Если $f^{**}(x) = f(x)$, то по свойству 1 $f(x)$ выпукла.

Достаточность. Пусть $f(x)$ выпукла. Согласно свойству 3, $f^{**}(x) \leqslant f(x)$. Допустим, что найдется точка x_0, в которой

$$f^{**}(x_0) < f(x_0). \tag{3.34}$$

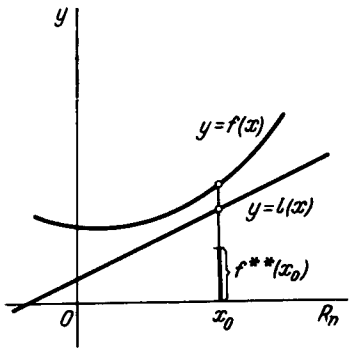


Рис. 19.

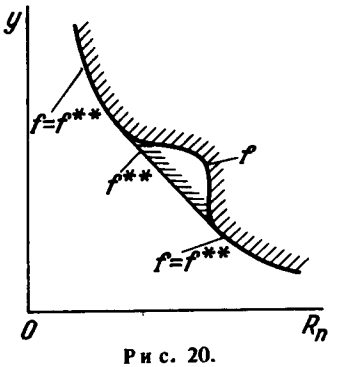


Рис. 20.

Построим линейную функцию $l(x)$ такую, что $l(x_0) > f^{**}(x_0)$ и $f(x) > l(x)$ (рис. 19)[1]. Запишем $l(x)$ в виде

$$l(x) = l(x_0) + z_i^* (x^i - x_0^i).$$

Так как

$$f(x) > l(x) = l(x_0) + z_i^* (x^i - x_0^i) > f^{**}(x_0) + z_i^* (x^i - x_0^i),$$

имеем

$$z_i^* x^i - f(x) < z_i^* x_0^i - f^{**}(x_0).$$

Отсюда

$$f^*(z^*) = \sup_x (z_i^* x^i - f(x)) < z_i^* x_0^i - f^{**}(x_0). \qquad (3.35)$$

Неравенство (3.35) противоречит неравенству Юнга – Фенхеля для функций f^* и f^{**}.

$$x_i^* x^i \leqslant f^*(x^*) + f^{**}(x).$$

Следовательно, исходная предпосылка (3.34) ложна, и $f^{**}(x) = f(x)$ при всех x.

5. *Для произвольной* (не обязательно выпуклой) *функции* $f(x)$ *функция* $f^{**}(x)$ *есть максимальная выпуклая функция, не превосходящая* $f(x)$.

Максимальную выпуклую функцию можно найти следующим образом: следует взять надграфик $\operatorname{epi} f$ функции f (рис. 20, надграфик заштрихован) и построить минимальное выпуклое множество, содержащее $\operatorname{epi} f$, оно и будет надграфиком максимальной выпуклой функции, не превосходящей f. Таким образом, функция $f^{**}(x)$ получается "заклейкой" всех областей невыпуклости функции $f(x)$.

Доказательство дадим для непрерывной функции $f(x)$. Обозначим через $\tilde{f}(x)$ максимальную выпуклую функцию, не превосходящую

[1]) Существование такой функции гарантируется теоремой отделимости: для любого замкнутого выпуклого множества $\mathcal{M}$ в конечномерном пространстве и любой точки A, не принадлежащей $\mathcal{M}$, найдется разделяющая их плоскость или, что то же, найдется линейный функционал $l(x)$, принимающий положительные значения на $\mathcal{M}$ и отрицательное значение в точке A. Эту теорему надо применить в R_{n+1} к выпуклому множеству $\operatorname{epi} f$ и точке $(x_0, f^{**}(x_0))$.

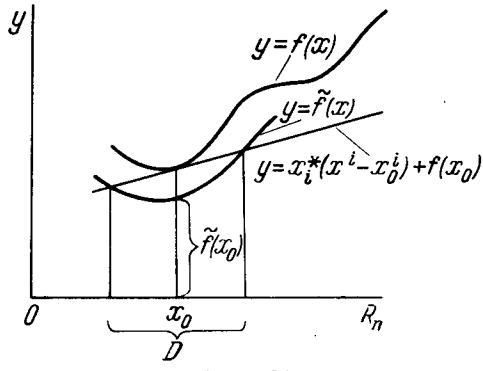


Рис. 21.

$f(x)$, и покажем, что $\tilde{f}^* = f^*$. Фиксируем какую-нибудь точку x^*. Так как $\tilde{f}(x) \leqslant f(x)$, то $\tilde{f}^*(x^*) \geqslant f^*(x^*)$. Следовательно, если $f^*(x^*) = +\infty$, то и $\tilde{f}^*(x^*) = +\infty$ и $\tilde{f}^*(x^*) = f^*(x^*)$. Пусть теперь значение функции f^* в точке x^* конечно. По определению

$$-f^*(x^*) = \inf_x (f(x) - x_i^* x^i).$$

Обозначим точку, в которой достигается[1]) inf через x_0 (рис. 21), тогда

$$-f^*(x^*) = f(x_0) - x_i^* x_0^i. \tag{3.36}$$

Из неравенства Юнга – Фенхеля $x_i^* x^i - f^*(x^*) \leqslant f(x)$ и (3.36) следует, что

$$x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0) \leqslant f(x). \tag{3.37}$$

Покажем, что $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$. Допустим противное:

$$\tilde{f}(x_0) < f(x_0). \tag{3.38}$$

Согласно (3.38) значение выпуклой функции $\tilde{f}(x)$ в точке x_0 меньше значения в этой точке линейной функции $x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$. Поэтому найдется область D, в которой $\tilde{f}(x) < x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$ и $\tilde{f}(x) \geqslant x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$ вне D. Построим выпуклую функцию

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \begin{cases} x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0), & x \in D, \\ \tilde{f}(x), & x \notin D. \end{cases}$$

Из (3.37) и неравенства $\tilde{f}(x) \leqslant f(x)$ следует, что $\tilde{\tilde{f}}(x) \leqslant f(x)$. Кроме того, $\tilde{f}(x) < \tilde{\tilde{f}}(x)$ в D. Это противоречит тому, что $\tilde{f}$ – максимальная выпуклая функция, не превосходящая f.

Аналогично доказывается, что график функции $\tilde{f}(x)$ не может лежать ниже прямой $y = x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0)$.

Поскольку $-\tilde{f}^* = \inf_x (\tilde{f}(x) - x_i^* x^i) \geqslant \inf_x (x_i^*(x^i - x_0^i) + f(x_0) - x_i^* x^i) = f(x_0) - x_i^* x_0^i = -f^*(x^*)$, $-\tilde{f}^* = \inf_x (\tilde{f}(x) - x_i^* x^i) \leqslant \inf_x (f(x) - x_i^* x^i) = -f^*(x^*)$, имеем

$$\tilde{f}^*(x^*) = f^*(x^*).$$

Применяя к этому равенству преобразование Юнга – Фенхеля, получим $\tilde{f}^{**} = \tilde{f} = f^{**}$, что и требовалось.

Пример 9. Рассмотрим смесь, состоящую из жидкости и пузырьков пара. Жидкость и пар характеризуются свободной энергией $F(\vartheta, T)$, невыпуклой по ϑ, или соответствующей функцией $p(\vartheta, T)$, вид которой при фиксированном T показан на рис. 22.

[1]) Таких точек может быть много.

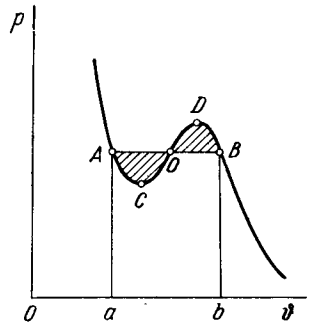


Рис. 22.

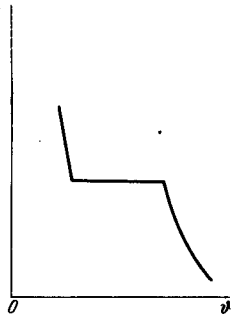


Рис. 23.

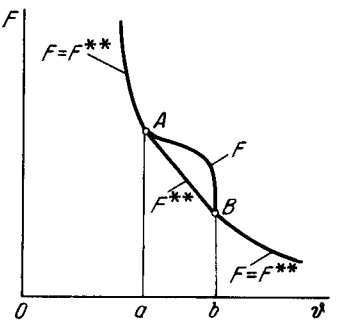


Рис. 24.

Смесь в целом также можно моделировать некоторой сплошной средой. Для такой макросреды Максвелл предложил следующее правило построения зависимости давления от удельного объема смеси: на графике "истинной" (на микроуровне) зависимости p от ϑ следует провести прямую AB так, чтобы площади заштрихованных фигур ACO и ODB были равны; тогда зависимость $p(\vartheta, T)$ для смеси совпадает с соответствующей зависимостью для фаз при $\vartheta < a$ и $\vartheta > b$, а при $a < \vartheta < b$ давление p постоянно. В результате для смеси при фиксированном T получится зависимость, изображенная на рис. 23.

Покажем, что правило Максвелла соответствует следующему утверждению: свободная энергия смеси равна $F^{**}(\vartheta, T)$.

Функция $F(\vartheta, T)$ качественно имеет вид, изображенный на рис. 24. Функция $F^{**}(\vartheta, T)$ совпадает с $F(\vartheta, T)$ при $\vartheta < a$ и $\vartheta > b$, а при $a \leqslant \vartheta \leqslant b$ является линейной. В силу гладкости $F(\vartheta, T)$ прямая AB касается графика функции $F(\vartheta, T)$, поэтому $\left.\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=a} = \left.\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=b}$. Из рисунка видно, что справедливо равенство

$$F(b, T) - F(a, T) = \left.\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=a} (b-a).$$

Кроме того,

$$F(b, T) - F(a, T) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\, d\vartheta.$$

Так как $p = -\partial F/\partial \vartheta$, из этих равенств имеем

$$\int_a^b p\, d\vartheta = p\,|_{\vartheta=a}(b-a). \tag{3.39}$$

Интеграл в (3.39) имеет смысл площади фигуры, расположенной под кривой $p(\vartheta, T)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 22), а $p\,|_{\vartheta=a}(b-a)$ – площади прямоугольника с верхней стороной AB, поэтому формула (3.39) выражает правило Максвелла.

Преобразование Юнга – Фенхеля позволяет представить выпуклую функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sup_{x^*} (x_i^* x^i - f^*(x^*)). \tag{3.40}$$

Если $f(x)$ невыпукла, то при помощи преобразования Юнга – Фенхеля строится наилучшая оценка $f(x)$ снизу выпуклой функцией

$$f(x) \geqslant f^{**}(x) = \sup_{x^*} (x^i x_i^* - f^*(x^*)). \tag{3.41}$$

Пусть функция f зависит от переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)$ как от параметров: $f = f(x, y)$. Тогда ее преобразование Юнга – Фенхеля f^* по x также будет зависеть от параметров y: $f^* = f^*(x^*, y)$. Что можно сказать о зависимости f^* от y? Справедливо следующее утверждение.

6. *Если функция $f = f(x, y)$ линейно зависит от y, то преобразование Юнга – Фенхеля этой функции по x является выпуклой функцией y.*

Доказательство. Рассмотрим функцию f^* в точке $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Имеем

$$f^*(x^*, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) = \sup_{x^i}[x_i^* x^i - f(x, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)] =$$

$$= \sup_{x^i}[x_i^* x^i - \alpha f(x, y_1) - (1-\alpha) f(x, y_2)] =$$

$$= \sup_{x^i}[\alpha(x_i^* x^i - f(x, y_1)) + (1-\alpha)(x_i^* x^i - f(x, y_2))] \leqslant$$

$$\leqslant \alpha f^*(x^*, y_1) + (1-\alpha) f^*(x^*, y_2),$$

что и требовалось.

Из этого почти очевидного свойства преобразования Юнга – Фенхеля вытекают нетривиальные следствия.

Пример 10. Покажем, что для симметричных положительно определенных матриц диагональные компоненты обратной матрицы являются выпуклыми функциями компонент матрицы. Возьмем в качестве f положительно определенную квадратичную форму $f = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j$. Тогда $f^*(x^*) = \frac{1}{2} a^{(-1)ij} x_i^* x_j^*$, где $a^{(-1)ij}$ – компоненты матрицы, обратной к матрице a_{ij}. Функция f линейно зависит от параметров a_{ij}. Как было установлено, f^* – выпуклая функция a_{ij}. Положим, $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0, \ldots, x_n^* = 0$. Тогда $2f^* = a^{(-1)11}$ – выпуклая функция от a_{ij}. Этим же свойством обладают $a^{(-1)22}, \ldots, a^{(-1)nn}$, а также все линейные комбинации из $a^{(-1)ij}$, которые получаются при различных выборах x_i^*.

Покажем, как при помощи преобразования Юнга – Фенхеля строятся двойственные вариационные задачи.

Задача Дирихле и задача Неймана. Рассмотрим задачу о минимуме функционала Дирихле

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{3.42}$$

на множестве всех функций двух переменных $u(x, y)$, определенных в некоторой плоской области Ω с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и принимающих на $\partial\Omega$ заданные значения

$$u(x, y)\big|_{\partial\Omega} = g(s), \tag{3.43}$$

$g(s)$ – непрерывная функция от длины дуги вдоль $\partial\Omega$. Минимизирующий элемент вариационной задачи (3.42), (3.43) является решением задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial y^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \breve{u}\big|_{\partial\Omega} = g(s). \tag{3.44}$$

Построим двойственную вариационную задачу. Представим подынтегральное количество в функционале Дирихле в виде

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=\sup_{p_x,\,p_y}\left[p_x\frac{\partial u}{\partial x}+p_y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)\right].$$

Перепишем теперь исходную вариационную задачу как минимаксную

$$\inf_{u\in(3.43)} E(u)=\inf_{u\in(3.43)}\sup_{p_x,\,p_y}\int_\Omega\left[p_x\frac{\partial u}{\partial x}+p_y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)\right]dx\,dy. \quad (3.45)$$

Запись $u\in(3.43)$ означает, что u удовлетворяет ограничению (3.43) (символом (3.43) обозначается как ограничение (3.43), так и множество функций, которое ему удовлетворяет).

Переставим в (3.45) порядок вычисления нижней и верхней граней. Согласно (3.8)

$$\sup_{p_x,\,p_y}\inf_{u\in(3.43)}\int_\Omega\left[p_x\frac{\partial u}{\partial x}+p_y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)\right]dx\,dy\leqslant\inf_{u\in(3.43)}E(u). \quad (3.46)$$

Вычислим нижнюю грань по u. Предположим, что функции p_x, p_y непрерывно дифференцируемы и непрерывны в замкнутой области Ω. Преобразуем интеграл в (3.46) при помощи интегрирования по частям ($p=\{p_x, p_y\}$)

$$\int_\Omega\left[p_x\frac{\partial u}{\partial x}+p_y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)\right]dx\,dy=-E^*(p)+\Phi(u,p). \quad (3.47)$$

Здесь введены обозначения

$$E^*(p)=\int_\Omega\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)\,dx\,dy,$$

$$\Phi(u,p)=-\int_\Omega\left(\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}\right)u\,dx\,dy+L(p),$$

где $L(p)$ – линейный функционал от p вида

$$L(p)=\int_{\partial\Omega}(p_x\nu_x+p_y\nu_y)\,g(s)\,ds,$$

ν_x, ν_y – компоненты единичного вектора внешней нормали к $\partial\Omega$.

Минимизация по u в (3.46) сводится, таким образом, к минимизации по u линейного по u функционала $\Phi(u, p)$ при фиксированных p_x, p_y. Очевидно, что ограничение (3.43) при этом несущественно. Покажем, что

$$\inf_{u\in(3.43)}\Phi(u,p)=L(p)=\begin{cases}-\infty, & \text{если } \dfrac{\partial p_x}{\partial x}+\dfrac{\partial p_y}{\partial y}\neq 0,\\ 0, & \text{если } \dfrac{\partial p_x}{\partial x}+\dfrac{\partial p_y}{\partial y}=0.\end{cases} \quad (3.48)$$

Второе равенство (3.48) очевидно. Остается доказать первое. Допустим, что в некоторой внутренней точке x_0 области Ω $\partial p_x/\partial x+\partial p_y/\partial y\neq 0$ и для

определенности больше нуля. В силу непрерывности функции $\partial p_x/\partial x + \partial p_y/\partial y$ найдется не пересекающая с $\partial\Omega$ окрестность Δ точки x_0, в которой эта функция больше нуля. Возьмем непрерывную функцию $\tilde{u}(x)$, которая положительна в Δ, на границе области Δ обращается в нуль, а вне Δ продолжена так, чтобы удовлетворить краевым условиям на $\partial\Omega$. Возьмем последовательность функций $u_n(x)$, совпадающих с $\tilde{u}(x)$ вне Δ и равных $n\tilde{u}(x)$ в Δ. На этой последовательности $\Phi(u_n, p) \to -\infty$ при $n \to \infty$, что и требовалось. Рассуждения в случае $\partial p_x/\partial x + \partial p_y/\partial y < 0$ аналогичны.

Из (3.47) и (3.48) получаем

$$\inf_{u\in(3.43)} \int_\Omega \left[p_x \frac{\partial u}{\partial x} + p_y \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)\right] dx\, dy =$$

$$= \begin{cases} L(p) - E^*(p), \text{ если } \dfrac{\partial p_x}{\partial x} + \dfrac{\partial p_y}{\partial y} = 0, \\ -\infty, \text{ если } \dfrac{\partial p_x}{\partial x} + \dfrac{\partial p_y}{\partial y} \not\equiv 0. \end{cases}$$

В (3.46) после вычисления нижней грани надо находить верхнюю грань, поэтому все значения p_x, p_y, для которых нижняя грань обращается в $-\infty$, следует отбросить. Итак,

$$\sup_p (L(p) - E^*(p)) \leqslant \underline{E}, \tag{3.49}$$

где верхняя грань вычисляется по всем p_x, p_y, удовлетворяющим условиям

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.50}$$

Покажем, что в действительности

$$\sup_p (L(p) - E^*(p)) = \underline{E}.$$

Для этого положим

$$\check{p}_x = \frac{\partial \check{u}}{\partial x}, \quad \check{p}_y = \frac{\partial \check{u}}{\partial y}, \tag{3.51}$$

где $\check{u}$ — решение краевой задачи (3.44)[1]). В силу первого уравнения (3.44) функции (3.51) удовлетворяют ограничениям (3.50) и являются допустимыми. Поэтому $L(\check{p}) - E^*(\check{p}) \leqslant \sup_p (L(p) - E^*(p))$, и, согласно (3.49),

$$L(\check{p}) - E^*(\check{p}) \leqslant \sup_p (L(p) - E^*(p)) \leqslant \underline{E} = E(\check{u}). \tag{3.52}$$

[1]) Мы предполагаем, что $\check{u}$ — гладкая функция, и, в частности, определены производные (3.51). Это предположение делает почти тривиальным доказательство совпадения верхней грани $L(p) - E^*(p)$ и нижней грани $E(u)$; полное доказательство требует более тонкой техники.

Найдем связь между $L(\check{p})-E^*(\check{p})$ и $E(\check{u})$. Подставляя в функционал $L(p)-E^*(p)$ функции (3.51) и переводя контурный интеграл в поверхностный, получим

$$L(\check{p})-E^*(\check{p})=\int_{\partial\Omega}(\check{p}_x\nu_x+\check{p}_y\nu_y)\check{u}\,ds-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\check{p}_x^2+\check{p}_y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\check{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\check{u}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=E(\check{u}).$$

Поскольку $L(\check{p})-E^*(\check{p})=E(\check{u})$, из (3.52) следует, что $L(\check{p})-E^*(\check{p})=\sup_p(L(p)-E^*(p))=E(\check{u})$. Таким образом, в (3.45) можно менять местами порядок вычисления нижней и верхней граней. Искомая двойственная вариационная задача есть задача о максимуме функционала $L(p)-E^*(p)$ по всем функциям p_x, p_y, удовлетворяющим ограничению (3.50).

Двойственной вариационной задаче можно придать несколько иную форму, если указать общее решение уравнений, задающих ограничения. В данном случае это сделать просто. Общее решение уравнений (3.50) локально имеет вид

$$p_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad p_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где $\psi(x,y)$ – произвольная функция. В односвязной области функцию $\psi(x,y)$ можно считать однозначной (в многосвязной области следует провести нужное число разрезов, после чего ее можно рассматривать как односвязную). Ограничимся односвязными областями Ω.

Двойственная вариационная задача есть задача о максимуме по всем ψ функционала

$$L(\psi)-E^*(\psi)=-\int_{\partial\Omega}\frac{d\psi}{ds}g\,ds-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy.$$

Здесь использовано то, что $p_x\nu_x+p_y\nu_y=-d\psi/ds$. В первом интеграле удобно провести интегрирование по частям. Получим

$$L(\psi)-E^*(\psi)=\int_{\partial\Omega}\psi\frac{dg}{ds}ds-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy.$$

Минимизирующий элемент функционала $L(\psi)-E^*(\psi)$ является решением задачи Неймана

$$\Delta\psi=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=\frac{dg}{ds}.$$

Условия разрешимости этой задачи выполняются автоматически в силу непрерывности g.

Можно сказать, что задача Неймана есть двойственная задача по отношению к задаче Дирихле.

Принцип Дирихле и принцип Томсона. Пусть V – область трехмерного пространства, представляющая внешность некоторой ограниченной замкнутой поверхности Ω. На дифференцируемых и непрерывных в замкнутой

области V функциях $u(x^i)$ определим функционал Дирихле

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_V u_{,i}u^{,i}dv.$$

Рассмотрим задачу о минимуме функционала Дирихле при условиях

$u = 1$ на $\partial V = \Omega$,

$$u \sim \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \ldots \text{ при } r \to \infty, \quad r^2 = x_i x^i. \tag{3.53}$$

Величина $\frac{1}{2\pi}\inf E(u)$ имеет смысл электростатической емкости поверхности Ω. Сформулированный вариационный принцип для электростатической емкости называют принципом Дирихле. Минимизирующая функция $\breve{u}(x)$ удовлетворяет в области V уравнению Лапласа

$$\Delta\breve{u} = 0 \text{ в } V \tag{3.54}$$

и краевым условиям (3.53) на границе области V.

Построим вариационный принцип, двойственный к принципу Дирихле. Представляя подынтегральное количество в функционале Дирихле в виде $(p = \{p^1, p^2, p^3\})$

$$\tfrac{1}{2}u_{,i}u^{,i} = \sup_p (p^i u_{,i} - \tfrac{1}{2}p^i p_i),$$

перепишем исходную вариационную задачу в форме минимаксной задачи

$$\underline{E} = \inf_{u\in(3.53)} \frac{1}{2}\int_V u_{,i}u^{,i}dv = \inf_{u\in(3.53)} \sup_p \int_V (p^i u_{,i} - \frac{1}{2}p^i p_i)dv. \tag{3.55}$$

Переставим в (3.55) порядок вычисления нижней и верхней граней и вычислим нижнюю грань по u.

Предположим, что функции p^i непрерывно дифференцируемы и непрерывны в замкнутой области V и

$$p \sim \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \ldots \text{ при } r \to \infty. \tag{3.56}$$

После интегрирования по частям с использованием (3.53) и (3.56) интеграл в (3.55) примет вид

$$\int_V \left(p^i u_{,i} - \frac{1}{2}p^i p_i\right)dv = \Phi(u, p) - E^*(p), \tag{3.57}$$

$$E^*(p) = \frac{1}{2}\int_V p^i p_i dv, \quad \Phi(u, p) = L(p) - \int_V p^i_{,i} u\, dv, \quad L(p) = \int_{\partial V} p^i n_i d\sigma.$$

Минимизация по u в (3.57) сводится к минимизации по u линейного функционала $\Phi(u, p)$. Так же, как и в предыдущем примере,

$$\inf_{u\in(3.53)} \Phi(u, p) = L(p) + \begin{cases} -\infty, & \text{если } p^i_{,i} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p^i_{,i} = 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

Из (3.58) и (3.57) имеем

$$\inf_{u\in(3.53)} \int_V (p^i u_{,i} - \frac{1}{2}p^i p_i)\,dv = \begin{cases} L(p) - E^*(p), & \text{если } p^i_{,i} = 0, \\ -\infty, & \text{если } p^i_{,i} \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку после вычисления нижней грани по u надо вычислять верхнюю грань по p, все значения p, для которых $\inf_u$ обращается в $-\infty$, следует отбросить.

Как и в предыдущем примере, проверяется равенство

$$\sup_p (L(p) - E^*(p)) = \underline{E},$$

где $\sup_p$ вычисляется по всем p, удовлетворяющим условию

$$p^i_{,i} = 0 \text{ в } V. \tag{3.59}$$

Итак, двойственная вариационная задача – это задача о максимуме функционала $L(p) - E^*(p)$ по всем векторным полям, удовлетворяющим условию "несжимаемости" (3.59).

В двойственной задаче энергией поля p естественно считать величину $E^*(p)$. Энергетическое пространство в двойственной задаче получается пополнением пространства всех непрерывно дифференцируемых функций по норме $\sqrt{E^*(p)}$. Следовательно, энергетическое пространство в двойственной задаче – пространство L_2 всех суммируемых с квадратом функций $p^i(x)$. В связи с этим формулировка двойственной задачи кажется удивительной, так как в ней фигурируют значения функций $p^i(x)$ на границе области – множестве меры нуль (в линейном функционале $L(p)$) и производные от p^i (в ограничении (3.59)). Объяснение заключается в том, что в представленной форме двойственной задачи были существенно использованы непрерывность и дифференцируемость функций $p^i(x)$. Покажем, как видоизменяется формулировка двойственной задачи, если p^i – произвольные функции из L_2.

Обозначим через u' произвольную дифференцируемую и непрерывную в замкнутой области V функцию, принимающую на ∂V нулевые значения

$$u' = 0 \text{ на } \partial V$$

и имеющую ограниченный интеграл Дирихле

$$\int_V u'_{,i} u'^{,i}\,dv < +\infty.$$

Рассмотрим функции p из L_2, удовлетворяющие для всех $u'(x)$ условию

$$\int_V p^i u'_{,i}\,dv = 0. \tag{3.60}$$

Интеграл в (3.60) определен, так как $p^i u'_{,i} \in L_2$. Если функции p^i дифференцируемы и $p \sim \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \ldots$, $u' \sim c_1/r + c_2/r^2 + \ldots$ при $r \to \infty$, то условие (3.60) переходит в (3.59).

Определим линейный функционал $L(p)$ по формуле

$$L(p) = \int_V p^i g_{,i}\, dv,$$

где g – некоторая фиксированная дифференцируемая и непрерывная в замкнутой области V функция, имеющая конечный интеграл Дирихле $E(g)$ и удовлетворяющая условиям (3.53). Функционал $L(p)$ определен на любых элементах p из L_2. В силу ограничений (3.60) функционал $L(p)$ не зависит от конкретного выбора функции g. Для дифференцируемых функций p^i, ведущих себя на бесконечности как $a_2/r^2 + \ldots$, функционал $L(p)$ принимает значение

$$L(p) = \int_{\partial V} p^i n_i\, d\sigma.$$

Двойственную вариационную задачу в энергетическом пространстве можно сформулировать как задачу о максимуме функционала $L(p) - E^*(p)$ по всем функциям p, удовлетворяющим ограничениям (3.60).

В соответствии с формулами (1.29) и (1.31) двойственную задачу можно сформулировать также как задачу о максимуме функционала

$$\frac{[L(p)]^2}{4E^*(p)}$$

при ограничениях (3.60). Вариационный принцип

$$\sup_{p \in (3.60)} \frac{[L(p)]^2}{4E^*(p)} = E$$

называют принципом Томсона.

Случай общего интегрального функционала. Рассмотрим функционал $I(u)$ вида $I(u) = E(u) - L(u)$,

$$E(u) = \int_V \Lambda\left(x^i,\ u^\kappa,\ \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) d^n x,$$

$$L(u) = \int_V F_\kappa u^\kappa d^n x + \int_{\partial V_f} f_\kappa u^\kappa d^{n-1} x, \tag{3.61}$$

где u^κ – дифференцируемые функции переменных $x^1, \ldots, x^n$, непрерывных в замкнутой ограниченной области V в R_n, ∂V_f – часть границы ∂V области V, F_κ и f_κ – заданные функции в V и на ∂V_f. Плотность энергии Λ по условию строго выпуклая функция переменных u^κ и $u_i^\kappa \equiv \partial u^\kappa / \partial x^i$.

Будем искать минимум функционала $I(u)$ на множестве функций, принимающих на поверхности $\partial V_u = \partial V - \partial V_f$ заданные значения

$$u^\kappa = \tilde{u}^\kappa \quad \text{на} \quad \partial V_u. \tag{3.62}$$

Построим двойственную вариационную задачу. Представим $\Lambda(x^i, u^\kappa, u_i^\kappa)$ при помощи преобразования Юнга–Фенхеля в виде ($p = \{p_\kappa, p_\kappa^i\}$)

$$\Lambda(x^i, u^\kappa, u_i^\kappa) = \sup_p \left(p^\kappa u_\kappa + p_\kappa^i u_i^\kappa - \Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i{}_\kappa)\right). \tag{3.63}$$

Здесь $\Lambda^*(x^i, p_\kappa, p_\kappa^i)$ – преобразование Юнга–Фенхеля функции $\Lambda(x^i, u^\kappa, u_i^\kappa)$ по переменным u^κ, u_i^κ.

Перепишем исходную вариационную задачу при помощи соотношения (3.63) как минимаксную задачу

$$\underline{I} = \inf_{u \in (3.62)} \sup_{p} [\int_V (p_\kappa u^\kappa + p^i{}_\kappa u^\kappa_i - \Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i_\kappa)) d^n x - L(u)]. \quad (3.64)$$

Перестановка в (3.64) порядка вычисления нижней и верхней граней дает

$$\sup_{p} \inf_{u \in (3.62)} (\Phi(u, p) - E^*(p)) \leqslant \underline{I}. \quad (3.65)$$

Здесь

$$\Phi(u, p) = \int_V (p_\kappa u^\kappa + p^i_\kappa u^\kappa_i - F_\kappa u^\kappa) d^n x - \int_{\partial V_f} f_\kappa u^\kappa d^{n-1} x, \quad (3.66)$$

$$E^*(p) = \int_V \Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i_\kappa) d^n x.$$

Представим u^κ в виде суммы какой-нибудь фиксированной гладкой функции g^κ, принимающей на ∂V_u значения (3.62), и функции u'^κ, обращающейся в нуль на ∂V_u: $u^\kappa = g^\kappa + u'^\kappa$,

$$u'^\kappa = 0 \text{ на } \partial V_u. \quad (3.67)$$

Тогда $\Phi(u, p)$ перепишется в форме

$$\Phi(u, p) = L(p) + \Phi(u', p),$$

где $L(p)$ – линейный функционал в пространстве функций p, определенный формулой $L(p) = \Phi(g, p)$. Вычисление $\inf_u$ в (3.65) сводится к вычислению $\inf_{u'} \Phi(u', p)$. Очевидно, что

$$\inf_{u \in (3.62)} \Phi(u, p) = \inf_{u' \in (3.67)} (L(p) + \Phi(u', p)) = L(p) + \inf_{u' \in (3.67)} \Phi(u', p).$$

В силу линейности $\Phi(u, p)$ по u

$$\inf_{u' \in (3.67)} \Phi(u', p) = 0,$$

если для любых u' удовлетворяется равенство

$$\Phi(u', p) = 0, \quad (3.68)$$

и

$$\inf_{u' \in (3.67)} \Phi(u', p) = -\infty, \quad (3.69)$$

если $\Phi(u', p) \neq 0$ хотя бы на одном элементе u'. Равенство (3.69) доказывается так же, как и (3.48). Поскольку в (3.65) после вычисления нижней грани ищется верхняя грань, все значения p, для которых $\inf_u$ обращается в $-\infty$, надо отбросить. В результате приходим к задаче о максимизации функционала $L(p) - E^*(p)$ на множестве элементов p, удовлетворяющих ограничению (3.68). В силу (3.68) значения линейного функционала $L(p)$ не зависят от конкретного выбора функций g^κ.

Если p_κ и p^i_κ – дифференцируемые и непрерывные в замкнутой области V функции, то ограничение (3.68) сводится к равенствам

$$p_\kappa = \frac{\partial p^i_\kappa}{\partial x^i} + F_\kappa \quad \text{в} \quad V,\ p^i_\kappa n_i = f_\kappa \quad \text{на} \quad \partial V_f, \tag{3.70}$$

а функционал $L(p)$ имеет значение

$$L(p) = \int_{\partial V_u} p^i_\kappa n_i \tilde{u}^\kappa d^{n-1}x. \tag{3.71}$$

Согласно (3.65)

$$\sup_{p \in (3.70)} (L(p) - E^*(p)) \leqslant \underline{I}. \tag{3.72}$$

Предположим, что функции $\check{u}^\kappa(x^i)$, минимизирующие функционал $I(u)$, дважды непрерывно дифференцируемы, и покажем тогда, что

$$\sup_{p \in (3.70)} (L(p) - E^*(p)) = \underline{I}. \tag{3.73}$$

Введем обозначения

$$\check{p}_\kappa = \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa}\right|_{u^\kappa = \check{u}^\kappa}, \qquad \check{p}^i_\kappa = \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_i}\right|_{u^\kappa = \check{u}^\kappa}.$$

Из уравнений Эйлера исходной вариационной задачи

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa_i} + F_\kappa \quad \text{в} \quad V, \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\kappa} n_i = f_\kappa \quad \text{на} \quad \partial V$$

вытекает, что функции $\check{p}_\kappa$ и $\check{p}^i_\kappa$ удовлетворяют ограничениям (3.70) и, следовательно, являются допустимыми функциями. Поэтому

$$L(\check{p}) - E^*(\check{p}) \leqslant \sup_{p \in (3.70)} (L(p) - E(p)). \tag{3.74}$$

С другой стороны,

$$L(\check{p}) - E^*(\check{p}) = \underline{I}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L(\check{p}) - E^*(\check{p}) &= \int_{\partial V_u} \check{p}^i_\kappa n_i g^\kappa d^{n-1}x - \int_V \Lambda^*(x^i, \check{p}_\kappa, \check{p}^i_\kappa)]\, d^n x = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial (\check{p}^i_\kappa \check{u}^\kappa)}{\partial x^i} - \Lambda^*(x^i, \check{p}^i_\kappa, \check{p}^i_\kappa)\right] d^n x - \int_{\partial V_f} \check{p}^i_\kappa n_i \check{u}^\kappa d^{n-1}x = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \check{p}^i_\kappa}{\partial x^i}\check{u}^\kappa + \check{p}^i_\kappa \check{u}^\kappa_i - (\check{p}_\kappa \check{u}^\kappa + \check{p}^i_\kappa \check{u}^\kappa_i - \right. \\ &\left. - \Lambda(x^i, \check{u}^\kappa, \check{u}^\kappa_i))\right] d^n x - \int_{\partial V_f} f_\kappa \check{u}^\kappa d^{n-1}x = \\ &= \int_V \Lambda(x^i, \check{u}^\kappa, \check{u}^\kappa_i) d^n x - \int_V F_\kappa \check{u}^\kappa d^n x - \int_{\partial V_f} f_\kappa \check{u}^\kappa d^n x = \underline{I}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Из (3.72), (3.74) и (3.75) следует (3.73).

Итак, задача о максимуме функционала $I^*(p)$ на множестве функций (3.70) является двойственной к исходной вариационной задаче.

Рассмотрим частный случай, когда Λ не зависит явно от u^κ. Тогда

$$\Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i_\kappa) =$$

$$= \sup_u (p^i_\kappa u^\kappa + p^i_\kappa u^\kappa_i - \Lambda(x^i, u^\kappa_i)) = \begin{cases} \Lambda^*(x^i, p^i_\kappa) & \text{при } p_\kappa = 0, \\ +\infty & \text{при } p_\kappa \not\equiv 0, \end{cases}$$

где $\Lambda^*(x^i, p^i_\kappa)$ есть преобразование Юнга–Фенхеля функции $\Lambda(x^i, u^\kappa_i)$ по переменным u^κ_i. При $\Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i_\kappa) = +\infty$ функционал $L(p) - E^*(p)$ обращается в $-\infty$, поэтому в двойственной вариационной задаче следует исключить из числа допустимых все ненулевые функции p_κ. При $p_\kappa = 0$ ограничения (3.70) принимают вид

$$\frac{\partial p^i_\kappa}{\partial x^i} + F_\kappa = 0 \quad \text{в } V, \; p^i_\kappa n_i = f_\kappa \quad \text{на } \partial V_f. \tag{3.76}$$

Различные формы двойственного вариационного принципа (3.73) будут проиллюстрированы дальше для ряда моделей сплошных сред.

О невыпуклых функционалах. Преобразования Лежандра и Юнга–Фенхеля служат основой для формулировок вариационных задач и в том случае, когда функционал не является выпуклым. Приведем пример из механики систем с конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим принцип Гамильтона–Остроградского

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = 0. \tag{3.77}$$

Варьированию в (3.77) подвергаются независимые обобщенные координаты $q(t) = \{q_1(t), \ldots, q_n(t)\}$. В начальный и конечный моменты времени $q_i(t)$ заданы

$$q_i(t_0) = q^0_i, \quad q_i(t_1) = q^1_i. \tag{3.78}$$

Поэтому $\delta q_i = 0$ при $t = t_0, t_1$.

В задачах механики функция Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ строго выпукла по $\dot{q}$, однако не является выпуклой по совокупности переменных $q, \dot{q}$ (например, для гармонического осциллятора $L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - k q^2$). В силу выпуклости по $\dot{q}$ для L можно написать

$$L(t, q, \dot{q}) = \sup_p (p^i \dot{q}_i - H(t, p, q)), \tag{3.79}$$

где функция Гамильтона определена равеиством

$$H(t, p, q) = \sup_{\dot{q}} (p^i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q})).$$

Принцип Гамильтона–Остроградского можно переписать следующим образом:

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} \sup_p [p^i \dot{q}_i - H(t, p, q)] dt = 0. \tag{3.80}$$

Символ δ_q подчеркивает, что варьирование интеграла происходит по пере-

менным q. Вычисление верхней грани по p сводится к варьированию по p выражения в квадратных скобках. Поэтому равенство (3.80) можно переписать в форме

$$\delta_{pq} \int_{t_0}^{t_1} (p^i \dot{q}_i - H(t, p, q))dt = 0. \tag{3.81}$$

Символ δ_{pq} подчеркивает, что варьированию подвергаются теперь функции $q(t)$ и $p(t)$. Функции $q(t)$ в начальный и конечный моменты времени удовлетворяют условиям (3.78). Функции $p(t)$ в начальный и конечный моменты времени произвольны. Равенство (3.81) выражает принцип Гамильтона–Пуанкаре.

Нахождение экстремума функционала (3.81) по $p(t)$ сводится к алгебраической задаче, так как подынтегральное количество не содержит производных от $p(t)$. Более того, можно утверждать, что при фиксированных $q(t)$ стационарные точки функционала в (3.81) по $p(t)$ есть точки максимума.

Оценки снизу нижней грани невыпуклых функционалов при помощи двойственной задачи. Рассмотрим задачу о минимуме интегрального функционала $I(u) = E(u) - L(u)$ вида (3.61) на множестве функций (3.62). Пусть $\Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i)$ – невыпуклая функция u^κ и u^κ_i. Вычислим $\Lambda^{**}(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i)$ – дважды взятое преобразование Юнга–Фенхеля функции $\Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i)$ по переменным u^κ, u^κ_i. Согласно (3.32)

$$\Lambda^{**}(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i) \leqslant \Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i). \tag{3.82}$$

Поэтому на всех полях u^κ

$$I^{**}(u) = \int_V \Lambda^{**} d^n x - L(u) \leqslant \int_V \Lambda d^n x - L(u) = I(u).$$

Следовательно,

$$\underline{I}^{**} \leqslant \underline{I}. \tag{3.83}$$

Поскольку функционал $I^{**}(u)$ выпуклый, можно написать

$$\sup_p (L(p) - \int_V \Lambda^*(x^i, p_\kappa, p^i_\kappa) d^n x) = \underline{I}^{**}. \tag{3.84}$$

Задаваясь допустимыми элементами p, будет получать оценки $\underline{I}^{**}$ (и, следовательно, $\underline{I}$) снизу.

В некоторых задачах с невыпуклыми функционалами $\underline{I}^{**} = \underline{I}$ (см. [252]).

§ 4. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Множители Лагранжа. Как правило, множество допустимых функций выделяется ограничениями, записанными в форме уравнений или неравенств. Некоторым из них, таким, например, как краевые условия для искомых функций, легко удовлетворить, и они не вызывают затруднений. Для ограничений нелокальных или содержащих производные указать достаточно широкий набор допустимых функций иногда бывает не просто.

Возникает потребность "избавиться" от подобных ограничений. Это удается сделать при помощи введения множителей Лагранжа.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = \int_V \Lambda\left(x^i, u^\kappa, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) d^n x$$

при ограничении

$$\mathcal{F}(u) \equiv \int_V F\left(x^i, u^\kappa, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) d^n x = 0. \tag{4.1}$$

Подразумевается, что найдется хотя бы один элемент u, удовлетворяющий ограничению (4.1), на котором значение функционала $I(u)$ конечно.

Построим следующую минимаксную задачу:

$$\inf_u \sup_\lambda \left[I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)\right]. \tag{4.2}$$

Здесь нижняя грань берется по всем функциям u, а верхняя — по всем действительным числам λ.

Покажем, что задача (4.2) эквивалентна исходной. Действительно, возьмем элемент u, для которого $\mathcal{F}(u) \neq 0$. Пусть для определенности $\mathcal{F}(u) > 0$. Тогда, устремляя λ к $+\infty$, получим

$$\sup_\lambda \left[I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)\right] = +\infty. \tag{4.3}$$

Если $\mathcal{F}(u) < 0$, то при $\lambda \to -\infty$ также придем к (4.3). Следовательно, для всех u, не обращающих $\mathcal{F}(u)$ в нуль, имеет место равенство (4.3). После вычисления верхней грани в (4.2) ищется нижняя грань. Элементы u, на которых функционал $I(u)$ конечен, а $\mathcal{F}(u) = 0$, по условию существуют, поэтому все значения u, для которых справедливо равенство (4.3), при отыскании нижней грани следует отбросить, и

$$\inf_{u \in (4.1)} I(u) = \inf_u \sup_\lambda \left[I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)\right]. \tag{4.4}$$

Число λ называется множителем Лагранжа для ограничения (4.1).

Предположим, что в (4.4) последовательность вычисления нижней и верхней граней можно изменить:

$$\inf_{u \in (4.1)} I(u) = \sup_\lambda \inf_u \left[I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)\right]. \tag{4.5}$$

Задача

$$\inf_u \left[I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)\right] \tag{4.6}$$

не содержит ограничений на u. Однако вместо одной задачи с ограничениями приходится решать целое семейство вариационных задач, зависящее от параметра λ. Нижняя грань (4.6) есть функция от λ. Обозначим ее через $J(\lambda)$. Задача о максимизации функции $J(\lambda)$ по λ представляет двойственную вариационную задачу по отношению к исходной

$$\inf_{u \in (4.1)} I(u) = \sup_\lambda J(\lambda).$$

Предположим, что вариационная задача (4.6) имеет единственный минимизирующий элемент $\check{u}(\lambda)$, функция $J(\lambda)$ – единственный максимизирующий элемент $\check{\lambda}$, и существуют производные $I(u)$, $\mathcal{F}(u)$ по u и $J(\lambda)$, $\check{u}(\lambda)$ по λ. Покажем тогда, что решение исходной вариационной задачи есть $\check{u}(\check{\lambda})$. По определению

$$J(\lambda) = I(\check{u}(\lambda)) + \lambda \mathcal{F}(\check{u}(\lambda)). \tag{4.7}$$

Функция $J(\lambda)$ определена на бесконечной прямой, по условию дифференцируема и в точке $\check{\lambda}$ достигает максимума, следовательно,

$$\left.\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\check{\lambda}} = I'\left(\check{u}(\lambda), \frac{d\check{u}}{d\lambda}\right)\Bigg|_{\lambda=\check{\lambda}} + \check{\lambda}\mathcal{F}'\left(\check{u}(\lambda), \frac{d\check{u}}{d\lambda}\right)\Bigg|_{\lambda=\check{\lambda}} + \mathcal{F}(\check{u}(\check{\lambda})) = 0. \tag{4.8}$$

В силу уравнений Эйлера вариационной задачи (4.6)

$$I'(\check{u}(\lambda), \bar{u}) + \lambda \mathcal{F}'(\check{u}(\lambda), \bar{u}) = 0 \tag{4.9}$$

для любого λ и любого элемента $\bar{u}$. В частности, полагая в (4.9) $\lambda = \check{\lambda}$, $\bar{u} = d\check{u}/d\lambda$, получим

$$I'\left(\check{u}(\lambda), \frac{d\check{u}}{d\lambda}\right) + \lambda \mathcal{F}'\left(\check{u}(\lambda), \frac{d\check{u}}{d\lambda}\right)\Bigg|_{\lambda=\check{\lambda}} = 0. \tag{4.10}$$

Из (4.8) и (4.10) следует, что функция $\check{u}(\check{\lambda})$ удовлетворяет ограничению (4.1):

$$\mathcal{F}(\check{u}(\check{\lambda})) = 0.$$

Выбирая в качестве допустимых элементов двойственной и исходной вариационных задачах элементы $\check{\lambda}$ и $\check{u}(\check{\lambda})$, получим оценку

$$J(\check{\lambda}) \leqslant \sup_{\lambda} J(\lambda) = \inf_{u \in (4.1)} I(u) \leqslant I(\check{u}(\check{\lambda})).$$

Согласно (4.7) $J(\check{\lambda}) = I(\check{u}(\check{\lambda}))$, и нижняя и верхняя оценки совпадают.

Таким образом,

$$I(\check{u}(\check{\lambda})) = \inf_{u \in (4.1)} I(u),$$

и $\check{u}(\check{\lambda})$ действительно является минимизирующим элементом вариационной задачи.

Описанная процедура сводит решение задачи с ограничениями к последовательному решению вариационных задач, не содержащих ограничений.

Рассмотрим изменения, которые необходимо сделать, если вместо ограничения типа равенства (4.1) наложено ограничение типа неравенства

$$\mathcal{F}(u) = \int_V F\left(x^i, u^\kappa, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) d^n x \leqslant 0. \tag{4.11}$$

Построим минимаксную задачу

$$\inf_{u} \sup_{\lambda \geqslant 0} [I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)]. \tag{4.12}$$

В (4.12) нижняя грань вычисляется по всем функциям u, верхняя грань – по неотрицательным числам λ. Задача (4.12) эквивалентна задаче о минимуме функционала $I(u)$ при ограничении (4.11). В самом деле, если для некоторого u функционал $\mathcal{F}(u)$ положителен, то

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} [I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)] = +\infty,$$

и при последующем отыскании нижней грани по u все такие элементы u можно отбросить.

Если порядок вычисления нижней и верхней граней в (4.12) можно изменить:

$$\inf_{u \in (4.1)} I(u) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{u} [I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)],$$

то исходная вариационная задача с ограничением заменяется последовательным решением семейства вариационных задач без ограничений, зависящих от параметра λ,

$$J(\lambda) = \inf_{u} [I(u) + \lambda \mathcal{F}(u)]$$

и задачи максимизации функции $J(\lambda)$ с легко учитываемым ограничением $\lambda \geqslant 0$.

Пусть на решении $\check{u}$ рассматриваемой задачи $\mathcal{F}(\check{u}) < 0$. Тогда, очевидно, $\lambda = 0$. В случае "общего положения" при $\mathcal{F}(\check{u}) = 0$ множитель Лагранжа отличен от нуля. Таким образом, справедливо равенство

$$\lambda \mathcal{F}(\check{u}) = 0.$$

Его называют условием дополнительной нежесткости.

По аналогичной схеме конструируется минимаксная задача в случае, когда накладываются поточечные ограничения:

$$f_\alpha\left(x^i, u^\kappa, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s,$$

$$g_\beta\left(x^i, u^\kappa, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}\right) \leqslant 0, \quad \beta = 1, \ldots, m. \tag{4.13}$$

Множители Лагранжа λ^α и μ^β будут функциями от x:

$$\inf_{u \in (4.13)} I(u) = \inf_{u} \sup_{\substack{\lambda^\alpha(x), \\ \mu^\beta(x) \geqslant 0}} [I(u) + \int_V (\lambda^\alpha(x) f_\alpha(x^i, u^\kappa, \partial u^\kappa/\partial x^i) +$$

$$+ \mu^\beta(x) g_\beta(x^i, u^\kappa, \partial u^\kappa/\partial x^i)) d^n x].$$

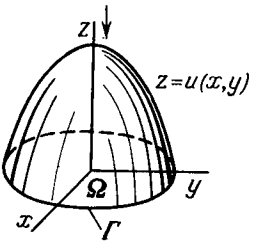
Если рассматривается не задача об экстремуме, а задача о нахождении стационарных точек функционала $I(u)$ при наличии некоторых ограничений типа равенств, то правило множителей Лагранжа заключается в том, что конструируется функционал $\Phi(u, \lambda)$, варьирование которого по λ дает заданные ограничения, и при выполнении этих ограничений $\Phi(u, \lambda) = I(u)$. Тем самым задача о стационарных точках функционала $I(u)$ при наличии ограничений заменяется задачей о стационарных точках

функционала $\Phi(u, \lambda)$, не содержащей ограничений. Например, для ограничений типа равенств (4.13) функционал $\Phi(u, \lambda)$ дается формулой

$$\Phi(u., \lambda) = I(u) + \int_V \lambda^{\alpha}(x) f_{\alpha}\left(x, \overset{*}{u}^{\kappa}, \frac{\partial u^{\kappa}}{\partial x^{i}}\right) dv.$$

Проиллюстрируем метод множителей Лагранжа на одном примере.

Пример. Форма тела минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. Рассмотрим в декартовой системе координат x, y, z тело, обтекаемое



Р и с. 25.

гиперзвуковым потоком газа (рис. 25). Газ на бесконечности движется вдоль оси z в направлении убывания z. Граница части тела, находящейся в полупространстве $z \geqslant 0$ (головной части), задается уравнением

$$z = u(x, y).$$

Силу, действующую со стороны потока на тело, определим по формуле Ньютона[1])

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \frac{2}{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy. \tag{4.14}$$

Через Ω обозначается поперечное сечение тела в плоских $z = 0$, через u_x, u_y – производные $u_x = \partial u/\partial x$, $u_y = \partial u/\partial y$. Область Ω предполагается односвязной. Функцию $u(x, y)$ будем считать непрерывной, дифференцируемой почти всюду функцией[2]), обращающейся в нуль на границе области:

$$u(x, y) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{4.15}$$

Задача заключается в отыскании функции $u(x, y)$, доставляющей минимум функционалу $\mathcal{F}(u)$.

---

[1]) Дадим краткий вывод этой формулы. При гиперзвуковом обтекании ударная волна "ложится" на тело. Предположим, что тело имеет хорошо обтекаемую форму, и ударная волна эту форму повторяет (по крайней мере в головной части тела). Согласно условиям на скачке для идеального газа $[p + \rho v_n^2] = 0$, где v_n – скорость по нормали к ударной волне (и, следовательно, к телу). В силу условия непротекания за ударной волной можно считать, что $v_n \approx 0$, поэтому из условия на скачке давление p на теле дается формулой $p = p_1 + \rho_1 v_{n1}^2$ (индексом 1 отмечены значения параметров перед ударной волной). Будем считать, что $\rho_1 = \text{const}$, $v_{n1} = v n_z$, $v = \text{const}$ – скорость газа вдали от тела, n_z – проекция нормали на ось z. Проекция силы на ось z дается интегралом

$$\int p n_z d\sigma = \int p_1 n_z d\sigma + \rho_1 \int v_{n1}^2 n_z d\sigma.$$

Первое слагаемое при некоторых условиях балансируется с силой, вызванной давлением в донной части тела. Второе слагаемое, если отнести его к скоростному напору $\rho v^2/2$ и учесть, что $n_z = (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2}$, $d\sigma = (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2} dx\, dy$, совпадает с (4.14).

[2]) Здесь мы отвлечемся от ограничений на $u(x, y)$, связанных с предположениями, при которых была выведена формула (4.14), и будем рассматривать задачу о минимуме функционала (4.14) как чисто математическую задачу.

Если фуикционал $\mathcal{F}(u)$ достигает своего минимального значения $\underline{\mathcal{F}}$ на непрерывной дифференцируемой почти всюду функции $u(x, y)$, то, как следует из (4.14), $\underline{\mathcal{F}}$ больше нуля. Поэтому естественно назвать задачу о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ правильно поставлеиной, если найдется такая положительная постоянная c, что

$$\mathcal{F}(u) \geqslant c. \tag{4.16}$$

Задача о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ не является правильно поставленной. Действительно, возьмем коническую поверхность высоты h:

$$u = h\left(1 - \frac{r}{\rho(\theta)}\right). \tag{4.17}$$

Здесь r, θ – полярные координаты в плоскости x, y; $r = \rho(\theta)$ – уравнение контура Г. Функционал $\mathcal{F}(u)$ на функциях (4.17) принимает вид

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{h^2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{1 + \rho^2/h^2 + \rho_\theta^2/\rho^2}\, d\theta \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4 d\theta}{1 + \rho_\theta^2/\rho^2}, \tag{4.18}$$

где $\rho_\theta \equiv d\rho/d\theta$. Из формулы (4.18) следует, что с увеличением высоты конуса h действующая на него сила неограниченно уменьшается.

Для того чтобы исключить возможность увеличения размеров тела, естественно ограничить сверху один из параметров: площадь поверхности тела

$$\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \leqslant S, \tag{4.19}$$

высоту тела

$$\max_\Omega u(x, y) \leqslant h, \tag{4.20}$$

объем тела

$$\int_\Omega u(x, y)\, dx\, dy \leqslant V. \tag{4.21}$$

Рассмотрим сначала задачу о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ на множестве тел с ограниченной площадью поверхности. Перепишем ее как задачу минимаксную:

$$\underline{\mathcal{F}} = \inf_{\substack{u \in (4.19),\\ (4.15)}} \mathcal{F}(u) =$$

$$= \inf_{u \in (4.15)} \sup_{\lambda \geqslant 0} \left[\int_\Omega \frac{2dx\, dy}{1 + u_x^2 + u_y^2} + \lambda\left(\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy - S\right)\right].$$

Изменим порядок вычислений нижней и верхней граней. Согласно (3.8)

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{u \in (4.15)} \left[\int_\Omega \frac{2dx\, dy}{1 + u_x^2 + u_y^2} + \lambda\left(\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy - S\right)\right] \leqslant \underline{\mathcal{F}}. \tag{4.22}$$

Введем функцию $\sigma(x, y)$:

$$\sigma(x, y) = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}, \quad u|_\Gamma = 0 \tag{4.23}$$

и перепишем (4.22) в виде

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{\sigma \in (4.23)} \left[\int_\Omega \frac{2}{\sigma^2}\, dx\, dy + \lambda\left(\int_\Omega \sigma\, dx\, dy - S\right)\right] \leqslant \underline{\mathcal{F}}. \tag{4.24}$$

Запись $\sigma \in$ (4.23) означает, что для каждой допустимой функции $\sigma(x, y)$ найдется функция $u(x, y)$, удовлетворяющая (4.23). Расширим множество допустимых функций $\sigma(x, y)$, заменив ограничение (4.23) ограничением $\sigma \geqslant 0$. При этом нижняя граиь

в (4.24) может только уменьшиться

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{\sigma \geqslant 0} \left[\int_{\Omega} \frac{2}{\sigma^2}\, dx\, dy + \lambda \left(\int_{\Omega} \sigma\, dx\, dy - S \right) \right] \leqslant \underline{\mathcal{F}}. \tag{4.25}$$

Нижняя грань по всем неотрицательным функциям (4.25) легко находится. Ее определение сводится к вычислению минимума функции $\varphi(\sigma) = 2/\sigma^2 + \lambda\sigma$ при $\sigma \geqslant 0$. Функция $\varphi(\sigma)$ при $\sigma \geqslant 0$ строго выпукла и имеет единственный минимум. Решая уравнение $d\varphi/d\sigma = 0$, получим $\sigma = (4/\lambda)^{1/3}$; $\varphi(\check{\sigma}) = \min \varphi(\sigma) = {}^3\!/_2\, (2\lambda)^{2/3}$.

Таким образом,

$$J(\lambda) = \inf_{\sigma} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{2}{\sigma^2} + \lambda\sigma \right) dx\, dy - \lambda S \right] = \frac{3}{2} (2\lambda)^{2/3} |\Omega| - \lambda S.$$

Функция $J(\lambda)$ строго вогнута, и ее максимум достигается в единственной точке $\check{\lambda}$; из уравнения $(dJ/d\lambda)|_{\lambda=\check{\lambda}} = 0$ находим $\check{\lambda} = 4|\Omega|^3/S^3$, $J(\check{\lambda}) = 2|\Omega|^3/S^2$. Итак, мы нашли оценку снизу силы сопротивления

$$2\frac{|\Omega|^3}{S^2} \leqslant \underline{\mathcal{F}}. \tag{4.26}$$

Она показывает, что задача о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ на множестве тел с ограниченной площадью поверхности правильно поставлена.

Построим теперь оценку силы сопротивления сверху. При экстремальном значении параметра, λ равном $\check{\lambda} = 4|\Omega|^3/S^3$, функция $\check{\sigma}(x, y)$ постояния и равна $(4/\check{\lambda})^{1/3} = S/|\Omega|$. Возьмем функцию $u(x, y)$, которая является решением краевой задачи

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{S^2}{|\Omega|^2} - 1, \quad u|_{\Gamma} = 0. \tag{4.27}$$

Краевая задача (4.27) получена подстановкой значения $\check{\sigma} = S/|\Omega|$ в (4.23) и имеет смысл, так как $S > |\Omega|$.

На решении $u(x, y)$ краевой задачи (4.27)

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy = S,$$

поэтому $u(x, y)$ принадлежит множеству допустимых функций и

$$\underline{\mathcal{F}} \leqslant \mathcal{F}(u).$$

Значение функционала $\mathcal{F}$ на функции u легко вычисляется; в результате приходим к оценке

$$\underline{\mathcal{F}} \leqslant 2\frac{|\Omega|^3}{S^2}. \tag{4.28}$$

Из (4.26) и (4.28) следует, что

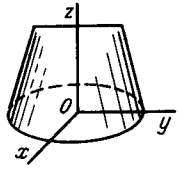
$$\underline{\mathcal{F}} = 2\frac{|\Omega|^3}{S^2}. \tag{4.29}$$

Форма тела минимального сопротивления определяется решением краевой задачи (4.27). Соответствующие поверхности называют поверхностями постоянного ската.

Решения уравнения (4.27) устроены следующим образом: линии уровня $u = \text{const}$ параллельны контуру Γ, а производная $\partial u/\partial n$ по нормали к линии уровня функций $u(x, y)$ принимает значения $\pm\sqrt{S^2/|\Omega|^2 - 1}$. Можно построить много решений уравнений (4.27), выбирая между одними линиями уровня $\dfrac{\partial u}{\partial n} = +\sqrt{S^2/|\Omega|^2 - 1}$ и меж-

ду другими $\frac{\partial u}{\partial n} = -\sqrt{S^2/|\Omega|^2 - 1}$. Решения второго вида, однако, не имеют смысла, так как для подобных тел нельзя рассчитывать на применимость формулы Ньютона (4.14). Поэтому единственное решение краевой задачи (4.28) выделим при помощи дополнительного условия $\partial u/\partial n \geqslant 0$.

Если Ω – круг, то среди всех тел, опирающихся на Ω и имеющих площадь поверхности, не превосходящую S, минимальное сопротивление имеет конус с площадью поверхности S. Форма тела минимального сопротивления в случае, когда Ω – эллипс, изображена на рис. 26.



Р и с. 26.

Минимальная сила сопротивления $\mathcal{F}$ определяется только площадью основания $|\Omega|$ и площадью поверхности S и не зависит от формы основания (форма тела минимального сопротивления, конечно, зависит от формы основания). Таким образом, мы построили также решение другой задачи: найти форму тела минимального сопротивления при условии, что поперечное сечение тела имеет площадь $|\Omega|$, а площадь поверхности ограничена постоянной S. Из изложенного ясно, что эта задача имеет много решений (по крайней мере одно тело для каждой области Ω), а наименьшее возможное значение силы сопротивления дается формулой (4.29).

Рассмотрим два конуса с одинаковой высотой и площадью основания (и, следовательно, с одинаковым объемом), у одного конуса основание есть круг, у другого – правильная звезда (рис. 27). Тогда у звездообразного конуса сопротивление меньше, чем у кругового.

Действительно оба конуса являются поверхностями постоянного ската, и справедлива формула (4.29). Остается заметить, что площадь поверхности звездообразного конуса больше площади поверхности кругового. Это следует, например, из решения вариационной задачи: среди всех контуров $r = \rho(\theta)$, ограничивающих области с заданной площадью $|\Omega|$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\rho^2(\theta)\,d\theta = |\Omega|,$$

найти контур, для которого опирающийся на контур конус высоты h имеет минимальную площадь:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2 + \rho^2(\theta)}\;\rho(\theta)\,d\theta \to \inf.$$

Приведем решение этой задачи. Вводя множитель Лагранжа λ, получим функционал

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\rho(\theta)\sqrt{h^2 + \rho^2(\theta)} - \lambda(\rho^2(\theta) - |\Omega|/\pi)\}\,d\theta.$$

Его уравнение Эйлера для функции $\rho(\theta)$ имеет вид $\alpha + \alpha^{-1} = 2\lambda$, $\alpha = \check{\rho}/\sqrt{h^2 + \check{\rho}^2}$. Следовательно, $\check{\rho} \equiv \text{const}$, и стационарное значение достигается на круговом конусе с высотой h и площадью основания $|\Omega|$. Стационарная точка – единственная, так как круговой конус однозначно определяется по h и $|\Omega|$. Остается показать, что это точка минимума. Дадим $\check{\rho}$ приращение $\epsilon\bar{\rho}(\theta)$ и вычислим изменение площади с точностью до ϵ^2:

$$\tfrac{1}{2}(h^2 + \check{\rho}^2)(\alpha^2 + 1)\int_0^{2\pi} \epsilon\bar{\rho}\,d\theta + \tfrac{1}{2}(h^2 + \check{\rho}^2)\,|\tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \alpha|\int_0^{2\pi} \epsilon^2\bar{\rho}^2\,d\theta.$$

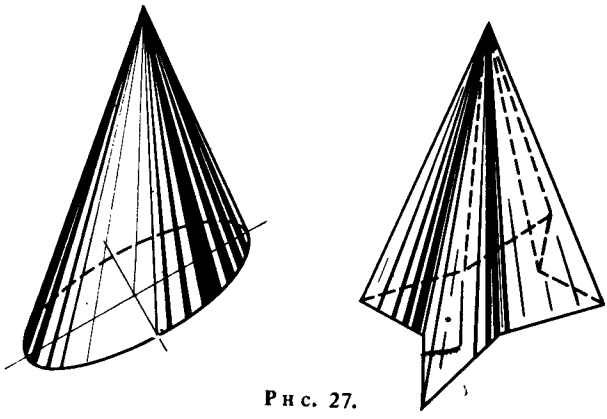


Рис. 27.

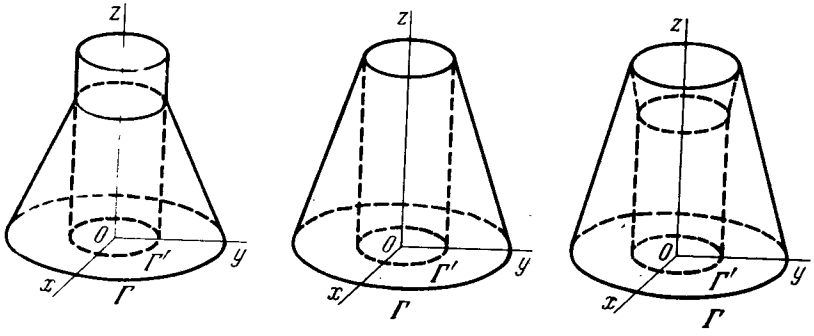


Рис. 28.

Первый интеграл равен нулю в силу ограничения на площадь основания, а второй положителен, так как $\alpha < 1$. Таким образом, круговой конус имеет минимальную площадь среди конусов с заданной площадью основания и высотой.

Полученные выше результаты без труда распространяются на случай области Ω, ограниченной двумя замкнутыми параллельными контурами Γ и Γ'. Пусть на Γ функция $u(x, y)$ равна нулю, а на Γ' постоянна:

$$u(x, y) = u_0 = \text{const} \quad \text{на} \quad \Gamma'.$$

Так же, как и в случае односвязной области, доказывается, что искомая поверхность является поверхностью постоянного ската. Сила сопротивления дается формулой (4.29).

В случае круглого основания решение составляется из конических поверхностей и для различных соотношений между u_0 и S представлено на рис. 28.

Перейдем к исследованию задачи о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ при ограничениях на высоту тела (4.20) и объем (4.21). Прежде всего покажем, что такая задача без дополнительных условий поставлена неправильно. Рассмотрим осесимметричное тело, сечение которого полуплоскостью $\theta = \text{const}$ изображено на рис. 29. Будем считать, что шаг зубца "пилы" равен ρ/n (n – натуральное число, а высота зубца равна ϵ. Тогда $|\partial u/\partial r| = 2\epsilon n/\rho$, и сила, действующая на тело, равна

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{2r\, dr\, d\theta}{1 + u_r^2} = \frac{2\pi\rho^2}{1 + 4\epsilon^2 n^2/\rho^2}. \tag{4.30}$$

Следовательно, $\mathcal{F}(u) \to 0$ при $n \to \infty$.

Выбором постоянных a и ϵ можно добиться того, чтобы рассматриваемые поверхности удовлетворяли ограничениям на объем и высоту тела. Если параметр ϵ сви-

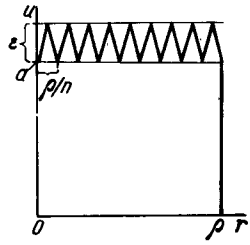


Рис. 29.

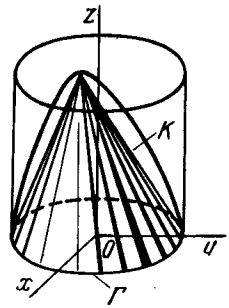


Рис. 30.

тать зависящим от n и устремить к нулю, то последовательность поверхностей будет сходиться (в метрике C) к цилиндру, закрытому при $z = a$ плоской крышкой. Если дополнительно потребовать, чтобы $\epsilon n \to \infty$ при $n \to \infty$, то, согласно (4.30), соответствующая сила сопротивления стремится к нулю.

Существование последовательности поверхностей, на которой $\mathcal{F} \to 0$, показывает, что задача о минимуме функционала $\mathcal{F}(u)$ на множестве тел с ограниченными сверху высотой и объемом поставлена неправильно. Ясно, что дополнительные ограничения на высоту и объем снизу не могут сделать задачу корректной.

С другой стороны, как было показано выше, ограниченне сверху на площадь поверхности тела делает задачу корректной. Поэтому естественно либо наложить ограничение сверху на площадь поверхности тела, либо вместе с ограннчением на высоту илн объем тела так сузить множество допустимых функций и $u(x, y)$, чтобы на нем из ограниченности сверху высоты или объема следовала ограниченность сверху площади поверхности тела. Последнее означает, что на множестве допустимых функций $\mathcal{M}$ должно выполняться неравенство

$$\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy - \Omega \leqslant l \max_\Omega u(x, y) \tag{4.31}$$

в случае ограничения на высоту и неравенство

$$\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy - \Omega \leqslant k \int_\Omega u\, dx\, dy \tag{4.32}$$

в случае ограничення на объем.

Неравенства (4.31) н (4.32) справедлнвы, например, для вогнутых функций $u(x, y)$ (головная часть тела выпукла). Действнтельно, для вогнутой функции $u(x, y)$ площадь поверхности ее графика $z = u(x, y)$ может быть оценена сверху площадью поверхности цилиндра с поперечным сечением Ω и высотой $\max_\Omega u(x, y)$ (рис. 30). Постоянная l в (4.31) имеет смысл длнны контура Γ.

Неравенство (4.32) для вогнутых функций следует из (4.13). Для доказательства построим конус K, соединив максимально удаленную от плоскости $z = 0$ точку тела с точками контура Γ (рис. 30). В силу выпуклости головной части конус K лежит внутри тела. Объем конуса K, равный $^1/_3\ \Omega \max_\Omega u(x, y)$, оценивает снизу объем тела

$$\frac{1}{3}\Omega \max_\Omega u(x, y) \leqslant \int_\Omega u\, dx\, dy. \tag{4.33}$$

Из неравенств (4.33) и (4.31) следует неравенство (4.32) с постоянной k, равной $3l/\Omega$.

В снлу (4.31) и (4.32) задачи о форме тела минимального сопротивления на множествах выпуклых тел с ограниченной высотой илн с ограниченным объемом правильно поставлены. Решения этих задач неизвестны. Имеются лишь некоторые прнближенные подходы, связанные с дополнительными допущениями относительно симметрин тела (сводящие задачу к одномерной) или толщины тела (видонзменяющие функционал).

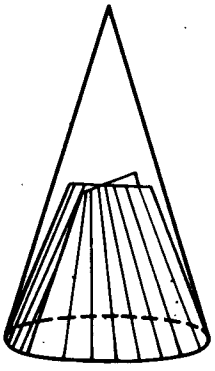


Рис. 31.

Значение рассмотренных выше задач несколько обесценивается их крайней чувствительностью к характеру наложенных ограничений. Предположим, что форма тела минимального сопротивления на некотором множестве функций имеет вид, изображенный на рис. 31. Основание этого тела есть круг. Обозначим площадь поверхности тела через S_0, а площади поверхности допустимых тел через S. Если сузить множество допустимых функций, наложив ограничение

$$S \leqslant S_0,$$

то форма оптимального тела не изменится. Расширим теперь множество допустимых функций, сняв все ограничения, кроме условия $S \leqslant S_0$. Тогда, как было показано выше, тело минимального сопротивления есть круговой конус с площадью поверхности S_0. При этом сопротивление конуса не больше сопротивления тела, изображенного на рис. 31. Таким образом, при некотором изменении характера ограничений существенно меняется форма тела без увеличения силы сопротивления.

Приведенное рассуждение показывает также, что в любой задаче сила сопротивления не может быть сделана меньше чем $2\,\Omega (S_0/\Omega)^2$.

Принцип максимума Понтрягина. Рассмотрим вариационную задачу

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, x^i(t), u^\kappa(t))\,dt \to \inf \tag{4.34}$$

при ограничениях

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^i(t), u^\kappa(t)), \quad i = 1, \ldots, n; \quad \kappa = 1, \ldots, m, \tag{4.35}$$

$$x^i(t_0) = x_0^i, \tag{4.36}$$

$$u^\kappa(t) \in U, \tag{4.37}$$

где U – некоторое множество в R_m. Вариационная задача (4.34)–(4.37) содержит дифференциальные ограничения (4.35). Если заданы функции $u^\kappa(t)$, удовлетворяющие условию (4.37), то система дифференциальных уравнений (4.35) с начальными данными (4.36) определит функции $x^i(t)$. По $x^i(t)$ и $u^\kappa(t)$ вычисляется значение функционала $I(x, u)$. Минимизация функционала $I(x, u)$ сводится к минимизации $I(x, u)$ по всем допустимым функциям $u^\kappa(t)$.

Вариационная задача (4.35)–(4.37) представляет пример задачи теории оптимального управления. Проиллюстрируем на ней как строится двойственная вариационная задача.

Перепишем (4.34)–(4.37) как минимаксную задачу, вводя множители Лагранжа $p_i(t)$:

$$\underline{I} = \inf_{\substack{x \in (4.36) \\ u \in (4.37)}} \sup_p \int_{t_0}^{t_1} \left[\Lambda(t, x^i, u^\kappa) + p_i(t)\left(\frac{dx^i}{dt} - f^i(t, x^i, u^\kappa)\right)\right] dt.$$

Предположим, что можно изменить порядок вычисления нижней и верхней граней:

$$\underline{I} = \sup_p \inf_{\substack{x \in (4.36) \\ u \in (4.37)}} \int_{t_0}^{t_1} \left[\Lambda(t, x^i, u^\kappa) + p_i(t)\left(\frac{dx^i}{dt} - f^i(t, x^i, u^\kappa)\right)\right] dt. \tag{4.38}$$

Задача о минимизации в (4.38) уже не содержит дифференциальных связей.

Введем функцию Понтрягина

$$\mathcal{H}(t, p, x, u) = p_i f^i(t, x^j, u^\kappa) - \Lambda(t, x^i, u^\kappa)$$

и перепишем (4.38) в форме

$$\underline{I} = \sup_{p} \inf_{\substack{x \in (4.36) \\ u \in (4.37)}} \int_{t_0}^{t_1} \left[p_i \frac{dx^i}{dt} - \mathcal{H}(t, p, x, u) \right] dt. \tag{4.39}$$

Минимизация по u в (4.39) сводится к алгебраической задаче максимизации по u функции Понтрягина $\mathcal{H}$. Обозначим ее максимальное значение по u через $H(t, x, p)$:

$$H(t, x, p) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, p, x, u).$$

Таким образом, после вычисления верхней грани вариационная задача (4.39) свелась к принципу Гамильтона

$$\underline{I} = \sup_{p} \inf_{x \in (4.36)} \int_{t_0}^{t_1} \left[p_i \frac{dx^i}{dt} - H(t, p, x) \right] dt.$$

Изложенное представляет алгоритмическую часть принципа максимума Понтрягина. Доказательство и более полная его формулировка имеется в работах, процитированных в библиографических замечаниях.

Интегральные связи для производных. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = \int_V \Lambda(x, u_{,i}) d^n x$$

на множестве функций $u(x)$, $x \in R_n$, принимающих на ∂V заданное значение $\tilde{u}$. Попытаемся переформулировать эту задачу как задачу о минимуме функционала

$$\int_V \Lambda(x, u_i) d^n x$$

на множестве n функций $u_i(x)$, причем функции $u_i(x)$ подчинены связям, в силу которых $u_i(x)$ есть производные по x^i некоторой функции $u(x)$, равной $\tilde{u}$ на ∂V. Конечно, имеется тривиальный ответ на первую часть вопроса: u_i должны удовлетворять в области V условиям $u_{i,j} = u_{j,i}$, однако нас будут интересовать ответы другого типа – связи, имеющие интегральный характер. Для построения таких связей нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1. Для того чтобы непрерывно дифференцируемые в некоторой односвязной области V функции $p^i(x)$ удовлетворяли уравнению

$$p^i{}_{,i} = 0, \tag{4.40}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись дважды непрерывно дифференцируемые функции $\psi^{ij}(x)$ такие, что

$$p^i = \partial_j \psi^{ij}, \quad \psi^{ij} = -\psi^{ji}. \tag{4.41}$$

Доказательство. Очевидно, что из (4.41) следует (4.40). Докажем, что из (4.40) следует (4.41), причем для простоты ограничимся случаем, когда $V = R_n$.

Для любых функций $p^i(x)$, удовлетворяющих уравнению (4.40), можно найти решение $\psi^i(x)$ уравнений

$$\Delta \psi^i(x) - \partial^i \partial^j \psi_j(x) = p^i(x). \tag{4.42}$$

Действительно, применяя к (4.42) преобразование Фурье, получим

$$-k^2 \psi^i(k) + k^i k^j \psi_j(k) = p^i(k), \tag{4.43}$$

где $p^i(k)$, $\psi^i(k)$ – преобразования Фурье функций $p^i(x)$, $\psi^i(x)$, k^i – волновые числа (параметры преобразования Фурье), $k^2 = k_i \cdot k^i$. Уравнения (4.43) представляют систему линейных уравнений для $\psi^i(k)$. Ранг матрицы этой системы $\| -k^2 \delta^{ij} + k^i k^j \|$ равен $n - 1$. Необходимое условие разрешимости уравнений (4.43) имеет вид $p^i(k) k_i = 0$ и выполняется в силу (4.40). Из (4.43) находим $\psi^i(k) = -k^{-2} p^i(k) + \psi(k) k^i$, где $\psi(k)$ – произвольная функция. Таким образом, для любых функций $p^i(x)$ существуют функции $\psi^i(x)$, удовлетворяющие (4.42). Формулы (4.42) имеют вид (4.41) с $\psi^{ij} = \partial^j \psi^i - \partial^i \psi^j$.

Лемма 2. Для того чтобы в односвязной области V функции $u_i(x)$ представляли производные некоторой функции $u(x)$, равной $\tilde{u}$ + const на ∂V, необходимо и достаточно, чтобы для всех гладких полей $p^i(x)$, удовлетворяющих уравнению (4.40), выполнялось равенство

$$\int_V p^i u_i d^n x = \int_{\partial \cdot V} p^i n_i \tilde{u} d^{n-1} x. \tag{4.44}$$

Доказательство. Если $u_i = u_{,i}$ и $u = \tilde{u}$ + const на ∂V, то равенство (4.44) выполняется. Пусть теперь равенство (4.44) выполняется для любых решений уравнения (4.40). Согласно лемме 1 равенство (4.44) можно записать в виде

$$\int_V u_i \partial_j \psi^{ij} d^n x = \int_{\partial V} \tilde{u} n_i \partial_j \psi^{ij} d^{n-1} x.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_V \psi^{ij} u_{[i,j]} d^n x = \int_{\partial V} \tilde{u} n_i \partial_j \psi^{ij} d^{n-1} x. \tag{4.45}$$

Квадратными скобками в индексах отмечается альтернирование: $a_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$.

Пусть $x^i = r^i(\zeta^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, n-1$, – уравнения поверхности ∂V. Используя систему обозначений, введенную для поверхностей в R_3 (см. § 3, гл. I), и разложение производной типа (1.3.104), для свертки $n_i \partial_j \psi^{ij}$ можно написать:

$$n_i \partial_j \psi^{ij} = n_i r_j^{\ \alpha} \psi^{ij}_{\ ,\alpha}. \tag{4.46}$$

Таким образом, свертка (4.46) содержит только производные ψ^{ij} вдоль поверхности ∂V. Положим $\psi^{ij} = 0$ на ∂V. Тогда интеграл в правой части (4.45) обратится в нуль. В силу произвольности ψ^{ij} из (4.45) по основной лемме вариационного исчисления находим, что $u_{i,j} = u_{j,i}$ в V. Сле-

довательно, существует функция $u(x)$ такая, что $u_i = u_{,i}$. По непрерывности это верно и на ∂V.

Для любых функций $u(x)$ и $\psi^{ij}(x) = -\psi^{ji}(x)$ справедливо тождество

$$\int_{\partial V} (u_{,i}\psi^{ij} - u\psi^{ji}_{,i}) n_j d^{n-1}x = 0. \tag{4.47}$$

Оно проверяется переходом к интегрированию по V.

Из (4.45) и (4.47) следует, что

$$\int_{\partial V} (\tilde{u} - u) n_i \partial_j \psi^{ij} d^{n-1}x = 0 \tag{4.48}$$

для любых функций ψ^{ij} на ∂V. Будем считать, что пространство R_n снабжено евклидовой метрикой, а $d^{n-1}x$ – элемент площади поверхности на ∂V. Тогда n_i – вектор внешней единичной нормали к ∂V. Свертка $n_i r^{\alpha}_j \psi^{ij}_{,\alpha}$ имеет дивергентный вид (∇_α – поверхностная ковариантная производная вдоль ∂V)

$$n_i r^{\alpha}_j \psi^{ij}_{,\alpha} = \nabla_\alpha (n_i r^{\alpha}_j \psi^{ij}). \tag{4.49}$$

Это следует из равенства

$$\nabla_\alpha (n_i r^{\alpha}_j) = \nabla_\alpha (n_j r^{\alpha}_i), \tag{4.50}$$

которое устанавливается при помощи формул вида (1.3.112), (1.3.113). Поэтому $\tilde{u} = u + \text{const}$.

Применим лемму 2 к переформулировке исходной вариационной задачи. Поскольку функционал не чувствует сдвигов по u на постоянную, нижняя грань не изменится, если ее искать на множестве функций $u(x)$, равных $\tilde{u} + \text{const}$ на ∂V. Это множество функций задается ограничениями (4.44). Ограничения (4.44) содержат континуум равенств, каждое из которых соответствует некоторому решению уравнения (4.40). Если V – ограниченная область, то из них можно выделить счетное число независимых ограничений, поскольку базис в пространстве решений не более чем счетен.

Метод размораживания интегральных связей. Оставим конечное число ограничений (4.44), соответствующее некоторому набору частных решений $p^i_{(1)}, \ldots p^i_{(m)}$ уравнений (4.40), а остальные ограничения отбросим. Тогда множество допустимых функций расширится, и нижняя грань функционала уменьшится. Ее можно найти, вводя множители Лагранжа $\lambda^1, \ldots, \lambda^m$; при этом получится следующая вариационная задача:

$$\inf_{u_i} \sup_{\lambda^1, \ldots, \lambda^m} \int_V (\Lambda(x, u_i) - (\lambda^1 p^i_{(1)} + \ldots + \lambda^m p^i_{(m)}) u_i) d^n x +$$

$$+ \int_{\partial V} (\lambda^1 p^i_{(1)} + \ldots + \lambda^m p^i_{(m)}) n_i \tilde{u} d^{n-1}x \leqslant \underline{I}.$$

Переставим порядок вычисления нижней и верхней граней. Нахождение минимума по u_i сводится к вычислению преобразования Юнга–Фенхеля функции Λ по u_i. Поэтому

$$\sup_{\lambda^1, \ldots, \lambda^m} \left(\int_{\partial V} p^i n_i \tilde{u} d^{n-1}x - \int_V \Lambda^*(x, p_i) d^n x \right) \leqslant \underline{I},$$

где через p^i обозначена сумма $p^i = \lambda^1 p^i_{(1)} + \ldots + \lambda^m p^i_{(m)}$.

Отсюда видно, что метод размораживания интегральных связей эквивалентен методу Рэлея–Ритца для двойственной задачи, а сам метод интегральных связей идейно близок методам теории двойственности.

Сказанное легко распространяется на интегральные функционалы общего вида

$$\int_V \Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_{,i})\, d^n x. \tag{4.51}$$

Это обобщение основано на следующем утверждении.

Л е м м а 3. Для того чтобы функции $u^\kappa(x)$ и $u^\kappa_i(x)$ удовлетворяли соотношениям $u^\kappa_i = u^\kappa_{,i}$, $u^\kappa = \tilde{u}^\kappa$ на ∂V_u, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений уравнений

$$p_\kappa - p^i_{\kappa,i} = 0 \text{ в } V, \quad p^i_\kappa n_i = 0 \text{ на } \partial V_p = \partial V - \partial V_u \tag{4.52}$$

выполнялось равенство

$$\int_V (p_\kappa u^\kappa + p^i{}_\kappa u^\kappa_i)\, d^n x = \int_{\partial V_u} p^i_\kappa n_i \tilde{u}^\kappa\, d^{n-1} x. \tag{4.53}$$

Лемма 3 становится очевидной, если переписать равенство (4.53) на основании (4.52) в виде

$$\int_V (p^i_{\kappa,i} u^\kappa + p^i_\kappa u^\kappa_i)\, d^n x = \int_{\partial V_u} p^i_\kappa n_i \tilde{u}^\kappa\, d^{n-1} x \tag{4.54}$$

и учесть, что в (4.54) $p^i_\kappa(x)$ – произвольные функции с равными нулю на ∂V_p нормальными составляющими векторов p^i_κ.

В силу леммы 3 задачу о минимуме функционала (4.51) можно переписать как задачу о минимуме функционала

$$\int_V \Lambda(x^i, u^\kappa, u^\kappa_i)\, d^n x$$

по всем функциям $u^\kappa(x)$ и $u^\kappa_i(x)$, удовлетворяющим связям (4.53) (или (4.54)).

Принцип сечений. В задачах, не содержащих ограничений, иногда бывает полезным ввести дополнительные ограничения при помощи следующего построения.

Представим множество $\mathcal{M}$ элементов u в виде объединения непересекающихся подмножеств $\mathcal{M}_v$: $\mathcal{M} = \cup_v \mathcal{M}_v$, где v пробегают некоторое множество $\mathcal{N}$. Подмножества $\mathcal{M}_v$ назовем сечениями множества $\mathcal{M}$.

Задачу о минимуме функционала $I(u)$ на $\mathcal{M}$ можно решать в два этапа. Сначала ищется минимум $I(u)$ на множестве элементов $\mathcal{M}_v$. Минимальное значение J функционала $I(u)$ на M_v будет зависеть от v:

$$J(v) = \inf_{u \in \mathcal{M}_v} I(u).$$

Затем ищется минимум функционала $J(v)$ на $\mathcal{N}$:

$$\underline{I} = \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v). \tag{4.55}$$

Докажем справедливость равенства (4.55). Обозначим $\inf J(v)$ через $\underline{J}$. Так как $\underline{I} \leqslant I(u)$, то и $\underline{I} \leqslant J(v)$, $\underline{I} \leqslant \underline{J}$. Допустим, что $\underline{I} < \underline{J}$. По определению

нижней грани найдется последовательность u_n, для которой $I(u_n) \to \underline{I}$. Обозначим через v_n элемент v, для которого $u_n \in \mathcal{M}_v$. Поскольку $\underline{I} \leqslant J(v_n) \leqslant I(u_n)$, $J(v_n) \to \underline{I}$. Это опровергает сделанное предположение.

Утверждение (4.55) называют принципом сечений. В дальнейшем оно будет неоднократно использоваться.

§ 5. ВАРИАЦИОННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Во многих задачах механики и физики присутствуют малые или большие параметры. Это могут быть соответствующим образом обезразмеренные геометрические параметры – толщина пластинки или оболочки, диаметр поперечного сечения стержня, диаметр кристаллита в поликристалле, амплитуда деформаций или перемещений сплошной среды, длина волны, движущейся в сплошной среде, число молекул газа в сосуде, или физические параметры – вязкость или теплопроводность жидкости, частота колебаний упругого тела и т.п. Для исследования подобных задач в математической физике известен ряд асимптотических подходов. В то же время ясно, что для задач, допускающих вариационную постановку и, следовательно, имеющих специальную структуру, должен существовать прямой вариационный подход, основанный на непосредственном асимптотическом анализе соответствующих функционалов и автоматически учитывающий вариационную структуру уравнений и те свойства результатов, которые ею диктуются.

Приемы асимптотического анализа функционалов изложены в настоящем параграфе. Эти приемы носят в основном эвристический характер и не имеют пока строгого математического обоснования. Однако в задачах, допускающих точные решения или исследованных другими методами, имеется полное соответствие результатов.

Метод асимптотического анализа функционалов, который мы будем дальше называть вариационно-асимптотическим методом, позволяет с единой точки зрения рассматривать задачи о минимуме функций конечного числа переменных с малым параметром и задачи с малым параметром для дифференциальных уравнений вариационного типа.

В применении к задачам с дифференциальными уравнениями вариационно-асимптотический метод имеет ряд преимуществ по сравнению с известными асимптотическими подходами, прежде всего за счет свойственной всем вариационным методам простоты и лаконичности анализа, выигрыш от которых тем заметнее, чем сложнее система дифференциальных уравнений. Дело в том, что вместо системы дифференциальных уравнений при вариационном подходе асимптотическому анализу подвергается фактически одна функция – лагранжиан.

Другая особенность связана с тем, что при асимптотическом анализе уравнений свойство уравнений иметь вариационную структуру может утрачиваться. Проиллюстрируем это на системе двух линейных алгебраических уравнений, содержащих малый параметр ϵ,

$$x + \epsilon(x - y) = 1, \quad y + \epsilon(y - x) = 0.$$

Ее можно интерпретировать как условия равновесия двух слабо взаимодействующих пружинок, к одной из которых приложена внешняя сила.

Поставим следующую задачу: построить приближенную систему уравнений, решение которой совпадает с решением исходной системы в членах порядка 1 и ϵ и может отличаться в членах порядка ϵ^2 и выше. Поскольку $x \sim 1$ и $y \sim \epsilon$, единственное возможное "упрощение" – отбрасывание члена ϵy, который имеет порядок ϵ^2. Получим систему

$$x + \epsilon x = 1, \quad y - \epsilon x = 0.$$

Исходная система является системой уравнений вариационного типа: левые части уравнений представляют производные от функции $f = {}^1/_2(x^2 + 2\epsilon(x-y)^2 + y^2)$, а сами уравнения есть условия стационарности функции $f - x$. Для приближенной системы уравнений не существует функции $f(x, y, \epsilon)$, производные от которой по x и y были бы левыми частями приближенных уравнений. Подобная ситуация типична в теории дифференциальных уравнений с малым параметром.

Приближенные уравнения, которые получаются при помощи асимптотического анализа функционалов, автоматически всегда имеют вариационную структуру.

Определенное значение имеет вариационный подход в асимптотических задачах и в связи с проблемой коротковолновой экстраполяции, которая будет обсуждаться в § § 2, 4 гл. IV.

В основе вариационно-асимптотического метода лежит естественная и нередко использовавшаяся в физике идея о возможности отбрасывать малые члены в энергии. Однако для ее применения надо еще научиться распознавать малые члены, уметь анализировать ситуации, когда после отбрасывания малых членов теряются единственность или существование решения, и, кроме того, понимать, как малые члены влияют на следующие приближения и как строится итерационный процесс.

Мы сформулируем вариационно-асимптотический метод в виде ряда правил, которые будут проиллюстрированы на нескольких примерах, другие приложения встретятся в последующих главах.

Пусть функционал $I(u, \epsilon)$ определен на некотором множестве элементов $\mathcal{M}$ и зависит от малого параметра ϵ. Будем считать, что функционал $I(u, \epsilon)$ имеет конечное или счетное число стационарных точек. Стационарные точки обозначаются через $\breve{u}$ и, во избежание громоздких обозначений, не нумеруются. Стационарные точки $\breve{u}$ являются функциями ϵ. Это обстоятельство будем подчеркивать, ставя у $\breve{u}$ индекс ϵ.

Пусть $\breve{u}_\epsilon$ при $\epsilon \to 0$ стремится к $\breve{u}_0$. Возникают следующие вопросы: как построить функционал, стационарные точки которого есть $\breve{u}_0$? Как построить уточненный функционал, стационарные точки которого представляют приближения к $\breve{u}_\epsilon$ заданной точности?

Ясно, что ответы на них связаны с упрощением функционала за счет отбрасывания малых несущественных членов. Естественно начать с исследования функционала, в котором опущены все формально малые члены, т.е. функционала $I_0(u) = I(u, 0)$. Могут представиться следующие случаи:

функционал $I_0(u)$ имеет изолированные стационарные точки;

функционал $I_0(u)$ имеет неизолированные стационарные точки;

функционал $I_0(u)$ не имеет стационарных точек;

функционал $I_0(u)$ не имеет смысла, т.е. функционал $I(u, \epsilon)$ не определен при $\epsilon = 0$.

Начнем с рассмотрения первого случая. Естественно ожидать, что стационарные точки функционала $I_0(u)$ являются первым приближением к стационарным точкам исходного функционала.

Пример 1. Исследуем поведение при $\epsilon \to 0$ стационарных точек функции одного переменного

$$f(u, \epsilon) = u^2 + u^3 + 2\epsilon u + \epsilon u^2 + \epsilon^2 u. \tag{5.1}$$

Функция $f_0(u) = u^2 + u^3$ имеет две стационарные точки $u = 0$ и $u = -2/3$. Нетрудно проверить, что они действительно являются пределами при $\epsilon \to 0$ стационарных точек функции $f(u, \epsilon)$.

Второй член асимптотики будем искать следующим образом. Представим u в виде $u = \breve{u}_0 + u'$, где $\breve{u}_0$ – стационарная точка функционала $I_0(u)$, а $u' \to 0$ при $\epsilon \to 0$, и сохраним в функционале $I(u_0 + u', \epsilon)$ главные члены, содержащие u'. Получим функционал $I_1(u', \epsilon)$. Естественно ожидать, что его стационарные точки по u' представляют следующий член асимптотики.

Пример 1 (*продолжение*). Рассмотрим стационарную точку функции (5.1) в окрестности нуля. Считая u малым, оставим в (5.1) только главные по u члены. Поскольку ϵu^2 и u^3 малы по сравнению с u^2, член $\epsilon^2 u$ мал по сравнению с $2\epsilon u$, имеем

$$f_1(u, \epsilon) = u^2 + 2\epsilon u.$$

Слагаемые u^2 и $2\epsilon u$ надо сохранить, поскольку нельзя указать членов, по сравнению с которыми они малы. Функция f_1 имеет стационарную точку $u = -\epsilon$. Итак, асимптотика стационарной точки функции $f(u, \epsilon)$ в окрестности нуля имеет вид $\breve{u}_\epsilon = -\epsilon + o(\epsilon)$. В этой точке функция $f(u, \epsilon)$ устроена так же, как и функция $f_1(u, \epsilon)$, т.е. имеет минимум.

Рассмотрим стационарную точку функции $f(u, \epsilon)$ в окрестности точки $u = -2/3$. Полагая $u = -2/3 + u'$ и оставляя в функции $f(-2/3 + u', \epsilon)$ главные члены по u', придем к функции[1]) $-u'^2 + 2/3\,\epsilon u'$. Отсюда $u' = 1/3\,\epsilon$, и асимптотика второй стационарной точки имеет вид $\breve{u}_\epsilon = -2/3 + 1/3\,\epsilon + o(\epsilon)$; функция $f(u, \epsilon)$ имеет в ней локальный максимум.

Аналогично строятся следующие члены асимптотики. Например, для стационарной точки $f(u, \epsilon)$ в окрестности нуля ищем u в виде $u = -\epsilon + u''$, $u'' = o(\epsilon)$. Оставляя в функции $f(u, \epsilon) = (-\epsilon + u'')^2 + (-\epsilon + u'')^3 + 2\epsilon(-\epsilon + u'') + \epsilon(-\epsilon + u'')^2 + \epsilon^2(-\epsilon + u'')$ только главные члены по u'', получим функцию $u''^2 + 2\epsilon^2 u''$. Поэтому $u'' = -\epsilon^2$ и $\breve{u}_\epsilon = -\epsilon - \epsilon^2 + o(\epsilon^2)$.

Обратим внимание, что порядок малости u' не задается a priori, а определяется.

Подчеркнем также, что слагаемые, которые были несущественными при построении главного члена асимптотического разложения, могут стать главными при определении следующих членов разложения.

Рассмотренный пример показывает, что центральным вопросом при асимптотическом анализе функционалов является выделение главных и второстепенных (отбрасываемых в первом приближении) членов. Часто

[1]) Здесь и дальше аддитивные постоянные опускаются без дополнительных оговорок.

основной и наиболее трудный этап исследования задач связан с распознаванием и обоснованием малости второстепенных членов. Однако в некоторых случаях распознавание второстепенных членов не представляет затруднений. Приведем два условия, при выполнении которых слагаемые можно считать второстепенными.

Пусть функционал $I(u, \epsilon)$ содержит два слагаемых $A(u, \epsilon)$ и $B(u, \epsilon)$, причем

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{u \in \mathcal{M}} \left| \frac{B(u, \epsilon)}{A(u, \epsilon)} \right| = 0. \tag{5.2}$$

Тогда слагаемое $B(u, \epsilon)$ является второстепенным по сравнению с $A(u, \epsilon)$ для всех стационарных точек. Мы будем называть такие слагаемые глобально второстепенными.

Пусть $\breve{u}_\epsilon \to 0$ при $\epsilon \to 0$, и для любой последовательности $\{u_n\}$, сходящейся к $u = 0$, существует равный нулю предел

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \frac{B(u_n, \epsilon)}{A(u_n, \epsilon)} = 0. \tag{5.3}$$

Тогда для стационарной точки $\breve{u}_\epsilon$ слагаемое $B(u, \epsilon)$ является второстепенным по сравнению с $A(u, \epsilon)$. Сходимость $u_n \to 0$ понимается в том же смысле, что и сходимость $\breve{u}_\epsilon \to 0$. Слагаемое $B(u, \epsilon)$ будем называть локально второстепенным по сравнению с $A(u, \epsilon)$.

Случай $\breve{u}_\epsilon \to \breve{u}_0$, $\breve{u}_0 \neq 0$ сводится к случаю $\breve{u}_\epsilon \to 0$ заменой $u \to u'$: $u = \breve{u}_0 + u'$.

В определениях (5.2), (5.3) естественно исключить в $A(u, \epsilon)$ несущественную аддитивную постоянную. Это можно сделать, например, при помощи условия

$$A(0, \epsilon) = 0.$$

В примере 1 слагаемое ϵu^2 является глобально второстепенным по сравнению с u^2, $\epsilon^2 u$ — по сравнению с $2\epsilon u$, а слагаемое u^3 локально второстепенно по сравнению с u^2 в окрестности точки $u = 0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(u, \epsilon) = \ln(1 + 2u) - \frac{1 + 2u}{1 + 2u^2} + \epsilon u. \tag{5.4}$$

Функция $f_0(u) = \ln(1 + 2u) - \dfrac{1 + 2u}{1 + 2u^2}$ имеет стационарную точку $u = 0$. Первые члены разложения $f_0(u)$ в ряд по u есть $-1 + 20/3u^3$. Остальные члены являются локально второстепенными по сравнению с u^3. Поэтому исследование функции $f(u, \epsilon)$ можно заменить в первом приближении исследованием функции $20/3u^3 + \epsilon u$. Она имеет две стационарные точки $\pm\sqrt{-\epsilon/20}$, при $\epsilon \leqslant 0$ и не имеет стационарных точек при $\epsilon > 0$. Следовательно, так же устроена функция $f(u, \epsilon)$ в окрестности нуля.

Для каждого второстепенного слагаемого в смысле (5.2) или (5.3) можно указать член функционала, по сравнению с которым он мал. Вместе с такими слагаемыми функционал может содержать слагаемые, относи-

тельно которых заранее неясно, можно ли считать их пренебрежимо малыми, поскольку соответствующие "большие" члены в функционале отсутствуют, однако подозрение о малости этих слагаемых имеется. Например, у функции

$$f(u) = u^3 + \epsilon u^2 + \epsilon^3 u \tag{5.5}$$

слагаемое $\epsilon^3 u$, как будет дальше видно, несущественно для построения асимптотики одной из стационарных точек, однако оно не является второстепенным в смысле определений (5.2) или (5.3). Подобные слагаемые условимся называть сомнительными.

Пусть стационарные точки функционала, в котором сохранены сомнительные слагаемые, найти не удается, а соответствующую задачу для функционала $\widetilde{I}$, в котором сомнительные слагаемые отброшены, можно исследовать. Тогда следует оценить сомнительные слагаемые в стационарных точках функционала $\widetilde{I}$. Если сомнительные слагаемые меньше (в асимптотическом смысле) оставленных, то их отбрасывание не влияет на главные члены асимптотики стационарных точек. В противном случае сомнительные слагаемые надо удержать.

Пример 3. Рассмотрим стационарные точки функции (5.5) в окрестности нуля. Заранее нет оснований пренебречь каким-либо из слагаемых по сравнению с другим.

Отбросим сначала последнее слагаемое. Получим функцию $u^3 + \epsilon u^2$, имеющую стационарные точки $u = 0$ и $u = -{}^2/_3\,\epsilon$. В точке $u = 0$ неясно, можно ли отбрасывать последнее слагаемое. В точке $u = -{}^2/_3\,\epsilon$ это возможно, так как первые два слагаемых имеют порядок ϵ^3, а последнее ϵ^4.

Отбросим второе слагаемое. Получим функцию $u^3 + \epsilon^3 u$, которая не имеет стационарных точек для $\epsilon > 0$, а для $\epsilon \leqslant 0$ стационарные точки есть: $\pm\sqrt{-{}^1/_3\,\epsilon^3}$. При этом первое и третье слагаемые имеют порядок $\epsilon^{9/2}$, а второе — ϵ^4. Следовательно, отбрасывание второго слагаемого было незаконным.

Отбросим первое слагаемое. Функция $\epsilon u^2 + \epsilon^3 u$ имеет единственную стационарную точку $-\frac{1}{2}\,\epsilon^2$. При этом первое слагаемое имеет порядок ϵ^6 и гораздо меньше остальных двух, имеющих порядок ϵ^5. Следовательно, отбрасывание первого слагаемого было возможным.

Итак, в окрестности нуля выявлены две стационарные точки $\breve{u}_\epsilon = -{}^2/_3\,\epsilon + o(\epsilon)$ и $\breve{u}_\epsilon = -\frac{1}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$. Поскольку функция (5.5) имеет только две стационарные точки, все стационарные точки определены.

Пример 4 (*правило многоугольника Ньютона*). Для нахождения главного члена асимптотики стационарных точек функций вида

$$f(u, \epsilon) = \sum_{m,n}^{N} a_{mn}\epsilon^m u^n,$$

которые стремятся к нулю при $\epsilon \to 0$, можно использовать предложенный Ньютоном прием[1]), который мы опишем на функции

$$g(u, \epsilon) = u^3 + \epsilon u^2 + \epsilon u^3 + \epsilon^2 u^2 + \epsilon^2 u^4 + \epsilon^3 u + \epsilon^5 u^5.$$

[1]) Правило многоугольника Ньютона относится к задаче об асимптотике корней многочлена; здесь оно рассматривается в терминах задачи о стационарных точках функции $f(u, \epsilon)$, являющейся первообразной многочлена.

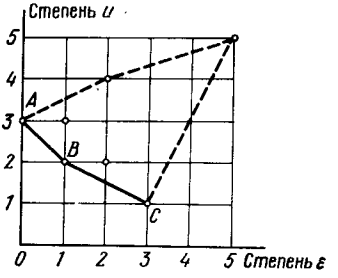


Рис. 32.

Поставим в соответствие каждому слагаемому функции точку двумерной целочисленной решетки с абсциссой равной степени ϵ и ординатой равной степени u. Картина, получающаяся для функции $g(u, \epsilon)$, изображена на рис. 32. Согласно правилу многоугольника Ньютона для построения главного члена асимптотики стационарных точек достаточно сохранить только те слагаемые, изображающие точки которых лежат на сторонах минимального выпуклого многоугольника, содержащего все множество изображающих точек. При этом для исследования асимптотики стационарных точек, стремящихся к нулю при $\epsilon \to 0$, достаточно взять слагаемые, соответствующие точкам, лежащим на той части границы многоугольника, которая выходит из точки A (см. рис. 32) направо вниз и заканчивается точкой, в которой граница в первый раз поворачивает вверх. На рис. 32 эта часть границы многоугольника изображена сплошной линией.

Выведем правило многоугольника Ньютона на примере функции $g(u, \epsilon)$ при помощи сформулированных выше приемов. Рассмотрим квадрант (степень $\epsilon \geqslant 0$, степень $u \geqslant 3$). Посольку исследуется асимптотика $u \to 0$, все точки, лежащие в этом квадранте (кроме точки A), можно отбросить – они соответствуют слагаемым, локально второстепенным по сравнению с u^3. По этой же причине следует отбросить все точки (кроме точки B), лежащие в квадранте (степень $\epsilon \geqslant 1$, степень $u \geqslant 2$), – соответствующие слагаемые локально второстепенны по сравнению с ϵu^2. Остались три точки A, B и C. Им соответствует функция (5.5), рассмотренная в примере 3. Она имеет две стационарные точки, для построения асимптотики которых надо взять слагаемые, соответствующие двум ребрам многоугольника Ньютона AB и BC.

Вывод правила многоугольника Ньютона в случае многочленов общего вида аналогичен рассмотренному.

Перейдем теперь к более интересному для физических приложений случаю, когда при отбрасывании второстепенных членов возникают неизолированные стационарные точки.

Типичную конечномерную ситуацию можно проиллюстрировать на функции двух переменных ($u = \{x, y\}$) вида

$$f(x, y, \epsilon) = f_0(x) + \epsilon g(x, y), \quad x \in R_1, \ y \in R_1, \tag{5.6}$$

где функция $f_0(x)$ имеет некоторые стационарные точки $\overset{\vee}{x}_0$.

Если отбросить второстепенный член $\epsilon g(x, y)$, то получим функцию $\widetilde{f}(x, y, \epsilon) = f_0(x)$, имеющую континуум стационарных точек $(\overset{\vee}{x}_0, y)$, $y \in R_1$.

Прежде чем формулировать общее правило исследования таких случаев, рассмотрим примеры.

Пример 5. Будем искать асимптотику при $\epsilon \to 0$ стационарных точек функции

$$f(x, y, \epsilon) = \cos(x - y) + \epsilon\left(\frac{1}{x} + y\right), \quad x, y \in R_1.$$

Если при $\epsilon \to 0$ величина $\frac{1}{\check{x}_\epsilon} + \check{y}_\epsilon$ ограничена, то второе слагаемое является второстепенным и $f_0(x, y) = \cos(x - y)$. Обозначим через $\mathcal{M}_0$ множество стационарных точек функции f_0: $y = x + \pi k$, $x \in R_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Рассмотрим функцию $f(x, y, \epsilon)$ на множестве $\mathcal{M}_0$. Функция $f(x, y, \epsilon)$ на $\mathcal{M}_0$ становится функцией одной переменной x (и числа k): $f = \cos \pi k + \epsilon(1/x + x + \pi k)$. Стационарные точки f на $\mathcal{M}_0$ по x есть $x = \pm 1$. Естественно ожидать, что стационарные точки функции $f(x, y, \epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ сходятся к точкам $(\pm 1, \pm 1 + \pi k)$. Правильность этого предположения можно проверить непосредственно: достаточно сделать замену $y \to z$: $y = x + z$, и функция f перейдет в сумму функций, зависящих только от x и от z

$$f = \cos z + \epsilon z + \epsilon\left(\frac{1}{x} + x\right),$$

для которой высказанное утверждение очевидно. Тем не менее описанная простая рецептура построения стационарных точек, может привести и к неверному результату. Это показывает следующий пример.

Пример 6. Будем искать стационарную точку квадратичной формы

$$f(x, y, \epsilon) = x^2 - 2x + 4\epsilon(x - 1)y + \epsilon^2 y^2 + 2\epsilon^2 y.$$

Множество $\mathcal{M}_0$ стационарных точек функции $f_0(x, y) = x^2 - 2x$ состоит из точек $(1, y)$. Функция $f(x, y, \epsilon)$ на $\mathcal{M}_0$ является функцией от y: $f = \epsilon^2(y^2 + 2y)$. Эта функция имеет стационарную точку $y = -1$. По аналогии с предыдущим примером можно было бы думать, что стационарная точка функции $f(x, y, \epsilon)$ стремится при $\epsilon \to 0$ к точке $(1, -1)$. Это, однако, неверно. Действительно, выписывая условия стационарности функции f

$$x - 1 + 2\epsilon y = 0, \quad 2(x - 1) + \epsilon y + \epsilon = 0,$$

находим стационарные точки: $\check{x}_\epsilon = 1 - {}^2/_3\,\epsilon$, $\check{y}_\epsilon = {}^1/_3$. Попытаемся понять, почему получился неверный результат.

Зафиксируем некоторую точку множества $\mathcal{M}_0$ (она определяется заданием y). Поиск стационарной точки будем вести последовательно, отыскивая сначала стационарную точку по x при фиксированном y (при этом соответствующее стационарное значение f становится функцией только от y), а затем по всем y. Поскольку, как мы подозреваем, стационарная точка лежит в окрестности множества $\mathcal{M}_0$, достаточно рассмотреть не все значения x, а только те $x = 1 + x'$, для которых x' малы. Оставляя в $f(1 + x', y, \epsilon)$ главные члены по x', получим функцию $x'^2 + 4\epsilon x' y$, следовательно, $x' = -2\epsilon y$. Итак, на $\mathcal{M}_0$ мы должны рассмотреть не функцию $f(1, y, \epsilon)$, а функцию $f(1 - 2\epsilon y, y, \epsilon) = -3\epsilon^2 y^2 + 2\epsilon^2 y$, откуда $\check{y}_0 = {}^1/_3$, что находится в соответствии с точным результатом. Из проведенного рассмотрения следует, что стационарная точка является седловой — в ней функция f имеет минимум по x и максимум по y.

Различие ситуаций, возникших в примерах 5 и 6, заключается в следующем. Зафиксируем y в примере 5 и обозначим через x_0 стационарную точку функции $f_0(x, y)$ при фиксированном y ($x_0 = y + \pi k$). Пусть x' — первая поправка к x_0. Легко проверить, что функции $f(x_0 + x', y, \epsilon)$ и $f(x_0, y, \epsilon)$ будут различаться в членах порядка ϵ^2, а для вычисления y надо знать

члены порядка ϵ. В примере 6 функции $f(x_0 + x', y, \epsilon)$ и $f(x_0, y, \epsilon)$ различаются в членах порядка ϵ^4, однако для вычисления y надо знать именно члены порядка ϵ^2.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать общее правило построения стационарных точек.

Пусть $\mathcal{M}_0$ – множество стационарных точек функционала $I_0(u)$, и любой элемент $u \in \mathcal{M}$ можно однозначно представить в виде $u = u_0 + u'$, $u_0 \in \mathcal{M}_0$, $u' \in \mathcal{M}'$. Зафиксируем u_0 и, считая u' малым, оставим в функционале $I(u_0 + u', \epsilon)$ главные члены, содержащие u'. Получим некоторый функционал $I_1(u_0, u', \epsilon)$. Найдем стационарные точки I_1 по u'. Они будут зависет от u_0.

Предположим, что u' однозначно определяется по u_0: $u' = u'(u_0, \epsilon)$. Представим u в виде $u = u_0 + u'(u_0, \epsilon) + u''$, где $u_0 \in \mathcal{M}_0$, $u'' \in \mathcal{M}''$ и u'' в асимптотическом смысле меньше u'. Оставляя в функционале главные члены по u'', находим u'', и т.д.

Рассмотрим на $\mathcal{M}_0$ функционалы $I(u_0, \epsilon)$ и $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$. Если их стационарные точки различаются мало, то можно ожидать, что главное приближение к стационарным точкам исходной задачи дают стационарные точки функционала $I(u_0, \epsilon)$ на $\mathcal{M}_0$. Если же стационарные точки функционалов $I(u_0, \epsilon)$ и $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$ различаются существенно, а функционалов $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$ и $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon) + u''(u_0, \epsilon), \epsilon)$ мало, то главное приближение дают стационарные точки функционала $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$. Если стационарные точки функционалов $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$ и $I(u_0 + u'(u_0, \epsilon) + u''(u_0, \epsilon), \epsilon)$ различаются существенно, то надо рассмотреть следующие приближения.

После того как главный член асимптотического разложения найден, его уточнения строятся как описано выше.

Применение этой схемы иногда осложняется следующим обстоятельством: u' не определяется только по u_0 и содержит дополнительный произвол – при фиксированном u_0 элемент u' пробегает некоторое множество $\mathcal{M}_1$.

Пусть $\mathcal{M}_1$ таково, что любой элемент $u \in \mathcal{M}$ можно однозначно представить в виде $u = u_0 + u' + u''$, где $u_0 \in \mathcal{M}_0$, $u' \in \mathcal{M}_1$, $u'' \in \mathcal{M}''$. Далее аналогично ищем u''. Как правило, после конечного числа шагов дополнительные произволы исчезают и разложение $u = u_0 + u' + u'' + \ldots$ можно переписать в виде $u = v + w(v, \epsilon) + w'(v, \epsilon)$, где v пробегает некоторое множество $\mathcal{N}$, а следующие члены разложения $w, w', \ldots$ полностью определяются по v. Если стационарные точки функционала $I(v + w(v, \epsilon), \epsilon)$ на $\mathcal{N}$ мало отличаются от стационарных точек функционала $I(v, \epsilon)$, то стационарные точки функционала $I(v, \epsilon)$ на множестве $\mathcal{N}$ представляют главные члены асимптотического разложения стационарных точек исходного функционала. Если же стационарные точки функционала $I(v + w(v, \epsilon), \epsilon)$ существенно отличаются от стационарных точек функционала $I(v, \epsilon)$, но мало отличаются от стационарных точек функционала $I(v + w(v, \epsilon) + w'(v, \epsilon), \epsilon)$, то главное приближение дают стационарные точки функционала $I(v + w(v, \epsilon), \epsilon)$. В противном случае надо рассмотреть следующие приближения.

Обычно, для того чтобы судить о различии стационарных точек, достаточно сравнить значения функционалов: для мало различающихся функционалов их стационарные точки близки; соответствующие оценки для строго выпуклых функционалов были указаны в § 2.

Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 7. Вывод теории изгиба стержней Бернулли–Эйлера из теории Тимошенко. В классической теории изгиба стержней, построенной Д. Бернулли и Л. Эйлером, энергия есть функционал от прогиба стержня $u(x)$ вида

$$\mathcal{E}_{\text{Б}-\text{Э}}(u) = \frac{1}{2}\int_0^l Eh^4\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx. \tag{5.7}$$

Здесь E – коэффициент, зависящий от модулей упругости стержня и геометрии поперечного сечения, h – диаметр поперечного сечения, l – длина стержня. Если для определенности на концах стержня заданы кинематические краевые условия

$$u = \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad u = u_l, \frac{du}{dx} = -\psi_l \quad \text{при } x = l, \tag{5.8}$$

то истинный прогиб доставляет минимум функционалу (5.7) при ограничениях (5.8).

С.П. Тимошенко предложил уточненную теорию стержней, в которой кинематика стержня описывается двумя функциями – прогибом $u(x)$ и поворотом поперечного сечения $\psi(x)$. Величина $\psi(x)$ есть угол между положением поперечного сечения стержня в деформированном состоянии и вертикальным сечением. Энергия стержня в теории Тимошенко дается формулой

$$\mathcal{E}_{\text{Т}}(u) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[Eh^4\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + Gh^2\left(\psi + \frac{du}{dx}\right)^2\right] dx, \tag{5.9}$$

где $G > 0$ – некоторый коэффициент, определяемый по модулю сдвига и геометрии поперечного сечения.

Кинематическим условиям (5.8) в теории Тимошенко соответствуют условия

$$u = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = 0, \; u = u_l, \; \psi = \psi_l \quad \text{при } x = l. \tag{5.10}$$

Истинные значения прогиба $u(x)$ и поворота поперечных сечений $\psi(x)$ доставляют минимум функционалу (5.9) при ограничениях (5.10).

Покажем, что теорию Бернулли – Эйлера можно рассматривать как первое приближение (при $h \to 0$) в теории изгиба стержней Тимошенко.

Будем считать, что краевые данные u_l и ψ_l и модули E и G в процессе предельного перехода $h \to 0$ не меняются. Примем также, что минимизирующие функции мало меняются на расстояниях порядка h. Это означает, в частности, что $h^2(d\psi/dx)^2 \ll \psi^2$. Выделим в функционале главные члены. Поскольку $Eh^4(d\psi/dx)^2 \ll Gh^2\psi^2$, главные члены имеют вид

$$\mathcal{E}_0(u, \psi) = \frac{1}{2}\int_0^l Gh^2\left(\psi + \frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Минимизируем функционал $\mathcal{E}_0(u, \psi)$ при ограничениях (5.10). Минимум функционала $\mathcal{E}_0$ равен нулю и достигается на функциях u и ψ, связанных соотношением

$$\psi = -du/dx. \tag{5.11}$$

Следовательно, множество $\mathcal{M}_0$ состоит из пар (u, ψ), причем $u(x)$ — произвольные функции, принимающие на краю, в силу (5.10) и (5.11), краевые значения (5.8), а функции $\psi(x)$ вычисляются через $u(x)$ по формуле (5.11).

Соотношение (5.11) имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что в первом приближении поперечное сечение стержня после деформации остается перпендикулярным к деформированному положению средней линии стержня.

При выполнении условий общей схемы (u' однозначно определяется по u_0 и разность $I(u_0, \epsilon) - I(u_0 + u'(u_0, \epsilon), \epsilon)$ мала) в первом приближении надо минимизировать функционал $\mathcal{E}_T(u, \psi)$ на $\mathcal{M}_0$. Так как на $\mathcal{M}_0$ $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{Б-Э}$, эта задача сводится к вычислению u по теории Бернулли—Эйлера.

Проверим теперь эти условия. Для дальнейших вычислений удобно сделать замену искомых функций и перейти от функции ψ к новой функции $\varphi = \psi + du/dx$. Функция φ имеет смысл угла сдвига, образованного поперечным сечением и сечением, нормальным к средней линии, после деформации. В терминах φ и u функционал Тимошенко перепишется в виде

$$\mathcal{E}_T = \frac{1}{2}\int_0^l \left[Eh^4 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - 2Eh^4 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d\varphi}{dx} + Eh^4\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + Gh^2\varphi^2 \right] dx. \quad (5.12)$$

Зафиксируем функцию $u(x)$ (элемент множества $\mathcal{M}_0$) и будем искать зависимость φ от u. Для этого оставим в функционале главный член, содержащий φ $(Gh^2\varphi^2)$, и перекрестный член между φ и u $\left(-2Eh^4 \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d\varphi}{dx}\right)$. Член $Eh^4(d\varphi/dx)^2$ можно отбросить, так как $h^2(d\varphi/dx)^2 \ll \varphi^2$. Для определения φ получим функционал

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left(-2Eh^4 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d\varphi}{dx} + Gh^2\varphi^2\right) dx. \quad (5.13)$$

После интегрирования по частям первого слагаемого и использования краевых условий для φ:

$$\varphi = \frac{du}{dx} \text{ при } x = 0, \quad \varphi = \psi_l + \frac{du}{dx} \text{ при } x = l, \quad (5.14)$$

функционал (5.13) примет вид

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left[2Eh^4 \frac{d^3u}{dx^3}\varphi + Gh^2\varphi^2\right] dx -$$

$$- 2Eh^4 \frac{d^2u}{dx^2}\left(\psi_l + \frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x=l} + 2Eh^4 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx}\Bigg|_{x=0} \quad (5.15)$$

Внеинтегральные члены известны (так как u задано). Поэтому минимизация функционала (5.15) сводится к минимизации подынтегрального количества по φ:

$$\varphi = -Eh^2 \frac{d^3u}{dx^3}. \quad (5.16)$$

Следовательно, поперечный сдвиг φ единственным образом определяется по u. Кроме того, φ имеет порядок h^2, и слагаемые, связанные с φ, вносят в энергию вклад, малый по сравнению с энергией Бернулли – Эйлера (разность $\mathscr{E}_T - \mathscr{E}_{Б-Э}$ мала). Таким образом, теория Бернулли–Эйлера действительно представляет первое приближение в теории Тимошенко.

Отметим еще, как согласуется формула (5.16) с краевыми условиями (5.14). Обозначим через u_0 решение задачи по теории Бернулли–Эйлера. По аналогии с тем, как была найдена функция φ, можно найти первую поправку u' к u_0: $u = u_0 + u' + \ldots$ Окажется, что $u' \sim h^2$. Тогда в первом приближении

$$\varphi = -Eh^2 \frac{d^3 u_0}{dx^3},$$

и краевые условия (5.14) будут выполняться за счет того, что функция $u'(x)$ на концах стержня подчинена ограничениям

$$\varphi = -Eh^2 \frac{d^3 u_0}{dx^3} = \frac{du'}{dx} \quad \text{при } x = 0, l.$$

Рассмотренный пример делает совершенно прозрачным физический смысл итерационной схемы. На первом шаге надо минимизировать "главную часть" энергии. Если $\psi \neq -du/dx$, полная энергия была бы порядка h^2. Это энергетически невыгодно, так как при удовлетворении равенства (5.11) энергия становится порядка h^4.

Легко построить точное решение рассмотренной задачи по теории Тимошенко и убедиться, что результаты, получаемые при помощи асимптотического анализа энергии, соответствуют разложению решения уравнений в ряд по h^2.

Пример 8. *Метод Уизема.* Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \tag{5.17}$$

где $P(r, s)$ – некоторый полином по r, s. Это уравнение всегда имеет решение вида

$$u = ae^{i(kx - \omega t)}, \tag{5.18}$$

где a, k, ω – некоторые, возможно комплексные, постоянные. Для того чтобы функция $a\, e^{i(kx - \omega t)}$ представляла решение уравнения (5.17), необходимо и достаточно, чтобы k и ω удовлетворяли соотношению

$$P(-i\omega, ik) = 0. \tag{5.19}$$

Решения вида (5.18) называют гармоническими волнами, a – амплитудой, k – волновым числом, ω – частотой, $\theta = kx - \omega t$ – фазой (при $\operatorname{Im} a = 0$), равенство (5.19) – дисперсионным соотношением. Гармонические волны играют фундаментальную роль в теории уравнений (5.17), в частности в связи с тем, что любое решение уравнений (5.17) можно представить в виде суперпозиции гармонических волн. Дисперсионное соотношение содержит всю информацию об исходном уравнении – по нему однозначно восстанавливается исходный оператор.

Возникает вопрос, что является аналогом гармонических волн и дисперсионного соотношения для нелинейных уравнений?

Оказывается, что нелинейное обобщение решений типа гармонических волн имеет вид

$$u = \psi(a, \theta), \tag{5.20}$$

где a, θ – некоторые функции x, t; ψ – периодическая (с периодом 2π) функция θ, а характерные масштабы[1]) изменения функций a, θ_x, θ_t, по x, t гораздо больше [2]) характерных масштабов изменения по x, t фазы θ. Величина a играет роль амплитуды, θ_x – волнового числа, θ_t – частоты.

Дальше будут построены уравнения для определения функций ψ, a, θ.

Рассмотрим уравнение Эйлера функционала

$$\int\limits_{\Omega} \Lambda(u, u_x, u_t)\, dx\, dt \tag{5.21}$$

и будем искать решения этого уравнения вида (параметр a появится позже)

$$u = \psi(\theta, x, t), \tag{5.22}$$

где θ есть некоторая функция x и t, ψ – периодическая (с периодом 2π) функция θ, и характерные масштабы L и T изменения функций θ_x, θ_t и $\psi(\theta, x, t)|_{\theta=\text{const}}$ по x и t гораздо больше характерных масштабов l и τ изменения по x и t фазы θ.

Масштабы l и τ можно ввести неравенствами

$$|\theta_x| \leqslant \frac{2\pi}{l}, \quad |\theta_t| \leqslant \frac{2\pi}{\tau}. \tag{5.23}$$

В определении l и τ заложен смысл функции θ как фазы колебаний – фаза возрастает на 2π на расстояниях порядка длины волны l и времени порядка периода колебаний τ.

Масштабы L и T и амплитуду $\bar{\psi}$ определим неравенствами

$$|\theta_{xx}| \leqslant \frac{2\pi}{lL}, \quad |\theta_{xt}| \leqslant \frac{2\pi}{lT}, \quad |\theta_{xt}| \leqslant \frac{2\pi}{\tau L}, \quad |\theta_{tt}| \leqslant \frac{2\pi}{\tau T},$$

$$|\partial_x \psi| \leqslant \frac{\bar{\psi}}{L}, \quad |\partial_t \psi| \leqslant \frac{\bar{\psi}}{T}, \quad |\psi_\theta| \leqslant \bar{\psi}. \tag{5.24}$$

Здесь $\partial_x \psi = \partial\psi/\partial x$ при $\theta = \text{const}$, аналогичен смысл $\partial_t \psi$.

По условию задача содержит два малых параметра l/L и τ/T.

Вычислим производные u_x, u_t

$$u_x = \partial_x \psi + \psi_\theta \theta_x, \quad u_t = \partial_t \psi + \psi_\theta \theta_t.$$

В силу оценок (5.23), (5.24) в первом приближении

$$u_x = \psi_\theta \theta_x, \quad u_t = \psi_\theta \theta_t.$$

Сохраняя в функционале только главные члены, получим

$$\iint\limits_{\Omega} \Lambda(\psi, \psi_\theta \theta_x, \psi_\theta \theta_t)\, dx\, dt. \tag{5.25}$$

---

[1]) Определение характерных масштабов см. в § 3 гл. I.

[2]) Для гармонических волн величины a, θ_x, θ_t постоянны, поэтому соответствующие характерные масштабы бесконечны.

Проведем в области Ω линии уровня функции $\theta(x, t)$ и разобьем Ω на полоски, заключенные между линиями уровня $\theta = 2\pi k$. Интеграл по Ω можно заменить суммой интегралов по полоскам

$$\iint\limits_{\Omega} \Lambda\, dx\, dt = \sum \iint \Lambda(\psi, \psi_\theta\theta_x, \psi_\theta\theta_t)\,\kappa\; d\theta\, d\zeta, \tag{5.26}$$

где ζ – координата вдоль линий уровня $\theta = \text{const}$, κ – якобиан перехода от переменных x, t к переменным θ, ζ. В первом приближении можно считать, что на каждой полоске κ, θ_x, θ_t не зависят от θ. Поэтому на первом шаге вариационно-асимптотического метода на каждой полоске получим одну и ту же задачу – найти стационарные точки функционала

$$\int\limits_0^{2\pi} \Lambda(\psi, \psi_\theta\theta_x, \psi_\theta\theta_t)\, d\theta \tag{5.27}$$

на множестве периодических функций $\psi(\theta)$. Величины θ_x и θ_t рассматриваются в (5.27) как постоянные параметры. Уравнение Эйлера функционала (5.27) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение содержит две произвольные постоянные. Одна из них выбирается из условия периодичности[1]), вторую можно связать с амплитудой a, например, равенством $\max|\psi| = a$. Таким образом, множество $\mathcal{M}_0$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода состоит из функций $a(x, t)$ и $\theta(x, t)$.

Обозначим через $2\pi\bar{\Lambda}$ значение функционала (5.30) в его стационарной точке. Величина $\bar{\Lambda}$ есть функция от параметров a, θ_x и θ_t. Сумма (5.26) при малых значениях l/L и τ/T является интегральной, и в пределе при l/L, $\tau/T \to 0$ ее можно заменить интегралом

$$\iint\limits_{\Omega} \bar{\Lambda}(a, \theta_x, \theta_t)\, dx\, dt. \tag{5.28}$$

Уравнения для определения a и θ есть, очевидно, уравнения Эйлера функционала (5.28)

$$\frac{\partial\bar{\Lambda}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{\Lambda}}{\partial\theta_x} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\bar{\Lambda}}{\partial\theta_t} = 0.$$

Более подробный анализ показывает, что первое из этих уравнений имеет смысл нелинейного обобщения дисперсионного соотношения. Оно переходит в дисперсионное соотношение линейной теории в пределе при $a \to 0$. Наиболее интересной особенностью нелинейного дисперсионного соотношения является его зависимость от амплитуды колебаний, отсутствующая в линейном случае.

Обобщения на случай большего числа искомых функций и независимых аргументов очевидны.

Изложенная теория была построена из эвристических соображений Уизэмом [228].

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с построением уточненных теорий. Уточненные теории нужны в тех случаях, когда первое приближение оказывается слишком грубым; это может быть, если реальные значения

[1]) Подразумевается, что периодические решения существуют.

параметра ϵ не очень малы. Метод построения уточненных теорий заключается в том, что конструируется функционал, позволяющий строить поправки к решению следующего порядка малости, и затем полученное для него выражение "экстраполируется" на все, в том числе и на малые значения ϵ.

Покажем, что для построения уточненной теории, учитывающей поправки порядка $\alpha(\epsilon)$, в функционале надо сохранить все члены порядка $\alpha(\epsilon)$ по сравнению с единицей. Это утверждение мы рассмотрим на примере задачи о минимуме на линейном пространстве $\mathcal{M}$ квадратичного функционала $I(u, \epsilon)$ вида

$$I(u, \epsilon) = E(u, u, \epsilon) - L(u, \epsilon),$$

$$E(u, v, \epsilon) = E_0(u, v) + \alpha(\epsilon) E_1(u, v) + \alpha'(\epsilon) E_2(u, v) + \ldots$$

$$L(u, \epsilon) = L_0(u) + \alpha(\epsilon) L_1(u) + \alpha'(\epsilon) L_2(u) + \ldots, \alpha' = o(\alpha),$$

где $E_0(u, u)$ – положительно определенный функционал, $\alpha \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Первое приближение u_0 есть точка минимума функционала $I_0 = E_0(u, u) - L_0(u)$. Элемент u_0 удовлетворяет уравнению Эйлера

$$2E_0(u_0, \bar{u}) - L(\bar{u}) = 0. \tag{5.29}$$

Равенство (5.29) выполняется для любого элемента $\bar{u} \in \mathcal{M}$.

Представим u в виде $u = u_0 + u'$. Оставляя в $I(u, \epsilon)$ главные члены, содержащие u', и используя равенство $2E(u_0, u') - L(u') = 0$, вытекающее из (5.29), для определения u' получим задачу о минимуме функционала

$$I_1(u_0, u', \epsilon) = E_0(u', u') + 2\alpha(\epsilon) E_1(u_0, u') - \alpha(\epsilon) L_1(u').$$

После замены $u' \to w$: $u' = \alpha(\epsilon) w$ она сводится к задаче о минимуме функционала

$$\alpha'^{-2} I_1 = E_0(w, w) - 2E_1(u_0, w) - L_1(w),$$

не зависящего от малого параметра ϵ. Таким образом, $u' \sim \alpha(\epsilon)$, и для построения решения с точностью до $\alpha(\epsilon)$ включительно нужно удержать в функционале члены порядка $\alpha(\epsilon)$.

Построение уточненных теорий будет подробно рассмотрено в гл. IV в связи с проблемой уточнения классической теории оболочек.

Мы рассмотрели случаи, когда функционал $I_0(u)$ имеет стационарные точки. Осталось обсудить еще случаи, когда функционал $I_0(u)$ не имеет стационарных точек или не имеет смысла. Подобные задачи отнюдь не экзотичны. Например, именно так устроена функция одного переменного

$$f(u, \epsilon) = u + \epsilon u^2 + \sin \epsilon u, \tag{5.30}$$

функция $f_0(u) = u$ не имеет стационарных точек.

Другой пример дает задача о минимуме функционала

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{r} (u^2 + u_r^2)\, dr \tag{5.31}$$

на множестве функций $u(r)$, обращающихся в единицу при $r = \epsilon$. Эта вариационная проблема возникает в задаче об обтекании несжимаемым потоком идеальной жидкости осесимметричного тонкого тела. Функционал (5.31) не имеет смысла при $\epsilon = 0$.

К числу таких задач относятся и задачи с погранслоем.

Вообще говоря, в подобных случаях нет общих рецептов, за исключением, пожалуй, одного: надо попытаться свести задачу при помощи замен искомых функций или других операций к задачам уже рассмотренного типа. Скажем, для функции (5.30) надо выполнить замену $u \to v$: $\epsilon u = v$, $f \to g$: $\epsilon f = g$.

Что касается задач о погранслое, то вариационные методы их исследования не столь элементарны, чтобы включать их в первое знакомство с предметом, и мы отсылаем интересующегося читателя к работе [31].

§ 6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Во многих задачах механики и физики минимизируемые функционалы содержат параметры, которые естественно рассматривать как случайные величины. Это могут быть модули упругости или коэффициенты теплопроводности микронеоднородных тел, начальные деформации тел с внутренними напряжениями, форма границы области и т.п. Обсудим, как ставятся в этом случае вариационные задачи.

Напомним, что поле a называется случайным полем, определенным в области $V \subset R_n$, если a – функция двух аргументов – точки x области V и элемента ω ("случая") из некоторого множества Ω, на котором задана вероятностная мера μ: $a = a(x, \omega)$.

Функционал I, зависящий от аргументов u и ω, где u – элемент некоторого множества $\mathcal{M}$, а ω – элемент множества Ω, на котором определена вероятностная мера μ, будем называть случайным функционалом на $\mathcal{M}$.

Рассмотрим случайный функционал $I(u, \omega)$ вида

$$I = \int_V \Lambda\left(a^\kappa(x, \omega),\ u^\kappa(x),\ \frac{\partial u^\kappa(x)}{\partial x^i}\right) d^n x, \tag{6.1}$$

где $a^\kappa(x, \omega)$ – случайное поле, индекс κ дальше будем опускать.

Пусть для простоты при каждом фиксированном ω функционал $I(u, \omega)$ имеет единственный минимизирующий элемент u. Минимизирующий элемент зависит от ω, и, следовательно, является случайным полем: $\check{u} = \check{u}(x, \omega)$, а минимальное значение функционала I – случайной величиной. Возникает вопрос, как найти вероятностные характеристики $\check{u}$ – математическое ожидание[1])

$$v(x) = \mathrm{M}\check{u} = \int_\Omega \check{u}(x, \omega)\, \mu(d\omega), \tag{6.2}$$

дисперсию[2])

$$\sigma(x) = \mathrm{M}(\check{u}(x, \omega) - v(x))(\check{u}(x, \omega) - v(x)), \tag{6.3}$$

---

[1]) M – символ математического ожидания.

[2]) В равенствах (6.3), (6.4) опущены индексы: в действительности σ и b являются двухиндексными объектами, например равенство (6.3) более подробно записывается следующим образом:

$$\sigma^{\kappa\kappa'}(x) = \mathrm{M}(\check{u}^\kappa(x, \omega) - v^\kappa(x))(\check{u}^{\kappa'}(x, \omega) - v^{\kappa'}(x)).$$

корреляционную функцию

$$b(x, y) = \mathrm{M}(\mathring{u}(x, \omega) \cdot \mathring{u}(y, \omega)) \tag{6.4}$$

и т.п., а также вероятностные характеристики минимального значения функционала. Мы построим для них дальше некоторые вариационные принципы.

Будем обозначать минимальное значение функционала $I(u, \omega)$ через $\underline{I}_\omega$, подчеркивая этим, что оно является случайной величиной. Предположим, что функционал $I(u, \omega)$ ограничен снизу на $\mathscr{M}$ неслучайной постоянной. Тогда, вычитая из $I(u, \omega)$ эту постоянную получим неотрицательный функционал. Итак, дальше $I(u, \omega) \geqslant 0$ и $\underline{I}_\omega \geqslant 0$.

Построим функционал, минимальное значение которого есть $\mathrm{M}\underline{I}_\omega$. Введем случайные поля $u(x, \omega)$ и рассмотрим задачу о минимуме по всем совместным со связями функциям $u(x, \omega)$ функционала

$$\int_\Omega I(u(x, \omega), \omega)\, \mu(d\omega). \tag{6.5}$$

Минимум функционала (6.5) достигается на функциях $u(x, \omega)$, которые минимизируют $I(u, \omega)$ при каждом фиксированном ω, поэтому

$$\mathrm{M}\underline{I}_\omega = \inf_{u(x,\omega)} \int_\Omega I(u(x, \omega), \omega)\, \mu(d\omega). \tag{6.6}$$

Аналогичные вариационные формулы справедливы для моментов случайной величины

$$\mathrm{M}(\underline{I}_\omega)^n = \inf_{u(x,\omega)} \int_\Omega I^n(u(x, \omega), \omega)\, \mu(d\omega). \tag{6.7}$$

Обозначим через $J(v, \omega)$ двойственный функционал:

$$\sup_{v(x,\omega)} J(v, \omega) = \underline{I}_\omega.$$

Тогда

$$\mathrm{M}(\underline{I}_\omega)^n = \sup_{v(x,\omega)} \int_\Omega J^n(u(x, \omega), \omega)\, \mu(d\omega). \tag{6.8}$$

Равенства (6.6) – (6.8) представляют вариационные принципы, позволяющие, в частности, строить вилки для моментов случайной величины $\underline{I}_\omega$.

Вариационный принцип (6.6) можно использовать при построении уравнений для вероятностных характеристик искомого поля $u(x, \omega)$. Пусть, например, требуется получить уравнения для математического ожидания $v(x)$, дисперсии $\sigma(x)$ и корреляционной функции $b(x, y)$ поля $u(x, \omega)$. Применим принцип сечений (см. § 4) и будем искать минимум в (6.6) при дополнительных ограничениях (6.2) – (6.4). Соответствующее минимальное значение G является функционалом от $v(x), \sigma(x), b(x, y)$. Истинные значения $\mathring{v}(x), \mathring{\sigma}(x), \mathring{b}(x, y)$ доставляют минимум функционалу $G(v, \sigma, b)$. Таким образом, построение уравнений для $v(x), \sigma(x)$ и $b(x, y)$ сводится к решению вариационной задачи (6.6) при дополнительных ограничениях (6.2) – (6.4). В число ограничений следует включить все подлежащие исследованию характеристики случайного поля.

При фактическом построении функционала G можно привлечь прямые методы вариационного исчисления и приближенные методы типа метода

Рэлея–Ритца. Самое грубое приближение получится, если положить в (6.6) $u(x, \omega) = v(x)$. Тогда

$$G(v) = \int_{\Omega} I(v, \omega)\, \mu(d\omega).$$

Дисперсию учитывает более тонкая аппроксимация

$$u(x, \omega) = v(x) + \sqrt{\sigma(x)}\, \varphi(\omega),$$

где $\varphi(\omega)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$\mathrm{M}\varphi = 0, \quad \mathrm{M}\varphi^2 = 1. \tag{6.9}$$

Можно провести дополнительную минимизацию по всем функциям φ, удовлетворяющим условиям (6.9), и т.д.

Из изложенного следует важный вывод: в вариационных стохастических задачах уравнения для вероятностных характеристик искомого поля всегда имеют вариационную структуру, т.е. представляют уравнения Эйлера некоторого функционала.

Оценки минимального значения функционала $\underline{I}$ порождают некоторые оценки функции распределения $F(\xi)$ величины $\underline{I}_\omega$

$$F(\xi) = \mu\{\omega: \underline{I}_\omega \leqslant \xi\}.$$

Действительно, пусть для $\underline{I}_\omega$ получена какая-нибудь оценка сверху, например методом Рэлея–Ритца (сужая множество допустимых функций и и вычисляя явно нижнюю грань функционала):

$$\underline{I}_\omega \leqslant \underline{I}^+_\omega.$$

Поскольку множество элементов ω, на которых $\underline{I}_\omega \leqslant \xi$, шире, чем множество элементов ω, на которых $\underline{I}^+_\omega \leqslant \xi$, для функции $F(\xi)$ получаем оценку снизу

$$F(\xi) \geqslant F^+(\xi),$$

где $F^+(\xi)$ – функция распределения случайной величины $\underline{I}^+_\omega$. Аналогично строятся оценки $F(\xi)$ сверху.

Глава III.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В механике сплошной среды было изобретено много разнообразных, на первый взгляд не связанных друг с другом вариационных принципов. Ниже сделана попытка дать их систематическое изложение, указать имеющиеся взаимозависимости и заполнить некоторые пробелы. За основу выбрано вариационное уравнение для всего объема сплошной среды. Устанавливаются случаи голономности вариационного уравнения. Каждому из них соответствует свой вариационный принцип. Вариационные принципы могут иметь несколько эквивалентных форм в зависимости от того, какие функции выбираются в качестве искомых. Исходная формулировка вариационных принципов, непосредственно следующих из вариационного уравнения, связана с варьированием закона движения частиц $x^i(\xi^a, t)$ при неизменных сопутствующих координатах. Такая формулировка обычно удобна в задачах механики твердого деформируемого тела. Задачи гидромеханики, как правило, предпочтительнее ставить и исследовать в эйлеровых координатах. Поэтому в гидромеханике для практических приложений основное значение имеют вариационные принципы, в которых в качестве искомых берутся функции от эйлеровых координат. Такие вариационные принципы выведены из исходных формулировок "в лагранжевых координатах" в результате замены искомых функций и соответствующего пересчета функционала действия. Дальнейшие преобразования основаны на идее двойственности. Части этой главы, относящиеся к механике твердого деформируемого тела и к механике жидкости, можно читать независимо.

§ 1. СТАТИКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Функционал энергии. Начнем с рассмотрения вариационных принципов геометрически линейной статики упругого тела; к ним в наиболее полной мере применимы методы, изложенные в гл. II.

Вариационное уравнение в статике адиабатически деформирующегося упругого тела совпадает с уравнением энергии, записанным для возможных перемещений частиц тела

$$\delta \mathcal{U} = \delta \mathcal{A} .$$

Здесь $\mathcal{U}$ — внутренняя энергия тела, $\delta\mathcal{A}$ — работа внешних сил:

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U \, dv = \int_V \rho_0 U \, d\overset{\circ}{v},$$

$$\delta\mathcal{A} = \int_V \rho F_i \delta x^i \, dv + \int_{\partial V} P_i \delta x^i d\sigma = \int_V \rho_0 F_i \delta x \, d\overset{\circ}{v} + \int_{\partial V} P_i \delta x^i \, d\sigma. \quad (1.1)$$

Плотность упругой энергии U предполагается известной функцией от тензора деформаций ϵ_{ab}[1]), внешние массовые и поверхностные силы F_i и P_i – заданные функциями точек пространства или тела.

Будем считать, что граница ∂V области V разбита на две части ∂V_p и ∂V_w и на ∂V_w заданы перемещения частиц тела $w^i(\xi^a) = x^i(\xi^a) - \overset{\circ}{x}_i(\xi^a)$,

$$w^i = \widetilde{w}^i \quad \text{на } \partial V_w, \tag{1.2}$$

а на ∂V_p – поверхностные силы P_i. В силу (1.2) $\delta x^i = \delta w^i = 0$ на ∂V_w, и интегрирование по ∂V в (1.1) можно заменить интегрированием по поверхности ∂V_p.

Пусть перемещения w_i точек тела малы. Припишем градиенту перемещений некоторый порядок малости Δ и будем пренебрегать во всех соотношениях величинами порядка Δ по сравнению с единицей. Получающуюся при этом теорию называют геометрически линейной теорией упругости. Отбрасывание величин порядка Δ приведет к упрощению выражения для компонент тензора деформаций

$$\epsilon_{ab} = \overset{\circ}{x}{}^i_{(a} w_{i,b)}$$

и к возможности заменить в выражении для работы внешних сил элемент поверхности $d\sigma$ на $d\overset{\circ}{\sigma}$.

Если F_i и P_i заданы как функции лагранжевых координат, то работа внешних сил будет голономной

$$\delta \mathcal{A} = \delta \Big[\int\limits_V \rho_0 \, F_i(\xi) \, w^i \, d\overset{\circ}{v} + \int\limits_{\partial V_p} P_i(\xi) \, w^i \, d\overset{\circ}{\sigma} \Big]. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) справедлива и в случае, когда F_i и P_i заданы как функции эйлеровых координат, которые мало меняются на расстояниях порядка $\Delta \cdot l$, где l – диаметр тела. Действительно, в первом приближении $F_i(x^k)$ и $P_i(x^k)$ можно заменить на $F_i(\overset{\circ}{x}{}^k)$ и $P_i(\overset{\circ}{x}{}^k)$, поскольку $x^k - \overset{\circ}{x}{}^k = w^k \sim \Delta \cdot l$ и F_i и P_i можно рассматривать как известные функции лагранжевых координат.

Итак, после отбрасывания малых членов вариационное уравнение становится голономным и представляет условие стационарности функционала

$$I = \int\limits_V \rho_0 \, U \, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_V \rho_0 \, F_i w^i \, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_{\partial V_p} P_i w^i \, d\overset{\circ}{\sigma}. \tag{1.4}$$

Дальше лагранжевы координаты выберем совпадающими с эйлеровыми координатами в недеформированном состоянии, а эйлеровы координаты для простоты будем считать декартовыми; при этом $\overset{\circ}{x}{}^i_a = \delta^i_a$, $\epsilon_{ij} = w_{(i,j)}$. Индекс начального состояния $\circ$ будем опускать, а произведения $\rho_0 U$ и $\rho_0 F_i$ на протяжении этого параграфа будем обозначать через U и F_i, таким образом U и F_i дальше имеют смысл плотности внутренней энергии и плотности массовых сил, рассчитанных на единицу объема[2]).

---

[1]) Все рассмотрение в этом параграфе проводится для произвольных функций U. Некоторые конкретные модели упругих тел, выделяемые фиксированием фуикции U, обсуждаются в § 2.

[2]) В дальнейшем, при рассмотрении упругих тел, в зависимости от удобства под U понимается плотность внутренней энергии либо единицы начального объема либо единицы массы; смысл U обычно ясен из контекста и легко устанавливается из соображений размерности.

Функционал (1.4) приобретает форму

$$I(w) = \mathcal{U}(w) - L(w),$$

$$\mathcal{U}(w) = \int_V U(w_{(i,j)})\, d^3x,\ L(w) = \int_V F_i w^i d^3x + \int_{\partial V_p} P_i w^i\, d\sigma, \qquad (1.5)$$

а истинные перемещения есть стационарные точки функционала $I(w)$ на множестве всех функций $w_i(x_k)$, определенных в V и принимающих на поверхности ∂V_w заданные значения (1.2). Функционал (1.5) будем называть функционалам энергии.

Не ограничивая общности, можно считать, что плотность энергии U обладает следующими свойствами:

$$U\Big|_{\epsilon_{ij}=0} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}\Big|_{\epsilon_{ij}=0} = 0.$$

Действительно, в противном случае выполнения этих равенств можно добиться, заменив U на $\widetilde{U} = U - U_0 - \sigma_0^{ij}\epsilon_{ij}$, где $U_0 = U|_{\epsilon_{ij}=0}$, $\sigma_0^{ij} = \partial U/\partial \epsilon_{ij}|_{\epsilon_{ij}=0}$, а F_i и P_i на $\widetilde{F}_i = F_i + \sigma_{0,j}^{ij}$, $\widetilde{P}_i = P_i - \sigma_0^{ij} n_j$. При этом функционал энергии изменится на несущественную аддитивную постоянную $U_0|V|$.

Рассмотрим предположения, при которых задача о нахождении стационарных точек функционала энергии сводится к задаче о минимуме.

Ограниченность снизу. Пусть кинематические ограничения отсутствуют ($\partial V_w = \phi$). Тогда упругая энергия имеет ядро — обращается в нуль на полях перемещений, соответствующих бесконечно малым премещениям упругого тела как твердого,

$$w_i = c_i + e_{ijk}\omega^j x^k. \qquad (1.6)$$

Необходимое условие ограниченности снизу функционала $I(w)$, согласно (2.1.19), — равенство его нулю на полях (1.6). Это условие дает

$$\int_V F_i d^3x + \int_{\partial V} P_i\, d\sigma = 0,\ e^{ijk}\Big(\int_V F_j x_k\, d^3x + \int_{\partial V} P_j x_k\, d\sigma\Big) = 0. \qquad (1.7)$$

Равенства (1.7) имеют простой смысл — они означают, что суммарные сила и момент, действующие на тело, должны быть равны нулю.

Будем считать, что условия (1.7) выполнены. Тогда функционал энергии инвариантен относительно "твердых" движений (1.6) и решение не определяется единственным образом. Для выделения единственного решения следует наложить на поля перемещений ограничения, исключающие твердые движения. В качестве таких ограничений можно взять, например, условия обращения в нуль среднего перемещения

$$\int_V w_i\, d^3x = 0 \qquad (1.8)$$

и среднего поворота

$$e^{ijk}\int_V w_i x_j\, d^3x = 0. \qquad (1.9)$$

Пусть упругие свойства тела не вырождаются в том смысле, что найдется положительная постоянная $\underline{\mu}$, для которой при любых ϵ_{ij}

$$\underline{\mu}\,\epsilon_{ij}\epsilon^{ij} \leqslant U(\epsilon_{ij}). \qquad (1.10)$$

Тогда условия (1.7) являются также достаточными для ограниченности функционала энергии снизу. Для доказательства следует установить неравенство

$$L(w) \leqslant c\sqrt{\mathcal{U}(w)} \tag{1.11}$$

на множестве полей перемещений, для которых исключены движения тела как твердого. Ограниченность снизу получается также как в примере 1 § 1 гл. II.

Доказательство неравенства (1.11) можно получить при помощи одного из основных неравенств теории упругости – неравенства Корна

$$\int_V w_{i,j} w^{i,j}\, dv \leqslant K \int_V \epsilon_{ij}\epsilon^{ij}\, dv. \tag{1.12}$$

Для справедливости неравенства Корна необходимо выставить дополнительные условия, исключающие вращение тела, иначе на вращениях левая часть неравенства будет положительна, а правая обратится в нуль. Обычно в качестве таких условий берется либо условие (1.9), либо условие

$$\int_V (w_{i,j} - w_{j,i})\, dv = 0.$$

Неравенство Корна можно записать в более выразительной форме, разбив градиент перемещений на сумму тензора деформаций и угла поворота: $w_{i,j} = \epsilon_{ij} + e_{ijk}\varphi^k$ ($\varphi^k = \frac{1}{2} e^{ijk} w_{i,j}$). В терминах ϵ_{ij} и φ_i неравенство Корна имеет вид

$$\int_V \varphi_i \varphi^i d^3x \leqslant \frac{K-1}{2} \int_V \epsilon_{ij}\epsilon^{ij} d^3x.$$

Оно означает, что для любой деформации тела угол поворота частиц (в среднеквадратичном) всегда не превосходит с одной и той же постоянной $\frac{K-1}{2}$ (зависящей только от геометрии области) среднеквадратичной амплитуды деформации тела. Доказательство неравенства Корна можно найти в работах, процитированных в библиографических замечаниях.

Вместе с неравенством Корна нужны также неравенства

$$\lambda^2 \int_{\partial V} w_i w^i\, d\sigma \leqslant \int_V w_{i,j} w^{i,j}\, dv, \quad \mu^2 \int_V w_i w^i\, dv \leqslant \int_V w_{i,j} w^{i,j}\, dv, \tag{1.13}$$

которые получаются суммированием неравенств (2.1.27), написанных для каждой из компонент вектора перемещений.

Неравенства (1.13) имеют место, если исключены поступательные движения тела, например, при помощи условий (1.8).

Получим оценку (1.11). Из (1.10), (1.12), (1.13) и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|L(w)| \leqslant \sqrt{\int_V F_i F^i\, dv}\sqrt{\int_V w_i w^i\, dv} + \sqrt{\int_{\partial V} P_i P^i\, d\sigma \int_{\partial V} w_i w^i\, d\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{\int_V w_{i,j} w^{i,j}\, dv} \leqslant c\sqrt{K \int_V \epsilon_{ij}\epsilon^{ij}\, dv} \leqslant c\sqrt{K/\underline{\mu}}\sqrt{\mathcal{U}(w)}.$$

Здесь

$$c = \frac{1}{\mu}\sqrt{\int\limits_V F_i F^i \, dv} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\int\limits_{\partial V} P_i P^i \, d\sigma}.$$

Итак, функционал энергии ограничен снизу, если на границе тела заданы поверхностные силы, причем квадрат модуля поверхностной силы суммируем на поверхности, а квадрат модуля объемной силы суммируем по объему.

В случае, когда на части границы заданы перемещения, функционал энергии ограничен снизу для любых суммируемых с квадратом функций F_i и P_i, в том числе и для имеющих ненулевые суммарную силу и момент.

Покажем, как доказывается это утверждение в случае, когда перемещения заданы на всей границе ∂V области V. Рассмотрим интеграл

$$2\int\limits_V \epsilon_{ij}\,\epsilon^{ij}\, d^3x = \int\limits_V (w_{i,j}w^{i,j} + w_{i,j}w^{j,i})\, d^3x.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям два раза, получим

$$2\int\limits_V \epsilon_{ij}\epsilon^{ij}\, d^3x =$$

$$= \int\limits_V (w_{i,j}w^{i,j} + (w^{\,j}_{,i})^2)\, d^3x + \int\limits_{\partial V} (w_i w^{j,i} n_j - w^i n_i w^{\,k}_{,k})\, d\sigma. \qquad (1.14)$$

Поверхностный интеграл выражается через значения перемещений на границе. Действительно, используя разбиение производной по направлению нормали и касательной к поверхности (1.3.104), имеем

$$w_i w^{j,i} n_j - w^j n_i w^{\,k}_{,k} = w_i r^{i\alpha} w^{\,j}_{,\alpha} n_j - w^i n_i w^{\,k}_{,\alpha}\, r^{\alpha}_{k}.$$

Таким образом, поверхностный интеграл представляет собой известную величину; обозначим ее через B. Опустим в тождестве (1.14) неотрицательный интеграл от $(w^{\,j}_{,i})^2$. Придем к неравенству

$$\int\limits_V w_{i,j}\, w^{i,j}\, dv \leqslant 2\int\limits_V \epsilon_{ij}\,\epsilon^{ij}\, dv - B,$$

которое представляет вариант неравенства Корна. Аналогичные изменения возникнут в неравенствах (1.13). Дальнейшие оценки проводятся так же, как в случае заданных на границе поверхностных сил.

Ограниченность снизу функционала энергии позволяет поставить задачу о нахождении минимизирующего элемента. Эту вариационную задачу будем называть принципом Лагранжа. Существование минимизирующего элемента в энергетическом пространстве может быть установлено по общей схеме § 1 гл. II.

Единственность решения. Будем считать плотность упругой энергии строго выпуклой функцией компонент тензора деформаций. Физический смысл этого предположения виден из неравенства (2.3.16). Записывая это неравенство для функции U, имеем

$$0 < \Delta p^{ij}\, \Delta\epsilon_{ij}. \qquad (1.15)$$

Здесь $p^{ij} = \partial U/\partial\epsilon_{ij}$ — компоненты тензора напряжений, $\Delta\epsilon_{ij}$ — разница между любыми двумя значениями тензора деформаций, Δp^{ij} — разница между

соответствующими значениями тензора напряжений. Неравенство (1.15), во-первых, означает, что между значениями тензора напряжений и тензора деформаций имеется взаимно однозначная зависимость. Кроме того, напряжения монотонно увеличиваются с увеличением деформаций в следующем смысле. Перейдем в главную систему координат тензора $\Delta\epsilon_{ij}$. Неравенство (1.15) примет вид

$$0 < \Delta p^{11}\,\Delta\epsilon_{11} + \Delta p^{22}\Delta\epsilon_{22} + \Delta p^{33}\Delta\epsilon_{33}.$$

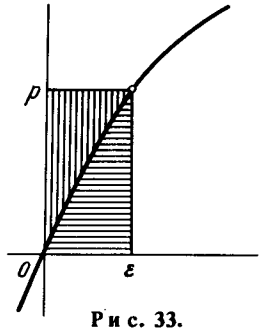


Рис. 33.

Следовательно, приращение напряжений Δp^{11} (при $\Delta\epsilon_{22} = \Delta\epsilon_{33} = 0$) имеет тот же знак, что и приращение деформаций $\Delta\epsilon_{11}$ при любых (не малых) $\Delta\epsilon_{11}$.

Функционал энергии при строго выпуклой функции $U(\epsilon_{ij})$ является строго выпуклым функционалом на множестве перемещений, в котором исключены перемещения тела как твердого. Как показано в § 1 гл. II, он может иметь не более одного минимизирующего элемента.

Дополнительная энергия. Рассмотрим преобразование Юнга—Фенхеля функции $U(\epsilon_{ij})$ по ϵ_{ij}:

$$U^*(p^{ij}) = \sup_{\epsilon_{ij}} [p^{ij}\epsilon_{ij} - U(\epsilon_{ij})]. \tag{1.16}$$

Здесь p^{ij} – компоненты симметричного тензора. Функцию $U^*(p^{ij})$ называют дополнительной энергией. Смысл этого названия становится ясным из следующего построения. Рассмотрим уравнение состояния одномерного упругого тела $p = p(\epsilon)$. График зависимости $p = p(\epsilon)$ изображен на рис. 33. Поскольку $p = \partial U/\partial\epsilon$, энергия $U(\epsilon)$ равна площади фигуры, заштрихованной на рис. 33 горизонтальными линиями. Величина $U^*(p) = p\epsilon - U(\epsilon)$ равна площади фигуры, заштрихованной вертикальными линиями, и "дополняет" $U(\epsilon)$ до площади прямоугольника $p\epsilon$. В многомерном случае эта простая геометрическая интерпретация утрачивается.

Вариационный принцип Рейсснера. Представим плотность упругой энергии в виде

$$U(\epsilon_{ij}) = \sup_{p^{ij}} (p^{ij}\epsilon_{ij} - U^*(p^{ij})). \tag{1.17}$$

В (1.17) p^{ij} – компоненты симметричного тензора, верхняя грань в (1.16) ищется по всем симметричным тензорам p^{ij}. На основании (1.16)

$$\inf_{w\in(1.2)} I(w) = \inf_{w\in(1.2)} \sup_{p} I(p, w), \tag{1.18}$$

$$I(p, w) = \int_V (p^{ij}w_{i,j} - U^*(p^{ij}))\,d^3x - \int_V F_i w^i\,d^3x - \int_{\partial V_p} P_i w^i\,d\sigma.$$

Решение минимаксной задачи (1.18) есть стационарная точка функционала $I(p, w)$ на множестве всех p^{ij} и w^i, удовлетворяющих условию (1.2). Уравнения Эйлера функционала $I(p, w)$, очевидно, эквивалентны уравнениям теории упругости.

Утверждение о стационарности функционала $I(p, w)$ называют смешанным вариационным принципом (в напряжениях и перемещениях) или

принципом Рейсснера. Обратим внимание, что стационарная точка функционала $I(p, w)$ есть седловая точка, т.е. она доставляет максимум $I(p, w)$ по функциям p^{ij} и минимум по функциям w^i.

Вариационный принцип Кастильяно (принцип стационарности дополнительной работы). Построим вариационный принцип, двойственный принципу Лагранжа. Двойственный принцип можно вывести непосредственно из формулировки, данной для интегрального функционала общего вида (2.3.61), однако мы сначала повторим схему построения двойственного принципа, учтя особенность функционала энергии – его инвариантность относительно "твердых" движений. Эта особенность, по существу, была принята во внимание, когда в преобразовании Юнга–Фенхеля (1.16) рассматривались лишь симметричные тензоры p^{ij}.

Как и в общем случае, проверяется, что в (1.18) допустима перестановка порядка вычисления нижней и верхней граней и

$$\inf_{w\in(1.2)} I(w) = \sup_{p}[I^*(p) + \inf_{w\in(1.2)} \Phi(p, w)],$$

$$I^*(p) = \int_{\partial V_w} p_i^j n_j \widetilde{w}^i d\sigma - \int_V U^*(p^{ij})\, d^3x, \tag{1.19}$$

$$\Phi(p, w) = -\int_V (F_i + p_{i,j}^j)\, w^i d^3x - \int_{\partial V_p} (P_i - p_i^j n_j)\, w^i\, d\sigma.$$

Легко видеть, что для тензорных полей p^{ij}, удовлетворяющих ограничениям

$$p_{i,j}^j + F_i = 0 \quad \text{в } V, \tag{1.20}$$

$$p_i^j n_j = P_i \quad \text{на } \partial V_p, \tag{1.21}$$

$\Phi(p, w) = 0$, а для полей p^{ij}, не удовлетворяющих этим ограничениям, $\inf_w \Phi(p, w) = -\infty$. Поэтому

$$\inf_{w\in(1.2)} I(w) = \sup_{p\in(1.20),(1.21)} I^*(p).$$

Вариационную задачу о максимизации функционала $J(p)$ по всем тензорным полям p^{ij}, подчиненным ограничениям (1.20), (1.21), называют принципом стационарности дополнительной работы или принципом Кастильяно в напряжениях.

Покажем теперь, как можно вывести принцип Кастильяно из двойственного вариационного принципа для интегрального функционала общего вида (2.3.61). Из общей теории следует, что двойственный функционал имеет вид (1.19), однако под U^* в (1.19) понимается не функция (1.17), а преобразование Юнга–Фенхеля U по градиентам перемещений $w_{i,j}$

$$U_1^* = \sup_{w_{i,j}} (p^{ij} w_{i,j} - U(\epsilon_{ij})), \tag{1.22}$$

причем в (1.22), а также в ограничениях (1.20) и (1.21) допускаются произвольные, не обязательно симметричные тензоры p^{ij}.

Перепишем формулу (1.22), выделив симметричную и антисимметричную части напряжений и градиента перемещений:

$$U_1^* = \sup_{w_{i,j}} [p^{(ij)}\epsilon_{ij} + p^{[ij]} w_{[i,j]} - U(\epsilon_{ij})].$$

Так как $U(\epsilon_{ij})$ не зависит от антисимметричной части градиента перемещений $w_{[i,j]}$, то при $p^{[ij]} \neq 0$ $U_1^* = +\infty$, и, следовательно, если в некоторой подобласти области V с ненулевой мерой $p^{[ij]} \neq 0$, то двойственный функционал обращается в $-\infty$. Таким образом, все несимметричные тензоры напряжений следует исключить из числа допустимых. При $p^{[ij]} = 0$ функция U_1^* совпадает с функцией (1.16), и вариационный принцип эквивалентен общему двойственному вариационному принципу, построенному в §3 гл. II.

Принцип Кастильяно в функциях напряжений. Нетрудно написать общее решение уравнений равновесия (1.20). Для простоты ограничимся случаем нулевых внешних объемных сил и односвязной областью V. Покажем, что общее решение дается формулой

$$p^{ij} = e^{ikl} e^{jmn} \psi_{km,ln}, \tag{1.23}$$

где ψ_{km} – произвольное симметричное тензорное поле.

Как известно, общее решение уравнения

$$A^i_{,i} = 0$$

имеет вид (ср. с (2.4.40), (2.4.41))

$$A^i = e^{ijk} B_{j,k},$$

где B_k – произвольные функции x^i. Отметим, что по A^i функции B_k однозначно не определяются: добавление к B_k произвольного потенциального векторного поля $\varphi_{,k}$ оставляет A^i неизменными.

Уравнения равновесия упругого тела имеют дивергентный вид, поэтому их решение дается формулой

$$p^{ij} = e^{jkl} B^i_{k,l}. \tag{1.24}$$

Не изменяя компонент тензора напряжений, можно добавить к B^i_k функции $\varphi^i_{,k}$. В частности, φ^i можно подобрать так, чтобы обратить в нуль след тензора B^i_k. Дальше считаем, что это уже сделано и $B^i_i = 0$.

Для того чтобы функции (1.24) были решением уравнений равновесия, надо удовлетворить еще условию симметрии тензора напряжений. Свертывая (1.24) с e_{ijs} и используя (1.1.8), получим

$$p^{ij} e_{ijs} = B^i_{s,i} = 0. \tag{1.25}$$

Уравнение (1.25) имеет дивергентный вид, поэтому тензор B^i_s можно представить в форме

$$B^i_s = e^{imn} \psi_{sm,n}.$$

К тензору ψ_{sm} можно добавлять градиент произвольного вектора φ_s. Подберем φ_s так, чтобы тензор ψ_{sm} был симметричным. Это возможно, поскольку уравнение относительно вектора φ_s $(\mathrm{rot}\,\underline{\varphi})^i = f^i(x) = e^{ism}\psi_{sm}$ всегда имеет решение, так как $(e^{ism}\psi_{sm})_{,i} = B^i_{,i} = 0$.

Итак, любое решение уравнений равновесия можно представить в виде (1.23).

Компоненты тензора ψ_{ij} называют функциями напряжений.

Ясно, что формула (1.23) содержит лишние степени свободы – в левой части имеется шесть функций, связанных тремя уравнениями, т.е. три функциональные степени свободы, в правой части имеется шесть функциональных степеней свободы. Таким образом, на ψ_{km} можно наложить еще три ограничения. Эти ограничения не должны препятствовать исчерпанию функциями (1.23) всех решений уравнений равновесия [1]).

[1]) Относительно ограничений на функции напряжений см. [120].

В вариационном принципе Кастильяно можно выразить компоненты тензора напряжений через функции напряжений ψ_{mn} и максимизировать функционал I^* по ψ_{mn}. Соответствующую вариационную задачу называют принципом Кастильяно в функциях напряжений.

Ограничения на функции напряжений удобно в каждой конкретной задаче вводить по-своему, максимально используя упрощения, связанные со спецификой задачи. При этом обычно приходится заново строить решение уравнений равновесия для того, чтобы быть уверенным, что специальный выбор функций напряжений не исключает части решений. Разберем более подробно формулировку вариационного принципа Кастильяно в плоской задаче теории упругости.

Плоская задача. Принцип Кастильяно в напряжениях в двумерном случае выглядит следующим образом: найти максимум функционала

$$I^*(p) = \int\limits_{\partial\Omega_w} [\tilde{w}_x(s)(p_{xx}\nu_x + p_{xy}\nu_y) + \tilde{w}_y(s)(p_{yx}\nu_x + p_{yy}\nu_y)]\,ds - \\ - \int\limits_{\Omega} U^*(p_{xx}, p_{xy}, p_{yy})\,dx\,dy \qquad (1.26)$$

по всем функциям p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, которые удовлетворяют ограничениям

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (1.27)$$

$$p_{xx}\nu_x + p_{xy}\nu_y = P_x, \quad p_{yx}\nu_x + p_{yy}\nu_y = P_y \text{ на } \partial\Omega_p. \qquad (1.28)$$

Здесь Ω – некоторая область в плоскости $\{x, y\}$, ограниченная кусочно гладким контуром $\partial\Omega$, $\partial\Omega$ состоит из двух связных частей $\partial\Omega_w$ и $\partial\Omega_p$, на $\partial\Omega_w$ заданы перемещения $\tilde{w}_x(s)$, $\tilde{w}_y(s)$, на $\partial\Omega_p$ – поверхностные силы $P_x(s), P_y(s)$, s – длина дуги вдоль $\partial\Omega$. Область Ω будем считать односвязной.

Уравнения (1.27) означают, что существуют функции Φ_1 и Φ_2 такие, что

$$p_{xx} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \quad p_{xy} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \quad p_{yx} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}, \quad p_{yy} = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}.$$

Так как $p_{xy} = p_{yx}$, то

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0.$$

Поэтому найдется функция ψ такая, что $\Phi_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $\Phi_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$. Общее решение уравнений равновесия имеет вид

$$p_{xx} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \quad p_{xy} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}, \quad p_{yy} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \qquad (1.29)$$

Функцию ψ называют функцией Эри. По известным компонентам тензора напряжений функция ψ определяется с точностью до линейной функции от x, y. Значение этой линейной функции зафиксируем тем, что в некоторой точке C, лежащей на $\partial\Omega_p$, положим

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ в точке } C. \qquad (1.30)$$

Длина дуги на $\partial\Omega$ отсчитывается дальше от точки C, а за положительное направление принято направление, движение по которому вдоль $\partial\Omega$ оставляет область Ω слева.

Выразим краевые условия (1.28) в терминах функции Эри. Для этого заменим компоненты нормали ν_x, ν_y в (1.28) через компоненты τ_x, τ_y вектора, касательного к $\partial\Omega$: $\tau_x = -\nu_y$, $\tau_y = \nu_x$.

Из (1.28) и (1.29) имеем

$$p_{xx}\nu_x + p_{xy}\nu_y = \tau_y \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \tau_x \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{d}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y} = P_x(s),$$
$$p_{yx}\nu_x + p_{yy}\nu_y = -\tau_y \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \tau_x \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{d}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x} = P_y(s). \qquad (1.31)$$

Следовательно, краевые условия определяют значение на контуре $\partial\Omega_p$ производных от функции напряжений

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \int_0^s P_x(s)\,ds, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\int_0^s P_y(s)\,ds. \qquad (1.32)$$

Покажем, что в случае, когда на всем контуре заданы поверхностные силы, краевые условия (1.32) сводятся к заданию однозначно определенных функций $\psi(s)$ и $\frac{d\psi}{d\nu} \equiv \nu_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\psi}{\partial y}$. Действительно, необходимое условие корректности вариационной задачи в этом случае есть обращение в нуль суммарной силы и момента

$$\int_0^l P_x(s)\,ds = 0, \quad \int_0^l P_y(s)\,ds = 0, \quad \int_0^l (xP_y(s) - yP_x(s))\,ds = 0. \qquad (1.33)$$

Здесь l – длина контура $\partial\Omega$.

Первые два равенства (1.33) означают, что формулы (1.32) определяют на контуре две однозначные функции $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$. Следовательно, однозначно определены $\partial\psi/\partial\nu$ и $\partial\psi/\partial s \equiv \tau_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \tau_y \frac{\partial\psi}{\partial y}$. Найдем $\psi(s)$ на $\partial\Omega$. Представим $\psi(s)$ в виде

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\psi}{ds}\,ds = \int_0^s \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)ds = \int_0^s \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy\right) =$$
$$= \left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\Bigg|_0^s - \int_0^s \left(x\frac{d}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{d}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)ds.$$

Здесь учтены равенства (1.30).

Используя (1.31), имеем

$$\psi(s) = \left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\Bigg|_0^s + \int_0^s (xP_y - yP_x)\,ds. \qquad (1.34)$$

В силу (1.33) формула (1.34) определяет на $\partial\Omega$ однозначную функцию $\psi(s)$, что и требовалось.

Если поверхностные силы заданы только на части контура $\partial\Omega$, то возможность определения из (1.32) однозначных функций $\psi(s)$ и $d\psi(s)/dv$ очевидна.

После подстановки (1.29) в функционал (1.26) получим

Принцип Кастильяно в функциях напряжений. Истинное значение функции напряжений доставляет максимум функционалу

$$\int_{\partial\Omega_w} \left(\tilde{w}_x(s)\,\frac{d}{ds}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \tilde{w}_y(s)\,\frac{d}{ds}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) ds -$$

$$-\int_{\Omega} U^*\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) dx\,dy$$

на множестве всех функций ψ, удовлетворяющих краевым условиям

$$\psi = f_1(s),\ \frac{d\psi}{dv} = f_2(s) \quad \text{на} \quad \partial\Omega_p.$$

Функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ вычисляются по $P_x(s)$ и $P_y(s)$ из формул (1.32) и (1.34).

В теории упругости, помимо рассмотренных, представляют интерес и другие краевые задачи. Например, на части границы тела ∂V_{w^1} можно задать лишь одну компоненту перемещений, скажем w^1. Тогда, для того чтобы была определена работа внешних сил $p_i\,\delta w^i = p_2\delta w^2 + p_3\delta w^3$ в точках ∂V_{w^1}, должны быть заданы "дополнительные" к w^1 силовые краевые данные p_2 и p_3. При этом в функционал энергии вариационного принципа Лагранжа войдет интеграл по ∂V_{w^1} от величины $p_2 w^2 + p_3 w^3$. Соответствующие изменения в вариационных принципах Рейсснера и Кастильяно очевидны.

§ 2. СТАТИКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Под геометрически нелинейной понимается теория упругого тела, в которой перемещения и градиенты перемещений не считаются малыми. Теория существенно усложняется. Оказывается, что упругая энергия становится невыпуклым функционалом, а работа внешних сил не всегда голономна. По этой причине вариационные принципы геометрически нелинейной теории упругости пока недостаточно изучены. Изложим основные полученные к настоящему времени результаты.

Вариационное уравнение статики упругого тела запишем в более общем виде, чем в предыдущем параграфе, учтя также приток тепла:

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{A}_{\text{об}} + \delta\mathcal{A}_{\text{пов}} + \delta Q. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathcal{U}$ – внутренняя энергия

$$\mathcal{U} = \int_V U\,d\overset{\circ}{v}, \tag{2.2}$$

U – плотность внутренней энергии единицы начального объема, $\delta\mathcal{A}_{\text{пов}}$ и $\delta\mathcal{A}_{\text{об}}$ – работа внешних поверхностных и объемных сил на возможных перемещениях, δQ – приток тепла.

Обсудим последовательно все входящие в это уравнение слагаемые.

Внутренняя энергия. Плотность энергии U считается известной функцией от компонент дисторсии x^i_a. В силу инвариантности энергии относительно вращений дисторсия может входить в U через компоненты одного из тензоров g_{ab}, $|x|_{ab}$, γ_{ab} или ϵ_{ab} (см. (1.3.17) – (1.3.22)). Функция U зависит также от физических постоянных – компонент некоторых фиксированных тензоров с сопутствующими индексами, которые не меняются в процессе деформации и характеризуют упругие свойства. Физические постоянные могут быть функциями точки и через них упругая энергия может явно зависеть от лагранжевых координат. Это специально не подчеркивается в обозначениях и в качестве аргументов U указываются только существенные (варьируемые) переменные.

Примем нуль за "начало отсчета" упругой энергии и предположим, что в начальном состоянии отсутствуют напряжения. Тогда U удовлетворяет равенствам

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ab}} = 0 \quad \text{при} \quad \epsilon_{ab} = 0. \tag{2.3}$$

При задании U следует выделять два существенно различных случая – случаи малых и конечных деформаций. Малыми называют деформации, которыми можно пренебречь по сравнению с единицей. В противном случае деформации называют конечными.

В теории малых деформаций в качестве меры деформаций можно использовать, в зависимости от удобства, либо тензор ϵ_{ab}, либо тензор γ_{ab}. Согласно формуле (1.3.22) для малых деформаций они совпадают.

Функцию U в теории малых деформаций обычно можно считать квадратичной формой по компонентам тензора деформаций:

$$U = \tfrac{1}{2} E^{abcd}\, \epsilon_{ab}\, \epsilon_{cd}. \tag{2.4}$$

Поскольку любая упругая деформация тела связана с накоплением энергии, квадратичная форма (2.4) должна быть положительно определена:

$$\tfrac{1}{2}\, \underline{\mu}\, \epsilon_{ab}\, \epsilon^{ab} \leqslant U, \quad \underline{\mu} = \text{const} > 0. \tag{2.5}$$

Здесь $\underline{\mu}$ – минимальное собственное значение тензора упругих модулей E^{abcd}

$$\underline{\mu} = \min_{\epsilon_{ab}} \frac{E^{abcd}\, \epsilon_{ab}\, \epsilon_{cd}}{\epsilon_{ab}\, \epsilon^{ab}}.$$

Напомним, что жонглирование индексами осуществляется при помощи метрики недеформированного состояния $\overset{\circ}{g}_{ab}$.

В случае изотропного материала (т.е. материала, для которого $U(\epsilon_{ab}) = U(\epsilon_{cd}\, \alpha^c_a\, \alpha^d_b)$ для любой ортогональной матрицы с компонентами α^c_a) тензор E^{abcd} задается двумя независимыми параметрами λ и μ, и

$$U = \tfrac{1}{2}\lambda (\epsilon^a_a)^2 + \mu \epsilon_{ab}\, \epsilon^{ab}. \tag{2.6}$$

При этом $\underline{\mu} = \min\{3\lambda + 2\mu, 2\mu\}$.

Квадратичную форму (2.4) можно считать первым членом разложения упругой энергии в ряд по ϵ_{ab}. Следующий член есть кубическая форма

$$U = \frac{1}{2} E^{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} + \frac{1}{3!} E^{aba'b'cd} \epsilon_{ab} \epsilon_{a'b'} \epsilon_{cd}.$$

Если компоненты тензоров E^{abcd} и $E^{aba'b'cd}$ одного порядка, то в теории малых деформаций кубическую форму можно не учитывать. Как показывают измерения, для многих материалов компоненты тензора $E^{aba'b'cd}$ превосходят компоненты тензора упругих модулей E^{abcd} на порядок. Поэтому учет кубических членов для таких материалов внесет поправки порядка 10ϵ (ϵ — амплитуда деформаций: $\epsilon = \max_V (\epsilon_{ab} \epsilon^{ab})^{1/2}$). При конкретных расчетах обычно требуется точность $1-5\%$ (на большую точность вообще трудно расчитывать). Поэтому при $\epsilon \leqslant 10^{-3}$ кубическую форму можно отбросить. При $\epsilon \sim 10^{-2}$ кубические члены вносят поправки порядка 10% и потому существенны (отметим, что при $\epsilon \sim 10^{-2}$ в металлах развиваются остаточные деформации и модель упругого тела становится неудовлетворительной). Дальше под теорией малых упругих деформаций будем понимать теорию, в которой U задается по формуле (2.4) либо по эквивалентной формуле

$$U = \tfrac{1}{2} E^{abcd} \gamma_{ab} \gamma_{cd}. \tag{2.7}$$

В области конечных деформаций выражения (2.4) и (2.7) перестают быть эквивалентными. Модель с плотностью энергии (2.4) называют физически линейным упругим телом, модель с плотностью энергии (2.7) — полулинейным упругим телом. Последнее наименование связано с тем, что тензор $|x|_{ab}$, использованный при построении меры деформаций γ_{ab}, зависит от дисторсии полулинейно (см. § 3 гл I).

Формулы (2.4) и (2.7) могут применяться при конечных, но не очень больших деформациях. Действительно, рассмотрим, например, однородное сжатие тела в точку. При этом значения тензоров деформаций ϵ_{ab} и γ_{ab} изменяются соответственно от 0 до $-\tfrac{1}{2} g_{ab}$ и от 0 до $-\overset{\circ}{g}_{ab}$. Если энергия тела определена по формулам (2.4) или (2.7) для любых конечных деформаций, то изменение энергии конечно. Следовательно, при сжатии тела в точку конечна работа внешних сил; кроме того, конечны и сами силы (это видно из уравнений состояния), а повседневный опыт убеждает нас, что тела, которые мы описываем моделью упругого тела, нельзя сжать в точку конечными силами.

Для конечных деформаций в качестве меры деформации естественно использовать непосредственно компоненты тензоров g_{ab} или $|x|_{ab}$, так как их отклонения от начальных значений не малы и роль ϵ_{ab} и γ_{ab} как мер отклонения от недеформированного состояния утрачивается.

При построении упругой энергии при конечных деформациях следует учесть, что энергия должна обращаться в бесконечность при сжатии элемента среды в точку и при его неограниченном растяжении. При сжатии элемента среды в точку обращаются в бесконечность компоненты тензора g^{ab} ($g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$), при неограниченном расширении — компоненты тензора g_{ab}. Для изотропного материала простейшее выражение, удовлетворяющее усло-

вию бесконечности энергии при неограниченном сжатии и растяжении элемента среды, можно сконструировать из сверток $\overset{\circ}{g}{}^{ab} g_{ab}$ и $\overset{\circ}{g}_{ab} g^{ab}$:

$$U = c_1 \overset{\circ}{g}{}^{ab} + c_2 \overset{\circ}{g}_{ab} g^{ab}. \tag{2.8}$$

Функцию (2.8) необходимо подправить так, чтобы она удовлетворяла равенствам (2.3), а для малых деформаций переходила в функцию (2.6). Несложные вычисления дают

$$U = \frac{\mu}{4} [(1+c)(\overset{\circ}{g}{}^{ab} g_{ab} - 3) + (1-c)(\overset{\circ}{g}_{ab} g^{ab} - 3)] - \frac{\mu c}{2} \left(\frac{\hat{g}}{\overset{\circ}{g}} - 1 \right), \tag{2.9}$$

где μ — модуль сдвига при малых деформациях, c — характеристика материала.

В теории конечных деформаций несжимаемого материала последнее слагаемое в (2.9) обращается в нуль и плотность упругой энергии принимает вид

$$U = \tfrac{1}{4}\mu [(1+c)(\overset{\circ}{g}{}^{ab} g_{ab} - 3) + (1-c)(\overset{\circ}{g}_{ab} g^{ab} - 3)]. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) было предложено Муни. Материал Муни содержит одну экспериментально определяемую при больших деформациях постоянную c (коэффициент μ есть коэффициент Ламе при малых деформациях).

При $c = 1$ формула Муни переходит в формулу, выведенную из статистических соображений о структуре каучука Трелоаром,

$$U = \tfrac{1}{2}\mu(\overset{\circ}{g}{}^{ab} g_{ab} - 3). \tag{2.11}$$

Вместо сверток $\overset{\circ}{g}{}^{ab} g_{ab}$ и $\overset{\circ}{g}_{ab} g^{ab}$ при построении упругой энергии можно использовать свертки $\overset{\circ}{g}{}^{ab} |x|_{ab}$ и $\overset{\circ}{g}_{ab} |x|^{(-1)ab}$, где $|x|^{(-1)ab}$ — тензор, обратный к тензору $|x|_{ab}$. Тогда формулы Муни и Трелоара заменятся выражениями

$$U = \tfrac{1}{4}\mu [(1+c)(\overset{\circ}{g}{}^{ab} |x|_{ab} - 3) + (1-c)(\overset{\circ}{g}_{ab} |x|^{(-1)ab} - 3)],$$

$$U = \tfrac{1}{2}\mu(\overset{\circ}{g}{}^{ab} |x|_{ab} - 3).$$

Существует ряд других предложений относительно зависимости упругой энергии от мер деформации, однако мы ограничимся приведенными примерами.

Работа внешних объемных сил. Функционал работы внешних объемных сил задается равенством

$$\delta \mathcal{A}_{об} = \int_V \rho F_i(x)\, \delta x^i\, dv.$$

Будем считать F_i известными функциями закона движения $x^i(\xi^a, t)$. Для того чтобы явно выделить зависимость от закона движения, перепишем $\delta \mathcal{A}_{об}$ в виде интеграла по начальному объему:

$$\delta \mathcal{A}_{об} = \int_{\overset{\circ}{V}} \rho_0 F_i(x^i(\xi^a, t))\, \delta x^i\, d\overset{\circ}{v}. \tag{2.12}$$

Здесь уже ρ_0 — известная функция лагранжевых координат, и закон движения входит в (2.12) только через внешние объемные силы.

Функционал (2.12) имеет вид (1.4.13), и условия его голономности даются равенствами (1.4.18). Так как функции F_i не зависят от производных закона движения, равенства (1.4.18) содержат одно соотношение

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i}. \tag{2.13}$$

Условия голономности (2.13) совпадают с условиями голономности дифференциальной формы $F_i\,\delta x^i$. Следовательно, для голономности работы внешних объемных сил необходимо и достаточно, чтобы существовала функция Ф от закона движения такая, что

$$F_i = -\frac{\partial \Phi(x^i(\xi^a, t))}{\partial x^i}.$$

Пусть потенциал внешних объемных сил Ф существует. Тогда, как легко видеть, $\delta\mathcal{A}_{об}$ представляет собой вариацию следующего функционала:

$$\delta\mathcal{A}_{об} = \delta \int_V \rho_0 \Phi d\overset{\circ}{v} = \delta \int_V \rho\Phi\, dv. \tag{2.14}$$

Важным примером потенциальных сил является сила тяжести.

Очевидно, что формула (2.14) остается справедливой, если F_i зависят также явно от лагранжевых координат

$$F(x, \xi) = -\frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x^i}.$$

Примером таких сил являются "мертвые" объемные силы, компоненты которых F_i есть функции только от лагранжевых координат. Для "мертвых" сил потенциал Ф дается формулой $\Phi = F_i(\xi)\,x^i$.

Работа внешних поверхностных сил. Будем считать, что на части ∂V_w поверхности ∂V положение частиц задано:

$$x^i(\xi^a) = \tilde{x}^i(\xi^a) \text{ на } \partial V_w. \tag{2.15}$$

Тогда $\delta x^i = 0$ на ∂V_w, и работа внешних поверхностных сил сводится к интегралу по $\partial V_p = \partial V - \partial V_w$

$$\delta\mathcal{A}_{пов} = \int_{\partial V_p} P_i \delta x^i\, d\sigma. \tag{2.16}$$

Задать функционал $\delta\mathcal{A}_{пов}$ это значит задать векторное поле P_i на поверхности ∂V_p, положение которой заранее неизвестно и ищется в процессе решения задачи.

Приведем некоторые способы задания поверхностных сил и обсудим условия голоиомности производимой ими работы.

"Мертвые" нагрузки. Поверхностная нагрузка называется "мертвой", если поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности тела в недеформированном состоянии, зависит известным образом только от лагранжевых координат

$$P_i \frac{d\sigma}{d\overset{\circ}{\sigma}} = \overset{\circ}{P}_i(\xi^a) \quad \text{на} \quad \partial V_p.$$

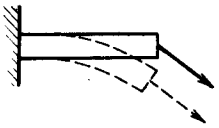


Рис. 34.

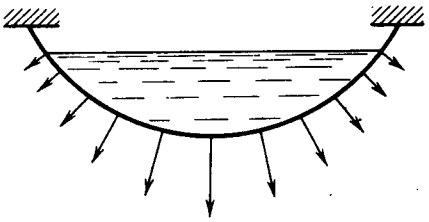


Рис. 35.



Рис. 36.

При деформации тела "мертвые" нагрузки в каждой фиксированной точке его границы сохраняют свою величину и направление в пространстве (рис. 34). Как правило, "мертвыми" являются нагрузки, связанные с силой тяжести.

В случае "мертвых" нагрузок функционал $\delta\mathcal{A}_{\text{пов}}$ можно переписать в виде

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пов}} = \int\limits_{\partial V_p} \overset{\circ}{P}_i \, \delta x^i \, d\overset{\circ}{\sigma},$$

поэтому работа внешних поверхностных сил имеет потенциал

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пов}} = \delta \Big(\int\limits_{\partial V_p} \overset{\circ}{P}_i \, x^i \, d\overset{\circ}{\sigma} \Big).$$

В некоторых задачах известными являются функции $P_i(\xi^a)$, а не $\overset{\circ}{P}_i(\xi^a)$. При этом функционал $\delta\mathcal{A}_{\text{пов}}$, как нетрудно убедиться, неголономен. Однако в случае малых деформаций можно пренебречь различием между $d\sigma$ и $d\overset{\circ}{\sigma}$ и считать, что заданы не P_i, а $\overset{\circ}{P}_i$, определив их по формуле $\overset{\circ}{P}_i(\xi^a) = P_i(\xi^a)$. Этим достигается голономность $\delta\mathcal{A}_{\text{пов}}$.

Гидростатическая нагрузка. При взаимодействии упругих тел с идеальной жидкостью поверхностные силы направлены по нормали к поверхности

$$P_i = -Pn_i. \tag{2.17}$$

Иногда давление P можно считать известной функцией от эйлеровых координат и, следовательно, от $x^i(\xi^a)$

$$P = P(x^i) = P(x^i(\xi^a)).$$

В подобных случаях работа поверхностных сил имеет следующий потенциал:

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пов}} = \delta \int\limits_V P(x^i)\, d^3x. \tag{2.18}$$

В частности, для тела, находящегося нод действием однородного внешнего гидростатического давления,

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пов}} = \delta\,(P \mid V \mid).$$

Неоднородная гидростатическая нагрузка возникает, например, в задачах о деформации упругих оболочек, содержащих жидкость (рис. 35). В таких задачах физически более естественно распространить интеграл в (2.18) по области, занятой жидкостью.

Следящая нагрузка. Если в каждой точке границы тела направление вектора P_i определенным образом связано с направлением вектора нормали к границе, то нагрузку называют следящей. Простейший пример следящей нагрузки дают поверхностные силы, в каждой точке направленные по нормали, т.е. определенные формулой (2.17). При этом основное отличие от гидростатической нагрузки заключается в том, что давление P не является универсальной функцией эйлеровых координат, а может зависеть от точек поверхности. Подобные случаи встречаются в некоторых задачах о деформации оболочек и стержней (рис. 36; на верхнем торце стержня $P = \text{const} \neq \neq 0$, на боковой поверхности стержня $P = 0$). Работа следящих нагрузок, как правило, неголономна.

Пусть, например, P в (2.17) принимает постоянное значение на некотором участке Ω поверхности ∂V_p, а в остальных точках ∂V_p $P = 0$. Вопрос о голономности такой нагрузки сводится к исследованию голономности функционала

$$\delta a = \int\limits_{\Omega} n_i \delta x^i \, d\sigma.$$

В соответствии с общим критерием (1.4.3) необходимое и достаточное условие голономности функционала δa имеет вид

$$\delta \int\limits_{\Omega} n_i \delta x^i \, d\sigma = \delta \int\limits_{\Omega} n_i \delta' x^i \, d\sigma.$$

Можно показать [100], что оно сводится к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} e_{ijk} \delta x^i \delta' x^j \tau^k \, ds = 0, \tag{2.19}$$

где контур Γ – граница поверхности Ω, τ^k – вектор, касательный к Γ. В задаче о деформации стержня следящей нагрузкой (рис. 36) можно считать, что верхний торец Ω и его граница Γ движутся как абсолютно твердое тело; при произвольных движениях контура Γ как твердого условие голономности (2.19) не выполняется.

Отметим, что вопрос о голономности работы внешних сил имеет важное значение в задачах о колебании упругих тел. Для потенциальных внешних нагрузок их суммарная работа за один цикл колебаний равна нулю, и можно ожидать, что амплитуда колебаний не будет расти. Если же функционал работы внешних сил неголономен, то суммарная работа за цикл зависит от пути. Могут найтись циклы, на которых она положительна, и возможна раскачка колебаний.

Условия голономиости притока тепла. Отметим два случая, в которых функционал притока тепла

$$\delta Q = \int\limits_{V} \rho T \, \delta S \, dv$$

заведомо голономен. Это адиабатические и изотермические деформации. В первом случае энтропия представляет заданную функцию лагранжевых координат и не варьируется, поэтому $\delta S = 0$ и приток тепла обращается в нуль (этот случай рассматривался в предыдущем параграфе). Во втором случае температура считается заданной функцией лагранжевых координат, следовательно, $\delta T = 0$ и

$$\delta Q = \int\limits_{V} \rho_0 T \, \delta S \, d\overset{\circ}{v} = \delta \int\limits_{V} \rho_0 T S \, d\overset{\circ}{v} = \delta \int\limits_{V} \rho T S \, dv.$$

Для изотермических деформаций вариационное уравнение можно переписать в форме

$$\delta \mathcal{F} = \delta \mathcal{A}_{об} + \delta \mathcal{A}_{пов}, \quad \mathcal{F} = \int_V (U - \rho_0 TS)\, d\overset{\circ}{v}$$

Определение стационарной точки по S сводится к алгебраической задаче о вычислении преобразования Лежандра функции U по S. Считая, что оно выполнено, приходим к вариационному уравнению, имеющему форму уравнения для адиабатических деформаций, в котором вместо $U(x_a^i, S)$ стоит $F(x_a^i, T) = U - \rho_0 TS$. Поэтому дальше достаточно рассмотреть случай адиабатических деформаций.

Прииции Лагранжа. Дальше будем считать, что внешние силы являются "мертвыми". Тогда вариационное уравнение (2.1) оказывается голономным и представляет утверждение о стационарности на множестве функций $x(\xi)$, выделяемом ограничениями (2.15), функционала

$$I(x(\xi)) = \mathcal{U} - L, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{U} = \int_V U(x_a^i)\, d\overset{\circ}{v}, \quad L = \int_V \rho_0 F_i(\xi) x^i(\xi)\, d\overset{\circ}{v} + \int_{\partial V_p} P_i(\xi) x^i(\xi)\, d\overset{\circ}{\sigma}.$$

Это утверждение принято называть принципом Лагранжа.

Стационарные точки функционала $I(x(\xi))$ удовлетворяют уравнениям

$$\overset{\circ}{\nabla}_a p_i^a + \rho_0 F_i = 0, \quad p_i^a = \partial U / \partial x_a^i,$$

краевым условиям на ∂V_p

$$p_i^a \overset{\circ}{n}_a = P_i$$

и краевым условиям на ∂V_w (2.15).

Уравиения состояния. Тензор напряжений Пиола – Кирхгофа p_i^a можно записать в различных формах в зависимости от выбора аргументов U. Если U рассматривается как функция ϵ_{ab} или g_{ab}, то

$$p_i^a = 2\, \frac{\partial U}{\partial g_{ab}}\, x_{ib} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ab}}\, x_{ib}.$$

Выведем аналогичное соотношение в случае, когда U – функция γ_{ab} или $|x|_{ab}$. Для этого надо найти производные $\partial |x|_{bc} / \partial x_a^i$. По определению $|x|_{bc}$ задаются условием, что дисторсию x_a^i можно представить в виде симметричной неотрицательной матрицы $|x|_{bc}$ и ортогональной матрицы λ^{ic}: $x_b^i = |x|_{bc} \lambda^{ic}$. Вычислим бесконечно малые приращения, которые получают $|x|_{bc}$ и λ^{ic}, когда x_b^i дается бесконечно малое приращение δx_b^i. Варьируя равенство $x_b^i = |x|_{bc} \lambda^{ic}$, имеем

$$\lambda^{ic} \delta |x|_{bc} + |x|_{bc}\, \delta \lambda^{ic} = \delta x_b^i. \tag{2.21}$$

Свернем равенства (2.21) с λ_{id}. Так как $\lambda^{ic} \lambda_{id} = \delta_d^c$, то

$$\delta |x|_{bd} + |x|_b^c \lambda_{id} \delta \lambda_c^i = \lambda_{id}\, \delta x_b^i. \tag{2.22}$$

Тензор $\lambda_{id} \delta \lambda_c^i$ антисимметричен по d, c. Действительно, варьируя условия ортогональности $\lambda_{ic} \lambda_d^i = \overset{\circ}{g}_{cd}$, получим $\lambda_{ic} \delta \lambda_d^i + \lambda_{id} \delta \lambda_c^i = 0$. Поэтому

тензор $\lambda_{id}\,\delta\lambda^i_c$ взаимно однозначно связан с бесконечно малым вектором $\delta\lambda^b$ формулами

$$\lambda_{id}\,\delta\lambda^i_c = e_{dch}\,\delta\lambda^h, \quad \delta\lambda^h \equiv \tfrac{1}{2}\,e^{dch}\,\lambda_{id}\,\delta\lambda^i_c. \tag{2.23}$$

Уравнения (2.22) содержат девять равенств. Выпишем сначала три из них, которые получаются свертыванием (2.22) с e^{bda} Поскольку, согласно (1.3.8),

$$|x|^c_b\,\lambda_{id}\,\delta\lambda^i_c\,e^{bda} = |x|^c_b\,e_{dch}\,\delta\lambda^h e^{bda} = |x|^c_b\,(\delta^a_c\,\delta^b_h - \delta^b_c\,\delta^a_h)\,\delta\lambda^h,$$

свертка (2.22) с e^{bda} приводит к системе трех уравнений относительно вектора $\delta\lambda^h$:

$$(|x|^b_b\,\delta^a_h - |x|^a_h)\,\delta\lambda^h = \lambda_{id}\,\delta x^i_b\,e^{dba}. \tag{2.24}$$

В главной системе координат тензора $|x|_{ab}$ тензор $|x|^b_b\,\delta^a_h - |x|^a_h$ имеет диагональный вид и его диагональные компоненты равны $|x|^2_2 + |x|^3_3$, $|x|^3_3 + |x|^1_1$ и $|x|^1_1 + |x|^2_2$. Поскольку $|x|^1_1, |x|^2_2, |x|^3_3 > 0$, можно ввести обратный тензор y^h_c: $y^h_c\,(|x|^b_b\,\delta^a_h - |x|^a_h) = \delta^a_c$. В главной системе координат тензора $|x|_{ab}$ компоненты тензора y^h_c имеют значения: $y^1_1 = (|x|^2_2 + |x|^3_3)^{-1}$, $y^2_2 = (|x|^3_3 + |x|^1_1)^{-1}$, $y^3_3 = (|x|^1_1 + |x|^2_2)^{-1}$.

Решение уравнений (2.24) дается формулой

$$\delta\lambda^h = y^h_c\,e^{dbc}\,\lambda_{id}\,\delta x^i_b. \tag{2.25}$$

Из первого равенства (2.23) и из (2.25) имеем[1])

$$\lambda_{id}\,\delta\lambda^i_c = e_{dch}\,y^h_{c'}\,e^{d'bc'}\,\lambda_{id'}\,\delta x^i_b. \tag{2.26}$$

Подстановка формул (2.26) в равенства (2.22) дает выражение для $\delta\,|x|_{bd}$ через δx^i_a

$$\delta\,|x|_{bd} = \lambda_{id}\,\delta x^i_b - |x|^c_b\,e_{dch}\,y^h_{c'}\,e^{d'b'c'}\,\lambda_{id'}\,\delta x^i_{b'}. \tag{2.27}$$

Каждое из двух слагаемых в правой части (2.27) несимметрично по b, d, однако как легко проверить, их разность симметрична по b, d.

Из (2.27) находим

$$\frac{\partial\,|x|_{bd}}{\partial x^i_a} = \lambda_{id}\,\delta^a_b - |x|^c_b\,e_{dch}\,y^h_{c'}\,e^{d'ac'}\,\lambda_{id'}. \tag{2.28}$$

Таким образом, если U рассматривается как функция $|x|_{bd}$ или γ_{bd}, выражение для тензора Пиола – Кирхгофа имеет вид

$$p^a_i = \frac{\partial U}{\partial\,|x|_{ad}}\,\lambda_{id} - \frac{\partial U}{\partial\,|x|_{bd}}\,|x|^c_b\,e_{dch}\,y^h_{c'}\,e^{d'ac'}\,\lambda_{id'} =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial\gamma_{ad}}\,\lambda_{id} - \frac{\partial U}{\partial\gamma_{bd}}\,|x|^c_b\,e_{dch}\,y^h_{c'}\,e^{d'ac'}\,\lambda_{id'}. \tag{2.29}$$

---

[1]) При подстановке (2.25) в (2.23) возникает необходимость в переобозначении в формуле (2.25) немых индексов суммирования d и c, оставаясь в пределах первых нескольких букв латинского алфавита, отведенных для сопутствующих индексов. В подобных случаях у немых индексов ставится штрих.

О невыпуклости внутренней энергии. Геометрически нелинейную теорию упругости можно было бы изучать общими методами вариационного исчисления, изложенными в гл. II, если бы плотность упругой энергии U была выпуклой функцией от компонент дисторсии x_a^i. Однако условие инвариантности U относительно вращений тела как твердого фактически исключает такую возможность. Обсудим этот вопрос подробнее.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_a^i \partial x_b^j} \bar{x}_a^i \bar{x}_b^j.$$

Для выпуклости U необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма ΔU была положительно определена (см. (2.3.17)). Выберем в качестве аргументов U величины $g_{ab} = x_a^i x_{ib}$. Так как

$$\frac{\partial g_{cd}}{\partial x_a^i} = x_c^i \delta_d^a + x_d^i \delta_c^a,$$

имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x_a^i} = 2 \frac{\partial U}{\partial g_{ac}} x_{ic}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_a^i \partial x_b^j} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial g_{ac} \partial g_{bd}} x_{ic} x_{jd} + \frac{\partial U}{\partial g_{ab}} g_{ij}.$$

Введем обозначения $\bar{x}_a^i x_{ib} = \bar{x}_{ab}$. Квадратичная форма ΔU примет вид

$$\Delta U = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial g_{ac} \partial g_{bd}} \bar{x}_{ac} \bar{x}_{bd} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial g_{ab}} g^{cd} \bar{x}_{ac} \bar{x}_{bd}. \tag{2.30}$$

Представим тензор $\bar{x}_{ac}$ как сумму симметричного и антисимметричного тензоров

$$\bar{x}_{ac} = \bar{\epsilon}_{ac} + e_{ach} \bar{\omega}^h.$$

Здесь $\bar{\omega}^h = \frac{1}{2} e^{ach} \bar{x}_{ac}$, $\bar{\epsilon}_{ab} = \bar{x}_{(ab)}$.

Подстановка в выражение для ΔU дает

$$\Delta U = \frac{1}{2} E^{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} + \frac{\rho_0}{2\rho} p^{ab} g^{cd} \bar{\epsilon}_{ac} \bar{\epsilon}_{bd} +$$

$$+ \frac{\rho_0}{\rho} p^{ab} g^{cd} \bar{\epsilon}_{ac} e_{bdh} \bar{\omega}^h + \frac{\rho_0}{2\rho} p^{ab} g^{cd} e_{ach} e_{bdh} \bar{\omega}^h \bar{\omega}^h \tag{2.31}$$

Здесь $p^{ab} = (\rho/\rho_0)\, \partial U/\partial \epsilon_{ab} = 2(\rho/\rho_0)\, \partial U/\partial g_{ab}$ – компоненты тензора напряжений, а $E^{abcd} = 4\partial^2 U/\partial g_{ab} \partial g_{cd} = \partial^2 U/\partial \epsilon_{ab} \partial \epsilon_{cd}$ – компоненты тензора мгновенных упругих модулей (для физически линейного материала они совпадают с так же обозначенными величинами в формуле (2.4)).

Положим сначала $\bar{\omega}^h = 0$. Тогда условие выпуклости примет вид

$$\Delta U = E^{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} \geqslant 0. \tag{2.32}$$

Неравенство (2.32) имеет простой физический смысл: если на некоторую конечную деформацию элемента среды наложить произвольную бесконечно малую деформацию $\bar{\epsilon}_{ab}$, то энергия среды не убывает. Иногда усиленное неравенство (2.32) ($\Delta U > 0$ при $\bar{\epsilon}_{ab} \neq 0$) выдвигают в качестве

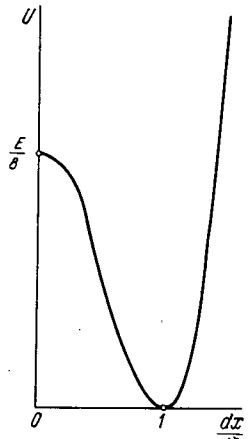


Рис. 37.

необходимого условия, которому должна удовлетворять энергия упругого тела. При малых деформациях оно переходит в неравенство (2.5).

Положим теперь $\bar{\epsilon}_{ab} = 0$. Из формулы (2.31) следует, что для выпуклости U необходима неотрицательность выражения

$$p^{ab} g^{cd} e_{ach} e_{bdh'} \bar{\omega}^h \bar{\omega}^{h'} \geqslant 0. \tag{2.33}$$

Так как, согласно (1.3.8),

$$g^{cd} e_{ach} e_{bdh'} = \frac{1}{\hat{g}} g^{cd} \epsilon_{ach} \epsilon_{bdh} = \frac{1}{\hat{g}} (g_{ab} g_{hh'} - g_{ah'} g_{bh}),$$

неравенство (2.33) можно переписать в виде

$$(p^c_c g_{ab} - p_{ab}) \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b \geqslant 0. \tag{2.34}$$

Здесь индексы опущены при помощи метрики g_{ab}.

Возьмем лагранжеву систему координат, в которой метрический тензор g_{ab} совпадает с δ_{ab}, а тензор напряжений имеет диагональный вид. Неравенство (2.34) означает, что в этой системе координат суммы любых двух диагональных элементов тензора напряжений должны быть неотрицательны:

$$p^1_1 + p^2_2 \geqslant 0, \quad p^2_2 + p^3_3 \geqslant 0, \quad p^3_3 + p^1_1 \geqslant 0. \tag{2.35}$$

Неравенства (2.35) представляют необходимые условия выпуклости. Ясно, что всегда можно реализовать напряженные состояния (например, всестороннее сжатие), для которых неравенства (2.35) не выполнены. Следовательно, упругая энергия не является выпуклой функцией от компонент дисторсии.

В невыпуклости U можно убедиться и на конкретном примере физически линейного материала. Рассмотрим одномерную деформацию физически линейного материала: $x^1 = x(\xi)$, $\xi = \xi^1$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$, $\overset{\circ}{g}_{11} = 1$, $U = \frac{1}{2} E \epsilon^2$, $\epsilon = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 - 1\right)$. График функции $U\left(\frac{dx}{d\xi}\right)$ приведен на рис. 37. Невыпуклость U очевидна.

В этом примере U выпукла в окрестности недеформированного состояния и становится невыпуклой при конечных деформациях. Оказывается, что подобное поведение возможно только в одномерном случае. Для пространственных деформаций функция U невыпукла в любой сколь угодно малой окрестности недеформированного состояния. Разберем этот вопрос.

Рассмотрим пространство девяти переменных x^i_a. Ненапряженное состояние соответствует точке $x^i_a = \overset{\circ}{x}{}^i_a$. Вычислим квадратичную форму ΔU в точке $\overset{\circ}{x}{}^i_a$. Поскольку в ненапряженном состоянии $p^{ab} = 0$, выражение для ΔU (2.31) приобретает форму

$$\Delta U = \tfrac{1}{2} \overset{\circ}{E}{}^{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} \geqslant 0, \quad \overset{\circ}{E}{}^{abcd} = E^{abcd}\Big|_{\epsilon_{ab}=0}.$$

Поэтому условие выпуклости ΔU в точке $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ эквивалентно условию накопления энергии при малых деформациях (2.5), которое будем считать выполненным.

Условие строгой выпуклости U не удовлетворяется, так как $\Delta U = 0$ при любых $\bar{\omega}^h$. Если бы в точке $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ условие строгой выпуклости было справедливо, то нашлась бы окрестность точки $\overset{\circ}{x}{}^i_a$, в которой имеет место условие строгой выпуклости, и можно было бы гарантировать выпуклость U в этой окрестности. В действительности при любых сколь угодно малых смещениях из точки $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ квадратичная форма ΔU перестает быть положительной. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим выражение (2.31) для малых деформаций. Компоненты тензора E^{abcd} отличаются на величины порядка ϵ от компонент тензора $\overset{\circ}{E}{}^{abcd}$. Поскольку квадратичная форма $\overset{\circ}{E}{}^{abcd}\bar{\epsilon}_{ab}\bar{\epsilon}_{cd}$ положительно определена, замена первого слагаемого в (2.31) на $\frac{1}{2}\overset{\circ}{E}{}^{abcd}\bar{\epsilon}_{ab}\bar{\epsilon}_{cd}$ не может привести к изменению знака ΔU. Компоненты тензора напряжений при малых деформациях имеют порядок $\mu\epsilon$, поэтому второе слагаемое в (2.31) пренебрежимо мало по сравнению с первым. После замены в третьем и четвертом слагаемых g^{cd} на $\overset{\circ}{g}{}^{cd}$ и ρ_0/ρ на единицу выражение для ΔU примет вид

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}\overset{\circ}{E}{}^{abcd}\bar{\epsilon}_{ab}\bar{\epsilon}_{cd} + p^{ab}\bar{\epsilon}^d_a e_{bdh}\bar{\omega}^h + \tfrac{1}{2}(p^c_c\overset{\circ}{g}_{ab} - p_{ab})\bar{\omega}^a\bar{\omega}^b. \qquad (2.36)$$

Квадратичная форма ΔU имеет следующую структуру: $\Delta U = a^{ij}x_i x_j + 2b^{i\alpha}x_i y_\alpha + c^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta$, где переменные x_i и y_α символизируют соответственно $\bar{\epsilon}_{ab}$ и $\bar{\omega}^a$, коэффициенты a^{ij} имеют порядок μ, а коэффициенты $b^{i\alpha}$ и $c^{\alpha\beta}$ – малые порядка $\mu\epsilon$. В таких квадратичных формах перекрестный член $2b^{i\alpha}x_i y_\alpha$ не влияет в первом приближении на знакоопределенность формы. Действительно, перепишем форму в виде $\Delta U = a^{ij}(x_i + a^{(-1)}_{ik}b^{k\alpha}y_\alpha)(i \to j) + c^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta - a^{(-1)}_{ij}b^{i\alpha}b^{j\beta}y_\alpha y_\beta$. Последнее слагаемое мало по сравнению с предыдущим, и в первом приближении может быть отброшено. Поэтому квадратичная форма ΔU положительно определена тогда и только тогда, когда $a^{ij}x_i x_j \geqslant 0$ и $c^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta \geqslant 0$. Первое из этих неравенств представляет условие накопления энергии, второе есть неравенство (2.34). В любой сколь угодно малой окрестности ненапряженного состояния есть точки, в которых неравенство (2.34) не выполняется.

Условие локального минимума. Функционал $I(x(\xi))$ не является выпуклым функционалом, поскольку U – невыпуклая функция x^i_a. С физической точки зрения это свойство совершенно естественно: если бы функционал $I(x(\xi))$ был выпуклым, то, согласно теореме единственности § 1 гл. II, он имел бы единственный минимизирующий элемент, а это противоречит экспериментально наблюдаемому явлению неустойчивости упругих тел, связанному с существованием нескольких положений равновесия для одной и той же нагрузки.

Важной характеристикой стационарной точки $x(\xi)$ является вторая вариация $I(x(\xi))$

$$\Delta I = \lim_{\sigma \to 0} \frac{I(x(\xi) + \sigma\bar{x}(\xi)) - I(x(\xi))}{\sigma^2}.$$

Напомним, что первая вариация $\lim\limits_{\sigma \to 0}(I(x(\xi) + \sigma\bar{x}(\xi)) - I(x(\xi)))/\sigma$ равна нулю для любых допустимых $\bar{x}(\xi)$ в силу определения стационарной точки.

Функционал ΔI есть квадратичный функционал по $\bar{x}(\xi)$. Если функционал ΔI положительно определен, то малые возмущения внешних сил будут приводить к малым изменениям решения.

Получим формулу для второй вариации. Очевидно, что

$$\Delta I = \int_V \Delta U \, dv.$$

Величина ΔU дается равенством (2.31), в котором следует положить $\bar{x}_{ac} = x_{ic} \partial \bar{x}^i / \partial \xi^a$.

Выражение для ΔU допускает существенные упрощения, если деформации малы настолько, что можно отбросить не только величины порядка ϵ по сравнению с единицей, но также и величины порядка $\sqrt{\epsilon}$. Будем исходить из равенства (2.36). Рассмотрим второе слагаемое в (2.36). На основе неравенства $|x_i y^i| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} x_i x^i + \lambda y_i y^i\right)$, справедливого для любых x_i, y^i и $\lambda > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, имеем

$$|2p^{ab} e_{bdh} \bar{\omega}^h \bar{\epsilon}_a^d| \leqslant \frac{1}{\lambda} p^{ab} e_{bdh} \bar{\omega}^h p_a^{b'} e_{b'd'h'} \bar{\omega}^{h'} + \lambda \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}^{ab}.$$

Если выбрать $\lambda = \sqrt{\epsilon}$, то выписанное выражение не превосходит $\text{const} \cdot \sqrt{\epsilon}(\bar{\epsilon}_{ab}\bar{\epsilon}^{ab} + \bar{\omega}_h \bar{\omega}^h)$. Таким образом, с точностью до величин порядка $\sqrt{\epsilon}$ по сравнению с единицей, для малых деформаций можно написать:

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_V (\overset{\circ}{E}{}^{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} + (p_c^c \overset{\circ}{g}_{ab} - p_{ab}) \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b) \, d\overset{\circ}{v}.$$

Рассмотрим условие локальной выпуклости $\Delta I \geqslant 0$. Выберем сопутствующую систему координат так, чтобы в ней имело место равенство $x_a^i = \delta_a^i$. Тогда, обозначая через $\bar{x}_a$ функции $\bar{x}_a = x_{ia} \bar{x}^i(\xi)$, получим

$$\bar{\epsilon}_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{x}_a}{\partial \xi^b} + \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial \xi^a}\right), \quad \bar{\omega}^a = \frac{1}{2} e^{abc}\left(\frac{\partial \bar{x}_b}{\partial \xi^c} - \frac{\partial \bar{x}_c}{\partial \xi^b}\right). \tag{2.37}$$

Функции $\bar{x}_a$ на ∂V_w равны нулю. Итак, положение равновесия является точкой локального минимума функционала $I(x(\xi))$, если для любых функций $\bar{x}_a$, обращающихся в нуль на ∂V_w, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_V \overset{\circ}{E}{}^{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} \, dv \geqslant -\frac{1}{2} \int_V (p_c^c \delta_{ab} - p_{ab}) \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b \, dv, \tag{2.38}$$

где $\bar{\epsilon}_{ab}$ и $\bar{\omega}^a$ выражаются через $\bar{x}_a$ по формулам (2.37). Заметим, что для изотропного тела тензор $\overset{\circ}{E}{}^{abcd}$ в рамках принятой точности "не почувствует" перехода в выбранную выше систему координат. Для изотропного тела условие локальной выпуклости имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_V (\lambda(\bar{\epsilon}_a^a)^2 + 2\mu \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}^{ab}) \, dv \geqslant -\frac{1}{2} \int_V (p_c^c \delta_{ab} - p_{ab}) \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b \, dv. \tag{2.39}$$

Если во всех точках тела тензор $p_c^c \delta_{ab} - p_{ab}$ положительно определен (т.е. положительно определена квадратичная форма $(p_c^c \delta_{ab} - p_{ab}) \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b$),

то неравенство (2.38) выполняется, и положение равновесия есть точка локального минимума функционала $I(x(\xi))$. Если тензор $p_c^c\delta_{ab} - p_{ab}$ отрицательно определен или в одних частях тела тензор $p_c^c\delta_{ab} - p_{ab}$ определен положительно, а в других отрицательно, то исследование неравенства (2.38) представляет сложную задачу.

Неравенство (2.38) по структуре напоминает неравенство Корна, и можно дать простые достаточные условия для выполнения неравенства (2.38) через постоянную Корна K. Пусть p есть максимум по области V наибольшего собственного значения тензора $-(p_c^c\delta_{ab} - p_{ab})$ и постоянная p такова, что $p \leqslant \underline{\mu}(K-1)/2$. (Подразумевается, что постоянная Корна вычисляется на множестве функций w_i, удовлетворяющих условию $w_i = 0$ на ∂V_w). Тогда положение равновесия является точкой локального минимума функционала $I(x(\xi))$. Приведенное утверждение следует из определения $\underline{\mu}$, неравенства Корна и неравенства (2.38).

Принцип стационарности дополнительной работы. Построим вариационный принцип, представляющий обобщение на геометрически нелинейный случай принципа Кастильяно. При конструировании принципа Кастильяно мы представляли U в виде

$$U(\epsilon_{ij}) = \sup_{p^{ij}} (p^{ij}\epsilon_{ij} - U^*(\epsilon_{ij})). \tag{2.40}$$

В геометрически нелинейной теории аналогом соотношения (2.40) явилось бы равенство

$$U(x_a^i) = \sup_{p_i^a} [p_i^a x_a^i - U^*(p_i^a)]. \tag{2.41}$$

Равенство (2.41), однако, не имеет места, так как функция U не выпукла (см. § 3 гл. II.), и можно лишь утверждать, что

$$U(x_a^i) \geqslant \sup_{p_i^a} [p_i^a x_a^i - U^*(p_i^a)], \tag{2.42}$$

где $U^*(p_i^a)$ – преобразование Юнга – Фенхеля функции $U(x_a^i)$:

$$U^*(p_i^a) = \sup_{x_a^i} [p_i^a x_a^i - U(x_a^i)].$$

Поэтому мы попытаемся построить преобразование Лежандра функции $U(x_a^i)$ – функцию $U^\times(p_i^a)$, может быть, неоднозначную, но такую, что функция $p_i^a x_a^i - U^\times(p_i^a)$ в своих стационарных по p_i^a точках совпадает с функцией $U(x_a^i)$. При этом внутреннюю энергию U будем предполагать выпуклой функцией от $|x|_{ab}$. Преобразование Юнга – Фенхеля внутренней энергии по $|x|_{ab}$ обозначим через $V(\sigma^{ab})$:

$$V(\sigma^{ab}) = \sup_{|x|_{ab}} (\sigma^{ab}|x|_{ab} - U(|x|_{ab}).$$

Здесь верхняя грань вычисляется по всем симметричным положительно определенным тензорам $|x|_{ab}$.

Покажем, что для изотропного материала:

1. Функция $U^\times$ дается равенством

$$U^\times(p_i^a) = V(|p|^{ab} s_b^c), \tag{2.43}$$

где $|p|^{ab}$ – "модуль" тензора Пиола – Кирхгофа, определяемый полярным

разложением $p_i^a = |p|^{ab}\mu_{ib}$ (μ_{ib} — компоненты ортогональной матрицы). Функция $U^\times$ имеет четыре ветви, каждая из которых фиксируется выбором матрицы s_b^c. В главной системе координат тензора $|p|^{ab}$ матрица s_b^c принимает следующие восемь возможных значений:

$$\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|, \tag{2.44}$$

$$\left\|\begin{matrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right\|, \tag{2.45}$$

причем $\| s_b^c \|$ есть одна из матриц (2.44), если $\det \| p_i^a \| > 0$, и одна из матриц (2.45), если $\det \| p_i^a \| < 0$.

2. При заданных x_a^i стационарная по p_i^a точка функции $\Phi(p_i^a, x_a^i) = p_i^a x_a^i - U^\times(p_i^a)$ определяется единственным образом, при этом по значению x_a^i восстанавливается ветвь функции $U^\times$, для которой $\Phi(p_i^a, x_a^i)$ имеет стационарную точку. В стационарной точке справедливо равенство

$$p_i^a x_a^i - U^\times(p_i^a) = U(x_a^i). \tag{2.46}$$

Перейдем к доказательству первого утверждения. Нам надо вычислить величину $U^\times = p_i^a x_a^i - U(x_a^i)$, где x_a^i выражены через p_i^a из уравнений

$$p_i^a = \frac{\partial U}{\partial x_a^i}\ . \tag{2.47}$$

Обозначим через $\mathscr{X}$ множество в пространстве переменных x_a^i, выделяемое условием $\det \| x_a^i \| > 0$, через $\mathscr{P}$ — множество, которое пробегают величины $p_i^a = \partial U/\partial x_a^i$, когда x_a^i пробегают множество $\mathscr{X}$.

Отметим, что p_i^a, вообще говоря, не могут принимать любые наперед заданные значения. Это видно, например, из рис. 37: напряжение $p = \frac{1}{2} E \frac{dx}{d\xi}\left(\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 - 1\right)$ может принимать любые положительные значения, однако его отрицательные значения ограничены снизу. Нижняя граница напряжений в одномерном случае имеет простой смысл для полулинейного материала. В этом случае $p_1^1 = E(|x|_{11} - 1)$ и, так как $|x|_{11} \geqslant 0$, $p_1^1 \geqslant -E$. Значение $p_1^1 = -E$ выделено тем, что при $p_1^1 = -E$ элемент сжимается в точку. Считая p_i^a известным элементом множества $\mathscr{P}$, будем искать из системы уравнений (2.47) величины $x_a^i \in \mathscr{X}$. Для изотропного материала тензоры $|x|_{ab}$ и $\partial U/\partial |x|_{ab}$ соосны, поэтому тензор $|x|_b^c\, \partial U/\partial |x|_{bd}$ симметричен по c, d и, согласно (2.29), система уравнений (2.47) примет вид

$$p_i^a = \sigma^{ad}\lambda_{id},\quad \sigma^{ad} = \partial U/\partial |x|_{ad}. \tag{2.48}$$

Введем полярные разложения тензоров p_i^a и σ^{ab}:

$$p_i^a = |p|^{ab}\mu_{ib},\quad \sigma^{ad} = |\sigma|^{ab}s_b^d.$$

В главной системе координат тензора σ^{ad} внедиагональные элементы матрицы s_b^d равны нулю, а на диагонали стоят +1 или −1 в зависимости от того,

больше или меньше нуля соответствующее собственное значение тензора[1] σ^{ad}. Таким образом, s_b^d в главной системе координат тензора $|\sigma|^{ab}$ есть одна из матриц (2.44), (2.45).

В терминах полярного разложения система уравнений (2.48) перепишется в форме

$$|p|^{ab}\mu_{ib} = |\sigma|^{ab} s_b^d \lambda_{id}.$$

В силу единственности полярного разложения

$$|p|^{ab} = |\sigma|^{ab}, \quad \mu_{ib} = \lambda_{id} s_b^d. \tag{2.49}$$

Из соотношений (2.49) видно, как следует строить решение уравнений (2.47). Сначала строится полярное разложение тензора p_i^a и определяются тензоры $|p|^{ab}$ и μ_{ib}. Поскольку тензоры $|\sigma|^{ab}$ и $|p|^{ab}$ равны, матрица s_b^d имеет вид (2.44), (2.45) в главной системе координат тензора $|p|^{ab}$. Фиксируем матрицу s_b^d. Тогда $\sigma^{ad} = |p|^{ab} s_b^d$. По σ^{ad} из уравнения $\sigma^{ad} = \partial U/\partial |x|_{ad}$ вычисляется $|x|_{ab}$. "Ортогональная часть" дисторсии находится из (2.49): $\lambda_{id} = \mu_{ib} s_a^b$.

Из уравнения (2.49) и условия $\det \| \lambda_a^i \| = +1$ следует, что $\det \| \mu_a^i \| = \det \| s_b^c \|$. Поэтому при $\det \| \mu_a^i \| = +1$ величины s_b^c есть компоненты одной из матриц (2.44), а при $\det \| \mu_a^i \| = -1$ они являются компонентами одной из матриц (2.45).

Поскольку $|x|_{ad} = \partial V/\partial \sigma^{ad}$, $x_a^i = |x|_{ad}\lambda^{id}$, дисторсия восстанавливается по компонентам тензора Пиола – Кирхгофа по формуле

$$x_a^i = \frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\Bigg|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s_b^d} \mu^{ib} s_b^d. \tag{2.50}$$

Эта формула содержит произвол, связанный с различными способами выбора матриц s_b^d.

Для каждого тензора Пиола – Кирхгофа p_i^a имеется четыре решения уравнения (2.47), соответствующие четырем различным способам выбора матрицы s_b^d. Дисторсии, "склеивающиеся" при отображении $\mathscr{X} \to \mathscr{P}$, характеризуются тем, что соответствующие тензоры σ^{ab} имеют одинаковый модуль $|\sigma|^{ab}$ и детерминант $\det \| \sigma^{ab} \|$.

Заметим, что формула для второй вариации U (2.36) показывает, что $\det \left\| \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_a^i \, \partial x_b^j} \right\| = 0$ в малой окрестности плоскостей $p_1^1 + p_2^2 = 0$, $p_2^2 + p_3^3 = 0$, $p_3^3 + p_1^1 = 0$ (для малых деформаций $p_a^b = \sigma_a^b$), а при остальных значениях x_a^i $\det \left\| \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_a^i \, \partial x_b^j} \right\| \neq 0$. Поэтому ветвление решений уравнений (2.47) возможно только в малой окрестности этих плоскостей.

Ветвь, соответствующую первой матрице (2.44), можно выделить следующим инвариантным условием:

$$\overset{\circ}{x}{}_a^i \lambda_i^a > 1. \tag{2.51}$$

[1] Рассматривается случай общего положения, когда $\det \| |p|^{ab} \| \neq 0$. Случай, когда собственные значения $|p|^{ab}$ обращаются в нуль, получается предельным переходом.

Остальные ветви условию (2.51) не удовлетворяют. Докажем это утверждение. Матрица $\lambda^a_b = \overset{\circ}{x}{}^i_b \lambda^a_i = \overset{\circ}{x}{}^i_b \mu^c_i s^a_c$ ортогональна. Обозначим через λ^a_{1b} матрицу, соответствующую первой матрице s^a_c (2.44), а через λ^a_{2b} – матрицу, соответствующую любому другому выбору матрицы s^a_c (2.44). Сумма $\lambda^a_{1a} + \lambda^a_{2a}$ по построению s^a_c равна либо удвоенному значению одного из диагональных элементов матрицы λ^a_{1b} в главной системе координат тензора $|p|^{ab}$, либо нулю. Поскольку компоненты ортогональной матрицы не превосходят единицы,

$$\lambda^a_{1a} + \lambda^a_{2a} \leqslant 2.$$

Следовательно, если матрица λ^a_{1a} удовлетворяет условию (2.51), то все остальные матрицы этому условию не удовлетворяют.

Аналогично доказывается, что ветвь, соответствующая четвертой матрице (2.45), выделяется инвариантным условием $\overset{\circ}{x}{}^i_a \lambda^a_i < -1$.

Выясним геометрический смысл условия (2.51). Для этого воспользуемся представлением ортогональных матриц (1.3.26). Из (1.3.26) следует, что $\lambda^a_a = 1 + 2\cos\theta$, где θ – угол поворота вокруг оси вращения. Согласно (2.51) $\cos\theta > 0$, и неравенство (2.51) означает, что однозначное решение уравнений (2.47) можно выделить условием: материальные волокна поворачиваются на углы, не превосходящие $\pi/2$.

Вычислим функцию $p^a_i x^i_a - U(x^i_a)$ в ее стационарных по x^i_a точках. Из (2.50) имеем

$$U^{\times}(p^a_i) = p^a_i x^i_a - U = p^a_i \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\right|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s^d_b} \mu^{ib} s^d_b - U =$$

$$= |p|^{ab} s^d_b \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\right|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s^d_b} - U = \sigma^{ab} \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\right|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s^a_b} - U =$$

$$= V(|p|^{ab} s^d_b), \tag{2.52}$$

что и требовалось.

Функция $U^{\times}$ в каждой точке p^a_i имеет четыре значения в зависимости от выбора матрицы s^d_b.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим выражение $\Phi(p^a_i, x^i_a) = p^a_i x^i_a - U^{\times}(p^a_i) = p^a_i x^i_a - V(|p|^{ab} s^d_b)$ как функцию от p^a_i и найдем ее стационарные точки по p^a_i, x^i_a фиксированы. Функция Φ имеет четыре ветви, каждая из которых фиксируется выбором матрицы s^d_b. Зададимся некоторой матрицей s^d_b и вычислим производные $\Phi(p^a_i, x^i_a)$ по p^a_i. Используя формулу (2.28), записанную для производных от $|p|_{ab}$ по p^a_i, в качестве условия стационарности получим систему уравнений относительно p^a_i

$$x^i_a - \frac{\partial U^{\times}}{\partial p^a_i} = x^i_a - \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\right|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s^d_b} s^d_b \mu^{ib} = 0. \tag{2.53}$$

Здесь учтено, что в силу изотропии тензор $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}} s^d_b$ соосен тензору σ^{ad}; по этой причине его свертка со слагаемым в выражении $\partial |p|^{bd}/\partial p^i_a$, аналогичным второму члену в формуле (2.28), равна нулю. Вводя в (2.53) полярное разложение для x^i_a, получим

$$|x|_{ad} \lambda^{id} = \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\right|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s^d_b} s^d_b \mu^{ib}.$$

Тензор $\partial V/\partial \sigma^{ad}$ при любых σ^{ad} является симметричным и положительным. Следовательно, в силу единственности полярного разложения

$$|x|_{ad} = \frac{\partial V}{\partial \sigma^{ad}}\Bigg|_{\sigma^{ad} = |p|^{ab} s_b^d}, \quad \lambda^{id} = \mu^{ib} s_b^d.$$

Отсюда

$$|p|^{ab} s_b^d = \sigma^{ad}, \quad \mu^{ib} = \lambda^{id} s_d^b, \tag{2.54}$$

где σ^{ad} вычисляются по $|x|_{ad}$ по формуле $\sigma^{ad} = \partial U/\partial |x|_{ad}$.

Рассмотрим первое равенство (2.54) в главной системе координат тензора $|x|_{ab}$ (и σ_{ab}). Это равенство показывает, что тензор $|p|^{ab}$ имеет диагональный вид и

$$|p|_1 s_1 = \sigma_1, \quad |p|_2 s_2 = \sigma_2, \quad |p|_3 s_3 = \sigma_3. \tag{2.55}$$

Здесь и далее $|p|_1, |p|_2, |p|_3, s_1, s_2, s_3$ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – диагональные элементы тензоров $|p|_{ab}, s_a^b$ и σ^{ab} в главной системе координат. Поскольку $|p|_1, |p|_2$ и $|p|_3$ положительны, равенства (2.55) по известным σ_1, σ_2 и σ_3 однозначно определяют $|p|_1 = |\sigma_1|$, $|p|_2 = |\sigma_2|$ и $|p|_3 = |\sigma_3|$ и

$$s_1 = \operatorname{sgn} \sigma_1, \quad s_2 = \operatorname{sgn} \sigma_2, \quad s_3 = \operatorname{sgn} \sigma_3. \tag{2.56}$$

После этого из второго равенства (2.54) вычисляются μ^{ia}.

Равенства (2.56) однозначно определяют матрицу $\| s_b^d \|$ по матрице $\| x_a^i \|$ (в главной системе координат тензора $|x|_{ab}$ надо задать s_1, s_2, s_3 формулами (2.56)). Таким образом, уравнения (2.53) имеют решения относительно p_i^a только в том случае, когда выбор величин x_a^i и s_b^d согласован так, что равенства (2.56) удовлетворяются. Следовательно, несмотря на неоднозначность функции $\Phi(p_i^a, x_a^i)$, ее ветвь, имеющая стационарную точку по p_i^a выделяется однозначно. В стационарной по p_i^a точке функция $\Phi(p_i^a, x_a^i)$ имеет значение

$$p_i^a x_a^i - U^{\times}(p_i^a) = \frac{\partial U}{\partial |x|_{ab}} |x|_{ab} - V(\sigma)\Big|_{\sigma = \partial U/\partial |x|} = U(|x|_{ab}).$$

что и требовалось.

На основании равенства (2.46) принцип Лагранжа можно переписать в виде

$$\delta_x \delta_p J = 0,$$

$$J = \int_V (p_i^a x_a^i - U^{\times}(p_i^a))\, d\overset{\circ}{v} - \int_V \rho_0 F_i x^i\, d\overset{\circ}{v} - \int_{\partial V_p} P_i x^i\, d\overset{\circ}{\sigma}. \tag{2.57}$$

Символ δ_p означает варьирование по p_i^a, символ δ_x – варьирование по $x^i(\xi^a)$. Найдем сначала условия стационарности функционала по $x^i(\xi^a)$. Легко видеть, что эти условия суть уравнения равновесия и краевые условия на ∂V_p:

$$\overset{\circ}{\nabla}_a p_i^a + \rho_0 F_i = 0 \text{ в } V, \quad p_i^a \overset{\circ}{n}_a = P_i \text{ на } \partial V_p. \tag{2.58}$$

Теперь, вместо того чтобы варьировать по всем p_i^a, будем варьировать только по функциям p_i^a, удовлетворяющим уравнениям (2.58). На таких

функциях p_i^a функционал J принимает вид

$$J(p) = \int\limits_{\partial V_w} p_i^a \overset{\circ}{n}_a \tilde{x}^i \, d\overset{\circ}{\sigma} - \int\limits_V U^{\times}(p_i^a) \, d\overset{\circ}{v}.$$

Получаем

Принцип стационарности дополнительной работы. Истинное напряженное состояние изотропного упругого тела есть стационарная точка функционала $J(p)$ на множестве всех функций p_i^a, являющихся решениями уравнений (2.58).

Анизотропные тела при малых деформациях. При построении принципа стационарности дополнительной работы изотропность тела была использована только в одном месте – в замене уравнения (2.47) уравнением (2.48). Замена была возможна благодаря тому, что второе слагаемое в формуле для тензора Пиола – Кирхгофа (2.29) для изотропного тела обращается в нуль. Для анизотропных тел это слагаемое отлично от нуля, однако в случае малых деформаций имеет порядок ϵ по сравнению с первым:

$$\frac{\partial U}{\partial |x|_{bd}} |x|_b^c e_{dch} y_c^h e^{d'ac'} \lambda_{id'} = \frac{\partial U}{\partial |x|_{bd}} \gamma_b^c e_{dch} y_c^h e^{d'ac'} \lambda_{id'} \sim \mu\epsilon^2.$$

Поэтому в теории малых деформаций рассмотренные построения остаются в силе и для анизотропных тел, и имеет место сформулированный выше принцип стационарности дополнительной работы.

Расширенный принцип стациоиарностн дополнительной работы. Можно избежать трудностей, связанных с использованием неоднозначного функционала, если наряду с варьированием по тензору Пиола – Кирхгофа сохранить в принципе стационарности варьирование по ортогональной матрице λ^{ia}. Соответствующий расширенный принцип стационарности дополнительной работы строится следующим образом.

Принцип Лагранжа можно рассматривать как утверждение о стационарности функционала

$$\int\limits_V U(|x|_{ab}) \, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_V \rho_0 F_i x^i(\xi^a) \, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_{\partial V_p} P_i x^i(\xi^a) \, d\overset{\circ}{\sigma} \qquad (2.59)$$

по всем симметричным положительно определенным тензорам $|x|_{ab}$ и функциям $x^i(\xi^a)$, удовлетворяющим граничным условиям $x^i = \tilde{x}^i$ на ∂V_w и таким, что для $|x|_{ab}$ и $x^i(\xi^a)$ найдется ортогональная матрица λ^{ib}, для которой имеет место равенство

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} - |x|_{ab} \lambda^{ib} = 0. \qquad (2.60)$$

Плотность упругой энергии считается строго выпуклой функцией $|x|_{ab}$; упругое тело может быть анизотропным.

Введем для ограничений (2.60) множители Лагранжа p_i^a и перепишем функционал (2.59) в виде

$$\int\limits_V \left(p_i^a \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} - |x|_{ab} \lambda^{ib} \right) + U(|x|_{ab}) \right) d\overset{\circ}{v} -$$

$$- \int\limits_V \rho_0 F_i x^i(\xi^a) \, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_{\partial V_p} P_i x^i(\xi^a) \, d\overset{\circ}{\sigma}. \qquad (2.61)$$

В функционале (2.61) независимо варьируются p_i^a, $|x|_{ab}$, $x^i(\xi^a)$ и λ^{ib}. Варьируя по $x^i(\xi^a)$, получим для p_i^a уравнения (2.58). Функционал (2.61) есть строго выпуклый функционал по $|x|_{ab}$. Поэтому варьирование по $|x|_{ab}$ можно заменить нахождением нижней грани по $|x|_{ab}$. В результате, принимая во внимание уравнения (2.58), для функционала (2.61) получим

$$J(p, \lambda) = \int\limits_{\partial V_w} p_i^a \overset{\circ}{n}_a \tilde{\boldsymbol{x}}^i \, d\overset{\circ}{\sigma} - \int\limits_{V} \mathrm{V}(p_i^a \lambda^{ib}) \, d\overset{\circ}{v}.$$

Напомним, что $\mathrm{V}(\sigma^{ab})$ – преобразование Юнга – Фенхеля $U(|x|_{ab})$ по $|x|_{ab}$.

Истинные напряженные состояния суть стационарные точки функционала $J(p, \lambda)$ по всем p_i^a, удовлетворяющим уравнениям равновесия и краевым условиям (2.58), и по всем ортогональным матрицам λ^{ia}.

Условие стационарности $J(p, \lambda)$ по λ_a^i имеет вид

$$\left.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \sigma^{ab}}\right|_{\sigma = p\lambda} p_i^a \lambda_j^b = \left.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \sigma^{ab}}\right|_{\sigma = p\lambda} p_j^a \lambda_i^b. \tag{2.62}$$

Равенства (2.62) имеют простой смысл. Так как $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma^{ab}} = |x|_{ab}$, а $|x|_{ab} p_i^a \lambda_j^b = p_{ij}$ – компоненты тензора напряжений Коши, равенства (2.62) есть условия симметрии тензора напряжений Коши и представляют, таким образом, уравнение моментов количества движения.

Задача о минимуме. Функция U ограничена снизу, поэтому естественно поставить задачу о минимизации $I(x(\xi))$ – задачу об отыскании стационарной точки с наименьшим из всех возможных значением функционала $I(x(\xi))$. Если на границе тела всюду заданы положения частиц, а объемные силы отсутствуют, то функционал $I(x(\xi))$ ограничен снизу нулем, и постановка задачи о минимуме возможна. Рассмотрим вопрос об ограниченности снизу функционала $I(x(\xi))$, когда кинематические ограничения отсутствуют.

Функционал $I(x(\xi))$ имеет вид (2.1.2), а энергия инвариантна относительно движений тела как твердого:

$$U(x'(\xi)) = U(x(\xi)), \quad x'^i(\xi^a) = c^i + \alpha_j^i x^j(\xi^a). \tag{2.63}$$

Здесь $x'^i(\xi^a)$ – положение, которое приобретают частицы после сдвига из деформированного состояния $x^i(\xi^a)$ на постоянный вектор c^i и поворота с ортогональной матрицей α_j^i. Непосредственное применение необходимых условий ограниченности функционала снизу (2.1.19) невозможно. Однако только сдвиги образуют конус и для ограниченности $I(x(\xi))$ снизу необходимо, чтобы работа внешних сил на сдвигах обращалась в нуль. Это условие эквивалентно требованию об обращении в нуль суммарной силы

$$\int\limits_V \rho_0 F_i \, d\overset{\circ}{v} + \int\limits_{\partial V} P_i \, d\overset{\circ}{\sigma} = 0. \tag{2.64}$$

Работа внешних сил на поворотах, в отличие от геометрически линейного случая, не обязана обращаться в нуль, так как сумма

$$\alpha_{ij} \left(\int\limits_V \rho_0 F^i x^j \, d\overset{\circ}{v} + \int\limits_{\partial V} P^i x^j \, d\overset{\circ}{\sigma} \right) \tag{2.65}$$

ограничена в силу ограниченности компонент ортогональной матрицы.

Механическое содержание этого факта очень просто. Мертвые силы можно задать так, чтобы суммарный момент был отличен от нуля. Пример

подобной нагрузки изображен на рис. 38. Тем не менее тело будет иметь положения равновесия. Они изображены на рис. 39.

Если $x^i(\xi^a)$ – стационарная точка функционала энергии, то в ней и суммарный момент обращается в нуль:

$$e_{ijk}\Big(\int\limits_V \rho_0 F^j x^k \, d\overset{\circ}{v} + \int\limits_{\partial V} P^j x^k \, d\overset{\circ}{\sigma}\Big) = 0. \tag{2.66}$$

Действительно, единичная матрица $\alpha_i^j = \delta_i^j$ должна быть стационарной точкой по α_{ij} линейной формы (2.56), так как энергия U инвариантна

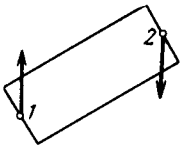


Рис. 38.

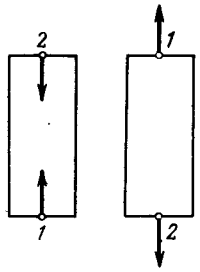


Рис. 39.

относительно вращений. Давая α_i^j бесконечно малые возмущения $\alpha_i^j = \delta_i^j + \delta\omega_i^j$, $\delta\omega_{ij} + \delta\omega_{ji} = 0$, получим (2.66).

Предположим, что внешние силы, действующие на тело, таковы, что существует решение f_i^a системы уравнений равновесия

$$\overset{\circ}{\nabla}_a f_i^a + \rho_0 F_i = 0 \quad \text{в} \quad V, \quad f_i^a \overset{\circ}{n}_a = P_i \quad \text{на} \quad \partial V \tag{2.67}$$

с ограниченной нормой в L_2

$$\|f\|^2_{L_2} = \int\limits_V f_i^a f_a^i \, d\overset{\circ}{v} < +\infty.$$

и, кроме того, упругая энергия ограничена снизу квадратичной формой

$$\tfrac{1}{2}\mu\gamma_{ab}\gamma^{ab} \leqslant U.$$

Покажем, что тогда ограничен снизу и функционал $I(x(\xi))$. В самом деле,

$$L = \int\limits_V f_i^a x_a^i \, d\overset{\circ}{v} = \int\limits_V f_i^a \lambda^{ib} |x|_{ab} \, d\overset{\circ}{v} = \int\limits_V f_i^a \lambda_a^i \, d\overset{\circ}{v} + \int\limits_V f_i^a \lambda^{ib} \gamma_{ab} \, d\overset{\circ}{v}.$$

Отсюда на основании неравенства Коши – Буняковского получим

$$|L| \leqslant \|f\|_{L_2} \sqrt{3|V|} + \|f\|_{L_2} \sqrt{2U}.$$

Остальная часть доказательства проводится так же, как доказательство соответствующей теоремы § 1 гл. II.

Заметим, что условие обращения в нуль суммарной силы есть необходимое (а для "достаточно хороших" областей и ограниченных в L_2 внешних сил и достаточное) условие разрешимости системы уравнений равновесия и краевых условий (2.67).

Аналогично исследуется случай смешанных краевых условий.

Итак, функционал $I(x(\xi))$ ограничен снизу и имеет смысл постановка задачи о минимуме $I(x(\xi)) \to \inf$.

Принцип минимума дополнительной работы. Рассмотрим вопрос о построении соответствующей двойственной вариационной задачи. Из-за невыпуклости $I(x(\xi))$ трудно рассчитывать на существование функционала I^* такого, что $\sup I^* = \inf I$. Однако можно сконструировать функционал I^*, для которого

$$\sup I^* \leqslant \inf I. \tag{2.68}$$

Построение функционала I^* связано с вычислением преобразования Юнга–Фенхеля функции U.

Преобразование Юнга – Фенхеля упругой энергии. Обозначим через $\bar{U}(x_a^i)$ функцию

$$\bar{U}(x_a^i) = \begin{cases} U(x_a^i), & \det \| x_a^i \| > 0, \\ +\infty, & \det \| x_a^i \| \leqslant 0, \end{cases}$$

а через $U^*(p_i^a)$ – ее преобразование Юнга – Фенхеля

$$U^*(p_i^a) = \sup \left[p_i^a x_a^i - \bar{U}(x_a^i) \right] = \sup_{x_a^i,\ \det \| x_a^i \| > 0} \left[p_i^a x_a^i - U(x_a^i) \right].$$

Для вычисления $U^*(p_i^a)$ потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть q^{ab} – произвольный тензор, μ_{ab} – компоненты собственной ортогональной матрицы:

$$\overset{\circ}{g}{}^{ab} \mu_{ac} \mu_{bd} = \overset{\circ}{g}{}_{cd}, \quad \det \| \mu_{ab} \| = +1.$$

Тогда

$$\sup_{\mu_{ab}} q^{ab} \mu_{ab} = |q|_1 + |q|_2 + |q|_3 \operatorname{sgn} \det \| q^{ab} \|. \tag{2.69}$$

Здесь $|q|_1$, $|q|_2$, $|q|_3$ – собственные значения тензора $|q|^{ab}$, расположенные в убывающем порядке.

Доказательство. Пусть сначала $\det \| q^{ab} \| > 0$. Представим тензор q^{ab} в виде полярного разложения $q^{ab} = |q|^{ac} \lambda_c^b$. Здесь λ_c^b – компоненты ортогональной матрицы, причем в силу условия $\det \| q^{ab} \| > 0$, $\det \| \lambda_c^b \| = +1$. Матрица с компонентами $\lambda_c^b \mu_{ab}$ принадлежит множеству собственных ортогональных матриц, поэтому

$$\sup_{\mu_{ab}} q^{ab} \mu_{ab} = \sup_{\mu_{ab}} |q|^{ab} \mu_{ab}.$$

Возьмем в качестве μ_{ab} компоненты единичной матрицы. Получим оценку

$$|q|_1 + |q|_2 + |q|_3 \leqslant \sup_{\mu_{ab}} q^{ab} \mu_{ab}. \tag{2.70}$$

В главной системе координат тензора $|q|^{ab}$ свертка $|q|^{ab} \mu_{ab}$ имеет вид $|q|_1 \mu_{11} + |q|_2 \mu_{22} + |q|_3 \mu_{33}$. Так как компоненты ортогональной матрицы не превосходят единицу, то

$$\sup_{\mu_{ab}} |q|^{ab} \mu_{ab} \leqslant |q|_1 + |q|_2 + |q|_3. \tag{2.71}$$

Из (2.70) и (2.71) следует первая часть утверждения леммы.

Рассмотрим теперь случай $\det \| q^{ab} \| < 0$. В полярном разложении тензора q^{ab} матрица λ_c^b имеет детерминант, равный -1, поэтому

$$\sup_{\substack{\mu_{ab} \\ \det \| \mu_{ab} \| = +1}} q^{ab}\mu_{ab} = \sup_{\substack{\mu_{ab} \\ \det \| \mu_{ab} \| = -1}} |q|^{ab}\mu_{ab}, \tag{2.72}$$

и мы должны доказать, что величина (2.69) равна $|q|_1 + |q|_2 - |q|_3$.

Используем представление ортогональных матриц (1.3.27). В главной системе координат тензора $|q|^{ab}$ имеем

$$|q|^{ab}\mu_{ab} = \cos\theta\,[|q|_1(1-c_1^2) + |q|_2(1-c_2^2) + |q|_3(1-c_3^2)] - \\ - |q|_1 c_1^2 - |q|_2 c_2^2 - |q|_3 c_3^2.$$

Выражение в квадратных скобках неотрицательно, так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$. Поэтому максимум по θ достигается при $\theta = 0$. После замены c_3^2 на $1 - c_1^2 - c_2^2$ надо искать максимум по c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 \leqslant 1)$ выражения

$$|q|_1 + |q|_2 - |q|_3 - 2(|q|_1 - |q|_3)c_1^2 - 2(|q|_2 - |q|_3)c_2^2.$$

Он равен $|q|_1 + |q|_2 - |q|_3$, что и требовалось. Если $\det \|q^{ab}\| = 0$, то $|q|_3 = 0$ и, как легко видеть, равенство (2.69) по-прежнему справедливо.

Утверждение леммы можно представить в форме, не использующей упорядоченность собственных значений. Именно

$$\sup_{\mu_{ab}} q^{ab}\mu_{ab} = \max_{s_{ab}} \{ |q|^{ab} s_{ab} \},$$

где максимум вычисляется по тензорам s_{ab}, которые в главной системе координат тензора $|q|^{ab}$ имеют вид (2.44), если $\det \| q^{ab} \| > 0$ и вид (2.45), если $\det \| q^{ab} \| < 0$.

Лемма 2. В точке, в которой функция $p_i^a x_a^i - U(x_a^i)$ достигает максимального значения по x_a^i, тензор $|x|_{ab}$ для изотропного материала соосен тензору $|p|^{ab}$.

Доказательство. Пусть максимизирующий элемент функции $p_i^a x_a^i - U(x_a^i)$ есть внутренняя точка множества $\mathcal{X}$. Тогда утверждение леммы 2 следует из формулы (2.49).

Рассмотрим теперь случай, когда максимизирующий элемент лежит на границе множества $\mathcal{X}$, т.е. $\det \| x_a^i \| = 0$. В этом случае x_a^i есть решение системы уравнений

$$p_i^a = \frac{\partial U}{\partial x_a^i} + \kappa \frac{\partial}{\partial x_a^i} \det \| x_a^i \| = \frac{\partial U}{\partial |x|_{ab}} \lambda_{ib} + \kappa e_{a'b'c'} \lambda_i^{a'} |x|_b^{b'} |x|_c^{c'} e^{abc},$$

где κ – множитель Лагранжа для ограничения $\det \| x_a^i \| = 0$. Отсюда

$$|p|^{ac}\mu_{ic}\lambda^{id} = \frac{\partial U}{\partial |x|_{ad}} + \kappa e^d_{\cdot b'c'} |x|_b^{b'} |x|_c^{c'} e^{abc}. \tag{2.73}$$

Два слагаемых в правой части (2.73) соосны тензору $|x|_{ab}$ и симметричны по a, d. Поэтому они соосны тензору $|p|^{ac}$, и тензоры $|p|^{ab}$ и $|x|_{ab}$ соосны между собой.

Т е о р е м а. Для изотропного упругого материала в рамках теории конечных деформаций имеет место формула

$$U^*(p_i^a) = \begin{cases} V(|p|^{ab}), & \det \|p_i^a\| > 0, \\ \max\limits_{s_b^c} \{V(|p|^{ab} s_b^c)\}, & \det \|p_i^a\| < 0, \end{cases} \tag{2.74}$$

где максимум вычисляется по матрицам s_b^c, которые в главной системе координат тензора $|p|^{ab}$ имеют вид (2.45).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2 при отыскании максимума в определении $U^*(p_i^a) = \sup(p_i^a x_a^i - U(x_a^i))$ можно ограничиться только такими x_a^i, для которых тензор $|x|_{ab}$ соосен тензору $|p|^{ab}$. При этом $p_i^a x_a^i = |p|^{ab}\mu_{ib}|x|_{ac}\lambda^{ic} = q^{ab}\nu_{ab}$, где тензор $q^{ab} = |p|^{ac}|x|_c^b$ симметричен в силу соосности $|p|^{ac}$ и $|x|_c^b$, а ν_{ab} — компоненты ортогональной матрицы с $\det \|\nu_{bc}\| = +1$ при $\det \|p_i^a\| = +1$ и $\det \|\nu_{bc}\| = -1$ при $\det \|p_i^a\| = -1$. Будем искать верхнюю грань по x_a^i последовательно, сначала вычисляя верхнюю грань по λ_a^i, а затем по $|x|_{ab}$. Отыскание верхней грани по λ_a^i сводится к максимизации выражения $q^{ab}\nu_{ab}$. По лемме 1 имеем:

при $\det \|p_i^a\| > 0$

$$U^*(p_i^a) = \sup_{\substack{\nu_{ab},\ |x|_{ab} \\ \det \|\nu_{ab}\| = +1}} [|p|^{ab}|x|_b^c \nu_{bc} - U(|x|_{ab})] =$$

$$= \sup_{|x|_{ab}} [|p|^{ab}|x|_{ab} - U(|x|_{ab})] = V(|p|^{ab}),$$

при $\det \|p_i^a\| < 0$

$$U^*(p_i^a) = \sup_{\substack{\nu_{ab},\ |x|_{ab} \\ \det \|\nu_{ab}\| = -1}} [|p|^{ab}|x|_b^c \nu_{bc} - U(|x|_{ab})] =$$

$$= \sup_{|x|_{ab}} [\max\{|p|^{ab}|x|_b^c s_{ac}\} - U(|x|_{ab})],$$

где максимум берется по матрицам s_{bc}, которые в главной системе координат тензора $|p|^{ab}$ имеют вид (2.45). Переставляя порядок максимизации по s_{ac} и $|x|_{ab}$, придем к равенству (2.74).

Заметим, что в случае, когда максимизирующий элемент функции $p_i^a x_a^i - U(x_a^i)$ есть внутренняя точка множества $\mathscr{X}$, утверждение теоремы следует непосредственно из формулы для значений функции $U^\times = p_i^a x_a^i - U(x_a^i)$ в ее стационарных по x_a^i точках (2.52).

Полулинейный материал. Найдем преобразование Юнга – Фенхеля функции U для полулинейного изотропного материала. При $\lambda = 0$[1]) в главной системе координат тензора σ^{ab}

$$V(\sigma) = \sup_{|x|_i} [\sigma_1|x|_1 + \sigma_2|x|_2 + \sigma_3|x|_3 -$$

$$-\mu[(|x|_1 - 1)^2 + (|x|_2 - 1)^2 + (|x|_3 - 1)^2] = f(\sigma_1) + f(\sigma_2) + f(\sigma_3),$$

где

$$f(\sigma) = \max_{x \geqslant 0} [\sigma x - \mu(x-1)^2] = \begin{cases} \sigma + \sigma^2/4\mu, & \sigma \geqslant -2\mu, \\ -\mu, & \sigma \leqslant -2\mu. \end{cases}$$

[1]) Выражение для U^* при $\lambda \neq 0$ приведено в работе [38].

По формуле (2.74) при $\det \| p_i^a \| > 0$

$$U^*(p_i^a) = f(|p|_1) + f(|p|_2) + f(|p|_3),$$

при $\det \| p_i^a \| < 0$

$$U^*(p_i^a) = \max_{\substack{s_1, s_2, s_3 = \pm 1 \\ s_1 \cdot s_2 s_3 = -1}} [f(|p|_1 s_1) + f(|p|_2 s_2) + f(|p|_3 s_3)].$$

Занумеруем собственные числа тензора $|p|^{ab}$ в порядке убывания. Поскольку $f(\sigma)$ – функция неубывающая, при $\det \| p_i^a \| < 0$

$$U^*(p_i^a) = f(|p|_1) + f(|p|_2) + f(-|p|_3).$$

О характере огрубления, происходящем при переходе к двойственной задаче, позволяет судить функция $U^{**}(x_a^i)$ – преобразования Юнга – Фенхеля функции $U^*(p_i^a)$. По свойству преобразований Юнга – Фенхеля $U^{**} \leqslant U$, и если U^{**} незначительно отличается от U, то можно ожидать, что решение двойственной задачи в энергетической норме незначительно отличается от решения исходной задачи. Вычисления, которые мы не приводим, в плоской задаче дают (γ_1, γ_3 – собственные значения тензора γ_{ab} в плоском случае)

$$U^{**} = \begin{cases} \mu(\gamma_1^2 + \gamma_3^2), & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}\mu(\gamma_1 - \gamma_3)^2 & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Следовательно, если истинные удлинения $\gamma_1 = |x|_1 - 1$ и $\gamma_3 = |x|_3 - 1$ по осям ξ^1, ξ^3 таковы, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 0$, то $U = U^{**}$, и решения исходной и двойственной вариационных задач совпадают. Если истинная деформация попадает в область $\gamma_1 + \gamma_3 < 0$, то решения исходной и двойственной задач вообще говоря, различаются. Энергетическая мера невязки определяется разницей

$$U(x_a^i) - U^{**}(x_a^i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}\mu(\gamma_1 + \gamma_3)^2 & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_3 \leqslant 0 \end{cases}$$

Двойственный вариационный принцип. Рассмотрим функционал

$$I^*(p) = \int_{\partial V_w} p_i^a \overset{\circ}{n}_a \tilde{x}^i d\overset{\circ}{\sigma} - \int_V U^*(p_i^a) d\overset{\circ}{v}.$$

Из общей схемы построения двойственных вариационных принципов следует, что для верхней грани функционала $I^*(p)$ по всем p_i^a, удовлетворяющим ограничениям (2.58), имеет место неравенство (2.68). Если минимизирующий элемент функционала $I(x(\xi))$ принадлежит области выпуклости, то в (2.68) имеет место равенство.

Двойственный вариационный принцип позволяет строить энергетические оценки погрешности приближенного решения.

Фазовые переходы в упругих телах. Рассмотренные выше вариационные подходы относятся к чисто механической деформации упругого тела. Следующим шагом является учет термодинамических эффектов в рамках теории термодинамического равновесия. Мы ограничимся здесь изложением применения вариационных принципов Гиббса к выводу условий термодинамического равновесия двух упругих тел, которые могут превращаться друг в друга (например, металл, граничащий со своим расплавом).

Пусть тела занимают область V. Область V разделена на две части V_1 и V_2 поверхностью Σ. Две фазы упругого материала находятся в областях V_1 и V_2. Обозначим плотности их внутренних энергий через $U_1(x_a^i, S)$ и $U_2(x_a^i, S)$. Индексами *1* и *2* дальше снабжаются величины, относящиеся к разным фазам материала (рис. 40).

Перемещение поверхности Σ по частицам соответствует превращению одной фазы материала в другую. Выясним, при каких условиях фазы могут

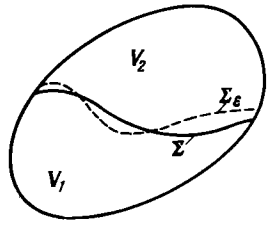


Рис. 40.

находиться в равновесии. Для определенности примем, что на границе области V заданы положения частиц. Систему считаем адиабатически изолированной.

В соответствии со вторым принципом Гиббса следует найти условие стационарности функционала

$$\mathcal{U} = \int\limits_{V_1} \rho U_1(x_a^i, S)\, dv + \int\limits_{V_2} \rho U_2(x_a^i, S)\, dv. \tag{2.75}$$

Множество допустимых функций $x^i(\xi^a)$ и $S(\xi^a)$ состоит из функций, которые удовлетворяют условию адиабатичности

$$\int\limits_{V_1} \rho S\, dv + \int\limits_{V_2} \rho S\, dv = \mathcal{S}_0 = \text{const} \tag{2.76}$$

и кинематическим условиям

$$x^i(\xi^a) = \tilde{x}^i(\xi^a) \quad \text{на} \quad \partial V, \tag{2.77}$$

где $\tilde{x}^i(\xi^a)$ — заданные функции на ∂V.

Кроме того, закон движения считаем непрерывным (исключается возможность возникновения полостей и проскальзывания вдоль Σ)

$$[x^i(\xi^a)] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{2.78}$$

Производные функций $x^i(\xi^a)$ и энтропия $S(\xi^a)$ могут рваться на Σ, и для разных допустимых функций поверхность Σ может проходить по разным частицам.

Найдем вариацию функционала $\mathcal{U}$. Пусть $x^i(\xi^a)$ — стационарная точка $\mathcal{U}$, а $x^i(\xi^a, \epsilon)$ — близкие сравниваемые законы движения. Поверхность разрыва у закона движения $x^i(\xi^a, \epsilon)$ обозначим через Σ_ϵ. Как при выводе уравнений Лагранжа в § 2 гл. I, удобно ввести отображение $V \to V$: $\xi'^a = \xi'^a(\xi^b, \epsilon)$, при котором поверхность Σ переходит в поверхность Σ_ϵ. В силу близости Σ и Σ_ϵ можно написать $\xi'^a = \xi^a + \delta\xi^a$, где $\delta\xi^a$ — гладкие функции в V. Функции $\delta\xi^a$ обращаются в нуль на ∂V, поскольку граница области V неподвижна по частицам.

Обозначим через $\delta_{\text{п}} x^i$ и $\delta_{\text{п}} S$ полные вариации x^i и S:

$$\delta_{\text{п}} x^i = x^i(\xi'^a, \epsilon) - x^i(\xi^a), \quad \delta_{\text{п}} S = S(\xi'^a, \epsilon) - S(\xi^a).$$

Полные вариации $\delta_{\text{п}} x^i$, согласно (2.77) и (2.78), удовлетворяют ограничениям

$$\delta_{\text{п}} x^i = 0 \text{ на } \partial V, \quad [\delta_{\text{п}} x^i] = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{2.79}$$

Покажем, что ограничение на вариации $\delta_{\text{п}} S$, вытекающие из условия адиабатичности (2.76), имеет вид

$$\int_V [\rho_0 \delta_{\text{п}} S + S \overset{\circ}{\nabla}_a (\rho_0 \delta\xi^a)]\, d\overset{\circ}{v} = 0. \tag{2.80}$$

Действительно, поскольку $\rho\, dv = \rho_0\, d\overset{\circ}{v}$ и с точностью до малых первого порядка по $d\epsilon$ [1])

$$\rho_0(\xi')\sqrt{\overset{\circ}{g}(\xi')}\, d^3\xi' = \left[\rho_0(\xi)\sqrt{\overset{\circ}{g}(\xi)} + \frac{\partial \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial \xi^a}\, \delta\xi^a\right] \left|\frac{\partial \xi'}{\partial \xi}\right| d^3\xi =$$

$$= \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}} \left[1 + \frac{1}{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial \xi^a}\, \delta\xi^a\right] \left[1 + \frac{\partial \delta\xi^a}{\partial \xi^a}\right] d^3\xi = \tag{2.81}$$

$$= \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}} \left[1 + \frac{1}{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, \delta\xi^a}{\partial \xi^a}\right] d^3\xi = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \overset{\circ}{\nabla}_a (\rho_0 \delta\xi^a)\right] d\overset{\circ}{v},$$

имеем

$$\delta \int_{V_1} \rho S\, dv = \int_{V_1'} \rho_0(\xi') S(\xi') \sqrt{\overset{\circ}{g}(\xi')}\, d^3\xi' -$$

$$- \int_{V_1} \rho_0(\xi) S(\xi) \sqrt{\overset{\circ}{g}(\xi)}\, d^3\xi = \int_{V_1} [\rho_0 \delta_{\text{п}} S + S \overset{\circ}{\nabla}_a (\rho_0 \delta\xi^a)]\, d\overset{\circ}{v}.$$

Из последнего равенства и аналогичного равенства, написанного для области V_2 следует формула (2.80).

Аналогично (2.80) получается соотношение

$$\delta \mathcal{U} = \int_{V_1} [\rho_0 \delta_{\text{п}} U_1 + U_1 \overset{\circ}{\nabla}_a (\rho_0 \delta\xi^a)]\, d\overset{\circ}{v} + \int_{V_2} [\rho_0 \delta_{\text{п}} U_2 + U_2 \overset{\circ}{\nabla}_a (\rho_0 \delta\xi^a)]\, d\overset{\circ}{v}.$$

Рассмотрим величину $\delta_{\text{п}} U$. При вычислении $\delta_{\text{п}} U$ надо применять оператор $\delta_{\text{п}}$ к тензорам с сопутствующими индексами – дисторсии x^i_a и характеристикам среды K^B. Будем считать, что оператор $\delta_{\text{п}}$ включает параллельный перенос по сопутствующим индексам при помощи начальной связности. Тогда $\delta_{\text{п}} K^B = \delta\xi^a \overset{\circ}{\nabla}_a K^B$. Для $\delta_{\text{п}} x^i_a$ имеем

$$\delta_{\text{п}} x^i_a = \frac{\partial x'^i(\xi'^b, \epsilon)}{\partial \xi'^a} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^b_{ac}\, \delta\xi^c\, x^i_b - \frac{\partial x^i(\xi^b)}{\partial \xi^a} = \frac{\partial \delta_{\text{п}} x^i}{\partial \xi^a} - x^i_b \overset{\circ}{\nabla}_a \delta\xi^b.$$

---

[1]) В (2.81) использована формула (1.3.153), записанная для начального состояния: $\overset{\circ}{\nabla}_c A^c = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \sqrt{\overset{\circ}{g}} A^c}{\partial \xi^c}$

После интегрирования по частям условие стационарности внутренней энергии принимает вид

$$\int_V \left[-\delta_{\text{п}} x^i \overset{\circ}{\nabla}_a p_i^a + \rho_0 \delta_{\text{п}} S \left(\frac{\partial U}{\partial S} - T \right) + \delta \xi^a \left(- \overset{\circ}{\nabla}_b \mu_a^b + (U - TS) \overset{\circ}{\nabla}_a \rho_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial K^B} \overset{\circ}{\nabla}_a K^B \right) \right] d\overset{\circ}{v} + \int_\Sigma \left([\, p_i^a \,] \overset{\circ}{n}_a \delta_{\text{п}} x^i + [\mu_b^a\,] \overset{\circ}{n}_a \delta \xi^b \right) d\sigma = 0.$$

Здесь T – множитель Лагранжа для ограничения (2.80), а через p_i^a и μ_b^a обозначены величины

$$p_i^a = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x_a^i}, \quad \mu_b^a = -\rho_0 \frac{\partial U}{\partial x_a^i} x_b^i + \rho_0 (U - TS) \delta_b^a.$$

Условие стационарности внутренней энергии приводит к равенствам

$$\overset{\circ}{\nabla}_a p_i^a = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T \quad \text{в } V, \tag{2.82}$$

$$- \overset{\circ}{\nabla}_b \mu_a^b + (U - TS) \overset{\circ}{\nabla}_a \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial K^B} \overset{\circ}{\nabla}_a K^B = 0 \text{ в } V, \tag{2.83}$$

$$[\, p_i^a \,] \overset{\circ}{n}_a = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2.84}$$

$$[\mu_b^a\,] \overset{\circ}{n}_a = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{2.85}$$

Из сравнения (2.82) с уравнениями движения упругого тела в форме (1.3.154) видно, что p_i^a имеют смысл компонент тензора Пиола – Кирхгофа, а для равновесия системы необходимо, чтобы в области V выполнялись уравнения статики упругого тела.

Второе уравнение (2.82) показывает, что множитель Лагранжа T имеет смысл абсолютной температуры в области V. Поскольку множитель Лагранжа является числом (константой), при термодинамическом равновесии температура постоянна в области V.

Уравнения (2.83), как нетрудно убедиться, не содержат новой информации и выполняются тождественно в силу уравнений (2.82) и определений p_i^a и μ_b^a.

Уравнения (2.84) показывают, что необходимым условием термодинамического равновесия является равенство сил, действующих с двух сторон поверхности Σ.

Среди трех уравнений (2.85) лишь одно является независимым. Это устанавливается при помощи соотношений (2.84) и условий совместности на поверхности разрыва (1.3.122), записанных для закона движения

$$[x_a^i] = \lambda^i \overset{\circ}{n}_a.$$

Действительно,

$$[\mu_b^a\,] \overset{\circ}{n}_a = \left[-\rho_0 \frac{\partial U}{\partial x_a^i} x_b^i + \rho_0 (U - TS) \delta_b^a \right] \overset{\circ}{n}_a =$$

$$= - p_i^a \overset{\circ}{n}_a [x_b^i] + [\rho_0 (U - TS)] \overset{\circ}{n}_b = (- p_i^a \overset{\circ}{n}_a \lambda^i + [\rho_0 (U - TS)]) \overset{\circ}{n}_b.$$

В этих равенствах под $p_i^a \overset{\circ}{n}_a$ можно понимать значение $p_i^a \overset{\circ}{n}_a$ с любой из сторон поверхности разрыва, поскольку $[\, p_i^a \,] \overset{\circ}{n}_a = 0$.

Независимое уравнение в (2.85) можно выделить, сворачивая (2.85) с вектором нормали $\overset{\circ}{n}{}^b$:

$$[\mu_b^a]\,\overset{\circ}{n}_a\,\overset{\circ}{n}{}^b = 0. \tag{2.86}$$

В отличие от "силовых" условий, которые нетрудно написать и из других соображений, равенство (2.86) является нетривиальным. Оно возникает за счет варьирования Σ, т.е. за счет того, что в системе допускаются фазовые переходы.

Условие фазового равновесия (2.86) имеет одну характерную особенность – в отличие от всех других соотношений механики в него входит непосредственно внутренняя энергия, а не ее производные. При добавлении к энергиям фаз U_1 или U_2 (а также к энтропиям фаз S_1 или S_2) аддитивной постоянной условие фазового равновесия меняется. В связи с этим становится существенным, как выбирается начальное состояние и от какого значения отсчитываются U и S. В теории фазовых переходов предполагается, что для всех фаз, которые могут превращаться одна в другую, можно выбрать одно и то же начальное состояние, от которого отсчитываются энергия и энтропия. В силу этого предположения начальные значения энергии, энтропии, плотности и других характеристик фаз оказываются непрерывными на фазовой границе.

Для того чтобы прояснить смысл условия (2.86), рассмотрим случай, когда упругие тела являются жидкостями, и внутренняя энергия зависит от дисторсии только через плотность $\rho = \rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}/(\sqrt{g}\,X)$, $X = \det \| x_a^i \|$. Так как $\dfrac{\partial \rho}{\partial x_a^i} = -\rho \xi_i^a$, тензор μ_b^a является шаровым

$$\mu_b^a = \rho_0 \mu \delta_b^a, \quad \mu = U - TS + \frac{p}{\rho}.$$

Здесь $p = \rho^2\, \partial U/\partial \rho$ – давление. Так как $[\rho_0] = 0$, из (2.86) следует равенство $[\mu] = 0$. Величину μ называют химическим потенциалом, а условие $[\mu] = 0$ есть необходимое условие термодинамического равновесия двух жидких фаз, установленное Гиббсом. В соответствии с этим тензор μ_b^a имеет смысл "тензора химического потенциала" упругой среды.

§ 3. О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДИНАМИКИ

Невозможность постановки задачи о минимуме. Распространение на динамику сформулированных выше вариационных принципов наталкивается на трудности, существо которых проявляется уже на системах с конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим гармонический осциллятор – материальную точку на пружинке, положение точки задается функцией $x(t)$, кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, а энергия пружины – $\frac{1}{2}Ex^2$. Согласно принципу Гамильтона – Остроградского истинная траектория есть стационарная точка функционала

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} (m\dot{x}^2 - Ex^2)\,dt$$

на множестве функций $x(t)$, принимающих в начальный и конечный момен-

ты времени заданные значения

$$x(0) = x_0, \quad x(\Delta t) = x_1.$$

Спрашивается, доставляет ли истинная траектория минимум функционалу I? Для исследования этого вопроса удобно перейти от функций $x(t)$ к функциям $u(t)$, принимающим нулевые значения в начальный и конечный моменты времени: $x \to u$: $x(t) = vt + x_0 + u(t)$, $v = (x_2 - x_1)/\Delta t = \text{const}$, $u(0) = u(\Delta t) = 0$. При этом функционал $I(u)$ примет вид (аддитивные постоянные опущены)

$$I(u) = J(u) + L(u),$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} (m\dot{u}^2 - Eu^2)\,dt, \quad L(u) = -E\int_0^{\Delta t} (vt + x_0)\,u\,dt.$$

Постановка задачи о минимуме возможна, если функционал $I(u)$ ограничен снизу. Для этого необходимо, чтобы был ограничен снизу функционал $J(u)$. Действительно, если имеется последовательность $\{u_n\}$, на которой $J(u_n) \to -\infty$, а $L(u_n) \leqslant \text{const}$, то $I(u_n) \to -\infty$. Если же $L(u_n) \to +\infty$, то на последовательности $\{-u_n\}$ имеем $I(u_n) \to -\infty$.

Множество допустимых функций вместе с каждой функцией $u(x)$ содержит функцию $\lambda u(x)$ (с любым λ), поэтому для ограниченности снизу квадратичного функционала необходимо и достаточно, чтобы он был неотрицателен. Запишем условие неотрицательности $J(u)$. При этом удобно перейти к новому аргументу $\tau = (2\pi/\Delta t)\,t$. Из неравенства $J(u) \geqslant 0$ следует, что для любых функций $u(\tau)$ таких, что $u(0) = u(2\pi) = 0$, должно иметь место неравенство

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 d\tau \geqslant c\int_0^{2\pi} u^2\,d\tau, \quad c = \frac{E(\Delta t)^2}{4\pi^2 m}. \tag{3.1}$$

Согласно неравенству Виртингера (2.1.15), соотношение (3.1) справедливо для всех $c \leqslant 1/4$. Более того, при $c < 1/4$ функционал $J(u)$ будет строго выпуклым, как квадратичный положительно определенный функционал. При $c > 1/4$ функционал $J(u)$ будет неограничен снизу. Действительно, $1/4$ – наилучшая постоянная в неравенстве Виртингера, поэтому при $c > 1/4$ найдется по крайней мере одна функция u_0, для которой $J(u_0) < 0$, а $L(u_0)$ имеет конечное значение. Поэтому на последовательности $\{\lambda u_0\}$, $\lambda \to \infty$, $J(\lambda u_0) \to -\infty$.

Итак, постановка задачи о минимуме возможна лишь при достаточно малых Δt, $\Delta t < \pi\sqrt{m/E}$.

Для сплошных сред ситуация осложняется еще больше. Рассмотрим, например, функционал волнового уравнения

$$I(u) = \int_0^{\Delta t}\int_{-\pi}^{\pi} (u_{,t}^2 - u_{,x}^2)\,dx\,dt$$

и зададим кинематические краевые условия $u(0, x) = u_0(x)$, $u(\Delta t, x) = u_1(x)$, $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0$. Пусть функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ нечетные, так что можно ограничиться нечетными допустимыми функциями $u(x)$. Разложим $u(t, x)$ в ряд Фурье

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \tag{3.2}$$

Подстановка (3.2) в $I(u)$ дает

$$I(u) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k = \pi \int_0^{\Delta t} (\dot{u}_k^2 - k^2 u_k^2)\, dt.$$

Функции $u_k(t)$ независимы, следовательно, для ограниченности снизу функционала $I(u)$ необходима ограниченность снизу каждого из функционалов I_k. Для этого, как мы уже выяснили, необходимо, чтобы

$$k^2 \Delta t^2 \leqslant \pi^2.$$

Но при любом фиксированном Δt выполнение таких неравенств для всех k невозможно. Поэтому функционал $I(u)$ неограничен снизу при любом сколь угодно малом Δt [1]).

Отмеченная трудность тесно связана с тем, что принцип Гамильтона – Остроградского выражает по существу задачу типа Дирихле для гиперболических уравнений, а эта задача для гиперболических уравнений, как известно, не корректна.

К сожалению, физически естественные вариационные формулировки для задачи Коши неизвестны (относительно вариационных принципов для задачи Коши см. § 11 этой главы).

Отметим, что принципу Гамильтона – Остроградского можно придать вид, весьма близкий по форме к постановке задачи Коши. Пусть $u(t, x)$ принимает в момент времени t значение $u_0(x)$, и $u_{,t}$ – значение $v(x)$. Тогда для любых сколь угодно малых Δt функционал

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \Lambda(u, u_{,t}, u_{,x})\, dx\, dt$$

имеет стационарную точку на множестве функций, выделяемых ограничениями

$$u(t, x) = u_0(x), \quad \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_{,t}\, dt = v(x).$$

Это утверждение, однако, обладает тем же дефектом, что и принцип Гамильтона – Остроградского.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, несмотря на отмеченную особенность, имеет большое значение в механике сплошных сред. Он содержит в концентрированном виде информацию о специальной структуре дифференциальных уравнений сплошной среды. С этим связаны и основные его приложения: вариационный принцип Гамильтона – Остроградского служит источником ряда приближенных методов решения задач. Поэтому в последующих параграфах ему уделено значительное внимание.

Вариационный прииции для нелинейных собственных колебаний. Сказанное относится к колебаниям сплошных сред общего вида. Однако имеется один важный класс динамических задач, который очень близок по вариационной постановке к статическим задачам. Это так называемые задачи о собственных колебаниях. Под собственными понимают колебания сплошных

[1]) По-видимому, постановка задачи о минимуме возможна для квазиконтинуума [125], в котором короткие волны (с большим k) исключены по построению.

сред, которые происходят без действия внешних сил, причем характеристики движения в каждой точке периодически меняются во времени с одной и той же частотой ω. На границе среды принимаются обычно однородные краевые условия (жесткая заделка, равенство нулю внешних поверхностных сил и т.п.). Построим вариационный принцип для определения собственных частот и форм колебаний.

Пусть истинное движение сплошной среды является стационарнои точкой функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \Lambda(x, u^\kappa, u^\kappa_{,t}, u^\kappa_{,i})\, dv\, dt.$$

На границе среды для определенности примем условия жесткой заделки

$$u^\kappa = 0 \quad \text{на } \partial V. \tag{3.3}$$

Очевидно, что собственные колебания будут стационарной точкой функционала

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_V \Lambda(x, u^\kappa, u^\kappa_{,t}, u^\kappa_{,i})\, dv\, dt$$

на множестве функций u^κ, удовлетворяющих условию (3.3) и условию периодичности по времени $u^\kappa(x, -\pi/\omega) = u^\kappa(x, \pi/\omega)$. В этой вариационной задаче удобно сделать замену независимой переменной $t \to \theta$: $\omega t = \theta$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда она перейдет в задачу о стационарных точках функционала

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_V \Lambda(x, u^\kappa, \omega u^\kappa_{,\theta}, u^\kappa_{,i})\, dv\, d\theta \tag{3.4}$$

на множестве функций u^κ, подчиненных ограничению (3.3) и условию периодичности

$$u^\kappa(x, -\pi) = u^\kappa(x, \pi). \tag{3.5}$$

Можно считать, что 2π – наименьший период функций $u^\kappa(x, \theta)$ по θ.

Вариационная задача (3.3) – (3.5) допускает очень интересную интерпретацию, если лагранжиан Λ представляет разность кинетической и внутренней энергий вида

$$\Lambda = K(x, u^\kappa, u^\kappa_{,t}) - U(x, u^\kappa, u^\kappa_{,i}),$$

где K и U неотрицательны и K – однородная функция второй степени по $u^\kappa_{,t}$, т.е. для любого $\omega > 0$ $K(x, u^\kappa, \omega u^\kappa_{,t}) = \omega^2 K(x, u^\kappa, u^\kappa_{,t})$. Для упрощения дальнейшего рассмотрения примем дополнительно, что K и U строго выпуклы по совокупности своих аргументов (не включая x) и обращаются в нуль при $u^\kappa \equiv 0$.

Покажем, что в этом случае вариационная задача (3.3) – (3.5) эквивалентна задаче о построении стационарных точек функционала внутренней энергии

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_V U(x, u^\kappa, u^\kappa_{,i})\, dv\, d\theta \tag{3.6}$$

на множестве функций u^κ, удовлетворяющих ограничениям (3.3), (3.5) и

условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{V} K(x, u^{\kappa}, u^{\kappa}_{,\theta})\, dv\, d\theta = A^2, \tag{3.7}$$

где A — некоторая постоянная.

Действительно, вводя множитель Лагранжа для ограничения (3.7), функционал задачи можно записать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{V} U\, dv\, d\theta - \lambda \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{V} K\, dv\, d\theta - A^2 \right). \tag{3.8}$$

Множитель Лагранжа λ неотрицателен: при $\lambda < 0$ функционал (3.8) является строго выпуклым и имеет единственную стационарную точку $u^{\kappa} = 0$. Поэтому каждая стационарная точка вариационной задачи (3.3), (3.5) — (3.7) является стационарной точкой исходной задачи с $\omega^2 = \lambda$.

Обратно, каждая стационарная точка исходной задачи является стационарной точкой вариационной задачи (3.3), (3.5) — (3.7) при некотором A — достаточно по формуле (3.7) вычислить значение A, соответствующее рассматриваемой стационарной точке.

В вариационной задаче (3.3), (3.5) — (3.7) множитель Лагранжа для ограничения (3.7) имеет смысл квадрата частоты, а постоянная A — меры амплитуды колебаний.

Как правило, для любого значения A имеется счетное число стационарных точек и соответствующих значений собственных частот, которые непрерывно изменяются с изменением A.

Линейные колебания. Принцип Рэлея. При $A \to 0$ амплитуда колебаний стремится к нулю. Если U и K — гладкие функции и K обращается в нуль при $u^{\kappa}_{,t} = 0$, то для бесконечно малых амплитуд U можно заменить квадратичной формой по u^{κ}, $u^{\kappa}_{,t}$, а K — квадратичной формой по u^{κ}_{θ}: $2K = \rho_{\kappa\kappa'} u^{\kappa}_{\theta} u^{\kappa}_{\theta}$ (линейные члены отсутствуют в силу положительности U и K). Легко проверить, что стационарные точки имеют вид $u^{\kappa} = v^{\kappa}(x) \cos\theta$ или $u^{\kappa} = v^{\kappa}(x) \sin\theta$. После интегрирования по θ вариационный принцип (3.3), (3.5) - (3.7) переходит в вариационный принцип Рэлея: формы собственных колебаний являются стационарными точками функционала внутренней энергии [1])

$$\mathcal{U} = \int_{V} U(x, v^{\kappa}, v^{\kappa}_{,i})\, dv \tag{3.9}$$

на множестве функций v^{κ}, обращающихся в нуль на ∂V и имеющих заданную кинетическую энергию

$$\mathcal{K} = \int_{V} \tfrac{1}{2} \rho_{\kappa\kappa'} v^{\kappa} v^{\kappa'}\, dv = A^2. \tag{3.10}$$

Изменению постоянной A соответствует умножение v^{κ} на постоянный множитель, поэтому, не ограничивая общности, можно положить в (3.10) $A = 1$.

---

[1]) Легко проверить, что стационарные точки функционала (3.6) не меняются, если в левые части (3.6) и (3.7) добавить один и тот же множитель k, а постоянную A^2 заменить на kA^2. При переходе от (3.6), (3.7) к (3.9), (3.10) введен множитель $k = 1/\pi$, этим же множителем отличается постоянная A^2 в (3.10) от постоянной A^2 в (3.7).

Вариационный принцип Рэлея эквивалентен утверждению о стационарности так называемого частного Рэлея

$$R = \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{K}} = \frac{\int\limits_V U(x, v^\kappa, v^\kappa_{,i})\, dv}{\int\limits_V \tfrac{1}{2}\, \rho_{\kappa\kappa'} v^\kappa v^{\kappa'}\, dv}$$

Действительно, частное Рэлея не меняется при умножении функций v^κ на постоянный множитель; этот множитель можно, в частности, подобрать так, чтобы $\mathcal{K} = 1$, при этом $R = \mathcal{U}$.

Невыпуклость, свойственная вариационным задачам динамики, сохраняется и в задачах о собственных колебаниях: ограничение $\mathcal{K} = \text{const}$ выделяет в функциональном пространстве невыпуклое множество – сферу (в соответствующей норме).

Если функция U не является гладкой в нуле, то вариационный принцип (3.3), (3.5) – (3.7), вообще говоря, не переходит в принцип Рэлея даже в случае бесконечно малых амплитуд. В качестве примера укажем на задачу о собственных колебаниях разномодульных сред, когда (в одномерном случае) $2U = \alpha u^2_{,x} + \beta u_{,x} |u_{,x}|$, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta > 0$. Дело в том, что из-за нелинейности задачи собственные функции нельзя представить в виде произведения функции, зависящей от θ, на функцию, зависящую от x.

При исследовании задач о собственных колебаниях малой, но конечной амплитуды можно использовать вариационно-асимптотический метод.

§ 4. ДИНАМИКА УПРУГОГО ТЕЛА

Продолжим обсуждение вариационных принципов теории упругости.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в лагранжевых координатах. Вариационное уравнение, записанное для всего объема упругого тела, имеет вид

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V \rho \left(\frac{v^2}{2} - U(x^i_a, S) \right) dv\, dt + \delta B = 0, \tag{4.1}$$

$$\delta B = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\int\limits_V \rho (F_i \delta x^i + T \delta S)\, dv + \int\limits_{\partial V_p} P_i \delta x^i d\sigma \right] dt.$$

В начальный и конечный моменты положения частиц заданы:

$$x^i(\xi^a, t_0) = x^i_0(\xi^a), \quad x^i(\xi^a, t_1) = x^i_1(\xi^a), \tag{4.2}$$

поэтому

$$\delta x^i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1. \tag{4.3}$$

Кроме того на ∂V_w

$$x^i(\xi^a, t) = \tilde{x}^i(\xi^a, t), \quad \delta x^i = 0. \tag{4.4}$$

Пусть функционал δB голономен. Это может быть, в частности, в тех случаях, которые обсуждались в § 2. Для определенности будем считать,

что процессы адиабатические, внешние объемные силы имеют потенциал $\Phi(x^i)$, а внешние поверхностные силы мертвые. Тогда справедлив

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Истинное движение упругого тела есть стационарная точка функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [\int_V \rho(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U(x_a^i, S) - \Phi(x^i))\, dv + \int_{\partial V_p} P_i x^i d\overset{\circ}{\sigma}]\, dt \qquad (4.5)$$

на множестве функций $x^i(\xi^a, t)$, удовлетворяющих ограничениям (4.2), (4.4).

Этот вариационный принцип имеет основное значение для приложений.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в эйлеровых координатах. Иногда представляет интерес формулировка вариационного принципа в эйлеровых координатах. Хотя она связана просто с переписыванием в других терминах функционала (4.5), имеется ряд заслуживающих внимание технических деталей, и мы остановимся на этом вопросе подробнее.

В качестве независимых искомых функций выберем перемещения $w^i(x^k, t)$

$$w^i(x^k, t) = x^i(\xi^a, t) - \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a) \mid_{\xi^a = \xi^a(x^k, t)} = x^i - \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a(x^k, t)).$$

Перемещения взаимно однозначно связаны с законом движения. Область определения перемещений $w^i(x^k, t)$ есть область, которую в момент времени t занимает сплошная среда. Обозначим ее через $V(t)$ (до сих пор под V подразумевалась, как правило, область в пространстве лагранжевых координат; аргументом t отмечается, что рассматривается область в эйлеровых координатах и эта область меняется со временем).

Заданию положений частиц в начальный и конечный моменты времени соответствует задание перемещений

$$w^i(x, t_0) = 0, \quad w^i(x, t_1) = w_1^i(x). \qquad (4.6)$$

Функции $w_1^i(x)$ определены в области $\overset{1}{V} = V(t_1)$. Точки с координатами $x^i - w_1^i(x)$ при $x \in \overset{1}{V}$ лежат в области $\overset{\circ}{V} = V(t_0)$. Соответствующее отображение $\overset{1}{V}$ в $\overset{\circ}{V}$ взаимно однозначно.

Выразим величины, входящие в лагранжиан, через перемещения и их производные.

Начнем с лагранжевых координат ξ^a. Связь лагранжевых и эйлеровых координат в начальный момент времени известна:

$$\xi^a = \xi^a(\overset{\circ}{x}{}^i).$$

Поскольку $\overset{\circ}{x}{}^i = x^i - w^i$, зависимость лагранжевых координат от эйлеровых в любой момент времени имеет вид

$$\xi^a = \overset{\circ}{\xi}{}^a(x^i - w^i(x^k, t)). \qquad (4.7)$$

Здесь $\overset{\circ}{\xi}{}^a(x^i)$ – заданные функции. В частности, если лагранжевы и эйлеровы координаты в начальный момент времени совпадают, то $\xi^i = \overset{\circ}{x}{}^i$ и $\xi^i(x^i, t) = x^i - w^i(x^k, t)$. Однако, как уже отмечалось, специальный выбор лагран-

жевых координат на этапе вывода уравнений лишает возможности следить за инвариантностью соотношений относительно группы преобразований лагранжевых координат, поэтому мы используем общую формулу (4.7)

Заданию положений частиц на части границы тела соответствует задание части границы $\Sigma(t)$ области $V(t)$ и значений на ней вектора перемещений

$$w^i = \tilde{w}^i(x, t) \quad \text{на} \quad \Sigma(t). \tag{4.8}$$

Эти значения не произвольны. Они удовлетворяют условию $\overset{\circ}{\xi}{}^a(x^i - \tilde{w}^i.(x^k, t)) \in \overset{\circ}{\Sigma}$ при $x^i \in \Sigma(\overset{\circ}{\Sigma}$ – часть границы тела в пространстве лагранжевых переменных, в точках которой заданы перемещения).

Найдем связь между дисторсией и градиентом перемещений. Продифференцируем (4.7) по x^i [1]):

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} = \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}{}^a}{\partial x^k}(\delta_i^k - w_i^k), \quad w_i^k = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}.$$

Отсюда следует равенство

$$\det \left\| \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}{}^a}{\partial x^i} \right\| \cdot \det \| \delta_i^k - w_i^k \|, \tag{4.9}$$

которое показывает, что матрица $\| \delta_i^k - w_i^k \|$ невырождена. Поэтому можно ввести тензор s_j^i, обратный к тензору $\delta_j^i - w_j^i$:

$$s_j^i (\delta^j_k - w^j_k) = \delta^i_k. \tag{4.10}$$

Дисторсия x_a^i дается равенством

$$x_a^i = \overset{\circ}{x}{}^k_a \, s^i_k. \tag{4.11}$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой:

$$x_a^i \xi_j^a = \overset{\circ}{x}{}^k_a \, s^i_k \, \overset{\circ}{\xi}{}^a_m (\delta_j^m - w_j^m) = \delta_j^i.$$

Здесь использованы формулы (4.10), (4.11).

Плотность ρ в терминах градиента перемещений записывается, согласно (4.9), в виде

$$\rho = \frac{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\sqrt{\hat{g}}} = \frac{\rho_0 \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial \xi} \right\|}{\det \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\|} = \frac{\rho_0 \det \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\|}{\det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}}{\partial x} \right\|} = \rho_0 \det \| \delta_j^i - w_j^i \|. \tag{4.12}$$

Выразим скорость через производные от перемещений. Продифференцируем равенство $w^i = x^i(\xi^a, t) - x^i(\xi^a)$ по времени при постоянных лагранжевых координатах. Получим

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial w^i}{\partial x^k} = v^i. \tag{4.13}$$

[1]) Напомним, что система координат наблюдателя считается декартовой.

Соотношения (4.13) можно рассматривать как систему трех линейных уравнений относительно скорости частиц v^i.

Согласно (4.10) имеем

$$v^i = s^i_k \, w^k_t. \tag{4.14}$$

Здесь $w^k_t = \partial w^k / \partial t$.

Примем для простоты, что внешние поверхностные силы на $\partial V_t - \Sigma_t$ равны нулю. Тогда функционал I можно записать в виде

$$I(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \Lambda(x^i, w^i, w^i_k, w^i_t)\, d^3x\, dt, \tag{4.15}$$

где Λ дается формулой

$$\Lambda = \rho(\tfrac{1}{2}v^2 - U(x^i_a) - \Phi(x^i)), \quad v^2 = v_i v^i. \tag{4.16}$$

При вычислении Λ надо подставить в (4.16) выражение x^i_a через производные от перемещений по формуле (4.11), скорости – по (4.14), плотности – по (4.12).

Отметим, что для неоднородных сред, характеристики которых зависят от лагранжевых координат, функция Λ будет зависеть явно от координат пространства x^i и от перемещений w^i через разность $x^i - w^i$. Кроме того, Λ зависит явно от эйлеровых координат за счет присутствия внешних массовых сил.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Истинные перемещения являются стационарной точкой функционала (4.15) на множестве перемещений, удовлетворяющих ограничениям (4.6) и (4.8).

Покажем, что сформулированный вариационный принцип действительно приводит к уравнениям теории упругости. Вычислим вариацию функционала $I(w)$ (4.15). Зафиксируем сначала область $V(t) \times [t_0, t_1]$. Тогда

$$\delta I(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \partial\Lambda \, d^3x\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w^i} \partial w^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i_k} \frac{\partial\, \partial w^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i_t} \frac{\partial\, \partial w^i}{\partial t} \right) d^3x\, dt = 0. \tag{4.17}$$

Напомним, что символ ∂ обозначает вариацию при постоянных эйлеровых координатах.

Пусть сначала $\partial w^i = 0$ на $\partial V(t)$. Интегрируя по частям, получим

$$\delta I(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \partial w^i \, \frac{\delta \Lambda}{\delta w^i} \, d^3x\, dt = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta w^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i_k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i_t}.$$

Из (4.18) следуют уравнения

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta w^i} = 0. \tag{4.19}$$

Покажем, что эти уравнения эквивалентны уравнениям импульсов в теории упругости. Система уравнений (4.19) в силу невырожденности матрицы $\| \delta_i^k - w_i^k \|$ эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta w^k} (\delta_i^k - w_i^k) = 0. \tag{4.20}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости тождества

$$- w_i^k \frac{\delta \Lambda}{\delta w^k} = \partial_i \Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_m^k} w_i^k \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^k} w_i^k \right). \tag{4.21}$$

Здесь через $\partial_i \Lambda$ обозначена производная функции $\Lambda(x^i, w^i, w_k^i, w_t^i)$ по x^i при фиксированных w^i, w_k^i, w_t^i.

Из (4.20) и (4.21) находим

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta w^k} (\delta_i^k - w_i^k) = \frac{\delta \Lambda}{\delta w^i} - w_i^k \frac{\delta \Lambda}{\delta w^k} = \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i} - \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial \Lambda}{\partial w_m^i} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^i} + \partial_i \Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_m^k} w_i^k \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^k} w_i^k \right) =$$

$$= \partial_i \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial w_m^k} (\delta_i^k - w_i^k) + \Lambda \delta_i^m \right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^k} (\delta_i^k - w_i^k) \right]. \tag{4.22}$$

Поскольку внутренняя энергия зависит от эйлеровых координат только через разность $x^i - w^i$,

$$\partial_i \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial w^i} = - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \tag{4.23}$$

Для вычисления остальных слагаемых в (4.22) нужны формулы

$$(\delta_i^k - w_i^k) \frac{\partial \rho}{\partial w_m^k} = - \rho \delta_i^m, \quad \frac{\partial s_j^i}{\partial w_m^k} = s_k^i s_j^m. \tag{4.24}$$

Первая из них следует из равенств (1.3.1) и (4.12), вторая выводится так же, как и (1.3.58). На основании (4.24) имеем

$$\begin{aligned} (\delta_i^k - w_i^k) \frac{\partial}{\partial w_t^k} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \rho v_i, \\ (\delta_i^k - w_i^k) \frac{\partial}{\partial w_m^k} \frac{v^2}{2} &= v_i v^m. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial w_m^k} (\delta_i^k - w_i^k) + \Lambda \delta_i^m = \rho v^m v_i - p_i^m. \tag{4.26}$$

Здесь введено обозначение

$$p_i^j = \rho(\delta_i^k - w_i^k)\,\frac{\partial U}{\partial w_j^k} = \rho\,\frac{\partial U}{\partial w_j^i} - \rho\,\frac{\partial U}{\partial w_j^k}\,w_i^k. \tag{4.27}$$

Используя (4.24) и (4.11), легко установить, что

$$p_i^j = \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_a^i}\,x_a^j.$$

Таким образом, p_i^j имеют смысл компонент тензора напряжений Коши.

Из соотношений (4.24)–(4.27) следуют известные уравнения импульсов

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^m}(\rho v_i v^m - p_i^m) + \rho\,\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0. \tag{4.28}$$

Уравнения состояния (4.27) иногда записывают в другом виде, принимая, что внутренняя энергия зависит от компонент тензора деформаций с индексами наблюдателя $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ab}\,\xi_i^a \xi_j^b$. Поскольку $\epsilon_{ab} = \frac{1}{2} g_{ij}(x_a^i x_b^j - \overset{\circ}{x}{}_a^i \overset{\circ}{x}{}_b^j)$, величины ϵ_{ij} выражаются через градиент перемещений по формуле

$$\epsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{x}{}_a^m \overset{\circ}{x}{}_{mb}\,\xi_i^a \xi_j^b) = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - (\delta_i^k - w_i^k)(g_{kj} - w_{kj})) = w_{(ij)} - \tfrac{1}{2} w_j^k w_{kj}.$$

Следовательно, при $U = U(\epsilon_{ij})$ из (4.27) имеем

$$p^{ij} = \rho\,\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} - 2\rho\,\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ik}}\,\epsilon_k^j.$$

Это соотношение называют формулой Мурнагана. Подчеркнем, что формула Мурнагана, в отличие от формулы (4.27), имеет смысл только для изотропных сред, поскольку внутренняя энергия анизотропного тела зависит не только от компонент тензора деформаций ϵ_{ij}, но и от градиента перемещений. В этом можно убедиться на примере физически линейного материала $2U = E^{abcd}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}$. Переходя к компонентам с индексами наблюдателя, имеем $2U = E^{abcd} x_a^i x_b^j x_c^k x_d^l \cdot \epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$. Таким образом, U зависит, помимо ϵ_{ij}, также и от w_j^i (через x_a^i).

Пусть теперь вариации перемещений и вариации части границы $S(t) = \partial V(t) - \Sigma(t)$ отличны от нуля. Вычисление δI дает

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{S(t)}\left[\partial w^i\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_k^i}\,n_k - \frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^i}\,c_x\right) + \Lambda\,\delta n\right] d\sigma\,dt. \tag{4.29}$$

Здесь использована формула (1.3.131) и учтено, что в силу уравнений (4.19) объемный интеграл равен нулю; c_x – скорость движения поверхности $S(t)$ по нормали к себе относительно системы координат наблюдателя, δn – возможное перемещение поверхности $S(t)$ по нормали.

Перепишем подынтегральное количество в (4.29) при помощи равенств (4.25), (4.26):

$$\partial w^i\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_s^i}\,n_s - \frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^i}\,c_x\right) + \Lambda\delta n = \partial w^j s_j^k(\delta_k^i - w_k^i)\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_s^i}\,n_s - \frac{\partial \Lambda}{\partial w_t^i}\,c_x\right) +$$

$$+ \Lambda\,\delta n = \partial w^j s_j^k\,[(\rho v^s v_k - p_k^s - \Lambda\,\delta_k^s)\,n_s - \rho v_k c_x] + \Lambda\,\delta n =$$

$$= \partial w^i s_j^k\,\rho v_k(v^s n_s - c_x) + \Lambda(\delta n - \partial w^j s_j^k n_k) - \partial w^j s_j^k p_k^s n_s. \tag{4.30}$$

Первый член в (4.30) обращается в нуль, так как разность $v^s n_s - c_x$ имеет смысл скорости движения частиц через поверхность $\partial V(t)$ и, в силу неподвижности области $V(t)$ по частицам, равна нулю. Покажем, что второй член в (4.30) также обращается в нуль. В самом деле, справедливо равенство

$$\delta x^k = \delta w^k = s_j^k \partial w^j. \tag{4.31}$$

Оно следует из соотношения вида (4.13), записанного для перемещений

$$\delta w^j = \partial w^j + w_k^j \delta w^k. \tag{4.32}$$

Решение уравнений (4.32), рассматриваемых как уравнения относительно δw^k, дается формулами (4.31). Условие неподвижности области $V(t)$ по частицам в терминах вариаций при постоянных лагранжевых координатах имеет вид

$$\delta n = \delta x^k n_k. \tag{4.33}$$

Из (4.33) и (4.31) следует высказанное утверждение. Поэтому

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} \partial w^j s_j^k p_k^s n_s d\sigma\, dt = 0.$$

В силу произвольности ∂w^j и невырожденности матрицы s_j^k отсюда вытекают естественные краевые условия на $S(t)$: $p_k^s n_s = 0$.

§ 5. ИДЕАЛЬНАЯ СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

Идеальную сжимаемую жидкость можно рассматривать как упругое тело, у которого внутренняя энергия зависит только от плотности. Поэтому вариационные принципы, сформулированные для упругого тела, имеют место и для идеальной жидкости. Вместе с этим вариационные принципы для идеальной жидкости заслуживают специального рассмотрения, поскольку за счет возникающих упрощенйй они обогащаются интересными особенностями.

Случаи голономности вариационного уравнения. Мы ограничимся обсуждением следующих случаев голономности вариационного уравнения идеальной жидкости (проверка выполнения условий голономности предоставляется читателю).

С л у ч а й А. Рассмотрим сосуд, занимающий в пространстве некоторую область $\tilde{V}$. Если стенки сосуда с течением времени деформируются, то область, занимаемую сосудом, будем обозначать через $\tilde{V}(t)$. Сосуд заполнен без пустот идеальной сжимаемой жидкостью. В процессе движения жидкость не отрывается от стенок сосуда, и в каждый момент времени область V, занятая жидкостью, совпадает с заданной областью $\tilde{V}(t)$. Положение частиц в начальный и конечный моменты времени задано.

Функции $x^i(\xi^a, t)$ считаем дважды непрерывно дифференцируемыми (этим исключаются из рассмотрения ударные волны). Энтропия частиц предполагается известной функцией пространственных координат ξ. Внешние массовые силы имеют потенциал $\Phi(x)$ [1].

---

[1] При указанных ограничениях работа внешних поверхностных сил равна нулю в силу безотрывности обтекания ($\delta x^i n_i = 0$), работа внешних массовых сил голономна за счет потенциальности F_i, а приток тепла обращается в нуль согласно условию адиабатичности движения.

Вариационное уравнение имеет вид $\delta I = 0$, а действие определено формулой

$$I(x(\xi, t)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} v_i v^i - U - \Phi(x(\xi, t)) \right) dv\, dt. \qquad (5.1)$$

Внутренняя энергия U считается заданной функцией ρ и S. Для неоднородной среды (характеристики среды зависят от лагранжевых координат) U может явно зависеть также от ξ. Дальше, учитывая, что энтропия есть известная функция лагранжевых координат будем писать $U = U(\rho, \xi)$.

Условия голономности выполняются при любом числе связных компонент границы сосуда. В частности, внутри сосуда может совершать заданное движение некоторое деформируемое тело T. Случай, когда тело T абсолютно твердое и движение тела не задано заранее, а ищется, назовем случаем В.

С л у ч а й В. Пусть в сосуде $\tilde{V}(t)$ совершает движение некоторое абсолютно твердое тело T. Тело занимает в каждый момент времени область $V_T(t)$. Область $\tilde{V}(t) - V_T(t)$ заполнена идеальной сжимаемой жидкостью, которая не отрывается от стенок сосуда и от тела ($V = \tilde{V}(t) - V_T(t)$). Движение тела определяется дифференцируемыми функциями $r^i(t)$ и $\alpha_a^i(t)$ (см. § 3 гл. I). В начальный и конечный моменты времени их значения заданы:

$$r^i(t_0) = \overset{\circ}{r}{}^i, \quad r^i(t_1) = \overset{1}{r}{}^i, \quad \alpha_a^i(t_0) = \overset{\circ}{\alpha}{}_a^i, \quad \alpha_a^i(t_1) = \overset{1}{\alpha}{}_a^i,$$

а в остальном функции $r^i(t)$ и $\alpha_a^i(t)$ произвольны. В процессе движения на тело и жидкость действуют внешние силы с потенциалом Φ. Тогда вариационное уравнение голономно, и действие складывается из суммы действия жидкости (5.1) и действия твердого тела

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \rho \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U(\rho, \xi) - \Phi(x(\xi, t)) \right) dv + \mathcal{K}_T - \Phi_T(r, \alpha) \right) dt. \qquad (5.2)$$

Здесь $\mathcal{K}_T$ — кинетическая энергия твердого тела — квадратичная форма по поступательной и угловой скоростям тела

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{2} m \frac{dr^i}{dt} \frac{dr_i}{dt} + \frac{1}{2} J_{ij} \omega^i \omega^j, \qquad (5.3)$$

m — масса тела, J_{ij} — тензор моментов инерции. Под V понимается область, занятая жидкостью, а Φ_T — потенциал внешних сил, действующих на тело:

$$\Phi_T = \int_{V_T} \rho_T \Phi(x)\, dv,$$

ρ_T — плотность тела.

К формуле для действия (5.2) можно прийти, например, следующим образом. Рассмотрим неоднородное упругое тело, лагранжевы координаты которого пробегают область V. Упругое тело заполняет сосуд $\tilde{V}(t)$ и совершает в нем некоторое движение, не отрываясь от стенок. Касательных сил при движении частиц тела по стенкам сосуда не возникает. В начальный и конечный моменты времени положения частиц тела заданы. Истинное дви-

жение упругого тела является стационарной точкой функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U - \Phi(x(\xi, t))\right) d\overset{\circ}{v}\, dt.$$

Разобьем область V на сумму областей $V_ж + V_т$ и осуществим предельный переход во внутренней энергии, в котором внутренняя энергия упругого тела в области $V_ж$ перейдет во внутреннюю энергию жидкости, а в области $V_т$ обратится в $+\infty$ на всех ненулевых полях деформаций. Тогда в $V_т$ будут допустимы только твердые движения, задаваемые функциями $r^i(t)$ и $\alpha_a^i(t)$, причем

$$\mathcal{K}_т = \int_{V_т} \rho_т \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i dv, \quad \Phi_т(r, \alpha) = \int_{V_т} \rho_т \Phi(x)\, dv,\right.$$

и действие упругого тела принимает вид (5.2).

Случай C. Допустим теперь, что у жидкости может быть свободная поверхность Σ. Она либо имеется в начальный момент времени (например, пузырь), либо может возникать в процессе движения при отрыве от стенок сосуда. Будем считать, что на свободную поверхность действует давление $\tilde{p}$, постоянное вдоль поверхности и одинаковое для разных свободных поверхностей[1]). Тогда вариационное уравнение голономно и действие дается формулой

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \rho \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U(\rho, \xi) - \Phi(x(\xi, t)) dv \right) - \tilde{p}(t) \mid V \mid \right) dt, \tag{5.4}$$

где объем $|V|$ области V может, вообще говоря, меняться с течением времени.

Последнее слагаемое в (5.4) появилось из работы внешних сил на свободной поверхности:

$$\int_\Sigma \tilde{p}\, \delta x^i n_i d\sigma = \int_{\partial V} \tilde{p}\, \delta x^i n_i dv = \delta(\tilde{p} \mid V|).$$

В этих равенствах использовано, что на части границы жидкости $\partial V - \Sigma$, примыкающей к стенкам сосуда, $\delta x^i n_i = 0$.

Функционал (5.4) можно переписать также в форме

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U_1(\rho, \xi) - \Phi(x(\xi, t)) \right) dv\, dt, \quad U_1 = U + \tilde{p}/\rho.$$

Отличие от случая A заключается в том, что области V и $\tilde{V}(t)$ не обязательно совпадают.

Случай D. Пусть в сосуде движется заданным образом твердое тело и допускается, что за ним может образоваться каверна с некоторым подлежащим определению объемом $V_к(t)$ и известным давлением внутри каверны $p_к(t)$. Тогда вариационное уравнение также голономно действие и имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \rho \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U(\rho, \xi) - \Phi(x(\xi, t)) \right) dv + p_к(t) \mid V_к(t) \mid \right] dt.$$

Эта формула следует из (5.4) и равенства $|V_к(t)| + |V| = |\tilde{V}(t)|$.

---

[1]) Обобщение на случай разных давлений на различных связных компонентах свободной поверхности не представляет труда.

Если движение твердого тела заранее неизвестно и ищется, то в действие следует добавить интеграл от кинетической энергии твердого тела (5.3) и потенциала внешних сил $\Phi_т$.

Для изотермического движения, как уже отмечалось, в действие вместо плотности внутренней энергии U войдет плотность свободной энергии $F(\rho, T)$.

Вариационные принципы в лагранжевых координатах. Приведем формулировки вариационных принципов в случае А.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Истинное движение идеальной сжимаемой жидкости есть стационарная точка функционала (5.1) на множестве функций $x^i(\xi^a, t)$, которые удовлетворяют условиям

$$x^i(\xi^a, t) = \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a), \quad x^i(\xi^a, t_1) = \overset{1}{x}{}^i(\xi^a),$$
$$x^i(\xi^a, t) \in \partial\tilde{V}(t) \quad \text{при} \quad \xi^a \in \partial V_\xi, \tag{5.5}$$

V_ξ – область изменения лагранжевых координат.

Подчеркнем, что стационарная точка может не существовать. Например, истинное движение, соединяющее начальное и конечное положения газа, может содержать ударные волны. Такие движения a priori исключены из множества допустимых движений. Однако для достаточно широкого класса функций $\overset{1}{x}{}^i(\xi^a)$ можно ожидать, что истинное движение дозвуковое и входит в число допустимых.

Вариационный принцип Мопертюи – Лагранжа. Истинное движение идеальной сжимаемой жидкости есть стационарная точка функционала кинетической энергии

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \, ½ v_i v^i \, dv \, dt$$

на множестве всех траекторий, удовлетворяющих условиям (5.5) и ограничению

$$\int_V \rho \left(½ \, v_i v^i + U(\rho, \xi) \right) dv = \mathcal{E} = \text{const}. \tag{5.6}$$

В принципе Мопертюи – Лагранжа момент t_1 прихода жидкости в конечное положение не фиксирован и подвергается варьированию.

Эквивалентность принципа Мопертюи – Лагранжа принципу Гамильтона – Остроградского доказывается так же, как и в механике систем с конечным числом степеней свободы при помощи введения множителя Лагранжа для ограничения (5.6) (см. § 2 гл. I).

Если на основании уравнения энергии (5.6) исключить из действия кинетическую энергию

$$\int \rho \, ½ v_i v^i \, dv = \mathcal{E} - \int_V \rho U(\rho, \xi) \, dv$$

и время

$$dt = \sqrt{½ \int_V \rho \, dx_i \, dx^i \, dv} \; / \; \sqrt{\mathcal{E} - \int_V \rho U(\rho, \xi) \, dv},$$

то принцип Мопертюи – Лагранжа примет форму Якоби.

Вариационный принцип Якоби. Истинное движение идеальной сжимаемой жидкости, соединяющее два ее состояния $x_0^i(\xi^a)$ и $x_1^i(\xi^a)$, есть стационарная точка функционала

$$\int_{x_0^i(\xi^a)}^{x_1^i(\xi^a)} \sqrt{\mathscr{E} - \int_V \rho U(\rho, \xi)\, dv}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} \int_V \rho\, dx_i\, dx^i\, dv} \tag{5.7}$$

на множестве траекторий, удовлетворяющих закону сохранения энергии (5.6). Под интегралом в (5.7) понимается интеграл по траектории в пространстве состояний – пространстве функций $x^i(\xi^a)$.

В случаях B, C, D приведем только формулировку принципа Гамильтона – Остроградского. Принципы Мопертюи – Лагранжа и Якоби можно восстановить по принципу Гамильтона – Остроградского так же, как и в случае A.

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в случаях B, C, D. Истинное движение абсолютно твердого тела в идеальной сжимаемой жидкости представляет стационарную точку функционала (5.2). Варьированию в (5.2) подвергаются законы движения жидкости и твердого тела. Закон движения жидкости удовлетворяет ограничениям (5.5), которых под $\partial \tilde{V}(t)$ понимается граница области $\tilde{V}(t)$, состоящая из стенок сосуда и границы твердого тела. На границе твердого тела, согласно условию безотрывности обтекания и равенству (1.3.67), выполняется соотношение

$$(\delta x^i - \delta r^i - (x_j - r_j(t))\, \delta \omega^{ji})\, n_j = 0.$$

Истинное движение идеальной сжимаемой жидкости со свободной поверхностью (случай C) есть стационарная точка функционала (5.4). Закон движения удовлетворяет ограничениям (5.5), последнее из которых следует заменить условием $x(\xi, t) \in \tilde{V}(t)$ при $\xi \in V_\xi$. На части поверхности жидкости, примыкающей к стенкам сосуда, $\delta x^i n_i = 0$, на свободной поверхности величина $\delta x^i n_i$ произвольна.

В случае D истинное движение идеальной жидкости, вызванное заданным движением твердого тела, есть стационарная точка действия на множестве функций $x(\xi, t)$, удовлетворяющих условию $x(\xi, t) \in (\tilde{V}(t) - V_\tau(t))$ при $\xi \in V_\xi$ и первым двум граничным условиям (5.5). На стенках сосуда и на части поверхности твердого тела, к которым примыкает жидкость, $\delta x^i n_i = 0$, на части поверхности образующей границу каверны, величина $\delta x^i n_i$ произвольна.

Вариационные принципы в эйлеровых переменных. Вместо закона движения $x^i(\xi^a, t)$ в качестве основных искомых функций можно взять функции от эйлеровых переменных: лагранжевы координаты $\xi^a(x^k, t)$, перемещения w^i, непосредственно плотность и скорость, связанные некоторыми ограничениями, потенциалы скорости (потенциалы Клебша) и т.п. При этом должна быть обеспечена взаимно однозначная связь новых характеристик с законом движения. В противном случае могут возникать (или исчезать) некоторые "степени свободы".

Рассмотрим изменения в вариационных формулировках, которые сопровождают такие замены искомых функций. При этом будем обсуждать сначала принцип Гамильтона – Остроградского в случае A, об изменениях в формулировках вариационных принципов в остальных случаях будет сказано позже.

Варьирование лагранжевых координат. Возьмем в качестве искомых функций $\xi^a(x^i, t)$. Функции $\xi^a(x^i, t)$ определены в области $V(t)$ – области в пространстве переменных x, которую занимает среда в момент времени t. В случае А $V(t) = \tilde{V}(t)$.

Выразим величины, входящие в лагранжиан Λ, через функции $\xi^a(x^i, t)$. Скорость v^i находится по функциям $\xi^a(x^i, t)$ из уравнения

$$\frac{d\xi^a}{dt} = \frac{\partial \xi^a}{\partial t} + v^k \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k} = 0.$$

Имеем

$$v^k = -x^k_a \frac{\partial \xi^a}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Здесь под x^k_a понимаются компоненты матрицы, обратной к матрице $\left\| \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} \right\|$. Плотность ρ задается равенством

$$\rho = \rho_0(\xi^a(x^i, t)) \det \left\| \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} \right\| \Big/ \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}{}^a}{\partial x^i} \right\|. \tag{5.9}$$

Начальная плотность ρ_0 считается известной функцией ξ^a, значения функций $\xi^a(x^i, t)$ в начальный момент времени также известны

$$\xi^a(x^i, t_0) = \xi^a_0(x^i). \tag{5.10}$$

Кроме того, заданы значения функций $\xi^a(x^i, t)$ в конечный момент времени

$$\xi^a(x^i, t_1) = \xi^a_1(x^i). \tag{5.11}$$

Функции $\xi^a_0(x^i)$ определены в области $\overset{\circ}{V} = V(t_0)$, $\xi^a_1(x^i)$ – в области $\overset{1}{V} = V(t_1)$. Подразумевается, что существует отображение $\overset{\circ}{V} \to \overset{1}{V}$, при котором функции $\xi^a_0(x^i)$ и $\xi^a_1(x^i)$ совпадают.

Уравнение границы области $\overset{\circ}{V}$ в начальный момент времени можно записать в виде

$$f(\xi) = 0.$$

Условие безотрывности обтекания означает, что уравнение

$$f(\xi(x, t)) = 0. \tag{5.12}$$

есть уравнение границы заданной области $\tilde{V}(t)$.

Рассмотрим функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \Lambda d^3x\, dt. \tag{5.13}$$

Лагранжиан Λ по-прежнему определен равенством

$$\Lambda = \rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi(x, t)) - \Phi(x) \right), \tag{5.14}$$

однако в нем плотность задается формулой (5.9), а скорость – формулой (5.8).

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Истинное движение жидкости есть стационарная точка функционала (5.13) – (5.14) на множестве дважды дифференцируемых функций $\xi(x, t)$, удовлетворяющих ограничениям (5.10) – (5.12).

Покажем справедливость этого принципа прямым вычислением. Действительно, из равенства

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\widetilde{V}(t)} \frac{\delta \Lambda}{\delta \xi^a} \partial \xi^a d^3x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial \widetilde{V}(t)} \partial \xi^a \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i^a} n_i - \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} c_x \right) d^2x\, dt \quad (5.15)$$

при $\partial \xi^a = 0$ на $\partial \widetilde{V}(t)$ следует

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \xi^a} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k^a} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} = 0, \quad \xi_k^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k}, \quad \xi_t^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial t}. \quad (5.16)$$

Преобразуем уравнения (5.16) к обычной форме уравнений импульсов идеальной сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v_i v^k) + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (5.17)$$

Свернем (5.16) с компонентами невырожденной матрицы ξ_i^a:

$$\xi_i^a \frac{\delta \Lambda}{\delta \xi^a} = \xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k^a} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k^a} \frac{\partial \xi_k^a}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} \frac{\partial \xi_t^a}{\partial x^i} = -\partial_i \Lambda - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k^a} - \Lambda \delta_i^k \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} \right) = 0. \quad (5.18)$$

Как и раньше $\partial_i \Lambda$ – производная функции $\Lambda(x^i, \xi^a, \xi_i^a, \xi_t^a)$ по x^i при постоянных ξ^a, ξ_i^a, ξ_t^a. Из (5.8), (5.9) и (5.14) имеем

$$\partial_i \Lambda = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad \xi_i^a \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k^a} - \Lambda \delta_i^k = -\rho v_i v^k + \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta_i^k - \Lambda \delta_i^k =$$

$$= -\rho v_i v^k - \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_i^k, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_t^a} \xi_i^a = -\rho v_i. \quad (5.19)$$

Подстановка равенств (5.19) в (5.18) приводит к уравнениям (5.17).

Поверхностный интеграл в (5.15) обращается в нуль в силу условия непротекания жидкости через поверхность $\partial \widetilde{V}(t)$ $(c_x - v^i n_i = 0)$ и ограничения на вариации $\frac{\partial f}{\partial \xi^a} \partial \xi^a = \frac{\partial f}{\partial x^i} x_a^i \partial \xi^a = 0$ (или $n_i x_a^i \partial \xi^a = 0$), которое получается варьированием условия (5.12).

Общая структура решений уравнений импульсов. Прежде чем переходить к изложению вариационных принципов, в которых подвергаются варьированию плотность и скорость, опишем структуру решений уравнений импульсов идеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}.$$

Свернем уравнения импульсов с x_a^i (т.е. спроектируем их на оси сопутствующей системы координат). В левой части уравнения получим

$$x_a^i \frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_a}{dt} - v_i \frac{dx_a^i}{dt} = \frac{dv_a}{dt} - v_i \frac{\partial v^i}{\partial \xi^a} = \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial}{\partial \xi^a} \frac{v^2}{2}.$$

Здесь $v_a = v_i x_a^i$ – компоненты скорости в сопутствующей системе координат. В правой части, учитывая определение давления $p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}$, получим

$$-\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) x_a^i = -\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi^a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^a} \right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{p}{\rho} + \Phi \right) + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^a} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{p}{\rho} + U + \Phi \right) + \partial_a U.$$

Через $\partial_a U$ обозначена производная $\partial_a U = \left. \frac{\partial U(\rho, \xi^a)}{\partial \xi^a} \right|_{p=\text{const}}$. Окончательно

$$\frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{p}{\rho} + U + \Phi - \frac{v^2}{2} \right) + \partial_a U.$$

Введем функцию φ уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{p}{\rho} + U + \Phi - \frac{v^2}{2} \right) \tag{5.20}$$

и обозначим через ψ_a разность $v_a - \partial\varphi/\partial\xi^a$:

$$v_a = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^a} + \psi_a. \tag{5.21}$$

Тогда уравнения импульсов перепишутся в форме

$$\frac{d\psi_a}{dt} = \partial_a U. \tag{5.22}$$

Любое решение уравнений импульсов можно записать в виде (5.20) – (5.22) и, наоборот, для любых функций φ и ψ_a, удовлетворяющих равенствам (5.20) (5.22), скорость v_a (5.21) удовлетворяет уравнениям импульсов.

Равенство (5.20) представляет обобщение интеграла Коши – Лагранжа.

Пусть жидкость однородна. Тогда $\partial_a U = T\,\partial S / \partial \xi^a$, и решение уравнения (5.22) можно записать в виде

$$\psi_a = \overset{0}{\psi}_a(\xi^b) + \mu \frac{\partial S}{\partial \xi^a},$$

где $\overset{0}{\psi}_a$ – некоторые функции от лагранжевых координат, а

$$\frac{d\mu}{dt} = T. \tag{5.23}$$

Используем теперь теорему о каноническом виде линейной дифференциальной формы $dA = A_1(x)\,dx^1 + \ldots + A_n(x)\,dx^n$ (см. [201]): в случае четного $n = 2s$ в некоторой окрестности каждой точки x найдутся функционально независимые функции $p_1(x), \ldots, p_s(x), q^1(x), \ldots, q^s(x)$ такие, что $dA = p_1 dq^1 + \ldots + p_s dq^s$, в случае нечетного $n = 2s + 1$ — функционально независимые функции $p_1(x), \ldots, p_s(x), q^1(x), \ldots, q^s(x)$ и $H(x)$, для которых $dA = p_1 dq^1 + \ldots + p_s dq^s - dH$.

Рассмотрим линейную дифференциальную форму $\overset{0}{\psi}_a d\xi^a$. Найдутся функции $\tilde{\varphi}$, α и β такие, что $\overset{0}{\psi}_a d\xi^a = d\tilde{\varphi} + \alpha\, d\beta$ или

$$\overset{0}{\psi}_a = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^a} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \xi^a}.$$

Поскольку $\overset{\circ}{\psi}_a$ — функции лагранжевых координат, функции $\tilde{\varphi}$, α и β также зависят только от лагранжевых координат. Обозначим через φ сумму $\varphi + \tilde{\varphi}$. При этом уравнение для φ (5.20) не изменит своего вида, а уравнение для скорости (5.21) примет форму

$$v_a = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^a} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \xi^a} + \mu \frac{\partial S}{\partial \xi^a}, \tag{5.24}$$

где μ определено соотношением (5.23).

Проектируя равенство (5.24) на оси наблюдателя (сворачивая с ξ_i^a), получим

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{5.25}$$

Выпишем еще равенства, выражающие условие зависимости α и β только от лагранжевых координат:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \frac{d\beta}{dt} = 0, \tag{5.26}$$

Формулы (5.25), (5.26) и (5.20) описывают все решения уравнения импульсов идеальной сжимаемой жидкости.

Заметим, что по теореме об общем виде линейной дифференциальной формы скорость v_i можно записать в виде $v_i = \overline{\varphi}_{,i} + \overline{\alpha}\overline{\beta}_{,i}$. При этом $\overline{\varphi}$, $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ при фиксированных лагранжевых координатах есть, вообще говоря, функции времени. В формуле (5.25) α и β — функции только лагранжевых координат.

Интересен случай изэнтропических течений, когда S не зависит от лагранжевых координат. При этом $S_{,i} = 0$, и выражение для скорости принимает вид

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^i}. \tag{5.27}$$

Функции φ, α, β называют потенциалами Клебша [271].

Обобщенный интеграл Коши – Лагранжа в терминах потенциалов Клебша можно записать в нескольких различных формах:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{p}{\rho} + U + \Phi - \frac{v^2}{2} = \frac{d\varphi}{dt} + \alpha\frac{d\beta}{dt} + \frac{p}{\rho} + \dot{U} + \Phi - \frac{v^2}{2} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial t} + v^k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x^k}\right) + \frac{p}{\rho} + U + \Phi - \frac{v^2}{2} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U + \Phi = 0. \qquad (5.28)$$

Для потенциальных течений ($\alpha = 0$) соотношения (5.28) переходят [1]) в интеграл Коши – Лагранжа.

Все изэнтропические течения описываются системой уравнений, состоящей из уравнений (5.26), (5.27), (5.28) и уравнения неразрывности.

Изэнтропические течения принадлежат к более широкому классу так называемых баротропных движений – движений, в которых давление есть функция только плотности. Легко проверить, что для баротропных движений уравнения (5.27), (5.26) и (5.28) останутся в силе, если под U понимать функцию $\tilde{U}$, определенную соотношением $p(\rho) = \rho^2 d\tilde{U}/d\rho$. В частности, $\tilde{U} = U$ для изэнтропических течений и $\tilde{U} = F$ для изотермических течений ($T \equiv \text{const}$). Дальше при рассмотрении баротропных течений мы оставим формулы, полученные для изэнтропических течений, без изменений, подразумевая при этом, что под U понимается не внутренняя энергия, а функция $\tilde{U}$.

Варьирование плотности и скорости. В задачах гидромеханики замкнутая система уравнений составляется относительно плотности и скорости. Поэтому вариационные принципы, в которых за основные искомые функции принимаются плотность и скорость, особенно полезны для приложений.

В вариационных принципах в лагранжевых переменных плотность определяется через закон движения из уравнения неразрывности. Точно так же и в эйлеровых переменных следует принять, что плотность по известной скорости вычисляется из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^i}{\partial x^i} = 0. \qquad (5.29)$$

Можно ли независимо варьировать скорость? На первый взгляд ответ положителен: скорость есть первая производная закона движения $x^i(\xi^a, t)$ по времени, и между функциями $x^i(\xi^a, t)$ и $v^i = dx^i(\xi^a, t)/dt$ имеется взаимно

---

[1]) Отметим, что

$$\frac{p}{\rho} + U = \int_0^\rho \frac{dp}{\rho},$$

если $U = 0$ при $\rho = 0$.

однозначное соответствие (при дополнительном начальном условии $x^i(\xi^a, t_0) = x_0^i(\xi^a)$, которое считается выставленным). Однако в этом рассуждении не учтено одно обстоятельство, которое поясним на простом примере.

Пример. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \to \inf \tag{5.30}$$

при ограничениях

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{5.31}$$

Минимизирующая функция, очевидно, линейна по t и имеет вид

$$x(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0).$$

Преобразуем вариационную задачу (5.30), (5.31), выбирая в качестве новой искомой функции скорость $v(t) = dx(t)/dt$. В силу краевых условий (5.31) функция $v(t)$ удовлетворяет ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt = x_1 - x_0. \tag{5.32}$$

Легко проверить, что задача о минимуме функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} v^2 dt \tag{5.33}$$

по всем функциям $v(t)$, подчиненным условию (5.32), эквивалентна исходной и приводит к тому же решению

$$v(t) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \text{const}.$$

Если в задаче о минимуме функционала (5.30) наложить только одно ограничение $x(t_0) = x_0$ (соответствующее решение $x(t) \equiv x_0$), то в преобразованной задаче функция $v(t)$, очевидно, не обязана удовлетворять ограничению (5.32) и функционал (5.33) следует минимизировать по всем функциям $v(t)$. Это приводит к решению $v(t) \equiv 0$.

Приведенный пример показывает, что скорость можно варьировать независимо только при отсутствии ограничений на закон движения в момент времени t_1. Если же положение частиц при $t = t_1$ задано, то скорость удовлетворяет ограничениям типа (5.32).

Формулировка ограничений на скорость в интегральной форме (5.32) для сплошной среды затруднительна. Однако ее легко получить в дифференциальной форме.

Задание положений частиц в начальный и конечный моменты времени означает, что для каждого допустимого поля скорости найдутся функции $\xi^a(x^i, t)$ (лагранжевы координаты), являющиеся решением системы

уравнений

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial t} + v^k \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k} = 0 \tag{5.34}$$

с начальными условиями

$$\xi^a(x^k, t_0) = \xi_0^a(x^k), \tag{5.35}$$

такие, что в момент времени $t = t_1$ они принимают заданные значения

$$\xi^a(x^k, t) = \xi_1^a(x^k), \tag{5.36}$$

и для всех t и x^k

$$\det \left\| \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k} \right\| \neq 0. \tag{5.37}$$

Определение плотности (5.9) и ограничения (5.35) и (5.36) показывают, что поля плотности в начальный и конечный моменты времени следует считать известными:

$$\rho(x^i, t_0) = \rho_0(x^i), \quad \rho(x^i, t_1) = \rho_1(x^i). \tag{5.38}$$

Условие безотрывности обтекания записывается в форме

$$v^i n_i = c_x \quad \text{на} \quad \partial \widetilde{V}(t). \tag{5.39}$$

В остальном поля $\rho(x^i, t)$ и $v^i(x^k, t)$ произвольны.

Вариационный принцип Лина. Стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\widetilde{V}(t)} \rho \left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi) - \Phi(x) \right) d^3x\, dt \tag{5.40}$$

на множестве функций $\rho(x^i, t)$, $v^i(x^k, t)$ и $\xi^a(x^k, t)$, удовлетворяющих ограничениям (5.29), (5.34) – (5.39), являются решениями уравнений импульсов идеальной сжимаемой жидкости.

Наличие дифференциальных связей (5.34) – (5.39) приближает эту задачу к задачам теории оптимального управления.

Вариационный принцип Лина представляет по существу переформулировку вариационного принципа Гамильтона – Остроградского для функций $\xi^a(x^i, t)$, так как из уравнений (5.29), (5.34), (5.35) и (5.38) скорость и плотность можно выразить только через функции $\xi^a(x^i, t)$.

Найдем уравнения Эйлера функционала (5.40) другим способом, освобождаясь от ограничений при помощи множителей Лагранжа. Обозначая через φ и $\rho\psi_a$ множители Лагранжа для ограничений (5.29) и (5.34), придем к функционалу

$$I(\rho, v^i, \varphi, \psi_a) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\widetilde{V}(t)} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi) - \Phi(x) \right) + \right.$$

$$\left. + \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} \right) + \rho \psi_a \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial t} + v^k \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k} \right) \right] d^3x\, dt. \tag{5.41}$$

Этот функционал надо варьировать при ограничениях (5.35), (5.36), (5.38) и (5.39). Ограничение (5.37) несущественно в том смысле, что оставляет достаточный произвол для вывода уравнений Эйлера.

Варьирование по φ и ψ_a дает уравнение неразрывности и уравнение (5.34). Варьирование по ρ приводит к обобщенному интегралу Коши – Лагранжа (5.20):

$$\frac{v^2}{2} - U - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - \Phi - \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

варьирование по v_i – к выражению скорости через "потенциалы" (5.21):

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \psi_a \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i},$$

варьирование по ξ^a – к уравнениям (5.22):

$$-\partial_a U + \frac{d\psi_a}{dt} = 0.$$

Возникающие при варьировании поверхностные интегралы обращаются в нуль в силу равенств

$$\partial \xi^a = 0, \quad \partial \rho = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1,$$

следующих из (5.35), (5.36) и (5.38) и условия безотрывности обтекания (5.39).

Расширение множества допустимых функций и вариационный принцип для баротропных течений. В вариационном принципе Гамильтона – Остроградского требуется, чтобы допустимые функции $x^i(\xi^a, t)$ принимали заданное значение в начальный и конечный моменты времени. Если положения частиц в начальный и конечный моменты времени не фиксированы, то при варьировании действия появится дополнительное слагаемое

$$\left[\int\limits_{\widetilde{V}(t)} \rho v_i \, \delta x^i \, dv \right]_{t_1}^{t_0}.$$

Условие стационарности действия при любых $x^i(\xi^a, t)$ приводит к "лишним" условиям $v_i = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$. Посмотрим, можно ли ослабить равенства $\delta x^i = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$ так, чтобы при этом получились приемлемые условия на "временных торцах".

Предположим, что в начальный и конечный моменты времени в областях $\overset{\circ}{V}$ и $\overset{1}{V}$ фиксирована некоторая система гиперповерхностей. Гиперповерхности являются линиями уровня некоторой функции $\overset{0}{\beta}(x)$ в $\overset{\circ}{V}$ и функции $\overset{1}{\beta}(x)$ в $\overset{1}{V}$. Примем теперь, что при любом допустимом движении среды гиперповерхности $\overset{0}{\beta}(x) = c$ переходят в гиперповерхности $\overset{1}{\beta}(x) = c$ (рис. 41) и, кроме того, в начальный и конечный моменты времени реализуются заданные значения плотности $\rho_0(x)$ и $\rho_1(x)$.

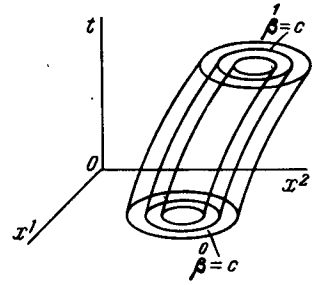


Рис. 41.

Вариации δx^i, согласно (1.3.71), подчинены связям $\nabla_i(\rho_0 \delta x^i) = 0$, $\delta x^i \overset{0}{\beta}_{,i} = 0$ при $t = t_0$, $\nabla_i(\rho_1 \delta x^i) = 0$, $\delta x^i \overset{1}{\beta}_{,i} = 0$ при $t = t_1$. Условие стационарности действия приводит к равенствам $v_i = \overset{0}{\varphi}_{,i} + \overset{0}{\alpha}\overset{0}{\beta}_{,i}$ при $t = t_0$, $v_i = \overset{1}{\varphi}_{,i} + \overset{1}{\alpha}\overset{1}{\beta}_{,i}$ при $t = t_1$, где φ и $\rho\alpha$ с индексами 0 и 1 — соответствующие множители Лагранжа. Полученный класс полей скоростей уже достаточно широк.

Условие о том, что при движении среды гиперповерхности $\overset{0}{\beta}(x) = c$ переходят в гиперповерхности $\overset{1}{\beta}(x) = c$ можно сформулировать следующим образом: найдется функция $\beta(x, t)$ такая, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + v^k \frac{\partial \beta}{\partial x^k} = 0, \tag{5.42}$$

$$\beta|_{t=t_0} = \overset{0}{\beta}, \quad \beta|_{t=t_1} = \overset{1}{\beta}. \tag{5.43}$$

Равенства (5.42), (5.43) представляют некоторые ограничения на допустимые поля скоростей. Замечательно, однако, что для баротропных течений они являются естественными ограничениями и справедлив следующий вариационный принцип, который мы сформулируем в эйлеровых координатах.

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \rho \left(\frac{v^2}{2} - U(\rho) - \Phi(x) \right) d^3x\, dt \tag{5.44}$$

на множестве функций $\rho(x, t), v^i(x, t)$, выделяемом ограничениями (5.29), (5.38), (5.39), (5.42) и (5.43), удовлетворяют уравнению импульсов идеальной сжимаемой жидкости.

Действительно, вводя множитель Лагранжа φ и $\rho\alpha$ для ограничений (5.29) и (5.42), придем к функционалу

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} - U(\rho) - \Phi(x) + \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \rho\alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + v^k \frac{\partial \beta}{\partial x^k} \right) \right] d^3x\, dt. \tag{5.45}$$

Варьирование по φ и α дает уравнения (5.29) и (5.42), варьирование по ρ — интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{v^2}{2} - U(\rho) - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - \Phi(x^i) - \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

варьирование по v_i — выражение скорости через потенциалы Клебша

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^i},$$

варьирование по β — условие сохранения α вдоль траекторий частиц

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = 0. \tag{5.46}$$

Эти уравнения описывают баротропные течения жидкости.

Поверхностные интегралы обращаются в нуль в силу условия безотрывности обтекания (5.39) и равенств

$$\partial\rho = \partial\beta = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1, \tag{5.47}$$

следующих из (5.38) и (5.43).

Дальше до конца параграфа будем рассматривать баротропные течения.

Принципы Бейтмена. Проинтегрируем в функционале (5.45) член $\varphi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^i}{\partial x^i}\right)$ по частям. Получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\widetilde{V}(t)}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho) - \Phi(x)\right) - \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v^k\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) - \right.$$

$$\left. - \rho\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} + v^k\frac{\partial\beta}{\partial x^k}\right)\right] d^3x\,dt + \int_{\overset{1}{V}}\rho_1\varphi\,d^3x - \int_{\overset{0}{V}}\rho_0\varphi\,d^3x. \tag{5.48}$$

Здесь использованы теорема Гаусса–Остроградского в форме (1.3.131) и условие безотрывности обтекания (5.39). Легко проверить, что при варьировании функционала (5.48) по φ получится не только уравнение неразрывности, но и условие безотрывности обтекания (5.39). Таким образом, получим

Первый смешанный вариационный принцип Бейтмена. Стационарные точки функционала (5.48) на множестве функций $\rho(x, t)$, $v^i(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, удовлетворяющих ограничениям (5.38) и (5.43), являются решениями уравнения неразрывности и уравнений импульсов, для которых справедливо условие безотрывности обтекания (5.39).

Подынтегральное количество $\mathcal{P}$ в четырехкратном интеграле (5.48) на экстремалях, согласно интегралу Коши–Лагранжа, совпадает с давлением; оно отличается от подынтегрального количества в функционале действия принципа Гамильтона – Остроградского на дивергентный член $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i\varphi)$.

Подынтегральное количество $\mathcal{P}$ является выпуклой функцией v^i и не содержит производных от v^i. Поэтому отыскание экстремума по v^i сводится к минимизации по v^i подынтегрального количества. Вычисления дают

Второй смешанный принцип Бейтмена. Стационарные точки функционала

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\widetilde{V}(t)}\rho\left(\frac{v^2}{2} + U(\rho) + \Phi(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) d^3x\,dt +$$

$$+ \int_{\overset{1}{V}}\rho_1\varphi\,d^3x - \int_{\overset{0}{V}}\rho_0\varphi\,d^3x, \tag{5.49}$$

где

$$v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x^i}, \tag{5.50}$$

на множестве функций $\rho(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, удовлетворяющих

ограничениям (5.38), (5.43), являются решениями уравнений неразрывности и импульсов, для которых справедливо условие безотрывности обтекания (5.39).

Подынтегральное количество в четырехкратном интеграле (5.49) будем по-прежнему обозначать через $\mathscr{P}$. Оно, так же как и в первом принципе Бейтмена, на экстремалях имеет смысл давления.

Подынтегральное количество в (5.49) алгебраически зависит от ρ. Поэтому нахождение экстремума по ρ функционала (5.49) сводится к вычислению экстремумов по ρ функции

$$\mathscr{P}(\rho^*, \rho) = \rho^* \rho - \rho U(\rho).$$

Здесь введено обозначение

$$-\rho^* = \frac{v^2}{2} + \Phi(x^i) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t}. \tag{5.51}$$

Функция $\rho U(\rho)$ есть строго выпуклая функция ρ (см. пример 8 § 3 гл. II).

Функция $\mathscr{P}(\rho^*, \rho)$ при каждом фиксированном значении ρ^* строго вогнута по ρ и имеет единственную точку максимума. Точки экстремума $\mathscr{P}(\rho^*, \rho)$ могут быть лишь точками максимума. Обозначим верхнюю грань $\mathscr{P}(\rho^*, \rho)$ по ρ через $\mathscr{P}(\rho^*)$

$$\mathscr{P}(\rho^*) = \sup_{\rho \geqslant 0} (\rho^* \rho - \rho U(\rho)). \tag{5.52}$$

Если ввести функцию $\bar{U}(\rho)$, совпадающую с $U(\rho)$ при $\rho \geqslant 0$ и равную $+\infty$ при $\rho < 0$, то определение $\mathscr{P}(\rho^*)$ можно переписать в виде

$$\mathscr{P}(\rho^*) = \sup_{\rho} [\rho^* \rho - \rho \bar{U}(\rho)].$$

Поэтому $\mathscr{P}(\rho^*)$ есть преобразование Юнга – Фенхеля функции $\rho \bar{U}(\rho)$. Очевидно, что $\mathscr{P}(\rho^*) = 0$ при $\rho^* < 0$.

После вычисления функции $\mathscr{P}(\rho^*)$ получаем

Двойственный вариационный принцип Бейтмена[1]). Стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \mathscr{P}(\rho^*)\, d^3x\, dt + \int_{\tilde{V}} \rho_1 \varphi\, d^3x - \int_{\mathring{V}} \rho_0 \varphi\, d^3x \tag{5.53}$$

на множестве функций $\varphi(x, t)$, $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, выделяемом ограничениями (5.43), удовлетворяют уравнениям неразрывности, импульсов и условиям безотрывности обтекания.

В формуле (5.53) величина ρ^* связана с потенциалами Клебша φ, α, β равенствами (5.51) и (5.50). На экстремалях $\mathscr{P}(\rho^*)$ совпадает с давлением жидкости.

Пример. Совершенный газ. Вычислим функции $\mathscr{P}(\rho^*)$ для изэнтропических течений совершенного газа: $U(\rho) = A\rho^{\gamma-1}/(\gamma - 1)$, A, γ = const.

[1]) Термины "смешанный вариационный принцип" и "двойственный вариационный принцип" связаны с тем, что в смешанном вариационном принципе варьируются как исходные функции ρ, v^i, так и множители Лагранжа, в двойственном вариационном принципе – только множители Лагранжа.

Имеем $p = \rho^2 \partial U / \partial \rho = A\rho^\gamma$, $\rho^* = A\gamma\rho^{\gamma-1}/(\gamma-1)$, $\mathcal{P}(\rho^*(\rho)) = A\rho^\gamma = p$, $\mathcal{P}(\rho^*) = k(\rho^*)^{\gamma/(\gamma-1)}$, $k = A\left(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

Потенциальные течения. Расширим множество допустимых функций, отбросив одно из ограничений на $\beta(x, t)$ (5.43). Так как это условие выставлено на краю области $V(t) \times [t_0, t_1]$, экстремали на более широком множестве функций внутри области должны удовлетворять тем же уравнениям, что и в исходной задаче. После отбрасывания ограничения на $\beta(x^i, t)$ на одном из "временных торцов" $t = t_0$ или $t = t_1$, ограничение (5.43) становится несущественным. В связи с этим получим следующий

Принцип Кельвина. Стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho) - \Phi(x)\right) d^3x\, dt$$

на множестве функций $\rho(x, t)$ и $v^i(x, t)$, удовлетворяющих уравнению неразрывности (5.29), условию безотрывности обтекания (5.39) и равенствам (5.38), суть потенциальные течения жидкости.

Принцип Кельвина получается из вариационного принципа для функционала (5.44), если заметить, что, в силу произвольности $\partial\beta$, при $t = t_0$ или $t = t_1$ дополнительно к уравнению (5.46) получится $\alpha = 0$ при $t = t_0$ или $t = t_1$. Поэтому $\alpha \equiv 0$, и экстремали соответствуют потенциальным течениям.

Двойственным к принципу Кельвина является

Вариационный принцип. На множестве всех функций $\varphi(x, t)$ стационарные точки функционала (5.53), в котором

$$-\rho^* = \frac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi^{,i} + \Phi(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{5.54}$$

удовлетворяют уравнениям неразрывности и импульсов жидкости и условию безотрывности обтекания, если определить ρ, v_i и p через потенциал φ по формулам

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{P}(\rho^*)}{\partial \rho^*}, \quad v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad p = \mathcal{P}(\rho^*). \tag{5.55}$$

Первая из этих формул связана с определением функции $\mathcal{P}(\rho^*)$ (5.52).

Вариационный принцип следует из двойственного вариационного принципа Бейтмена, так как при отбрасывании ограничения на $\beta(x, t)$ на одном из временных торцов из уравнений Эйлера для функции β вытекает, что $\alpha=0$. Этот вариационный принцип можно получить также непосредственно из принципа Кельвина по общей схеме построения двойственных вариационных принципов, изложенной в § 3 гл. II.

Движение твердого тела в жидкости. В случае В в формулировках вариационных принципов в эйлеровых координатах произойдут следующие изменения: область определения искомых функций и область интегрирования в действии заменяется на область $\tilde{V}(t) - V_т(t)$; область $V_т(t)$, задаваемая функциями $r(t)$, $\alpha(t)$, подвергается варьированию; функции $r(t)$, $\alpha(t)$ заданы в начальный и конечный моменты времени; на границе области $V_т(t)$ допустимые функции удовлетворяют условиям непротекания; к действию жидкости добавляется действие твердого тела.

Движение жидкости со свободной поверхностью. В случае С область $V(t)$, занятая жидкостью, не совпадает с областью $\tilde{V}(t)$. В вариационных формулировках для случая С надо заменить в действии $\tilde{V}(t)$ на $V(t)$ и дополнительно варьировать $V(t)$ при ограничении $V(t) \subset \tilde{V}(t)$.

Приведем в качестве примера вариационный принцип, в который переходит двойственный вариационный принцип для потенциальных течений, когда жидкость движется над плоскостью. Обозначим декартовы координаты в плоскости через x^α $(\alpha, \beta = 1, 2)$, координату по нормали к плоскости через x, уровень жидкости над плоскостью через $h(x^\alpha, t)$. Пусть жидкость движется в сосуде $\tilde{V} = \{x^\alpha, x: x^\alpha \in \Omega, 0 \leqslant x < +\infty\}$, Ω – некоторая ограниченная область в плоскости $\{x^1, x^2\}$.

Вариационный принцип. Истинное потенциальное течение идеальной сжимаемой баротропной жидкости над плоскостью является стационарной точкой функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \int_{0}^{h(x^\alpha, t)} (\mathcal{P}(\rho^*) - \tilde{p}(t))\, dx\, dx^1 dx^2 dt + \\ + \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{h_1(x^\alpha)} \rho_1 \varphi\, dx - \int_{0}^{h_0(x^\alpha)} \rho_0 \varphi\, dx \right) dx^1 dx^2, \tag{5.56}$$

где $\mathcal{P}(\rho^*)$ – функция (5.52), ρ^* выражается через производные потенциала по формуле (5.54), $\tilde{p}(t)$ – давление на свободной поверхности, ρ_1, ρ_0 – заданные распределения плотности в моменты времени t_1 и t_0, варьированию подвергаются потенциал $\varphi(x^\alpha, x, t)$ и уровень жидкости $h(x^\alpha, t)$ при ограничениях

$$h(x^\alpha, t_0) = h_0(x^\alpha), \quad h(x^\alpha, t_1) = h_1(x^\alpha), \quad h \geqslant 0. \tag{5.57}$$

Если считать заданными значения потенциала в моменты времени t_0, t_1, то последнее слагаемое в (5.56) будет играть роль аддитивной постоянной.

Выражение для действия (5.56) можно получить из формулы (5.53) и сделанного выше замечания о том, что в случае С в действие вместо U входит функция $U_1 = U + \tilde{p}/\rho$, а вместо области $\tilde{V}(t)$ – область $V(t)$. В соответствии с этим замечанием в (5.53) надо вместо $\mathcal{P}(\rho^*)$ подставить функцию $\mathcal{P}_1(\rho^*) = \sup_\rho (\rho^* \rho - \rho U_1(\rho)) = \mathcal{P}(\rho^*) - \tilde{p}$. Варьирование области $V(t)$ сводится к варьированию $h(x^\alpha, t)$.

§ 6. ИДЕАЛЬНАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Модель идеальной несжимаемой жидкости можно рассматривать как результат предельного перехода в последовательности моделей сжимаемой жидкости, в котором $U(\rho, S) \to +\infty$ при $\rho \neq \rho_0$. Покажем, как получается эта модель при помощи вариационно-асимптотического метода.

Функционал действия идеальной сжимаемой жидкости имеет вид

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \rho \left(\frac{1}{2} v_i v^i - U(\rho, S) - \Phi(x) \right) dv\, dt. \tag{6.1}$$

В случае А, на котором мы остановимся, допустимые функции $x^i(\xi^a, t)$ принимают заданные значения в начальный и конечный моменты времени

$$x^i(\xi^a, t_0) = \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a), \quad x^i(\xi^a, t_1) = \overset{1}{x}{}^i(\xi^a) \tag{6.2}$$

и удовлетворяют условию безотрывного обтекания

$$x^i(\xi^a, t) \in \partial \tilde{V}(t) \text{ при } \xi^a \in \partial V_\xi, \tag{6.3}$$

где для каждого t $\tilde{V}(t)$ – заданная область в пространстве наблюдателя.

Подразумевается, что плотность ρ выражается через функции $x^i(\xi^a, t)$ по формуле

$$\rho = \rho_0(\xi^a) \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\| \Big/ \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right\|, \tag{6.4}$$

$U(\rho, S)$, $\Phi(x)$, $\rho_0(\xi)$ и $S(\xi)$ – заданные функции своих аргументов, V_ξ – фиксированная область в пространстве переменных ξ^a.

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского истинные траектории являются стационарными точками функционала (6.1) на множестве функций (6.2), (6.3).

Возьмем для определенности функцию U в виде

$$U = \frac{1}{2} E(\rho - \rho_0)^2, \quad E = \text{const},$$

и рассмотрим[1]) предельный переход $E \to +\infty$.

Выделим главный (в асимптотическом смысле) член функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \frac{1}{2} E(\rho - \rho_0)^2 dv\, dt. \tag{6.5}$$

Минимум функционала (6.5) равен нулю и достигается при $\rho = \rho_0(\xi)$, или, согласно (6.4), при

$$\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\|. \tag{6.6}$$

Для того чтобы минимизирующие функции принадлежали множеству допустимых функций, надо согласовать заданные значения функций $x^i(\xi^a, t)$ в начальный и конечный моменты времени так, чтобы выполнялось соотношение (6.6):

$$\det \left\| \frac{\partial \overset{1}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\|.$$

Минимум главной части функционала достигается на функциях $x^i(\xi^a, t)$, удовлетворяющих ограничениям (6.2), (6.3) и (6.6). Эти функции образуют множество $\mathcal{M}_0$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода.

---

[1]) В общей схеме вариационно-асимптотического метода рассматривались только функционалы, зависящие от малого параметра. Для дословного повторения общей схемы следует ввести малый параметр $\epsilon = 1/E$ и рассмотреть функционал I/E. В тексте без дополнительных пояснений применяется естественная редакция вариационно-асимптотического метода в случае больших параметров.

Будем искать теперь закон движения в виде суммы $x^i(\xi^a, t) + y^i(\xi^a, t)$, где $x^i(\xi^a, t) \in \mathcal{M}_0$, а y^i малы. Оставляя в функционале главные члены по y^i, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \rho_0 \left[v_i \frac{dy^i}{dt} - \frac{1}{2} E\rho_0^2 (\nabla_i y^i)^2 - \Phi_{,i} y^i \right] dv\, dt.$$

Поскольку главные члены имеют одинаковый порядок, (амплитуда y^i)$\sim$ $\sim \frac{1}{E}$ (амплитуда $\frac{dv^i}{dt}$ + амплитуда $\Phi_{,i}$). Следовательно, если рассмотреть функционал I на множестве $\mathcal{M}_0$, то поправки к нему будут малыми (порядка $1/E$), и в первом приближении задача сводится к отысканию стационарных точек функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \rho_0 \left(\frac{1}{2} v_i v^i - \Phi(x^i) \right) dv\, dt \tag{6.7}$$

на множестве функций $x^i(\xi^a, t)$, удовлетворяющих ограничениям (6.2), (6.3) и (6.6). Это и есть принцип Гамильтона – Остроградского для идеальной несжимаемой жидкости (в лагранжевых координатах).

Выведем из этого вариационного принципа уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости.

Освобождаясь от ограничения (6.6) при помощи множителя Лагранжа $p(x^i, t)$, приходим к функционалу

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \left[\rho_0 \left(\frac{1}{2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx^i}{dt} - \Phi(x^i(\xi^a, t)) \right) + p \left(\frac{\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right\|}{\det \left\| \frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\|} - 1 \right) \right] d\overset{\circ}{v}\, dt.$$

При его варьировании поверхностные интегралы аннулируются в силу равенств

$$\delta x^i n_i = 0 \quad \text{на} \quad \partial V_\xi, \quad \delta x^i = 0 \quad \text{при} \quad t_0, t_1,$$

следующих из (6.2) и (6.3).

Равенство нулю объемного интеграла приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}.$$

Таким образом, давление в несжимаемой жидкости имеет смысл множителя Лагранжа для ограничения (6.6).

Перепишем слагаемое функционала (6.7), которое содержит потенциал внешних массовых сил, в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \rho \Phi(x^i) d^3x\, dt. \tag{6.8}$$

Если жидкость однородна ($\partial\rho/\partial\xi^a = 0$), то интеграл (6.8) принимает одинаковые значения для всех допустимых движений жидкости. Поэтому

его можно отбросить, и вариационный принцип Гамильтона–Остроградского принимает форму: на множестве функций $x^i(\xi^a, t)$, выделенном ограничениями (6.2), (6.3) и (6.6), минимизирующий элемент функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_\xi} \frac{1}{2} \rho \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} dv\, dt$$

удовлетворяет уравнению импульсов идеальной несжимаемой однородной жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

В терминах уравнения импульсов отбрасывание потенциала внешних сил соответствует переопределению давления за счет включения в него функции $\rho \Phi(x^i)$.

Пусть несжимаемая неоднородная жидкость содержит абсолютно твердое тело, начальное и конечное положения которого заданы. На тело не действуют другие силы, кроме сил со стороны жидкости. При движении жидкость не отрывается от стенок сосуда и от границы тела. Как и в § 5, выводится

Вариационный принцип Гамильтона–Остроградского. Истинное движение жидкости и находящегося в ней твердого тела есть стационарная точка функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \rho_0(\xi) \left(\frac{1}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} - \Phi(x(\xi, t)) \right) d\overset{\circ}{v} + K_\text{т} - \Phi_\text{т} \right] dt.$$

Отметим, что потенциал объемных сил уже нельзя отбросить, так как даже в случае однородной жидкости он имеет различные значения для разных положений твердого тела. Варьирование потенциала объемных сил по координатам центра объема твердого тела дает силу Архимеда. Действительно, обозначая через $V_\text{т}(t)$ область, занятую твердым телом, через $r^i(t)$ координаты какой-нибудь фиксированной точки области $V_\text{т}(t)$, через δr^i и $\delta\varphi^i$ бесконечно малые смещения и поворот тела, имеем

$$\delta \int_{V_\xi} \rho \Phi(x) d^3x = \delta \int_{\tilde{V}(t) - V_\text{т}(t)} \rho \Phi(x) d^3x =$$

$$= -\rho \int_{\partial V_\text{т}(t)} \Phi n_i (\delta r^i + e^{ijk} \delta\varphi_j (x_k - r_k)) d^2x =$$

$$= -\left(\rho \int_{V_\text{т}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} d^3x \right) \delta r^i - \delta\varphi_j \left(\int_{V_\text{т}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} e^{ijk} (x_k - r_k) d^3x \right). \qquad (6.9)$$

Если точка с координатами r_k есть центр объема тела

$$\int_{V_\text{т}} (x_k - r_k) d^3x = 0,$$

а Φ – потенциал силы тяжести ($\partial\Phi/\partial x^i = \text{const}$), то последний интеграл в (6.9) обращается в нуль. Коэффициент при δr^i есть сила Архимеда.

В случае, когда у жидкости имеется свободная поверхность или допускается, что свободная поверхность может возникать в процессе движения в результате отрыва от тела или стенок сосуда, приведенные формулировки вариационных принципов не изменяются, так как дополнительное слагаемое $\tilde{p}\,|V|$, возникающее в действии сжимаемой жидкости (см. (5.4)), в силу неизменности объема является постоянным и может быть опущено.

Вариационные принципы в эйлеровых координатах. Ограничимся рассмотрением вариационных принципов для однородной жидкости. Зададим в областях $\overset{0}{V}$ и $\overset{1}{V}$ семейства гиперповерхностей как линии уровня функций $\overset{0}{\beta}(x)$ и $\overset{1}{\beta}(x)$ $(\nabla\beta_0 \neq 0,\ \nabla\beta_1 \neq 0)$ и потребуем, чтобы частицы, лежащие в начальный момент на гиперповерхности $\overset{0}{\beta} = c = \text{const}$, в конечный момент оказались на гиперповерхности $\overset{1}{\beta} = c$. Это означает, что существует функция $\beta(x, t)$ такая, что

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + v^k \frac{\partial\beta}{\partial x^k} = 0, \tag{6.10}$$

$$\beta(x, t_0) = \overset{0}{\beta}(x), \quad \beta(x, t_1) = \overset{1}{\beta}(x).$$

Движение жидкости несжимаемо:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0. \tag{6.11}$$

Кроме того, если $V(t) = \tilde{V}(t)$ – заданная область, то нормальная компонента вектора скорости жидкости – известная функция на $\partial\tilde{V}(t)$:

$$v^i n_i = c_x \tag{6.12}$$

Вариационный принцип. На полях скоростей $v^i(x, t)$, подчиненных ограничениям (6.10)–(6.12), минимизирующий элемент функционала кинетической энергии

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \rho \frac{v^2}{2} d^3x\, dt$$

удовлетворяет уравнениям импульсов идеальной несжимаемой жидкости.

Действительно, вводя множители Лагранжа $\rho\alpha$ и $\rho\varphi$ для ограничений (6.10) и (6.11), придем к функционалу

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{\tilde{V}(t)} \left[\frac{v^2}{2} + \varphi\, v^i{}_{,i} - \alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} + v^i \frac{\partial\beta}{\partial x^i}\right)\right] d^3x\, dt.$$

Варьирование его по α дает уравнения (6.10), варьирование по φ – уравнение (6.11), варьирование по v_i – выражение скорости через потенциалы Клебша

$$v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x^i}, \tag{6.13}$$

варьирование по β – условие постоянства значений α для каждой частицы

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{6.14}$$

Возникающий при варьировании поверхностный интеграл обращается в ноль в силу ограничений на скорость (6.12) и ограничений на β при $t = t_0, t_1$ (6.10).

Так же, как и в § 5, показывается, что формулами (6.10), (6.13) и (6.14) описывается любое решение системы уравнений идеальной несжимаемой однородной жидкости.

Пусть теперь часть $\Sigma(t)$ границы жидкости свободна и на жидкость действуют внешние массовые силы с потенциалом $\Phi(x)$. Покажем, что тогда справедлив следующий

Вариационный принцип. Истинное движение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью есть стационарная точка функционала

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi(x) \right) d^3x\, dt \tag{6.15}$$

на множестве всех полей скорости, удовлетворяющих ограничениям (6.10) и (6.11), на стенке сосуда – ограничению (6.12) и на множестве областей $V(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\text{объем } V(t) = \text{объем } \overset{\circ}{V},\ V(t) \subset \widetilde{V}(t). \\ &V(t_0) = \overset{\circ}{V},\quad V(t_1) = \overset{1}{V}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Введем множители Лагранжа $\rho\alpha$ и $\rho\varphi$ для ограничений (6.10) и (6.11) и заменим функционал (6.15) функционалом

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi(x) + \varphi\, v^i{}_{,i} - \alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + v^i \frac{\partial \beta}{\partial x^i} \right) \right) d^3x\, dt. \tag{6.17}$$

Вариация функционала (6.17) по φ и α дает уравнения (6.10) и (6.11), вариация по v^i, β и вариация границы приводят к уравнению

$$\begin{aligned} &\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} [\partial v^i (v_i - \varphi_{,i} - \alpha \beta_{,i}) + \partial\beta(\alpha_{,i} + \partial_i(\alpha v^i))]\, d^3x\, dt + \\ &+ \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V(t)} (\alpha\, \partial\beta(c_x - v^i n_i) + \varphi\, \partial v^i n_i)\, d\sigma\, dt + \\ &+ \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi \right) \delta n\, d\sigma\, dt = 0. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Здесь δn – расстояние, на которое смещается поверхность $\Sigma(t)$ по нормали к себе при варьировании. Пусть сначала вариации ∂v^i, $\partial\beta$ и δn равны нулю на $\partial V(t)$. Тогда из (6.18) следуют уравнения (6.13) и (6.14). При ненулевых значениях ∂v^i, $\partial\beta$ и δn на $\partial V(t)$ уравнение (6.18) сводится к соотношению

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \left[\alpha\, \partial\beta(c_x - v^i n_i) + \varphi\, \partial v^i n_i + \left(\frac{v^2}{2} - \Phi \right) \delta n \right] d\sigma\, dt = 0. \tag{6.19}$$

Здесь использованы равенства: $c_x = v^i n_i$ на $\partial V(t)$ и $\partial v^i n_i = 0$ на $\partial V(t) - \Sigma(t)$.

Положим сначала ∂v^i и δn равными нулю на $\Sigma(t)$, и получим уравнения, соответствующие варьированию β. Возможны два различных случая: $\overset{\circ}{\beta} = a = \text{const}$ на $\overset{\circ}{\partial V}$ и $\overset{\circ}{\beta} \neq \text{const}$ на $\overset{\circ}{\partial V}$. В первом случае в силу условия (6.10) уравнение границы области $V(t)$ имеет вид $\beta(x, t) = a$. Следовательно, вариация $\partial\beta$ на $\partial V(t)$ равна нулю, и равенство (6.19) при $\partial v^i = \delta n = 0$ удовлетворяется тождественно. При этом, как видно из уравнения границы жидкости $\beta(x, t) = a$ и ограничения (6.10), соотношение (6.12) выполняется не только на стенках сосуда, но и на поверхности $\Sigma(t)$, а $c_x = -\beta_{,t}/(\beta_{,i}\beta^{,i})^{1/2}$. Во втором случае[1]) вариации $\partial\beta$ произвольны на $\partial V(t)$ и из (6.19) вытекает равенство (6.12). Итак, стационарные точки рассматриваемого функционала удовлетворяют на свободной поверхности $\Sigma(t)$ равенству (6.12), где c_x — скорость движения поверхности $\Sigma(t)$ по нормали к себе.

Рассмотрим теперь ненулевые вариации ∂v^i и δn. При этом потребуется следующее соотношение:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \varphi\, \partial v^i n_i\, d\sigma\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \frac{d\varphi}{dt} \delta n\, d\sigma\, dt + \left[\int_{\Sigma(t)} \varphi\, \delta n\, d\sigma\right]_{t_0}^{t_1} \tag{6.20}$$

Докажем его. Пусть $x^i = r^i(\xi^1, \xi^2, t)$ — уравнения поверхности $\Sigma(t)$ и ξ^1, ξ^2 — лагранжевы координаты точек, лежащих на поверхности $\Sigma(t)$, так что $v^i = r^i_{,t}$ на $\Sigma(t)$. Тогда, обозначая через δ вариацию при постоянных ξ^α, можно написать:

$$\delta v^i = \partial v^i + \delta r^k v^i_{,k} = \delta r^i_{,t}.$$

Отсюда

$$\partial v^i n_i = n_i(\delta r^i_{,t}) - \delta r^k n_i v^i_{,k}. \tag{6.21}$$

Дальше потребуются два соотношения

$$\frac{dn^i}{dt} = -r^{i\alpha} n_k v^k_{,\alpha}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\sqrt{a}}{dt} = r^\alpha_i v^i_{,\alpha}, \tag{6.22}$$

где a — детерминант метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ на поверхности $\Sigma(t)$, $r^{i\alpha} = a^{\alpha\beta} r^i_\beta$, $r^i_\beta \equiv r^i_{,\beta}$. Первое соотношение получается из формулы для вариации вектора нормали (1.3.118), в которой δn^i и δx^i надо заменить на dn^i и $v^i dt$.

Второе соотношение (6.22) следует из (1.3.1) и определения метрического тензора поверхности

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\sqrt{a}}{dt} = \frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial a_{\alpha\beta}} \frac{da_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} \frac{d}{dt} r^i_\alpha r_{i\beta} = r^\alpha_i v^i_{,\alpha}.$$

При помощи (6.21) и (6.22) получим

$$\varphi\, \partial v^i \cdot n_i d\sigma = \varphi n_i \frac{d\delta r^i}{dt} d\sigma - \varphi \delta r^k \cdot n_i v^i_{,k}\, d\sigma =$$

$$= \frac{d}{dt}(\varphi n_i \delta r^i \cdot \sqrt{a})\, d\xi^1 d\xi^2 - \frac{d\varphi}{dt} n_i \delta r^i d\sigma + \varphi \delta r_i \cdot r^{i\alpha} n_k v^k_{,\alpha} d\sigma -$$

$$- \varphi n_i \delta r^i \cdot r^\alpha_k v^k_{,\alpha} d\sigma - \varphi \delta r^k \cdot n_i v^i_{,k} d\sigma. \tag{6.23}$$

---

[1]) Мы предположим для простоты, что поверхности $\beta(x, t) = \text{const}$ трансверсально пересекают поверхность $\partial V(t)$.

Поскольку $n_i \delta r^i = \delta n$ и, согласно формуле для разбиения единичного тензора, $\delta^j_i = n_i n^j + r_i^\alpha r^j_\alpha$, имеем

$$\delta r^k \cdot n_i v^i_{,k} = \delta r^k \cdot n_i v^i_{,j} \delta^j_k = \delta r^k \cdot n_i v^i_{,j} (n^j n_k + r^\alpha_k r^j_\alpha) =$$

$$= (\delta r^k \cdot n_k) n_i n^j v^i_{,j} + \delta r^k \cdot r^\alpha_k n_i v^i_{,\alpha},$$

последние три слагаемых в (6.23) в сумме дают нуль (при этом надо учесть, что $v^i_{,i} = v^i_{,j} \delta^j_i = v^i_{,j} (n^j n_i + r^j_\alpha r_i^\alpha) = n_i n^j v^i_{,j} + r^j_\alpha r_i^\alpha) v^i_{,j} = 0$). Итак, справедливо равенство

$$\varphi \partial v^i n_i d\sigma = \frac{d}{dt} (\varphi n_i \delta r^i \cdot \sqrt{a}) d\xi^1 d\xi^2 - \frac{d\varphi}{dt} \delta n \, d\sigma,$$

из которого и следует формула (6.20).

На основании (6.20) уравнение (6.19) можно переписать в виде

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi - \frac{d\varphi}{dt} \right) \delta n \, d\sigma \, dt + \rho \left[\int_{\Sigma(t)} \varphi \, \delta n \, d\sigma \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{6.24}$$

Так как область, занятая средой в начальный и конечный моменты времени, задана, $\delta n = 0$ при $t = t_0, t_1$, и в силу ограничения (6.16) и условия $\delta n = 0$ на $\partial V(t) - \Sigma(t)$ справедливо равенство

$$\int_{\Sigma(t)} \delta n \, d\sigma = 0, \tag{6.25}$$

уравнение (6.24) приводит к единственному условию

$$\frac{v^2}{2} - \Phi - \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{\rho}. \tag{6.26}$$

Здесь постоянная p – множитель Лагранжа для ограничения (6.25).

Условию (6.26) удобнее придать другой вид, добавив равное нулю слагаемое $\alpha \, d\beta/dt$:

$$\frac{v^2}{2} - \Phi - \frac{d\varphi}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt} = \frac{v^2}{2} - \Phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - v^k (\varphi_{,k} + \alpha \beta_{,k}) - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{p}{\rho}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi = -\frac{p}{\rho}. \tag{6.27}$$

Таким образом постоянная p имеет смысл давления, а равенство (6.27) выражает условие постоянства давления на свободной поверхности. Это утверждение завершает обоснование вариационного принципа для функционала (6.15).

Если в жидкости движется твердое тело, то вместо функционала (6.15) следует взять функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{V(t)} \rho \left(\frac{v^2}{2} - \Phi(x) \right) d^3x + \mathcal{K}_\text{т} - \Phi_\text{т} \right] dt. \tag{6.28}$$

Если дополнительно допустить возможность отрыва жидкости от стенок сосуда и поверхности тела, то форма свободной поверхности также находится из условия экстремума функционала (6.28).

Потенциальные течения. После отбрасывания ограничения на β (6.10) получим следующий

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала (6.15) на полях скорости, удовлетворяющих условию несжимаемости (6.11) и условию непротекания через стенки сосуда (6.12), и на областях $V(t)$, удовлетворяющих условию (6.16), суть потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости.

Построим соответствующий двойственный вариационный принцип. Вводя множитель Лагранжа для ограничения (6.11) и используя равенство (6.12), перепишем функционал (6.15) в виде

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi(x) - \varphi \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right) d^3x\, dt =$$

$$= \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} + v^i \varphi_{,i} - \Phi(x) \right) d^3x\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V(t)} \varphi\, c_x d\sigma\, dt. \qquad (6.29)$$

Нахождение экстремалей функционала (6.29) по v^i сводится к минимизации по v^i подынтегрального количества. После вычисления минимума по v^i получим

Двойственный вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(-\frac{1}{2} \varphi_{,i} \varphi^{,i} + \Phi(x) \right) d^3x\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V(t)} \varphi\, c_x d\sigma\, dt \qquad (6.30)$$

на всех функциях φ и областях $V(t)$, удовлетворяющих условию (6.16), суть потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости.

Функционал (6.30) можно переписать в другой форме при помощи тождества

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi\, d^3x = \int_{V(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d^3x + \int_{\partial V(t)} \varphi\, c_x d\sigma.$$

Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\varphi_{,t} + \frac{1}{2} \varphi_{,i} \varphi^{,i} + \Phi(x) \right) d^3x\, dt - \left[\int_{V(t)} \varphi\, d^3x \right]_{t_0}^{t_1}. \qquad (6.31)$$

В формуле (6.31) подынтегральное количество в объемном интеграле отличается знаком от давления.

Избавимся от последнего слагаемого в (6.31), наложив на допустимые значения потенциала φ дополнительное ограничение

$$\left[\int_{V(t)} \varphi\, d^3x \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \qquad (6.32)$$

Ясно, что это ограничение не повлияет на уравнения и краевые условия для φ. Получим

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \left(\varphi_{,t} + \frac{1}{2} \varphi_{,i} \varphi^{,i} + \Phi(x) \right) d^3x\, dt \qquad (6.33)$$

на всех функциях φ и областях $V(t)$, подчиненных соответственно ограни-

чениям (6.32) и (6.16), удовлетворяют уравнениям и краевым условиям теории потенциальных течений идеальной жидкости.

Рассмотрим частный случай, когда идеальная несжимаемая жидкость движется над плоскостью Ω (см. обозначения, введенные при формулировке вариационного принципа для функционала (5.56)). Вариационный принцип для функционала (6.33) перейдет в принцип Люка.

Вариационный принцип Люка. Потенциальные течения над плоскостью идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью есть стационарные точки функционала

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\int_{0}^{h(x^\alpha,t)}\left(\varphi_{,t}+\frac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi^{,i}+\Phi(x)\right)dx^1dx^2dx^3dt \tag{6.34}$$

на всех функциях φ и h, удовлетворяющих ограничениям:

$$\int_{\Omega}[h(x^\alpha,t)-h_0(x^\alpha)]dx^1dx^2=0,\quad \left[\int_{\Omega}\int_{0}^{h}\varphi dx^1dx^2dx^3\right]_{t_0}^{t_1}=0$$
$$h(x^\alpha,t_0)=h_0(x^\alpha),\quad h(x^\alpha,t_1)=h_1(x^\alpha). \tag{6.35}$$

Первое ограничение (6.35) можно отбросить, если считать, что множитель Лагранжа для этого ограничения включен в потенциал внешних массовых сил (или после некоторого переопределения φ — в потенциал φ).

Вариационный принцип Люка можно вывести и из вариационного принципа для функционала (5.56), если заметить, что, поскольку для несжимаемой жидкости $U(\rho)=+\infty$ при $\rho\neq\rho_0$, $\mathcal{P}(\rho^*)=\sup_{\rho}(\rho^*\rho-\rho U(\rho))=$
$=\rho^*\rho_0-\rho_0U(\rho_0)=-\rho_0\left(\varphi_t+\frac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi^{,i}+\Phi(x)\right)-\rho_0U(\rho_0)$.

Приведем теперь формулировки вариационных принципов для потенциальных течений жидкости, не содержащей свободных поверхностей.

Принцип Кельвина. На множестве $\mathcal{M}$ всех полей скорости, выделяемом ограничениями (6.11) и (6.12), минимизирующий элемент функционала кинетической энергии

$$I(v)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\widetilde{V}(t)}\rho\frac{v^2}{2}d^3x\,dt$$

соответствует потенциальным течениям.

Множество $\mathcal{M}$ выпукло. Кинетическая энергия, как положительный квадратичный функционал, строго выпукла. Поэтому справедлива

Теорема. Минимизирующий элемент функционала кинетической энергии единствен.

Доказательство существования минимизирующего элемента несколько сложнее и может быть проведено по схеме, изложенной в § 1 гл. II.

Конструируя двойственный вариационный принцип, получим

Принцип Дирихле. На всех функциях φ максимизирующий элемент функционала

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\partial\widetilde{V}(t)}c_x\varphi\,d\sigma-\frac{1}{2}\int_{\widetilde{V}(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}d^3x\right]dt$$

есть потенциал скорости течения идеальной несжимаемой жидкости,

удовлетворяющий краевому условию (6.12), причем

$$\sup_{\varphi} J = \inf_{v} I. \tag{6.36}$$

Время входит в принципы Кельвина и Дирихле как параметр. Поэтому задачу о минимуме функционала I можно заменить задачей о минимуме функционала

$$\mathcal{K} = \int\limits_{\widetilde{V}(t)} \frac{1}{2}\rho v^2 d^3x \tag{6.37}$$

при ограничениях (6.11), (6.12), а задачу о максимуме функционала J — задачей о максимуме по всем φ функционала

$$\mathcal{K}^* = \int\limits_{\partial\widetilde{V}(t)} c_x\varphi\, d\sigma - \frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{V}(t)} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} d^3x. \tag{6.38}$$

§ 7. УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО ТЕЛА

Все предшествующие вариационные формулировки, в том числе и в эйлеровых координатах, относились к случаю, когда область $V(t)$ неподвижна по частицам. Если под $V(t)$ понимать некоторую неподвижную в системе наблюдателя область V, граница которой проницаема (часть частиц покидает в процессе движения область V, а на их место приходят другие частицы), то рассмотренные выше вариационные принципы непосредственно неприменимы. Вместе с этим ясно, что свойством стационарности обладают те же функционалы, к которым, быть может, добавлены поверхностные интегралы, описывающие некоторый приток энергии. Этот приток сопровождает появление новых частиц. Не останавливаясь на формулировке общих вариационных принципов для систем с переменным числом частиц, приведем вариационные принципы для установившихся течений идеальной жидкости и упругого тела.

Кинематика установившегося движения. Под установившимся понимают движение, в котором все характеристики среды, в том числе скорость и плотность, неизменны в каждой фиксированной точке пространства. Покажем, что в любом установившемся течении[1]) закон движения имеет вид

$$x^i = x^i(\xi^\alpha, \xi + t), \tag{7.1}$$

где $\alpha = 1, 2$, $\xi = \xi^3$ — третья лагранжева координата (она играет выделенную роль и поэтому, как правило, индекс 3 опускается).

Пусть $v^i(x)$ — поле скоростей установившегося течения. Построим линии тока — интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^k). \tag{7.2}$$

[1]) С ненулевой скоростью.

По теореме единственности, условия которой предполагаются выполненными, любая траектория частицы, начавшаяся на линии тока, принадлежит ей целиком. Поэтому все движение происходит по двухпараметрическому семейству линий тока. Пусть уравнения, задающие это семейство, имеют вид $x^i = x^i(\xi^\alpha, \zeta)$, где ξ^α – "номер" линии тока, ζ – параметр вдоль линии тока. Выберем этот параметр так, чтобы $x^i_{,\zeta} = v^i$, и отождествим параметр ζ в начальный момент времени с лагранжевой координатой ξ. Тогда функции (7.1) будут удовлетворять уравнениям (7.2). По теореме единственности других решений этой системы, принимающих при $t = 0$ значения $x^i(\xi^\alpha, \xi)$, нет.

Обращение формул (7.1) выглядит следующим образом:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^i), \quad \xi = \zeta(x^i) - t, \tag{7.3}$$

где $\zeta(x^i)$ – некоторая функция эйлеровых координат. Таким образом, установившееся движение определяется заданием либо трех функций лагранжевых координат $x^i(\xi^\alpha, \zeta)$, либо трех функций эйлеровых координат $\xi^\alpha(x^i)$, $\zeta(x^i)$. Функции $\xi^\alpha(x^i)$ называют пространственными функциями тока. Вариационные принципы для установившегося движения естественно формулировать в эйлеровых координатах, поэтому дальше в качестве полевых переменных будем использовать функции $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$.

Выразим скорость и плотность через $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$. Выпишем равенства $x^i_a \xi^b_{,i} = \delta^b_a$ при $a = 3$, $b = 1, 2, 3$. Поскольку $x^i_3 = v^i$, получим

$$v^i \xi^\alpha_{,i} = 0, \quad v^i \zeta_{,i} = 1. \tag{7.4}$$

Первые два равенства (7.4) означают, что вектор v^i перпендикулярен векторам $\xi^1_{,i}$ и $\xi^2_{,i}$. Следовательно, он пропорционален их векторному произведению

$$v^i = a e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k}. \tag{7.5}$$

Коэффициент a находится из последнего равенства (7.4)

$$a = 1/e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \zeta_{,i}. \tag{7.6}$$

Плотность ρ по условию не меняется в каждой точке пространства. В частности, на некоторой поверхности $\mathcal{P}$, пересекающей линии тока, ее можно считать функцией только ξ^α: $\rho = \tilde{\rho}(\xi^\alpha)$. Покажем, что в любой точке пространства ρ дается формулой

$$\rho = \sigma(\xi^\alpha) e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \zeta_{,i}, \tag{7.7}$$

где функция $\sigma(\xi^\alpha)$ определяется по значениям плотности на поверхности $\mathcal{P}$:

$$\sigma(\xi^\alpha) = \tilde{\rho}(\xi^\alpha) / e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \zeta_{,i} \quad \text{на } \mathcal{P}. \tag{7.8}$$

Действительно, в силу (7.5)–(7.7) поток массы ρv^i можно записать в форме $\rho v^i = \sigma(\xi^\alpha) e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k}$. Поэтому функция ρ (7.7) удовлетворяет уравнению неразрывности

$$(\rho v^i)_{,i} = (\sigma(\xi^\alpha) e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k})_{,i} = 0.$$

Решение уравнения неразрывности, принимающее на $\mathscr{P}$ заданные значения, как легко видеть, единственно.

При преобразовании координат $\xi^\alpha \to \xi'^\alpha$ коэффициент σ приобретает множитель $\det \| \partial \xi^\alpha / \partial \xi'^\beta \|$ и за счет выбора координат ξ^α его можно сделать равным единице.

Дальше примем, что $\sigma = 1$, при этом

$$\rho v^i = e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k}, \quad \rho = e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \zeta_{,i}. \tag{7.9}$$

Установившиеся движения обладают важным свойством: компоненты обратной дисторсии ξ^a_i и, следовательно, компоненты дисторсии x^i_a в каждой точке пространства не зависят от времени. Это вытекает из формул (7.3).

При движении частицы пересекают поверхность $\mathscr{P}$. В качестве начального значения характеристик частицы можно взять их значение на $\mathscr{P}$. В частности, $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ определим равенством: $\overset{\circ}{x}{}^i_a = x^i_a$ на $\mathscr{P}$. Будем считать $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ известными функциями ξ^α.

Обратим внимание, что определение $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ отличается от определения, данного в §3 гл. I: $\overset{\circ}{x}{}^i_a = x^i_a$ при $t = 0$. Это связано с желанием сохранить основное свойство $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ при варьировании $-\delta \overset{\circ}{x}{}^i_a = 0$. Вариации величин $x^i_a|_{t=0}$ при варьировании линий тока отличны от нуля.

Вариационные принципы в случае неизменного числа частиц. Рассмотрим в некоторой области V установившееся движение сплошной среды. Новые частицы в область не поступают и $v^i n_i = 0$ всюду на ∂V.

В терминах функций $\xi^a(x^i, t)$ это условие записывается следующим образом: имеется фунция $f(\xi^\alpha)$ такая, что при $x^i \in \partial V$

$$f(\xi^\alpha(x^i)) = 0. \tag{7.10}$$

Уравнение $f(\xi^\alpha) = 0$ задает границу области ∂V в лагранжевых переменных.

В соответствии с принципом Гамильтона–Остроградского имеет место равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a_t} \frac{\partial}{\partial t} \partial \xi^a + \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \partial \xi^a + \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a} \partial \xi^a \right) d^3x\, dt = 0, \tag{7.11}$$

где $\Lambda = \rho(v^2/2 - U(\xi^a_i, \xi^a) - \Phi(x^i))$. Заметим, что U и Λ не зависят явно от ξ, так как в противном случае они менялись бы со временем в фиксированной точке пространства, однако могут зависеть от ξ^α.

По формуле (5.19)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a_t} = -\rho v_i x^i_a$$

и, поскольку для установившегося движения ρ, v_i и x^i_a в каждой точке пространства не зависят от времени, и $\partial \xi^a = 0$ при $t = t_0, t_1$, первое слагаемое в (7.11) обращается в нуль. В остальные два слагаемых входят только $\partial \xi^a$ и их производные по пространственным координатам. Поэтому интеграл в (7.11) не чувствует ограничений на $\partial \xi^a$ при $t = t_0, t_1$, и в каж-

дый момент времени справедливо равенство

$$\int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^\alpha} \partial \xi^\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i^a} \partial \xi_i^a \right) d^3x = 0. \tag{7.12}$$

Заметим теперь, что при варьировании функций (7.3) $\partial \xi^a$ не зависят от времени, зависимость же $\partial \xi^a$ от пространственных координат может быть произвольной. Если ограничиться вариациями $\partial \xi^\alpha$, $\partial \zeta$, для которых $\partial \xi^\alpha = 0$, $\partial \overset{\circ}{x}{}_a^i = 0$ на $\mathcal{P}$, то $\delta \overset{\circ}{g}_{ab} = 0$, $\delta \rho_0 = 0$, и левая часть в (7.12) представляет вариацию интеграла от Λ. Кроме того, как следует из равенств (5.16) – (5.19), уравнения

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^a} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i^a} = 0 \tag{7.13}$$

есть уравнения установившегося течения сжимаемого газа. Поэтому справедлив следующий вариационный принцип.

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi^\alpha) - \Phi(x^i) \right) d^3x, \tag{7.14}$$

в котором ρ и v^i выражены через $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$ по формулам (7.9) на множестве всех функций $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$, подчиненных ограничению

$$\partial |\xi_i^a| = 0 \quad \text{на } \mathcal{P} \tag{7.15}$$

и ограничению (7.10), удовлетворяют уравнениям импульсов идеальной сжимаемой жидкости.

Дадим прямой вывод уравнений импульсов из вариационного принципа. Подынтегральное количество запишем в виде

$$\Lambda = \Lambda(p^i, \rho, \xi^\alpha, x^i) = \frac{p^i p_i}{2\rho} - \rho U(\rho, \xi^\alpha) - \rho \Phi(x^i),$$

поскольку $p^i = \rho v^i$ просто выражается через полевые переменные по формулам (7.9). Имеем[1])

$$\begin{aligned} \delta I = \int_V \Bigg[& \frac{\partial \Lambda}{\partial p^i} (e^{ijk} (\partial \xi^1)_{,j} \xi^2_{,k} + e^{ijk} \xi^1_{,j} (\partial \xi^2)_{,k}) + \\ & + \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} (e^{ijk} (\partial \xi^1)_{,j} \xi^2_{,k} \zeta_{,i} + \\ & + e^{ijk} \xi^1_{,j} (\partial \xi^2)_{,k} \zeta_{,i} + e^{ijk} \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} (\partial \zeta)_{,i}) - \rho T \frac{\partial S}{\partial \xi^\alpha} \partial \xi^\alpha \Bigg] d^3x. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Отметим, что

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial p^i} = v^i, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} = -\left(\frac{v^2}{2} + U + \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \Phi \right).$$

[1]) Жидкость будем считать однородной, так что $\partial U / \partial \xi^\alpha = T \partial S / \partial \xi^\alpha$.

Обозначим $\partial\Lambda/\partial\rho$ через $-R$. Выпишем уравнение, соответствующее варьированию ζ,

$$e^{ijk}(R)_{,i}\xi^1_{,j}\xi^2_{,k}=0.$$

Оно показывает, что определитель, составленный из производных от функций R, ξ^1 и ξ^2, равен нулю. Общее решение имеет вид

$$R=R(\xi^1,\xi^2). \tag{7.17}$$

Коэффициент при $\partial\zeta$ в поверхностном интеграле, который получается после интегрирования по частям, равен нулю, так как вектор $e^{ijk}\xi^1_{,j}\xi^2_{,k}$ равен скорости и, следовательно, ортогонален вектору нормали.

Используя (7.17) и равенство $v_i e^{ijk}\xi^1_{,j}\xi^2_{,k}=\rho v^2$, которое следует из (7.9), уравнения при вариациях $\partial\xi^1$ и $\partial\xi^2$ можно записать в виде

$$(-v_{i,j}e^{ijk}+e^{ijk}\zeta_{,i}(R_{,j}-TS_{,j}))\xi^2_{,k}=0,$$

$$(-v_{i,k}e^{ijk}+e^{ijk}\zeta_{,i}(R_{,k}-TS_{,k}))\xi^1_{,j}=0.$$

Эти уравнения показывают, что вектор, стоящий в скобках, пропорционален скорости. Обозначая коэффициент пропорциональности через μ, можно написать

$$-v_{i,j}e^{ijk}+e^{ijk}(R_{,j}-TS_{,j})\zeta_{,i}=\mu v^k. \tag{7.18}$$

Три равенства (7.18) содержат, по существу, два уравнения для искомых функций, третье служит для определения μ. Коэффициент μ можно исключить, проектируя равенства (7.18) на плоскость, перпендикулярную скорости, т.е. сворачивая (7.18) с $e_{krs}v^r$. Используя (1.3.8) и равенства $v^i\zeta_{,i}=1$, $v^iR_{,i}=0$, $v^iS_{,i}=0$, получим уравнения

$$v_{i,j}v^j-\partial_i\left(\frac{v^2}{2}\right)+R_{,i}-TS_{,i}=0,$$

которые, как видно из определения R,

$$R=\frac{v^2}{2}+U+\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\Phi, \tag{7.19}$$

есть уравнения импульсов сжимаемой жидкости.

При вариации $\partial\xi^1$ на границе области V в поверхностном интеграле получится коэффициент

$$v_i e^{ijk}n_j\xi^2_{,k}-Re^{ijk}n_j\xi^2_{,k}\zeta_{,i}.$$

Поскольку вектор нормали n_i пропорционален $\dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\xi^1_{,i}+\dfrac{\partial f}{\partial\xi^2}\xi^2_{,i}$, этот коэффициент имеет вид $A\dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}$. Коэффициент при вариации $\partial\xi^2$ имеет вид $A\dfrac{\partial f}{\partial\xi^2}$. Так как $\dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\partial\xi^1+\dfrac{\partial f}{\partial\xi^2}\partial\xi^2=0$ на ∂V, варьирование ξ^α на ∂V не приводит к дополнительным соотношениям.

Сформулируем аналогичный вариационный принцип для идеальной несжимаемой однородной жидкости (его можно получить, например, вариационно-асимптотическим методом).

Пусть плотность $\rho_0 = \text{const}$. Тогда функции ξ^α и ζ удовлетворяют ограничению

$$e^{ijk}\xi^1_{,j}\xi^2_{,k}\zeta_{,i} \equiv \text{const}. \tag{7.20}$$

Кинетическая энергия на основании (7.9) и (1.3.8) имеет вид

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2\rho}[\xi^1_{,i}\xi^{1,i}\ \xi^2_{,j}\xi^{2,j} - (\xi^1_{,i}\xi^{2,i})^2].$$

Интеграл от Ф по заданной области V играет роль аддитивной постоянной и несуществен. Поэтому справедлив

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\frac{1}{2\rho_0}\int_V [\xi^1_{,i}\xi^{1,i}\xi^2_{,j}\xi^{2,j} - (\xi^1_{,i}\xi^{2,i})^2]d^3x$$

на множестве функций $\xi^1(x^i)$, $\xi^2(x^i)$ и $\zeta(x^i)$, подчиненных ограничениям (7.10) и (7.20), удовлетворяют уравнениям импульсов идеальной несжимаемой жидкости.

Аналогичный вариационный принцип справедлив для упругого тела.

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала

$$\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} - U - \Phi(x^i)\right)d^3x \tag{7.21}$$

(в котором ρ и v^i выражены через функции $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$ по формулам (7.9), а U считается известной функцией $\xi^\alpha_{,i}$, $\zeta_{,i}$ и ξ^α) на множестве функций $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$, подчиненных ограничениям

на $\mathcal{P}$: $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha(x^i)$, $\zeta = \overset{\circ}{\zeta}(x^i)$, $n^i\zeta_{,i} = \overset{\circ}{a}(x^i)$, $n^i\xi^\alpha_{,i} = \overset{\circ}{a}{}^\alpha(x^i)$

и ограничению (7.10), удовлетворяют в объеме V уравнениям импульсов установившегося движения упругого тела, а на границе области V – естественным краевым условиям – равенству нулю касательных компонент поверхностной силы.

Ограничения на поверхности $\mathcal{P}$ выставлены для того, чтобы $\delta\overset{\circ}{x}{}^i_a = 0$ и была возможна запись левой части (7.12) в виде вариации интеграла от Λ. При выводе уравнений надо использовать, что уравнения состояния для тензора напряжений Коши в терминах функций ξ^a имеют форму

$$p^i_j = -\rho\frac{\partial U}{\partial \xi^a_i}\xi^a_j.$$

Вариационные принципы для идеальной жидкости в случае переменного числа частиц. Пусть теперь часть S границы области V проницаема для частиц (см. рис. 42, на нем изображены линии тока). В этом случае вариация функционала (7.14) не равна нулю. Естественно постулировать следующее вариационное уравнение:

$$\delta\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi^\alpha) - \Phi(x^i)\right)d^3x = \int_S (\lambda\,\delta\zeta + \lambda_\alpha\delta\xi^\alpha)d\sigma. \tag{7.22}$$

Функционал в правой части (7.22) должен быть задан.

Дальше ограничимся случаем, когда функции $\xi^\alpha(x^i)$ на S известны:

$$\xi^\alpha(x^i) = a^\alpha(x^i) \text{ на } S. \tag{7.23}$$

Если обозначить через S_+ и S_- части поверхности S, через которые частицы поступают в V и покидают V, то условие (7.23) по существу означает задание точечного отображения $S_+ \to S_-$, которое начало линии тока на S_+ переводит в конец линий тока на S_-. В соответствии с (7.23) $\partial\xi^\alpha = 0$ на S.

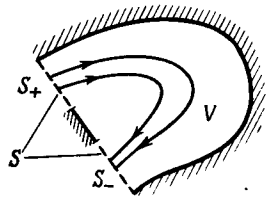


Рис. 42.

Функционал в правой части (7.22) фиксируем, задавая на S либо

$$\zeta(x^i) = a(x^i) \quad \text{на } S, \tag{7.24}$$

либо коэффициент λ. Поскольку функционал (7.14) инвариантен относительно замен $\zeta = \zeta + \varphi(\xi^\alpha)$, где φ – произвольная функция своих аргументов, не ограничивая общности, можно считать, что на S_- $\zeta(x^i) = 0$. Тогда задание $\zeta(x^i)$ на S_+ фиксирует темп прохождения частицами линий тока.

Выясним физический смысл λ. Как следует из (7.16), коэффициент при $\partial\zeta$ на границе имеет значение

$$-Re^{ijk} n_i \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \tag{7.25}$$

В него входят производные ξ^α только вдоль S, поэтому задание λ при известных ξ^α на S эквивалентно заданию R на S как функции от ξ^α:

$$R = \tilde{R}(\xi^\alpha) \quad \text{на } S. \tag{7.26}$$

Если на S заданы ξ^α и ζ, то правая часть в (7.22) обращается в нуль и мы получаем

Вариационный принцип. Установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости является стационарной точкой функционала

$$\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi^\alpha) - \Phi(x^i)\right) d^3x$$

на множестве функций $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$, удовлетворяющих на S ограничениями (7.23), (7.24), а на $\partial V - S$ – ограничению (7.10).

Если на S заданы ξ^α и λ, то функционал в правой части (7.22) голономен и имеет место

Вариационный принцип. Установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости есть стационарная точка функционала

$$\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} - U(\rho, \xi^\alpha) - \Phi(x^i)\right) d^3x + \int_S \tilde{R} e^{ijk} n_i \xi^1_{,j} \xi^2_{,k} \zeta \, d\sigma \tag{7.27}$$

на множестве функций $\xi^\alpha(x^i)$ и $\zeta(x^i)$, удовлетворяющих на S ограничению (7.23), а на $\partial V - S$ – ограничению (7.10).

Поверхностный интеграл в (7.27) можно переписать в виде

$$\int_{S_+} (\tilde{R}_+(\xi^\alpha)\zeta_+ - \tilde{R}_-(\xi^\alpha)\zeta_-) d\xi^1 d\xi^2,$$

где индексами + и − отмечены значения величин на S_+ и S_-. Объемный интеграл в (7.27) инвариантен относительно сдвигов по ζ на произвольную функцию от ξ^α. Поэтому для корректности вариационной задачи поверхностный интеграл должен обращаться в нуль на всех функциях $\zeta_+ = \zeta_- = \varphi(\xi^\alpha)$. Отсюда получаем необходимое условие, которому должны удовлетворять заданные функции

$$\tilde{R}_+(\xi^\alpha) = \tilde{R}_-(\xi^\alpha).$$

Поверхностный интеграл в (7.27) можно переписать, используя первое равенство (7.9), и в другой форме

$$\int_S \rho v^i n_i \tilde{R} \zeta \, d\sigma.$$

Функцию $\tilde{R}$ будем считать определенной во всей области V по правилу $\tilde{R} = \tilde{R}(\xi^\alpha(x^i))$. Тогда, учитывая, что $v^i n_i = 0$ на $\partial V - S$, $(\rho v^i)_{,i} = 0$, $v^i \tilde{R}_{,i} = 0$, $v^i \zeta_{,i} = 1$, поверхностному интегралу в (7.27) можно придать вид

$$\int_S \rho v^i n_i \tilde{R} \zeta \, d\sigma = \int_{\partial V} \rho v^i n_i \tilde{R} \zeta \, d\sigma = \int_V \rho \tilde{R} \, d^3x.$$

Заметим теперь, что варьирование ζ эквивалентно варьированию плотности ρ: хотя в ρ входит производная от ζ вдоль линии тока, но значения ζ на границе области интегрированиия не фиксированы, и эта производная (или плотность ρ) может быть выбрана за новую искомую функцию. Поскольку $p_i = \rho v_i$ не зависит от ζ, получаем

Вариационный принцип Гиза–Крайко. Установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости есть стационарная точка функционала

$$\int_V \left(\frac{p_i p^i}{2\rho} - \rho U(\rho, \xi^\alpha) - \rho \Phi(x^i) + \rho \tilde{R}(\xi^\alpha) \right) d^3x \qquad (7.28)$$

на множестве всех функций $\rho(x)$ и $\xi^\alpha(x)$, подчиненных на S ограничениям (7.23), а на $\partial V - S$ – ограничениям (7.10).

В (7.28) $p_i = \rho v_i$ выражены через ξ^α по формулам (7.9).

Варьирование по ρ сводится к алгебраической задаче о вычислении стационарного значения функции

$$\frac{p_i p^i}{2\rho} - \rho U(\rho, S) - \rho(\Phi - \tilde{R}).$$

Соответствующее значение ρ находится из уравнения

$$\frac{p_i p^i}{2\rho^2} + U + \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \Phi = \tilde{R}, \qquad (7.29)$$

которое имеет смысл интеграла Бернулли.

После исключения $p_i = \rho v_i$ и ρ при помощи соотношений (7.29) и (7.9), подынтегральное количество в (7.28) станет функцией только ξ^α и производных $\xi^\alpha_{,i}$ и, как легко видеть, равно $\rho v^2 + p$. Таким образом, получаем

Вариационный принцип Гиза. Установившиеся движения идеальной сжимаемой жидкости есть стационарные точки функционала

$$\int_V (\rho v^2 + p) d^3x \tag{7.30}$$

на множестве всех функций $\xi^\alpha(x^i)$, удовлетворяющих на S ограничениям (7.23) и на $\partial V - S$ – ограничениям (7.10).

Пример. Вычислим функционал (7.30) для совершенного газа: $U = A\rho^{\gamma-1}/(\gamma-1)$. Равенство (7.29) принимает вид

$$\frac{p^i p_i}{2\rho^2} + \frac{\gamma A}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} = \widetilde{R} - \Phi.$$

Найдем из него ρ как функцию модуля скорости

$$\rho = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(\widetilde{R} - \Phi - \frac{v^2}{2}\right)^{1/(\gamma-1)} \tag{7.31}$$

Из (7.9), (1.3.8) и (7.31) имеем

$$\rho^2 v^2 = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\right)^{2/(\gamma-1)} \left(\widetilde{R} - \Phi - \frac{v^2}{2}\right)^{2/(\gamma-1)} v^2 =$$

$$= \xi^1_{,i}\xi^{1,i}\xi^2_{,j}\xi^{2,j} - (\xi^1_{,i}\xi^{2,i})^2. \tag{7.32}$$

Уравнение (7.32) определяет v^2 как функцию от $\xi^\alpha_{,i}$.

Подынтегральное количество в (7.30) на основании (7.31) и равенства $p = A\rho^\gamma$ имеет вид

$$\Lambda = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(R^* - \Phi - \frac{v^2}{2}\right)^{1/(\gamma-1)} v^2 + A\left(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \times$$

$$\times \left(R^* - \Phi - \frac{v^2}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1},$$

где v^2 есть решение уравнения (7.32).

Плоские течения. Рассмотрим в декартовой системе координат x, y, z плоские течения – течения, у которых $\xi^1 = \psi(x, y)$, $\xi^2 = z$, $\zeta = \zeta(x, y)$. Формула (7.9) приобретает вид

$$\rho v_x = \psi_{,y}, \quad \rho v_y = -\psi_{,x}, \quad v^3 = 0.$$

Для плоских течений справедливы все сформулированные выше вариационные принципы. В частности, принцип Гиза–Крайко в случае изоэнергетического движения[1]) совершенного газа переходит в

Вариационный принцип Лина–Рубинова. Плоские установившиеся течения совершенного газа есть стационарные точки

[1]) Изоэнергетическим называют движение, в котором $\widetilde{R} \equiv \text{const}$.

функционала

$$\int_{V}\left[\frac{1}{2\rho}(\psi_{,x}^2+\psi_{,y}^2)-\frac{A\rho^{\gamma}}{\gamma-1}+\tilde{R}\rho\right]dx\,dy$$

на множестве функций $\psi(x, y)$, постоянных на[1]) $\partial V-S$ и принимающих заданные значения на S.

Аналогично получаются вариационные принципы для осесимметричных течений, при этом в цилиндрической системе координат r, φ, r: $\xi^1 = \psi(r, z)$, $\xi^2 = \varphi$, $\zeta = \zeta(r, z)$.

Вариационные принципы на множестве равнозавихренных течений. Во всех рассмотренных выше вариационных принципах была ясно видна связь с исходным вариационным принципом Гамильтона–Остроградского. Несколько особняком стоит найденное В.И. Арнольдом экстремальное свойство кинетической энергии несжимаемой жидкости, к изложению которого мы переходим.

Сопутствующие компоненты вихря скорости $\partial_{[a}v_{b]}$ в течениях баротропной жидкости, как следует из уравнений (5.21), (5.22), не меняются с течением времени:

$$v_{[a,\,b]} = \omega_{ab}(\xi^c). \tag{7.33}$$

Это утверждение иногда приводят в интегральной форме – интеграл от нормальной компоненты ротора скорости по любой материальной поверхности (или циркуляция скорости по любому замкнутому контуру) не меняется со временем.

Равенство (7.33) справедливо, как легко проверить, и для несжимаемой жидкости, причем верно и обратное: из (7.33) следует, что скорость удовлетворяет уравнениям импульсов несжимаемой жидкости.

Введем следующее определение: два течения $x(\xi, t)$ и $x'(\xi, t)$ назовем равнозавихренными, если у них во все моменты времени для каждой точки среды совпадают сопутствующие компоненты вихря:

$$v_{[a,\,b]} = v'_{[a,\,b]}. \tag{7.34}$$

Пусть имеется два равнозавихренных установившихся движения $x(\xi, t)$ и $x'(\xi, t)$. Рассмотрим для некоторого момента времени t, скажем, $t = 0$, отображение $V \to V$ по правилу

$$x(\xi, 0) \to x'(\xi, 0). \tag{7.35}$$

Очевидно, что для каждого контура Γ

$$\int_{\Gamma} v_i dx^i = \int_{\Gamma'} v'_i dx'^i, \tag{7.36}$$

где Γ' – образ Γ при отображении (7.35) (достаточно перейти в (7.36) к сопутствующим координатам).

Обратно, если имеются два поля скорости $v(x)$ и $v'(x')$ и отображение $V \to V$, при котором для любого контура Γ справедливо равенство (7.36), то соответствующие движения равнозавихренные. Действительно, пусть $x(\xi, t)$ и $x'(\xi, t)$ – законы движения с полями скоростей $v(x)$ и

[1]) Здесь V – область в плоскости x, y; S – часть ∂V.

$v'(x)$. Определим лагранжевы координаты так, чтобы при отображении $V \to V$ имело место соответствие (7.35). Тогда при $t = 0$ $v_{|a,b|} = v'_{|a,b|}$. В силу специальной структуры установившихся движений (7.1) это равенство будет иметь место во все моменты времени. На протяжении этого пункта будем считать, что частицы заполняют весь сосуд V и $v^i n_i = 0$ на ∂V.

Вариационный принцип Арнольда. Стационарные точки функционала кинетической энергии

$$\rho \int_V \frac{v^2}{2} d^3x \tag{7.37}$$

на множестве всех сохраняющих объем равнозавихренных потоков удовлетворяют уравнениям установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости.

К сравнению в вариационном принципе Арнольда допускаются поля скорости, равнозавихренные с полем скорости, на котором кинетическая энергия экстремальна; при этом подразумевается, что сохраняют объем как допустимые поля скорости ($v^i_{,i} = 0$), так и отображения $V \to V$, фигурирующие в определении равнозавихренности.

Выведем условия стационарности функционала (7.37). Согласно (7.34) $\delta v_a = \varphi_{,a}$; где φ — произвольная бесконечно малая функция. Так как

$$\delta v_a = \delta(x^i_a v_i) = x^i_a \delta v_i + v_i (\delta x^i)_{,a}, \quad \delta v_i = \partial v_i + \delta x^k v_{i,k}$$

имеем

$$\partial v_i = \delta x^k (v_{k,i} - v_{i,k}) + \bar{\varphi}_{,i}, \tag{7.38}$$

где $\bar{\varphi} = \varphi - v_k \delta x^k$. Функция $\bar{\varphi}$ определяется по функциям δx^k и v_k. Действительно, варьирование равенств $v^i_{,i} = 0$ в V и $v^i n_i = 0$ на ∂V приводит к задаче Неймана для определения функции $\bar{\varphi}$ по v^i и δx^k:

$$\partial v^i_{,i} = \Delta \bar{\varphi} + \partial^i [\delta x^k (v_{k,i} - v_{i,k})] = 0,$$

$$n^i \partial v_i = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} + n^i \delta x^k (v_{k,i} - v_{i,k}) = 0.$$

Вариация интеграла (7.37) в силу (7.38) записывается в виде

$$\int_V [\rho v^i (v_{k,i} - v_{i,k}) \delta x^k + \rho v^i \bar{\varphi}_{,i}] dv. \tag{7.39}$$

Последнее слагаемое в (7.39) равно нулю в силу равенств $v^i_{,i} = 0$ в V, $v^i n_i = 0$ на ∂V. Из равенства нулю интеграла (7.39) следует уравнение

$$\rho v^i (v_{k,i} - v_{i,k}) = -q_{,k}, \tag{7.40}$$

где q — множитель Лагранжа для ограничения $\nabla_i \delta x^i = 0$. Для приведения уравнения (7.40) к обычной форме надо положить $q = p + \rho v^2/2$.

Вариационный принцип Арнольда имеет структуру, отличную от всех рассмотренных выше вариационных принципов. Множество допустимых элементов v разбивается на слои (равнозавихренные потоки), и если v — допустимый элемент, принадлежащий слою Σ, то к сравнению допускаются только элементы из Σ. Такой вариационный принцип приближается к неголономным вариационным постановкам: для каждого элемента u вводится свое множество допустимых вариаций δu.

Вариационный принцип Арнольда был обобщен на сжимаемые жидкости М.А. Гринфельдом.

Вариационный принцип Арнольда–Гринфельда. Стационарная точка функционала полной энергии баротропной жидкости

$$\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + U(\rho) + \Phi(x)\right) d^3x$$

на множестве всех равнозавихренных и сохраняющих массу потоков удовлетворяет уравнениям установившегося течения сжимаемой жидкости.

Варьированию подвергаются скорость и плотность. Сохранение массы понимается в естественном смысле $(\rho v^i)_{,i} = 0$ и, кроме того, при отображениях $x \to x'$, сохраняющих вихрь,

$$\rho'(x') = \rho(x(x'))\det\left\|\frac{\partial x}{\partial x'}\right\|.$$

Может возникнуть подозрение, что экстремальность энергии на множестве равнозавихренных потоков как-то связана со свойством сохранения вихря в течениях несжимаемой и баротропной жидкостей. Однако, его опровергает следующий

Вариационный принцип. Стационарные точки функционала полной энергии однородного упругого тела

$$\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + U(w^i_{,j}) + \Phi(x)\right) d^3x \tag{7.41}$$

на множестве всех перемещений упругого тела, сохраняющих циркуляцию скорости по любому замкнутому контуру, удовлетворяют уравнениям установившегося движения упругого тела.

Более точно, если $v(x)$ и $w(x)$ – поля скорости и перемещений[1]), то к сравнению допускаются все такие поля $v'(x)$ и $w'(x)$, что при отображении $V \to V$, определяемом равенством $x' - x = w' - w$, имеет место равенство (7.36).

Наметим вывод уравнения движения из сформулированного принципа. Поскольку (см. (4.12), (4.24), (4.31)) $\partial\rho = -\rho s^i_j \partial_i \partial w^j$, $\delta x^k = s^k_j \partial w^j$, имеем

$$\delta \int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + U + \Phi\right) d^3x = \int_V \left[-\rho\left(\frac{v^2}{2} + U + \Phi\right) s^j_i \partial_j \partial w^i + \right.$$

$$\left. + \rho v_i (v_{k,i} - v_{i,k}) s^k_j \partial w^j + \rho \frac{\partial U}{\partial w^i_{,j}} \partial_j \partial w^i + \rho v_i \bar{\varphi}^{,i}\right] d^3x = 0. \tag{7.42}$$

Здесь использовано равенство (7.38). Последнее слагаемое в (7.42) равно нулю. Несложные преобразования, аналогичные преобразованиям

[1]) Поскольку движение установившееся, производные по пространственным координатам от перемещений в кажой точке пространства не зависят от времени, и под $w(x)$ можно понимать значение перемещений в некоторый фиксированный момент времени.

в соотношении (4.22), приводят к уравнениям

$$\rho v^j v_{i,j} - p^j_{i,j} + \rho \Phi_{,i} = 0, \quad p^j_i = \rho\,(\delta^k_i - w^k_i)\,\frac{\partial U}{\partial w^k_i}$$

и к равенству нулю касательных составляющих поверхностной силы на ∂V.

Сравнение вариационного принципа для функционала (7.21) и функционала (7.42) делает ясным природу свойства экстремальности полной энергии на множестве равнозавихренных потоков: справедливо соотношение

$$\int_V \rho\, \partial_1 \frac{v^2}{2}\, d^3x = -\int_V \rho\, \partial_2 \frac{v^2}{2}\, d^3x, \tag{7.43}$$

где ∂_1 – вариация скорости в соответствии с определением v^i по формуле (7.9), а ∂_2 – вариация скорости при условии сохранения вихря.

Докажем сначала, что

$$\partial_1 v^i = v^j\, \partial_j\, \delta x^i - \delta x^j \partial_j v^i. \tag{7.44}$$

Действительно, из равенства $\partial \xi^a = -\xi^a_i\, \delta x^i$, соотношения (7.9) и следующей из него формулы $\rho v^i e_{imn} = \xi^1_m \xi^2_n - \xi^2_m \xi^1_n$ имеем

$$\partial_1 (\rho v^i) = e^{ijk} (\partial \xi^1)_{,j} \xi^2_k + e^{ijk} \xi^1_j (\partial \xi^2)_{,k} = -e^{ijk} \xi^1_{m,j} \xi^2_k \delta x^m -$$

$$- e^{ijk} \xi^1_j \xi^2_{m,k} \delta x^m - e^{ijk} (\xi^1_m \xi^2_k - \xi^2_m \xi^1_k)\, (\delta x^m)_{,j} =$$

$$= -(\rho v^i)_{,m}\, \delta x^m - \rho v^i (\delta x^m)_{,m} + \rho v^j\, (\delta x^i)_{,j} =$$

$$= -v^i (\rho\, \delta x^k)_{,k} + \rho\, \partial_1 v^i. \tag{7.45}$$

Из последнего равенства (7.45) следует (7.44). Для проверки (7.43) остается подставить выражения для $\partial_1 v^i$ (7.44) и $\partial_2 v^i$ (7.38).

Потенциальные течения. Перейдем к рассмотрению экстремальных свойств установившихся потенциальных течений сжимаемой жидкости. В этом случае замкнутая система уравнений состоит из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} = 0 \quad \text{в} \quad V, \tag{7.46}$$

условия потенциальности

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \tag{7.47}$$

интеграла Коши–Лагранжа

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{d\rho\, U(\rho)}{d\rho} + \Phi(x^i) = k = \text{const} \tag{7.48}$$

и краевого условия

$$\rho v^i n_i = h \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{7.49}$$

Для совместности системы уравнений необходимо, чтобы краевые данные удовлетворяли ограничению

$$\int_{\partial V} h\, d\sigma = 0. \tag{7.50}$$

Итеграл Коши–Лагранжа можно рассматривать как условие максимальности по ρ функции

$$\rho^*\rho - \rho U(\rho), \quad \rho^* = k - \tfrac{1}{2} v^2 - \Phi(x^i), \quad v_i = \partial\varphi/\partial x^i.$$

Соответствующее максимальное значение имеет смысл давления. Как и раньше, будем обозначать его через $\mathcal{P}(\rho^*)$.

Легко проверяется

Принцип Бейтмена–Дирихле. На множестве всех функций $\varphi(x)$ стационарные точки функционала

$$J = \int_V \mathcal{P}(\rho^*) d^3x + \int_{\partial V} \varphi h\, d\sigma \tag{7.51}$$

удовлетворяют уравнениям (7.46) и (7.49).

Интеграл Коши–Лагранжа имеет место автоматически в силу определения $\mathcal{P}(\rho^*)$.

Функция $\mathcal{P}(\rho^*)$ является выпуклой функцией ρ^* как преобразование Юнга–Фенхеля выпуклой функции $\rho\bar{U}(\rho)$. Этого нельзя сказать о зависимости $\mathcal{P}$ от $\varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i$. Действительно, вычислим вторые производные $\mathcal{P}$ по φ_i:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\varphi_i} = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho^*}\frac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_i} = -\rho\varphi_i,$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} = -\rho\delta_{ij} - \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\varphi_j} = -\rho\left(\delta_{ij} - \frac{1}{c^2}\varphi_i\varphi_j\right).$$

Здесь через c обозначена скорость звука: $c^2 = dp/d\rho$. Таким образом, матрица $\left\| \dfrac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \right\|$ отрицательно определена для дозвуковых течений ($v^2 \leqslant c^2$) и положительно определена для сверхзвуковых течений ($v^2 \geqslant c^2$). Ограничимся рассмотрением дозвуковых течений. Их можно выделить, заменив в (7.51) $\mathcal{P}(\rho^*)$ на $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho^*)$:

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\rho^*) = \begin{cases} \mathcal{P}(\rho^*), & v^2 \leqslant c^2, \\ -\infty, & v^2 > c^2. \end{cases}$$

Условие $v^2 > c^2$ нетрудно выразить в терминах ρ^*. Функция $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho^*)$, очевидно есть строго вогнутая функция переменных φ_i. Поэтому после замены в (7.51) $\mathcal{P}(\rho^*)$ на $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho^*)$ можно утверждать, что соответствующий функционал имеет единственную стационарную точку, и она есть точка максимума.

Условие разрешимости краевой задачи (7.50), очевидно, совпадает с необходимым условием ограниченности функционала сверху. Оно получается при рассмотрении сдвигов по φ на постоянную (см. § 1 гл. II).

Построим двойственный вариационный принцип. Обозначим через $\mathcal{P}^*(p^i)$ преобразование Юнга выпуклой по φ_i функции $-\widetilde{\mathcal{P}}$

$$\mathcal{P}^*(p^i) = \sup_{\varphi_i} \left(p^i\varphi_i + \widetilde{\mathcal{P}}(\varphi_i)\right).$$

Двойственные переменные имеют смысл импульсов. Если течение, соответствующее заданному импульсу p^i, дозвуковое, то значение $\mathscr{P}^*$ совпадает с величиной $p + \rho v^2/2$, выраженной через импульс p^i.

Для двойственного принципа имеем

$$\sup_{\varphi} \left[\int_V \widetilde{\mathscr{P}}(\rho^*) d^3x + \int_{\partial V} \varphi h \, d\sigma\right] = -\inf_{\varphi} \left[-\int_V \widetilde{\mathscr{P}}(\rho^*) d^3x - \right.$$

$$\left. - \int_{\partial V} \varphi h \, d\sigma\right] = -\inf_{\varphi} \sup_{p^i} \left[\int_V (p^i \varphi_i - \mathscr{P}^*(p^i)) d^3x - \right.$$

$$\left. - \int_{\partial V} \varphi h \, d\sigma\right] = -\sup_{p^i} \inf_{\varphi} \left[\int_V (p^i \varphi_i - \mathscr{P}^*(p^i)) d^3x - \int_{\partial V} \varphi h \, d\sigma\right] =$$

$$= -\sup_{p^i} \left[-\int_V \mathscr{P}^*(p^i) d^3x\right] = \inf_{p^i} \int_V \mathscr{P}^*(p^i) \, d^3x. \tag{7.52}$$

Нижняя грань в (7.52) вычисляется по всем p^i, удовлетворяющим ограничениям

$$\frac{\partial p^i}{\partial x^i} = 0 \quad \text{в} \quad V, \quad p^i n_i = h \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{7.53}$$

Итак, мы получили

Принцип Бейтмена–Кельвина. На множестве векторных полей p^i, удовлетворяющих ограничениям (7.53), минимизирующий элемент функционала

$$\int_V \mathscr{P}^*(p^i) d^3x$$

отвечает дозвуковому течению сжимаемого газа.

Регуляризация функционалов в неограниченных областях. Течения в неограниченных областях, как правило, имеют расходящийся функционал энергии. Для придания смысла вариационным принципам требуется видоизменить (регуляризовать) функционал энергии, не нарушив при этом уравнений Эйлера. Опишем на плоских задачах метод регуляризации, предложенный Шифманом [390].

Пусть потенциал течения φ – функция двух переменных x и y, определенная по внешности некоторой ограниченной области B, $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$, $\varphi_y = \partial\varphi/\partial y$, $F(\varphi_x, \varphi_y)$ – строго выпуклая функция φ_x и φ_y, удовлетворяющая для всех φ_x и φ_y условию

$$k\alpha_i\alpha^i \leqslant \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} \alpha_i\alpha_j \leqslant K\alpha_i\alpha^i, \tag{7.54}$$

где k и K – постоянные, и для краткости использованы обозначения $\varphi_1 = \varphi_x$, $\varphi_2 = \varphi_y$. Нетрудно проверить, что функция $-\mathscr{P}(\rho^*)$ в случае дозвукового потока удовлетворяет этому условию.

Наложим на множество допустимых функций φ ограничения: на бесконечности $\varphi_i \to \varphi_i^\infty$ и интеграл

$$\Phi = \int_{R_2 - B} (\varphi_i - \varphi_i^\infty)(\varphi^i - \varphi^{\infty i}) dx\, dy \leqslant +\infty \tag{7.55}$$

сходится. Условие (7.55) исключает циркуляцию.

Задача о минимуме функционала в конечной области

$$\int F(\varphi_x, \varphi_y)\, dx\, dy$$

заменяется задачей

$$I = \int\limits_{R_2 - B} [F(\varphi_x, \varphi_y) - F(\varphi_x^{\infty}, \varphi_y^{\infty}) - F_{\varphi_x}(\varphi_x^{\infty}, \varphi_y^{\infty})(\varphi_x - \varphi_x^{\infty}) -$$

$$- F_{\varphi_y}(\varphi_x^{\infty}, \varphi_y^{\infty})(\varphi_y - \varphi_y^{\infty})]\, dx\, dy \to \inf.$$

Эта задача приводит к тем же уравнениям Эйлера.

В то же время функционал I ограничен сверху и снизу, так как по теореме о среднем

$$I = \int\limits_0^1 F_{\varphi_i \varphi_j}\Big|_{\varphi_i^{\infty} + \tau(\varphi_i - \varphi_i^{\infty})} (\varphi_i - \varphi_i^{\infty})(\varphi_j - \varphi_j^{\infty})(1 - \tau)\, d\tau\, dx\, dy. \quad (7.56)$$

Из формулы (7.56) и свойства функции F (7.54) следует

$$\tfrac{1}{2} k\Phi \leqslant I \leqslant \tfrac{1}{2} K\Phi.$$

Таким образом, задача о минимуме функционала I корректна.

§ 8. СТОКСОВО ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Условия голономности вариационного уравнения. Покажем, что вариационное уравнение для вязкой нетеплопроводной жидкости является неголономным. Вариационное уравнение, записанное для всего объема жидкости, имеет вид[1])

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V \rho(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U)\, dv\, dt + \delta B = 0,$$

$$\delta B = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V (F_i \delta x^i + \rho T \delta S - \tau^{ij} \nabla_j \delta x_i)\, dv\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\partial V} P_i \delta x^i d\sigma\, dt.$$

Тензор вязких напряжений выражается через диссипативный потенциал D по формуле

$$\tau^{ij} = x_a^i \tau^{ab} x_b^j, \quad \tau^{ab} = \frac{\partial D(e_{ab})}{\partial e_{ab}}. \quad (8.1)$$

Предположим для простоты, что внешние массовые силы потенциальны, движение адиабатическое или изотермическое, а на границе заданы положения частиц ($\delta x^i = 0$ на ∂V). Тогда после выделения голономной части функционала δB остаток δB_1 примет вид

$$\delta B_1 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V \tau^{ij} \nabla_j \delta x_i\, dv\, dt.$$

Функционал δB_1 можно записать в других эквивалентных формах

$$\delta B_1 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V \tau_i^a \frac{\partial \delta x^i}{\partial \xi^a}\, dv\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V G_i \delta x^i\, dv\, dt.$$

[1]) В этом параграфе F_i – плотность объемных сил, рассчитанная на единицу объема.

Здесь

$$\tau_i^a = x_{ib}\frac{\partial D}{\partial e_{ab}}, \quad G_i = \frac{\rho}{\rho_0}\overset{\circ}{\nabla}_a\frac{\rho_0}{\rho}\tau_i^a.$$

Будем рассматривать функционал δB_1 как функционал, определенный на законе движения. Диссипативный потенциал зависит от закона движения через компоненты тензора скоростей деформаций e_{ab} и дисторсии x_a^i.

Старшие производные закона движения входят в G_i линейно; выпишем те члены, которые содержат производную по времени и вторые производные по координатам:

$$G_i = x_{id}\frac{\partial D}{\partial e_{ad}\partial e_{cd}}x_{jc}\dot{x}^j_{abt} + \ldots, \dot{x}^j_{abt} = \frac{\partial^3 x^j}{\partial\xi^a\partial\xi^b\partial t}. \tag{8.2}$$

Положим в условиях голономности (1.4.16) $k = 3$ и рассмотрим равенство (1.4.16), соответствующее производной G_i по $\dot{x}^j_{abt}$:

$$\frac{\partial G_i}{\partial\dot{x}^j_{abt}} = -\frac{\partial G_j}{\partial\dot{x}^i_{abt}}. \tag{8.3}$$

Из (8.2) следует, что

$$\frac{\partial G_i}{\partial\dot{x}^j_{abt}} = x_{id}\frac{\partial^2 D}{\partial e_{ad}\partial e_{cb}}x_{jc}, \quad \frac{\partial G_j}{\partial\dot{x}^i_{abt}} = x_{jd}\frac{\partial^2 D}{\partial e_{ad}\partial e_{cb}}x_{ic}.$$

Выбранное для проверки условие (8.3) не выполняется, например, для изотропной жидкости, что и требовалось показать.

Вариационное уравнение для вязкой жидкости становится голономным, если пренебречь диссипативным членом или инерционным членом. В первом случае приходим к модели идеальной жидкости. Второй случай стоксова течения вязкой жидкости будет рассмотрен в этом параграфе.

Вариационные принципы. Будем считать течение жидкости несжимаемым

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0, \tag{8.4}$$

а жидкость однородной и изотропной. Кроме того, положим $\delta S = 0$. Тогда вариация внутренней энергии среды и приток тепла равны нулю, и после отбрасывания кинетической энергии вариационное уравнение примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_V \tau^{ij}\nabla_j\delta x_i\,dv + \int_V F_i\delta x^i dv + \int_{\partial V} P_i\delta x^i d\sigma\Big]dt = 0. \tag{8.5}$$

В силу несжимаемости

$$\nabla_i\delta x^i = 0.$$

Функционал в левой части (8.5) не содержит производных δx^i по времени и, следовательно, не чувствует ограничений $\delta x^i = 0$ при $t = t_0$, $t = t_1$. Поэтому δx^i можно считать произвольными функциями, и в каждый момент времени выражение в квадратных скобках равно нулю. Кроме того, вместо δx^i можно подставить другие произвольные функции ∂v^i,

которые удовлетворяют тем же кинематическим ограничениям, что и δx^i. Получим[1])

$$\delta \int_V D(e_{ij})\, d^3x - \int_V F_i\, \delta v^i\, d^3x - \int_{\partial V} P_i\, \delta v^i\, d\sigma = 0. \tag{8.6}$$

Поскольку F_i и P_i — функции только координат, вариационное уравнение (8.6) голономно:

$$\delta \left[\int_V D(e_{ij})\, d^3x - \int_V F_i v^i\, d^3x - \int_{\partial V} P_i v^i\, d\sigma \right] = 0. \tag{8.7}$$

Обратим внимание, что мощность внешних сил голономна вне зависимости от потенциальности внешних массовых сил $F_i(x^k)$. Это связано с тем, что варьнрованию подвергается не закон движения частиц, а скорость.

Пусть граница области V состоит из двух поверхностей S и Σ, на S заданы поверхностные силы P_i, на Σ — скорости

$$v^i = \tilde{v}^i. \tag{8.8}$$

Будем считать, что диссипативный потенциал D — строго выпуклая функция компонент девиатора тензора скоростей деформаций $e'_{ij} = e_{ij} - {}^1/_3\, g_{ij}\, e^k_k$ (или, что то же, строго выпуклая функция в пространстве скоростей деформаций на гиперповерхности $e^i_i = 0$). Тогда из (8.7) следует

Вариационный принцип. На множестве всех полей скорости, удовлетворяющих условиям (8.4), (8.8), истинное движение жидкости доставляет минимум функционалу

$$\begin{aligned} I(v) &= \int_V D(e'_{ij})\, d^3x - L(v), \\ L(v) &= \int_V F_i v^i\, d^3x + \int_{\partial V} P_i v^i\, d\sigma. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Если на скорость не выставляются ограничения (8.8) на границе и $S = \partial V$, то у функционала (8.9) возникает ядро: множество всех полей скорости, соответствующих движению жидкости как твердого целого. На таких полях $D = 0$. Необходимое условие ограниченности функционала $I(v)$ снизу, очевидно, заключается в равенстве нулю суммарной силы и суммарного момента сил, действующих на жидкость,

$$\begin{aligned} &\int_V F_i\, d^3x + \int_{\partial V} P_i\, d\sigma = 0, \\ &\int_V e^{ijk} F_j\, x_k\, d^3x + \int_{\partial V} e^{ijk} P_j\, x_k\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Так же, как и для упругого тела, доказывается, что условия (8.10) или (8.8) достаточны для ограниченности функционала $I(v)$ снизу. Отсюда при дополнительных условнях, указанных в § 1 гл. II, следует теорема существования. Теорема единственности вытекает из строгой выпуклости диссипативного потенциала и выпуклости множества допустимых функций.

---

[1]) Дальше элемент объема обозначен через d^3x, так как под V понимается фиксированная область изменения эйлеровых координат.

Построим двойственный вариационный принцип. Обозначая через τ^{ij} двойственные переменные (компоненты тензора вязких напряжений), через $D^*(\tau^{ij})$ – преобразование Юнга–Фенхеля функции $D(e'_{ij})$ в пространстве девиаторов тензора скоростей деформаций

$$D^*(\tau^{ij}) = \sup_{e'_{ij}} (\tau^{ij} e'_{ij} - D(e'_{ij})),$$

можно написать

$$D(e'_{ij}) = \sup (\tau^{ij} e'_{ij} - D^*(\tau^{ij})).$$

Верхняя грань вычисляется по всем τ^{ij} из пространства девиаторов

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}, \quad \tau^i_i = 0. \tag{8.11}$$

Перепишем вариационный принцип как утверждение о минимаксе

$$\underline{I} = \inf_{\substack{v_i \in (8.8) \\ (8.4)}} \sup_{\tau^{ij} \in (8.11)} \left(\int_V \tau^{ij} e'_{ij} - D^*(\tau^{ij}) \right) d^3x - L(v)).$$

Избавимся от ограничения (8.4), введя множитель Лагранжа – давление $p(x)$:

$$\underline{I} = \inf_{v_i \in (8.8)} \sup_{p,\, \tau^{ij} \in (8.11)} (\Phi(v, p, \tau) - \int_V D^*(\tau^{ij}) d^3x).$$

Здесь

$$\Phi(v, p, \tau) = \int_V (-p g^{ij} + \tau^{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x^j} d^3x - L(v).$$

По общей схеме, изложенной в § 3 гл. II, проверяется, что порядок вычисления нижней и верхней граней можно изменить. При этом если

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + F^i = 0 \quad \text{в} \quad V, \quad (-p g^{ij} + \tau^{ij}) n_j = P^i \quad \text{на} \quad S, \tag{8.12}$$

то

$$\inf_{v_i \in (8.8)} \Phi(v, p, \tau) = \int_\Sigma (-p\delta^j_i + \tau^j_i) n_j \tilde{v}^i d\sigma \equiv l^*(p, \tau).$$

Если p^{ij} не удовлетворяет ограничениям (8.12), то

$$\inf_{v_i \in (8.8)} \Phi(v, p, \tau) = -\infty.$$

После вычисления нижней грани по v_i надо находить верхнюю грань по p, τ^{ij}. Поэтому все поля p, τ^{ij}, не удовлетворяющие ограничениям (8.12), следует отбросить. Таким образом, получим

Двойственный вариационный принцип. Истинное поле напряжений доставляет максимум функционалу

$$J(p, \tau) = l^*(p, \tau) - \int_V D^*(\tau^{ij}) dv$$

по всем полям p и τ^{ij}, удовлетворяющим ограничениям (8.12). При этом

$$\sup J(p, \tau) = \inf J(v).$$

Движение твердого тела в стоксовом потоке вязкой жидкости. Рассмотрим в некотором сосуде V линейно вязкую изотропную жидкость с диссипативным потенциалом $D = \mu e'_{ij} e'^{ij}$. В сосуде находится твердое тело. В некоторый момент времени тело занимает область A и имеет поступательную скорость u^i (рис. 43):

$$v^i = u^i \quad \text{на} \quad \partial A. \tag{8.13}$$

На стенках сосуда выставлено условие прилипания

$$v^i = 0 \quad \text{на} \quad \partial V. \tag{8.14}$$

Если $V = R_3$, то условие прилипания заменяется условием покоя жидкости на бесконечности.

Истинное движение жидкости минимизирует функционал

$$I(v) = \int\limits_{V-A} \mu e'_{ij} e'^{ij} dv.$$

Минимизирующий элемент $\check{v}^i$ удовлетворяет уравнениям (8.4), (8.13), (8.14) и уравнению

$$\check{p}^{ij}_{,j} = 0, \quad \check{p}^{ij} = -\check{p} g^{ij} + 2\mu \check{v}^{(i,j)}. \tag{8.15}$$

Очевидно, что $\check{v}^i$ линейно зависит от u^i. Поэтому минимальное значение $\underline{I}$ функционала $I(v)$ есть квадратичная форма по u_i:

$$\underline{I} = \tfrac{1}{2} D^{ij} u_i u_j.$$

Выясним смысл этой квадратичной формы. Для $\underline{I}$ можно написать:

$$\underline{I} = \int\limits_{V-A} \mu \check{v}_{(i,j)} \check{v}^{(i,j)} dv = \tfrac{1}{2} \int\limits_{V-A} \check{p}^{ij} \check{v}_{i,j} dv =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int\limits_{\partial A} \check{p}^{ij} n_j \check{v}_i d\sigma = \tfrac{1}{2} f^i u_i, \quad f^i = \int\limits_{\partial A} \check{p}^{ij} n_j d\sigma.$$

Здесь использованы уравнения (8.15) и краевые условия (8.13), (8.14). Величины f^i есть компоненты силы, с которой тело действует на жидкость. Так как сила f^i линейна по u_i, то

$$f^i = \frac{\partial \underline{I}}{\partial u_i} = D^{ij} u_j.$$

Следовательно, $\underline{I}$ есть диссипативный потенциал для f^i.

Сила, действующая на тело со стороны жидкости, отличается знаком от f^i. Оценки минимального значения функционала приводят к оценкам для силы. Приведем некоторые элементарные следствия вариационного определения силы.

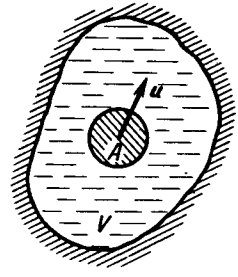


Рис. 43.

1. При установившемся обтекании тела вязкой жидкостью сила, рассчитанная в стоксовом приближении, не превосходит силы, рассчитанной на основании уравнений Навье–Стокса.

Действительно, значение диссипации (функционала $2I(v)$) на любом поле скоростей, в том числе на поле скоростей, найденном из уравнений Навье–Стокса, больше, чем на поле скоростей, минимизирующем функционал $I(v)$ и соответствующем

теории Стокса. Остается заметить, что в установившемся движении величина $f^i u_i$ в рамках теории Навье–Стокса совпадает с диссипацией.

2. Диссипация и, следовательно, сила растут с увеличением размеров тела.

В самом деле, пусть к телу A добавлено тело A'. Обозначим через $v^i_{A+A'}$ поле скоростей, соответствующее движению тела $A + A'$. Построим поле скорости

$$\tilde{v}^i = \begin{cases} v^i_{A+A'}, & x \in V - (A + A'), \\ u^i, & x \in A'. \end{cases}$$

Поле скорости $\tilde{v}^i$ определено вне тела A, удовлетворяет условиям на ∂A и ∂V и, следовательно, является допустимым в задаче о минимуме функционала $I_A(v)$, соответствующего телу A. Имеем

$$\underline{I}_A \leqslant I_A(\tilde{v}) = \underline{I}_{A+A'}.$$

Здесь $\underline{I}_{A+A'}$ — минимальное значение функционала $I(v)$ в задаче об обтекании тела $A + A'$. Так же доказывается утверждение

3. Сила, действующая на тело в стоксовом течении, увеличивается, если в жидкость дополнительно поместить покоящееся тело.

Если твердое тело движется произвольно, то

$$v_i = u_i + e_{ijk}\omega^j (x^k - \overset{*}{x}{}^k) \quad \text{на} \quad \partial A,$$

где $\overset{*}{x}{}^k$ — координаты точки тела, имеющей скорость u_i, ω^j — угловая скорость. Аналогично проверяется, что $\underline{I}$ есть квадратичная форма по u_i и ω_i, и

$$f_i = \partial \underline{I}/\partial u^i, \quad m_i = \partial \underline{I}/\partial \omega^i, \tag{8.16}$$

где m_i — момент сил, с которым тело действует на жидкость. Для момента сил имеют место те же свойства, которые были указаны для суммарной силы.

§ 9. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнения Томсона–Тэта. Рассмотрим вопрос о построении уравнений движения деформируемого тела в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Будем считать, что тело занимает в пространстве в момент времени t область $A(t)$, через A обозначим область изменения лагранжевых координат тела ξ^a. Движение и деформация тела по условию описываются конечным числом параметров $q^\kappa(t)$ $(\kappa = 1, \ldots, n)$:

$$x^i(\xi^a, t) = \chi^i(\xi^a, q^\kappa) \quad \text{при} \quad \xi^a \in \partial A; \quad q^\kappa = q^\kappa(t).$$

Скорость точек границы линейно зависит от $\dot{q}^\kappa$:

$$\dot{x}^i(\xi^a, t) = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^\kappa}\dot{q}^\kappa \quad \text{при} \quad \xi^a \in \partial A. \tag{9.1}$$

В число параметров q^κ входят характеристики движения тела как твердого $r^i(t)$ и $\alpha^i_a(t)$.

Предположим, что жидкость занимает некоторый движущийся и деформирующийся сосуд $\tilde{V}(t)$ и в процессе движения не отрывается ни от его стенок, ни от тела. Деформацию и движение сосуда также зададим конечным числом параметров $b^{\kappa}(t)$, причем скорость стенок сосуда линейно зависит от b^{κ} Совокупности параметров q^{κ} и b^{κ} будем обозначать через q и b.

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского движение тела и ограничивающей его жидкости находится из условия стационарности функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\int_{\tilde{V}(t)-A(t)} \Big(\frac{1}{2}\rho v^i v_i - \rho\Phi(x)\Big)\,dv + \mathcal{K}_{\text{т}} - \mathcal{U}_{\text{т}}\Big)\,dt \tag{9.2}$$

при условии, что заданы начальное и конечное положения тела

$$q(t_0) = \overset{0}{q},\quad q(t_1) = \overset{1}{q}. \tag{9.3}$$

В (9.2) Ф – потенциал внешних массовых сил, $\mathcal{K}_{\text{т}}$ и $\mathcal{U}_{\text{т}}$ – кинетическая и внутренняя энергия тела, причем $\mathcal{K}_{\text{т}} = \mathcal{K}_{\text{т}}(q, \dot{q})$, $\mathcal{U}_{\text{т}} = \mathcal{U}_{\text{т}}(q)$.

Задание начального положения частиц жидкости, по существу, фиксирует выбор лагранжевых координат. Примем, что конечное положение частиц жидкости подобрано так, что в сосуде реализуется потенциальное течение. Возможность такого выбора гарантируется разрешимостью возникающих при этом задач.

При потенциальном течении поле скорости жидкости в каждый момент времени определяется геометрией областей $V(t)$ и $A(t)$; т.е. значениями параметров q и b и скоростями жидкости на $\partial V(t)$ и $\partial A(t)$; т.е. $\dot{q}$ и $\dot{b}$, причем зависимость скорости от $\dot{q}$ и $\dot{b}$ линейна. Кинетическая энергия жидкости $\mathcal{K}_{\text{ж}}$ находится из решения вариационной задачи

$$\mathcal{K}_{\text{ж}} = \inf_{v} \frac{1}{2} \int_{V(t)-A(t)} \rho v^i v_i dv, \tag{9.4}$$

где минимум ищется по всем полям скорости, подчиненным ограничениям

$$\nabla_i v^i = 0,\quad v^i n_i\big|_{\partial A(t)} = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^{\kappa}} \dot{q}^{\kappa} n_i,\quad v^i n_i\big|_{\partial V(t)} = c_{\kappa}\dot{b}^{\kappa}, \tag{9.5}$$

$c_{\kappa} b^{\kappa}$ – нормальная составляющая скорости жидкости на $\partial V(t)$.

Кинетическая энергия жидкости есть функция от q, $\dot{q}$, b, $\dot{b}$.

Предположим, что задача (9.4) решена и функция $\mathcal{K}_{\text{ж}}(q, \dot{q}, b, \dot{b})$ найдена. Тогда функционал (9.2) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(q, \dot{q}, b, \dot{b})\,dt, \tag{9.6}$$

где $\Lambda = \mathcal{K}_{\text{ж}} + \mathcal{K}_{\text{т}} - \mathcal{U}_{\text{т}} - \bar{\Phi}(q, b)$, $\bar{\Phi}(q, b) = \int_{V(t)-A(t)} \rho\Phi(x)\,d^3x$. Из принципа Гамильтона – Остроградского следуют уравнения движения

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{\kappa}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^{\kappa}} = 0. \tag{9.7}$$

В случае движения абсолютно твердого тела они были установлены Томсоном и Тэтом [404].

Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим движение абсолютно твердого тела в безграничной покоящейся на бесконечности жидкости. Положение тела определяется радиус-вектором $r^i(t)$ и ортогональной матрицей $\alpha_a^i(t)$. Ограничения (9.5) принимают вид

$$v^i_{,i} = 0 \text{ в } R_3 - A(t), \quad v^i n_i = (\dot{r}^i + e^{ijk}\omega_j(x_k - r_k))n_i \text{ на } \partial A(t), \tag{9.8}$$

где $\omega_k = \frac{1}{2} e_{klm}\alpha_a^l \dot{\alpha}^{ma}$. Из конечности кинетической энергии жидкости следует, что $v \to 0$ при $x \to \infty$, поэтому условие покоя жидкости на бесконечности автоматически входит в вариационную постановку задачи и его можно не выписывать явно.

Перейдем к декартовым координатам ξ^a, сопутствующим твердому телу, при помощи ортогонального преобразования α_a^i. Ограничения (9.8) преобретут форму

$$v^a_{,a} = 0 \text{ в } R_3 - A, \quad v^a n_a = (u^a + e^{abc}\omega_b \xi_c)n_a, \tag{9.9}$$

где $u^a = \alpha_i^a \dot{r}^i$, $\omega_b = \frac{1}{2} e_{bac}\alpha_i^c \dot{\alpha}^a$, A – область изменения лагранжевых координат точек тела. Кинетическая энергия жидкости есть квадратичная форма по u^a и ω^a:

$$\mathcal{K}_{\text{ж}} = \frac{1}{2}(L^{ab}u_a u_b + 2R^{ab}u_a\omega_b + J^{ab}\omega_a\omega_b). \tag{9.10}$$

Коэффициенты L^{ab}, R^{ab} и J^{ab} зависят только от геометрии области A. Кинетическая энергия твердого тела также имеет вид (9.10). Коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\text{ж}} + \mathcal{K}_{\text{т}}$ обозначим через $\overline{L}^{ab}$, $\overline{R}^{ab}$ и $\overline{J}^{ab}$ Явная зависимость $\mathcal{K}$ от характеристик движения выглядит следующим образом:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\overline{L}^{ab}\alpha_a^i\alpha_b^j\dot{r}_i\dot{r}_j + \overline{R}^{ab}\alpha_a^i\alpha_b^j\dot{r}_i e_{jkl}\alpha_c^k\dot{\alpha}^{lc} +$$

$$+\frac{1}{4}\overline{J}^{ab}\alpha_a^i\alpha_b^j e_{imn}\alpha_c^m\dot{\alpha}^{nc}e_{jm'n'}\alpha_{c'}^{m'}\dot{\alpha}^{n'c'}).$$

Уравнения Эйлера функционала действия, как легко проверить, переходят в уравнения движения свободного абсолютно твердого тела с эффективными характеристиками $\overline{L}^{ab}$, $\overline{R}^{ab}$, $\overline{J}^{ab}$

Пример 2. В предыдущем примере кинетическая энергия не зависела от точек пространства. Это было связано с инвариантностью кинетической энергии относительно трансляций, что порождено в свою очередь отсутствием у жидкости внешних границ. Рассмотрим задачу, в которой у жидкости имеется внешняя граница.

Пусть жидкость занимает полупространство $x \geqslant 0$ и в ней в направлении оси x движется сфера радиуса a. Система имеет одну степень свободы – расстояние q от центра сферы до плоскости $x = 0$. Потенциал течения жидкости φ определяется из краевой задачи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{q}n_x \text{ на сфере.}$$

В качестве условия на бесконечности можно принять условие конечности кинетической энергии жидкости.

В отсутствие стенки φ – потенциал диполя:

$$\varphi = \frac{1}{2} a^3 \dot{q} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|r - r_0|}.$$

Здесь r – радиус-вектор точки пространства, r_0 – радиус-вектор центра сферы. При больших q/a гармоническая функция

$$\varphi = \frac{1}{2} a^3 \dot{q} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|r - r_0|} - \frac{1}{|r + r_0|} \right) \tag{9.11}$$

приближенно удовлетворяет краевым условиям. Можно показать, что (9.11) есть главный член разложения решения в ряд по a/q. Мы ограничимся этим членом. Кинетическая энергия дается формулой

$$\mathcal{K}_{\text{ж}} = \frac{\pi \rho a^3}{3} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a^3}{q^3} \right) \dot{q}^2. \tag{9.12}$$

Из формулы (9.12) следует, в частности, что для сферы в безграничном потоке жидкости $L^{ab} = 2/3\, \rho \pi a^3 \delta^{ab}$.

Согласно (9.7) уравнение движения сферы массы m имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[m + \frac{2\pi a^3}{3} \rho \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a^3}{q^3} \right) \right] \dot{q} + \frac{3\pi \rho a^6}{8 q^4} \dot{q}^2 = 0.$$

Пример 3. Тело A может состоять из нескольких связных компонент, и тогда формула (9.7) описывает взаимодействие тел в жидкости.

Рассмотрим, например, две сферы, двигающиеся в безграничной покоящейся на бесконечности жидкости. Система имеет шесть степеней свободы $r_1^i(t)$ и $r_2^i(t)$ – координат центров сфер. Для вычисления кинетической энергии жидкости $\mathcal{K}_{\text{ж}}$ надо решить краевую задачу

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{в} \quad R_3 - A_1 - A_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{r}_1^i n_i \quad \text{на} \quad \partial A_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{r}_2^i n_i \quad \text{на} \quad \partial A_2 \tag{9.13}$$

при условии, что кинетическая энергия жидкости конечна. Уравнения (9.13) инвариантны относительно трансляций, поэтому в квадратичной форме

$$\mathcal{K}_{\text{ж}} = \frac{\rho}{2} (L_{ij} \dot{r}_1^i \dot{r}_1^j + 2 N_{ij} \dot{r}_1^i \dot{r}_2^j + L_{ij} \dot{r}_2^i \dot{r}_2^j) \tag{9.14}$$

коэффициенты L_{ij}, N_{ij} и L_{ij} зависят только от $r_1^i - r_2^i$.

Точное решение задачи (9.13) получено в виде рядов, однако соответствующие выражения для коэффициентов в (9.14) настолько громоздки, что непригодны для анализа движения сфер.

Мы приведем простейшие результаты для случая, когда $\frac{a_1}{R} \ll 1$, $\frac{a_2}{R} \ll 1$, a_1, a_2 – радиусы сфер, R – расстояние между их центрами. В первом приближении сферы не взаимодействуют, и

$$L_{ij} = \frac{2\pi}{3} a_1^3 \delta_{ij}, \quad N_{ij} = 0, \quad L_{ij} = \frac{2\pi}{3} a_2^3 \delta_{ij}.$$

Приближение, учитывающее поправки порядка $(a_1/R)^3$, $(a_2/R)^3$ по сравнению с единицей, выглядит следующим образом: выражения для L_{ij} и L_{ij} не меняются, а N_{ij} имеет вид

$$N_{ij} = \frac{\pi a_1^3 a_2^3}{R^3}\left(\delta_{ij} - \frac{3}{R^2}R_i R_j\right), \quad R^i = r_1^i - r_2^i.$$

Теорема Полиа–Шиффера. Точное значение $\mathcal{K}_{ж}$ даже для тел, движущихся в бесконечном пространстве, удается найти, по существу, только для эллипсоидов. Поэтому для тел с более сложной формой и любых тел в ограниченных областях приходится привлекать приближенные методы, в том числе вариационные.

Приведем в качестве примера применение вариационной формулы для кинетической энергии к доказательству одного изящного утверждения, высказанного в качестве гипотезы Полиа и доказанного Шиффером.

Теорема. Средняя присоединенная масса тела произвольной формы (первый инвариант тензора присоединенной массы $^1/_3 L_i^i$), которое движется в неограниченном потоке покоящейся на бесконечности жидкости, не меньше присоединенной массы сферы того же объема.

Доказательство. Обозначим через A область, занятую телом, через V – внешность A. Согласно принципу Дирихле

$$\mathcal{K}_{ж} = \sup_{\varphi} \mathcal{K}^*(\varphi),$$

$$\mathcal{K}^*(\varphi) = \int_{\partial A} \varphi u_i n^i d\sigma - \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d^3x.$$

Вектор единичной нормали n_i направлен в сторону, внешнюю по отношению к жидкости.

Выбирая различные функции φ, будем получать оценки $\mathcal{K}_{ж}$ снизу:

$$\mathcal{K}^*(\varphi) \leqslant \mathcal{K}_{ж}. \tag{9.15}$$

Возьмем φ в виде

$$\varphi = a^i \frac{\partial \chi}{\partial x^i}, \tag{9.16}$$

где χ – потенциал притяжения тела A,

$$\chi = \int_A \frac{d^3x'}{|x - x'|},$$

a^i – постоянные, по которым в дальнейшем будем максимизировать $\mathcal{K}^*(\varphi)$. Можно рассчитывать, что при помощи функций (9.16) получится хорошая оценка, так как при соответствующем выборе постоянных a^i формула (9.16) дает точное решение для эллипсоида.

Подстановка (9.16) в выражение для $\mathcal{K}^*(\varphi)$ и интегрирование по частям приводят к равенству

$$\mathcal{K}^*(\varphi) = \int_{\partial A_{(e)}} \varphi\left(u_i - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) n^i d\sigma. \tag{9.17}$$

При выводе (9.17) учтено, что интеграл по V от $\varphi\Delta\varphi$ обращается в нуль, так как φ – гармоническая функция. Индекс (e) подчеркивает, что в интеграле (9.17) берутся предельные значения величин при подходе к ∂A со стороны жидкости.

Перейдем от интегрирования по $\partial A_{(e)}$ к интегрированию по области A. При этом надо учесть, что функция $\varphi = a^i \chi_{,i}$ при переходе через ∂A непрерывна, а $\partial\varphi/\partial x^i$ терпят разрыв, причем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right|_{(e)} - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right|_{(i)} = 4\pi n_k n^j a_j. \tag{9.18}$$

Индексом (i) обозначаются предельные значения величин на ∂A при подходе к ∂A со стороны тела.

Заменяя в (9.17) предельные значения функций со стороны жидкости на предельные значения функций со стороны тела при помощи (9.18), получим

$$\mathcal{K}^*(\varphi) = \int\limits_{\partial A_{(i)}} \varphi\left(u_i - 2\pi n_i n^j a_j - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right) n^i d\sigma. \tag{9.19}$$

Преобразуем поверхностный интеграл (9.19) в объемный:

$$\mathcal{K}^*(\varphi) = \int\limits_A \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}u^i + 2\pi a^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right] d^3x.$$

Слагаемое $\varphi\Delta\varphi = \varphi a^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}\Delta\chi$ внутри A равно нулю, так как потенциал притяжения χ в области A удовлетворяет уравнению $\Delta\chi = \text{const}$.

Уменьшим последний член на основании неравенства Коши–Буняковского:

$$\frac{1}{|A|}\int\limits_A \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}d^3x \int\limits_A \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}d^3x \leqslant \int\limits_A \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}d^3x. \tag{9.20}$$

Вводя обозначение

$$A_{ij} = -\int\limits_A \chi_{,ij}\, d^3x,$$

для $\mathcal{K}^*(\varphi)$ получим оценку

$$\mathcal{K}^*(\varphi) \geqslant A_{ij}u^i a^j - \frac{1}{2}\left(4\pi A_{ij} - \frac{1}{|A|}A_{im}A_j^m\right)a^i a^j. \tag{9.21}$$

Существенно, что для эллипсоида $\partial\varphi/\partial x^i$ постоянны в A, поэтому в (9.20) и, следовательно, в (9.21) (при a^i, доставляющих максимум правой части) достигается равенство.

Выберем систему координат x^i, направленную по главным осям тензора A_{ij}. Тогда

$$\mathcal{K}^*(\varphi) \geqslant A_1u_1a_1 + A_2u_2a_2 + A_3u_3a_3 - \frac{1}{2}\left(4\pi A_1 - \frac{1}{|A|}A_1^2\right)a_1^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(4\pi A_2 - \frac{1}{|A|}A_2^2\right)a_2^2 - \frac{1}{2}\left(4\pi A_3 - \frac{1}{|A|}A_3^2\right)a_3^2, \quad A_1 = A_{11},\ A_2 = A_{22},$$

$$A_3 = A_{33}. \tag{9.22}$$

В этой системе координат максимум правой части (9.22) достигается при

$$a_1 = \frac{u_1}{4\pi - A_1/|A|}, \quad a_2 = \frac{u_2}{4\pi - A_2/|A|}, \quad a_3 = \frac{u_3}{4\pi - A_3/|A|}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}^*(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{4\pi - A_1/|A|} u_1^2 + \frac{A_2}{4\pi - A_2/|A|} u_2^2 + \frac{A_3}{4\pi - A_3/|A|} u_3^2 \right).$$

Справедливо неравенство

$$\frac{A_1}{4\pi - A_1/|A|} + \frac{A_2}{4\pi - A_2/|A|} + \frac{A_3}{4\pi - A_3/|A|} \geqslant \frac{A_1 + A_2 + A_3}{4\pi - \dfrac{A_1 + A_2 + A_3}{3|A|}}. \qquad (9.23)$$

Действительно, функция $f(x) = \dfrac{x}{4\pi - x/|A|}$ строго выпукла, так как при $0 \leqslant x \leqslant |A|$ справедливо неравенство $\partial^2 f/\partial x^2 > 0$. Рассмотрим минимум строго выпуклой функции $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3)$ при ограничении $A_1 + A_2 + A_3 = \text{const} = c$. Вводя множитель Лагранжа, убеждаемся, что минимум достигается при $A_1 = A_2 = A_3$. Следовательно, в точке минимума

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{c}{3}, \quad f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) = 3f\left(\frac{c}{3}\right) = \frac{c}{4\pi - \dfrac{c}{3|A|}}.$$

Для произвольных A_1, A_2 и A_3 отсюда следует (9.23). Из определения A_{ij} вытекает, что

$$A_1 + A_2 + A_3 = -\int_B \Delta\chi \, d^3x = 4\pi|A|.$$

Поэтому

$$\mathcal{K}^*(\varphi) \geqslant \frac{3}{4}|A|(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

и, согласно (9.15), для тензора присоединенной массы получим искомую оценку

$$^1/_3 L_i^i \geqslant {}^1/_2|A| = {}^1/_3 L_{i\,(\text{сферы})}^i.$$

§ 10. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Формулы для сил и моментов, действующих на тело, двигающееся в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости и в стоксовом потоке вязкой жидкости, как показано в двух предыдущих параграфах, имеют вариационную структуру. В частности, выражение для силы, действующей на тело в идеальной жидкости, имеет вид[1])

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial r^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{r}^i}. \qquad (10.1)$$

[1]) В этом параграфе встречается только кинетическая энергия жидкости, поэтому соответствующий индекс у $\mathcal{K}$ не пишется.

В вязкой жидкости

$$F_i = -\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \dot{r}^i}. \tag{10.2}$$

В этих формулах $\mathscr{K}$ и $\mathscr{D}$ – функции только мгновенных характеристик движения.

Возникает вопрос, не существует ли универсального соотношения, связывающего обобщенные силы, действующие на тело, с кинетической энергией жидкости $\mathscr{K}$ и диссипативным потенциалом $\mathscr{D}$, когда они зависят не только от мгновенных характеристик движения, но и от предыстории движения.

Оказывается, что при некоторых предположениях (о них сказано дальше) соответствующим обобщением формул (10.1) и (10.2) является вариационное уравнение

$$Q_\kappa \delta q^\kappa = \delta \mathscr{K} - \frac{d}{dt}\,\delta \mathscr{K} - \delta \mathscr{D}. \tag{10.3}$$

Здесь обобщенные координаты q^κ характеризуют движение и деформацию тела, Q_κ – соответствующие обобщенные силы, $\mathscr{K}$ и $\mathscr{D}$ – функционалы от истории движения. Зависимость $\mathscr{K}$ и $\mathscr{D}$ от предыстории может быть описана двумя группами аргументов (они разделены точкой с запятой)[1])

$$\mathscr{K} = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{\mathscr{K}}}\,(q(\tau);\ \dot{q}(\tau)), \quad \mathscr{D} = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{\mathscr{D}}}\,(q(\tau);\ \dot{q}(\tau)).$$

Фактический способ выделения двух групп аргументов приведен ниже. В (10.3) δ есть оператор варьирования по обоим аргументам, $\underset{\cdot}{\delta}$ – оператор, действие которого заключается в варьировании по второй группе аргументов и последующей замены $\delta\dot{q}$ на δq.

Если $q^\kappa = r^i$, $\mathscr{K}$ есть функция только $r^i(t)$ и $\dot{r}^i(t)$: $\mathscr{K} = \mathscr{K}(r^i; \dot{r}^i)$ и $\mathscr{D} = 0$, то из (10.3) следует формула (10.1)

$$F_i \delta r^i = \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial r^i}\delta r^i + \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial \dot{r}^i}\delta \dot{r}^i - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial \dot{r}^i}\delta r^i = \left(\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial r^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial \dot{r}^i}\right)\delta r^i.$$

Если $\mathscr{K} = 0$, а $\mathscr{D} = \mathscr{D}(r^i; \dot{r}^i)$, то из (10.3) следует формула (10.2).

Вариационное уравнение (10.3) определяет n функционалов $Q_1, \ldots, Q_n$ через два функционала $\mathscr{K}$ и $\mathscr{D}$. Поскольку в случае стоксовых течений вариационное уравнение (10.3) выражает принцип Онсагера, его можно рассматривать как обобщение принципа Онсагера на случай нелокальных во времени взаимодействий.

Дадим доказательство равенства (10.3). Пусть V и A – области в пространстве переменных ξ^a, которые пробегают лагранжевы координаты точек жидкости и точек тела. Жидкость считается вязкой и несжимаемой, граница сосуда V неподвижна в пространстве. При заданных в начальный

---

[1]) Символом $\overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{\mathscr{K}}}\,(q)$ обозначаются функционалы от функций $q(\tau)$, определенных на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

и конечный моменты времени положениях частиц жидкости и тела и заданном движении границы области V имеет место вариационное уравнение

$$\int_0^{t_1}\left(\delta\int_{V-A}\frac{\rho}{2}v_iv^i\,dv+\int_{\partial A}P_i\delta x^i d\sigma-\int_V\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial e_{ij}}\nabla_j\delta x_i\,dv\right)dt=0,$$

где P_i – компоненты поверхностной силы, действующей на жидкость со стороны тела, $\mathcal{D}$ – диссипативный потенциал жидкости (она может быть неньютоновской).

Вариационное уравнение можно переписать в форме равенства, справедливого для любого момента времени t:

$$\int_0^{t}\left(\delta\int_{V-A}\rho\frac{v^2}{2}\,dv+\int_{\partial A}P_i\delta x^i d\sigma-\int_V\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial e_{ij}}\nabla_j\delta x_i dv\right)dt-\int_{V-A}\rho v_i\delta x^i dv\Big|_t=0. \tag{10.4}$$

Зададимся некоторым законом движения тела $q=q(t)$. Тогда движение жидкости можно найти из системы уравнений

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\partial_i p+\partial_j\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial e_{ij}}, \tag{10.5}$$

$$\det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial\xi^a}\right\|=\det\left\|\frac{\partial\overset{\circ}{x}{}^i}{\partial\xi^a}\right\|, \tag{10.6}$$

которые дополнены краевыми условиями

$$x^i(\xi^a,t)=\overset{*}{x}{}^i(\xi^a)\ \text{на}\ \partial V,\quad x^i(\xi^a,t)=\chi^i(\xi^a,q^\kappa)\ \text{на}\ \partial A. \tag{10.7}$$

Примем, что в начальный момент времени жидкость и тело покоятся:

$$x^i(\xi^a,0)=\overset{\circ}{x}{}^i(\xi^a),\quad v^i(\xi^a,0)=0. \tag{10.8}$$

Для согласованности краевых и начальных условий на ∂A при $t=0$ потребуем, чтобы

$$\dot q^\kappa(0)=0.$$

Будем считать, что система уравнений (10.5)–(10.8) однозначно определяет движение жидкости на рассматриваемом интервале времени. Тогда в принципе можно найти закон движения частиц жидкости, и он для каждых ξ^a и t будет функционалом от истории движения тела A, т.е. от $q(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant t$.

Вариационное уравнение (10.4) есть тождество в силу (10.5)–(10.7) и равенства $\left(-p\delta_i^j+\dfrac{\partial D}{\partial e_j^i}\right)n_j=P_i$ на ∂A для произвольных значений δx^i, обращающихся в нуль при $t=0$ и на $\partial V\times[0,t]$. В частности, в (10.4) можно подставить закон движения частиц жидкости, удовлетворяющий уравнениям (10.5)–(10.8), а под δx^i понимать его вариацию, вызванную бесконечно малым возмущением движения тела.

Вариации δx^i в каждой точке ξ, t есть функционалы от $q(\tau)$ и $\delta q(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant t$, линейные по $\delta q(\tau)$. Запишем этот факт следующим образом:

$$\delta x^i=\overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l^i}}(\xi,t\,|\,q(\tau);\ \delta q(\tau)).$$

На границе тела

$$\delta x^i = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^\kappa}\delta q^\kappa.$$

Вариационное уравнение (10.4) принимает вид

$$\int_0^t \left[\delta \mathcal{K} - Q_\kappa \delta q^\kappa - \int_V \frac{\partial D}{\partial \dot{e}_{ij}} \nabla_j \delta \dot{x}_i dv\right] dt - \int_{V-A} \rho v_i \delta x^i dv \Big|_t = 0, \qquad (10.9)$$

где $\mathcal{K}$ – кинетическая энергия жидкости, вычисленная на решениях задачи (10.5)–(10.8) – некоторый функционал от $q(\tau)$, δ – оператор варьирования закона движения тела, Q_κ – обобщенные силы

$$Q_\kappa = -\int_{\partial A} P_i \frac{\partial \chi^i}{\partial q^\kappa} d\sigma.$$

Для завершения доказательства остается проверить соотношение

$$v^i(\xi, t) = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l^i}}(\xi, t \mid q(\tau); \dot{q}(\tau)). \qquad (10.10)$$

Действительно, если равенство (10.10) верно, то функционалы

$$\mathcal{K} = \int_{V-A} \frac{\rho}{2} v_i v^i dv, \quad \mathcal{D} = \int_V D(\nabla_{(i} v_{j)}) dv,$$

которые вычисляются по скорости при помощи соотношения (10.10), становятся функционалами от двух групп аргументов.

Введем оператор $\dot{\delta}$, действие которого заключается в варьировании по второй группе аргументов и последующей замене $\delta\dot{q}(\tau)$ на $\delta q(\tau)$. Из (10.10) следует, что

$$\dot{\delta} v^i = \delta x^i.$$

Оператор $\dot{\delta}$, как оператор варьирования по q, перестановочен с оператором дифференцирования и

$$\delta \nabla_i v_j = \nabla_i \dot{\delta} v_j = \nabla_i \delta x_j.$$

Поэтому вариационное уравнение (10.9) можно переписать в форме

$$\int_0^t [\delta \mathcal{K} - Q_\kappa \delta q^\kappa - \dot{\delta} \mathcal{D}]\, dt - \dot{\delta} \mathcal{K} = 0. \qquad (10.11)$$

Дифференцирование (10.11) по времени приводит к (10.3).

Итак, осталось доказать равенство (10.10). Проварьируем уравнения (10.5), (10.6). Получим в области $V-A$ некоторую систему уравнений относительно δx^i. Запишем ее символически в виде $L\,\delta x = 0$. Оператор L – линейный оператор с частными производными с переменными коэффициентами. Варьирование начальных условий дает

$$\delta x^i = 0, \quad \frac{d\,\delta x^i}{dt} = 0 \quad \text{в} \quad V-A \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (10.12)$$

На границе жидкости

$$\delta x^i = 0 \ \text{на} \ \partial V, \quad \delta x^i = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^\kappa}\delta q^\kappa \ \text{на} \ \partial A. \qquad (10.13)$$

Уравнения $L\,\delta x = 0$ вместе с начальными и краевыми условиями (10.12), (10.13) определяют функционалы $\overset{\tau=t}{\underset{\tau=0}{l^i}}(\xi, t \mid q(\tau);\ \delta q(\tau))$.

Продифференцируем уравнения (10.5)–(10.7) по времени. Получим уравнения $L\mathbf{v} = 0$ с краевыми условиями

$$v^i = 0 \quad \text{на } \partial V, \quad v^i = \frac{\partial \chi^i}{\partial q^\kappa}\dot{q}^\kappa \quad \text{на } \partial A \tag{10.14}$$

и начальным условием

$$v^i = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Пусть $\ddot{q}^\kappa = 0$ при $t = 0$. Покажем, что тогда и

$$dv^i/dt = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{10.15}$$

Действительно, из уравнения (10.5) при $t = 0$ следует, что $\operatorname{rot}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$. Дифференцируя по времени уравнение неразрывности $v^i_{,i} = 0$ и полагая $t = 0$, получим $\operatorname{div}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$. Следовательно, $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad}\varphi$ и $\Delta\varphi = 0$. На границе жидкости, дифференцируя (10.14), имеем $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad}\varphi = 0$ на ∂V и ∂A при $t = 0$. Поэтому $\varphi = \text{const}$ и справедливо равенство (10.15).

Скорость v^i удовлетворяет той же системе уравнений, что и δx^i, если в ней заменить δq на $\dot{q}$. Этим завершается доказательство формул (10.10) и (10.3).

Подчеркнем, что предположение о начале движения из состояния покоя существенно, в противном случае равенство (10.10) не имеет места.

Нетрудно проверить, что проведенное рассуждение дословно повторяется и для вязкоупругих жидкостей, у которых внутренняя энергия есть функция дисторсии. При этом в вариационное уравнение войдет также внутренняя энергия $\mathcal{U}$, являющаяся некоторым функционалом от истории движения тела

$$Q_\kappa \delta q^\kappa = \delta(\mathcal{K} - \mathcal{U}) - \frac{d}{dt}\delta\mathcal{K} - \delta\mathcal{D}. \tag{10.16}$$

Проблема вычисления сил и моментов, действующих на твердое тело в жидкости, крайне сложна. Поэтому естественно использовать вариационное уравнение (10.3) для определения сил и моментов, задавая функционалы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ из феноменологических соображений. Заметим, что между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ имеется универсальная зависимость, в силу которой их нельзя задавать произвольно. Действительно, положим в (10.3) в момент времени t $\delta q^\kappa = 0$. Тогда для любых функций $\delta q^\kappa(\tau)$, обращающихся в нуль вместе со своими первыми и вторыми производными в начальный момент времени и равными нулю в момент времени t, должно выполняться равенство

$$-\delta\mathcal{K} + \frac{d}{dt}\delta\mathcal{K} + \delta\mathcal{D} = 0. \tag{10.17}$$

Если $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ – функции q, $\dot{q}$, то равенство (10.17) удовлетворяется автоматически. Однако при учете памяти соотношение (10.17) накладывает существенные ограничения на возможный вид $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. *Поступательное неустановившееся движение сферы.* Рассмотрим в безграничном потоке вязкой несжимаемой жидкости сферу радиуса a. При $t = 0$ жидкость и сфера покоятся. Затем сфера начинает двигаться вдоль прямой со скоростью $u(t)$. Найдем силу, действующую на сферу, предполагая, что нелинейными членами в уравнениях движения жидкости можно пренебречь. Пусть R, θ, φ – сферические координаты, жестко связанные со сферой, v_R, v_θ, v_φ – компоненты скорости относительно инерциальной системы координат, спроектированные на оси R, θ, φ, скорость сферы направлена по лучу $\theta = 0$. Решение задачи имеет вид

$$v_R = -\frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}, \quad v_\varphi = 0,$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{au(s)}{2}\left\{3e^{-(R-a)\sqrt{\frac{s}{\nu}}}\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}+\frac{\nu}{sa}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R}\left(a^2+3a\sqrt{\frac{\nu}{s}}+\frac{3\nu}{s}\right)e^{st}\sin^2\theta\right\}ds,$$

$$u(s) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)e^{st}dt, \quad \nu = \mu/\rho,$$

$$p = \frac{\rho a^3 u'(t)}{2R^2} + \frac{3a^2\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}}{2R^2}\int\limits_0^t \frac{u'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{3\mu a}{2R^2}u(t).$$

Вычисления приводят к следующим выражениям для кинетической энергии и диссипативного потенциала:

$$\mathcal{K} = \frac{\rho\pi a^3}{3}u^2(t) + \frac{3}{2}\rho\sqrt{\pi\nu}a^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{u(t-\tau)u(t-\xi)}{(\tau+\xi)^{3/2}}\,d\xi\,d\tau,$$

$$\mathcal{D} = 3\pi\mu a u^2(t) + 3\rho\sqrt{\pi\nu}a^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{u'(t-\tau)u'(t-\xi)}{(\tau+\xi)^{1/2}}\,d\xi\,d\tau, \qquad (10.18)$$

где $u'(t) = du(t)/dt$. Поскольку в системе координат, связанной со сферой, геометрия области не меняется, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ не зависят от первой группы аргументов. Нетрудно проверить, что функционалы (10.18) удовлетворяют равенству (10.17). Из (10.3) и (10.18) следует известное выражение для силы, действующей на сферу (формула Бассэ):

$$F = -6\pi\mu a u(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 u'(t) - 6\rho\sqrt{\pi\nu}a^2\int\limits_0^t \frac{u'(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Пример 2. *Колебания газового пузыря.* Рассмотрим в неограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкостью, сферическую полость радиуса a. На поверхности полости действует поверхностное натяжение. Радиус полости может меняться со временем. Внутри полости находится газ с плотностью энергии единицы массы $U_г(\rho_г, S)$. Движение газа в полости предполагается адиабатическим, а изменение плотности газа $\rho_г$ вдоль полости пренебрежимо малым. Обмен

массой между газом и жидкостью отсутствует, поэтому полная масса газа не меняется со временем

$$^4/_3 \pi a^3 \rho_г = m_. = \text{const}. \tag{10.19}$$

Выведем уравнение, описывающее изменение со временем радиуса пузыря a из вариационного уравнения для системы жидкость – газовый пузырь:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{V-A} \rho \left(\frac{v_i v^i}{2} - U \right) dv - 4\pi a^2 \sigma - \int_\Sigma \bar{p}\, \delta x^i n_i d\sigma + \delta \int_V D\, dv \right] dt = 0, \tag{10.20}$$

где V – объем, ограниченный сферой Σ большого радиуса (дальше мы устремим его к ∞), $\bar{p}$ – давление, заданное на Σ (в пределе $\bar{p}$ переходит в p_∞), вариации считаются равными нулю при $t = t_0$ и $t = t_1$.

Вычислим функционалы, входящие в вариационное уравнение. В силу несжимаемости и симметрии движение жидкости определяется из уравнения неразрывности

$$v_i = -\dot{a} a^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|x|}.$$

Поэтому после интегрирования по внешности пузыря для $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ получим

$$\mathcal{K} = 2\pi a^3 \rho \dot{a}^2, \quad \mathcal{D} = 8\pi \mu a \dot{a}^2.$$

Кинетической энергией газа, а также изменением энтропии жидкости, связанным с вязкой диссипацией будем пренебрегать. Внутренняя энергия газа в пузыре дается равенством

$$\mathcal{U}_A = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_г U_г (\rho_г).$$

На движении жидкости, соответствующем расширению пузыря,

$$\delta x^i = -\left(a^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|x|} \right) \delta a.$$

Поэтому

$$\int_\Sigma \bar{p}\, \delta x^i n_i d\sigma = \bar{p} 4\pi a^2 \delta a$$

и интеграл по Σ в (10.20) не зависит от радиуса сферы Σ. Устремляя радиус сферы к бесконечности, для работы внешних сил на бесконечности найдем

$$p_\infty 4\pi a^2 \delta a = \delta (^4/_3 \pi a^3 p_\infty).$$

Окончательно вариационное уравнение примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(2\pi a^2 \rho \dot{a}^2 - \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_г U_г (\rho_г) + p_\infty) - 4\pi a^2 \sigma \right) dt -$$

$$- \delta \int_{t_0}^{t_1} (8\pi \mu a^2 \dot{a}^2)\, dt = 0. \tag{10.21}$$

Варьируя по a, с учетом формулы (10.19) получим уравнение Рэлея

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{\rho}\left(p_{\text{г}} - p_{\infty} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu\dot{a}}{a}\right), \tag{10.22}$$

где $p_{\text{г}} = \rho_{\text{г}}^2 \partial U_{\text{г}}/\partial\rho_{\text{г}}$.

Заметим, что для движущегося пузыря в кинетическую энергию жидкости войдет слагаемое $^1/_3\pi a^3\rho u^2$. В соответствии с этим в правую часть (10.22) добавится член $-¼u^2$.

§ 11. О ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений и краевых условий

$$\begin{aligned} &F_\kappa\left(x^i, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 u^\kappa}{\partial x^i\,\partial x^j}, \ldots\right) = 0 \quad \text{в} \quad V, \\ &f_\kappa\left(x^i, \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^i}, \ldots\right) = 0 \quad \text{на} \quad \partial V \end{aligned} \tag{11.1}$$

и поставим следующий вопрос: когда система уравнений (11.1) может быть получена как система уравнений Эйлера некоторого функционала?

Определенная трудность связана с тем, что систему уравнений можно преобразовывать (например, умножать на ненулевые функции от x^i, u^κ, $\partial u^\kappa/\partial x^i$ или делать замены искомых функций). В результате система уравнений может потерять (или приобрести) свойство быть системой уравнений Эйлера.

Пример. Рассмотрим на отрезке $[0, a]$ краевую задачу

$$F \equiv p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\frac{du}{dx} + r(x)u + f(x) = 0, \tag{11.2}$$

$$u(0) = u(a) = 0. \tag{11.3}$$

Построим функционал

$$\int_0^a F\,\delta u\,dx. \tag{11.4}$$

Если функционал (11.4) голономен на множестве непрерывных дважды дифференцируемых функций, выделяемом условиями (11.3), то уравнения (11.2) есть уравнения Эйлера.

Условия голономности (1.4.17) для функционала (11.4) дают

$$q(x) - \frac{d}{dx}p(x) = 0. \tag{11.5}$$

Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ не удовлетворяют (11.5). Тогда функционал (11.4) неголономен, и уравнения (11.2) не могут быть уравнениями Эйлера функционала вида

$$\int_0^a \Lambda\left(x, u, \frac{du}{dx}\right)dx.$$

Сделаем замену $u \to v$:

$$u(x) = b(x)\, v(x)$$

и подберем $b(x)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{d}{dx}[b(x)\, p(x)] = 2\frac{db(x)}{dx}\, p(x) + q(x)\, b(x).$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$b(x) = cp(x)e^{-\int_0^x \frac{q(x)dx}{p(x)}}, \quad c = \text{const}. \tag{11.6}$$

Для определенности положим $c = 1$.

Уравнение и краевые условия для функции $v(x)$ примут вид

$$G \equiv \frac{d}{dx}\left(b(x)\, p(x)\frac{dv}{dx}\right) + \bar{r}v(x) + f(x) = 0,$$

$$\bar{r} = rb + p\frac{d^2 b}{dx^2} + q\frac{db}{dx}, \tag{11.7}$$

$$v(0) = v(a) = 0. \tag{11.8}$$

Функционал

$$\int_0^a G\, \delta v\, dx$$

на множестве функции, удовлетворяющих условиям (11.8), голономен. Нетрудно угадать функционал, для которого (11.7) есть уравнения Эйлера

$$\int_0^a \left(b(x)\, p(x)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \bar{r}v^2 - 2f(x)\, v\right) dx. \tag{11.9}$$

"Эйлеровость" была достигнута при помощи замены искомой функции. Ее можно было бы достичь и за счет умножения уравнения (11.2) на $1/b(x)$, где $b(x)$ – функция (11.6). Тогда уравнение (11.2) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{b}\frac{du}{dx}\right) + \frac{r}{b}u + f = 0$$

и представляет уравнение Эйлера функционала

$$\int_0^a \left[\frac{p}{b}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{r}{b}u^2 - 2fu\right] dx. \tag{11.10}$$

Функционал (11.10) после замены $u \to v$: $u = bv$ переходит в функционал (11.9).

Другая сложность связана с трудно формализуемым ограничением "физичности" – искомый вариационный принцип должен иметь некоторое "физическое" содержание. Без подобного ограничения легко строятся не представляющие особого интереса "нефизические" вариационные принципы. Например: решение уравнений (11.1) доставляет минимум функционалу

$$\int_V F_\kappa F^\kappa dv + \int_{\partial V} f_\kappa f^\kappa d\sigma.$$

Разумных ответов на поставленный вопрос нет. Однако их поиск привел к формулировке ряда нетривиальных "нефизичных" вариационных принципов.

Принцип Морса – Фешбаха. Рассмотрим в четырехмерной области $V \times [0, T]$ задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = k\,\Delta u + f, \tag{11.11}$$

$$u\big|_{\partial V} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0. \tag{11.12}$$

Из формулы (1.4.16) легко получить, что не существует функционалов вида

$$\int_0^T \int_V \Lambda\left(x^i, t, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) dv\,dt,$$

для которых уравнение (11.11) было бы уравнением Эйлера.

Введем краевую задачу

$$-v_t = k\,\Delta v + g, \tag{11.13}$$

$$v\big|_{\partial V} = 0, \quad v\big|_{t=T} = 0 \tag{11.14}$$

и будем рассматривать (11.11)–(11.14) как систему уравнений для функций u и v.

Тогда уравнения (11.11)–(11.12) суть уравнения Эйлера функционала

$$\int_0^T \int_V (u_t v + k u_{,i} v^{,i} - fv - gu)\,dv\,dt \tag{11.15}$$

при ограничениях (11.12) и (11.14).

Обобщение. Пусть u, v – элементы некоторого гильбертова пространства H, (u, v) – скалярное произведение в H, L – линейный оператор, действующий из H в H, L^* – сопряженный оператор, т.е. оператор, который для любых[1]) u и v удовлетворяет равенству

$$(Lu, v) = (u, L^* v).$$

Тогда уравнения

$$Lu = f, \quad L^* v = g \tag{11.16}$$

есть стационарные точки функционала

$$\Phi(u, v) = (Lu, v) - (f, v) - (g, u).$$

[1]) Достаточно, чтобы u и v принадлежали соответственно всюду плотным множествам $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ из H.

Действительно, из

$$\delta\Phi = (L\,\delta u, v) + (Lu, \delta v) - (f, \delta v) - (g, \delta u) =$$
$$= (L^* v - g, \delta u) + (Lu - f, \delta v) = 0$$

следуют уравнения (11.16).

Принцип Гёртина – Тонти. Рассмотрим на отрезке $[0, a]$ задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t), \tag{11.17}$$

$$u(0) = 0. \tag{11.18}$$

Функционал

$$\int_0^a \left(\frac{du(t)}{dt} - f(t)\right)\delta u(t)\,dt,$$

очевидно, неголономен. Возьмем на множестве непрерывных дифференцируемых функций, выделяемом условием (11.18), другой функционал

$$\delta\Omega = \int_0^a \left(\frac{du}{dt} - f\right)\Big|_{a-t} \delta u(t)\,dt. \tag{11.19}$$

Здесь $(du/dt - f)|_{a-t}$ – значение функции $du/dt - f$ в точке $a - t$.

Проверим выполнение условия голономности (1.4.5):

$$\delta'\delta\Omega = \int_0^a \frac{d\delta' u}{dt}\Big|_{a-t} \delta u(t)\,dt = -\int_0^a \frac{d\delta' u(\tau)}{d\tau}\,\delta u(a-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^a \delta' u(\tau)\frac{d\delta u}{d\tau}\Big|_{a-\tau} d\tau = \delta\delta'\Omega.$$

Следовательно, функционал (11.19) голономен. Легко угадать соответствующий "потенциал"

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{du}{dt}\Big|_{a-t} u(t)\,dt - \int_0^a f(a-t)\,u(t)\,dt. \tag{11.20}$$

Обратим внимание на то, что лагранжиан в функционале (11.20) нелокален.

Аналогичный вариационный принцип имеет место для задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} - f(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11.21}$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(0)}{dt} = 0. \tag{11.22}$$

На множестве функций $u(0) = 0$ экстремали функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{du}{dt}\bigg|_{T-t} \frac{du}{dt}\bigg|_t dt - \int_0^T f(T-t)u(t)\,dt \qquad (11.23)$$

удовлетворяют уравнению (11.21) и второму соотношению (11.22). Подчеркнем, что условие $du(0)/dt = 0$ оказывается естественным краевым условием для функционала (11.23), в то время как "естественный" для уравнения (11.21) функционал с локальным лагранжианом

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt + \int_0^T f(t)u(t)dt$$

"не удерживает" этого краевого условия.

Вариационные принципы для уравнений (11.17), (11.18) и (11.21), (11.22) очевидным образом распространяются на задачи Коши для линейных параболических и гиперболических систем уравнений.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД

В этой главе будут рассмотрены приложения вариационного подхода к построению основных уравнений в ряде задач механики сплошной среды.

Первые пять параграфов посвящены одной из наиболее красивых глав механики твердого деформируемого тела — теории упругих оболочек и стержней. Эта теория представляет по существу физическую теорию поверхностей и кривых в трехмерном пространстве и привлекает исключительным изяществом формы, глубокими связями с геометрией и удивительным многообразием и сложностью поведения описываемых ею объектов. Объем книги позволил остановиться только на выводе из трехмерной теории упругости классической и уточненных теорий оболочек (§§ 1—4) и классической теории стержней (§ 5).

Родственная задача — вывод теории мелкой воды — рассмотрена в § 6.

Вариационные методы построения моделей сплошных сред разобраны на примере моделей дисперсных смесей (§ 7) и зернистых сред (§ 8).

В последних трех параграфах кратко обсуждается проблема осреднения — одна из центральных проблем механики сплошной среды. В них отражен прогресс в понимании этой проблемы, достигнутый в течение последнего десятилетия.

Исследование каждой задачи завершается построением уравнений, и вопросы, связанные с их решением, не обсуждаются. Исключение представляет задача на ячейке в проблеме осреднения, построение точных решений которой связано с вариационными методами (§§ 10, 11).

Параграфы 1—4, 5, 6, 7, 8, 9—11 можно читать независимо.

§ 1. ТЕОРИЯ УПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим в трехмерном пространстве поверхность $\mathring{\Omega}$ и восстановим в каждой точке $\mathring{\Omega}$ направленный по нормали отрезок длины h с центром, лежащим на $\mathring{\Omega}$ (рис. 44). Отрезки заметают некоторую область $\mathring{V}$. Если отношение h к минимальному радиусу кривизны R поверхности $\mathring{\Omega}$ и к характерному размеру $\mathring{\Omega}$ гораздо меньше единицы, то упругое тело, занимающее в недеформированном состоянии область $\mathring{V}$, называют упругой оболочкой.

Естественно ожидать, что деформацию упругой оболочки можно приближенно описывать функциями, которые зависят только от двух поверхностных координат и времени. Проблема построения теории оболочек заключается в конструировании уравнений для этих функций и указания способа

вычисления по двумерным характеристикам трехмерного напряженного состояния. Начнем с изложения феноменологического подхода.

Эвристическая теория оболочек. *Меры деформации.* Деформированное положение оболочки естественно моделировать поверхностью в трехмерном пространстве; обозначим ее через Ω. Закон движения поверхности Ω задается функциями $x^i = r^i(\xi^\alpha, t)$, где $r^i(\xi^\alpha, t)$ – компоненты радиус-вектора точки поверхности с лагранжевыми координатами ξ^α. В начальном состоянии поверхность Ω занимает положение $\overset{\circ}{\Omega}$, задаваемое уравнениями $x^i = \overset{\circ}{r}{}^i(\xi^\alpha) = r^i(\xi^\alpha, t_0)$.

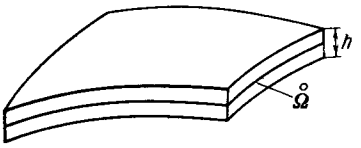


Рис. 44.

Положение поверхности Ω с точностью до ее перемещений как твердого целого определяется компонентами первой и второй квадратичных форм поверхности $a_{\alpha\beta} = g_{ij} r^i_\alpha r^j_\beta$ и $b_{\alpha\beta} = n_i \nabla_\beta r^i_\alpha$. Их значения в начальном состоянии обозначаются через $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$. Напомним[1]) геометрические соотношения

$$\begin{aligned} &\nabla_\beta r^i_\alpha = n^i b_{\alpha\beta}, \quad n^i_{,\alpha} = -r^i_\lambda b^\lambda_\alpha, \\ &\overset{\circ}{r}{}^i_{\alpha;\beta} = \overset{\circ}{n}{}^i \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}, \quad \overset{\circ}{n}{}^i_{,\alpha} = -\overset{\circ}{r}{}^i_\lambda \overset{\circ}{b}{}^\lambda_\alpha, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ∇_α – ковариантное дифференцирование на Ω, точка с запятой в индексах – ковариантное дифференцирование на $\overset{\circ}{\Omega}$, жонглирование индексами у $\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$ и других величин с индексом $\circ$ производится при помощи метрического тензора $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$, у $b_{\alpha\beta}$ и других величин без индекса $\circ$, относящихся к деформированному состоянию, если не оговорено противное, – при помощи метрики $a_{\alpha\beta}$.

В качестве мер деформации поверхности можно взять тензоры $A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta})$ и $B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$. Тензор $A_{\alpha\beta}$ является мерой растяжения, $B_{\alpha\beta}$ – мерой изгиба. Жонглирование индексами у $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ и других мер деформаций, которые встретятся в дальнейшем, производится при помощи метрического тензора $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$.

Вариационное уравнение. Естественно предположить, что моделированию оболочки двумерным континуумом соответствует представление кинетической и внутренней энергий оболочки поверхностными интегралами

$$\mathcal{K} = \int\limits_{\overset{\circ}{\Omega}} K \, d\overset{\circ}{\omega}, \qquad \mathcal{U} = \int\limits_{\overset{\circ}{\Omega}} \Phi \, d\overset{\circ}{\omega},$$

где $K = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\rho} r^i_{,t} r_{i,t}$, $\overset{\circ}{\rho}$ – поверхностная плотность массы, Φ – функция мер растяжения и изгиба $\Phi = \Phi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})$, $d\overset{\circ}{\omega}$ – элемент площади поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$.

[1]) См. также формулы (1.3.90) – (1.3.119) и введенные в связи с ними обозначения.

Если Φ "существенно" зависит от $B_{\alpha\beta}$, то можно показать, что энергия $\mathcal{U}$ "чувствует" (см. § 2 гл. II) изменения на границе величин r^i и n^i. Поэтому кинематические краевые условия заключаются в задании r^i и n^i на части границы поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$:

$$r^i = \tilde{r}^i, \quad n^i = \tilde{n}^i \quad \text{на } \overset{\circ}{\Gamma}_u. \tag{1.2}$$

Индекс u у $\overset{\circ}{\Gamma}_u$ связан с тем, что на $\overset{\circ}{\Gamma}_u$ известны перемещения оболочки, которые обозначаются дальше через u^i.

Среди краевых условий (1.2) только четыре независимых, поскольку вектор $\tilde{n}^i$ является единичным и ортогональным к кривой Γ_u, заданной уравнениями $x^i = \tilde{r}^i$.

Придадим оболочке бесконечно малые перемещения δr^i и рассмотрим производимую на них работу внешних сил. Внешние силы будем считать распределенными по срединной поверхности Ω и части края $\Gamma_p = \partial\Omega - \Gamma_u$. Край оболочки в деформированном состоянии $\partial\Omega$ будем обозначать также через Γ: $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$, в недеформированном состоянии – через $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Внешние силы на срединной поверхности будут работать на вариациях δr^i:

$$\delta \mathcal{A}_{\text{пов}} = \int\limits_{\Omega} Q_i \delta r^i \, d\omega.$$

Здесь $d\omega$ – элемент площади поверхности Ω.

На краю оболочки, помимо работы сил на вариациях δr^i, надо учесть работу сил на вариациях нормали: поскольку энергия чувствует изменения нормали, такая работа может совершаться. Вариация нормали выражается через вариацию δr^i по формуле (1.3.118): $\delta n_i = -r_i^\alpha n_k (\delta r^k)_{,\alpha}$. Спроектируем δn_i на три взаимно перпендикулярных вектора – касательный вектор τ^i к Γ, нормаль n^i к Ω и внешнюю нормаль ν^i к Γ, лежащую в плоскости, касательной к Ω. Имеем: $\tau^i \delta n_i = -n_k \dfrac{d\delta r^k}{ds}$ (s – длина дуги на Γ), $n^i \delta n_i = 0$, $\nu^i \delta n_i = -\nu^\alpha n_k (\delta r^k)_{,\alpha}$ ($\nu^\alpha \equiv \nu^i r_i^\alpha$). Величина $\tau^i \delta n_i$ определяется по значениям δr^i на Γ. Величина $\nu^i \delta n_i$ не зависит от значений δr^i на Γ, поскольку содержит производную от δr^i по направлению, выводящему с Γ. Итак, из трех величин δn^i имеется лишь одна независимая от δr^i, в качестве которой можно взять линейную комбинацию $\nu^i \delta n_i$. В соответствии с этим работа внешних сил на краю оболочки имеет вид

$$\delta \mathcal{A}_{\text{кр}} = \int\limits_{\Gamma_p} (R_i \delta r^i + M \nu^i \delta n_i) \, ds.$$

Вариационное уравнение теории упругих оболочек записывается в форме

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [\delta(\mathcal{K} - \mathcal{U}) + \delta \mathcal{A}_{\text{пов}} + \delta \mathcal{A}_{\text{кр}}] \, dt = 0. \tag{1.3}$$

Допустимые функции $r^i(\xi^\alpha, t)$ в (1.3) подчинены ограничениям (1.2).

Система уравнений и краевые условия. Выведем уравнения движения оболочек.

Вариации тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ находятся из (1.3.114) и (1.3.119).

$$\delta A_{\alpha\beta} = r_{i(\alpha} \delta r^i_{,\beta)}, \quad \delta B_{\alpha\beta} = n_i \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta r^i. \tag{1.4}$$

Поэтому вариация внутренней энергии $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\delta \mathcal{U} = \int_{\Omega} (S^{\alpha\beta} r^i_\alpha \, \delta r_{i\beta} - M^{\alpha\beta} n_i \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta r^i) d\omega, \tag{1.5}$$

где $S^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ — симметричные тензоры, определенные уравнениями состояния

$$S^{\alpha\beta} = \theta \frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial A_{\alpha\beta}}, \qquad M^{\alpha\beta} = -\theta \frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial B_{\alpha\beta}}. \tag{1.6}$$

В (1.6) $\theta = \sqrt{\overset{\circ}{a}}/\sqrt{a}$; можно показать, что в силу уравнения неразрывности θ имеет смысл отношения поверхностных плотностей массы в деформированном и недеформированном состояниях.

Тензор $S^{\alpha\beta}$ "работает" на растяжениях поверхности, а $M^{\alpha\beta}$ — на изгибах, поэтому их называют соответственно тензором растягивающих усилий и тензором изгибающих моментов.

После интегрирования по частям при вариациях, равных нулю, на $\partial\overset{\circ}{\Omega}$ получим систему уравнений

$$\nabla_\beta (S^{\alpha\beta} r^i_\alpha + \nabla_\alpha (M^{\alpha\beta} n^i)) + Q^i = \bar{\rho}\theta \frac{\partial^2 r^i}{\partial t^2}. \tag{1.7}$$

При не равных нулю вариациях на $\partial\overset{\circ}{\Omega}$ должно выполняться равенство

$$\int_{\Gamma_p} [(S^{\alpha\beta} r^i_\alpha + \nabla_\alpha (M^{\alpha\beta} n^i)) \delta r^i - M^{\alpha\beta} n^i \nabla_\alpha \delta r_i] \nu_\beta ds = \delta \mathcal{A}_{\text{кр}}. \tag{1.8}$$

Выделим в (1.8) независимые на Γ_p вариации δr^i и $\nu^i \delta n_i$. Используя разбиение единичного тензора $\delta^\alpha_\beta = \nu^\alpha \nu_\beta + \tau^\alpha \tau_\beta$ $(\tau_\beta = r^i_\beta \tau_i)$ можно написать: $\nabla_\alpha \delta r^i = \nu_\alpha \nu^\beta \nabla_\beta \delta r^i + \tau_\alpha \tau^\beta \nabla_\beta \delta r^i$. Поскольку $\tau^\beta \nabla_\beta \delta r^i = d\delta r^i/ds$, равенство (1.8) принимает форму

$$\int_{\Gamma_p} \left[(S^{\alpha\beta} r^i_\alpha + \nabla_\alpha (M^{\alpha\beta} n^i)) \delta r_i - M^{\alpha\beta} \tau_\alpha n_i \frac{d\delta r^i}{ds} + M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu^i \delta n_i \right] \nu_\beta ds = \delta \mathcal{A}_{\text{кр}}.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое в левой части этого равенства и используя, что $\delta r^i = 0$ вне Γ_p, получим

$$\int_{\Gamma_p} \left\{ \left[(S^{\alpha\beta} r^i_\alpha + \nabla_\alpha (M^{\alpha\beta} n^i)) \nu_\beta + \frac{d}{ds} (M^{\alpha\beta} \tau_\alpha \nu_\beta n^i) \right] \delta r_i + M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \nu^i \delta n_i \right\} ds = \delta \mathcal{A}_{\text{кр}}.$$

Отсюда в силу произвольности δr_i и $\nu^i \delta n_i$ следуют краевые условия на Γ_p:

$$(S^{\alpha\beta} r^i_\alpha + \nabla_\alpha (M^{\alpha\beta} n^i)) \nu_\beta + \frac{d}{ds} (M^{\alpha\beta} \tau_\alpha \nu_\beta n^i) = R^i, \quad M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = M. \tag{1.9}$$

Запишем систему уравнений и краевые условия в проекциях на нормаль и касательную плоскость к Ω. Из (1.7), (1.8) и (1.1) находим

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} - b^\alpha_\lambda \nabla_\beta M^{\lambda\beta} + Q^\alpha = \bar{\rho}\theta r^\alpha_i \frac{\partial^2 r^i}{\partial t^2},$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + Q = \bar{\rho}\theta n_i \frac{\partial^2 r^i}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

$$T^{\alpha\beta}\nu_\beta - M^{\gamma\beta}\tau_\gamma \nu_\beta \tau^\lambda b^\alpha_\lambda = R^\alpha,$$

$$\nu_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + \frac{d}{ds}(M^{\alpha\beta}\tau_\alpha \nu_\beta) = R, \tag{1.11}$$

$$M^{\alpha\beta}\nu_\alpha \nu_\beta = M.$$

Здесь $Q^\alpha = r^\alpha_i Q^i$, $Q = n_i Q^i$, $R^\alpha = R^i r^\alpha_i$, $R = R^i n_i$, а через $T^{\alpha\beta}$ обозначен несимметричный тензор

$$T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - b^\alpha_\lambda M^{\lambda\beta}.$$

Уравнения (1.10), (1.11) и (1.2), дополненные начальными условиями, представляют замкнутую систему уравнений, если известна функция Ф.

Меры изгиба. Пусть перемещения оболочки $u^i = r^i - \overset{\circ}{r}{}^i$ бесконечно малы. Тогда, полагая в (1.4), что $\delta r^i = u^i$, получим

$$A_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{r}{}^i_{(\alpha} u_{i,\beta)}, \quad B_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{n}_i u^i_{;\alpha\beta}. \tag{1.12}$$

Поворот элемента поверхности $d\xi^\alpha$ определяется величиной $\overset{\circ}{n}_i u^i_{,\alpha}$, а изгиб — ее производными по ξ^β. Выделим в выражении для $B_{\alpha\beta}$ производные от $\overset{\circ}{n}_i u^i_{,\alpha}$. Поскольку $B_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{n}_i u^i_{;\alpha\beta} \equiv \overset{\circ}{n}_i u^i_{;(\alpha\beta)}$ и $\overset{\circ}{n}_i u^i_{;\alpha\beta} = (\overset{\circ}{n}_i u^i_{,\alpha})_{;\beta} + \overset{\circ}{r}{}^i_\gamma u_{i,\alpha} \overset{\circ}{b}{}^\gamma_\beta$, применяя к последнему равенству операцию симметризации, найдем

$$B_{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{n}_i u^i_{,(\alpha)})_{;\beta)} + \overset{\circ}{r}{}^i_\gamma u_{i,(\alpha} \overset{\circ}{b}{}^\gamma_{\beta)}. \tag{1.13}$$

Первое слагаемое в (1.13) характеризует изгиб. Попытаемся упростить насколько возможно второе слагаемое. Представим градиент перемещений в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$\overset{\circ}{r}{}^i_\gamma u_{i,\alpha} = A_{\gamma\alpha} + \omega e_{\gamma\alpha}, \quad \omega = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \overset{\circ}{r}{}^i_\alpha u_{i,\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2\sqrt{\overset{\circ}{a}}}(u_{1,2} - u_{2,1}),$$

где $e_{\gamma\alpha}$ — двумерный тензор Леви-Чивита[1]) ($e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = \sqrt{\overset{\circ}{a}}$, $e^{12} = 1/\sqrt{\overset{\circ}{a}}$). Подстановка этого выражения в (1.13) позволяет переписать формулу для $B_{\alpha\beta}$ в виде

$$B_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^\lambda_{(\alpha} A_{\lambda\beta)}, \tag{1.14}$$

где через $\rho_{\alpha\beta}$ обозначен тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{n}_i u^i_{,(\alpha)})_{;\beta)} + \omega e_{\gamma(\alpha} \overset{\circ}{b}{}^\gamma_{\beta)}. \tag{1.15}$$

[1]) В этом и следующих четырех параграфах мы будем обозначать тензор Леви-Чивита через $e_{\alpha\beta}$, поскольку обозначение $\epsilon_{\alpha\beta}$ используется для тангенциальных компонент тензора деформаций.

Для конечных перемещений определим тензор $\rho_{\alpha\beta}$ равенством (1.14). В качестве меры изгиба вместо $B_{\alpha\beta}$ можно взять тензор $\rho_{\alpha\beta}$, поскольку пара тензоров $\{A_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}\}$ взаимно однозначно связана с парой $\{A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}\}$.

Мера изгиба $\rho_{\alpha\beta}$ была введена Койтером [312] и Сандерсом [379].

Отметим, что еще больше "упростить" меру изгиба, отбросив последнее слагаемое в (1.15), нельзя, так как при этом утратится инвариантность $\rho_{\alpha\beta}$ относительно движений оболочки как твердого целого (отбрасывание членов, содержащих $A_{\alpha\beta}$, очевидно, не влияет на обращение меры изгиба в нуль на перемещениях оболочки как твердого целого).

Приведем еще меры изгиба κ_1, κ_2, τ, использовавшиеся в работах А.Л. Гольденвейзера, В.В. Новожилова и Л.И. Балабуха. Определим κ_1, κ_2 и τ условием: в системе координат, координатные линии которой направлены по линиям кривизны:

$$\kappa_1 = -\rho_{\underline{1}\,\underline{1}}, \quad \kappa_2 = -\rho_{\underline{2}\,\underline{2}}, \quad \tau = -B_{\underline{1}\,\underline{2}}.$$

При написании физических компонент тензора соответствующие индексы подчеркиваются: $\rho_{\underline{1}\,\underline{1}} = \rho_{11}/\overset{\circ}{a}_{11}$, $\rho_{\underline{2}\,\underline{2}} = \rho_{22}/\overset{\circ}{a}_{22}$, $B_{\underline{1}\,\underline{2}} = B_{12}/\sqrt{\overset{\circ}{a}_{11}\overset{\circ}{a}_{22}}$. Построим тензор $\kappa_{\alpha\beta}$, физические компоненты которого в линиях кривизны совпадают с мерами изгиба κ_1, κ_2, τ:

$$\kappa_{\underline{1}\,\underline{1}} = \kappa_1, \quad \kappa_{\underline{1}\,\underline{2}} = \tau, \quad \kappa_{\underline{2}\,\underline{2}} = \kappa_2.$$

Пусть срединная поверхность оболочки $\overset{\circ}{\Omega}$ не содержит омбилических точек, т.е. точек, в которых радиусы кривизны совпадают. Введем тензор $\tilde{b} = \overset{\circ}{b}{}^{\gamma}_{(\alpha} e_{\gamma\beta)}$. Если координатные оси совпадают с линиями кривизны, то этот тензор имеет единственную отличную от нуля компоненту $\tilde{b}_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{\overset{\circ}{a}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны на поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$. Величина $\tilde{b} = \frac{1}{2}\tilde{b}_{\alpha\beta}\tilde{b}^{\alpha\beta}$ обращается в нуль только в омбилических точках и на рассматриваемой поверхности отлична от нуля. Определим тензор $d_{\alpha\beta}$ по формуле $d_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta}/\sqrt{\tilde{b}}$. В системе координат, направленной по линиям кривизны компоненты этого тензора имеют значения: $d_{11} = d_{22} = 0$, $d_{12} = d_{21} = 1$, если $R_1 > R_2$ и $d_{12} = d_{21} = -1$, если $R_1 < R_2$. Здесь проявляется зависимость тензора $d_{\alpha\beta}$, как и тензора Леви-Чивита, от выбора ориентации на $\overset{\circ}{\Omega}$. Тензор четвертого ранга $d_{\alpha\beta}d^{\gamma\delta}$ от ориентации уже не зависит. В каждой системе координат физические компоненты тензора $d_{\alpha\beta}$ ограничены сверху числом $\sqrt{2}$, поскольку $d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta} = 2$. В омбилических точках в определении тензора $d_{\alpha\beta}$ появляется неопределенность типа 0/0. Поэтому, если поверхность имеет омбилические точки, доопределим тензор $d_{\alpha\beta}$ в этих точках любым образом, но так, чтобы выполнялось равенство $d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta} = 2$. Рассмотрим тензор

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{H} d_{\alpha\beta}d^{\gamma\delta}A_{\gamma\delta}, \tag{1.16}$$

здесь $\overset{\circ}{H} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\alpha}$ — средняя кривизна $\overset{\circ}{\Omega}$. Поскольку в линиях кривизны, согласно (1.14), $B_{\underline{1}\,\underline{2}} = \rho_{\underline{1}\,\underline{2}} + \overset{\circ}{H}A_{\underline{1}\,\underline{2}}$, $d_{\underline{1}\,\underline{1}} = d_{\underline{2}\,\underline{2}} = 0$, $d_{\underline{1}\,\underline{2}}d^{\underline{1}\,\underline{2}} = 1$, физические компоненты тензора $\kappa_{\alpha\beta}$ совпадают с κ_1, κ_2, τ.

Уравнения теории оболочек для малых деформаций. Дальше ограничимся рассмотрением малых деформаций – деформаций, при которых амплитуда растяжения $\epsilon_A = \max\limits_{\Omega}(A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta})^{1/2}$ и амплитуда изгиба $\epsilon_B = h\max\limits_{\Omega}(B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta})^{1/2}$ считаются столь малыми, что ими можно пренебречь по сравнению с единицей.

Для малых деформаций в уравнениях движения (1.10) ковариантную производную вдоль заранее неизвестной поверхности Ω можно заменить на ковариантную производную вдоль заданной поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$. Действительно, для связности $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ на Ω справедлива формула, аналогичная (1.3.23),

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = a^{\gamma\sigma}(A_{\alpha\sigma;\beta} + A_{\beta\sigma;\alpha} - A_{\alpha\beta;\sigma}). \tag{1.17}$$

Поэтому $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} \sim \epsilon_A/l$, где l – характерный масштаб изменения напряженного состояния вдоль Ω[1]), и замена $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ на $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ соответствует отбрасыванию членов порядка ϵ_A по сравнению с единицей.

Пусть плотность энергии Φ задана как функция $A_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$. Обозначим через $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ производные Φ по $A_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$:

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Phi(A,\rho)}{\partial A_{\alpha\beta}}, \quad m^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Phi(A,\rho)}{\partial\rho_{\alpha\beta}}. \tag{1.18}$$

Тензоры $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$, входящие в уравнения движения оболочки, выражаются через $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ по формулам

$$T^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{[\alpha}_{\gamma}m^{\gamma\beta]} + (b^{\alpha}_{\gamma} - \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\gamma})m^{\gamma\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = -m^{\alpha\beta}. \tag{1.19}$$

Здесь учтено, что с принятой точностью $\theta = 1$.

В физически линейной теории Φ есть квадратичная форма по мерам растяжения и изгиба. Последнее слагаемое в выражении для $T^{\alpha\beta}$ (1.19) приводит к таким же добавкам, как и кубические члены в Φ. Поэтому в физически линейной теории его естественно опустить. В результате система уравнений теории оболочек приобретает следующую форму:

$$\begin{gathered} t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + b^{\alpha}_{\lambda}m^{\lambda\beta}{}_{;\beta} + Q^{\alpha} = \bar{\rho}r^{\alpha}_{i}\frac{\partial^2 r^i}{\partial t^2}, \quad t^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{[\alpha}_{\gamma}m^{\gamma\beta]}, \\ m^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + Q = \bar{\rho}n_i\frac{\partial^2 r^i}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Запишем теперь краевые условия в приближении малых деформаций. Покажем сначала, что сопутствующие компоненты касательного и нормального векторов к границе срединной поверхности в деформированном состоянии τ^{α}, ν^{α} отличаются от соответствующих величин в недеформированном состоянии $\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha}$, $\overset{\circ}{\nu}{}^{\alpha}$ на величины порядка ϵ_A по сравнению с единицей.

Пусть $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\overset{\circ}{s})$ – уравнение контура $\overset{\circ}{\Gamma}$, $\overset{\circ}{s}$ – длина дуги на $\overset{\circ}{\Gamma}$. Тогда $\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha} = d\xi^{\alpha}/d\overset{\circ}{s}$. Поскольку контур $\overset{\circ}{\Gamma}$ не перемещается по частицам, вектор

[1]) О характерных масштабах см. § 3 гл. I, полное определение будет дано ниже.

τ^α пропорционален $d\xi^\alpha/d\overset{\circ}{s}$, при этом коэффициент пропорциональности $ds/d\overset{\circ}{s}$ отличается от единицы на величину порядка ϵ_A. Следовательно, $\tau^\alpha = \overset{\circ}{\tau}{}^\alpha + O(\epsilon_A)$. Векторы ν^α и $\overset{\circ}{\nu}{}^\alpha$ определяются из уравнений $a_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta = 1$, $a_{\alpha\beta}\nu^\alpha\tau^\beta = 0$, $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nu}{}^\alpha\overset{\circ}{\nu}{}^\beta = 1$, $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nu}{}^\alpha\overset{\circ}{\tau}{}^\beta = 0$. Поэтому $\nu^\alpha = \overset{\circ}{\nu}{}^\alpha + 0(\epsilon_A)$.

Заменяя в краевых условиях (1.11) векторы τ^α, ν^α на векторы $\overset{\circ}{\tau}{}^\alpha$, $\overset{\circ}{\nu}{}^\alpha$, а дифференцирование по s на дифференцирование по $\overset{\circ}{s}$, получим краевые условия теории малых деформаций

$$t^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nu}_\beta + m^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\tau}_\alpha\overset{\circ}{\nu}_\beta\overset{\circ}{\tau}{}^\lambda b^\alpha_\lambda = R^\alpha,$$
$$\overset{\circ}{\nu}_\beta m^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + \frac{d}{d\overset{\circ}{s}}(m^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nu}_\beta\overset{\circ}{\tau}_\alpha) = -R, \qquad m^{\alpha\beta}\overset{\circ}{\nu}_\alpha\overset{\circ}{\nu}_\beta = -M. \tag{1.21}$$

Построение теории оболочек завершается указанием способа вычисления функции Ф по характеристикам материала и геометрии оболочки, метода определения трехмерного напряженного состояния по двумерным характеристикам и связи между Q_i, R_i и M и поверхностными силами, действующими на оболочку.

Поверхностная плотность энергии. *Классические теории оболочек.* Оказывается, что в первом приближении, когда в энергии пренебрегается поправками порядка ϵ_A, ϵ_B, h/R и h/l по сравнению с единицей, для поверхностной плотности энергии изотропной оболочки с параметрами Ламе λ и μ верна формула

$$\Phi = \mu h(\sigma(A^\alpha_\alpha)^2 + A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}) + \frac{\mu h^3}{12}(\sigma(\rho^\alpha_\alpha)^2 + \rho_{\alpha\beta}\rho^{\alpha\beta}), \quad \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \tag{1.22}$$

При этом растягивающие усилия и изгибающие моменты связаны с мерами деформации уравнениями состояния

$$n^{\alpha\beta} = 2\mu h(\sigma A^\lambda_\lambda\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta}), \quad m^{\alpha\beta} = \frac{\mu h^3}{6}(\sigma\rho^\lambda_\lambda\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta}). \tag{1.23}$$

Выражение для энергии (1.22) и уравнения состояния (1.23) были предложены Койтером [312] и Сандерсом [379].

Обозначим через $F(A)$ энергию растяжения

$$F(A) = \mu h(\sigma(A^\alpha_\alpha)^2 + A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}). \tag{1.24}$$

Тогда энергия изгиба равна $\frac{1}{12}F(h\rho)$ и энергия оболочки по теории Койтера–Сандерса записывается в форме

$$\Phi = F(A) + \frac{1}{12}F(h\rho).$$

Исторически первой энергетической линейной теорией оболочек была теория Новожилова – Балабуха [181], в которой плотность энергии Ф имела вид

$$\Phi = \mu h(\sigma(A^\alpha_\alpha)^2 + A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}) + \frac{\mu h^3}{12}(\sigma(\kappa^\alpha_\alpha)^2 + \kappa_{\alpha\beta}\kappa^{\alpha\beta}), \tag{1.25}$$

где $\kappa_{\alpha\beta}$ – мера изгиба (1.16). Согласно (1.18) в теории Новожилова –

Балабуха уравнения состояния записываются следующим образом[1]):

$$n^{\alpha\beta} = 2\mu h(\sigma A^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{a}^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta}) - \frac{\mu h^3}{12}\overset{\circ}{H}d^{\alpha\beta}d^{\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta},$$
$$M^{\alpha\beta} = -m^{\alpha\beta} = \frac{\mu h^3}{6}(\sigma\kappa^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{a}^{\alpha\beta} + \kappa^{\alpha\beta}). \qquad (1.26)$$

Плотности энергии (1.22) и (1.25) различаются в перекрестных членах вида $\mu h^3\overset{\circ}{b}AB$ (индексы опущены). Эти члены малы по сравнению с включенными в выражения (1.22) и (1.25), так как, в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\mu h^3\overset{\circ}{b}AB \leqslant \mu h\overset{\circ}{b}(A^2 + h^2B^2), \qquad (1.27)$$

и перекрестные члены вносят вклад не больше чем порядка h/R по сравнению с единицей. В частности, такую же точность, как формулы (1.22) и (1.25), имеет выражение

$$\Phi = \mu h(\sigma(A^{\alpha}_{\alpha})^2 + A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}) + \frac{\mu h^3}{12}(\sigma(B^{\alpha}_{\alpha})^2 + B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}). \qquad (1.28)$$

Теории оболочек[2]) с плотностями энергии (1.22), (1.25) и (1.28) будем называть классическими.

О других формах классической теории оболочек. Плотность энергии Ф является сложной нелинейной функцией от производных закона движения оболочки $r^i(\xi^{\alpha}, t)$. Возникает вопрос об упрощении выражения для Ф, учитывая, что оно является приближенным. Меры растяжения $A_{\alpha\beta}$ квадратичны по $r^i_{,\alpha}$ и от этой нелинейности вряд ли можно избавиться в общем случае. Поэтому энергия растяжения будет полиномом по r^i_{α} четвертой степени. Компоненты второй квадратичной формы, а следовательно, меры изгиба $B_{\alpha\beta}$, зависят от производных r^i крайне сложным образом:

$$b_{\alpha\beta} = n_i r^i_{\alpha;\beta}, \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{a}}e_{ijk}r^j_1 r^k_2.$$

Вместо a в выражении для n_i можно поставить $\overset{\circ}{a}$ (это связано с отбрасыванием величины порядка ϵ_A по сравнению с единицей). После этого $b_{\alpha\beta}$ станет кубической формой по производным r^i, а энергия изгиба – формой шестой степени. Покажем, что в рамках точности классической теории энергию изгиба можно представить формой третьей степени.

Привлекая разбиение единичного тензора (1.3.102), запишем произведение $b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}$ в виде

$$b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} = n_i r^i_{\alpha;\beta}n_j r^j_{\gamma;\delta} = (\delta_{ij} - r^{\sigma}_i r_{j\sigma})r^i_{\alpha;\beta}r^j_{\gamma;\delta} = r^i_{\alpha;\beta}r_{i\gamma;\delta} - r^{\sigma}_i r^i_{\alpha;\beta}r_{j\sigma}r^j_{\gamma;\delta}.$$

Заметим теперь, что $r^{\sigma}_i r^i_{\alpha;\beta} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\alpha\beta}$ и по формуле (1.17) $r^{\sigma}_i r^i_{\alpha;\beta} = O\left(\frac{\epsilon_A}{l}\right)$. Отбрасывание этого слагаемого не выводит за рамки точности классической теории, поэтому можно принять, что

$$b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} = r^i_{\alpha;\beta}r_{i\gamma;\delta},$$

и энергия изгиба приобретает вид

$$F(hB) = \frac{\mu h^3}{12}(\sigma r^{i\alpha}{}_{;\alpha}r^{\beta}_{i\,;\beta} - 2\sigma b^{\alpha}_{\alpha}\overset{\circ}{b}{}^{\beta}_{\beta} + r^{i\alpha;\beta}r_{i\alpha;\beta} - 2b^{\alpha\beta}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}) + F(\overset{\circ}{hb}).$$

[1]) Если переписать уравнения состояния (1.26) как уравнения для $T_1 = T_{11}$, $T_2 = T_{22}$, $S = S_{12}$, $M_1 = M_{11}$, $M_2 = M_{22}$ и $H = M_{12}$, то они перейдут в уравнения, выведенные в [181].

[2]) Мы следуем исторической традиции, согласно которой модели оболочек называют теориями оболочек.

Тензор $b_{\alpha\beta}$ является кубическим по производным r^i, следовательно, энергия изгиба – кубическая форма по производным r^i. Для пластин ($\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} = 0$) энергия изгиба – квадратичная положительно определенная форма по вторым производным от r^i.

За счет отбрасывания или, что то же самое, добавления с другим знаком членов, содержащих $A_{\alpha\beta;\gamma}$, новый функционал энергии будет чувствовать значения на границе не только r^i и n^i, но и всех первых производных от r^i; поэтому кинематические краевые условия будут заключаться в задании на границе r^i и r^i_α. В теории возникает пограничный слой с размером порядка h, однако двумерная нелинейная теория в целом будет проще, чем теория с энергией (1.28).

Остальная часть этого параграфа посвящена обоснованию формулы (1.22). При этом попутно выводятся соотношения, позволяющие рассчитывать по двумерным характеристикам трехмерное напряженное состояние, а также выражения Q_i, R_i, M через поверхностные силы, действующие на оболочку.

Трехмерная задача. Введем в $\overset{\circ}{V}$ криволинейную систему координат ξ^α, ξ по формулам

$$x^i = r^i(\xi^\alpha) + \xi \overset{\circ}{n}{}^i(\xi^\alpha). \tag{1.29}$$

Координаты ξ^α, ξ изменяются в цилиндре высотой h: $\xi^\alpha \in \overset{\circ}{\Omega}$, $|\xi| \leqslant \frac{h}{2}$; область изменения ξ^α, так же как и срединная поверхность, обозначается через $\overset{\circ}{\Omega}$. Координата ξ играет выделенную роль и поэтому не нумеруется; в формулах, в которые лагранжевы координаты входят равноправно, координате ξ приписывается номер 3.

Движение упругого тела определяется функциями $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$. Будем считать, что на части $\overset{\circ}{\Gamma}_u \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ границы оболочки функции $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$ заданы

$$x^i(\xi^\alpha, \xi, t) = \tilde{x}^i \quad \text{на} \quad \overset{\circ}{\Gamma}_u \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]. \tag{1.30}$$

Примем также, что на лицевые стороны оболочки $\overset{\circ}{\Omega}_\pm$, определяемые уравнениями $\xi = \pm\frac{h}{2}$, а также на часть края оболочки $\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{\Gamma}_p \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ ($\overset{\circ}{\Gamma}_p = \overset{\circ}{\Gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_u$) действуют мертвые поверхностные силы P_i. Тогда истинное движение упругого тела есть стационарная точка функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\overset{\circ}{V}} \rho_0 \left(\frac{1}{2} v_i v^i - U \right) d\overset{\circ}{v} + \int_{\overset{\circ}{\Omega}_\pm} P_i x^i d\overset{\circ}{\omega}_\pm + \int_{\overset{\circ}{S}} P_i x^i d\overset{\circ}{\sigma} \right] dt \tag{1.31}$$

на множестве функций $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$, принимающих заданные значения на $\overset{\circ}{\Gamma}_u \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, а также в начальный и конечный моменты времени. В (1.31) $d\overset{\circ}{\omega}_\pm$ – элементы площади на $\overset{\circ}{\Omega}_\pm$.

Внутренняя задача. Обозначим через l_1 и l_2 характерные масштабы изменения напряженного состояния по координатам ξ^1, ξ^2. Масштабы l_1 и l_2 зависят от точки поверхности.

Характер напряженного состояния существенно связан с относительной величиной параметров h, l_1 и l_2. Разобьем оболочку на три части V_1, V_2

и V_3: в V_1 отношение h к одному из масштабов l_1, l_2 много меньше единицы, к другому – порядка или больше единицы, в V_2 отношение h к каждому из масштабов l_1, l_2 много меньше единицы, в V_3 параметры h, l_1 и l_2 сравнимы друг с другом. Области V_1, V_2 и V_3 в переменных ξ^α, ξ суть цилиндры. Их пересечения с $\overset{\circ}{\Omega}$ обозначим через Ω_1, Ω_2 и Ω_3. Индексы у областей V_1 и V_2 выбраны в соответствии с тем, что в области V_1 можно приближенно перейти от трехмерной задачи к одномерной (к стержню), в области V_2 – к двумерной. В области V_3 задача остается трехмерной.

Примем, что $V_3 = \phi$, так что $\overset{\circ}{V} = V_1 + V_2$.

Обозначим через $\overset{*}{\Gamma}$ границу области Ω_2, через $\overset{*}{\Sigma}$ – поверхность $\overset{*}{\Gamma} \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$. Зададимся на $\overset{*}{\Sigma}$ какими-нибудь значениями перемещений, которые не препятствуют возможности заменить в V_2 трехмерную задачу двумерной: при $\xi^\alpha \in \overset{*}{\Gamma}$

$$x^i(\xi^\alpha, \xi, t) = \overset{*}{x}{}^i(\xi^\alpha, \xi, t). \tag{1.32}$$

Тогда функционал (1.31) разбивается на сумму двух функционалов

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{V_1} \rho_0 \left(\frac{1}{2} v_i v^i - U \right) d\overset{\circ}{v} + \int_{\Omega_{1\pm}} P_i x^i d\overset{\circ}{\omega}_\pm + \int_{\overset{\circ}{S}} P_i x^i d\overset{\circ}{\sigma} \right] dt,$$

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{V_2} \rho_0 \left(\frac{1}{2} v_i v^i - U \right) d\overset{\circ}{v} + \int_{\overset{\circ}{\Omega}_{2\pm}} P_i x^i d\overset{\circ}{\omega}_\pm \right] dt,$$

каждый из которых можно исследовать независимо: стационарные точки I_2 ищутся на множестве функций $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$, удовлетворяющих ограничениям (1.32) и принимающих в начальный и конечный моменты времени заданные значения, функционала I_1 – на множестве функций, удовлетворяющих, кроме того, краевым условиям (1.30). Мы рассмотрим задачу о приближенном построении стационарных точек функционала I_2 – внутреннюю задачу [1]).

Поскольку область V_1 дальше не встречается, индекс 2 у V_2 опускается и действие записывается в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \rho_0 \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U \right) dv + \int_{\overset{\circ}{\Omega}_\pm} P_i x^i d\omega_\pm \right] dt, \tag{1.33}$$

а на $\partial\overset{\circ}{\Omega} \times [-h/2, h/2]$ считаются выставленными условиями (1.32).

Малые параметры и классификация двумерных теорий оболочек. В задаче имеется два малых параметра – геометрический параметр h/R и параметр изменяемости напряженного состояния h/l, где $l = \min\{l_1, l_2\}$. Мы введем еще один малый параметр предположением, что амплитуда деформаций $\epsilon = \max\limits_{\overset{\circ}{V}} (\epsilon_{ab} \epsilon^{ab})^{1/2}$ гораздо меньше единицы. Кроме того, мы

[1]) Исследование функционала I_1 при $V_3 = \phi$ приведено в работе [31]

ограничимся рассмотрением низкочастотных колебаний оболочек, т.е. колебаний, характерный масштаб времени которых τ определяется соотношением $\tau = l/c$, где $c = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость волн сдвига [1]).

Двумерные теории оболочек будем строить при помощи формального предельного перехода $h \to 0$. При этом считается, что срединная поверхность $\overset{\circ}{\Omega}$ фиксирована (и, следовательно, фиксирован масштаб R), а l, τ и ϵ могут изменяться вместе с h тем или иным образом в соответствии с характером зависимости от h внешних воздействий. Поскольку $\tau = l/c$, имеется три, вообще говоря, независимых малых параметра: h/l, h/R и ϵ.

Наличие трех малых параметров порождает большое разнообразие асимптотик. Уменьшим число возможных случаев при помощи следующих соображений. Для металлов $\epsilon \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$, и нет смысла удерживать члены порядка ϵ по сравнению с единицей. Для тонких оболочек ($h/R \leqslant 10^{-2}$) слагаемые порядка h/R следует отбросить. Для оболочек средней толщины ($h/R \sim 10^{-1} \div 2 \cdot 10^{-1}$) учет поправок порядка h/R может представить интерес. Численные расчеты показывают, что для гладких, но достаточно быстро меняющихся напряженных состояний двумерные теории иногда удовлетворительно работают вплоть до $h/l \sim 1/2$, и целесообразно строить двумерную теорию, в которой учитываются поправки порядка h/l и $(h/l)^2$. В связи с этим дальше рассмотрим следующие приближенные теории:

классическая теория	$1 + \cancel{\frac{h}{l}} + \cancel{\frac{h}{R}} + \cancel{\frac{h^2}{l^2}} + \cancel{\frac{h^2}{lR}} + \cancel{\frac{h^2}{R^2}} + \cancel{\epsilon} + \ldots,$
основная уточненная теория	$1 + \frac{h}{l} + \cancel{\frac{h}{R}} + \cancel{\frac{h^2}{l^2}} + \cancel{\frac{h^2}{lR}} + \cancel{\frac{h^2}{R^2}} + \cancel{\epsilon} + \ldots,$
теория, учитывающая геометрическую поправку	$1 + \frac{h}{l} + \frac{h}{R} + \cancel{\frac{h^2}{l^2}} + \cancel{\frac{h^2}{lR}} + \cancel{\frac{h^2}{R^2}} + \cancel{\epsilon} + \ldots,$
теория с учетом поперечного сдвига	$1 + \frac{h}{l} + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{l^2} + \cancel{\frac{h^2}{lR}} + \cancel{\frac{h^2}{R^2}} + \cancel{\epsilon} + \ldots$

Здесь указаны сохраняемые и отбрасываемые по сравнению с единицей члены. Наименование последней теории связано с тем, что учет поперечного сдвига приводит к поправкам порядка h^2/l^2.

Разделение уточнений классической теории на три отдельные теории методически удобно, однако следует подчеркнуть, что оно носит несколько условный характер. Последовательность, в которой расположены уточненные теории, подразумевает, что $l \ll R$ и $\epsilon \ll h/R$. Если, например, $l \sim R$, то следующее приближение к классической теории дает теория, учитывающая геометрическую поправку, а теория с учетом поперечного сдвига асимптотически непоследовательна, так как в ней сохранены поправки порядка h^2/l^2 и отброшены поправки порядка h^2/R^2. Если $l \sim \sqrt{hR}$, то первое уточнение классической теории дает основная уточненная теория, а следующее – теория с учетом поперечного сдвига, так как $\frac{h^2}{l^2} \sim \frac{h}{R}$.

[1]) Высокочастотные колебания оболочек, для которых $\tau \sim h/c$, рассмотрены в § 4.

В осиовной уточненной теории предполагается, что $\epsilon \ll \frac{h}{l}$, в теории, учитывающей геометрическую поправку, и теории с учетом поперечного сдвига – что $\epsilon \ll \frac{h}{l} + \frac{h}{R}$. При $\epsilon \sim \frac{h}{R}$ или $\epsilon \sim \frac{h}{l}$ все указанные уточненные теории являются асимптотически непоследовательными.

Вывод классической теории оболочек. *Геометрические соотношения.* Вычислим компоненты метрического тензора сопутствующей системы координат в начальном состоянии. Дифференцируя равенства (1.29) по ξ^α и используя соотношения (1.1), получим

$$\overset{\circ}{x}{}^i_{,\alpha} = \overset{\circ}{\mu}{}^\beta_\alpha \overset{\circ}{r}{}^i_\beta, \quad \overset{\circ}{\mu}{}^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - \xi \overset{\circ}{b}{}^\beta_\alpha, \quad \overset{\circ}{x}{}^i_{,\xi} = \overset{\circ}{n}{}^i. \tag{1.34}$$

Из (1.34) находим

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{x}{}^i_{,\alpha} \overset{\circ}{x}_{i\beta} = \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} - 2\xi \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} + \xi^2 \overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha 3} = 0, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = 1, \tag{1.35}$$

где $\overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}$ – компоненты третьей квадратичной формы срединной поверхности: $\overset{\circ}{c}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{b}{}^\lambda_\alpha \overset{\circ}{b}_{\lambda\beta}$. Тензор $\overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}$ можно выразить через тензоры $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$

$$\overset{\circ}{c}_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{\mathrm{K}} \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} + 2\overset{\circ}{\mathrm{H}} \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}, \quad \overset{\circ}{\mathrm{K}} = \det \| \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} \| / \overset{\circ}{a}, \quad \overset{\circ}{\mathrm{H}} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{b}{}^\alpha_\alpha. \tag{1.36}$$

В главной системе координат тензора $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$ легко вычислить детерминант $\overset{\circ}{g} = \det \| \overset{\circ}{g}_{ab} \|$:

$$\kappa \equiv \sqrt{\overset{\circ}{g}} / \sqrt{\overset{\circ}{a}} = 1 - 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\xi + \overset{\circ}{\mathrm{K}}\xi^2. \tag{1.37}$$

В силу инвариантности равенства (1.37) относительно замены координат на срединной поверхности оно справедливо в любых координатах ξ^α. Из (1.37) следует, что $d\overset{\circ}{v} = \kappa d\overset{\circ}{\omega} d\xi$, где $d\overset{\circ}{\omega}$ – элемент площади на $\overset{\circ}{\Omega}$:

$$d\overset{\circ}{\omega} = \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\xi^1 d\xi^2, \text{ а на } \overset{\circ}{\Omega}_+ \text{ и } \overset{\circ}{\Omega}_-$$

$$d\overset{\circ}{\omega}_+ = (1 - \overset{\circ}{\mathrm{H}}h + \tfrac{1}{4}\overset{\circ}{\mathrm{K}}h^2) d\overset{\circ}{\omega}, \quad d\overset{\circ}{\omega}_- = (1 + \overset{\circ}{\mathrm{H}}h + \tfrac{1}{4}\overset{\circ}{\mathrm{K}}h^2) d\overset{\circ}{\omega}.$$

Контрвариантные компоненты метрического тензора даются формулами

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa^2} [(1 - 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\xi)^2 \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + 2\xi(1 - 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\xi) \overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta} + \xi^2 \overset{\circ}{c}{}^{\alpha\beta}], \tag{1.38}$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha 3} = 0, \quad \overset{\circ}{g}{}^{33} = 1.$$

К формуле (1.38) можно прийти, например, таким путем. Обозначим через $\overset{\circ}{\lambda}{}^\alpha_\beta$ тензор, обратный к тензору $\overset{\circ}{\mu}{}^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - \xi \overset{\circ}{b}{}^\beta_\alpha$. Отыскивая $\overset{\circ}{\lambda}{}^\alpha_\beta$ в виде $\overset{\circ}{\lambda}{}^\alpha_\beta = A\delta^\alpha_\beta + B\overset{\circ}{b}{}^\alpha_\beta$, из уравнения $\overset{\circ}{\mu}{}^\beta_\alpha \overset{\circ}{\lambda}{}^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha$, используя (1.36), получим систему линейных уравнений относительно A и B

$$A + \xi\overset{\circ}{\mathrm{K}}B = 1, \quad -\xi A + (1 - 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\xi)B = 0.$$

Отсюда

$$\overset{\circ}{\lambda}{}^\alpha_\beta = \frac{1}{\kappa} ((1 - 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\xi)\delta^\beta_\alpha + \xi \overset{\circ}{b}{}^\beta_\alpha). \tag{1.39}$$

Компоненты матрицы $\overset{\circ}{\xi}{}^a_i$, обратной матрице $\overset{\circ}{x}{}^i_a$ (1.34), имеют вид

$$\overset{\circ}{\xi}{}^\alpha_i = \lambda^{\alpha\beta}\overset{\circ}{r}_{i\beta}, \quad \overset{\circ}{\xi}{}^3_i = \overset{\circ}{n}_i \tag{1.40}$$

(достаточно проверить, что компоненты матрицы (1.40) удовлетворяют равенству $\overset{\circ}{x}{}^a_b \overset{\circ}{\xi}{}^a_i = \delta^a_b$).

Для вывода (1.38) остается заметить, что $\overset{\circ}{g}{}^{ab} = \overset{\circ}{\xi}{}^a_i \overset{\circ}{\xi}{}^{bi}$.

Внутренняя энергия. Рассмотрим сначала оболочку из изотропного упругого материала:

$$2U = \lambda(\overset{\circ}{g}{}^{ab}\epsilon_{ab})^2 + 2\mu\overset{\circ}{g}{}^{ab}\overset{\circ}{g}{}^{cd}\epsilon_{ac}\epsilon_{bd} =$$

$$= \lambda(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{33})^2 + 2\mu\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{\circ}{g}{}^{\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + 4\mu\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{\beta 3} + 2\mu\epsilon^2_{33}. \tag{1.41}$$

Зависимость $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$ от поперечной координаты определена равенствами (1.38). Компоненты тензора деформаций выражаются через закон движения по общим формулам геометрически нелинейной теории

$$2\epsilon_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha}x_{i,\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}, \quad 2\epsilon_{\alpha 3} = x^i_{,\alpha}x_{i,\xi}, \quad 2\epsilon_{33} = x^i_{,\xi}x_{i,\xi} - 1. \tag{1.42}$$

Из производных функций $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$ по координатам ξ, ξ^α и t "наибольшей" является $x^i_{,\xi}$, поскольку соответствующие масштабы есть h, l и l/c. Поэтому выражение (1.41) удобно преобразовать к форме, в которой производные $x^i_{,\xi}$, входящие в компоненты тензора деформаций $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33}, выделены. Сделаем это следующим образом. Введем "продольную" упругую энергию $U_\parallel$ соотношением

$$U_\parallel = \min_{\epsilon_{\alpha 3},\, \epsilon_{33}} U. \tag{1.43}$$

Продольная энергия не зависит от $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33} и совпадает с U при равных нулю значениях компонент тензора напряжений $p^{\alpha 3} = \rho\dfrac{\partial U}{\partial\epsilon_{\alpha 3}}$ и $p^{33} = \rho\dfrac{\partial U}{\partial\epsilon_{33}}$. От $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33} будет зависеть "поперечная" упругая энергия

$$U_\perp = U - U_\parallel. \tag{1.44}$$

Вычисления дают

$$U_\parallel = \mu[\sigma(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta})^2 + \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\gamma}\overset{\circ}{g}{}^{\beta\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}], \quad \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu},$$

$$U_\perp = \tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\epsilon_{33} + \sigma\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta})^2 + 2\mu\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{\beta 3}. \tag{1.45}$$

Внешние силы. Условие ограниченности деформаций (заведомо $\epsilon < 1$) при $h \to 0$ накладывает на внешние силы определенные ограничения. Прежде всего, ясно, что работа внешних сил в функционале I (1.33) должна быть того же порядка, что и энергия, т.е. $\mu\epsilon^2 h\,|\overset{\circ}{\Omega}|$. Поскольку $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$ в случае общего положения конечны при $h \to 0$, $P_i = O(h)$. Устремим теперь ϵ к нулю. Так как внешние силы пропорциональны деформациям, $P_i = O(\mu\epsilon h)$. Оценка должна содержать безразмерный малый параметр, и h следует заменить на $\dfrac{h}{l}$ или $\dfrac{h}{R}$ или сумму $\dfrac{h}{l} + \dfrac{h}{R}$. Поэтому в качестве основного предположения относительно внешних сил

примем, что на лицевых сторонах оболочки внешние силы удовлетворяют условию

$$P_i = O\left(\mu\epsilon\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)\right). \tag{1.46}$$

Множество $\mathcal{M}_0$. Теорию оболочек будем строить вариационно-асимптотическим методом. Положим сначала внешние силы на лицевых поверхностях равными нулю и выделим главный член функционала. Поскольку самый маленький масштаб изменения функции $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$ имеют по координате ξ, главный член функционала есть

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathring{V}}(\lambda + 2\mu)(x^i_{,\xi}\, x_{i,\xi})^2\, d\mathring{v}\, dt. \tag{1.47}$$

Функционал (1.47) не удерживает (см. § 2 гл. II) краевых условий по ξ^α и t; его минимум равен нулю и достигается на функциях $x^i = r^i(\xi^\alpha, t)$. Функции $r^i(\xi^\alpha, t)$ произвольны. Они образуют множество $\mathcal{M}_0$ общей схемы вариационно-асимптотического метода. Далее ищем стационарные точки в виде $x^i = r^i(\xi^\alpha, t) + x'^i(\xi^\alpha, \xi, t)$. Не ограничивая общности, на x'^i можно наложить ограничения

$$\langle x'^i(\xi^\alpha, \xi, t)\rangle = 0. \tag{1.48}$$

Угловыми скобками $\langle\cdot\rangle$ обозначается интеграл по ξ в пределах $[-h/2, h/2]$, отнесенный к h. Если бы функции x'^i не удовлетворяли (1.48), то выполнения (1.48) можно было бы добиться заменой $r^i \to r^i + \langle x'^i\rangle$, $x'^i \to x'^i - \langle x'^i\rangle$.

Выделим главные члены, содержащие x'^i. В силу (1.48) перекрестные члены между $x'^i_{,t}$ и $r^i_{,t}$ в кинетической энергии и перекрестные члены между $A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(r^i_\alpha r_{i\beta} - \mathring{a}_{\alpha\beta})$ и $x'^i_{,\alpha}$ в продольной энергии будут гораздо меньше перекрестных членов между $A_{\alpha\beta}$ и $x'^i_{,\xi}$ в поперечной энергии. Поэтому вместо $\mathring{g}_{\alpha\beta}$ в поперечной энергии в первом приближении можно сохранить $\mathring{a}_{\alpha\beta}$, вместо $\epsilon_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}$, вместо $\epsilon_{\alpha 3} - \frac{1}{2}r^i_\alpha x'_{i,\xi}$. Для определения x'^i получаем функционал

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathring{V}}[(\lambda + 2\mu)(\epsilon'_{33} + \sigma\mathring{a}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta})^2 + \mu\mathring{a}^{\alpha\beta}(r^i_\alpha x'_{i,\xi})(r^j_\beta x'_{j,\xi})]\, d\mathring{v}\, dt. \tag{1.49}$$

Минимум функционала (1.49) равен нулю и достигается на функциях $x'^i = n^i\xi\varphi$, $\frac{1}{2}(\varphi^2 - 1) = -\sigma\mathring{a}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$. Таким образом, следующий член асимптотического разложения целиком определяется по предыдущему, и множество $\mathcal{N}$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода совпадает с множеством $\mathcal{M}_0$ и состоит из функций $r^i(\xi^\alpha, t)$.

Дальше под $r^i(\xi^\alpha, t)$ будем понимать среднее по поперечной координате от функций $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$: $r^i(\xi^\alpha, t) = \langle x^i(\xi^\alpha, \xi, t)\rangle$, под Ω – поверхность, заданную уравнениями $x^i = r^i(\xi^\alpha, t)$.

Сделаем замену искомых функций

$$x^i(\xi^\alpha, \xi, t) = r^i(\xi^\alpha, t) + \xi n^i(\xi^\alpha) + hy^i(\xi^\alpha, \xi, t). \tag{1.50}$$

Приведенные выше рассуждения можно рассматривать как наводящие соображения для этой замены.

Согласно определению r^i, функции y^i удовлетворяют ограничениям

$$\langle y^i \rangle = 0. \tag{1.51}$$

Формула (1.50) устанавливает взаимно однозначные соответствия между всеми функциями $x^i(\xi^\alpha, \xi, t)$ и парами $\{r^i(\xi^\alpha, t), y^i(\xi^\alpha, \xi, t)\}$, в которых y^i подчинены условиями (1.51). Дальше мы зафиксируем $r^i(\xi^\alpha, t)$ и будем искать зависимость y^i от r^i, которая диктуется условием стационарности функционала действия по y^i.

Характерные масштабы. Пусть $y_\alpha \equiv r^i_\alpha y_i$, $y \equiv n^i y_i$, $\zeta = \xi/h$, $\Delta_\alpha = \max_{\mathring{V}} |y_{\alpha,\zeta}|$, $\Delta \equiv \max_{\mathring{V}} |y_{,\zeta}|$. В силу неравенства (2,1.10) $|y_\alpha| \leqslant \Delta_\alpha$, $|y| \leqslant \Delta$, и если $\Delta_\alpha = \Delta = 0$, то $y_\alpha = y = 0$.

Рассмотрим некоторую точку поверхности $\mathring{\Omega}$. Наилучшие постоянные l_1, l_2 в неравенствах

$$|A_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{\epsilon_A}{l_\gamma}, \quad h|B_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{\epsilon_B}{l_\gamma}, \quad |v^i_{,\alpha}| \leqslant \frac{c(\epsilon_A + \epsilon_B)}{l}, \quad |v^i| \leqslant c(\epsilon_A + \epsilon_B),$$

$$\max_\zeta |y_{\alpha,\beta}| \leqslant \frac{\Delta_\alpha}{l_\beta}, \quad \max_\zeta |y_{,\alpha}| \leqslant \frac{\Delta}{l_\alpha}, \quad |y_{\alpha,t}| \leqslant \frac{c\Delta_\alpha}{l}, \quad |y_{,t}| \leqslant \frac{c\Delta}{l}; \tag{1.52}$$

где

$$\epsilon_A = \max_\Omega (A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta})^{1/2}, \quad \epsilon_B = h \max_\Omega (B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta})^{1/2},$$

назовем характерными масштабами изменениями напряженного состояния вдоль срединной поверхности.

Некоторые оценки 1. Будем обозначать через m числа, не зависящие от h и от напряженного состояния. Буква m в разных неравенствах, или даже в одном неравенстве, но в разных слагаемых может иметь различные численные значения. Очевидно, что $|\mathring{a}_{\alpha\beta}| \leqslant m$, $|\mathring{a}^{\alpha\beta}| \leqslant m$, и, поскольку $\epsilon_A < m$ также $|a_{\alpha\beta}| < m$, $|a^{\alpha\beta}| < m$. Кроме того, $|\mathring{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}| \leqslant \frac{m}{d}$, где d – диаметр $\mathring{\Omega}$ (максимальное расстояние между точками $\mathring{\Omega}$).

2. Характерный радиус кривизны поверхности $\mathring{\Omega}$ определим как наилучшую постоянную в неравенствах

$$(\mathring{b}_{\alpha\beta}\mathring{b}^{\alpha\beta})^{1/2} \leqslant 1/R, \quad (\mathring{b}_{\alpha\beta;\gamma}\mathring{b}^{\alpha\beta;\gamma})^{1/2} \leqslant \frac{1}{R^2}.$$

Тогда

$$|\mathring{b}_{\alpha\beta}| \leqslant \frac{m}{R}, \quad |\mathring{b}_{\alpha\beta;\gamma}| \leqslant \frac{m}{R}.$$

3. Из определения ϵ_A и ϵ_B имеем

$$|A_{\alpha\beta}| \leqslant m\epsilon_A, \quad |B_{\alpha\beta}| \leqslant m\epsilon_B, \quad h|b_{\alpha\beta}| \leqslant m\left(\frac{h}{R} + \epsilon_B\right), \quad h|b^\alpha_\beta| \leqslant m\left(\frac{h}{R} + \epsilon_B\right). \tag{1.53}$$

4. Для связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ на Ω из (1.17) следует

$$|\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \mathring{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}| \leqslant m\frac{\epsilon_A}{l}, \quad |\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}| \leqslant \frac{m}{d} + m\frac{\epsilon_A}{l}. \tag{1.54}$$

Будем понимать дальше под l меньшее из d и l. Тогда оценка для объекта

связности примет вид

$$|\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}| \leqslant \frac{m}{l}. \tag{1.55}$$

5. Имеет место оценка

$$h^2 C_{\alpha\beta} = \frac{h^2}{2}(c_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}) = h^2 \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha} B_{\lambda\beta)} + O\left(\epsilon_B^2 + \frac{h}{R}\,\epsilon_A\epsilon_B + \frac{h^2}{R^2}\,\epsilon_A^2\right). \tag{1.56}$$

Здесь $c_{\alpha\beta} = a^{\mu\nu} b_{a\mu} b_{\beta\nu}$ – компоненты третьей квадратичной формы поверхности Ω. Соотношение (1.56) вытекает из тождества

$$\tfrac{1}{2}(c_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}) = \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha} B_{\lambda\beta)} + \tfrac{1}{2} B^{\lambda}_{\alpha} B_{\beta\lambda} + (a^{\mu\nu} - \overset{\circ}{a}{}^{\mu\nu})(\overset{\circ}{b}_{\alpha\mu} + B_{\alpha\mu})(\overset{\circ}{b}_{\beta\nu} + B_{\beta\nu})$$

и оценки $|a^{\mu\nu} - \overset{\circ}{a}{}^{\mu\nu}| \leqslant m\epsilon_A$.

6. Пусть $\Delta_\alpha < 1$, $\Delta < 1$. Тогда, начиная с некоторых достаточно малых $\frac{h}{l}$, $\frac{h}{R}$, ϵ,

$$\Delta_\alpha \leqslant m\epsilon, \quad \Delta \leqslant m\epsilon, \quad \epsilon_A \leqslant m\epsilon, \quad \epsilon_B \leqslant m\epsilon. \tag{1.57}$$

Доказательство оценок (1.57) начнем с записи выражения для компонент тензора деформаций через функции r^i и y^i:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta + h^2 C_{\alpha\beta}\zeta^2 + hr^i_{(\alpha} y_{i,\beta)} - h^2 b^{\mu}_{(\alpha} r^i_{\mu)} y_{i,\beta)}\zeta + \frac{1}{2} h^2 y^i_{,\alpha} y_{i,\beta},$$

$$2\epsilon_{\alpha 3} = r^i_{\alpha} y_{i,\zeta} - hb^{\mu}_{\alpha} r^i_{\mu} \zeta y_{i,\zeta} + hn^i y_{i,\alpha} + hy^i_{,\alpha} y_{i,\zeta}, \tag{1.58}$$

$$\epsilon_{33} = n^i y_{i,\zeta} + \tfrac{1}{2} y^i_{,\zeta} y_{i,\zeta}.$$

Перепишем определение ϵ_{33} в виде

$$y_{,\zeta}(1 + \tfrac{1}{2} y_{,\zeta}) = \epsilon_{33} - \tfrac{1}{2} a^{\alpha\beta} y_{\alpha,\zeta} y_{\beta,\zeta}.$$

Так как $\sup\limits_{\zeta} |y_{,\zeta}| = \Delta < 1$, $1 + \tfrac{1}{2} y_{,\zeta} \geqslant \tfrac{1}{2}$. Поэтому

$$|y_{,\zeta}| \leqslant 2|\epsilon_{33}| + a^{\alpha\beta}\Delta_\alpha\Delta_\beta \leqslant 2|\epsilon_{33}| + m|\Delta_1^2 + \Delta_2^2|. \tag{1.59}$$

Определение $\epsilon_{\alpha 3}$ запишем в форме

$$y_{\alpha,\zeta} = 2\epsilon_{\alpha 3} + hb^{\mu}_{\alpha}\zeta y_{\mu,\zeta} - hy_{,\alpha} - hb^{\mu}_{\alpha} y_{\mu} - h(y_{,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} y_{\lambda})\, y_{,\zeta} -$$

$$- ha^{\mu\lambda}(\nabla_\alpha y_\mu - b_{\mu\alpha} y) y_{\lambda,\zeta}. \tag{1.60}$$

Согласно (1.52) и (1.55), $|\nabla_\alpha y_\mu| = |y_{\mu,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} y_\lambda| \leqslant m\,\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$. Используя также (1.52) – (1.55), из (1.60) получим

$$|y_{\alpha,\zeta}| \leqslant 2|\epsilon_{\alpha 3}| + m\left(\frac{h}{R} + \epsilon_B\right)(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{h}{l}\,\Delta\left(\frac{h}{R} + \epsilon_B\right)\Delta(\Delta_1 + \Delta_2) +$$

$$+ m\,\frac{h}{l}(\Delta_1 + \Delta_2)^2 \leqslant 2|\epsilon_{\alpha 3}| + m\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R} + \epsilon_B\right)(\Delta_1 + \Delta_2) + m\,\frac{h}{l}\,\Delta.$$

Отсюда, привлекая (1.59), имеем

$$\Delta_1 + \Delta_2 \leqslant 2(|\epsilon_{13}| + |\epsilon_{23}|) + m\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R} + \epsilon_B\right)(\Delta_1 + \Delta_2) + m\,\frac{h}{l}\,|\epsilon_{33}|.$$

Следовательно, при достаточно малых значениях $\frac{h}{l} + \frac{h}{R} + \epsilon_B$ $\Delta_1 + \Delta_2 \leqslant m\epsilon$. Из (1.59) тогда вытекает, что и $\Delta \leqslant m\epsilon$.

Положим в формуле для $\epsilon_{\alpha\beta}$ (1.58) $\zeta = 0$, и оценим $A_{\alpha\beta}$ через остальные слагаемые:

$$|A_{\alpha\beta}| = |\epsilon_{\alpha\beta} - h(\nabla_{(\alpha} y_{\beta)} - b_{\alpha\beta} y) - \tfrac{1}{2} h^2 (y_{,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} y_{\lambda})(y_{,\beta} + b^{\mu}_{\beta} y_{\mu}) -$$

$$- \tfrac{1}{2} h^2 a^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} y_{\mu} - b_{\mu\alpha} y)(\nabla_{\beta} y_{\nu} + b_{\nu\beta} y)|_{\zeta=0} \leqslant$$

$$\leqslant m\epsilon + m \frac{h}{l} (\Delta_1 + \Delta_2) + m \left(\frac{h}{R} + \epsilon_B \right) + m \Big(\frac{h}{R} \Delta +$$

$$+ \left(\frac{h}{R} + \epsilon_B \right) (\Delta_1 + \Delta_2) \Big)^2 + m \left(\frac{h}{l} (\Delta_1 + \Delta_2) + \left(\frac{h}{R} + \epsilon_B \right) \Delta \right)^2 \leqslant m\epsilon.$$

Поэтому справедливо третье соотношение (1.57). Аналогично выводится четвертое соотношение (1.57). Для этого следует выразить $B_{\alpha\beta}$ из равенства, которое получается после умножения формулы для $\epsilon_{\alpha\beta}$ (1.58) на ζ и интегрирования по ζ.

В дальнейшем считаем, что условия $\Delta_{\alpha} < 1$ и $\Delta < 1$, при которых доказаны оценки (1.57), выполнены.

Вычисление y^i. Будем искать y^i. Функционал действия после подстановки в него замены (1.50) содержит много слагаемых, и, чтобы суметь выделить среди них главные и второстепенные, оценим прежде всего порядок y_{α} и y. Возьмем сначала для деформаций приближенные выражения

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta, \quad 2\epsilon_{\alpha 3} = y_{\alpha,\zeta} + hy_{,\alpha}, \quad \epsilon_{33} = y_{,\zeta}. \tag{1.61}$$

При этом функции y_{α} и y не войдут в продольную энергию. Кинетическую энергию и работу внешних сил пока отбросим. В первом приближении можно положить $\kappa = 1$, $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$. Слагаемые функционала действия, содержащие y_{α} и y, имеют вид

$$h \int_{t_0}^{t_1} \int_{\overset{\circ}{\Omega}} U_1 \, d\overset{\circ}{\omega} \, d\zeta = h \int_{t_0}^{t_1} \int_{\overset{\circ}{\Omega}} J \, d\overset{\circ}{\omega}, \tag{1.62}$$

$$J = \frac{1}{2} \langle (\lambda + 2\mu)(y_{,\zeta} + \sigma A^{\alpha}_{\alpha} - \sigma h B^{\alpha}_{\alpha}\zeta)^2 + \mu \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} (y_{\alpha,\zeta} + hy_{,\alpha})(\alpha \to \beta) \rangle.$$

Функционал (1.62) не удерживает краевых условий, и задача сводится к минимизации J при ограничениях $\langle y_{\alpha} \rangle = \langle y \rangle = 0$. Минимум J равен нулю и достигается на функциях

$$y_{\alpha} = \tfrac{1}{2} \sigma h A^{\beta}_{\beta,\alpha} (\zeta^2 - 1/12) - \frac{1}{6} \sigma h^2 B^{\beta}_{\beta,\alpha} \zeta (\zeta^2 - 1/4),$$

$$y = -\sigma A^{\alpha}_{\alpha} \zeta + \tfrac{1}{2} \sigma h B^{\alpha}_{\alpha} (\zeta^2 - 1/12). \tag{1.63}$$

Следовательно,

$$y \sim \epsilon_A + \epsilon_B, \quad y_{\alpha} \sim \frac{h}{l} (\epsilon_A + \epsilon_B). \tag{1.64}$$

Проверим теперь, допустимо ли было использование приближенных выражений для деформаций (1.61) и отбрасывание кинетической энергии и работы внешних сил.

Из (1.58) видно, что в силу оценок (1.64) в выражениях для $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33} все отброшенные члены дадут малые поправки к членам, которые входят в (1.61). В выражении для $\epsilon_{\alpha\beta}$ слагаемое $h^2 C_{\alpha\beta}\zeta^2$ может быть отпущено в силу оценки (1.56). Слагаемые, содержащие y, дадут в энергию

члены, малые по сравнению с членами, входящими в J. Среди слагаемых, содержащих y_α, наименьший порядок малости имеет $hr^i_{(\alpha}y_{i,\beta)} = h\nabla_{(\beta}y_{\alpha)} - hb_{\alpha\beta}y$. Рассмотрим порождаемые им перекрестные члены в энергии (квадратичный член $h^2y^i_{,\alpha}y_{i,\beta}$, согласно определению характерного масштаба (1.52), мал по сравнению с членами $(y_{\alpha,\xi})^2$ и $(y_{,\xi})^2$, входящими в J):

$$h\langle \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta})h\nabla_\gamma y_\delta\,\kappa\rangle.$$

Заметим, что при малых h/R, согласно (1.38),

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + 2\xi\overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta} + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right), \tag{1.65}$$

$$\overset{1}{g}{}^{\alpha\beta} = \sqrt{\kappa}\,\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + 2\zeta\overset{1}{b}{}^{\alpha\beta} + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right), \quad \overset{1}{b}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathrm{H}}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}.$$

В силу ограничения $\langle y_\alpha\rangle = 0$ имеем $\langle A_{\alpha\beta}\nabla_\gamma y_\delta\rangle = 0$. Главный перекрестный член между y_α и $A_{\alpha\beta}$ имеет вид $h^2\langle \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\gamma}\overset{1}{b}{}^{\beta\delta}A_{\alpha\beta}\nabla_\gamma y_\delta\rangle$, и, следовательно, мал по сравнению с перекрестным членом между $y_{\alpha,\xi}$ и $y_{,\alpha}$ в J. Главный перекрестный член между y_α и $B_{\alpha\beta}$ $h^2\langle B_{\alpha\beta}\nabla_\gamma y_\delta\rangle$ имеет тот же порядок малости, что и перекрестный член между $y_{\alpha,\xi}$ и $y_{,\alpha}$ в J. Поэтому для правильного вычисления y_α его следует сохранить.

В кинетической энергии квадратичный член $\rho_0h^2\dot{y}^i_{,t}\dot{y}_{i,t}$ можно отбросить как малый по сравнению со слагаемыми $\mu(y^\alpha_{,\xi}y_{\alpha,\xi} + y^2_{,\xi})$, в J. Перекрестный член в кинетической энергии $\rho_0h\langle \dot{r}^i_{,t}\dot{y}_{i,t}\kappa\rangle$, согласно (1.37), (1.51), (1.52), имеет порядок $(\epsilon_A + \epsilon_B)(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2)$ и гораздо меньше членов, входящих в J, поэтому его также следует отбросить.

Представим внешнюю силу на лицевой поверхности в виде $P^i = Pn^i + P^\alpha r^i_\alpha$. Работа сил Py внесет, согласно (1.46), вклад порядка $\mu(h/l + h/R)\epsilon^2$ и несущественна для определения y в первом приближении. Работа сил $P^\alpha y_\alpha$ имеет порядок $\mu\epsilon^2(h/l)^2$ и, следовательно вносит тот же вклад, что и $\mu y^\alpha_{,\xi}y_{\alpha,\xi}$. Поэтому она должна быть учтена. Сохранение указанных слагаемых не изменит порядка y_α и y и формулы для y (1.63).

Итак, имеют место оценки (1.64). Из этих оценок и формул (1.58) следует, что

$$|\epsilon_{\alpha\beta}| \leqslant m(\epsilon_A + \epsilon_B), \quad |\epsilon_{\alpha 3}| \leqslant m\frac{h}{l}(\epsilon_A + \epsilon_B), \quad |\epsilon_{33}| \leqslant m(\epsilon_A + \epsilon_B).$$

Поэтому $\epsilon \leqslant m(\epsilon_A + \epsilon_B)$ и, как видно из (1.57), меры малости деформаций $\epsilon_A + \epsilon_B$ и ϵ асимптотически эквивалентны.

Классическая теория оболочек. При вычислении энергии в рамках точности классической теории в силу (1.63) и оценок (1.64) можно принять $y = -\sigma A^\alpha_\alpha\zeta + \frac{1}{2}\sigma hB^\alpha_\alpha(\zeta^2 - \frac{1}{12})$, $y_\alpha = 0$. Кроме того, можно считать, что $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$ и $\kappa = 1$. При этом в первом приближении поперечная часть упругой энергии обращается в нуль, и полная энергия совпа-

дает с продольной энергией, вычисленной на деформациях

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta, \tag{1.66}$$

или $\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h\rho_{\alpha\beta}\zeta$, или $\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h\kappa_{\alpha\beta}\zeta$. После отбрасывания перекрестных членов между растяжением и изгибом для Φ получится соответственно одно из выражений (1.28), (1.22) или (1.25).

Поверхностная плотность кинетической энергии дается формулой $K = \frac{1}{2}\rho_0 h r^i_{,t} r_{i,t}$.

В работе внешних сил на лицевых поверхностях можно оставить только слагаемые, связанные с работой на $r^i + \xi n^i$, поэтому

$$\int_{\mathring{\Omega}_\pm} P_i x^i d\mathring{\omega}_\pm = \int_{\mathring{\Omega}} (\{P_i\} r^i + \frac{h}{2}[P_i] n^i) d\mathring{\omega}, \tag{1.67}$$

где $\{P_i\} = P_i|_{\xi=\frac{h}{2}} + P_i|_{\xi=-\frac{h}{2}}$, $[P_i] = P_i|_{\xi=\frac{h}{2}} - P_i|_{\xi=-\frac{h}{2}}$.

Из (1.66) и формулы для вариаций вектора нормали (1.3.118) следует, что силовые воздействия Q_i в уравнениях движения оболочки связаны с поверхностными силами равенством

$$Q_i = \{P_i\} + (\frac{h}{2}[P_j] r^{j\alpha} n_i)_{;\alpha}. \tag{1.68}$$

Перемещения, если они заданы на части края оболочки, будем считать согласованными с внутренним разложением. Это означает, что, как и закон движения (1.50), краевые данные $\tilde{x}^i$ представляются в виде $\tilde{x}^i = \tilde{r}^i(s) + \tilde{n}^i(s)\xi + hO(\epsilon)$. Это приводит в первом приближении к краевым условиям (1.2).

Если область V_1 примыкает к краю оболочки и имеет ширину h, то энергия тела в этой области имеет порядок $\mu h^2 |\partial\mathring{\Omega}| \epsilon^2$ и может быть отброшена по сравнению с энергией внутренней части оболочки. Поэтому задача об исследовании функционала I_1 в классическом приближении не возникает.

Главные члены работы внешних сил на краю обусловлены работой на $r^i + \xi n^i$. Поэтому краевые воздействия R_i и M в краевых условиях теории оболочек связаны с поверхностными силами формулами

$$R_i = h\langle P_i\rangle + \frac{d}{ds}(h\langle P_k\xi\rangle \tau^k n_i), \quad M = h\langle P_i\xi\rangle \nu^i. \tag{1.69}$$

Трехмерное поле деформаций восстанавливается по двумерным характеристикам по формуле $\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta$. Компоненты $\epsilon_{\alpha 3}$, характеризующие угол между нормалью к Ω и поперечным волокном, значительно меньше и имеют порядок $\frac{h}{l}\epsilon$. Компонента деформаций ϵ_{33} определяется условием $p^{33} = 0$.

Основные соотношения классической геометрически нелинейной теории оболочек даются формулами (1.2), (1.18)–(1.23), (1.66)–(1.69).

Заметим, что из равенств

$$r^i_{\alpha,t} = v^i_{,\alpha}\ ,\quad n^i_{,t} = -r^{i\alpha}n_k v^k_{,\alpha} \tag{1.70}$$

и оценок (1.52) следует, что

$$\rho_0 v_{i,t} r^i_\alpha = \rho_0 v_{\alpha,t} + O(\rho_0 c^2 \epsilon^2/l),$$

$$\rho_0 v_{i,t} n^i = \rho_0 v_{,t} + O(\rho_0 c^2 \epsilon^2/l), \tag{1.71}$$

где $v_\alpha = r^i_\alpha v_i$, $v = n^i v_i$. Поэтому правые части уравнений движения (1.20) можно записать также в виде $\bar\rho v_{\alpha,t}$ и $\bar\rho v_{,t}$.

Линеаризация. В случае бесконечно малых перемещений для мер деформации можно использовать выражения (1.12) и (1.15), уравнения состояния имеют вид (1.23), а в уравнениях движения можно заменить $b_{\alpha\beta}$, r^α_i и n_i на $\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{r}{}^\alpha_i$ и $\overset{\circ}{n}_i$, при этом уравнения движения приобретут форму

$$t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \overset{\circ}{b}{}^\alpha_\lambda m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + Q^\alpha = \rho_0 h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}\ ,$$

$$m^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + n^{\alpha\beta}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} + Q = \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

где $u_\alpha = \overset{\circ}{r}{}^i_\alpha u_i$, $u = \overset{\circ}{n}{}^i u_i$. Поскольку, согласно (1.3.118), $n^i - \overset{\circ}{n}{}^i \approx -\overset{\circ}{r}{}^{i\alpha} n_k u^k_{,\alpha}$, кинематические краевые условия (1.2) сводятся к заданию на $\overset{\circ}{\Gamma}_u$ значений u^i и $\overset{\circ}{\nu}{}^\alpha \overset{\circ}{n}_k u^k_{,\alpha}$. Форма записи силовых краевых условий (1.21) не изменяется.

§ 2. УТОЧНЕННЫЕ ТЕОРИИ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Коротковолновая экстраполяция. Прежде чем продолжать исследование функционала энергии, введем важное понятие о коротковолновой экстраполяции.

Будем называть длинноволновыми напряженные состояния, для которых $\dfrac{h}{l} \ll 1$. Теория оболочек выводится в области длинных волн при $\dfrac{h}{l} \ll 1$ и по своему смыслу представляет теорию длинноволновых напряженных состояний. Однако для полной теории недостаточно располагать уравнениями только в области длинных волн, поскольку постановка краевых задач математической физики подразумевает, что дифференциальные операторы определены для всех длин волн. Более того, тип оператора (гиперболический, эллиптический, параболический) и, следовательно, характер естественных краевых и начальных условий, определяются поведением оператора на коротких волнах: именно на коротких волнах старшие производные в операторе вносят больший вклад, чем производные меньшего порядка. Поэтому, помимо вывода уравнений в области длинных волн, построение теории оболочек содержит еще один логически независимый шаг – экстраполяцию уравнений на короткие волны.

Будем называть экстраполяцию тривиальной, если она заключается в рассмотрении построенной системы уравнений, в которой выброшены

все малые в рассматриваемом приближении члены, как для длинноволновых так и для коротковолновых напряженных состояний. Под нетривиальной будем понимать экстраполяцию, которая связана с добавлением в уравнения ряда членов, пренебрежимо малых в длинноволновой области, но существенных в области коротких волн.

Рассмотрим, например, уравнения

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = 0, \quad \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u + a^2 h^2 \partial_x^4 u = 0. \tag{2.1}$$

В области длинных волн эти уравнения в первом приближении совпадают, так как слагаемое $a^2 h^2 \partial_x^4 u$ имеет порядок $\frac{h^2}{l^2} a^2 \partial_x^2 u$. В области коротких волн они различны: во втором уравнении слагаемое $a^2 \partial_x^2 u$ на коротких волнах мало по сравнению с $a^2 h^2 \partial_x^4 u$, и второе уравнение в области коротких волн переходит в уравнение поперечных колебаний балки

$$\partial_t^2 u + a^2 h^2 \partial_x^4 u = 0.$$

Второе уравнение (2.1) можно рассматривать как один из возможных способов нетривиальной коротковолновой экстраполяции первого уравнения (2.1). При этом уравнения (2.1) существенно различны: первое требует постановки двух краевых условий, а второе – четырех.

Ясно, что возможны различные нетривиальные экстраполяции одной и той же системы уравнений теории оболочек. Это не должно вызывать недоумения, поскольку коротковолновые напряженные состояния не допускают двумерного описания, и приходится рассчитывать лишь на качественное соответствие и, может быть, удовлетворительное описание интегральных характеристик.

Выше при построении классической теории оболочек неявно подразумевалось, что осуществляется тривиальная экстраполяция. При построении уточненных теорий ситуация осложняется в связи с тем, что возможны различные по форме, но эквивалентные по точности системы уравнений такие, что тривиальная экстраполяция одних может быть приемлемой, а других – по тем или иным причинам – неудовлетворительной. Рассмотрим в качестве примера линейные уравнения, описывающие поперечные колебания пластин. Для нормальной компоненты перемещений u в первом приближении справедливо динамическое уравнение Кирхгофа

$$\partial_t^2 u + a^2 h^2 \Delta^2 u = 0, \quad a^2 = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)\rho}. \tag{2.2}$$

Уточнение уравнения Кирхгофа имеет вид [24]

$$\partial_t^2 u + a^2 h^2 \Delta^2 u - \alpha h^2 \Delta \partial_t^2 u = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10} - \frac{2\mu}{3(\lambda+2\mu)}\right). \tag{2.3}$$

Последнее слагаемое в (2.3) в области длинных волн имеет порядок $\frac{h^2}{l^2}$ по сравнению с предыдущим, так как, согласно (2.2), в первом приближении $\partial_t^2 u \sim a^2 h^2 \Delta^2 u$.

Такую же точность в области длинных волн, как и уравнение (2.3), имеет уравнение

$$\partial_t^2 u + a^2 h^2 \Delta^2 u + \alpha a^2 h^4 \Delta^3 u = 0. \tag{2.4}$$

Оно получается из уравнения (2.3), если в последнее слагаемое в (2.3) подставить значение $\partial_t^2 u$ в первом приближении из уравнения (2.2): $\partial_t^2 u = -a^2 h^2 \Delta^2 u$.

Возьмем уравнение

$$\partial_t^2 u + a^2 h^2 \Delta^2 u - \alpha h^2 \Delta \partial_t^2 u + \beta h^2 \partial_t^4 u = 0. \tag{2.5}$$

В области длинных волн уравнения (2.3) и (2.5) различаются в членах порядка $\frac{h^4}{l^4} a^2 h^2 \Delta^2 u$ (поскольку $\partial_t^4 u \sim \partial_t^2 \cdot h^2 \Delta^2 u \sim h^4 \Delta^4 u$). Следовательно, в области длинных волн уравнения (2.3)–(2.5) эквивалентны по точности. Однако в области коротких волн различия оказываются существенными: уравнения (2.3)–(2.5) требуют задания разного числа граничных и начальных условий; уравнение (2.5), в отличие от (2.3) и (2.4), является гиперболическим в некотором интервале значений β; возникает вопрос о том, какую из экстраполяций (2.3)–(2.5) следует предпочесть? Многочисленные расчеты тестовых задач показывают, что гиперболические экстраполяции в целом лучше описывают напряженное состояние, чем негиперболические. Причина заключается в лучшем описании гиперболическими экстраполяциями дисперсионных кривых в области коротких волн, что оказывается существенным для правильного предсказания поведения интегральных характеристик.

Дальше коротковолновые экстраполяции строятся следующим образом. Сначала из асимптотического анализа функционала действия трехмерной теории упругости находятся упругая и кинетическая энергии. Затем при помощи некоторых операций (замена искомых функций, интегрирование по частям и т.п.), не нарушающих асимптотической точности, выражения для упругой и кинетической энергий приводятся к виду, удобному для экстраполяций. Под этим понимается положительная определенность и достаточная простота выражений для упругой и кинетической энергий во всем диапазоне частот и длин волн. Постулируя эти выражения для энергии, из принципа Гамильтона–Остроградского находим систему уравнений и краевых условий. Такой способ экстраполяции рассмотрен в §§ 2 и 3. Другой способ обсуждается в § 4: он опирается не на уточненное описание напряженного состояния в области длинных волн, а на учет высокочастотных форм колебаний.

Прежде чем переходить к выводу уточненных теорий оболочек, дадим их формулировку.

Теория, учитывающая геометрическую поправку. При построении следующих приближений мы сталкиваемся с тем, что форма уравнений зависит от малых изменений в выборе искомых функций. Например, в качестве функций, определяющих деформированную срединную поверхность, можно взять либо радиус-вектор срединной поверхности $x^i(\xi^\alpha, 0, t)$, либо средний радиус-вектор поперечных волокон $r^i(\xi^\alpha, t) = \langle x^i(\xi^\alpha, \xi, t) \rangle$, либо радиус-вектор лицевой поверхности Ω_+ $x^i(\xi^\alpha, h/2, t)$ и т.п. Форма соответствующих поправок в уравнениях будет различна. Естественно

так подбирать искомые функции, чтобы выражение для энергии и, следовательно, уравнения имели максимально простой вид. В качестве искомых дальше выбраны функции

$$\bar{r}^{\,i}(\xi^\alpha) = r^i(\xi^\alpha) - \frac{\sigma h^2}{60} n^i \rho^\mu_\mu. \tag{2.6}$$

Причина использования функций (2.6) станет ясна поэже.

Обозначим через $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ меры растяжения и изгиба, построенные по функциям $\bar{r}^{\,i}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = {}^1\!/_2\,(\bar{r}^{\,i}_{,\alpha}\bar{r}_{i,\alpha} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}), \quad \rho_{\alpha\beta} = \bar{n}_i \bar{r}^{\,i}_{,\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}{}^\lambda_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)}. \tag{2.6'}$$

Здесь $\bar{n}^i$ – нормаль к поверхности $x^i = \bar{r}^{\,i}(\xi^\alpha, t)$. Привлекая формулы для вариаций (1.4) легко установить, что $\gamma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + O\left(\frac{h}{R}\epsilon\right)$, а тензоры $\rho_{\alpha\beta}$ (2.6′) и $\rho_{\alpha\beta}$ (1.14) отличаются на величины порядка $\frac{h^2}{l^2}\epsilon$.

Плотность внутренней энергии в теории, учитывающей геометрическую поправку, дается формулой.

$$\Phi = \Phi_{\text{кл}}(\gamma, \rho) + \Phi_{\text{пер}}(\gamma, \rho), \tag{2.7}$$

$$\Phi_{\text{пер}}(\gamma, \rho) = -\frac{\mu h^3}{3}\left(\rho^{\alpha\beta} b'^{\,\lambda}_{\alpha}\gamma_{\beta\lambda} + \sigma\rho^{\alpha\beta}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}\gamma^\lambda_\lambda + \frac{3}{5}\sigma\rho^\lambda_\lambda \overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \right.$$

$$\left. + \sigma\left(\frac{6}{5}\sigma - 1\right)\rho^\lambda_\lambda \overset{\circ}{H}\gamma^\mu_\mu\right).$$

Здесь $\Phi_{\text{кл}}(\gamma;\ \rho)$ – плотность энергии по классической теории (1.22), $b'^{\,\lambda}_{\alpha}$ – девиатор второй квадратичной формы поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$: $b'^{\,\lambda}_{\alpha} = \overset{\circ}{b}{}^\lambda_\alpha - \overset{\circ}{H}\delta^\lambda_\alpha$.

В работе внешних сил $\delta\mathcal{A}_{\text{пов}}$ на лицевых поверхностях появятся дополнительные слагаемые:

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пов}} = \delta\int\limits_{\overset{\circ}{\Omega}}\left((\{P_i\} - h\overset{\circ}{H}[P_i])\bar{r}^{\,i} + {}^1\!/_2[P_i]h\bar{n}^i - \Theta\right)d\overset{\circ}{\omega},$$

$$\Theta = \frac{\sigma h}{2}[P]\gamma^\lambda_\lambda - \frac{\sigma h}{10}\{P\}\rho^\lambda_\lambda, \quad P = P_i n^i. \tag{2.8}$$

Выражение для кинетической энергии не изменится.

Уравнения движения в теории, учитывающей геометрическую поправку, будут теми же, что и в классической теории, и имеют вид (1.20). Изменения затронут выражение для внешних сил: $Q_i = \{P_i\} - h\overset{\circ}{H}[P_i] + {+}1/2h\,([P^\alpha]\bar{n}_i)_{;\alpha}$ и уравнения состояния. В уточненной теории уравнения состояния описывают эффект возникновения изгибающих моментов при растяжении и симметричный эффект появления растягивающих усилий

при изгибе

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial(\Phi + \Theta)}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = 2\mu h\,(\sigma\gamma^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}) - {}^{1}/_{3}\mu h^{3}[\rho^{(\alpha\lambda}b'^{\beta)}_{\lambda} +$$

$$+ \sigma\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}(\overset{\circ}{b}{}_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu} + ({}^{6}/_{5}\sigma - 1)\overset{\circ}{\mathrm{H}}\rho^{\lambda}_{\lambda}) + {}^{3}/_{5}\sigma\rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta}] + {}^{1}/_{2}\sigma h\,[P]\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}, \quad (2.9)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\partial(\Phi + \Theta)}{\partial \rho_{\alpha\beta}} = {}^{1}/_{6}\mu h^{3}(\sigma\rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta}) - {}^{1}/_{3}\mu h^{3}[\gamma^{(\alpha\lambda}b^{\beta)}_{\lambda} +$$

$$+ \sigma\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}({}^{3}/_{5}\overset{\circ}{b}{}^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + ({}^{6}/_{5}\sigma - 1)\overset{\circ}{\mathrm{H}}\gamma^{\lambda}_{\lambda}) + \sigma\gamma^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta}] + {}^{1}/_{10}\sigma h^{2}\{P\}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}.$$

Краевые условия, вообще говоря, также требуют уточнений (см. [31]), однако во многих задачах в численном отношении они несущественны, и можно применять естественные краевые условия, т.е. краевые условия классической теории.

Теория, учитывающая геометрическую поправку, в некоторых задачах выступает как теория первого приближения. Это связано со следующим. Известно (см. [57, 68, 248, 311, 313, 316, 320, 348]), что классическая теория оболочек правильно предсказывает напряженное состояние (во всяком случае, в норме L_2) и, следовательно, тангенциальные деформации $\epsilon_{\alpha\beta}$. Как было показано в предыдущем параграфе, в первом приближении $\epsilon_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \zeta h\rho_{\alpha\beta}$. Если $\gamma_{\alpha\beta} \sim h\rho_{\alpha\beta}$, то оба слагаемых в выражении для $\epsilon_{\alpha\beta}$ одного порядка, и по классической теории правильно определяются и $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$, и, следовательно, перемещения. Однако если $\gamma_{\alpha\beta} \gg \rho_{\alpha\beta}$, то слагаемые, содержащие $\rho_{\alpha\beta}$, переходят в категорию поправочных, и для нахождения правильных значений $\rho_{\alpha\beta}$ надо знать поправки порядка h/R. В классической теории эти поправки отбрасываются и она не может гарантировать правильности значений $\rho_{\alpha\beta}$ и, следовательно, перемещений.

Класс задач, в которых теория, учитывающая геометрическую поправку, может оказаться теорией первого приближения характеризуется следующими условиями: 1) оболочка неположая (иначе будет мала перекрестная энергия $\Phi_{\text{пер}}$); 2) оболочка сильно растянута ($\gamma_{\alpha\beta} \gg h\rho_{\alpha\beta}$); 3) оболочка "плохо закреплена" (допускает бесконечно малые изгибания). Поясним значение последнего условия.

Если в силу условий закрепления оболочка неизгибаема (в линейной теории), то $\rho_{\alpha\beta}$ полностью определяется по $\gamma_{\alpha\beta}$, и перекрестная энергия мала по сравнению с $\Phi_{\text{кл}}$ в силу неравенства (1.27). Если же бесконечно малые изгибания имеются, то у $\rho_{\alpha\beta}$ возникают дополнительные степени свободы, функционально независимые от $\gamma_{\alpha\beta}$. Для определения этих степеней свободы надо минимизировать энергию при фиксированных $\gamma_{\alpha\beta}$. При этом перекрестная энергия вносит такой же вклад, как и энергия изгиба.

Теория с учетом поперечного сдвига. В теории появляются две новые искомые функции $\bar{\varphi}_{\alpha}$ (поперечные сдвиги), которые связаны с законом движения формулами

$$\bar{\varphi}_{\alpha} = \varphi_{\alpha} - \frac{\sigma h^{2}}{60}\rho^{\mu}_{\mu,\alpha}, \quad \varphi_{\alpha} = 12h^{-2}r^{i}_{\alpha}\langle x_{i}(\xi^{a}, t)\,\xi\rangle. \quad (2.10)$$

Выражение для меры растяжения не меняется, а в качестве меры изгиба берется тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = \bar{n}_i \bar{r}^{\,i}_{,\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)} - \bar{\varphi}_{(\alpha;\beta)}. \tag{2.11}$$

Можно проверить, что тензор $\rho_{\alpha\beta}$ (2.11) отличается от тензора $\rho_{\alpha\beta}$ (1.14) на слагаемые, выходящие за рамки точности теории $\left(\text{вида } o\left(\frac{h^2}{l^2}\,\epsilon\right)\right)$.

Плотность энергии Φ имеет вид

$$\Phi^* = \Phi_1(\gamma,\ \rho) + {}^5/_{12}\,\mu h \bar{\varphi}_\alpha \bar{\varphi}^\alpha, \tag{2.12}$$

где $\Phi_1(\gamma,\ \rho)$ – функция (2.7).

Теперь можно пояснить, почему в качестве искомых были выбраны функции (2.6) и (2.10) – именно для этих функций теория с учетом поперечного сдвига выглядит особенно просто, а усложнение в выражении для Φ, сопровождающее увеличение точности, заключается только в добавлении энергии поперечного сдвига и модификации меры изгиба (2.11).

Работа сил на лицевых поверхностях выглядит следующим образом:

$$\delta \mathcal{A}_{\text{пов}} = \delta \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \Big((\{P_i\} - h\overset{\circ}{\mathrm{H}}[P_i])\bar{r}^{\,i} + {}^1/_2[P_i]\, h\bar{n}^{\,i} - \Theta \Big) d\overset{\circ}{\omega},$$

$$\Theta = {}^1/_2\,\sigma h([P] + {}^1/_6 h\{P^\alpha\}_{;\alpha})\gamma^\beta_\beta - {}^1/_{10}\sigma h^2(\{P\} +$$

$$+ {}^1/_{12}\,h[P^\alpha]_{;\alpha})\rho^\beta_\beta - {}^5/_{12}[P^\alpha]\, h\bar{\varphi}_\alpha, \quad P^\alpha = \bar{r}^{\,i\alpha} P_i. \tag{2.13}$$

Варьирование функционала энергии приводит к системе уравнений равновесия

$$t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - q^\beta b^\alpha_\beta + \{P^\alpha\} = {}^1/_2\, h\,[P^\beta](\overset{\circ}{b}{}^\alpha_\beta + 2\overset{\circ}{\mathrm{H}}\delta^\alpha_\beta),$$

$$q^\alpha{}_{;\alpha} + t^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \{P\} + {}^1/_2\, h[P^\alpha]_{;\alpha} = h\overset{\circ}{\mathrm{H}}[P], \tag{2.14}$$

$$t^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{[\alpha}_\sigma m^{\sigma\beta]}, \quad q^\alpha + m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

и уравнениям состояния

$$n^{\alpha\beta} = n_1^{\alpha\beta} + {}^1/_{12}\,\sigma h^2\{P^\mu\}_{;\mu}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha\beta} = m_1^{\alpha\beta} - {}^1/_{120}\,\sigma h^3[P^\mu]_{;\mu}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta},$$

$$q^\alpha = {}^5/_6\,\mu h\bar{\varphi}^\alpha - {}^5/_{12}\,h[P^\alpha], \tag{2.15}$$

где $n_1^{\alpha\beta}$ и $m_1^{\alpha\beta}$ даются формулами (2.9).

Уравнения низкочастотных колебаний оболочек приведем в линейном приближении. Пусть перемещения оболочки $u^i = \bar{r}^{\,i} - \overset{\circ}{r}{}^i$ бесконечно малы. Введем вместо $\bar{\varphi}_\alpha$ новые искомые функции – углы поворота $\psi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha - \overset{\circ}{n}_k u^k_{,\alpha}$. Меры растяжения и изгиба выражаются через искомые функции равенствами

$$\gamma_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{r}{}^i_{(\alpha} u_{i,\beta)}, \quad \rho_{\alpha\beta} = -\psi_{(\alpha;\beta)} + {}^1/_2\, u_{|\lambda,\alpha|}\overset{\circ}{b}{}^\lambda_\beta + {}^1/_2 u_{|\lambda,\beta|}\overset{\circ}{b}{}^\lambda_\alpha. \tag{2.16}$$

Здесь $2u_{|\lambda,\alpha|} = u_{\lambda,\alpha} - u_{\alpha,\lambda}$, $u_\alpha = \overset{\circ}{r}{}^i_\alpha u_i$.

Дальше показано, что в рамках точности теории с учетом поперечного сдвига плотность кинетической энергии дается формулой

$$K = {}^1/_2\,\rho h(u^i_{,t}u_{i,t} + {}^1/_{12}(1 - {}^2/_5\,\sigma)h^2\psi^\alpha_{,t}\psi_{\alpha,t} + {}^1/_{12}\,\sigma^2 h^2(u^\lambda_{,\lambda t})^2). \tag{2.17}$$

Поэтому варьирование функционала энергии приводит к уравнениям

$$t^{\alpha\beta}{}_{:\beta} - q^{\beta}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\beta} - \rho h u^{\alpha}_{,tt} + {}^{1}/_{12}\rho h^3\sigma^2 u^{\alpha}{}_{;\beta tt}^{\beta} = 0,$$

$$q^{\alpha}_{:\alpha} + t^{\alpha\beta}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - \rho h u_{,tt} = 0,$$

$$q^{\alpha} + m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + {}^{1}/_{12}\rho h^3(1 - {}^{2}/_{5}\,\sigma)\psi^{\alpha}{}_{,tt} = 0, \tag{2.18}$$

$$t^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma}|m^{\sigma\beta}|, \qquad q_{\alpha} = {}^{5}/_{6}\,\mu h(\psi_{\alpha} + n_k u^{k}_{,\alpha}),$$

в которых $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ связаны с мерами растяжения и изгиба формулами (2.9). В (2.18) для простоты принято, что внешние силы на лицевых поверхностях P_i равны нулю. Учет P_i в (2.18) не представляет труда – они входят также как статические уравнения (2.14), (2.15).

Асимптотически точные краевые условия в теории с учетом поперечного сдвига неизвестны, однако имеющиеся расчеты показывают, что применение естественных вариационных краевых условий дает хорошую реальную точность.

Приступим к выводу приведенных соотношений.

Поверхностная плотность энергии в уточненных теориях оболочек. Будем строить энергию, удерживая слагаемые порядка h/l, h/R и h^2/l^2 и отбрасывая слагаемые порядка ϵ, h^2/lR, h^2/R^2 и более высокого порядка малости по сравнению с единицей. Для этого придется вычислить функции y_{α}, которые, как было установлено, имеют порядок $\frac{h}{l}\epsilon$. Определение y_{α} связано с удержанием в плотности упругой энергии членов порядка $\frac{h}{l}\epsilon(\Delta_1 + \Delta_2)$. Члены такого порядка имеются как в поперечной, так и в продольной энергии. Для того чтобы упростить вычисления и не учитывать членов в продольной энергии, вместо замены (1.50) сделаем замену

$$x^i(\xi^{\alpha}, \xi, t) = r^i(\xi^{\alpha}, t) + \varphi^i(\xi^{\alpha}, t)\xi + hz^i(\xi^{\alpha}, \xi, t). \tag{2.19}$$

Функции r^i и φ^i считаются независимыми исходными функциями. Наличие дополнительно трех независимых искомых функций φ^i позволяет наложить на "остаток" z^i шесть ограничений

$$\langle z^i\rangle = 0, \quad \langle z^i\xi\rangle = 0. \tag{2.20}$$

Функции r^i и φ^i имеют смысл среднего радиус-вектора и среднего "поворота" поперечных волокон: $r^i = \langle x^i(\xi^{\alpha}, \xi, t)\rangle$, $\varphi^i = \langle x^i(\xi^{\alpha}, \xi, t), \xi\rangle/({}^{1}/_{12}h^2)$. Формула (2.19) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми функциями $x^i(\xi^{\alpha}, \xi, t)$ и всеми тройками $\{r^i, \varphi^i, z^i\}$, в которых z^i подчинены ограничениям (2.20).

Из предыдущего анализа следует, что поперечный сдвиг $\varphi_{\alpha} = r^i_{\alpha}\varphi_i$ имеет порядок $\frac{h}{l}\epsilon$, а поперечное удлинение $\varphi - 1 \equiv \varphi_i n^i - 1$ – порядок ϵ.

Дальше считаем r^i и φ^i известными и такими, что $\varphi_{\alpha} \sim \frac{h}{l}\epsilon$, и ищем функции z^i. Ограничения (2.20) приведут к тому, что перекрестные члены в продольной энергии между z^i и r^i, φ^i будут пренебрежимо малы.

При построении приближенных теорий, обладающих более высокой точностью, приходится оценивать более высокие производные от искомых

функций. В связи с этим в определение характерных масштабов следует ввести неравенства, содержащие более высокие производные. Добавление дополнительных неравенств, вообще говоря, уменьшает значение характерных масштабов. В случае замены (2.19) вместо неравенств для высших производных надо добавить оценки производных от новых степеней свободы φ_α и φ. Дальше под характерным масштабом l будем понимать наилучшую постоянную в неравенствах

$$|A_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{\epsilon_A}{l}, \quad h|B_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{\epsilon_B}{l},$$

$$|\varphi_\alpha| \leqslant \frac{h}{l}(\epsilon_A + \epsilon_B), \quad |r^i_{,t}| \leqslant c(\epsilon_A + \epsilon_B),$$

$$|r^i_{,\alpha t}| \leqslant \frac{c(\epsilon_A + \epsilon_B)}{l}, \quad |r^i_{,\alpha\beta t}| \leqslant \frac{c(\epsilon_A + \epsilon_B)}{l^2},$$

$$|\varphi - 1| \leqslant \epsilon_A + \epsilon_B, \quad |\varphi_{\alpha,\beta}| \leqslant \frac{h(\epsilon_A + \epsilon_B)}{l^2}, \quad |\varphi_{,\alpha}| \leqslant \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{l}, \tag{2.21}$$

$$|\varphi^i_{,t}| \leqslant \frac{c(\epsilon_A + \epsilon_B)}{l}, \quad \max_\zeta |z_{\alpha,\gamma}| \leqslant \frac{\bar\Delta}{l}, \quad \max_\zeta |z_{,\gamma}| \leqslant \frac{\bar\Delta}{l}, \quad |z^i_{,t}| \leqslant \frac{c\bar\Delta}{l}.$$

Здесь $z_\alpha = r^i_\alpha z_i$, $z = n^i z_i$, $\bar\Delta = \max_\zeta(|z_{1,\zeta}| + |z_{2,\zeta}| + |z_{,\zeta}|)$. Поскольку $z^i = y^i - r^{i\alpha}\varphi_\alpha\zeta - (\varphi - 1)n^i\zeta$, величина $\bar\Delta$ имеет порядок ϵ. Выпишем компоненты тензора деформаций в терминах r^i, φ^i и z^i:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB^{(\varphi)}_{\alpha\beta}\zeta + h^2 C^{(\varphi)}_{\alpha\beta}\zeta^2 + hr^i_{(\alpha}z_{i,\beta)} + h^2\varphi^i_{,(\alpha}z_{i,\beta)}\zeta + \tfrac{1}{2}h^2 z^i_{,\alpha}z_{i,\beta},$$

$$2\epsilon_{\alpha 3} = z_{\alpha,\zeta} + \varphi_\alpha + h\varphi^i z_{i,\alpha} + \tfrac{1}{2}h(\varphi^i\varphi_i)_{,\alpha}\zeta + h\varphi^i_{,\alpha}z_{i,\zeta}\zeta + hz^i_{,\alpha}z_{i,\zeta},$$

$$\epsilon_{33} = z_{,\zeta} + \tfrac{1}{2}(\varphi_i\varphi^i - 1) + \tfrac{1}{2}z^i_{,\zeta}z_{i,\zeta}. \tag{2,22}$$

Здесь

$$B^{(\varphi)}_{\alpha\beta} = -r^i_{(\alpha}\varphi_{i,\beta)} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}, \quad C^{(\varphi)}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\varphi^i_{,\alpha}\varphi_{i,\beta} - \overset{\circ}{c}_{\alpha\beta}).$$

Отметим, что

$$B^{(\varphi)}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha|\beta)} + (\varphi - 1)b_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + O\left(\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)\epsilon\right),$$

$$h^2 C^{(\varphi)}_{\alpha\beta} = h^2 B^{(\varphi)}_{\lambda(\alpha}\overset{\circ}{b}{}^\lambda_{\beta)} + O\left(\epsilon_A^2 + \epsilon_B^2 + \frac{h^2}{Rl}(\epsilon_A + \epsilon_B)\right).$$

Из (2.21) следуют оценки

$$|z^i_{,\alpha}| = |n^i n^k z_{k,\alpha} + r^{i\beta}r^k_\beta z_{k,\alpha}| \leqslant m\bar\Delta\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{R}\right),$$

$$|\varphi^i_{,\alpha} - n^i_{,\alpha}| = |n^i n^k\varphi_{k,\alpha} + r^{i\beta}r^k_\beta\varphi_{k,\alpha} + r^{i\beta}b_{\beta\alpha}| \leqslant m(\epsilon_A + \epsilon_B)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{R}\right),$$

$$h^2|(\varphi^i_{,\alpha} - n^i_{,\alpha})z_{i,\beta}| \leqslant m\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)^2\epsilon\bar\Delta.$$

Эти оценки показывают, что последние два члена в формуле для $\epsilon_{\alpha\beta}$, из которых вычтено слагаемое $h^2 n^i_{,\alpha} z_{i,\beta}$, имеют порядок $\epsilon^2 \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)^2$, и их можно отбросить. Слагаемые $r^i_{(\alpha} z_{i,\beta)}$ и $h^2 n^i_{(,\alpha} z_{i,\beta)} \zeta$ в силу ограничений (2.20) дают в продольную энергию вклад порядка $\left(\frac{h^2}{R^2}\epsilon_A + \frac{h}{R}\epsilon_B\right)\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)\bar{\Delta}$. Поскольку в поперечной энергии присутствуют перекрестные члены между z^i и $r^i_{,\varphi} \varphi^i$ порядка $\frac{h}{l}\epsilon\bar{\Delta}$, перекрестные члены в продольной энергии можно отбросить. Аналогично в кинетической энергии слагаемые $h\langle \rho_0 r^i_{,t} z_{i,t} \kappa\rangle$, $h^2\langle \rho_0 \varphi^i_{,t} z_{i,t} \kappa\rangle$ и $h^2\langle \rho_0 z^i_{,t} z_{i,t} \kappa\rangle$ в силу (2.20) и оценок (2.21) имеют соответственно порядки $\rho_0 c^2 \epsilon^2 \frac{h^2}{lR}$, $\rho_0 c^2 \epsilon^2 \frac{h^3}{l^2 R}$ и $\rho_0 c^2 \epsilon^2 \frac{h^2}{l^2}$. Поэтому при отыскании $\dot{z}^i$ в первом приближении они войдут только в поперечную энергию. Для компонент тензора деформаций $\epsilon_{\alpha\beta}$ можно использовать приближенное выражение

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB^{(\varphi)}_{\alpha\beta}\zeta + h^2 C^{(\varphi)}_{\alpha\beta}\zeta^2. \tag{2.23}$$

В поперечной энергии также возможны упрощения за счет отбрасывания в формуле для $\epsilon_{\alpha 3}$ величины $h\varphi^i_{,\alpha} z_{i,\zeta}\zeta$, так как $|h\varphi^i_{,\alpha} z_{i,\zeta}\zeta| \leqslant m\bar{\Delta}\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)(\epsilon_A + \epsilon_B) + m\frac{h}{R}\bar{\Delta}$, и величины $hz^i_{,\alpha} z_{i,\zeta}\zeta$, так как $|hz^i_{,\alpha} z_{i,\zeta}\zeta| \leqslant m\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{R}\right)\Delta^2$, и замены $\varphi^i\varphi_i - 1$ на $2(\varphi - 1)$, $\varphi^i z_{i,\alpha}$ на $z_{,\alpha}$, поскольку $|\varphi_i\varphi^i - 2(\varphi - 1)| \leqslant m(\epsilon_A + \epsilon_B)^2$ и $|\varphi^i z_{i,\alpha} - n^i z_{i,\alpha}| \leqslant \frac{1}{l}(\epsilon_A + \epsilon_B)^2 + m\frac{h}{l}\epsilon\bar{\Delta}$. Кроме того, для компонент метрического тензора можно использовать приближенные выражения $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}^{\alpha\beta}$, так как значения z^i ищутся в первом приближении.

С учетом работы внешних сил на z^i, для определения z^i получим функционал

$$h\int_{\overset{\circ}{\Omega}} (J_L(z^\alpha, z) + J_\perp(z))\, d\overset{\circ}{\omega},$$

$$J_L(z^\alpha, z) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \mu \overset{\circ}{a}^{\alpha\beta}(z_{\alpha,\zeta} + \varphi_\alpha + h\varphi_{,\alpha}\zeta + hz_{,\alpha})(\alpha \to \beta)\, d\zeta - \{P^\alpha z_\alpha\}, \tag{2.24}$$

$$J_\perp(z) = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\lambda + 2\mu)(z_{,\zeta} + \varphi - 1 + \sigma A^\alpha_\alpha - \sigma h B^\alpha_\alpha \zeta)^2\, d\zeta - \{Pz\}.$$

Функционал (2.24) не удерживает кинематических краевых условий на $\partial\overset{\circ}{\Omega}$, поэтому нахождение $z_{\alpha'}$ и z сводится к минимизации в каждой

точке поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$ суммы $J_L + J_\perp$ по z_α и z, которые рассматриваются как произвольные функции ζ, зависящие от ξ^α как от параметров и удовлетворяющие ограничениям

$$\langle z_\alpha \rangle = 0; \quad \langle z_\alpha \zeta \rangle = 0, \quad \langle z \rangle = 0, \quad \langle z\zeta \rangle = 0.$$

Для вычисления z_α надо знать функцию z в первом приближении. Перекрестные члены между z и z_α, которые содержатся в функционале J_L, малы по сравнению с перекрестными членами между z и $A_{\alpha\beta}$, $hB_{\alpha\beta}$. Поэтому первое приближение для z находится минимизацией по z функционала $J_\perp$. Сделаем замену

$$z = \frac{\sigma}{2}\, hB_\alpha^\alpha\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) + \bar{z}. \tag{2.25}$$

Тогда

$$J_\perp = -\frac{\sigma}{12}\{P\}hB_\alpha^\alpha + \bar{J}_\perp, \quad \bar{J}_\perp = \frac{1}{12}\langle(\lambda + 2\mu)(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})^2\rangle - \{P\bar{z}\},$$

где $\bar{\varphi} = \varphi - 1 + \sigma A_\alpha^\alpha$. Функция $\bar{z}$ удовлетворяет ограничениям $\langle \bar{z} \rangle = 0$, $\langle \bar{z}\zeta \rangle = 0$. Вводя множители Лагранжа ρ и π, для определения минимизирующего элемента получим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\zeta}(\lambda + 2\mu)(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi}) = \rho + \pi\zeta, \quad \langle \bar{z} \rangle = 0, \quad \langle \bar{z}\zeta \rangle = 0, \\ (\lambda + 2\mu)(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})\big|_{\zeta = 1/2} = P_+, \quad (\lambda + 2\mu)(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})\big|_{\zeta = -1/2} = -P_-.\end{gathered} \tag{2.26}$$

Индексами $\pm$ отмечаются значения величин при $\zeta = \pm 1/2$. Отсюда

$$(\lambda + 2\mu)(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi}) = \frac{1}{2}\,\pi\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right) + \rho\zeta + a, \quad a = \frac{1}{2}[P], \quad \rho = \{P\}. \tag{2.27}$$

Напомним определения символов $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$: $[P] = P_+ - P_-$, $\{P\} = P_+ + P_-$. Умножая уравнения (2.27) на $\zeta^2 - 1/4$, интегрируя по ζ и учитывая, что $\left\langle\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{30}$ и что в силу ограничения $\langle \bar{z}\zeta \rangle = 0$ справедливо равенство $\left\langle \bar{z}_{,\zeta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right)\right\rangle = 0$, получаем

$$\pi = -10\left((\lambda + 2\mu)\bar{\varphi} - \frac{1}{2}[P]\right).$$

Из уравнения (2.14) находим $\bar{z}$:

$$\bar{z} = -\frac{5}{3}\,\zeta\left(\zeta^2 - \frac{3}{20}\right)\bar{\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)}\left([P]\,\frac{5}{3}\,\zeta\left(\zeta^2 - \frac{3}{20}\right) + \{P\}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)\right). \tag{2.28}$$

Поскольку, согласно (2.26), $\{P\bar{z}\} = (\lambda + 2\mu)\left\langle \frac{d}{d\zeta}\,\bar{z}(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})\right\rangle = (\lambda + 2\mu)\times$

$\times \langle(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})^2\rangle - (\lambda + 2\mu)\bar{\varphi}\langle \bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi}\rangle$, имеем $\bar{J}_\perp = -\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\langle(\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})^2\rangle +$

$$+ \bar{\varphi}\left(a - \frac{1}{12}\,\pi\right) = -\frac{1}{2(\lambda + 2\mu)}\left\langle\left(\frac{1}{2}\,\pi\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right) + \rho\zeta + a\right)^2\right\rangle + \bar{\varphi}\left(a - \frac{1}{12}\,\pi\right)$$

и окончательно

$$\inf \bar{J}_\perp = \frac{5}{12}(\lambda + 2\mu)\bar{\varphi}^2 + \frac{1}{12}\bar{\varphi}[P]. \tag{2.29}$$

Члены, квадратичные по компонентам внешних поверхностных сил, опущены, поскольку, как легко проверить, их варьирование даст в уравнения теории оболочек поправки порядка $\left(\frac{h}{l}\right)^2 \epsilon^2$ по сравнению с единицей. В линейной теории члены, зависящие только от внешних сил, не варьируются и играют роль аддитивных постоянных в функционале энергии.

Предположим, что $\bar{\varphi} = O\left(\frac{h}{l}\epsilon\right)$; дальше мы убедимся, что это действительно так. Тогда, согласно (2.28) и условию (1.46), $\bar{z} = O\left(\frac{h}{l}\epsilon\right)$, и z в первом приближении дается равенством

$$z = \frac{\sigma}{2} hB^\alpha_\alpha\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right). \tag{2.30}$$

Подставляя выражение (2.30) в формулу для функционала $J_\perp$, получим, что z_α есть минимизирующий элемент функционала

$$J_\perp = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \mu \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}\left(z_{\alpha,\zeta} + \varphi_\alpha + h\varphi_{,\alpha}\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma}{2} h^2 B^\beta_{\beta,\alpha}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)\right)(\alpha \to \beta)\, d\zeta - \{P^\alpha z_\alpha\} \tag{2.31}$$

на множестве функций, подчиненных ограничениям $\langle z_\alpha \rangle = \langle z_\alpha \zeta \rangle = 0$. Сделаем замену искомых функций $z_\alpha \to \bar{z}_\alpha$:

$$z_\alpha = -\frac{1}{2} h\varphi_{,\alpha}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) - \frac{\sigma}{6} h^2 B^\beta_{\beta,\alpha}\zeta\left(\zeta^2 - \frac{3}{20}\right) + \bar{z}_\alpha. \tag{2.32}$$

В терминах $\bar{z}_\alpha$ функционал $J_\perp$ принимает вид

$$J_\perp = \frac{1}{12}\{P^\alpha\} h\varphi_{,\alpha} + \frac{\sigma}{120}[P^\alpha] h^2 B^\beta_{\beta,\alpha} + \bar{J}_\perp,$$

$$J_\perp = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \mu \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}(\bar{z}_{\alpha,\zeta} + \bar{\varphi}_\alpha)(\alpha \to \beta)\, d\zeta - \{P^\alpha \bar{z}_\alpha\}, \tag{2.33}$$

$$\bar{\varphi}_\alpha \equiv \varphi_\alpha - \frac{\sigma}{60} h^2 B^\beta_{\beta,\alpha}.$$

Вычисление $\bar{z}_\alpha$ сводится к минимизации функционала $J_\perp$ по всем функциям $\bar{z}_\alpha$, удовлетворяющим ограничениям $\langle \bar{z}_\alpha \rangle = \langle \bar{z}_\alpha \zeta \rangle = 0$. Эта задача полностью аналогична задаче о минимизации функционала $\bar{J}_\perp$. Поэтому ее

решение дается формулой (2.28), в которой $\bar{z}$ заменено на $\bar{z}_\alpha$. $\lambda + 2\mu$ на μ и P на P_α:

$$\bar{z}_\alpha = -\frac{5}{3}\bar{\varphi}_\alpha\zeta\left(\zeta^2 - \frac{3}{20}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}\left(\frac{5}{3}[P^\beta]\zeta\left(\zeta^2 - \frac{3}{20}\right) + \{P^\beta\}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)\right) \qquad (2.34)$$

и

$$\inf\bar{J}_\perp = \frac{5}{12}\mu\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}^\alpha + \frac{1}{12}[P^\alpha]\bar{\varphi}_\alpha. \qquad (2.35)$$

Из (2.33) и (2.35) имеем

$$\inf J_\perp = \frac{5}{12}\mu\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}^\alpha + \frac{1}{2}[P^\alpha]\bar{\varphi}_\alpha +$$

$$+\frac{1}{12}\{P^\alpha\}h\varphi_{,\alpha} + \frac{\sigma}{120}[P^\alpha]h^2B^\beta_{\beta,\alpha}. \qquad (2.36)$$

Слагаемые, входящие в выражение (2.36), имеют порядок $\mu\left(\frac{h}{l}\right)^2\epsilon^2$

Величина $\Phi_\perp = \frac{5}{12}\mu\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}^\alpha$ имеет смысл поверхностной плотности энергии поперечного сдвига, остальные слагаемые связаны с работой внешних сил.

Для построения энергии внутренней части оболочки осталось вычислить поверхностную плотность продольной энергии $\Phi_\parallel = h\langle U_\parallel\kappa\rangle$.

Введем тензор $\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta = \overset{1}{g}{}^{\alpha\gamma}\epsilon_{\gamma\beta}$, где тензор $\overset{1}{g}{}^{\alpha\gamma}$ определен равенством (1.65). Величина $U_\parallel\kappa$ как функция от $\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta$ записывается в форме

$$U_\parallel\kappa = \mu[\sigma(\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\alpha)^2 + \overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta\overset{1}{\epsilon}{}^\beta_\alpha].$$

Переразложим $\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta$ по первым полиномам Лежандра. Из (1.65) и (2.23) имеем

$$\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta = \left(A^\alpha_\beta - \frac{h^2}{6}\overset{1}{b}{}^{\alpha\gamma}B_{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}C^\alpha_\beta\right) + h(B^{(\varphi)\alpha}_\beta - 2\overset{1}{b}{}^{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma})\zeta +$$

$$+ h^2(\ldots)\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

Опустим индекс у $\overset{1}{\epsilon}{}^\alpha_\beta$ при помощи метрики $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$. Тогда

$$U_\parallel\kappa = \mu[\sigma(\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}\overset{1}{\epsilon}_{\alpha\beta})^2 + \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\gamma}\overset{\circ}{a}{}^{\beta\delta}\overset{1}{\epsilon}_{\alpha\beta}\overset{1}{\epsilon}_{\gamma\delta}].$$

Тензор $\overset{1}{\epsilon}_{\alpha\beta}$ несимметричен, однако его антисимметричная часть дает в $U_\parallel\kappa$ вклад порядка $\left(\frac{h}{R}\right)^2\epsilon^2$ и может не учитываться. Для вычисления

$\Phi_{\|}$ надо подставить в $U_{\|}$ вместо $\overset{1}{\epsilon}_{\alpha\beta}$ тензор $\overset{1}{\epsilon}_{(\alpha\beta)} = \overset{1}{A}_{\alpha\beta} - h\overset{1}{B}_{\alpha\beta}\zeta$, где

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{6}\overset{1}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}B^{(\varphi)}_{\beta)\lambda} + \frac{h^2}{12}C^{(\varphi)}_{\alpha\beta}, \quad \overset{1}{B}_{\alpha\beta} = B^{(\varphi)}_{\alpha\beta} - 2\overset{1}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}A_{\beta)\lambda}.$$

Для поверхностной плотности продольной упругой энергии получим соотношение, по форме совпадающее с классическим

$$\Phi_{\|} = F(\overset{1}{A}) + \frac{1}{12}F(h\overset{1}{B}). \tag{2.37}$$

Разница заключается в выражениях для мер деформации и изгиба $\overset{1}{A}_{\alpha\beta}$ и $\overset{1}{B}_{\alpha\beta}$. В рамках принятой точности в формуле для $\overset{1}{A}_{\alpha\beta}$ можно заменить $B^{(\varphi)}_{\alpha\beta}$ и $C^{(\varphi)}_{\alpha\beta}$ на $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}$; выделяя также в $B^{(\varphi)}_{\alpha\beta}$ члены, зависящие от φ_α и φ и используя равенство (1.56), имеем

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{12}b'^{\lambda}_{(\alpha}B_{\beta)\lambda}, \quad \overset{1}{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha;\beta)} + (\varphi - 1)b_{\alpha\beta} - 2\overset{1}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}A_{\beta)\lambda}.$$

Напомним, что через b'^{λ}_{α} обозначается девиатор второй квадратичной формы поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$: $b'^{\lambda}_{\alpha} = \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{\alpha} - H\delta^{\lambda}_{\alpha}$.

Выпишем уравнение Эйлера для величины φ. Энергия по двумерной теории есть сумма функций (2.37) и функций (2.36), (2.29), взятых с множителем h. Производные от φ входят в лагранжиан линейно, поэтому, варьируя по φ, получим для φ линейное алгебраическое уравнение

$$\frac{5}{6}(\lambda + 2\mu)(\varphi - 1 + \sigma A^{\alpha}_{\alpha}) + \frac{1}{12}[P] - \frac{h}{12}\{P^{\alpha}\}_{;\alpha} + h^{-1}m^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.38}$$

Отсюда видно, что в первом приближении

$$\varphi = 1 - \sigma A^{\alpha}_{\alpha}. \tag{2.39}$$

При нулевых внешних силах погрешность формулы (2.39) есть $O\left(\frac{h}{R}\epsilon\right)$ и, следовательно, слагаемое в энергии $\frac{5}{6}(\lambda + 2\mu)h\bar{\varphi}^2$ в рамках точности теории с учетом сдвига пренебрежимо мало.

При ненулевых внешних силах погрешность формулы (2.39) есть $O\left(\left(\frac{h}{R} + \frac{h}{l}\right)\epsilon\right)$. Величина $\bar{\varphi}^2$ может быть порядка $\frac{h^2}{l^2}\epsilon^2$, и на первый взгляд ее следует сохранить в энергии. В действительности, однако, в сумме с работой внешних сил на $\bar{\varphi}$ она оказывается по крайней мере порядка $O\left(\frac{h^2}{Rl}\epsilon^2\right)$ и, следовательно, может быть отброшена.

Возьмем в качестве меры изгиба тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha;\beta)} - \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}A_{\lambda\beta)}. \tag{2.40}$$

Если поперечным сдвигом φ_α можно пренебречь, то тензор (2.40) переходит в так же обозначавшуюся меру изгиба Койтера – Сандерса. Тензоры

$\overset{1}{A}_{\alpha\beta}$ и $\overset{1}{B}_{\alpha\beta}$ в терминах $A_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ с учетом (2.39) принимают вид

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{12} b'^{\lambda}_{(\alpha}\rho_{\beta)\lambda}, \quad \overset{1}{B}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - b'^{\lambda}_{(\alpha}A_{\beta)\lambda} - \sigma A^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}.$$

Выражение для энергии все еще остается весьма громоздким. Особенно "неприятен" градиент B^{β}_{β}, который входит в энергию поперечного сдвига через величину $\overline{\varphi}_{\alpha} = \varphi_{\alpha} - \frac{\sigma}{60} h^2 B^{\beta}_{\beta,\alpha}$. Поскольку φ_{α} – независимые искомые функции, естественно избавиться от градиента B^{β}_{β}, перейдя от φ_{α} к новым искомым функциям $\overline{\varphi}_{\alpha}$. При этом надо позаботиться, чтобы в результате замены градиент B^{β}_{β} не появился в выражении для $\rho_{\alpha\beta}$, в которое также входят φ_{α}. Нетрудно проверить, что формула для $\rho_{\alpha\beta}$ не изменится, если наряду с переходом от φ_{α} к $\overline{\varphi}_{\alpha}$ заменить также искомые функции r_i на функции

$$\overline{r}_i = r_i - n_i \frac{\sigma}{60} h^2 B^{\beta}_{\beta}. \tag{2.41}$$

Действительно, $-n_i \frac{\sigma}{60} h^2 B^{\beta}_{\beta}$ есть малая добавка к r_i порядка $h\epsilon$, поэтому соответствующее изменение второй квадратичной формы поверхности можно найти по формуле (1.4). Непосредственной подстановкой проверяется, что для $\rho_{\alpha\beta}$ справедливо равенство

$$\rho_{\alpha\beta} = \overline{n}_i \overline{r}^{\,i}_{;\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - \overline{\varphi}_{(\alpha;\beta)} - \overset{\circ}{b}^{\lambda}_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)}, \tag{2.42}$$

где через $\gamma_{\lambda\beta}$ обозначен тензор $A_{\lambda\beta}$, построенный по функциям $\overline{r}_i$: $\gamma_{\lambda\beta} = \frac{1}{2}(\overline{r}^{\,i}_{,\alpha}\overline{r}_{i,\beta} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta})$, а единичный вектор $\overline{n}_i$ определяется из соотношений $\overline{n}_i \overline{r}^{\,i}_{,\alpha} = 0$, $\overline{n}_i \overline{n}^i = 1$. Тензоры $\overset{1}{A}_{\alpha\beta}$ и $\overset{1}{B}_{\alpha\beta}$ принимают вид

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{12} b'^{\lambda}_{(\alpha}\rho_{\lambda\beta)} - \frac{\sigma}{60} h^2 \rho^{\mu}_{\mu}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta},$$

$$\overset{1}{B}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - b'^{\lambda}_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)} - \sigma\gamma^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}.$$

Поверхностная плотность упругой энергии после подстановки выражений $\overset{1}{A}_{\alpha\beta}$ и $\overset{1}{B}_{\alpha\beta}$ через $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ и отбрасывания членов порядка $\frac{h^2}{R^2}$ по сравнению с оставленными записывается в форме (2.12).

Работа внешних сил дается равенством (2.13).

Кинетическая энергия. Перейдем к вычислению кинетической энергии. Согласно формулам для вариации $B_{\alpha\beta}$ (1.4) и вариации нормали (1.3.118) имеем

$$B_{\alpha\beta,t} = n_i \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} v^i, \quad n^i_{,t} = -r^{i\alpha} n_k v^k_{,\alpha}. \tag{2.43}$$

Из (2.21), (1.70), (2.32), (2.34), (2.30) и (2.43) следуют оценки

$$r^i_{\alpha,t} \sim \frac{c\epsilon}{l}, \quad n^i_{,t} \sim \frac{c\epsilon}{l}, \quad \varphi^i_{,t} = n^i_{,t} + \varphi_{,t} n^i + \varphi^{\alpha}_{,t} r^i_{\alpha} + O\left(\frac{c\epsilon^2}{l}\right),$$

$$hB^{\alpha}_{\alpha,t} = O\left(\frac{hc\epsilon}{l^2}\right), \quad z^i_{,t} = O\left(\frac{hc\epsilon}{l}\right).$$

Отсюда с принятой точностью для плотности кинетической энергии имеем

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 h \langle x^i_{,t} x_{i,t} \kappa \rangle = \frac{1}{2}\rho_0 h \left(v_i v^i + \frac{h^2}{12}\varphi_{i,t}\varphi^i_{,t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0 h \left(v_i v^i + \frac{h^2}{12} \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} (n_k v^k_{,\alpha} - \varphi_{\alpha,t})(\alpha \to \beta) + \frac{\sigma^2 h^2}{12} (A^\alpha_{\alpha,t})^2 \right).$$

Выражение для кинетической энергии в терминах v^i и $\varphi^i_{,t}$ достаточно просто. Однако при переходе к переменным $\overline{r}^i$ и $\overline{\varphi}_\alpha$, для которых простой вид имеет упругая энергия, выражение для кинетической энергии усложняется и принимает форму

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 h \left(\overline{v}_i \overline{v}^i + \frac{\sigma h^2}{30} \overline{v}_i \overline{n}^i \overline{n}_k \Delta \overline{v}^k + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12} \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} (\overline{n}_k \overline{v}^k_{,\alpha} - \overline{\varphi}_{\alpha,t})(\alpha \to \beta) + \frac{\sigma^2 h^2}{12} (\gamma^\alpha_{\alpha,t})^2 \right). \qquad (2.44)$$

Здесь использовано, что с принятой точностью, согласно (2.43),

$$\overline{v}^i \equiv \overline{r}^i_{,t} = v^i - \frac{\sigma h^2}{60} \overline{n}_i \Delta \overline{v}^i, \quad A^\alpha_{\alpha,t} = \gamma^\alpha_{\alpha,t},$$

где Δ – поверхностный оператор Лапласа.

Выражение для кинетической энергии (2.44) не годится для экстраполяции, так как старшие (вторые) производные от скорости входят линейно, и на коротких волнах кинетическая энергия не будет положительно определена. Для приведения кинетической энергии к виду, удобному для экстраполяции, проинтегрируем второе слагаемое в (2.44) по частям. Оно примет вид $-\frac{1}{60}\rho_0 \sigma h^3 \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} \overline{v}_{i,\alpha} \overline{n}^i \overline{n}^j \overline{v}_{j,\beta}$. Добавляя также малые члены, связанные с $\overline{\varphi}_{\alpha,t}$, и заменяя $\gamma^\alpha_{\alpha,t}$ на $\overline{v}^\alpha_{;\alpha}$ (что допустимо в рамках принятой точности), получим

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 h \left(\overline{v}_i \overline{v}^i + \frac{h^2}{12}\left(1 - \frac{2\sigma}{5}\right) \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} (\overline{n}_k \overline{v}^k_{,\alpha} - \overline{\varphi}_{\alpha,t})(\alpha \to \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^2 h^2}{12} (\overline{v}^\alpha_{;\alpha})^2 \right). \qquad (2.45)$$

На члены, перешедшие в результате интегрирования по частям на границу, мы не обращаем внимания, поскольку здесь не обсуждаются асимптотически точные краевые условия. Линеаризация в выражении (2.45) приводит к соотношению (2.17).

Связь тензоров $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ с интегральными характеристиками напряженного состояния. Укажем теперь связь между введенными выше величинами $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ и q^α и обычно употребляемыми в теории оболочек интегральными характеристиками напряженного состояния – тензорами растягивающих усилий и моментов. Ограничимся статикой оболочек.

Уравнения равновесия оболочки как трехмерного тела записываются следующим образом:

$$\overset{\circ}{\nabla}_a \left(\frac{\rho_0}{\rho} \, x^i_b \, p^{ab} \right) = 0. \tag{2.46}$$

Здесь p^{ab} – сопутствующие компоненты тензора напряжений Коши

На лицевых поверхностях оболочки выполняются условия

$$p^{ab} x^i_a \, x^j_b \, n^+_j \mid_{\xi = h/2} = P^i_+, \; p^{ab} \, x^i_a \, x^j_b \, n^-_j \mid_{\xi = -h/2} = P^i_- . \tag{2.47}$$

Здесь $n^\pm_i$ – компоненты нормали к лицевым поверхностям в деформированном состоянии.

Уравнение (2.46) можно переписать также в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \, \frac{\rho_0}{\rho} \, x^i_b \, p^{ab} \right) = 0. \tag{2.48}$$

В рамках точности рассматриваемых приближенных теорий в (2.47), (2.48) ρ_0/ρ можно заменить 1, а $x^i(\xi^\alpha, \xi)$ заменить выражением $r^i(\xi^\alpha) + \xi n^i(\xi^\alpha)$, поскольку $p^{ab} = O(\mu\epsilon)$, и согласно (1.50), (1.64), $x^i(\xi^\alpha,\xi) = r^i(\xi^\alpha) + \xi n^i(\xi^\alpha) + hO(\epsilon)$. Тогда в (2.47), (2.48) можно положить

$$x^i_\alpha = \mu^\beta_\alpha \, r^i_\beta, \quad \mu^\beta_\alpha \equiv \delta^\beta_\alpha - \xi b^\beta_\alpha, \quad x^i_{,3} = n^i, \; n^+_i = n_i, \; n^-_i = -n_i,$$

и уравнения (2.47), (2.48) примут форму

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \, p^{\lambda\beta} \mu^\alpha_\lambda r^i_\alpha + \sqrt{\overset{\circ}{g}} \, p^{\beta 3} n^i \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \, p^{\beta 3} \mu^\alpha_\beta r^i_\alpha + \sqrt{\overset{\circ}{g}} \, p^{33} n^i \right) = 0, \tag{2.49}$$

$$p^{\lambda 3} \Big|_{\xi = \pm h/2} \left(\delta^\alpha_\lambda \pm \frac{h}{2} \, b^\alpha_\lambda \right) r^i_\alpha \pm p^{33} n^i \Big|_{\xi = \pm h/2} = P^i_\pm . \tag{2.50}$$

Используем теперь, что для любого вектора A^β справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left(\sqrt{\overset{\circ}{a}} \, A^\beta \right) = \sqrt{\overset{\circ}{a}} \, A^\beta_{;\beta} . \tag{2.51}$$

Полагая в (2.49) $\sqrt{\overset{\circ}{g}} = \kappa \sqrt{\overset{\circ}{a}}$ и вводя обозначения

$$\tau^{\alpha\beta} = \kappa \mu^\alpha_\lambda \, p^{\beta\lambda}, \quad \tau^\alpha = \kappa p^{\alpha 3}, \quad \tau = \kappa p^{33}, \tag{2.52}$$

перепишем уравнения (2.49) в виде

$$\tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \tau^\beta b^\alpha_\beta + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu^\alpha_\beta \tau^\beta \right) = 0, \tag{2.53}$$

$$\tau^\beta{}_{;\beta} + \tau^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \, \tau = 0. \tag{2.54}$$

Отметим, что тензор $\tau^{\alpha\beta}$ несимметричен.

Определим тензор растягивающих усилий $T^{\alpha\beta}$, тензор изгибающих

моментов $M^{\alpha\beta}$ и вектор перерезывающих усилий N^{α} формулами[1])

$$T^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} d\xi, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} \xi \, d\xi, \quad N^{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha} \, d\xi. \tag{2.55}$$

Тензоры $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ несимметричны.

Интегрирование по ξ уравнений (2.53) и (2.54) и уравнений (2.53), предварительно умноженных на ξ, приводит к системе "осредненных" уравнений равновесия

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - b^{\alpha}_{\beta} N^{\beta} + [\mu^{\alpha}_{\beta} \kappa p^{\beta 3}] = 0,$$

$$N^{\alpha}{}_{;\alpha} + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + [\kappa p^{3 3}] = 0,$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - N^{\alpha} + [\xi \kappa \mu^{\alpha}_{\beta} p^{\beta 3}] = 0.$$

Используя теперь краевые условия (2.50), окончательно получим

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - b^{\alpha}_{\beta} N^{\beta} + \{\kappa P^{\alpha}\} = 0, \tag{2.56}$$

$$N^{\alpha}{}_{;\alpha} + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \{\kappa P\} = 0,$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - N^{\alpha} + \frac{h}{2} [\kappa P^{\alpha}] = 0.$$

Жонглирование индексами можно осуществлять как при помощи метрики $\overset{\circ}{a}{}_{\alpha\beta}$, так и при помощи метрики $a_{\alpha\beta}$, поскольку $a_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{a}{}_{\alpha\beta} = O(\epsilon)$.

Из определения тензоров $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ (2.55) и симметрии тензора напряжений p^{ab} вытекает еще одно соотношение, так называемое шестое уравнение равновесия

$$(T^{\alpha\beta} + b^{\alpha}_{\sigma} M^{\beta\sigma}) e_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.57}$$

Подчеркнем, что при выводе (2.56) была использована только возможность отбросить величины порядка ϵ по сравнению с единицей, а равенство (2.57) является точным [2]). Если дополнительно отбрасывать поправки порядка $\frac{h^2}{lR}$ и $\frac{h^2}{R^2}$ по сравнению с единицей, то в (2.56) под $\kappa|_{\xi = \pm h/2}$ можно

---

[1]) Тензор $M^{\alpha\beta}$ (2.55) и тензор $M^{\alpha\beta}$ (1.6) различны, однако симметричная часть тензора $M^{\alpha\beta}$ (2.55) совпадает, как будет следовать из (2.59), с тензором $M^{\alpha\beta}$ (1.6). Дальше обозначение $M^{\alpha\beta}$ используется для тензора (2.55), при этом в уравнениях (1.5) – (1.11) следует заменить $M^{\alpha\beta}$ на $M^{(\alpha\beta)}$.

[2]) Иногда выводятся точные осредненные уравнения равновесия, не содержащие приближений. При этом, однако, следует иметь в виду, что они выводятся в системе координат, связанной с деформированным состоянием и заранее неизвестной.

понимать величины $\kappa_{\pm} = 1 \mp h\overset{\circ}{H}$. Уравнения равновесия примут вид

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - b^{\alpha}_{\beta} N^{\beta} + \{P^{\alpha}\} - h\overset{\circ}{H}\,[P^{\alpha}] = 0, \tag{2.58}$$

$$N^{\alpha}{}_{\cdot\alpha} + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \{P\} - h\overset{\circ}{H}\,[P] = 0,$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - N^{\alpha} + \frac{h}{2}\,[P^{\alpha}] - \frac{h}{2}\,h\overset{\circ}{H}\{P^{\alpha}\} = 0.$$

Вычислим теперь в линейной теории тензоры $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ через $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$. Для простоты ограничимся случаем, когда тангенциальные составляющие внешних сил на лицевых поверхностях $P^{\alpha}_{\pm}$ равны нулю.

Покажем, что имеют место равенства

$$n^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{[\alpha}_{\lambda} M^{\lambda\beta]}, \quad m^{\alpha\beta} = -M^{(\alpha\beta)}. \tag{2.59}$$

По определению тензора напряжений

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = \frac{\partial U_{\parallel}}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} + \frac{\partial U_{\perp}}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = \frac{\partial U_{\parallel}}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} + \lambda(\epsilon_{33} + \sigma \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu})\,\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta},$$

$$p^{33} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{33}} = (\lambda + 2\mu)(\epsilon_{33} + \sigma \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U_{\parallel}}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = p^{\alpha\beta} - \sigma p^{33}\,\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}. \tag{2.60}$$

Согласно формуле для z (2.25) и (2.28) в первом приближении

$$p^{33} = 5(\lambda + 2\mu)\,\bar{\varphi}\left(\frac{1}{4} - \zeta^2\right) + \frac{1}{2}\left(5\zeta^2 - \frac{1}{4}\right)[P] + \{P\}\,\zeta.$$

Величина $\bar{\varphi}$ в первом приближении дается равенством (2.38). Поэтому

$$p^{33} = -\frac{3}{2h}\,m^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}(1 - 4\zeta^2) + 3[P]\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) + \{P\}\,\zeta.$$

Нам потребуется более точное равенство, учитывающее поправку порядка h/l. Приведем, не останавливаясь на выводе, результат

$$p^{33} = -\frac{3}{2h}\,m^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}(1 - 4\zeta^2) + \frac{1}{2}\,n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}(1 - 4\zeta^2)\,\zeta +$$

$$+ \frac{3}{2}\,\zeta\left(1 - \frac{4}{3}\,\zeta^2\right)\{\kappa P\} + \frac{1}{2}\,[\kappa P]. \tag{2.61}$$

Приведем также формулу, связывающую $\epsilon_{\mu\nu}$ с $\gamma_{\mu\nu}, \rho_{\mu\nu}$:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \frac{h^2}{12}\,\overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\mu}\,\rho_{\lambda\nu)} - \frac{\rho h^2}{60}\,\rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}{}_{\mu\nu} - h(\rho_{\mu\nu} + b^{\lambda}_{(\mu}\,\gamma_{\lambda\nu)} -$$

$$- \sigma\gamma^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}{}_{\mu\nu})\,\zeta + h^2 b^{\lambda}_{(\mu}\,\rho_{\lambda\nu)}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) -$$

$$- \frac{\sigma h^2}{2}\,\overset{\circ}{b}{}_{\mu\nu}\,p^{\alpha}_{\alpha}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right) + hz_{(\alpha;\beta)}. \tag{2.62}$$

Последующие члены выходят за рамки точности теории с учетом сдвига. Величины z_α есть функции только от $\overline{\varphi}_\alpha$.

Из определения $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ имеем

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial(h\langle U_{\|}\kappa\rangle + \Theta)}{\partial\gamma_{\alpha\beta}} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa \frac{\partial U_{\|}}{\partial\epsilon_{\mu\nu}} \frac{\partial\epsilon_{\mu\nu}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}} d\xi + \frac{\partial\Theta}{\partial\gamma_{\alpha\beta}} =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \kappa (p^{\mu\nu} - \sigma p^{33} \overset{\circ}{a}{}^{\mu\nu})(\delta^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu} - \overset{\circ}{b}{}^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu}\xi + \sigma \overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}\xi)\, d\xi + \frac{\partial\Theta}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}, \tag{2.63}$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\partial(h\langle U_{\|}\kappa\rangle + \Theta)}{\partial\rho_{\alpha\beta}} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa \frac{\partial U_{\|}}{\partial\epsilon_{\mu\nu}} \frac{\partial\epsilon_{\mu\nu}}{\partial\rho_{\alpha\beta}} d\xi + \frac{\partial\Theta}{\partial\rho_{\alpha\beta}} =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \kappa (p^{\mu\nu} - \sigma p^{33} \overset{\circ}{a}{}^{\mu\nu}) \left(\frac{h^2}{12} \delta^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma h^2}{60} \overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} - \xi\delta^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu} \right) d\xi + \frac{\partial\Theta}{\partial\rho_{\alpha\beta}}.$$

В (2.63) не выписаны слагаемые, которые содержат множитель $\zeta^2 - 1/12$, так как после интегрирования по ξ они станут малыми неучитываемого порядка малости.

Привлекая теперь формулу (2.61) и выражения для $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ (2.55), которые с рассматриваемой точностью можно переписать в форме

$$\int_{-h/2}^{h/2} \kappa p^{\alpha\beta} d\xi = T^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} M^{\beta\sigma}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \kappa p^{\alpha\beta}\xi\, d\xi = M^{\alpha\beta} + \frac{h^2}{12} \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} T^{\beta\sigma}, \tag{2.64}$$

получим равенства (2.59).

Отметим, что из первого равенства (2.64) следуют соотношения (2.57). Аналог (2.57) для второго равенства (2.64) имеет вид

$$\left(M^{\alpha\beta} + \frac{h^2}{12} \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} T^{\beta\sigma} \right) e_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.65}$$

Отметим, что первое из равенств (2.59) можно переписать также в форме

$$n^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)}, \tag{2.66}$$

а несимметричный тензор $t^{\alpha\beta}$, через который были записаны уравнения равновесия (1.20), совпадает с $T^{\alpha\beta}$. Вектор $q^\alpha = -m^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$, согласно третьему уравнению (2.55), совпадает с вектором перерезывающего усилия N^α.

Теория, учитывающая геометрическую поправку, и итерационная теория Гольденвейзера. Сравним выведенные соотношения с соотношениями полученными А.Л. Гольденвейзером при помощи анализа линейных статических уравнений трехмерной теории

упругости. Для силовых и геометрических характеристик в [68] использовались следующие обозначения:

$$G_1 = -M_{11},\quad G_2 = -M_{22},\quad H_{12} = M_{12},\quad H_{21} = M_{21},\quad T_1 = T_{11},$$

$$T_2 = T_{22},\quad S_{12} = T_{12},\ S_{21} = T_{21},\quad m = [P],\quad Z' = \{P\},\quad \frac{1}{R_1} = -\overset{\circ}{b}_{11},\quad \frac{1}{R_2} = -\overset{\circ}{b}_{22}.$$

можно проверить, что уравнения равновесия (1.20) теории, учитывающей геометрическую поправку, полностью совпадают с уравнениями равновесия в [68].

Для сравнения уравнений состояния надо переписать (2.9) в терминах перемещений срединной поверхности, которые употреблялись в [68] в качестве искомых. Все величины, относящиеся к срединной поверхности, снабжаются буквой с. Из формул (1.27), (1.50), (1.63) следует, что

$$\overset{(c)}{r}_i = \bar{r}_i - \frac{\sigma h^2}{40}\ n_l \rho^{\mu}_{\mu},\ \gamma_{\alpha\beta} = \overset{(c)}{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{\sigma h^2}{40}\ \rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta},\ \rho_{\alpha\beta} = \overset{(c)}{\rho}_{\alpha\beta}. \tag{2.67}$$

Пересчитывая уравнения состояния (2.9) в терминах $\overset{(c)}{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(c)}{\rho}_{\alpha\beta}$, получим

$$n^{\alpha\beta} = 2\mu h\left(\sigma\overset{(c)}{\gamma}{}^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \overset{(c)}{\gamma}{}^{\alpha\beta}\right) -$$

$$-\frac{\mu h^3}{3}\left[\rho^{(\alpha\lambda}b^{\beta)}_{\lambda} + \sigma\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\overset{\circ}{\rho}{}^{\mu\nu}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \sigma\left(\frac{3}{2}\ \sigma - 1\right)\rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{H}\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \frac{3}{4}\sigma\rho^{\lambda}_{\lambda}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha\beta}\right] +$$

$$+\frac{\sigma h}{2}\ [P]\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$$

Зависимость $m^{\alpha\beta}$ от $\overset{(c)}{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(c)}{\rho}_{\alpha\beta}$ в рамках рассматриваемой точности по форме не отличается от зависимости $m^{\alpha\beta}$ от $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ (2.9).

А.Л. Гольденвейзер получил для моментов уравнения состояния (см. (27.13.10) в [68])

$$G_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left[\kappa_1 + \nu\kappa_2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\epsilon_1 -\right.$$

$$\left.-\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)(\epsilon_1 + \epsilon_2)\right] - \frac{h^2}{12}\ \sigma\{P\},$$

$$H_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_2}\right)\quad H_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_1}\right). \tag{2.68}$$

Здесь меры растяжения и изгиба определены равенствами

$$\kappa_1 = -\rho_{11},\quad \kappa_2 = -\rho_{22},\quad \tau = -\overset{(c)}{B}_{12} = -\rho_{12} - \overset{\circ}{H}\overset{(c)}{\gamma}_{12},$$

$$\epsilon_1 = \overset{(c)}{\gamma}_{11},\quad \epsilon_2 = \overset{(c)}{\gamma}_{22},\quad \omega = 2\overset{(c)}{\gamma}_{12},$$

а $E = 2\mu(1+\nu)$ – модуль Юнга.

Уравнения для смешанных компонент тензора изгибающих моментов в (2.9) и (2.68) совпадают (для того чтобы в этом убедиться надо привлечь равенство (2.65)). Диагональные компоненты тензора изгибающих моментов по (2.9) и (2.68) различны. Оказывается, однако, что в области длинных волн они различаются в членах неучитываемого порядка малости. Действительно, из второго уравнения равновесия (2.58) и выражения для $\{P\}$ в первом приближении имеем (при $P^{\alpha} = 0$)

$$\{P\} = -T^{\alpha\beta}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - M^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}. \tag{2.69}$$

Подстановка (2.69) в (2.68) и отбрасывание слагаемого $h^2 M^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}$, малого по сравнению G_1, позволяет привести уравнения Гольденвейзера к виду (2.9).

Уравнения для растягивающих усилий совпадают полностью [1]).

Уравнения состояния (2.9) обладают некоторыми преимуществами по сравнению с уравнениями состояния Гольденвейзера. Они более точны и сохраняют свою форму и в теории с учетом поперечного сдвига (отбрасывание слагаемого $h^2 M^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}$ по сравнению с G_1, которое необходимо для приведения уравнений А.Л. Гольденвейзера к виду (2.9), в теории с учетом сдвига незаконно). Кроме того, меры растяжения и изгиба, построенные по радиус-вектору срединной поверхности, не являются параметрами, для которых тензоры усилий и моментов потенциальны. Действительно, согласно (2.9), (2.58), (2.67),

$$\delta(\Phi + \Theta) = n^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}\delta\rho_{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)}\delta\gamma_{\alpha\beta} - M^{(\alpha\beta)}\delta\rho_{\alpha\beta} =$$

$$= T^{(\alpha\beta)}\delta\overset{(c)}{\gamma}_{\alpha\beta} - \left(M^{(\alpha\beta)} + \frac{\sigma h^2}{40}\, T^{\mu\nu}\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\overset{\circ}{a}^{\alpha\beta}\right)\delta\overset{(c)}{\rho}_{\alpha\beta}.$$

Поэтому, если в качестве мер деформации и изгиба используются параметры $\overset{(c)}{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(c)}{\rho}_{\alpha\beta}$, то упругим потенциалом будут обладать не $T^{(\alpha\beta)}$ и $M^{(\alpha\beta)}$, а $T^{(\alpha\beta)}$ и $M^{(\alpha\beta)} + \frac{\sigma h^2}{40}\, T^{\mu\nu}\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\overset{\circ}{a}^{\alpha\beta}$.

В нелинейном случае, уравнения с учетом геометрической поправки выводились Ниордсоном [360] из некоторых гипотез, уточняющих гипотезы Кирхгофа – Лява. Ниордсон удерживал все поправки порядка h/R и h^2/R^2 по сравнению с единицей. Следует отметить, что удерживать поправки порядка h^2/R^2 и не учитывать поперечный сдвиг, приводящий в самом благоприятном случае $l \sim R$ к поправкам такого же порядка h^2/R^2, а при $l \ll R$ к более существенным поправкам (исключая некоторые "экзотические" задачи, в которых поперечный сдвиг мал), не имеет смысла. Если же отбросить все члены порядка h^2/R^2 и пересчитать выражение для энергии, полученное Ниордсоном, в терминах $A_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ (Ниордсон использовал в качестве искомых функций компоненты радиус-вектора срединной поверхности, а в качестве мер деформации $\overset{(c)}{A}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(c)}{B}_{\alpha\beta}$), то получится выражение (2.7).

Асимптотическая теория с учетом поперечного сдвига и теория Рейсснера. Сравним линейные статические уравнения с учетом поперечного сдвига с уравнениями, предлагавшимися Рейсснером [204]. Рейсснер выводил теорию оболочек из вариационного принципа Кастильяно при помощи некоторых априорных гипотез относительно зависимости напряжений от поперечной координаты и получил выражение для энергии в терминах растягивающих усилий и моментов. Поэтому для сравнения с теорией Рейсснера надо найти выражение для энергии как функции от $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ и q^{α}. Для простоты внешние силы на лицевых поверхностях считаем равными нулю. Кроме того, малые порядка h^2/R^2 всюду опускаются по сравнению с 1.

Выкладки существенно упрощаются при помощи следующего соображения. Пусть Φ – квадратичная форма по переменным x^i вида

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\, a^{ij}x_i x_j + \frac{1}{2}\,\epsilon b^{ij}x_i x_j, \tag{2.70}$$

где ϵ – малый параметр. Надо найти Φ как функцию $y^i = \partial\Phi/\partial x_i$, сохраняя лишь члены порядка ϵ по сравнению с единицей. Покажем, что Φ имеет вид

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\, a^{(-1)}_{ij}y^i y^j - \frac{1}{2}\,\epsilon b^{ij}a^{(-1)}_{ik}a^{(-1)}_{jl}y^k y^l, \tag{2.71}$$

где $a^{(-1)}_{ij}$ – тензор, обратный к тензору a^{ij}.

---

[1]) С точностью до опечаток в формуле (27.13.10) в [68]. Уравнения для смешанных компонент тензора растягивающих усилий в [68] следует читать так:

$$S_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\,\omega + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\tau,$$

$$S_{21} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\,\omega - \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\tau.$$

Действительно, y^i определяются из уравнений

$$y^i = a^{ij} x_j + \epsilon b^{ij} x_j. \tag{2.72}$$

В первом приближеиии $x_i = a_{ij}^{(-1)} y^j$. С учетом поправок порядка ϵ из (2.72) имеем

$$x_i = a_{ij}^{(-1)} (y^j - \epsilon b^{jk} a_{kl}^{-1} y^l). \tag{2.73}$$

Из равеиства $\Phi = \frac{1}{2} y^i x_i$ и формулы (2.73) следует (2.71).

Соотношеиие (2.71) показывает, что вычислеиие Φ в функции $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ и q^α сводится к вычислению $F(\gamma)$, $F(h\rho)$ и $F(\gamma, h\rho)$ через $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$, когда для $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ используются уравнеиия состояния классической теории

$$n^{\alpha\beta} = 2\mu h(\sigma\gamma_\lambda^\lambda \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}), \quad m^{\alpha\beta} = \frac{\mu h^3}{6} (\sigma\rho_\lambda^\lambda \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta}),$$

и выражению поперечиого сдвига через q^α из уравиения $q^\alpha = \frac{5}{6} \mu h \bar{\varphi}^\alpha$.

В результате получим

$$\Phi = \frac{1}{\mu h} \left[\frac{1}{4} n^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} - \frac{\sigma}{4(1+2\sigma)} (n_\alpha^\alpha)^2 + \frac{3}{h^2} m^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} - \frac{3\sigma}{h^2(1+2\sigma)} (m_\alpha^\alpha)^2 + \right.$$

$$\left. + n^{\alpha\beta} b'_{\alpha\lambda} m_\beta^\lambda - \frac{2}{5} \frac{\sigma}{(1+2\sigma)} m_\lambda^\lambda \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \frac{\sigma}{1+2\sigma} \overset{\circ}{H} m_\mu^\mu n_\nu^\nu + \frac{3}{5} q_\alpha q^\alpha \right]. \tag{2.74}$$

Выражение (2.74) можно переписать, используя тождество

$$2\left[n^{\alpha\beta} b'_{\alpha\lambda} m_\beta^\lambda - \frac{2}{5} m_\lambda^\lambda \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{H} n_\lambda^\lambda m_\nu^\nu \right] = \frac{1}{5} m_\lambda^\lambda \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} n_\lambda^\lambda. \tag{2.75}$$

Оно доказывается путем разложения всех входящих в него тензоров на шаровую и девиаторную часть и привлечения равенства $b'^\beta_\alpha n'^\sigma_\beta m'^\alpha_\sigma = 0$, справедливого для любых трех девиаторов в двумерном пространстве.

Вводя модуль Юнга $E = 2\mu(1+\nu)$ и учитывая, что $\frac{\sigma}{1+2\sigma} = \frac{\nu}{1+\nu}$, получим

$$\Phi = \frac{1}{Eh} \left[\frac{1+\nu}{2} n^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2} (n_\alpha^\alpha)^2 + \frac{6(1+\nu)}{h^2} m^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} - \frac{6\nu}{h^2} (m_\alpha^\alpha)^2 + \right.$$

$$\left. + 2n^{\alpha\beta} b'_{\alpha\lambda} m_\beta^\lambda + \frac{\nu}{5} m_\lambda^\lambda \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \nu \overset{\circ}{b}{}_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} n_\lambda^\lambda \right] + \frac{3}{5\mu h} q_\alpha q^\alpha. \tag{2.76}$$

Нетрудно убедиться, что в линиях кривизны это выражение переходит в выражение. полученное Рейсснером [1]).

§ 3. ТЕОРИЯ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

Вывод уравнений теории анизотропных неоднородных оболочек почти дословно повторяет вывод в изотропном случае, и мы приведем его с меньшей степенью подробности, чем в §§ 1, 2.

Упругие модули. Объемная плотность упругой энергии анизотропного тела есть квадратичная форма по компонентам тензора деформаций общего вида

$$2U = E^{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} + E^{3333} \epsilon_{33} \epsilon_{33} + 4E^{\alpha 3\beta 3} \epsilon_{\alpha 3} \epsilon_{\beta 3} +$$

$$+ 2E^{\alpha\beta 33} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{33} + 4E^{\alpha\beta\gamma 3} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma 3} + 4E^{\alpha 333} \epsilon_{\alpha 3} \epsilon_{33}.$$

---

[1]) Отметим, что в теории Рейсснера асимптотически точны только уравнения для интегральных характеристик, а распределения по толщиие таковыми не являются.

Вычисление продольной упругой энергии по формуле (1.43) дает

$$U_{\|}=\frac{1}{2}E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}-E^{\alpha\beta 33}E^{\gamma\delta 33}/\mathbb{E}-H_{\mu\nu}G^{\alpha\beta\mu}G^{\gamma\delta\nu},$$
$$G^{\alpha\beta\mu}=E^{\alpha\beta\mu 3}-E^{\alpha\beta 33}/\mathbb{E},\ \mathbb{E}=E^{3333}, \tag{3.2}$$

а $H_{\mu\nu}$ – тензор, обратный к тензору $E^{\mu 3\nu 3}-E^{\mu 333}E^{\nu 333}/\mathbb{E}$.

Поперечная упругая энергия, как легко проверить, есть положительно определенная квадратичная форма по $\gamma_\alpha=2\epsilon_{\alpha 3}+E_\alpha^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}$ и $\gamma=\epsilon_{33}+E^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}$, где

$$E_\alpha^{\mu\nu}=H_{\alpha\beta}G^{\mu\nu\beta},\ E^{\alpha\beta}=(E^{\alpha\beta 33}-E_\mu^{\alpha\beta}E^{\mu 333})/\mathbb{E}. \tag{3.3}$$

Поперечная упругая энергия дается равенством

$$2U_\perp=E^{\alpha 3\beta 3}\gamma_\alpha\gamma_\beta+2E^{\alpha 333}\gamma_\alpha\gamma+\mathbb{E}\gamma^2. \tag{3.4}$$

В справедливости соотношения $U=U_{\|}+U_\perp$ и формул (3.1), (3.4) можно убедиться, подставив в (3.1), (3.4) выражения "двумерных" упругих модулей $E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $E^{\alpha 3\beta 3}$, $E^{\gamma 333}$, $\mathbb{E}$, $E_\alpha^{\mu\nu}$, и $E^{\alpha\beta}$ через упругие модули трехмерного тела (3.2) и (3.3) и раскрыв скобки.

Двумерные упругие модули удовлетворяют условиям симметрии

$$E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}=E_{\|}^{\beta\alpha\gamma\delta}=E_{\|}^{\alpha\beta\delta\gamma}=E_{\|}^{\gamma\delta\alpha\beta},\ E^{\alpha 3\beta 3}=E^{\beta 3\alpha 3}, \tag{3.5}$$
$$E^{\alpha\beta}=E^{\beta\alpha},\ E_\alpha^{\mu\nu}=E_\alpha^{\nu\mu}$$

и условию положительной определенности упругой энергии

$$E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\geqslant m\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta},\ m=\text{const}>0, \tag{3.6}$$

$$E^{\alpha 3\beta 3}\gamma_\alpha\gamma_\beta+2E^{\alpha 333}\gamma_\alpha\gamma+\mathbb{E}\gamma^2\geqslant m(\gamma_\alpha\gamma^\alpha+\gamma^2),\ m=\text{const}>0. \tag{3.7}$$

Двумерные упругие модули естественно взять в качестве независимых компонент тензора упругих модулей. Согласно (3.5) имеется 21 произвольная упругая постоянная, двенадцать из них $E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $E^{\alpha 3\beta 3}$ $E^{\alpha 333}$ и $\mathbb{E}$ размерны и подчинены условиям (3.6), (3.7), а остальные девять $E^{\alpha\beta}$, $E_\alpha^{\mu\nu}$ – двумерные коэффициенты Пуассона – безразмерны и могут принимать произвольные численные значения.

Зависимость упругих модулей от поперечной координаты. В силу криволинейности сопутствующей системы координат в начальном состоянии компоненты тензора упругих модулей будут зависеть от координат даже для однородных оболочек. Поэтому возникает проблема отделения зависимости упругих модулей от координат, порожденной геометрическими факторами, от зависимости, обусловленной неоднородностью оболочки.

Векторы базиса сопутствующей системы координат в неоднородном состоянии связаны с касательными векторами $\mathbf{a}_\alpha$ поверхности $\overset{\circ}{\Omega}$ равенствами $\overset{\circ}{\mathbf{э}}_\alpha=\overset{\circ}{\mu}_\alpha^\beta\mathbf{a}_\beta$, где $\overset{\circ}{\mu}_\alpha^\beta$ определены формулами (1.34), а вектор $\overset{\circ}{\mathbf{э}}_3$ не зависит от ξ, и на $\overset{\circ}{\Omega}$ совпадает с вектором единичной нормали к $\overset{\circ}{\Omega}$. В соответствии с этим "двумерные" тензоры упругих моделей $E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{\circ}{\mathbf{э}}_\alpha\overset{\circ}{\mathbf{э}}_\beta\overset{\circ}{\mathbf{э}}_\gamma\overset{\circ}{\mathbf{э}}_\delta$, ...

можно переразложить по векторам $\mathbf{a}_\alpha$, при этом

$$E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathring{\mathfrak{e}}_\alpha\mathring{\mathfrak{e}}_\beta\mathring{\mathfrak{e}}_\gamma\mathring{\mathfrak{e}}_\delta = E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathring{\mu}_\alpha^\sigma\mathring{\mu}_\beta^\nu\mathring{\mu}_\gamma^\omega\mathring{\mu}_\delta^\theta\,\mathbf{a}_\sigma\mathbf{a}_\nu\mathbf{a}_\omega\mathbf{a}_\theta\,,\ \ldots$$

Введем обозначения:

$$C^{\sigma\nu\omega\theta} = E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathring{\mu}_\alpha^\sigma\mathring{\mu}_\beta^\nu\mathring{\mu}_\gamma^\omega\mathring{\mu}_\delta^\theta\,,\quad \mathbb{C}^{\sigma\nu} = E^{\alpha\beta}\mathring{\mu}_\alpha^\sigma\mathring{\mu}_\beta^\nu,$$

$$\mathbb{C}_\omega^{\sigma\nu} = E_\gamma^{\alpha\beta}\mathring{\mu}_\alpha^\sigma\mathring{\mu}_\beta^\nu\mathring{\lambda}_\omega^\gamma\,,\quad G^{\sigma\omega} = E^{\alpha 3\beta 3}\mathring{\mu}_\alpha^\sigma\mathring{\mu}_\beta^\omega, \tag{3.8}$$

$$C^\sigma = E^{\alpha 33 3}\mathring{\mu}_\alpha^\sigma.$$

Здесь тензор $\mathring{\lambda}_\omega^\gamma$ определен формулой (1.39).

Проведенное построение имеет следующий смысл. Если на поверхности выбрана (неголономная) "физическая" система координат, то значения компонент двумерных тензоров (3.8) и двумерного скаляра $\mathbb{E}$ в этой системе координат совпадают с физическими компонентами тензора упругих модулей. Таким образом, формулы (3.8) осуществляют искомое разделение зависимости упругих модулей от координат, вызванное криволинейностью системы координат и неоднородностью оболочки: неоднородность оболочки описывается зависимостью тензоров (3.8) от ξ^α и $\zeta = \xi/h$, а все геометрические факторы входят через тензоры $\mathring{\mu}_\alpha^\beta$ и $\mathring{\lambda}_\alpha^\beta$. Знать упругие свойства материала оболочки означает знать тензоры (3.8).

Разрешая (3.8) относительно $E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, ..., имеем

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\sigma\nu\omega\theta}\,\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha\mathring{\lambda}_\nu^\beta\mathring{\lambda}_\omega^\gamma\mathring{\lambda}_\theta^\delta,\quad E^{\alpha\beta} = \mathbb{C}^{\sigma\nu}\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha\mathring{\lambda}_\nu^\beta,$$

$$E_\gamma^{\alpha\beta} = \mathbb{C}_\omega^{\sigma\nu}\,\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha\mathring{\lambda}_\nu^\beta\mathring{\mu}_\gamma^\omega,\quad E^{\alpha 3\beta 3} = G^{\sigma\omega}\,\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha\mathring{\lambda}_\omega^\beta, \tag{3.9}$$

$$E^{\alpha 33 3} = C^\sigma\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha.$$

Формулы (3.9), (1.34) и (1.39) определяют зависимость упругих модулей от поперечной координаты. В эту зависимость входит через $\mathring{\mu}_\alpha^\beta$ и $\mathring{\lambda}_\alpha^\beta$ малый параметр h/R. Построим разложение по h/R. При этом, поскольку $E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ входит в энергию вместе с множителем κ, будем строить разложение сразу для $\kappa E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Так как

$$\kappa E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\sigma\nu\omega\theta}(\kappa^{1/4}\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha)(\kappa^{1/4}\mathring{\lambda}_\nu^\beta)(\kappa^{1/4}\mathring{\lambda}_\omega^\gamma)(\kappa^{1/4}\mathring{\lambda}_\theta^\delta),$$

$$\kappa^{1/4}\mathring{\lambda}_\sigma^\alpha = \delta_\sigma^\alpha + \xi\overset{1}{b}{}_\sigma^\alpha + \ldots,\quad \overset{1}{b}{}_\sigma^\alpha = \mathring{b}_\sigma^\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{H}\delta_\sigma^\alpha,$$

имеем

$$\kappa E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha,\zeta) + \xi C'^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha,\zeta) + O\left(\bar{\mu}\,\frac{h^2}{R^2}\right),$$

$$C'^{\alpha\beta\gamma\sigma} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{1}{b}{}_\delta^\sigma + C^{\alpha\beta\sigma\delta}\overset{1}{b}{}_\sigma^\gamma + C^{\alpha\sigma\gamma\delta}\overset{1}{b}{}_\sigma^\beta + C^{\sigma\beta\gamma\delta}\overset{1}{b}{}_\sigma^\alpha. \tag{3.10}$$

Здесь и в дальнейших оценках $\bar{\mu}$ — максимальное собственное значение тензора упругих модулей — наилучшая постоянная в неравенстве

$$E^{abcd}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd} \leqslant \bar{\mu}\epsilon_{ab}\epsilon^{ab}\ .$$

Аналогично, поскольку $\lambda^{\alpha}_{\sigma} = \delta^{\alpha}_{\sigma} + \xi \overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$, имеем

$$E^{\alpha\beta} = \mathbb{C}^{\alpha\beta} + \xi C'^{\alpha\beta} + O\left(\bar{\mu}\frac{h^2}{R^2}\right), \quad C'^{\alpha\beta} = \mathbb{C}^{\alpha\sigma}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} + \mathbb{C}^{\sigma\beta}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma},$$

$$E^{\alpha\beta}_{\gamma} = \mathbb{C}^{\alpha\beta}_{\gamma} + \xi C'^{\alpha\beta}_{\gamma} + O\left(\bar{\mu}\frac{h^2}{R^2}\right), \quad C'^{\alpha\beta}_{\gamma} = \mathbb{C}^{\sigma\beta}_{\gamma}\overset{\circ}{b}{}^{\alpha}_{\sigma} + \mathbb{C}^{\alpha\sigma}_{\gamma}\overset{\circ}{b}{}^{\beta}_{\sigma} - \mathbb{C}^{\alpha\beta}_{\sigma}\overset{\circ}{b}{}^{\sigma}_{\gamma}, \tag{3.11}$$

$$E^{\alpha 3\beta 3} = G^{\alpha\beta} + O\left(\bar{\mu}\frac{h}{R}\right), \quad E^{\alpha 333} = C^{\alpha} + O\left(\bar{\mu}\frac{h}{R}\right).$$

Основные случаи упругой симметрии. *Плоскости упругой симметрии, параллельные срединной поверхности.* Если упругие свойства инвариантны при отражениях относительно плоскостей, параллельных срединной поверхности, то "двумерные" упругие модули с нечетным числом индексов обращаются в нуль

$$\mathbb{C}^{\alpha\beta}_{\gamma} = 0, \quad C^{\alpha} = 0. \tag{3.12}$$

Трансверсальная изотропия. При дополнительной инвариантности упругих свойств относительно вращений вокруг вектора нормали к срединной поверхности "двумерные" тензоры упругих модулей второго ранга являются шаровыми:

$$G^{\alpha\beta} = G\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}, \quad \mathbb{C}^{\alpha\beta} = \sigma\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}, \tag{3.13}$$

а тензор $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяется двумя постоянными λ' и μ:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda'\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}\overset{\circ}{a}{}^{\gamma\delta} + \mu\left(\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\gamma}\overset{\circ}{a}{}^{\beta\delta} + \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\delta}\overset{\circ}{a}{}^{\beta\gamma}\right). \tag{3.14}$$

Упругие свойства трансверсально изотропного тела определяются пятью упругими характеристиками $\lambda', \mu, G, \mathbb{E}$ и σ; при этом μ, G, E и $\lambda' + \mu$ положительны, а коэффициент σ произволен.

Изотропия. В этом случае имеется два независимых параметра λ и μ и $\lambda' = 2\mu\sigma$, $\sigma = \lambda/(\lambda + 2\mu)$, $\mathbb{E} = \lambda + 2\mu$, $G = \mu$.

В общем случае анизотропии тензор $G^{\alpha\beta}$ естественно назвать тензором модулей сдвига, а тензоры $\mathbb{C}^{\alpha\beta}$ и $\mathbb{C}^{\alpha\beta}_{\gamma}$ — тензорами коэффициентов Пуассона.

Однородные по толщине оболочки. Под однородными по толщине оболочками будем понимать оболочки, у которых тензоры $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathbb{C}^{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$ $\mathbb{C}^{\alpha\beta}_{\gamma}$, C_{α} и $\mathbb{E}$ не зависят от ζ.

Функции y_{α}, y. Рассмотрим сначала в рамках статики случай "общего положения", считая оболочку неоднородной и $\mathbb{C}^{\mu\nu}_{\alpha}$ отличными от нуля. Так же, как для изотропных оболочек, делаем замену искомых функций (1.50) и ищем y_{α}, y, приняв для компонент деформаций $\epsilon_{\alpha\beta}$ и ϵ_{33} приближенные выражения (1.61) и отбросив работу внешних сил. Для $\epsilon_{\alpha 3}$ возьмем формулу $2\epsilon_{\alpha 3} = y_{\alpha,\zeta}$. Искомые функции y_{α} и y минимизируют функционал $\langle U_{\perp}\rangle$ при ограничениях $\langle y_{\alpha}\rangle = \langle y\rangle = 0$. Минимум функционала, очевидно, равен нулю и достигается при $\gamma_{\alpha} = \gamma = 0$. Для определения y_{α}, y

имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_{\alpha,\zeta} + \mathbb{C}_{\alpha}^{\beta\gamma}(A_{\beta\gamma} - hB_{\beta\gamma}\zeta) = 0, \quad \langle y_\alpha \rangle = 0,$$
$$y_{,\zeta} + \mathbb{C}^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta) = 0, \quad \langle y \rangle = 0. \tag{3.15}$$

Множители Лагранжа для ограничений $\langle y_\alpha \rangle = \langle y \rangle = 0$, как нетрудно проверить, обращаются в нуль и в (3.15) не выписаны. Из уравнений (3.15) видно, что $y_\alpha \sim \epsilon$, $y \sim \epsilon$. Анализ членов, отброшенных в выражениях для компонент тензора деформаций (1.58), показывает, что все они меньше учтенных. Вклад работы внешних сил также пренебрежимо мал. Поэтому формулы (3.15) определяют асимптотически точные значения y_α и y в первом приближении.

Функции y_α описывают тангенциальные перемещения волокон, перпендикулярных к срединной поверхности, относительно положения нормали в деформированном состоянии. Уравнения (3.15) показывают, что для тел, у которых $\mathbb{C}_{\gamma}^{\alpha\beta} = 0$ (в частности, это тела, имеющие плоскости упругой симметрии, параллельные срединной), $y_\alpha = 0$ и в первом приближении нормаль к $\overset{\circ}{\Omega}$ после деформации остается отрезком прямой, перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. Это свойство в качестве эвристической гипотезы было положено Кирхгофом в основу построения теории пластин и впоследствии использовано Лявом при построении теории оболочек. Для тел с ненулевым тензором $\mathbb{C}_{\gamma}^{\alpha\beta}$ поперечные волокна отклоняются от положения нормали к деформированной срединной поверхности на угол порядка ϵ (напомним, что для изотропных оболочек этот угол порядка $\frac{h}{l}\epsilon$), а зависимость $\mathbb{C}_{\gamma}^{\alpha\beta}$ от ζ порождает искривление волокон уже в первом приближении. Заметим, что, согласно второму уравнению (3.15), поперечная деформация волокон происходит как для анизотропных, так и для изотропных оболочек (в изотропном случае $\mathbb{C}^{\alpha\beta} = \sigma \overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$).

Обращение поперечной упругой энергии в нуль имеет простой физический смысл. Из формул $p^{\alpha 3} = \partial U/\partial \epsilon_{\alpha 3} = 2\partial U_\perp/\partial \gamma_\alpha$ и $p^{33} = \partial U/\partial \epsilon_{33} = \partial U_\perp/\partial \gamma$ следует, что равенство $U_\perp = 0$ эквивалентно обращению в нуль в первом приближении компонент тензора напряжений $p^{\alpha 3}$ и p^{33}.

Внутренняя энергия оболочки в классическом приближении. Вычислим упругую энергию анизотропной неоднородной оболочки, пренебрегая перекрестными членами между растяжением и изгибом порядка $\overline{\mu} h \frac{h}{R} \epsilon_A \epsilon_B$. В выражении для компонент тензора деформаций $\epsilon_{\alpha\beta}$ члены, содержащие y_α и y, можно опустить, так же, как и слагаемое $h^2 C_{\alpha\beta}\zeta^2$. Поэтому поверхностная плотность упругой энергии дается равенством

$$\Phi = h\langle U_{\|}\kappa \rangle =$$
$$= \frac{1}{2} h \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha, \xi)(A_{\alpha\beta} - h\rho_{\alpha\beta}\zeta)(A_{\gamma\delta} - h\rho_{\gamma\delta}\zeta)\rangle =$$
$$= F(A) + F_1(h\rho) + \Phi_{\text{пер}}(A, h\rho).$$

Здесь $F(A)$ – энергия изгиба, $F_1(h\rho)$ – энергия растяжения, $\Phi_{\text{пер}}(A,\ h\rho)$ – перекрестная энергия:

$$F(A) = \frac{1}{2}\, h \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta},$$

$$F_1(h\rho) = \frac{1}{2}\, h^3 \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \zeta^2 \rangle \rho_{\alpha\beta} \rho_{\gamma\delta}, \tag{3.16}$$

$$\Phi_{\text{пер}}(A,\ h\rho) = -\, h^2 \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \zeta \rangle A_{\alpha\beta} \rho_{\gamma\delta}.$$

Если тензор $\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}\zeta \rangle$ отличен от нуля, то перекрестная энергия для неоднородных оболочек имеет тот же порядок, что энергия растяжения и изгиба и не может быть опущена. Перекрестная энергия описывает эффект возникновения изгибающих моментов при растяжении и взаимный эффект возникновения растягивающих усилий при изгибе. Эти эффекты существенны при описании деформации неоднородных оболочек. В качестве примера укажем на оболочку, состоящую из двух однородных оболочек с различными упругими свойствами: $C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C_+^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha)$ при $\zeta > 0$, $C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C_-^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha)$ при $\zeta < 0$: $\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}\zeta \rangle = {}^1\!/_8\, (C_+^{\alpha\beta\gamma\delta} - C_-^{\alpha\beta\gamma\delta})$.

Если оболочка однородна по толщине, то $\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}\ \zeta \rangle = 0$, и

$$\Phi = \frac{1}{2}\, hC^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}\, \rho_{\alpha\beta} \rho_{\gamma\delta}\ \right). \tag{3.17}$$

Уравнения движения и краевые условия суть равенства (1.20), (1.21), а уравнения состояния имеют вид

$$n^{\alpha\beta} = hC^{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\gamma\delta},\quad m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12}\, C^{\alpha\beta\gamma\delta} \rho_{\gamma\delta}.$$

Отметим, что в силу того, что $y_\alpha \sim \epsilon$ при $\mathbb{C}^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$, погрешность выражений (3.16), (3.17) гораздо больше погрешности для оболочек, обладающих плоскостями упругой симметрии, параллельными срединной, и имеет порядок $\bar{\mu} h \dfrac{h}{l}\, \epsilon^2$.

Внутренняя энергия оболочки с учетом геометрической поправки и поперечного сдвига. Дальнейшее рассмотрение проведем в случае, когда имеются плоскости упругой симметрии, параллельные срединной, и, следовательно, справедливы равенства (3.12). При этом $\gamma_\alpha = 2\epsilon_{3\alpha}$, а для вычисления $U_\perp$ в первом приближении можно использовать формулу

$$2U_\perp = G^{\alpha\beta} 2\epsilon_{\alpha 3}\, 2\epsilon_{\beta 3} + \mathbb{E}(\epsilon_{33} + \mathbb{C}^{\alpha\beta}\, \epsilon_{\alpha\beta})^2. \tag{3.18}$$

Кроме того, предположим, что зависимость тензора $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ от поперечной координаты имеет специальный вид

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\xi^\alpha) f(\zeta),\quad f(\zeta) \geqslant \text{const} > 0. \tag{3.19}$$

Это предположение существенно сужает возможные типы неоднородности. Например, для изотропных оболочек оно означает, что по толщине допускается изменение только модуля сдвига, а коэффициент Пуассона является постоянным. Если упругие модули не имеют вида (3.19), то исследование

усложняется, поскольку не удается свести определение функций z^i в (2.19) к задаче о минимуме поперечной энергии. Функцию $f(\zeta)$ нормируем условием $\langle f \rangle = 1$.

Для упрощения дальнейших формул примем, что тангенциальные составляющие внешних сил на лицевых поверхностях равны нулю.

Сделаем замену (2.19). Вместо ограничений (2.20) функции z^i выделим ограничениями

$$\langle f(\zeta) z^i \rangle = 0, \quad \langle \zeta f(\zeta) z^i \rangle = 0. \tag{3.20}$$

Связь средних параметров r^i, φ^i с радиус-вектором тела в деформированном состоянии определяется равенствами

$$r^i + h \langle \zeta f \rangle \varphi^i = \langle f x^i \rangle; \quad \langle \zeta f \rangle r^i + h \langle \zeta^2 f \rangle \varphi^i = \langle \zeta f x^i \rangle. \tag{3.21}$$

Если $\langle \zeta f \rangle = 0$, то r^i имеют смысл компонент среднего радиус-вектора поперечного волокна в деформированном состоянии с весом: $r^i = \langle f x^i \rangle$, а φ^i – среднего поворота в весом f: $h\varphi^i = \langle \zeta f x^i \rangle / \langle \zeta^2 f \rangle$.

Характерные масштабы определим формулами (2.21).

В силу специальной структуры тензора упругих модулей (3.19) и ограничений (3.20) слагаемые $hr^i_{(\alpha} z_{i,\beta)} = hz_{(\alpha;\beta)} - hb_{\alpha\beta} z$ и $hn^i_{,\alpha} z_{i,\beta} \zeta$ в (2.22) дают в продольную энергию вклад, выходящий за пределы точности теории с учетом сдвига. Поэтому для $\epsilon_{\alpha\beta}$ можно взять приближенное выражение (2.23), и, следовательно, вычисление z в первом приближении сводится к задаче о минимуме функционала

$$J_\perp = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathbb{E}(\zeta) (z_{,\zeta} + \varphi - 1 + \mathbb{C}^{\alpha\beta}(\zeta) A_{\alpha\beta} - \mathbb{C}^{\alpha\beta}(\zeta) hB_{\alpha\beta} \zeta)^2 d\zeta - \{Pz\} \tag{3.22}$$

на множестве функций z, удовлетворяющих ограничениям

$$\langle f(\zeta) z \rangle = 0, \quad \langle \zeta f(\zeta) z \rangle = 0, \tag{3.23}$$

а определение z_α – к задаче о минимуме функционала

$$J_L = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} G^{\alpha\beta}(\zeta) (z_{\alpha,\zeta} + \varphi_\alpha + h\varphi_{,\alpha}\zeta + hz_{,\alpha}) (\alpha \to \beta) d\zeta \tag{3.24}$$

на множестве функций z_α, удовлетворяющих ограничениям

$$\langle f(\zeta) z_\alpha \rangle = 0, \quad \langle \zeta f(\zeta) z_\alpha \rangle = 0. \tag{3.25}$$

Координаты точек поверхности ξ^α входят в (3.22) – (3.25) как параметры. Функция z в (3.24) есть минимизирующая функция функционала (3.22).

Начнем с вариационной задачи (3.22), (3.23). Введем функции $R^{\alpha\beta}$ и $R_1^{\alpha\beta}$ как непрерывные решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dR^{\alpha\beta}}{d\zeta} = -\mathbb{C}^{\alpha\beta}, \quad \frac{dR_1^{\alpha\beta}}{d\zeta} = \zeta \mathbb{C}^{\alpha\beta} \tag{3.26}$$

и сделаем замену искомой функции $z \to \bar{z}$:

$$z = -(\varphi - 1)\zeta + R^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + R_1^{\alpha\beta} hB_{\alpha\beta} + \bar{\varphi}\zeta + \bar{z}.$$

Здесь введено обозначение

$$\bar{\varphi} = \varphi - 1 - \frac{\langle \zeta f R^{\alpha\beta} \rangle}{\langle \zeta^2 f \rangle} A_{\alpha\beta} - \frac{\langle \zeta f R_1^{\alpha\beta} \rangle}{\langle \zeta^2 f \rangle} hB_{\alpha\beta}. \tag{3.27}$$

Аддитивные постоянные у функций $R^{\alpha\beta}$ и $R_1^{\alpha\beta}$ определим условиями

$$\begin{aligned} &\langle \zeta^2 f \rangle \langle f R^{\alpha\beta} \rangle = \langle \zeta f \rangle \langle \zeta f R^{\alpha\beta} \rangle, \\ &\langle \zeta^2 f \rangle \langle f R_1^{\alpha\beta} \rangle = \langle \zeta f \rangle \langle \zeta f R_1^{\alpha\beta} \rangle. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Тогда ограничения (3.20) для z примут вид

$$\langle f \bar{z} \rangle = 0, \quad \langle \zeta f \bar{z} \rangle = 0. \tag{3.29}$$

Функционал $J_\perp$ зависит от $\bar{z}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_\perp = \bar{J}_\perp - \{ PR^{\alpha\beta} \} A_{\alpha\beta} - \{ PR_1^{\alpha\beta} \} hB_{\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{2} \frac{[P]}{\langle \zeta^2 f \rangle} (\langle \zeta f R^{\alpha\beta} \rangle A_{\alpha\beta} + \langle \zeta f R_1^{\alpha\beta} \rangle hB_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\bar{J}_\perp = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathbb{E} (\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})^2 d\zeta - \{ P\bar{z} \}.$$

По тем же причинам, что и в изотропном случае функционал $\bar{J}_\perp$ мал и его можно отбросить. Однако в связи с тем, что дальше встретится задача, аналогичная задаче о минимуме $\bar{J}_\perp$, но более громоздкая, приведем здесь решение задачи для $\bar{J}_\perp$, в дальнейшем же сошлемся на полученный ответ. Работу внешних сил в $\bar{J}_\perp$ отбросим; при этом

$$\bar{J}_\perp = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathbb{E} (\bar{z}_{,\zeta} + \bar{\varphi})^2 d\zeta. \tag{3.31}$$

Задачу о минимуме функционала $\bar{J}_\perp$ удобнее решить, перейдя к двойственной задаче. Двойственная вариационная задача строится по общей схеме § 3 гл. II:

$$\inf \bar{J}_\perp = \sup \bar{J}_\perp^*,$$

$$\bar{J}_\perp^* = \int_{-1/2}^{1/2} \left(p(\zeta) \bar{\varphi} - \frac{1}{2E} p^2 \right) d\zeta, \tag{3.32}$$

где верхняя грань ищется по всем $p(\zeta)$ и числам a и a_1, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp}{d\zeta} = a_1 f + a\zeta f, \quad p(\pm 1/2) = 0. \tag{3.33}$$

Числа a и a_1 представляют множители Лагранжа для ограничений (3.29). Из равенства (3.33) следует, что a и a_1 связаны соотношением $a_1 + a\langle \zeta f \rangle = 0$. Обозначим через g и g_1 функции, определяемые задачей Коши

$$\frac{dg}{d\zeta} = \zeta f, \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \frac{dg_1}{d\zeta} = f, \quad g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{3.34}$$

Тогда общее решение уравнений (3.33) можно записать в виде

$$p = a(g - \langle \zeta f \rangle g_1). \tag{3.35}$$

Подстановка (3.35) в (3.32) и максимизация по параметру a приводит к следующему выражению:

$$\inf \bar{J}_\perp = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{\varphi}^2, \quad \bar{E} = \frac{\langle g - \langle \zeta f \rangle g_1 \rangle^2}{\langle \frac{1}{\mathbb{E}} (g - \langle \zeta f \rangle g_1)^2 \rangle}. \tag{3.36}$$

Перейдем к вариационной задаче (3.24), (3.25). В (3.24) функцию z можно взять в первом приближении:

$$z + (\varphi - 1)\zeta = R^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + R_1^{\mu\nu} h B_{\mu\nu}. \tag{3.37}$$

Формулы (3.24) и (3.37) подсказывают замену $z_\alpha \to \bar{z}_\alpha$:

$$z_\alpha = [- hQ^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - h^2 Q_1^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \mathcal{A}\zeta - \langle \zeta f \rangle \mathcal{A}]_{,\alpha} + \bar{z}_\alpha,$$

где $Q^{\mu\nu}$ и $Q_1^{\mu\nu}$ – решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ^{\mu\nu}}{d\zeta} = R^{\mu\nu}, \quad \frac{dQ_1^{\mu\nu}}{d\zeta} = R_1^{\mu\nu}. \tag{3.38}$$

Аддитивные постоянные, которые содержатся в решениях уравнений (3.38), и постоянную [1] $\mathcal{A}$ подберем так, чтобы функции $\bar{z}_\alpha$ удовлетворяли ограничениям

$$\langle f \bar{z}_\alpha \rangle = 0, \quad \langle \zeta f \bar{z}_\alpha \rangle = 0.$$

Для этого надо положить

$$\langle f Q^{\mu\nu} \rangle = 0, \quad \langle f Q_1^{\mu\nu} \rangle = 0,$$

$$\mathcal{A} = \frac{h}{q} (\langle \zeta f Q^{\mu\nu} \rangle A_{\mu\nu} + \langle \zeta f Q_1^{\mu\nu} \rangle h B_{\mu\nu}), \tag{3.39}$$

$$q = \langle \zeta^2 f \rangle - \langle \zeta f \rangle^2.$$

Функционал $J_\perp$ зависит от $\bar{z}_\alpha$ следующим образом:

$$J_\perp = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} G^{\alpha\beta} (\bar{z}_{\alpha,\zeta} + \bar{\varphi}_\alpha)(\alpha \to \beta) \, d\zeta. \tag{3.40}$$

Здесь введено обозначение

$$\bar{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha + \mathcal{A}_{,\alpha}. \tag{3.41}$$

Задача о минимуме функционала (3.40) решается так же, как задача о минимуме функционала (3.31). Поэтому приведем только ответ

$$\frac{1}{h} \Phi_\perp \equiv \inf J_\perp = \frac{1}{2} \bar{G}^{\alpha\beta} \bar{\varphi}_\alpha \bar{\varphi}_\beta, \quad \bar{G}^{\alpha\beta} = \langle g - \langle \zeta f \rangle g_1 \rangle^2 \mathcal{H}^{(-1)\alpha\beta}. \tag{3.42}$$

Здесь $\mathcal{H}^{(-1)\alpha\beta}$ – тензор, обратный к тензору $\langle G_{\alpha\beta}^{(-1)} (g - \langle \zeta f \rangle g_1)^2 \rangle$.

[1] Имеется в виду постоянство по ζ.

Сделаем замену искомых функций $r_i \to \overline{r}_i$, $\varphi_\alpha \to \overline{\varphi}_\alpha$, $r_i = \overline{r}_i - n_i$ $\mathcal{A}$ и обозначим, как и в § 2, через $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ тензоры

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\overline{r}^{\,i}_{,\alpha}\overline{r}_{i,\beta} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}),\quad \rho_{\alpha\beta} = \overline{n}_i\overline{r}^{\,i}_{,\alpha\beta} - \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} - \overline{\varphi}_{(\alpha;\beta)} - \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)}.$$

В новых переменных поперечная энергия приобретает форму рейсснеровской энергии сдвига.

Вычислим продольную энергию. Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и $B^{(\varphi)}_{\alpha\beta}$ в переменных $\overline{r}_i$, $\overline{\varphi}_\alpha$ имеют вид

$$A_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + hq^{-1}\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}(\langle \zeta f Q^{\mu\nu}\rangle\gamma_{\mu\nu} + \langle \zeta f Q^{\mu\nu}_1\rangle h\rho_{\mu\nu}),$$

$$B^{(\varphi)}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}\gamma_{\lambda\beta)} + \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}\left(\frac{\langle \zeta f R^{\mu\nu}\rangle}{\langle \zeta^2 f\rangle}\gamma_{\mu\nu} + \frac{\langle \zeta f R^{\mu\nu}_1\rangle}{\langle \zeta^2 f\rangle}h\rho_{\mu\nu}\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу для деформаций

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB^{(\varphi)}_{\alpha\beta}\zeta + h^2\overset{\circ}{b}{}^{\lambda}_{(\alpha}\rho_{\lambda\beta)}\zeta^2,$$

для продольной энергии $\Phi_\parallel = h\langle(\overline{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}f + \xi C'^{\alpha\beta\gamma\delta})\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\rangle$ получим

$$2\Phi_\parallel = hA^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\delta} + h^3\langle\zeta^2 f\rangle B^{\alpha\beta\gamma\delta}\rho_{\alpha\beta}\rho_{\gamma\delta} + 2h^2 D^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\rho_{\gamma\delta}. \quad (3.43)$$

"Эффективные" упругие модули даются формулами

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \overline{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{h}{2}\,\widetilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\zeta f\rangle +$$

$$+\overline{C}^{\alpha\beta\mu\nu}h\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}(\langle\zeta f Q^{\gamma\delta}\rangle/q + \langle\zeta f R^{\gamma\delta}\rangle\langle\zeta f\rangle/\langle\zeta^2 f\rangle) +$$

$$+\overline{C}^{\gamma\delta\mu\nu}h\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}(\langle\zeta f Q^{\alpha\beta}\rangle/q - \langle\zeta f R^{\alpha\beta}\rangle\langle\zeta f\rangle/\langle\zeta^2 f\rangle), \quad (3.44)$$

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta} = \overline{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{h}{2}\,\frac{\langle\zeta^3 f\rangle}{\langle\zeta^2 f\rangle}\,\widetilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} +$$

$$+\left[\overline{C}^{\alpha\beta\mu\nu}h\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\left(\frac{\langle\zeta f R^{\gamma\delta}_1\rangle}{\langle\zeta^2 f\rangle} - \frac{\langle\zeta f Q^{\gamma\delta}_1\rangle\langle\zeta f\rangle}{\langle\zeta^2 f\rangle q}\right)\right] + [\alpha,\beta\longleftrightarrow\gamma,\delta],$$

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overline{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\zeta f\rangle - \frac{h}{2}\,\widetilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\zeta^2 f\rangle +$$

$$+\overline{C}^{\gamma\delta\mu\nu}h\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}(\langle\zeta f R^{\alpha\beta}\rangle - \langle\zeta f Q^{\alpha\beta}\rangle\langle\zeta f\rangle/q) +$$

$$+\overline{C}^{\alpha\beta\mu\nu}h\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}(\langle\zeta f Q^{\gamma\delta}_1\rangle/q - \langle\zeta f R^{\gamma\delta}\rangle\langle\zeta f\rangle/\langle\zeta^2 f\rangle).$$

Здесь введено обозначение

$$\widetilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \overline{C}^{\alpha\beta\gamma\sigma}b'^{\delta}_{\sigma} + \overline{C}^{\alpha\beta\sigma\delta}b'^{\gamma}_{\sigma} + \overline{C}^{\alpha\sigma\gamma\delta}b'^{\beta}_{\sigma} + \overline{C}^{\sigma\beta\gamma\delta}b'^{\alpha}_{\sigma}.$$

Плотность поверхностной энергии представляет сумму

$$\Phi = \Phi_\parallel + \Phi_\angle, \quad (3.45)$$

в которой $\Phi_\parallel$ дается формулой (3.43), а $\Phi_\angle$ — (3.42). Работа внешних сил

имеет вид (2.13), причем под Θ в (2.13) надо понимать следующую функцию:

$$\Theta = -h\left\{PR^{\alpha\beta}\right\}\gamma_{\alpha\beta} - h\left\{PR_1^{\alpha\beta}\right\}h\rho_{\alpha\beta} +$$
$$+h\left\{P\right\}q^{-1}\left(\langle \zeta f Q^{\mu\nu}\rangle \gamma_{\mu\nu} + \langle \zeta f Q_1^{\mu\nu}\rangle h\rho_{\mu\nu}\right). \tag{3.46}$$

Однородные по толщине оболочки. В частном случае однородных оболочек

$$f = 1,\quad R^{\alpha\beta} = -\zeta\,\mathbb{C}^{\alpha\beta},\quad R_1^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)\mathbb{C}^{\alpha\beta} = -Q^{\alpha\beta},$$

$$Q_1^{\alpha\beta} = \frac{1}{6}\,\zeta\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right)\mathbb{C}^{\alpha\beta},\quad \overline{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

поэтому плотность продольной поверхностной энергии дается равенством

$$\Phi_{\|} = F(\gamma) + {}^1\!/_{12}\,F(h\rho) + \Phi_{\text{пер}}(\gamma, h\rho),$$

где

$$F(\gamma) = \tfrac{1}{2}\,hC^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\delta}, \tag{3.47}$$

$$\Phi_{\text{пер}}(\gamma, h\rho) = -\frac{h^3}{24}\left(\tilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} + 2C^{\mu\nu\gamma\delta}\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\,\mathbb{C}^{\alpha\beta} +\right.$$
$$\left. +\frac{2}{5}\,C^{\alpha\beta\mu\nu}\overset{\circ}{b}_{\mu\nu}\,\mathbb{C}^{\gamma\delta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\,\rho_{\gamma\delta}.$$

Для поперечной упругой энергии вычисление по формулам (3.34), (3.42) дает

$$\Phi_{\perp} = \frac{5h}{12}\,G^{\alpha\beta}\,\overline{\varphi}_{\alpha}\,\overline{\varphi}_{\beta}. \tag{3.48}$$

Функция Θ принимает вид

$$\Theta = \frac{h}{2}\,[P]\mathbb{C}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{10}\left\{P\right\}\mathbb{C}^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}. \tag{3.49}$$

Если в формулы (3.47) – (3.49) поставить выражения для тензоров $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\mathbb{C}^{\alpha\beta}$ изотропной оболочки, то они перейдут в соответствующие формулы для изотропных однородных оболочек, полученные в § 2.

Низкочастотные колебания неоднородных оболочек. Классическое приближение. Пусть при дифференцировании по времени справедливы оценки (2.21). Тогда для неоднородных оболочек

$$h\langle \rho_0 r^i_{,t} z_{i,t}\kappa\rangle = O\left(\rho_0 c^2\,\frac{h}{l}\,\epsilon^2\right),\quad h^2\langle \rho_0 \varphi^i_{,t} z_{i,t}\kappa\rangle =$$
$$= O\left(\rho_0 c^2\,\frac{h^2}{l^2}\,\epsilon^2\right),\quad h^2\langle \rho_0 z^i_{,t} z_{i,t}\rangle = O\left(\rho_0 c^2\,\frac{h^2}{l^2}\,\epsilon^2\right),\quad c = \sqrt{\mu/\rho}. \tag{3.50}$$

Здесь рассмотрен случай "общего положения", когда $\rho_0 \not\equiv \text{const} \cdot f(\zeta)$. Через $\underline{\mu}$ обозначено наименьшее собственное значение тензора упругих модулей. Если же $\rho_0 = \text{const} \cdot f(\zeta)$, то в силу ограничений (3.20) имеют место оценки более сильные, чем (3.50). На этом специальном случае мы не останавливаемся.

Из (3.50) видно, что слагаемые в кинетической энергии, содержащие функции z^i, повлияют на вычисление z^i в первом приближении, однако не изменяют порядка z^i. Опуская члены порядка h/l и h/R по сравнению с 1, придем к уравнениям (1.20), в которых $\overline{\rho}$ надо заменить на $\langle \rho_0 \rangle$, а $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ определяются по внутренней энергии (3.16).

Погрешность уравнений классического приближения есть $h/l + h/R$ по сравнению с единицей. В динамике дальнейшее уточнение без существенного изменения модели невозможно в связи с отмеченным выше влиянием инерционных членов на вычисление z^i. Уточненную динамическую теорию типа теории с учетом сдвига удается построить для однородных по толщине оболочек.

Низкочастотные колебания однородных оболочек. Для однородных оболочек справедливы оценки инерционных членов, которые были сделаны в §2. Поэтому для вычисления z_i в первом приближении инерционные члены несущественны. Следовательно, внутренняя энергия будет иметь вид (3.47), (3.48). Вывод выражения для кинетической энергии аналогичен выводу, приведенному в § 2. Единственное изменение связано с тем, что для анизотропных оболочек замена $r_i \to \overline{r}_i$ определена равенством $r_i = \overline{r}_i - n_i \mathcal{A}$, и в однородном по толщине случае, согласно (3.39), $\mathcal{A} = -\dfrac{h^2}{60} \mathbb{C}^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$. Поэтому для K получим

$$K = \frac{1}{2} \rho h \left(\overline{v}_i \overline{v}^i + \frac{h^2}{12} \left(\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} - \frac{2}{5} \mathbb{C}^{\alpha\beta} \right) (\overline{n}_k \overline{v}^k_{,\alpha} - \overline{\varphi}_\alpha)(\alpha \to \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12} (\mathbb{C}^{\alpha\beta} v_{\alpha;\beta})^2 \right). \tag{3.51}$$

Тензор

$$\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta} - \frac{2}{5} \mathbb{C}^{\alpha\beta} \tag{3.52}$$

в изотропном случае сводится к шаровому тензору $(1 - 2\sigma/5)\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$ и, поскольку $\sigma \leqslant 1$, положительно определен. Для анизотропной оболочки тензор (3.52) может быть как положительно, так и не положительно определенным. В последнем случае формула (3.51) приводит к негиперболической и, по-видимому, неудовлетворительной экстраполяции. Тем не менее можно рассчитывать на правильное описание длинноволновых колебаний.

Об оболочках с малой сдвиговой жесткостью. Выше предполагалось, что упругие модули не зависят от малых параметров. Однако для приложений представляет интерес изучение оболочек с аномально малым тензором модулей сдвига $G^{\alpha\beta}$. Проанализируем, в какой мере полученные соотношения могут быть пригодны в этом случае.

Вывод выражений для энергии базировался на том, что функции z_i можно найти, минимизируя поперечную энергию, а перекрестные члены между z_i и $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ в продольной энергии можно отбросить. Пусть $C^{\alpha\beta\gamma\delta} \sim \mu$, $G^{\alpha\beta} \sim G$. Тогда перекрестные члены в продольной энергии между z_α и $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ имеют порядок $\mu \dfrac{h^2}{lR} (\epsilon_A + \epsilon_B) \bar{\Delta}$, в поперечной энергии $G\bar{\Delta} \dfrac{h}{l} (\epsilon_A + \epsilon_B)$. Главные члены по z_α имеют порядок в поперечной энергии $G\bar{\Delta}^2$, в продольной энергии $\mu \left(\dfrac{h}{l}\right)^2 \bar{\Delta}^2$. Поэтому все сделанные выводы остаются в силе для оболочек, у которых

$$\frac{h}{R} \ll \frac{G}{\mu}, \quad \left(\frac{h}{l}\right)^2 \ll \frac{G}{\mu}. \tag{3.53}$$

Если условия (3.53) не выполнены, то проблема крайне осложняется, причем при нарушении второго ограничения (3.53) двумерное описание деформированного состояния становится невозможным.

Оценки (3.53) накладывают ограничения на относительную величину упругих модулей в продольной и поперечной энергиях. Представляет интерес выяснение ограничений на допустимые перепады упругих модулей в поперечных направлениях. Мы не останавливаемся на этом вопросе, так как его исследование тесно связано с изучением погранслоев, которые были исключены из рассмотрения.

§ 4. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Выше было получено, что в статике изотропных оболочек при $h/l \ll 1$ поперечные волокна, нормальные к $\overset{\circ}{\Omega}$, в первом приближении можно считать прямыми и перпендикулярными к срединной поверхности в деформированном состоянии Ω. Оказывается, что в динамике это не так, и при $h/l \ll 1$ имеется счетное число различных типов (или, как еще говорят, ветвей, форм, мод) колебаний. Построим уравнения, описывающие эти колебания в рамках линейной теории.

Высокочастотные ветви. Выпишем лагранжиан линейно упругого изотропного тела:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho w^i_{,t} w_{i,t} - \frac{1}{2}\lambda(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{33})^2 - \\ -\mu(\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\gamma}\overset{\circ}{g}{}^{\beta\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta} + 2\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{\beta 3} + \epsilon^2_{33}). \tag{4.1}$$

Компоненты деформации выражаются через перемещения w_i по формулам $\epsilon_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{x}{}^i_{(\alpha}, w_{i,\beta)}$, $2\epsilon_{\alpha 3} = \overset{\circ}{x}{}^i_\alpha w_{i,\xi} + \overset{\circ}{n}{}^i w_{i,\alpha}$, $\epsilon_{33} = \overset{\circ}{n}{}^i w_{i,\xi}$. Поскольку $l \gg h$, $R \gg h$ в упругой энергии можно выбросить все производные перемещений по ξ^α по сравнению с производными по ξ и заменить $\overset{\circ}{x}{}^i_\alpha$ на $\overset{\circ}{r}{}^i_\alpha$, $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$ на $\overset{\circ}{a}{}^{\alpha\beta}$, κ на 1. Условие стационарности интеграла от Λ перейдет в условие стационарности функционала

$$\int_{h/2}^{h/2} \tilde{\Lambda}\, d\xi, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{1}{2}\rho(w^2_{,t} + w_{\alpha,t} w^\alpha_{,t}) - \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) w^2_{,\xi} - \frac{1}{2}\mu w_{\alpha,\xi} w^\alpha_{,\xi}. \tag{4.2}$$

Здесь $w = w_i \overset{\circ}{n}{}^i$, $w_\alpha = w_i \overset{\circ}{r}{}^i_\alpha$. Уравнения Эйлера функционала (4.2) имеют вид

$$\rho w_{\alpha,tt} = \mu w_{\alpha,\xi\xi} \text{ при } |\xi| \leqslant \frac{h}{2};\ w_{\alpha,\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm\frac{h}{2}, \tag{4.3}$$

$$\rho w_{,tt} = (\lambda + 2\mu) w_{,\xi\xi} \text{ при } |\xi| \leqslant \frac{h}{2};\ w_{,\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm\frac{h}{2}. \tag{4.4}$$

Краевая задача (4.3), (4.4) есть задача о собственных колебаниях поперечного волокна оболочки.

Легко перечислить полный набор частных решений уравнений (4.3), (4.4):

$$F_\perp:\ w = u\cos\frac{2\alpha\xi}{h},\ w_\sigma = 0,\ \alpha = \pi n, \tag{4.5}$$

$$F_\parallel:\ w = 0,\ w_\sigma = \psi_\sigma \sin\frac{2\beta\xi}{h},\ \beta = \frac{\pi}{2}(2n+1), \tag{4.6}$$

$$L_\perp:\ w = \psi\sin\frac{2\alpha\xi}{h};\ w_\sigma = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1), \tag{4.7}$$

$$L_\parallel:\ w = 0,\ w_\sigma = u_\sigma\cos\frac{2\beta\xi}{h},\ \beta = \pi n. \tag{4.8}$$

Величины α и β пробегают счетное число значений, однако, во избежание громоздких обозначений, индексов у α и β не ставится. Точно так же подразумевается, что каждому значению α и β соответствуют свои значения u, ψ_σ, ψ и u_σ, однако эти значения не нумеруются. Дальше будут введены дополнительные обозначения, которые исключают недоразумения. В каждом частном решении u, ψ_σ, ψ и u_σ произвольным образом зависят от продольных координат и гармонически зависят от времени с частотой ω. Частота ω для каждого частного решения определяется по соответствующим значениям α или β из формул

$$\omega = \frac{2c_1\alpha}{h} \text{ или } \omega = \frac{2c_2\beta}{h}, \tag{4.9}$$

в которых $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость волн расширения, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость волн сдвига.

Частные решения (4.5), (4.6) характерны тем, что у них w – четные функции поперечной координаты, а w_α – нечетные функции. Частные решения (4.7), (4.8) обладают противоположными свойствами четности. Частные решения (4.5), (4.6) будем обозначать буквой F (от flexural vibration), частные решения (4.7), (4.8) – буквой L (от longitudinal vibration). При этом дополнительно ставится знак $\perp$, если поперечное перемещение w значительно больше продольного w^α, и знак $\parallel$ в противном случае. Частное решение (4.5) с номером n обозначается через $F_\perp(n)$, частное решение (4.6) – через $F_\parallel(n)$, частные решения (4.7) и (4.8) – через $L_\perp(n)$ и $L_\parallel(n)$. Если речь идет о совокупности частных решений, то номер n не указывается и, например, для частных решений (4.5) пишется $F_\perp$.

Пусть теперь u, ψ_σ, ψ и u_σ есть функции от координат и времени, которые удовлетворяют условиям

$$u_{,t} \sim \omega u, \quad \psi_{\sigma,t} \sim \omega\psi_\sigma, \quad \psi_{,t} \sim \omega\psi, \quad u_{\sigma,t} \sim \omega u_\sigma. \tag{4.10}$$

Значения ω берутся для той же ветви, что и соответствующая функция, за исключением случаев $F_\perp(0)$ и $L_\parallel(0)$, для которых $\omega = 0$. В этих случаях считаем, что для u и u_σ также справедливы оценки (4.10) с $\omega = O(c_2/l)$.

Если u, ψ_σ, ψ и u_σ есть произвольные функции, подчиненные ограничениям (4.10), то линейную комбинацию функций (4.5)–(4.8) можно рассматривать как первый член некоторого асимптотического разложения.

Каждая из функций (4.5)–(4.8) задает свое распределение перемещений по толщине и соответственно свой тип колебаний (ветвь). Ветви $F_\perp(0)$ и $L_\parallel(0)$ отвечают нулевому значению собственной частоты колебаний поперечного волокна и соответствуют низкочастотным колебаниям, когда $\dfrac{\omega h}{c_2} = \dfrac{\omega l}{c_2}\cdot\dfrac{h}{l} \ll 1$. Независимость перемещений у этих ветвей в первом приближении от поперечной координаты, следующая из (4.5) и (4.8), уже была установлена выше.

Все остальные ветви отвечают колебаниям с частотой $\omega \sim c_2/h$. Для этих колебаний время распространения возмущения по толщине сравнимо с периодом колебаний. Поскольку $\omega \to \infty$ при $h \to 0$, соответствующие колебания естественно назвать высокочастотными. Например, при $n = 1$, $c_2 = 2500$ м/с, $h = 1$ мм, $\omega_1 = 4\cdot 10^5$ Гц, т.е. частота находится в ультразвуковой области. Колебания оболочек с такой частотой могут быть существенны в задачах об ударе или в задачах о колебаниях, вызванных электромагнитным полем. Отметим, что для неоднородных по толщине оболочек со значительным перепадом упругих модулей значение ω_1 существенно меньше и может попасть даже в область звуковых частот.

Ветвь $F_\parallel(0)$ отвечает колебаниям, при которых происходит сдвиг поперечного волокна в полуволну синусоиды. Следующие формы колебаний с ростом n все быстрее осциллируют по поперечной координате. Ветвь с номером n имеет $2n$ или $2n+1$ узлов.

Дальше удобно ввести в рассмотрение в сериях $F_\perp$ и $L_\perp$ число β, которое определяется по α из формулы

$$\alpha = e\beta, \quad e \equiv c_2/c_1. \tag{4.11}$$

Аналогично, в сериях $F_\parallel$ и $L_\parallel$ определим число α, которое находится по β из (4.11).

Параметр e зависит только от коэффициента Пуассона ν: $e = \sqrt{(1-2\nu)/(2-2\nu)}$, и при изменении ν в пределах $-1 < \nu < 1/2$ изменяется в интервале $0 \leqslant e \leqslant \sqrt{3/4}$. Обычно $\nu > 0$, при этом $0 \leqslant e \leqslant 1/\sqrt{2}$.

Безразмерные частоты ветвей $\omega h/c_2$ обладают важным свойством: частоты ветвей серий $F_\parallel$ и $L_\parallel$ не зависят от коэффициента Пуассона ν, а частоты ветвей серий $F_\perp$ и $L_\perp$ меняются с изменением ν, причем при $\nu \to 1/2$ они неограниченно увеличиваются.

Уточнение формул для перемещений. Найдем теперь первые ненулевые члены для тангенциальных перемещений в сериях $F_\perp$ и $L_\perp$. Начнем с серии $F_\perp$. Считая u заданной функцией ξ^α, гармонически зависящей от времени

с частотой ω, будем искать w_α. Оставляя в лагранжиане (4.1) главные члены по w_α и главные перекрестные члены между w_α и u, получим функционал

$$I = h\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathring{\Omega}} \bar{\Lambda}\, d\mathring{\omega}\, dt,$$

$$2\bar{\Lambda} = \langle \rho\omega^2 w_\sigma w^\sigma - \mu \mathring{a}^{\lambda\sigma}\left(\frac{1}{h} w_{\lambda,\zeta} + u_{,\lambda}\cos 2\alpha\zeta\right)(\lambda \to \sigma) +$$

$$+ 2\lambda w^\beta{}_{,\beta}\frac{2\alpha}{h} u \sin 2\alpha\zeta\rangle. \qquad (4.12)$$

Последнее слагаемое в (4.12) интегрированием по частям можно привести к виду $\langle 2\lambda w^\beta \frac{2\alpha}{h} u_{,\beta}\sin 2\alpha\zeta\rangle$. Поскольку мы интересуемся разложением во внутренней части оболочки, слагаемые, которые в результате интегрирования по частям переходят на границу, опускаются. Итак,

$$2\bar{\Lambda} = \langle \rho\omega^2 w_\sigma w^\sigma - \mu \mathring{a}^{\lambda\sigma}\left(\frac{1}{h} w_{\lambda,\zeta} + u_{,\lambda}\cos 2\alpha\zeta\right)(\lambda \to \sigma) -$$

$$- 2\lambda w^\sigma u_{,\sigma}\frac{2\alpha}{h}\sin 2\alpha\zeta\rangle.$$

Найдем экстремаль функционала $\bar{\Lambda}$. Варьируя $\bar{\Lambda}$ по w^σ, получим уравнения

$$w_{\sigma,\zeta\zeta} + 4\beta^2 w_\sigma = \frac{\lambda+\mu}{\mu} 2h\alpha u_{,\sigma}\sin 2\alpha\zeta \quad \text{при} \quad |\zeta| \leqslant 1/2,$$

$$w_{\sigma,\zeta} + h u_{,\sigma}\cos 2\alpha\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1/2.$$

Они приводят к следующему значению тангенциальных перемещений:

$$w_\sigma = u_{,\sigma}\frac{h}{2\alpha}\left(\sin 2\alpha\zeta - 2(-1)^n e\frac{\sin 2\beta\zeta}{\cos\beta}\right). \qquad (4.13)$$

Как и следовало ожидать, тангенциальные перемещения оказались гораздо меньше поперечных и имеют порядок $\frac{h}{l}u$. Аналогично находятся перемещения в остальных сериях:

$$F_\parallel(n):\ w = \psi^\sigma{}_{,\sigma}\frac{h}{2\beta}\left(\cos 2\beta\zeta - 2(-1)^n e\frac{\cos 2\alpha\zeta}{\sin\alpha}\right), \qquad (4.14)$$

$$L_\perp(n):\ w_\sigma = \psi_{,\sigma}\frac{h}{2\alpha}\left(-\cos 2\alpha\zeta + 2(-1)^n e\frac{\cos 2\beta\zeta}{\sin\beta}\right),$$

$$L_\parallel(n):\ w = u^\sigma{}_{,\sigma}\frac{h}{2\beta}\left(-\sin 2\beta\zeta + 2(-1)^n e\frac{\sin 2\alpha\zeta}{\cos\alpha}\right).$$

Ортогональность по энергии. В длинноволновом колебании перемещения можно представить как сумму перемещений, соответствующих каждой ветви. При этом u, ψ, ψ_σ, u_σ являются некоторыми функциями ξ^α и t. Естественно попытаться составить уравнения для u, ψ, ψ_σ, u_σ. На первый

взгляд эта задача безнадежна, так как все ветви взаимодействуют, и соответствующая система будет представлять бесконечную систему относительно бесконечного числа искомых функций. Оказывается, однако, что длинноволновые высокочастотные колебания обладают замечательным свойством: ветви ортогональны по энергии с погрешностью не большей, чем $h^2/R^2 + h^2/l^2 + h^2/lR$ (если главным членам энергии приписан порядок 1). Это означает, что для напряжений σ_1^{ij}, построенных по перемещениям одной ветви w_1^i, и деформаций $\epsilon_{2\,ij}$, построенных по перемещениям другой ветви w_2^i, справедливо равенство

$$\int_{\mathring{\Omega}} \langle \sigma_1^{ij} \epsilon_{2\,ij} \kappa \rangle \, d\mathring{\omega} = 0. \tag{4.15}$$

Кроме того, перемещения ортогональны по кинетической энергии:

$$\int_{\mathring{\Omega}} \langle \rho w_1^i w_{2\,i} \rangle \, d\mathring{\omega} = 0. \tag{4.16}$$

Исключением являются низкочастотные колебания – ветви $F_\perp(0)$ и $L_\parallel(0)$, которые не ортогональны между собой, но ортогональны со всеми другими ветвями.

Ортогональность ветвей по энергии имеет место, если на краю оболочки выставлены условия жесткой заделки ($w^i = 0$). Свойство ортогональности можно доказать непосредственным вычислением, при этом надо учесть в разложении перемещений также члены следующего порядка малости (они выписаны в [30, 36]). Мы не приводим выкладок, поскольку они весьма громоздки.

Если перемещения взять в виде суммы перемещений отдельных ветвей и подставить это выражение в функционал действия, то в силу свойств ортогональности (4.15) и (4.16) он станет суммой функционалов, каждый из которых зависит от перемещений только одной ветви. Поэтому уравнения разделяются, и каждая ветвь может быть описана своим уравнением. Можно показать, что в случае краевых условий, отличных от условий жесткой заделки, уравнения также разделяются, однако имеется взаимодействие на краю оболочки.

Уравнения для отдельных ветвей. Начнем с вывода уравнений, описывающих свободные колебания пластин. Уравнения для каждой из ветвей, можно получить, подставляя в лагранжиан зависимость перемещений от поперечной координаты для соответствующей ветви и интегрируя по толщине. Например, для ветвей серии $F_\perp$ надо подставить в лагранжиан выражения

$$w = u\cos 2\alpha\zeta, \quad w_{,\sigma} = u_{,\sigma}\frac{h}{2\alpha}\left(\sin 2\alpha\zeta - 2(-1)^n e\,\frac{\sin 2\beta\zeta}{\cos\beta}\right).$$

После интегрирования по толщине получим осредненный лагранжиан

$$2\bar{\Lambda}/\rho = u_{,t}^2 + ah^2 u_{,\alpha t}\, u^{,\alpha t} - \omega_0^2 (u^2 + bh^2 u_{,\alpha} u^{,\alpha} + ch^2 u\,\Delta u + dh^4 u_{,\alpha\beta} u^{,\alpha\beta}), \tag{4.17}$$

где ω_0 – частота рассматриваемой ветви в области длинных волн: $\omega_0 = 2c_1\alpha/h$, a, b, c, d – коэффициенты порядка 1.

Мы считаем также, что $\omega_0 \neq 0$ (и, следовательно, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), т.е. что колебание является высокочастотным. Случай $\omega_0 = 0$ был рассмотрен в предыдущих параграфах.

Можно проверить, что уравнение Эйлера для лагранжиана (4.17) правильно описывает колебания в области длинных волн; а в области коротких волн имеется качественно удовлетворительное соответствие с точной теорией. Однако это уравнение достаточно сложно – оно имеет четвертый порядок и требует задания четырех краевых условий. Поэтому мы попытаемся упростить лагранжиан (4.17) так, чтобы не нарушить асимптотической точности теории в области длинных волн и сохранить достаточно удовлетворительное описание коротких волн.

В области длинных волн главными в лагранжиане являются слагаемые $u_{,t}^2$ и $\omega_0^2 u^2$. Поскольку их разность при колебаниях с частотой ω, близкой к ω_0, мала ($u_{,t}^2 \approx \omega_0^2 u^2$), надо учитывать следующие члены: $ah^2 u_{,\alpha t} u^{,\alpha t}$, $\omega_0^2 b u_{,\alpha} u^{,\alpha}$ и $ch^2 u\,\Delta u$. Слагаемое $ch^2 u\,\Delta u$ интегрированием по частям приведем к виду $-ch^2 u_{,\alpha} u^{,\alpha}$ и будем считать, что оно включено в слагаемое $bh^2 u_{,\alpha} u^{,\alpha}$; под коэффициентом b дальше будем понимать разность $b - c$. Дивергентный член $(ch^2 u u^{,\alpha})_{,\alpha}$ отбросим. Слагаемое $\omega_0^2 ch^4 u_{,\alpha\beta} u^{,\alpha\beta}$ мало в области длинных волн по сравнению с $\omega_0^2 bh^2 u_{,\alpha} u^{,\alpha}$, и мы его также отбросим. Одновременное отбрасывание слагаемого $dh^4 u_{,\alpha\beta} u^{,\alpha\beta}$ и дивергентного члена $(ch^3 u u^{,\alpha})_{,\alpha}$ естественно, так как отбросить, скажем, слагаемое $dh^4 u_{,\alpha\beta} u^{,\alpha\beta}$ и сохранить дивергентный член нельзя, поскольку при этом потеряется положительная определенность энергии. После отбрасывания указанных слагаемых для лагранжиана получим

$$2\bar{\Lambda}/\rho = u_{,t}^2 + ah^2 u_{,\alpha t} u^{,\alpha t} - \omega_0^2 (u^2 + bh^2 u_{,\alpha} u^{,\alpha}). \tag{4.18}$$

Вычисления приводят к следующим выражениям для коэффициентов a и b:

$$a = \frac{1}{4\alpha^2}\left(1 - \frac{3-e^2}{1-e^2}\,\frac{4e^2 \operatorname{tg}\beta}{\beta} + \frac{4e^2}{\cos^2\beta}\right),$$
$$b = \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{5-3e^2}{1-e^2}\,\frac{2e^2 \operatorname{tg}\beta}{\beta} + \frac{2e^2}{\cos^2\beta}\right). \tag{4.19}$$

Можно показать, что при $0 \leqslant e \leqslant 1/\sqrt{2}$ коэффициенты a и b положительны.

Варьируя лагранжиан (4.18), находим уравнение для u

$$u_{,tt} - ah^2 \Delta u_{,tt} + \omega_0^2 (u - bh^2 \Delta u) = 0. \tag{4.20}$$

Уравнение (4.20) аналогично уравнению поперечных колебаний мембраны на упругой подушке с учетом инерции вращения.

Рассмотрим, насколько хорошо уравнение (4.20) описывает дисперсионные кривые точной теории. Полагая в (4.20) $u = e^{i(kx - \omega t)}$, получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 (1 + ah^2 k^2) = \omega_0^2 (1 + bh^2 k^2).$$

Для дальнейшего анализа это уравнение удобно переписать в безразмерной форме, введя безразмерную частоту $\omega_* = \omega h/2c_2$ и безразмерное волновое число $k_* = \frac{1}{2} hk$,

$$\omega_*^2 (1 \pm 4ak_*^2) = \alpha^2 e^{-2} (1 + 4bk_*^2). \tag{4.21}$$

По точной (трехмерной) теории дисперсионное уравнение для поперечных волн в упругом слое было получено Рэлеем и Лэмбом [322, 372]. Диспер-

сионное уравнение Рэлея – Лэмба записывается в виде

$$4k_*^2\sqrt{\omega_*^2-k_*^2}\,\sqrt{e^2\omega_*^2-k_*^2}\,\sin\sqrt{\omega_*^2-k_*^2}\cos\sqrt{e^2\omega_*^2-k_*^2}+$$
$$+\,[2k_*^2-\omega_*^2]^2\sin\sqrt{e^2\omega_*^2-k_*^2}\cos\sqrt{\omega_*^2-k_*^2}=0. \qquad (4.22)$$

Уравнения (4.21) и (4.22) наряду с каждым решением (ω_*, k_*) содержат решения $(\pm\omega_*, \pm k_*)$. Поэтому ограничиваясь действительными значениями ω_*, достаточно рассмотреть решения в квадранте $\omega_* \geqslant 0$, $\operatorname{Re} k_* \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k_* \geqslant 0$.

Покажем, что уравнение (4.21) правильно предсказывает значения ω_*, $d\omega_*/dk_*$ и $d^2\omega_*/dk_*^2$ при $k_* = 0$. Найдем их сначала по точной теории. Полагая в уравнении (4.22) $k_* = 0$, получим, что ненулевые значения ω_* удовлетворяют уравнению $\sin e\omega_* \cos\omega_* = 0$. Отсюда $e\omega_* = \pi n$, $\omega_* = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Первая серия корней совпадает с корнями уравнения (4.21) при $k_* = 0$ (напомним, что $\alpha = \pi n$), вторая серия соответствует частотам ветвей $F_{\|}$, которые мы пока не обсуждаем.

Введем временное обозначение $\omega_*^2 = (\alpha/e)^2 + y$, $k_*^2 = x$ и разложим левую часть уравнения Рэлея – Лэмба по x, y в ряд Тейлора. Оставляя только главные члены в соответствии с правилом многоугольника Ньютона (см. § 5 гл. II), получим

$$\left[\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^4 e^2\cos\frac{\alpha}{e}\right]y+\left[4\frac{\alpha^2}{e}\sin\frac{\alpha}{e}-\frac{\alpha^4}{2e^4\alpha}\cos\frac{\alpha}{e}\right]x=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{1}{e^2}\left[1-\frac{8e^2\operatorname{tg}\beta}{\beta}\right]x \quad \text{или} \quad \omega_*^2-\frac{\alpha^2}{e^2}=\frac{1}{e^2}\left(1-\frac{8e^2\operatorname{tg}\beta}{\beta}\right)k_*^2. \qquad (4.23)$$

Такое же выражение получается и из уравнения (4.21), надо лишь заметить, что, согласно (4.20)

$$b-a=\frac{1}{4\alpha^2}\left(1-\frac{8e^2\operatorname{tg}\beta}{\beta}\right), \quad \beta=\frac{\alpha}{e}. \qquad (4.24)$$

Итак, уравнение (4.21) правильно описывает поведение дисперсионной кривой в области длинных волн, поскольку при $k_* = 0$ приводит к правильным значениям ω_*, $d\omega_*/dk_*$ $(d\omega_*/dk_* = 0)$ и $d^2\omega_*/dk_*^2$.

В приведенном рассмотрении молчаливо подразумевалось, что значение постоянной e таково, что $\cos\frac{\alpha}{e} \neq 0$. В противном случае в дисперсионном уравнении коэффициент при y обращается в нуль, и для построения зависимости y от x надо удержать в разложении следующие члены по y. Оказывается, что при $\cos\frac{\alpha}{e} = 0$ следующий ненулевой член будет $\text{const}\cdot y^2$, поэтому при малых k_* групповая скорость $d\omega/dk$ будет отлична от нуля. Этот случай очень интересен тем, что волновые пакеты будут перемещаться, практически не деформируясь. Обращение $\cos\frac{\alpha}{e}$ в нуль означает, что частота одной из ветвей серии F_1, $\omega_* = \pi n/e$ совпала с частотой одной из ветвей

серии $F_{\parallel}$, $\omega_* = \frac{\pi}{2}(2m+1)$. При этом утверждение об ортогональности этих двух ветвей по энергии перестает быть справедливым (но обе ветви все же ортогональны остальным), и при составлении уравнений надо учитывать их взаимодействие. Мы отложим рассмотрение этих вопросов до конца параграфа, а сейчас продолжим обсуждение случая, когда частоты всех ветвей различны[1]).

Рассмотрим теперь поведение дисперсионной кривой в целом. Дисперсионную кривую в квадранте $\omega \geqslant 0$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ можно изобразить на плоском рисунке, откладывая на положительной полуоси абсцисс значения $\operatorname{Re} k$, а на отрицательной $\operatorname{Im} k$. Качественный вид дисперсионных кривых уравнений (4.21) приведен на рис. 45 (случай $b > a$) и на рис. 46 (случай $b < a$). Отметим, что оба случая $b > a$ и $b < a$ могут реализоваться: достаточно взять упругий материал со значением постоянной e, равным $\frac{2n}{2m+1} + \delta$, где m, n целые числа, подобранные так, что $2n/(2m+1)$ попадает в допустимый интервал изменения e $(0, 3/4)$. Тогда при $\delta \to 0$ $\operatorname{tg}\beta \to \infty$, и знак разности $b - a$ (4.24) определяется знаком δ.

Дисперсионные кривые уравнения Рэлея – Лэмба при $\nu = 0{,}31$ изображены на рис. 47. При выбранном значении ν у ветвей $F_{\perp}(n)$, уместившихся на рисунке $\left.\frac{d^2\omega_*}{dk_*^2}\right|_{k_*=0} > 0$ и $b > a$. Сравнение рис. 45, рис. 47 показывает, что приближенное уравнение удовлетворительно описывает дисперсионные кривые только в области длинных волн, а для коротких волн приводит к качественно неверному результату: $\omega \to \text{const}$ при $\operatorname{Re} k \to \infty$. Причина заключается в том, что в лагранжиане (4.18) кинетическая энергия содержит более высокие производные от u, чем внутренняя энергия. В связи с этим имеет смысл рассмотреть другую коротковолновую экстраполяцию, избавляясь от члена со второй производной в кинетической энергии. Заметим, что с точностью до дивергентного члена справедливо равенство $u_{,\alpha t} u'^{\alpha t} = -u_{,\alpha t t} u'^{\alpha}$. Поскольку рассматриваемое слагаемое описывает малые поправки, для колебаний с частотой ω порядка ω_0, не нарушая асимптотической точности, можно заменить $u_{,\alpha t t}$ на $-\omega_0^2 u_{,\alpha}$, так как в первом приближении $u_{,tt} + \omega_0^2 u = 0$. В результате лагранжиан в области длинных волн примет вид

$$2\bar{\Lambda}/\rho = u_t^2 - \omega_0^2 (u^2 + (b-a) h^2 u_{,\alpha} u'^{\alpha}). \tag{4.25}$$

Экстраполируем теперь выражение (4.25) на короткие волны. Уравнение Эйлера для лагранжиана (4.25) – это уравнение Клейна – Гордона (при $b > a$)

$$u_{tt} + \omega_0^2 (u - (b-a) h^2 \Delta u) = 0. \tag{4.26}$$

Ему соответствует дисперсионное уравнение

$$\omega_*^2 = \alpha^2 e^{-2} (1 + 4(b-a) k_*^2). \tag{4.27}$$

[1]) Заметим, что для любого значения e можно указать ветви $F_{\perp}(n)$ и $F_{\parallel}(m)$ с такими номерами n и m, что их частоты будут близки: достаточно взять приближение числа e рациональной дробью $2n/(2m+1)$.

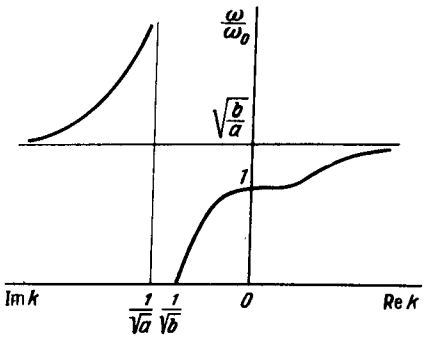


Рис. 45.

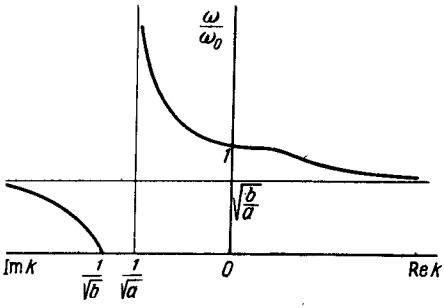


Рис. 46.

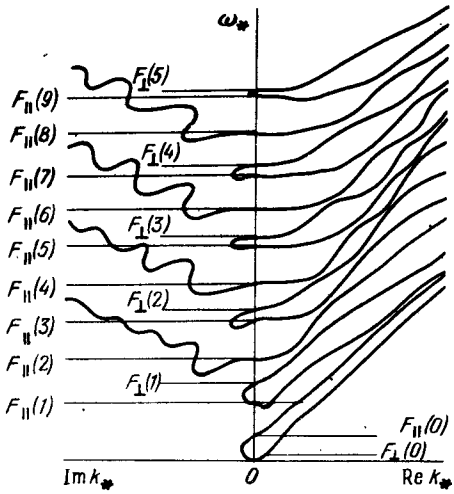


Рис. 47.

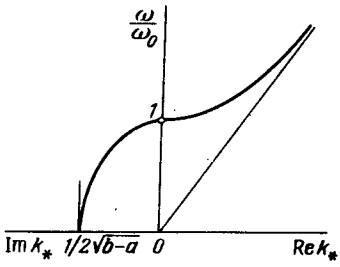


Рис. 48.

Дисперсионная кривая для уравнения (4.27) изображена на рис. 48. Согласно формулам (4.23), (4.24) и (4.27) она количественно правильно описывает поведение дисперсионной кривой в области длинных волн. Кроме того, при больших $\mathrm{Re}\, k_*$ имеется качественно правильное соответствие: кривая выходит на асимптоту $\omega_*/k_* = \mathrm{const}$. Значение тангенса угла наклона асимптоты по приближенной теории $2\alpha\sqrt{b-a}/e$ отличается от значений по точной теории, равного единице. При мнимых значениях k_* дисперсионная кривая, вместо того чтобы непрерывно перейти в одну из ветвей серии $F_{\parallel}$, оканчивается в точке $\mathrm{Im}\, k_* = 1/2\sqrt{b-a}$. В этом проявляется отсутствие взаимодействия ветвей, которое мы положили в основу коротковолновой экстраполяции. Ясно, что для получения более реальной картины надо принять во внимание взаимодействие ветвей на коротких волнах.

Учет взаимодействия ветвей. Простейшие уравнения высокочастотных колебаний. Естественно попытаться описать взаимодействие ветвей слагаемыми, которые малы в области длинных волн и отбрасывание которых и приводит к ортогональности ветвей по энергии. При этом, поскольку

во многих задачах можно ограничиться некоторым конечным диапазоном частот, достаточно включить в рассмотрение конечное число ветвей. Наибольший интерес представляют уравнения, в которых, помимо низкочастотных ветвей, учитываются высокочастотные ветви с наименьшими частотами.

Как следует из формул (4.5)–(4.9), наименьшую частоту имеет ветвь $F_{\|}(0)$ $(\omega_* = \pi/2)$. Следующую частоту имеет ветвь $L_{\perp}(0)$ $(\omega_* = \pi/2e)$, если $1/2 < e$ $(\nu < 1/3)$, и ветвь $L_{\|}(0)$ $(\omega_* = \pi)$, если $e < 1/2$ $(1/3 < \nu)$. При $1/3 < e$ $(\nu < 7/16)$ три наименьшие частоты имеют ветви $F_{\|}(0)$, $L_{\perp}(0)$ и $L_{\|}(0)$. Простейшие уравнения получаются, если учесть только ветвь $F_{\|}(0)$. В этом случае, объединяя формулы для перемещений классических ветвей из §§ 1, 2 и формулы для ветви $F_{\|}(0)$ (4.6), получим

$$w_\alpha = u_\alpha - n^i u_{i,\alpha}\xi + h\varphi_\alpha \sin\frac{\pi\xi}{n}; \quad w = u - \sigma A^\nu_\nu \xi - \frac{\sigma}{2} B^\nu_\nu \left(\xi^2 - \frac{h^2}{2}\right). \tag{4.28}$$

Здесь u_α и u – перемещения срединной поверхности, $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ – меры растяжения и изгиба, построенные по u_α и u, величины ψ_α в (4.6) связаны с φ_α соотношением $\psi_\alpha = h\varphi_\alpha$.

Вторые слагаемые в выражениях для перемещений w_α и w (4.28) и третье слагаемое в выражении для w возникли в связи с тем, чтобы аннулировать в статике (и для низкочастотных колебаний) поперечную упругую энергию. Параметры φ_α имеют смысл углов поворота поперечного волокна, однако волокно изгибается не в кубическую параболу, как в уточненной теории оболочек § 2, а в полуволну синусоиды.

В формулах (4.28) мы не учли дополнительного слагаемого в поперечном перемещении вида (4.14). Это связано с тем, что мы не будем претендовать на правильное описание кривизны дисперсионной кривой около точки $\omega_* = \pi/2$, но будем требовать, чтобы: 1) уравнения были гиперболическими, и, следовательно, кинетическая энергия и внутренняя энергия были положительно определены и содержали только первые производные от искомых функций; 2) правильно описывалась кривизна дисперсионной кривой около точки $\omega_* = 0$; 3) правильно предсказывалось значение частоты ветви $F_{\|}(0)$ при $k_* = 0$. Как показывает дополнительный анализ, получить при этом еще и правильное значение кривизны дисперсионной кривой в точке $\omega_* = \pi/2$ не удается, поэтому слагаемое вида (4.14) опущено.

Подставляя выражения (4.28) в лагранжиан (4.1) (предварительно удобно переписать плотность энергии в виде суммы продольной и поперечной составляющих (см. (1.44), (1.45))) и интегрируя его по толщине, получим осредненный лагранжиан

$$\langle\Lambda\rangle = \mu\sigma(\gamma^\nu_\nu)^2 + \mu\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + \mu\sigma\frac{h^2}{12}\left(\rho^\nu_\nu - \frac{24}{\pi^2}\varphi^\nu_{;\nu}\right)^2 +$$

$$+\frac{\mu h^2}{12}\left(\rho_{\alpha\beta} - \frac{24}{\pi^2}\varphi_{(\alpha;\beta)}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu\pi^2\varphi_\alpha\varphi^\alpha - \tag{4.29}$$

$$-\frac{1}{2}\rho u_{,t}^2 - \frac{1}{2}\rho u_{\alpha,t}^2 - \frac{1}{4}\rho h^2\varphi_{\alpha,t}^2 \ .$$

Меры растяжения и изгиба $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ выражаются через перемещения по формулам (1.12), (1.15).

В (4.29) отброшены малые члены, содержащие градиенты $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$, φ_α и градиенты скорости $u_{,t}$, которые малы в области длинных волн. Формула (4.29) подсказывает замену искомых функций $\varphi_\alpha \to \psi_\alpha$: $\psi_\alpha = n^i u_{i,\alpha} - \frac{24}{\pi^2}\left(\varphi_\alpha - \rho^\nu_{\nu,\alpha}\frac{h^2\sigma}{\pi^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\right)\right)$. Мы обозначаем новые искомые функции так же, как в теории с учетом поперечного сдвига, поскольку дальше функции ψ_α из формул (4.6) не встретятся. После замены и отбрасывания в кинетической энергии малых членов, содержащих градиенты скорости, окончательно получим

$$\langle\Lambda\rangle = \mu(\sigma(\gamma^\nu_\nu)^2 + \gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}) + \frac{\mu h^2}{12}(\sigma(\rho^\nu_\nu)^2 + \rho_{\alpha\beta}\rho^{\alpha\beta}) +$$

$$+\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\pi^3}{24}\right)^2(\psi_\alpha - n_i u^i_{,\alpha})^2 - \frac{1}{2}\rho\left(u^2_{,t} + u^2_{\alpha,t} + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\pi^2}{24}\right)^2\psi^2_{\alpha,t}\right). \qquad (4.30)$$

Здесь $\rho_{\alpha\beta}$ определяется по ψ_α и u_i, так же как в теории с учетом поперечного сдвига, равенствами (2.16).

Вычислим работу внешних сил на перемещениях (4.28), считая для простоты, что край оболочки либо свободен, либо жестко заделан. Сохраняя лишь главные члены, для функционала действия двумерной теории получим

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathring{\Omega}}\left(h\langle\Lambda\rangle - \{P^i\}u_i - \frac{\pi^2 h}{24}[P^\alpha]\psi_\alpha\right)d\mathring{\omega}. \qquad (4.31)$$

Сравнение с выражениями для действия в теории с учетом сдвига (см. (2.12), (2.17)) показывает, что построенная теория высокочастотных колебаний аналогична теории с учетом сдвига, и получается из нее, если заменить коэффициент 5/12 в (2.12) на $\frac{1}{4}(\pi^3/24)^2$, коэффициент $1-2\sigma/5$ в (2.34) на $6(\pi^2/24)^2$, отбросить перекрестную энергию $\Phi_{\text{пер}}$ в (2.7), (2.12) и инерцию поперечного обжатия (последнее слагаемое) в (2.17). Отметим, что 5/12 = 0,4167, что очень близко к $\frac{1}{4}(\pi^3/24)^2 = 0{,}4173$, а коэффициент в кинетической энергии $6(\pi^2/24)^2$ равен 1,0147.

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$t^\beta_{\alpha;\beta} - q_\beta \mathring{b}^\beta_\alpha - \rho h u_{\alpha,tt} + \{P^\alpha\} = 0, \quad t^{\alpha\beta}\mathring{b}_{\alpha\beta} + q^\alpha_{,\alpha} - \rho h u_{,tt} + \{P\} = 0,$$

$$q_\alpha + m^\beta_{\alpha;\beta} + \rho\frac{h^3}{2}\left(\frac{\pi^2}{24}\right)^2\psi_{\alpha,tt} + \frac{h\pi^2}{24}[P_\alpha] = 0, \qquad (4.32)$$

$$t^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \mathring{b}^{[\alpha}_\sigma m^{\beta]\sigma}, \quad n^{\alpha\beta} = 2\mu h(\sigma\gamma^\lambda_\lambda a^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}),$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\mu h^3}{6}(\sigma\rho^\lambda_\lambda a^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta}), \quad q^\alpha = \frac{\mu h}{2}\left(\frac{\pi^3}{24}\right)^2(\psi_\alpha - u_{,\alpha} - b^\lambda_\alpha u_\lambda). \qquad (4.33)$$

Эти уравнения надо дополнить связью $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ с перемещениями (2.16) и краевыми условиями: на жестко заделанном крае $u_\alpha = u = \psi_\alpha = 0$, на свободном крае $n^{\alpha\beta}\nu_\beta = m^{\alpha\beta}\nu_\beta = q^\alpha\nu_\alpha = 0$.

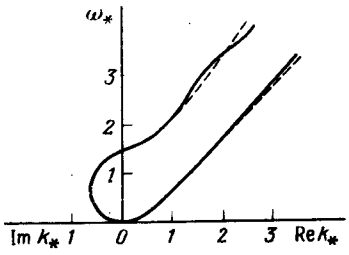


Рис. 49.

Одним из простейших тестов для проверки двумерных теорий является сравнение дисперсионных кривых по двумерной и трехмерной теориям. Дисперсионные кривые для поперечных колебаний пластин, соответствующие уравнениям (4.32), (4.33) и точной теории, приведены на рис. 49 (штриховая и сплошная линия). Имеется очень хорошее совпадение в области длинных волн и качественное соответствие в области коротких волн.

Высокочастотные продольные колебания пластин. Построим теперь уравнения, которые описывают ветви $L_\perp(0)$ и $L_\parallel(1)$. Отметим, что эти ветви надо включать в рассмотрение одновременно, так как, согласно картине дисперсионных кривых для продольных волн в слое при $\nu = 0{,}3$, изображенной на рис. 50, они сильно взаимодействуют. Более того, при $e = 1/2$ ($\nu = 1/3$) собственные частоты этих ветвей совпадают, и их взаимодействием нельзя пренебречь. Для простоты ограничимся случаем пластин, когда продольные и поперечные колебания разделяются (теория высокочастотных колебаний оболочек с учетом ветвей $L_\perp(0)$ и $L_\parallel(1)$ построена в работе [37]).

Возьмем перемещения в виде суммы перемещений, соответствующих отдельным ветвям:

$$w_\alpha = \bar{u}_\alpha + \bar{v}_\alpha \cos\frac{2\pi\xi}{h} + \bar{\psi}_{,\alpha}\frac{h}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi\xi}{h} + \frac{2e\cos(\pi\xi/eh)}{\sin(\pi/2e)}\right),$$

$$w = \bar{\psi}\sin\frac{\pi\xi}{h} - \sigma\bar{u}^\alpha_{,\alpha}\xi - \bar{v}^\alpha_{,\alpha}\frac{h}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi\xi}{h} + \frac{2e\sin(2\pi e\xi/h)}{\cos\pi e}\right). \qquad (4.34)$$

Искомыми функциями являются $\bar{u}_\alpha$, $\bar{\psi}$ и $\bar{v}_\alpha$ (обозначение без черты зарезервированы для функций, которые появятся в результате некоторых замен искомых функций в окончательных уравнениях). Величины $\bar{u}_\alpha$ имеют смысл компонент тангенциальных перемещений поперечного волокна, параметр $\bar{\psi}$ – "нелинейного" поперечного обжатия (линейное обжатие описывается вторым слагаемым в выражении для w (4.34)), параметры $\bar{v}_\alpha$ описывают эффект, не имеющий аналога в классической теории оболочек, – тангенциальное перемещение срединной поверхности $\bar{v}_\alpha$ и одновременное перемещение лицевых поверхностей – $\bar{v}_\alpha$.

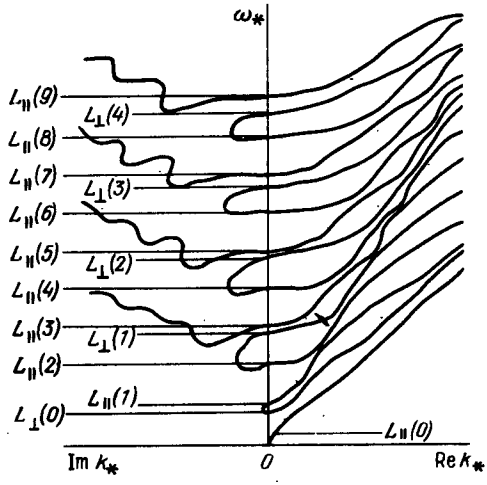


Рис. 50.

Подстановка (4.34) в лагранжиан и интегрирование по толщине оболочки дает

$$\langle\Lambda\rangle = \mu\sigma\left(\overline{u}^{\alpha}_{,\alpha} - \frac{2h\sigma}{\pi^2}\Delta\overline{\psi}\right)^2 + \mu\left(\overline{u}_{(\alpha,\beta)} - \frac{2h\sigma}{\pi^2}\overline{\psi}_{,\alpha\beta}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\mu k_3(\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma} + hk_5\Delta\overline{\psi})^2 + \frac{\mu}{2}(\overline{v}_{(\alpha,\beta)} + hk_5\overline{\psi}_{,\alpha\beta})^2 +$$

$$+\frac{1}{4}(\lambda+2\mu)k_1\left(\overline{\psi}_{,\alpha} - \overline{u}^{\sigma}_{,\sigma\alpha}\frac{4h\sigma}{\pi^2} + hk_5\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma\alpha}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{h^2}(\lambda+2\mu)(\overline{\psi} + hk_5\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma})^2 + 2\lambda\frac{1}{3h}\overline{\psi}\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma} -$$

$$-2\mu\frac{4}{3h}\overline{v}^{\sigma}\overline{\psi}_{,\sigma} + \frac{\mu\pi^2}{h^2}(\overline{v}_{\sigma} + hk_5\overline{\psi}_{,\sigma})^2 - \mu\pi^2k_5^2\overline{\psi}^2_{,\sigma} - \qquad (4.35)$$

$$-\frac{1}{4}\rho\left(\overline{\psi}_{,t} - \frac{4h\sigma}{\pi^2}\overline{u}^{\sigma}_{,\sigma t} + hk_5\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma t}\right)^2 + \frac{1}{4}\rho h^2k_5^2(\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma t})^2 -$$

$$-\rho\frac{h^2}{4\pi^2}k_4(\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma t})^2 - \frac{1}{2}\rho\left(\overline{u}_{\alpha,t} - \overline{\psi}_{,\alpha t}\frac{2h\sigma}{\pi^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho(\overline{\psi}_{,\alpha t})^2\frac{4h^2\sigma^2}{\pi^4} -$$

$$-\frac{1}{4}\rho(\overline{v}_{\alpha,t} + hk_5\overline{\psi}_{\alpha,t})^2 + \frac{1}{4}\rho h^2k_5(\overline{\psi}_{,\alpha t})^2 - \frac{1}{4}\rho\frac{h^2}{\pi^2}k_2(\overline{\psi}_{,\alpha t})^2 -$$

$$-\frac{1}{4}\pi^2(\lambda+2\mu)k_5(\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma})^2.$$

Численные козффициенты имеют следующие значения:

$$k_1 = 2\left(1 + \frac{5-3e^2}{1-e^2}\,\frac{2e^3\operatorname{ctg}(\pi/2e)}{\pi/2} + \frac{2e^2}{\sin^2(\pi/2e)}\right),$$

$$k_2 = 1 + \frac{3-e^2}{1-e^2}\,\frac{4e^3\operatorname{ctg}(\pi/2e)}{\pi/2} + \frac{4e^2}{\sin^2(\pi/2e)},$$

$$k_3 = \frac{4e^2}{\cos^2\pi e}\left(1 - \frac{1-3e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin 2\pi e}{2\pi e}\right),$$

$$k_4 = 1 + \frac{4e^2}{\cos^2\pi e}\left(1 + \frac{1+e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin 2\pi e}{2\pi e}\right),\quad k_5 = \frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{2e^2}{e^2-\frac{1}{4}}\right).$$

При выписывании лагранжиана (4.35) в него добавлены члены типа $h^2(\Delta\overline{\psi})^2$, $h^2(\overline{u}^{\sigma}_{,\sigma\alpha})^2$, $h^2(\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma\alpha})^2$, которые малы в области длинных волн. Это сделано для того, чтобы кинетическую и внутреннюю энергию в (4.35) можно было представить в виде суммы полных квадратов.

Формула (4.35) подсказывает замену $\overline{u}_{\alpha} \to u_{\alpha}$, $\overline{\psi} \to \psi$, $\overline{v}_{\alpha} \to v_{\alpha}$:

$$u_{\alpha} = \overline{u}_{\alpha} - \frac{2h\sigma}{\pi^2}\overline{\psi}_{,\alpha},\quad \psi = \overline{\psi} - \frac{4h\sigma}{\pi^2}\overline{u}^{\sigma}_{,\sigma} + hk_5\overline{v}^{\sigma}_{,\sigma},\qquad v_{\alpha} = \overline{v}_{\alpha} + hk_5\overline{\psi}_{,\alpha}.$$

Оставляя в лагранжиане только главные члены и заменяя $h^2(v^{\sigma}_{,\sigma t})^2$ и $h^2(\psi_{,\alpha t})^2$ на $4\pi^2\mu(v^{\sigma}_{,\sigma})^2$ и $(\lambda+2\mu)\pi^2\psi^2_{,\alpha}$ (подобно тому, как это было сделано при переходе от лагранжиана (4.17) к лагранжиану (4.25)), окончательно получим

$$\langle\Lambda\rangle=\mu(\sigma(u^{\alpha}_{,\alpha})^2+u_{(\alpha,\beta)}u^{(\alpha,\beta)})+\frac{\mu}{4}r(v^{\sigma}_{,\sigma})^2+\frac{\mu}{2}v_{(\alpha,\beta)}v^{(\alpha,\beta)}+$$

$$+\frac{\mu s}{4}\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}+\frac{\mu\pi^2}{4h^2e^2}\left(\psi+\frac{4h\sigma}{\pi^2}u^{\sigma}_{,\sigma}\right)^2+\frac{2\lambda}{3h}\psi v^{\sigma}_{,\sigma}-$$

$$-\frac{8\mu}{3h}v^{\sigma}\psi_{,\sigma}+\frac{\mu\pi^2}{h^2}v^2_{\sigma}-\frac{1}{2}\rho u_{\alpha,t}u^{\alpha}_{,t}-\frac{1}{4}\rho\psi^2_{,t}-\frac{1}{4}\rho v_{\alpha,t}v^{\alpha}_{,t}.$$

Коэффициенты r и s вычисляются по формулам

$$s=\frac{1}{e^2}+\frac{16e\operatorname{ctg}(\pi/2e)}{\pi}+\frac{16(1+2e^2)^2}{9\pi^2(4e^2-1)e^2}-\frac{8\sigma^2}{\pi^2e^2},$$

$$r=-1-\frac{8e\operatorname{tg}\pi e}{\pi}-\frac{16(1+2e^2)^2}{9\pi^2(4e^2-1)e^2}.$$

Функционал действия имеет вид

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathring{\Omega}}(h\langle\Lambda\rangle-\{P^{\alpha}\}u_{\alpha}+\{P^{\alpha}\}v_{\alpha}-[P]\psi)d\mathring{\omega}\,dt.$$

Его варьирование приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\rho u_{\alpha,tt}=\mu(1+2\sigma)u^{\sigma}_{,\sigma\alpha}+\mu\Delta u_{\alpha}+\frac{2\mu\sigma}{he^2}\left(\psi+\frac{4h\sigma}{\pi^2}u^{\lambda}_{,\lambda}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{h}\{P_{\alpha}\},\\
&\rho\psi_{,tt}=\mu s\Delta\psi-\mu\frac{4(1+2e^2)}{3e^2h}v^{\sigma}_{,\sigma}-\frac{\mu\pi^2}{h^2e^2}\left(\psi+\frac{4\sigma h}{\pi^2}u^{\sigma}_{,\sigma}\right)+\frac{2}{h}[P],\\
&\rho v_{\alpha,tt}=\mu(r+1)v^{\sigma}_{,\sigma\alpha}+\mu\Delta v_{\alpha}-\frac{4\mu\pi^2}{h^2}v_{\alpha}+\frac{4\mu(1+2e^2)}{3e^2h}\psi_{,\alpha}-\frac{2}{h}\{P_{\alpha}\}.
\end{aligned}\tag{4.36}$$

В случае жесткой заделки на $\partial\mathring{\Omega}$ $u_{\alpha}=\psi=v_{\alpha}=0$, в случае свободного края

$$\mu[\sigma u^{\lambda}_{,\lambda}\delta^{\alpha\beta}+u^{(\alpha,\beta)}]\nu_{\beta}+\frac{\mu\sigma}{he^2}\left(\psi+\frac{4h\sigma}{\pi^2}u^{\sigma}_{,\sigma}\right)\nu^{\alpha}=0,$$

$$\mu\left(s\psi^{,\alpha}-\frac{16}{3h}v^{\alpha}\right)\nu_{\alpha}=0,$$

$$\mu[rv^{\lambda}_{,\lambda}\delta^{\alpha\beta}+2v^{(\alpha,\beta)}]\nu_{\beta}+\frac{4\lambda}{3h}\psi\nu^{\alpha}=0.$$

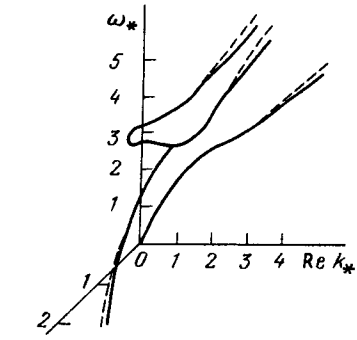


Рис. 51.

На рис. 51 приведены дисперсионные кривые для продольных колебаний пластин по точной теории (сплошные линии) и по уравнениям (4.36) (штриховые линии). Видно, что имеется очень хорошее совпадение в области длинных волн и качественное соответствие в области коротких волн. Двумерная теория удовлетворительно описывает также комплексную ветвь, и это позволяет рассчитывать на удовлетворительное описание уравнениями (4.36) наиболее медленно затухающей части погранслоя[1]).

§ 5. ТЕОРИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Постановка задачи. Рассмотрим в трехмерном пространстве область $\overset{\circ}{V}$, образованную движением вдоль пространственной кривой $\overset{\circ}{\Gamma}$ плоской фигуры S, в каждой точке перпендикулярной к оси $\overset{\circ}{\Gamma}$ (рис. 52). Обозначим через h диаметр фигуры S (максимальное расстояние между точками границы S), через R – минимальный радиус кривизны-кручения кривой $\overset{\circ}{\Gamma}$. Если $h/R \ll 1$ и $h/|\overset{\circ}{\Gamma}| \ll 1$, то упругое тело, занимающее в недеформированном состоянии область $\overset{\circ}{V}$, называют упругим стержнем.

Пусть стержень деформируется некоторыми внешними силами; на торцах стержня заданы либо поверхностные силы, либо перемещения. Требуется приближенно заменить задачу трехмерной теории упругости некоторой одномерной задачей, в которую входят функции только продольной координаты (мы ограничиваемся статикой стержней).

Рассмотрим сначала эвристическую теорию стержней, основы которой были заложены Кирхгофом и Клебшем, а затем перейдем к систематическому выводу этой теории вариационно-асимптотическим методом.

Эвристическая теория стержней. *Определяющие функции и меры деформаций.* Будем моделировать стержень пространственной кривой Г, оснащенной в каждой точке орторепером, один из векторов которого касателен к Г. При заданном положении кривой орторепер определяется с точностью до поворота вокруг касательного вектора. Соответствующая степень свободы служит для описания относительного поворота поперечных сечений стержня.

[1]) Исследование краевого резонанса по уравнениям (4.36), проведенное Ле Хань Чау, показало, что погрешность определения собственных частот не превышает 1%.

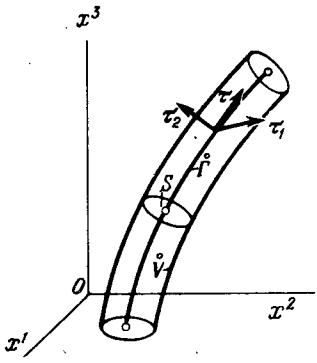


Рис. 52.

Пусть $x^i = r^i(\xi)$ уравнения кривой Γ в некоторой декартовой системе координат x^i, $\tau^i(\xi)$ – единичный касательный вектор к Γ, $\tau^i_\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, 2,)$ – два остальных вектора орторепера [1]).

В недеформированном состоянии кривая Γ занимает положение $\mathring{\Gamma}$, задаваемое уравнениями $x^i = \mathring{r}^i(\xi)$, а векторы орторепера есть $\mathring{\tau}^i(\xi)$ и $\mathring{\tau}^i_\alpha(\xi)$. Параметр ξ будем считать длиной дуги в недеформированном состоянии, так что $\mathring{\tau}^i = d\mathring{r}^i/d\xi$. Параметр ξ изменяется на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant |\mathring{\Gamma}|$.

Введем меры деформации стержня.

Векторы $\mathring{\tau}^i$ и $\mathring{\tau}^i_\alpha$, как векторы орторепера, удовлетворяют равенствам

$$\mathring{\tau}_i\mathring{\tau}^i = 1, \quad \mathring{\tau}^i_\alpha\mathring{\tau}_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathring{\tau}_i\mathring{\tau}^i_\alpha = 0. \tag{5.1}$$

Разложим векторы $d\mathring{\tau}^i/d\xi$ и $d\mathring{\tau}^i_\alpha/d\xi$ по векторам $\mathring{\tau}^i$, $\mathring{\tau}^i_\alpha$. Дифференцируя по ξ первое равенство (5.1), убеждаемся, что вектор $d\mathring{\tau}^i/d\xi$ ортогонален вектору $\mathring{\tau}^i$ и, следовательно, раскладывается по векторам $\mathring{\tau}^i_\alpha$. Обозначим его проекции на $\mathring{\tau}^i_\alpha$ через $-\mathring{\omega}^\alpha$

$$\frac{d\mathring{\tau}^i}{d\xi} = -\mathring{\omega}^\alpha\mathring{\tau}^i_\alpha. \tag{5.2}$$

Аналогично, вектор $d\mathring{\tau}^i_\alpha/d\xi$ ортогонален вектору $\mathring{\tau}^i_\alpha$ и поэтому раскладывается по векторам [2]) $\mathring{\tau}^i$ и $e_\alpha{}^\beta\mathring{\tau}^i_\beta$. Проекцию $d\mathring{\tau}^i_\alpha/d\xi$ на вектор $e_\alpha{}^\beta\mathring{\tau}^i_\beta$ обозначим через $\mathring{\omega}$. Проекции $d\mathring{\tau}^i_\alpha/d\xi$ на $\mathring{\tau}^i$, как следует из третьего равенства (5.1), продифференцированного по ξ, равны $\mathring{\omega}_\alpha$. Поэтому

$$\frac{d\mathring{\tau}^i_\alpha}{d\xi} = \mathring{\omega}_\alpha\mathring{\tau}^i + \mathring{\omega}e_\alpha{}^\beta\mathring{\tau}^i_\beta. \tag{5.3}$$

Величины $\mathring{\omega}_1$ и $\mathring{\omega}_2$ назовем кривизнами, а $\mathring{\omega}$ – кручением стержня. Во избежание недоразумений отметим, что часто через $\mathring{\omega}_1$ и $\mathring{\omega}_2$ обозначают проекции $d\mathring{\tau}^i/d\xi$ на $-\mathring{\tau}^i_2$ и $\mathring{\tau}^i_1$ соответственно. Обозначение, принятое в тексте, позволяет упростить тензорную форму записи основных соотношений.

Если векторы $\mathring{\tau}^i_\alpha$ выбраны так, что величина $\mathring{\omega}_2$ оказывается равной нулю, то вектор $\mathring{\tau}^i_1$ называют вектором главной нормали, $\mathring{\tau}^i_2$ – вектором бинормали, $-\mathring{\omega}_1$ – кривизной оси, а $\mathring{\omega}$ – кручением оси. Обычно векторы $\mathring{\tau}^i_\alpha$

---

[1]) Малые греческие индексы, нумерующие векторы орторепера и проекции на них, в зависимости от удобств и в соответствии с общим правилом суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам, пишутся либо вверху, либо внизу, при этом $\tau^i_\alpha \equiv \tau^{i\alpha}$. Кроме того, в силу декартовости системы отсчета наблюдателя, также $\tau^i_\alpha \equiv \tau_{i\alpha}$.

[2]) В этом параграфе $e_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^\beta = e^{\alpha\beta}$ – двумерные символы Леви – Чивита ($e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$).

удобно связывать не с геометрией кривой $\overset{\circ}{\Gamma}$, а с геометрией или физическими свойствами поперечного сечения, например направлять $\overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha$ по осям симметрии поперечного сечения, когда таковые имеются. Если, после того как векторы $\overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha$ связаны с поперечным сечением, окажется, что $\overset{\circ}{\omega} \neq 0$, то стержень называют естественно закрученным.

Для деформированного состояния формулы, аналогичные (5.2) и (5.3), имеют вид

$$\frac{d\tau^i}{ds} = -\omega^\alpha \tau^i_\alpha, \quad \frac{d\tau^i_\alpha}{ds} = \omega_\alpha \tau^i + \omega e_\alpha^{\cdot\beta} \tau^i_\beta, \tag{5.4}$$

где s – длина дуга вдоль кривой Γ.

Удлинение оси стержня описывается функцией $s = s(\xi)$. В качестве меры удлинения возьмем величину $\gamma = \frac{1}{2}((ds/d\xi)^2 - 1)$. Отсюда $ds/d\xi = \sqrt{1+2\gamma}$. Формулы (5.4) удобно переписать в терминах производных r^i и τ^i_α по ξ:

$$\frac{d\tau^i}{d\xi} = -\sqrt{1+2\gamma}\,\omega^\alpha \tau^i_\alpha, \quad \frac{d\tau^i_\alpha}{d\xi} = \sqrt{1+2\gamma}\,\omega_\alpha \tau^i + \sqrt{1+2\gamma}\,\omega e_\alpha^{\cdot\beta} \tau^i_\beta. \tag{5.5}$$

Сравнение равенств (5.2), (5.3) и (5.4), (5.5) показывает, что меры изгиба и кручения естественно ввести следующим образом:

$$\Omega_\alpha = \sqrt{1+2\gamma}\,\omega_\alpha(s(\xi)) - \overset{\circ}{\omega}_\alpha(\xi), \quad \Omega = \sqrt{1+2\gamma}\,\omega(s(\xi)) - \overset{\circ}{\omega}(\xi). \tag{5.6}$$

Очевидно, что по известным γ, Ω_α и Ω, заданному начальному состоянию $\{\overset{\circ}{\Gamma}, \overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha\}$ и значениям r^i, τ^i и τ^i_α в одной из концевых точек кривой Γ, из уравнений (5.4) и (5.5) и соотношения $dr^i/ds = \tau^i$ однозначно восстанавливаются функции $r^i(\xi)$ и $\tau^i_\alpha(\xi)$. Деформированное и недеформированное положения стержня можно совместить (вместе с ортореперами) тогда и только тогда, когда меры деформации γ, Ω_α и Ω тождественно равны нулю.

Меры изгиба и кручения можно выразить через производные от векторов ортрепера по ξ из формул (5.5), (5.6):

$$\Omega_\alpha = \tau_i \frac{d\tau^i_\alpha}{d\xi} - \overset{\circ}{\omega}_\alpha = -\tau^i_\alpha \frac{d\tau_i}{d\xi} - \overset{\circ}{\omega}_\alpha,$$

$$\Omega \doteq \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \frac{d\tau^i_\alpha}{d\xi} \tau_{i\beta} - \overset{\circ}{\omega}. \tag{5.7}$$

Вариационное уравнение. Поскольку меры деформации γ, Ω_α и Ω полностью определяют деформированное состояние стержня, естественно принять, что плотность упругой энергии Φ единицы длины начального состояния есть функция от γ, Ω_α и Ω. Внешние силы совершают работу на приращениях r^i и τ^i_α. Обозначая соответствующие "обобщенные силы" через Q_i и Q^α_i и принимая для простоты, что концы стержня жестко заделаны $(r^i(0) = r^i_0, r^i(|\overset{\circ}{\Gamma}|) = r^i_1, \ r^i_\alpha(0) = \tau^i_{\alpha 0}, \ \tau^i_\alpha(|\overset{\circ}{\Gamma}|) = \tau^i_{\alpha 1})$, запишем вариационное уравнение энергии:

$$\delta \int_0^{|\overset{\circ}{\Gamma}|} \Phi\, d\xi = \int_0^{|\overset{\circ}{\Gamma}|} (Q_i \delta r^i + Q^\alpha_i \delta \tau^i_\alpha)\, ds. \tag{5.8}$$

Варьированию подвергаются положение кривой Г (функции $r^i(\xi)$), а также векторы орторепера (функции $\tau_\alpha^i(\xi)$). При этом функции $\tau_\alpha^i(\xi)$ подчинены ограничениям

$$\tau_i \tau_\alpha^i = 0, \quad \tau_\alpha^i \tau_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{5.9}$$

в которых вектор τ^i определен по функциям $r^i(\xi)$ равенствами

$$\tau^i = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}} \frac{dr^i}{d\xi}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{dr^i}{d\xi} \frac{dr_i}{d\xi} - 1 \right). \tag{5.10}$$

Вариации мер деформаций. Шесть функций τ_α^i удовлетворяют пяти ограничениям (5.9). Поэтому из шести вариаций $\delta\tau_\alpha^i$ имеется лишь одна независимая. Она соответствует бесконечно малому повороту векторов $\underset{\rightarrow}{\tau}_\alpha$ вокруг вектора $\underset{\rightarrow}{\tau}$. Бесконечно малый угол поворота обозначим через $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \tfrac{1}{2} e^{\alpha\beta} \tau_\beta^i \delta\tau_{i\alpha}.$$

В вариационном уравнении (5.8) имеется четыре независимые вариации δr^i и $\delta\varphi$.

Обозначим проекции вектора $\delta\underset{\rightarrow}{\tau}$ на векторы $\underset{\rightarrow}{\tau}_\alpha$ через $\delta\theta^\alpha$: $\tau_i^\alpha \delta\tau^i = \delta\theta^\alpha$ Варьирование равенств (5.9), (5.10) приводит к следующим выражениям для вариации векторов τ^i и τ_α^i:

$$\delta\tau^i = \tau_\alpha^i \delta\theta^\alpha, \quad \delta\tau_\alpha^i = -\delta\theta_\alpha \tau^i + \tau^{i\beta} e_{\alpha\beta} \delta\varphi, \tag{5.11}$$

$$\delta\theta_\alpha = \tau_{i\alpha} \frac{d\delta r^i}{ds}.$$

Из (5.7) и (5.11) находим вариации мер деформаций:

$$\delta\Omega_\alpha = \sqrt{1+2\gamma}\left[-\frac{d\delta\theta_\alpha}{ds} + e_{\alpha\beta}\omega^\beta \delta\varphi + \omega e_{\alpha\beta}\delta\theta^\beta \right], \tag{5.12}$$

$$\delta\Omega = \sqrt{1+2\gamma}\left[\frac{d\delta\varphi}{ds} + e^{\alpha\beta}\omega_\beta \delta\theta_\alpha \right], \quad \delta\gamma = (1+2\gamma)\tau_i \frac{d\delta r^i}{ds}.$$

В силу условий жесткой заделки торцов стержня $\delta r^i = \delta\tau^i = \delta\tau_\alpha^i = 0$ при $\xi = 0, |\overset{\circ}{\Gamma}|$. Согласно (5.11) отсюда следует, что вариации δr^i и $\delta\varphi$ удовлетворяют на концах стержня условиям

$$\delta\theta_\alpha \triangleq \delta\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, |\overset{\circ}{\Gamma}|. \tag{5.13}$$

Уравнения теории стержней. Обозначим через T, M^α и M величины

$$T = \sqrt{1+2\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \quad M^\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_\alpha}, \quad M = \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}. \tag{5.14}$$

Они имеют смысл растягивающего усилия, изгибающих и крутящего моментов. При этом M^1 есть момент, изгибающий стержень в плоскости $\underset{\rightarrow}{\tau}$, $\underset{\rightarrow}{\tau}_1$, а M^2 – в плоскости $\underset{\rightarrow}{\tau}$, $\underset{\rightarrow}{\tau}_2$.

Варьируя энергию стержня, после интегрирования по частям и использования условий (5.13) найдем

$$\delta \int_0^{|\mathring{\Gamma}|} \Phi\, d\xi = \int_0^{|\Gamma|} \left[T\tau_i \frac{d\delta r^i}{ds} + \delta\theta^\alpha \left(\frac{dM_\alpha}{ds} + e_{\alpha\beta}(M\omega^\beta - M^\beta\omega) \right) + \right.$$

$$\left. + \delta\varphi \left(-\frac{dM}{ds} + e_{\alpha\beta} M^\alpha \omega^\beta \right) \right] ds.$$

Приравнивание этого выражения работе внешних сил приводит к системе уравнений теории стержней

$$\frac{d}{ds}\left[T\tau^i + \left(\frac{dM_\alpha}{ds} + e_{\alpha\beta}(M\omega^\beta - M^\beta\omega) + Q_\alpha \right) \tau^{i\alpha} \right] + Q^i = 0, \tag{5.15}$$

$$\frac{dM}{ds} - e_{\alpha\beta} M^\alpha \omega^\beta + Q = 0. \tag{5.16}$$

Изгибающие и крутящий моменты внешних сил Q^α и Q связаны с введенными в (5.8) величинами Q_i^α равенствами $Q^\alpha = Q_i^\alpha \tau^i$, $Q = e_\alpha^{\cdot\beta} Q_i^\alpha \tau_\beta^i$.

Уравнения (5.15) допускают понижение порядка. Действительно, пусть q^i – первообразная Q^i $(dq^i/ds = Q^i)$. Тогда

$$T\tau^i + \left(\frac{dM_\alpha}{ds} + e_{\alpha\beta}(M\omega^\beta - M^\beta\omega) + Q_\alpha \right) \tau^{i\alpha} + q^i = 0. \tag{5.17}$$

Если $Q^i \equiv 0$, то q^i – постоянные, значения которых находятся из краевых условий.

Проектируя (5.17) на оси ортрепера, придем к классическим уравнениям равновесия стержня

$$T + q_i \tau^i = 0, \quad \frac{dM_\alpha}{ds} + e_{\alpha\beta}(M\omega^\beta - M^\beta\omega) + Q_\alpha + q_i \tau_\alpha^i = 0. \tag{5.18}$$

Уравнения (5.16) и (5.18) вместе с уравнениями состояния (5.14) и краевыми условиями образуют замкнутую систему уравнений.

Линеаризация. Пусть производные по ξ от перемещений оси стержня $u^i = r^i - \mathring{r}^i$ малы. Пусть также малы приращения ортов $\tau_\alpha^i - \mathring{\tau}_\alpha^i$. Обозначим через φ величину $\varphi = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta}(\tau_\alpha^i - \mathring{\tau}_\alpha^i)\mathring{\tau}_{i\beta}$. Припишем производным от перемещений и φ некоторый порядок малости Δ и будем пренебрегать величинами порядка Δ по сравнению с единицей. Очевидно, что $\gamma, \Omega_\alpha, \Omega \sim \Delta$.

Предположим, что Φ есть квадратичная форма по γ, Ω_α и Ω. При этом T, M_α и M оказываются порядка Δ, и единственное изменение, которое произойдет в уравнениях равновесия, связано с возможностью замены ω_α и ω на $\mathring{\omega}_\alpha$ и $\mathring{\omega}$. Основные упрощения возникнут в выражениях γ, Ω_α и Ω через перемещения и φ. Полагая в формулах для вариаций (5.12) $\delta r^i = u^i$, $\delta\theta = \dot{\varphi}$, получим

$$\Omega_\alpha = -\frac{d}{d\xi}\left(\mathring{\tau}_{i\alpha} \frac{du^i}{d\xi} \right) + e_{\alpha\beta}\mathring{\omega}^\beta \varphi + \mathring{\omega} e_\alpha^{\cdot\beta} \mathring{\tau}_\beta^i \frac{du_i}{d\xi},$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{d\xi} + e^{\alpha\beta}\mathring{\omega}_\beta \mathring{\tau}_\alpha^i \frac{du_i}{d\xi}, \quad \gamma = \mathring{\tau}_i \frac{du^i}{d\xi}. \tag{5.19}$$

Система уравнений линейной теории стержней состоит из уравнений состояния (5.14) (в первом из них можно пренебречь γ по сравнению с единицей и написать $T = \partial\Phi/\partial\gamma$), уравнений равновесия (5.16), (5.18), в которых ω_α, ω заменены на $\overset{\circ}{\omega}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\omega}$, и геометрических соотношений (5.19).

О плотности внутренней энергии. Модель стержня определяется заданием функции $\Phi(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega)$. Если амплитуда деформаций мала, то для многих материалов можно принять, что Φ есть квадратичная форма по γ, Ω_α и Ω:

$$2\Phi = \overline{E}\,\gamma^2 + A^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta + C\Omega^2 + 2\gamma(A^\alpha\Omega_\alpha + A\Omega) + 2B^\alpha\Omega_\alpha\Omega. \qquad (5.20)$$

Величины γ, Ω_α и Ω кинематически независимы, поэтому все члены в выражении (5.20) существенны. Коэффициент $\overline{E}$ имеет смысл эффективного модуля Юнга, $A^{\alpha\beta}$ – жесткостей на изгиб, C – жесткости на кручение, а коэффициенты A^α, A и B^α характеризуют перекрестные эффекты между изгибом, кручением и растяжением.

Обычно, как будет видно из дальнейшего, коэффициенты A^α, A и B^α равны нулю, и перекрестные члены являются кубическими. Хотя эти члены и малы, они описывают эффекты, которые классической теорией (5.20) не охватываются. Возьмем, например, кубический член в энергии $B\gamma\Omega^2$. Он породит добавочный член $B\Omega^2$ в растягивающем усилии T, который описывает хорошо известный экспериментальный факт возникновения растягивающего усилия при кручении.

Асимметрия члена $B\gamma\Omega^2$ относительно γ и Ω влечет и асимметрию описываемого им перекрестного эффекта: если первоначально незакрученному стержню ($\Omega = 0$) сообщить удлинение γ, то скручивающий момент останется равным нулю. Это замечание показывает, что существенны только такие перекрестные члены, которые линейны хотя бы по одной из мер деформаций.

Дальше рассматриваются модели стержней, у которых энергия есть квадратичная форма по мерам деформаций.

Теория Кирхгофа – Клебша. Коэффициенты квадратичной формы (5.20) зависят от упругих модулей и геометрии поперечного сечения стержня. Пусть E – характерное значение упругих модулей. Из соображений размерности ясно, что $\overline{E} \sim Eh^2$, $A^{\alpha\beta} \sim Eh^4$, $C \sim Eh^4$, $A^\alpha \sim Eh^3$, $B^\alpha \sim Eh^4$. Слагаемые энергии имеют разный порядок по h, и естественно попытаться упростить теорию, используя малость параметра h. Применим вариационно-асимптотический метод. Для простоты будем считать, что внешние силы Q_i и Q_i^α равны нулю. На первом шаге надо минимизировать формально главный член функционала

$$\int_0^{|\overset{\circ}{\Gamma}|} \frac{1}{2}\,\overline{E}\,\gamma^2\,d\xi. \qquad (5.21)$$

Примем, что среди допустимых кривых Γ имеются кривые с длиной, равной длине осевой линии в недеформированном состоянии $|\overset{\circ}{\Gamma}|$. Это предположение всегда выполняется для криволинейных стержней, если перемещения концевых точек достаточно малы, и не выполняется для прямых стержней, подвергаемых удлинению. При сделанном предположении минимум

функционала (5.21) равен нулю и достигается на функциях $\overline{r}^i(\xi)$, для которых

$$2\gamma = \frac{d\overline{r}^i}{d\xi}\,\frac{d\overline{r}_i}{d\xi} - 1 = 0. \tag{5.22}$$

Таким образом, множество $\mathcal{M}_0$ общей схемы метода состоит из функций $\overline{r}^i(\xi)$, принимающих заданные значения на концах стержня и подчиненных условию несжимаемости (5.22).

Можно показать (на этом мы не останавливаемся), что во многих задачах добавки к $\overline{r}^i$ определяются по $\overline{r}^i$ единственным образом ($\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}$) и вносят малый вклад в энергию. Это приводит к теории стержней Кирхгофа – Клебша: деформированное состояние стержня является стационарной точкой функционала энергии на множестве функций $\overline{r}^i(\xi)$ и τ^i_α, удовлетворяющих кинематическим ограничениям на торцах и условию несжимаемости (5.22).

Прямые нерастяжимые стержни. Остановимся на случае, когда плотность энергии Φ складывается из энергии изгиба и энергии кручения: $2\Phi = A^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\rho + C\Omega^2$, тензор изгибных жесткостей является шаровым: $A^{\alpha\beta} = A\delta^{\alpha\beta}$, а стержень – прямым в недеформированном состоянии ($\overset{\circ}{\omega}_\alpha = 0$). Покажем, что плотность энергии Φ можно записать в виде

$$2\Phi = A\,\frac{d^2r^i}{d\xi}\,\frac{d^2r_i}{d\xi} + C\Omega^2.$$

Таким образом, нелинейность теории проявляется только в ограничении (5.22) и в выражении Ω через τ^i_α (5.7).

Действительно, применяя разбиение единичного тензора $\delta^i_j = \tau_i\tau^j + \tau^\alpha_i\tau^i_\alpha$ (см. (1.3.102)) и используя первую формулу (5.7) и равенства $\tau_i = dr_i/d\xi$, $\tau_i\,d\tau^i/d\xi = 0$, можно написать:

$$A^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta = A\tau^i_\alpha\,\frac{d\tau_i}{d\xi}\,\tau^{j\alpha}\,\frac{d\tau_j}{d\xi} =$$

$$= A(\delta^{ij} - \tau^i\tau^j)\,\frac{d\tau_i}{d\xi}\,\frac{d\tau_j}{d\xi} = A\,\frac{d^2r^i}{d\xi^2}\,\frac{d^2r_i}{d\xi^2},$$

что и требовалось.

Остальная часть этого параграфа посвящена построению и краткому обсуждению вариационной задачи, к которой сводится нахождение функции Φ по известным упругим характеристикам и геометрии поперечного сечения стержня. При этом мы ограничимся первым приближением, когда малыми порядка h/R, h/l и ϵ (l – характерный масштаб изменения напряженного состояния вдоль стержня, ϵ – амплитуда деформации) пренебрегается по сравнению с единицей.

Асимптотический анализ функционала энергии трехмерного упругого тела. *Геометрия недеформированного состояния.* Введем в области V криволинейную систему координат ξ^α, ξ по формулам

$$x^i = \overset{\circ}{x}{}^i(\xi^\alpha, \xi) = \overset{\circ}{r}{}^i(\xi) + \overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha\,\xi^\alpha. \tag{5.23}$$

Координаты ξ^α принимают значения в некоторой, вообще многосвязной, области S. Интеграл по S будем обозначать угловыми скобками $\langle f\rangle$ =

$= \int\limits_S f\, d\xi^1 d\xi^2$. Предполагается, что точке с координатами $\xi^\alpha = 0$ соответствует центр тяжести области S; т.е. $\langle \xi^\alpha \rangle = 0$.

Проекциям на ось ξ присваивается номер 3, который иногда опускается (в частности, $\xi^3 = \xi$). Координаты ξ^α, ξ считаем сопутствующими.

Найдем компоненты метрического тензора сопутствующей системы координат. Дифференцируя (5.23) и используя (5.3), имеем (запятыми перед малыми греческими индексами обозначается дифференцирование по ξ^α, запятой перед ξ – дифференцирование по ξ)

$$\overset{\circ}{x}{}^i_{,\alpha} = \overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha, \quad \overset{\circ}{x}{}^i_{,\xi} = (1 + \overset{\circ}{\omega}_\beta \xi^\beta)\, \overset{\circ}{\tau}{}^i + \overset{\circ}{\omega} e^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\, \xi^\beta \overset{\circ}{\tau}{}^i_\alpha.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\omega} e_{\beta\alpha} \xi^\beta, \\ &\overset{\circ}{g}_{33} = (1 + \overset{\circ}{\omega}_\beta \xi^\beta)^2 + \overset{\circ}{\omega}{}^2 \xi_\alpha \xi^\alpha, \\ &\overset{\circ}{g} \equiv \det \|\overset{\circ}{g}_{ab}\| = (1 + \overset{\circ}{\omega}_\beta \xi^\beta)^2. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Вычислим контравариантные компоненты метрического тензора. Они являются решением линейной системы уравнений

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{\circ}{g}_{\beta\gamma} + \overset{\circ}{g}{}^{\alpha 3}\overset{\circ}{g}_{3\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad \overset{\circ}{g}{}^{3\beta}\overset{\circ}{g}_{\beta\gamma} + \overset{\circ}{g}{}^{33}\overset{\circ}{g}_{3\gamma} = 0, \quad \overset{\circ}{g}{}^{3\beta}\overset{\circ}{g}_{\beta 3} + \overset{\circ}{g}{}^{33}\overset{\circ}{g}_{33} = 1. \tag{5.25}$$

Из второго уравнения (5.25) и (5.24) $\overset{\circ}{g}{}^{3\beta} = -\overset{\circ}{g}{}^{33}\overset{\circ}{g}_{3\beta}$. Подставляя это соотношение в третье уравнение (5.25) и используя формулу для $\overset{\circ}{g}_{3\beta}$ (5.24), находим

$$\overset{\circ}{g}{}^{33} = \frac{1}{(1 + \overset{\circ}{\omega}_\beta \xi^\beta)^2}, \quad \overset{\circ}{g}{}^{3\gamma} = \frac{\overset{\circ}{\omega} e^{\gamma\cdot}_{\cdot\sigma}\, \xi^\sigma}{(1 + \overset{\circ}{\omega}_\beta \xi^\beta)^2}. \tag{5.26}$$

Из первого уравнения (5.25) и из уравнений (5.24) и (5.26) получаем выражения для остальных компонент метрического тензора

$$\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + \frac{\overset{\circ}{\omega}{}^2 e^{\alpha\cdot}_{\cdot\gamma} e^{\beta\cdot}_{\cdot\delta}\, \xi^\gamma \xi^\delta}{(1 + \overset{\circ}{\omega}_\sigma \xi^\sigma)^2} \tag{5.27}$$

Будем считать, что $\overset{\circ}{\omega}_\alpha$ и $\overset{\circ}{\omega}$ – гладкие функции ξ. Наилучшую постоянную R в неравенствах

$$|\overset{\circ}{\omega}_\alpha| \leqslant \frac{1}{R}, \quad \left|\frac{d\overset{\circ}{\omega}_\alpha}{d\xi}\right| \leqslant \frac{1}{R^2}, \quad |\overset{\circ}{\omega}| \leqslant \frac{1}{R}, \quad \left|\frac{d\overset{\circ}{\omega}}{d\xi}\right| \leqslant \frac{1}{R^2} \tag{5.28}$$

назовем характерным радиусом кривизны-кручения.

Трехмерный функционал. Рассмотрим задачу о равновесии упругого стержня под действием мертвых поверхностных и объемных сил при условии, что на торцах стержня заданы положения частиц:

$$x^i(\xi^\alpha, 0) = r^i_0 + \tau^i_{\alpha 0}\xi^\alpha, \quad x^i(\xi^\alpha, |\breve{\Gamma}|) = r^i_1 + \tau^i_{\alpha 1}\xi^\alpha, \tag{5.29}$$

где $\tau^i_{\alpha 0}\tau_{i\beta 0} = \delta_{\alpha\beta}$, $\tau^i_{\alpha 1}\tau_{i\beta 1} = \delta_{\alpha\beta}$. Положения равновесия стержня есть ста-

ционарные точки функционала

$$I = \int\limits_V U\, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_{\overset{\circ}{V}} F_i x^i(\xi^\alpha, \xi)\, d\overset{\circ}{v} - \int\limits_{\partial \overset{\circ}{V}} P_i x^i(\xi^\alpha, \xi)\, d\sigma$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций $x^i(\xi^\alpha, \xi)$, которые удовлетворяют ограничениям (5.29).

Плотность энергии единицы объема U будем считать положительно определенной квадратичной формой по компонентам тензора деформаций:

$$2U = E^{abcd}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd} = E^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta} + E^{3333}\epsilon_{33}\epsilon_{33} +$$

$$+ 4E^{\alpha 3\beta 3}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{\beta 3} + 2E^{\alpha\beta 33}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{33} + 4E^{\alpha\beta\gamma 3}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma 3} + 4E^{\alpha 333}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{33}. \tag{5.30}$$

Будем строить "одномерный" функционал при помощи предельного перехода $h \to 0$. При этом требуется указать зависимость от h характеристик внешних воздействий F_i и P_i и компонент тензора упругих модулей. Мы обсудим эти зависимости несколько позже.

Сделаем замену переменных $\xi^\alpha = h\zeta^\alpha$. После замены область изменения переменных ζ^α не зависит от h, а параметр h войдет в функционал явно. Область изменения переменных ζ^α, так же как и ξ^α, обозначается через S.

Замена искомых функций. Можно было бы, как это делалось при построении теории оболочек, начать с поиска множества $\mathcal{N}$ общей схемы вариационно-асимптотического метода. При этом на первом шаге получилось бы, что функции $x^i(\xi^a, \xi)$ не зависят от ξ^α: $x^i = r^i(\xi)$, на втором шаге — что $x'^i(\xi^\alpha, \xi)$ являются линейными функциями ξ^α: $x'^i = \tau^i_\alpha(\xi)\,\xi^\alpha$, где векторы τ^i_1 и τ^i_2 перпендикулярны и ортогональны вектору $dr^i/d\xi$ и, таким образом, содержат дополнительный произвол. На следующем шаге функции x''^i полностью определяются по r^i и τ^i_α, и,таким образом, множество $\mathcal{N}$ состоит из функций $r^i(\xi)$ и $\tau^i_\alpha(\xi)$. Мы пропустим эти рассуждения, "угадав" множество $\mathcal{N}$, и сразу перейдем к нужной замене искомых функций.

Введем функции

$$r^i(\xi) = \langle x^i(\xi^\alpha, \xi)\rangle / |S|. \tag{5.31}$$

Функции r^i имеют смысл компонент среднего радиус-вектора поперечного сечения в деформированном состоянии. Кривую Γ с уравнением $x^i = r^i(\xi)$ назовем деформированной осью стержня. Параметр ξ, вообще говоря, не является длиной дуги деформированной оси. Удлинение оси характеризуется введенной выше величиной γ.

Оснастим кривую Γ двумя единичными векторами τ^i_α, которые ортогональны между собой и ортогональны вектору $\tau^i = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\gamma}}\dfrac{dr^i}{d\xi}$.

Сделаем замену искомых функций:

$$x^i(\xi^\alpha, \xi) = r^i(\xi) + \tau^i_\alpha(\xi)\,\xi^\alpha + hy^i(\xi^\alpha, \xi). \tag{5.32}$$

В силу определения r^i (5.31) функции $y^i(\xi^\alpha, \xi)$ удовлетворяют ограничениям

$$\langle y^i\rangle = 0. \tag{5.33}$$

Дополнительная степень свободы, возникающая при задании τ_α^i, позволяет наложить на y^i еще одно ограничение. Для определенности в качестве такого ограничения возьмем равенство

$$\langle y_{\alpha|\beta} \rangle e^{\alpha\beta} = 0, \quad (y_\alpha \equiv \tau_\alpha^i y_i). \tag{5.34}$$

Вертикальной чертой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по ξ^α. Равенство (5.34) означает, что "средний" поворот поперечного сечения описывается векторами τ_α^i.

Между всеми функциями $x^i(\xi^\alpha, \xi)$ и всеми наборами функций $\{r^i(\xi), \tau_\alpha^i(\xi), y^i(\xi^\alpha, \xi)\}$, подчиненных ограничениям (5.9), (5.10), (5.33) и (5.34), равенство (5.32) устанавливает взаимно однозначное соответствие. В одну сторону это утверждение очевидно. Покажем обратное: по $x^i(\xi^\alpha, \xi)$ можно однозначно найти r^i, τ_α^i и y^i, которые удовлетворяют равенствам (5.9), (5.10), (5.33) и (5.34). Действительно, определим r^i по формуле (5.31). Зададимся, далее, какими-нибудь векторами τ'^i_μ, которые удовлетворяют равенствам (5.9). Построим векторы $\tau_\alpha^i = \tau'^i_\mu s_\alpha^\mu$, где s_α^μ – компоненты некоторой двумерной ортогональной матрицы. Угол, на который осуществляет поворот матрица s_α^μ, обозначим через σ. Найдем σ из уравнения

$$\langle x^i_{,\alpha} \rangle \tau_{i\beta} e^{\alpha\beta} = \langle x^i_{,\alpha} \rangle \tau'_{i\mu} s_\beta^\mu e^{\alpha\beta} = 0. \tag{5.35}$$

Уравнение (5.35) имеет вид $A \cos\sigma + B \sin\sigma = 0$, где A и B выражаются через $\langle x^i_{,\alpha} \rangle \tau'_{i\mu}$, и, следовательно, всегда разрешимо. Его решение однозначно определяет вектор τ_α^i. Введем y^i равенством $hy^i = x^i(\xi^\alpha, \xi) - r^i(\xi) - \tau_\alpha^i(\xi)\xi^\alpha$. Тогда имеет место соотношение (5.30), а функции y^i удовлетворяют ограничениям (5.33) и (5.34), что и требовалось.

Функции r^i и τ_α^i на торцах стержня выберем в соответствии с краевыми условиями (5.29):

$$r^i(0) = r_0^i, \quad r^i(|\overset{\circ}{\Gamma}|) = r_1^i, \quad \tau_\alpha^i(0) = \tau_{\alpha 0}^i, \quad \tau_\alpha^i(|\overset{\circ}{\Gamma}|) = \tau_{\alpha 1}^i. \tag{5.36}$$

При этом

$$y^i(\xi^\alpha, 0) = y^i(\xi^\alpha, |\overset{\circ}{\Gamma}|) = 0. \tag{5.37}$$

Определим амплитуду деформации изгиба-кручения ϵ_Ω и амплитуду растяжения оси ϵ_γ формулами

$$\epsilon_\Omega = h \max_\xi \sqrt{\Omega_\alpha \Omega^\alpha + \Omega^2}, \quad \epsilon_\gamma = \max_\xi |\gamma|.$$

Величина $\epsilon = \epsilon_\Omega + \epsilon_\gamma$ характеризует амплитуду трехмерных деформаций.

Введем характерный масштаб изменения деформированного состояния l как наилучшую постоянную в системе неравенств

$$\left|\frac{d\Omega_\alpha}{d\xi}\right| \leqslant \frac{\epsilon_\Omega}{l}, \quad \left|\frac{d\Omega}{d\xi}\right| \leqslant \frac{\epsilon_\Omega}{l}, \quad \left|\frac{d\gamma}{d\xi}\right| \leqslant \frac{\epsilon_\gamma}{l},$$

$$|y^i_{,\xi}| \leqslant \frac{1}{l} \max_{\overset{\circ}{V}} \sqrt{y^i_{|\alpha} y_i^{|\alpha}}. \tag{5.38}$$

Характерный масштаб l есть функция от ξ. Предположим, что истинное деформированное состояние устроено следующим образом: в окрестности

торцов $0 \leqslant \xi \leqslant b$, $|\overset{\circ}{\Gamma}| - b \leqslant \xi \leqslant |\overset{\circ}{\Gamma}|$, $b \sim h$, масштаб l сравним с h, а вдали от торцов $\dfrac{h}{l} << 1$.

Относительно внешних сил примем условия

$$P_i = O\left(\underline{\mu}\,\frac{h}{l}\,\epsilon\right), \quad F_i = O\left(\underline{\mu}\,\frac{\epsilon}{l}\right) \tag{5.39}$$

и для простоты ограничимся рассмотрением внешних объемных сил, которые постоянны по поперечному сечению. В этих оценках $\underline{\mu}$ – характерное значение компонент тензора упругих модулей.

Преобразование выражения для энергии. Представим плотность упругой энергии в виде суммы трех квадратичных форм, которые назовем продольной энергией $U_{\|}$, энергией сдвига $U_{\angle}$ и поперечной энергией $U_{\perp}$. Продольная энергия зависит только от ϵ_{33} и определяется равенством

$$U_{\|} = \min_{\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha 3}} U,$$

энергия сдвига зависит только от $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33}

$$U_{\angle} = \min_{\epsilon_{\alpha\beta}} (U - U_{\|}),$$

а поперечная энергия есть разность $U_{\perp} = U - U_{\|} - U_{\angle}$.

Покажем, что

$$U_{\|} = \tfrac{1}{2} E_{\|}\, \epsilon_{33}^2, \quad U_{\angle} = \frac{1}{2}\, G_{\angle}^{\alpha\beta}(2\epsilon_{\alpha 3} + E_{\alpha}\epsilon_{33})\,(\alpha \to \beta),$$
$$U_{\perp} = \tfrac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\epsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\,\epsilon_{33} + E^{\sigma}_{\alpha\beta} 2\epsilon_{\sigma 3})\,(\alpha, \beta \to \gamma, \delta), \tag{5.40}$$

и найдем связь коэффициентов $E_{\|}, G_{\angle}^{\alpha\beta}, E_{\alpha}, E_{\alpha\beta}, E^{\sigma}_{\alpha\beta}$ с компонентами тензора упругих модулей.

Первое, четвертое и пятое слагаемые в (5.30) содержат $\epsilon_{\alpha\beta}$. Выделяя полный квадрат, перепишем эти слагаемые в виде (коэффициент 2 перед $\epsilon_{\sigma 3}$ введен для упрощения последующих равенств)

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\epsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\epsilon_{33} + E^{\sigma}_{\alpha\beta}\, 2\epsilon_{\sigma 3})\,(\alpha, \beta \to \gamma, \delta) -$$
$$- E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta}\, \epsilon_{33}\epsilon_{33} -$$
$$- 4E^{\mu\nu\lambda\sigma} E^{\alpha}_{\mu\nu} E^{\beta}_{\lambda\sigma}\, \epsilon_{\alpha 3}\, \epsilon_{\beta 3} - 4E^{\mu\nu\lambda\sigma} E_{\mu\nu} E^{\alpha}_{\lambda\sigma}\, \epsilon_{\alpha 3}\, \epsilon_{33}. \tag{5.41}$$

Коэффициенты $E_{\alpha\beta}$ и $E^{\sigma}_{\alpha\beta}$ являются решениями системы линейных уравнений

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} = E^{\alpha\beta 33}, \quad E^{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\sigma}_{\gamma\delta} = E^{\alpha\beta\sigma 3}.$$

Обозначая через $E^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тензор, обратный к $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($E^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\gamma\delta\mu\nu} = \delta^{(\mu}_{\alpha}\delta^{\nu)}_{\beta}$), решение этой системы можно записать в форме

$$E_{\gamma\delta} = E^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\alpha\beta 33}, \quad E^{\sigma}_{\gamma\delta} = E^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\alpha\beta\sigma 3}.$$

Из (5.30) и (5.41) для U имеем

$$2U = E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\epsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\epsilon_{33} + E^{\sigma}_{\alpha\beta}2\epsilon_{\sigma 3})(\alpha,\beta\to\gamma,\delta) +$$
$$+ 4G_L^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{\beta 3} + 4(E^{\alpha 333} - E^{\mu\nu\lambda\sigma}E_{\mu\nu}E^{\alpha}_{\lambda\sigma})\epsilon_{\alpha 3}\epsilon_{33} +$$
$$+ (E^{3333} - E^{\alpha\beta\gamma\delta}E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta})\epsilon_{33}\epsilon_{33}. \qquad (5.42)$$

Здесь введено обозначение

$$G_L^{\alpha\beta} = E^{\alpha 3\beta 3} - E^{\mu\nu\lambda\sigma}E^{\alpha}_{\mu\nu}E^{\beta}_{\lambda\sigma}.$$

Величины $\epsilon_{\alpha 3}$ содержатся во втором и третьем слагаемых в (5.42). Выделяя в этих слагаемых полный квадрат, перепишем их следующим образом:

$$G_L^{\alpha\beta}(2\epsilon_{\alpha 3} + E_{\alpha}\epsilon_{33})(\alpha\to\beta) - G_L^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}\epsilon_{33}\epsilon_{33},$$

где E_α – решение системы линейных уравнений,

$$G_L^{\alpha\beta}E_{\beta} = E^{\alpha 333} - E^{\mu\nu\lambda\sigma}E_{\mu\nu}E^{\alpha}_{\lambda\sigma}.$$

Решение этой системы дается равенством

$$E_\beta = H_{\alpha\beta}(E^{\alpha 333} - E^{\mu\nu\lambda\sigma}E_{\mu\nu}E^{\alpha}_{\lambda\sigma}),$$

где $H_{\alpha\beta}$ – тензор, обратный к тензору $G_L^{\alpha\beta}$.

Подставляя выражение для второго и третьего слагаемых в (5.42), для U окончательно получим

$$2U = E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\epsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\epsilon_{33} + E^{\sigma}_{\alpha\beta}2\epsilon_{\sigma 3})(\alpha,\beta\to\gamma,\delta) +$$
$$+ 4G_L^{\alpha\beta}(2\epsilon_{\alpha 3} + E_{\alpha}\epsilon_{33})(\alpha\to\beta) + E_{\|}\epsilon_{33}\epsilon_{33}. \qquad (5.43)$$

Здесь введено обозначение

$$E_{\|} = E^{3333} - E^{\alpha\beta\gamma\delta}E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta} - G_L^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}.$$

Сделаем в квадратичной форме (5.43) невырожденную замену переменных $\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha 3}, \epsilon_{33} \to \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha, \epsilon_{33}$: $\gamma_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\epsilon_{33} + E^{\sigma}_{\alpha\beta}2\epsilon_{\sigma 3}$, $\gamma_\alpha = 2\epsilon_{\alpha 3} + E_\alpha\epsilon_{33}$. Поскольку $\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha$ и ϵ_{33} независимы и перекрестные члены между $\gamma_{\alpha\beta}$ и γ_α, $\gamma_{\alpha\beta}$ и ϵ_{33}, γ_α и ϵ_{33} в (5.43) отсутствуют, для положительной определенности квадратичной формы (5.43) необходимо и достаточно, чтобы для всех значений $\gamma_{\alpha\beta}$ и γ_α выполнялись неравенства

$$E^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\delta} \geqslant \underline{E}\,\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}, \quad G_L^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta \geqslant \underline{G}\,\gamma_\alpha\gamma^\alpha, \quad E_{\|} > 0, \qquad (5.44)$$

где $\underline{E}$ и $\underline{G}$ – положительные постоянные.

Зафиксируем ϵ_{33} и будем искать минимум квадратичной формы (5.43) по $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\epsilon_{\alpha 3}$. Очевидно, что он достигается при $\gamma_{\alpha\beta} = 0$, $\gamma_\alpha = 0$ и равен $\frac{1}{2}E_{\|}(\epsilon_{33})^2$. Таким образом, справедливо первое соотношение (5.40). Аналогично доказываются остальные соотношения (5.40). Промежуточные равенства, появившиеся при выводе формулы (5.43), дают связь между коэффициентами квадратичных форм (5.30) и (5.43).

Двумерные тензоры упругих модулей. Двумерные тензоры $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G_L^{\alpha\beta}$, $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $E_{\alpha\beta}$ подчинены условиям симметрии

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = E^{\beta\alpha\gamma\delta} = E^{\alpha\beta\delta\gamma} = E^{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad G_L^{\alpha\beta} = G_L^{\beta\alpha},$$

$$E^{\gamma}_{\alpha\beta} = E^{\gamma}_{\beta\alpha}, \quad E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}.$$

Эти тензоры вместе с вектором E_α и скаляром $E_\parallel$ естественно принять за независимые компоненты тензора упругих модулей. Будем называть их двумерными тензорами упругих модулей.

Компоненты тензоров $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G_\perp^{\alpha\beta}$ и $E_\parallel$ имеют размерность модуля Юнга, компоненты тензоров $E^\gamma_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ и E_α безразмерны.

Условия положительной определенности накладывают на величины $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G_\perp^{\alpha\beta}$ и $E_\parallel$ ограничения (5.44). Безразмерные тензоры $E^\gamma_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ и E_α могут принимать любые значения.

Упругие модули являются функциями от ξ^α и ξ вида $E = E(\zeta^\alpha, \xi, h/R)$. Зависимость от параметра h/R порождена криволинейностью сопутствующей системы координат. Для предельных значений упругих модулей введем следующие обозначения: при $h/R = 0$

$$E_\parallel = E(\zeta^\sigma, \xi), \quad G_\perp^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(\zeta^\sigma, \xi),$$

$$E_\alpha = C_\alpha(\zeta^\sigma, \xi), \quad E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\xi^\sigma, \xi),$$

$$E^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\alpha\beta}(\zeta^\sigma, \xi), \quad E^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\zeta^\sigma, \xi).$$

Если упругие свойства симметричны относительно плоскости, перпендикулярной к оси стержня, то двумерные тензоры с нечетным числом индексов обращаются в нуль:

$$C_\alpha = 0, \quad C^\gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Если дополнительно упругие свойства инварианты относительно вращений в плоскости поперечного сечения (трансверсально изотропное тело), то тензоры $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C^{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \mu(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\gamma\beta}),$$

$$G^{\alpha\beta} = G\delta^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta} = \nu\delta^{\alpha\beta}.$$

Упругие свойства трансверсально изотропного тела определяются величинами E, G, λ, μ и ν, причем E, G, μ и $\lambda + \mu$ положительны, а ν — произвольно.

Для изотропного тела $E = 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга, $G = \mu$ — модуль сдвига и $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ — коэффициент Пуассона.

В анизотропном случае коэффициент E естественно назвать продольным модулем Юнга, $G^{\alpha\beta}$ — тензором модулей сдвига, а $C^{\alpha\beta}$ — тензором поперечных коэффициентов Пуассона (или, для краткости, тензором коэффициентов Пуассона). Безразмерные тензоры C_α, $C^\lambda_{\alpha\beta}$ также имеют смысл некоторых "коэффициентов Пуассона", в частности мы будем называть C_α вектором коэффициентов Пуассона.

Асимптотический анализ функционала энергии. Выпишем компоненты тензора деформаций в терминах r^i, τ^i_α и y^i. Дифференцируя (5.32), имеем

$$x^i_{,\alpha} = \tau^i{}_\alpha + y^i{}_{|\alpha}, \quad x^i_{,\xi} = \sqrt{1 + 2\gamma}\,[(1 + \omega_\sigma\xi^\sigma)\tau^i + \omega e^{\cdot\beta}_{\sigma\cdot}\xi^\sigma\tau^i_\beta + hy^i_{,s}].$$

Запятой перед s в индексах обозначается дифференцирование по s.

Разложим y^i по векторам орторепера $y^i = \tilde{y}\tau^i + y^\lambda \tau^i_\lambda$. Поскольку

$$y^i_{,s} = (\tilde{y}_{,s} + y^\lambda \omega_\lambda)\tau^i + (y^\lambda_{,s} - \omega^\lambda \tilde{y} + \omega y^\sigma e^{\cdot\lambda}_{\sigma\cdot})\tau^i_\lambda,$$

получим

$$\epsilon_{\alpha\beta} = y_{(\alpha|\beta)} + \tfrac{1}{2}\tilde{y}_{|\alpha}\tilde{y}_{|\beta} + \tfrac{1}{2}\, y^\lambda{}_{|\alpha} y_{\lambda|\beta},$$

$$2\epsilon_{\alpha 3} = (1 + \omega_\sigma \xi^\sigma) y_{|\alpha} + \Omega e_{\sigma\alpha}\xi^\sigma + \sqrt{1+2\gamma}\ [h y_{\alpha,s} - h\omega_\alpha \tilde{y} +$$

$$+ h\omega e_{\sigma\alpha} y^\sigma + \omega e^{\cdot\beta}_{\sigma\cdot}\xi^\sigma y_{\beta|\alpha} + h(\tilde{y}_{,s} + \omega^\lambda y_\lambda) y_{|\alpha} +$$

$$+ h(y^\lambda_{,s} - \omega^\lambda \tilde{y} + y^\sigma \omega e^{\cdot\lambda}_{\sigma\cdot}) y_{\lambda|\alpha}],$$

$$\epsilon_{33} = \gamma + \sqrt{1+2\gamma}\ \Omega_\sigma \xi^\sigma + (\sqrt{1+2\gamma} - 1)\,\mathring{\omega}_\sigma \xi^\sigma + \mathring{\omega}_\alpha \Omega_\beta \xi^\alpha \xi^\beta +$$

$$+ \mathring{\omega}\,\Omega \xi^\alpha \xi_\alpha + \tfrac{1}{2}\Omega_\alpha \Omega_\beta \xi^\alpha \xi^\beta + \tfrac{1}{2}\Omega^2 \xi_\alpha \xi^\alpha +$$

$$+ (1+2\gamma)[h(1 + \omega_\sigma \xi^\sigma)(\tilde{y}_{,s} + y^\lambda \omega_\lambda) +$$

$$+ h\omega \xi^\sigma e^{\cdot\lambda}_{\sigma\cdot}(y_{\lambda,s} - \omega_\lambda \tilde{y} + y^q e_{\sigma\lambda}\omega) + \tfrac{1}{2}h^2(\tilde{y}_{,s} + y^\lambda \omega_\lambda)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}h^2(y^\lambda_{,s} - \omega^\lambda \tilde{y} + y^\sigma e^{\cdot\lambda}_{\sigma\cdot}\omega)(y_{\lambda,s} - \omega_\lambda \tilde{y} + y^\mu e_{\mu\lambda}\omega)]$$

$$y \equiv \sqrt{1+2\gamma}\ \tilde{y}. \qquad (5.45)$$

Зафиксируем $r^i(\xi)$ и $\tau^i_\alpha(\xi)$ будем искать функции $y^i(\zeta^\alpha, \xi)$ в первом приближении. Возьмем сначала для компонент тензора деформаций приближенные выражения

$$\epsilon_{\alpha\beta} = y_{(\alpha|\beta)},\quad 2\epsilon_{\alpha 3} = y_{|\alpha} + h\Omega e_{\beta\alpha}\zeta^\beta,\quad \epsilon_{33} = \gamma + h\Omega_\beta \zeta^\beta. \qquad (5.46)$$

Тогда производные y_α и y по ξ не войдут в функционал, функционал не удержит краевых условий для y_α, y (5.37) и задача об отыскании y_α и y сведется к минимизации при каждом ξ величины

$$\Theta - h^2 \int_{\partial S} (P^\alpha y_\alpha + Py)\, d\varphi,$$

$$\Theta(y_\alpha, y) = \tfrac{1}{2}\langle G^{\alpha\beta}[y_{|\alpha} + h\Omega e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma + C_\alpha(\gamma + h\Omega_\sigma \zeta^\sigma)]\,[\alpha \to \beta] +$$

$$+ C^{\alpha\beta\gamma\delta}[y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_\sigma \zeta^\sigma) + C^\lambda_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^\sigma)]\,[\alpha, \beta \to \gamma, \delta]\rangle \qquad (5.47)$$

при ограничениях

$$\langle y_\alpha \rangle = 0,\quad \langle y \rangle = 0,\quad \langle y_{\alpha|\beta} \rangle e^{\alpha\beta} = 0. \qquad (5.48)$$

Здесь $d\varphi$ – элемент длины дуги на ∂S, отнесенный к h, $P_\alpha \equiv P_i \tau^i_\alpha$, $P = P_i \tau^i$. Работа внешних объемных сил отброшена, так как, в силу первых двух ограничений (5.48) и предположения (5.39), она имеет порядок $\mu \dfrac{h^2}{lR}\epsilon^2$ и мала по сравнению с перекрестными членами между y_α, y и $h\Omega_\sigma$, Ω и γ, учтенными в (5.47). Функционал Θ представляет проинтегрированное по сечению значение суммы поперечной энергии и энергии сдвига.

Рассмотрим сначала задачу о минимуме Θ, т.е. задачу о минимуме функционала (5.47) при нулевых внешних силах на ∂S. Функционал Θ есть строго выпуклый ограниченный снизу квадратичный функционал. Его минимизирующий элемент $\overset{\vee}{y}_\alpha$, $\overset{\vee}{y}$ линейно зависит от $h\Omega_\alpha$, $h\Omega$ и γ, поэтому

$$\overset{\vee}{y}_\alpha \sim \epsilon, \quad \overset{\vee}{y} \sim \epsilon. \tag{5.49}$$

Минимальное значение Ψ функционала Θ есть квадратичная форма по $h\Omega_\alpha$, $h\Omega$ и γ.

При ненулевых внешних силах представим y_α и y в виде

$$y_\alpha = \overset{\vee}{y}_\alpha + z_\alpha, \quad y = \overset{\vee}{y} + z. \tag{5.50}$$

Функции z_α, z удовлетворяют ограничениям

$$\langle z_\alpha \rangle = 0, \quad \langle z \rangle = 0, \quad \langle z_{\alpha|\beta} \rangle e^{\alpha\beta} = 0. \tag{5.51}$$

Подстановка (5.50) в функционал (5.47) приводит к выражению

$$\Psi - R^\alpha \Omega_\alpha - R\Omega - N\gamma + \langle G^{\alpha\beta} z_{|\alpha} z_{|\beta} + C^{\alpha\beta\gamma\delta} (z_{(\alpha|\beta)} + \\ + C^\lambda_{\alpha\beta} z_{|\lambda}) (\alpha, \beta \to \gamma, \delta) \rangle - h^2 \int\limits_{\partial S} (P_\alpha z^\alpha + Pz)\, d\varphi, \tag{5.52}$$

где R^α, R и N — коэффициенты при Ω_α, Ω и γ в выражении для работы внешних сил на перемещениях $\overset{\vee}{y}_\alpha, \overset{\vee}{y}$:

$$R^\alpha \Omega_\alpha + R\Omega + N\gamma = h^2 \int\limits_{\partial S} (P_\alpha \overset{\vee}{y}^\alpha + P\overset{\vee}{y})\, d\varphi. \tag{5.53}$$

Они определяются как только становится известной зависимость $\overset{\vee}{y}_\alpha$ и $\overset{\vee}{y}$ от Ω_α, Ω и γ. При выводе (5.52) использовано, что в силу уравнений Эйлера для $\overset{\vee}{y}_\alpha, \overset{\vee}{y}$ не возникает перекрестных членов между $\overset{\vee}{y}_\alpha, \overset{\vee}{y}$ и z_α, z.

Квадратичная по z_α и z часть функционала (5.52) обращается в нуль на полях $z_\alpha = c_\alpha + e_{\alpha\beta}\zeta^\beta \kappa, z = c; c_\alpha, c, \kappa = \text{const}$. Эти поля исключены условиями (5.51), и нетрудно доказать, что функционал (5.52) ограничен снизу. Минимизирующий элемент $\overset{\vee}{z}_\alpha, \overset{\vee}{z}$ функционала (5.52) линейно зависит от внешних сил, и, согласно условию $P^i = O(\underline{\mu}\, \frac{h}{l}\, \epsilon)$, значение последних двух слагаемых в (5.52) пренебрежимо мало.

В силу того же условия линейная форма $R^\alpha \Omega_\alpha + R\Omega + N\gamma$ имеет порядок $\frac{h}{l}\, \Psi$ и поэтому может быть в первом приближении отброшена. Отметим, однако, что как показывает дополнительный анализ, для стержней центрально-симметричного сечения все остальные поправки имеют более высокий порядок малости, и основное уточнение классической теории связано именно с учетом этой линейной формы.

Из выражений для компонент тензора деформаций (5.45) и оценок (5.49) видно, что члены, отброшенные в выражениях для деформации (5.40), имеют порядок h/R, h/l, ϵ_Ω и ϵ_γ по сравнению с единицей. Поэтому решение задачи о минимуме функционала Θ действительно представляет главную часть функций y_α и y.

Отбрасывая в работе внешних сил малые члены, получим, что обобщенные силы Q_i и Q^α_i, введенные в эвристической теории стержней, связаны с

силами, действующими на боковую поверхность и на объем стержня, формулами

$$Q_i = h \int\limits_{\partial S} P_i\, d\varphi + |S|\, F_i, \quad Q_i^{\alpha} = h^2 \int\limits_{\partial S} P_i \zeta^{\alpha} d\varphi.$$

Плотность энергии единицы длины стержня $\Phi = \langle U_{\parallel} + U_{\perp} + U_{\angle} \rangle$, в которой удержаны только члены порядка $\mu h^2 \epsilon^2$, имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} \langle E(\gamma + h\Omega_{\sigma}\zeta^{\sigma})^2 \rangle + \Psi(\gamma, \Omega_{\alpha}, \Omega). \tag{5.54}$$

Первое слагаемое в (5.54) (среднее значение продольной энергии) характеризует энергии растяжения и изгиба, связанные с удлинением продольных волокон стержня, второе слагаемое (среднее значение поперечной энергии и энергии сдвига) – энергию кручения и дополнительный вклад в энергии растяжения и изгиба, обусловленный деформацией стержня в поперечных направлениях. Займемся вычислением функции $\Psi(\gamma, \Omega_{\alpha}, \Omega)$.

Исследование задачи на сечении. Рассмотрим задачу о минимуме функционала Θ. Эта задача есть задача о минимуме квадратичного функционала по трем функциям y_{α} и y, которые определены в области поперечного сечения S и удовлетворяют ограничениям (5.48).

Для построения "классической" теории стержней достаточно найти только минимальное значение $\Psi(\gamma, \Omega_{\alpha}, \Omega)$ функционала Θ как функцию параметров γ, Ω_{α} и Ω. Однако в ряде вопросов представляет интерес определение и минимизирующих функций.

Заметим, что ограничения (5.48) несущественны для вычисления минимального значения Θ, поскольку Θ не меняется при заменах $y \to y + c$, $y_{\alpha} \to y_{\alpha} + c_{\alpha} + e_{\alpha\beta}\zeta^{\beta}\kappa$ (c, c_{α}, κ – постоянные), а такой заменой можно всегда добиться выполнения равенств (5.48), если выбранные функции y_{α} и y им не удовлетворяли. Таким образом, ограничения (5.48) имеют значение лишь для однозначного определения y_{α} и y, а при нахождении $\Psi(\gamma, \Omega_{\alpha}, \Omega)$ на ограничения (5.48) можно не обращать внимания.

В общем случае задача о минимизации функционала Θ эквивалентна решению краевой задачи типа Неймана для системы трех эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно функций y_{α}, y. Переход к двойственной вариационной задаче позволяет заменить систему трех уравнений второго порядка системой двух уравнений второго и четвертого порядков относительно y и функции напряжений χ.

Двойственная вариационная задача. Запишем функционал Θ в виде суммы двух функционалов

$$\begin{aligned}
&\Theta_{\angle} = \tfrac{1}{2} \langle G^{\alpha\beta} [y_{|\alpha} + h\Omega e_{\sigma\alpha}\zeta^{\sigma} + C_{\alpha}(\gamma + h\Omega_{\sigma}\zeta^{\sigma})] [\alpha \to \beta] \rangle, \\
&\Theta_{\perp} = \tfrac{1}{2} \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta} [y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_{\sigma}\zeta^{\sigma}) + \\
&+ C^{\lambda}_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^{\sigma})] [\alpha, \beta \to \gamma, \delta] \rangle.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Пусть y фиксировано. Тогда определение y_{α} сводится к минимизации $\Theta_{\perp}$ по y_{α}. Представим $\Theta_{\perp}$ в виде

$$\Theta_{\perp} = \sup_{\sigma^{\alpha\beta}} \langle \sigma^{\alpha\beta} [y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_{\sigma}\zeta^{\sigma}) + C^{\lambda}_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^{\sigma})] - \tfrac{1}{2} C^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\gamma\delta} \rangle, \tag{5.56}$$

где $C^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор, обратный к $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, а верхняя грань ищется по всем симметричным тензорным полям $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$. Тогда

$$\inf_{y_\alpha} \Theta_\perp = \inf_{y_\alpha} \sup_{\sigma^{\alpha\beta}} \langle \cdot \rangle, \tag{5.57}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — выражение в правой части (5.56). Переставляя в (5.57) порядок вычисления нижней и верхней граней (по общей схеме построения двойственных вариационных задач можно убедиться, что это возможно) и вычисляя $\inf_{y_\alpha} \langle \cdot \rangle$, найдем, что он равен

$$\Theta^*_\perp(\sigma^{\alpha\beta}, y) = \langle \sigma^{\alpha\beta}[C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_\sigma \zeta^\sigma) +$$

$$+ C^\lambda_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^\sigma)] - \tfrac{1}{2} C^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\gamma\delta}\rangle, \tag{5.58}$$

если

$$\sigma^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \text{ в } S, \quad \sigma^{\alpha\beta}\nu_\beta|_{\partial S} = 0, \tag{5.59}$$

и $-\infty$ в противоположном случае. Поэтому

$$\inf_{y^\alpha} \Theta_\perp = \sup_{\sigma^{\alpha\beta}} \Theta^*_\perp(\sigma^{\alpha\beta}, y), \tag{5.60}$$

где верхняя грань берется по всем $\sigma^{\alpha\beta}$, удовлетворяющим ограничениям (5.59).

Каждое решение уравнений (5.59) может быть представлено в виде $\sigma^{\alpha\beta} = e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}\chi_{|\mu\nu}$, где χ — некоторая функция в S, удовлетворяющая условию

$$\chi_{|\alpha} = \text{const} \quad \text{на} \quad \partial S, \tag{5.61}$$

причем на одной из связных компонент границы краевое значение $\chi_{|\alpha}$ без ограничения общности может считаться равным нулю. Итак,

$$\inf_{y_\alpha, y} \Theta = \inf_{y_\alpha, y} (\Theta_\angle + \Theta_\perp) = \inf_{y} \sup_{\lambda} [\Theta_\angle(y) + \Theta^*_\perp(\chi, y)], \tag{5.62}$$

где функционал $\Theta^*_\perp(\chi, y)$ получается в результате подстановки выражений $\sigma^{\alpha\beta}$ через χ в формулу (5.58):

$$\Theta^*_\perp(\chi, y) = \langle e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}\chi_{|\mu\nu}[C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_\sigma\zeta^\sigma) +$$

$$+ C^\lambda_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^\sigma)] - \frac{1}{2} C^{(-1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}e^{\gamma\lambda}e^{\delta\kappa}\chi_{|\mu\nu}\chi_{|\lambda\kappa}\rangle.$$

Уравнение Эйлера минимаксной задачи (5.62) суть два уравнения второго и четвертого порядков для χ и y.

Как правило, рассматриваемая вариационная задача может быть решена только численными методами. Вместе с этим имеется ряд важных частных случаев, когда она допускает существенные упрощения или полное исследование. Основные упрощения связаны со свойствами однородности, наличием плоскости упругой симметрии, перпендикулярной оси стержня и центральной симметрией упругих характеристик и геометрии поперечного сечения. Начнем с рассмотрения однородных стержней.

Однородные стержни. Под однородным будем понимать стержень, у которого величины $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G^{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$, $C^{\lambda}_{\alpha\beta}$ и C_{α} не зависят от ζ^{α}.

Покажем, что для анизотропии общего вида и произвольной геометрии поперечного сечения минимальное значение функционала Θ может быть найдено с точностью до числовой константы, определение которой связано с решением одной вариационной задачи. Сделаем замену искомой функции $y \to z$:

$$y = -C_{\alpha}\zeta^{\alpha}\gamma - \tfrac{1}{2}C_{\alpha}h\Omega_{\beta}(\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta} - \langle\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta}\rangle / |S|) + z. \tag{5.63}$$

Тогда функционал $\Theta_{\angle}$ примет вид

$$\Theta_{\angle} = \tfrac{1}{2}\langle G^{\alpha\beta}(z_{|\alpha} + h\widetilde{\Omega}e_{\sigma\alpha}\zeta^{\sigma})(\alpha \to \beta)\rangle,$$

где через $\widetilde{\Omega}$ обозначена величина

$$\widetilde{\Omega} = \Omega - \tfrac{1}{2}e^{\mu\nu}C_{\mu}\Omega_{\nu}.$$

Подстановка (5.63) в выражение для $\Theta_{\perp}$ дает

$$\Theta_{\perp} = \tfrac{1}{2}\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}[\nu_{(\alpha|\beta)} + D_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta\lambda}\zeta^{\lambda} + C^{\lambda}_{\alpha\beta}z_{|\lambda}][\alpha,\beta \to \gamma,\delta]\rangle. \tag{5.64}$$

Здесь $D_{\alpha\beta} = (C_{\alpha\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\beta}C_{\lambda})\gamma$, $D_{\alpha\beta\lambda} = C_{\alpha\beta}h\Omega_{\lambda} - C^{\sigma}_{\alpha\beta}C_{(\sigma}h\Omega_{\lambda)} + C^{\sigma}_{\alpha\beta}h\Omega e_{\lambda\sigma}$. Формула (5.64) подсказывает замену $\nu_{\alpha} \to z_{\alpha}$:

$$\nu_{\alpha} = -D_{\alpha\beta}\zeta^{\beta} - \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta\gamma}(\zeta^{\beta}\zeta^{\gamma} - \langle\zeta^{\beta}\zeta^{\gamma}\rangle / |S|) + z_{\alpha}. \tag{5.65}$$

Тензор $a_{\alpha\beta\gamma}$ по условию симметричен по индексам β, γ. Согласно (5.48) функции z и z_{α} удовлетворяют ограничениям

$$\langle z\rangle = 0,\quad \langle z_{\alpha}\rangle = 0,\quad \langle z_{\alpha|\beta}\rangle e^{\alpha\beta} = 0. \tag{5.66}$$

Будем искать $a_{\alpha\beta\gamma}$ как решение линейной системы уравнений

$$a_{(\alpha\beta)\gamma} \equiv \tfrac{1}{2}(a_{\alpha\beta\gamma} + a_{\beta\alpha\gamma}) = D_{\alpha\beta\gamma}. \tag{5.67}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что для любого тензора третьего ранга $a_{\alpha\beta\gamma}$, симметричного по двум последним индексам, справедливо тождество

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{(\alpha\beta)\gamma} + a_{(\alpha\gamma)\beta} - a_{(\beta\gamma)\alpha}. \tag{5.68}$$

Поэтому решение системы уравнений (5.67) дается равенством

$$a_{\alpha\beta\gamma} = D_{(\alpha\beta)\gamma} + D_{(\alpha\gamma)\beta} - D_{(\beta\gamma)\alpha}. \tag{5.69}$$

После сделанных замен искомых функций функционал Θ в силу уравнений (5.67) примет вид

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\langle G^{\alpha\beta}(z_{|\alpha} + h\widetilde{\Omega}e_{\sigma\alpha}\zeta^{\sigma})(\alpha \to \beta) +$$

$$+ C^{\alpha\beta\gamma\delta}(z_{(\alpha|\beta)} + C^{\lambda}_{\alpha\beta}z_{|\lambda})(\alpha,\beta \to \gamma,\delta)\rangle. \tag{5.70}$$

Минимизирующий элемент функционала Θ пропорционален $h\widetilde{\Omega}$, поэтому Ψ

имеет вид $\frac{1}{2}C\widetilde{\Omega}^2$, где C – крутильная жесткость стержня – есть нижняя грань функционала

$$C = h^2 \inf_{\bar{z},\bar{z}_\alpha} \langle G^{\alpha\beta}(\bar{z}_{|\alpha} + e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma)(\alpha\to\beta) + \\ + C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\bar{z}_{(\alpha|\beta)} + C^{\lambda}_{\alpha\beta}\bar{z}_{|\lambda})(\alpha,\beta\to\gamma,\delta)\rangle. \tag{5.71}$$

Здесь $\bar{z} = z/h\widetilde{\Omega}$, $\bar{z}_\alpha = z_\alpha/h\widetilde{\Omega}$.

Итак, для однородного стержня Ψ не зависит от γ, а Ω_α и Ω входят в Ψ в виде комбинации

$$\Psi = \tfrac{1}{2}C(\Omega - \tfrac{1}{2}e^{\mu\nu}C_\mu\Omega_\nu)^2. \tag{5.72}$$

Эллиптический стержень. Найдем крутильную жесткость для стержня с поперечным сечением в форме эллипса: $b_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta \leqslant 1$, $b_{\alpha\beta}$ – симметричный положительно определенный тензор [1]). Будем искать функции $\bar{z}$ и $\bar{z}_\alpha$ из системы уравнений

$$G^{\alpha\beta}(\bar{z}_{|\beta} + e_{\sigma\beta}\zeta^\sigma) = ae^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu}\zeta^\mu, \quad \bar{z}_{(\alpha|\beta)} + C^{\lambda}_{\alpha\beta}\bar{z}_{|\lambda} = 0, \tag{5.73}$$

где a – пока неопределенная постоянная. Из первого уравнения (5.73) имеем

$$\bar{z}_{|\beta} = (aG^{(-1)}_{\alpha\beta}e^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu} - e_{\mu\beta})\zeta^\mu. \tag{5.74}$$

Постоянную a выберем из условия совместности двух уравнений (5.74) относительно функции $\bar{z}$

$$e^{\alpha\beta}(\bar{z}_{|\beta})_{|\alpha} = (aG^{(-1)}_{\alpha\beta}e^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu} - e_{\mu\beta})e^{\mu\beta} = 0.$$

Отсюда

$$a = 2/G^{(-1)}_{\alpha\beta}e^{\alpha\lambda}e^{\mu\beta}b_{\lambda\mu}. \tag{5.75}$$

Из уравнений (5.74) с учетом ограничения $\langle\bar{z}\rangle = 0$ находим

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}(aG^{(-1)}_{\beta\alpha}e^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu} - e_{\mu\beta})(\zeta^\mu\zeta^\beta - \langle\zeta^\mu\zeta^\beta\rangle/|S|). \tag{5.76}$$

Подстановка (5.76) во второе уравнение (5.73) дает

$$\bar{z}_{(\alpha|\beta)} + C^{\lambda}_{\alpha\beta}(aG^{(-1)}_{\sigma\lambda}e^{\sigma\nu}b_{\nu\mu} - e_{\mu\lambda})\zeta^\mu = 0. \tag{5.77}$$

Решение уравнений (5.77) с учетом ограничений (5.66) имеет вид

$$\bar{z}_\alpha = \tfrac{1}{2}\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle/|S|), \tag{5.78}$$

где постоянный тензор $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}$ симметричен по индексам β; γ и удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\bar{a}_{(\alpha\beta)\gamma} = -C^{\lambda}_{\alpha\beta}(aG^{(-1)}_{\sigma\lambda}e^{\sigma\nu}b_{\nu\gamma} - e_{\gamma\lambda}).$$

Эта система аналогична системе уравнений (5.67), и ее решение дается формулой (5.69).

Нетрудно проверить, что функции $\bar{z}$ и $\bar{z}_\alpha$, удовлетворяющие уравнениям (5.73), удовлетворяют также уравнениям Эйлера функционала (5.71) и со-

[1]) Если направить координаты ζ^1, ζ^2 по осям эллипса, то это не приведет к упрощениям, поскольку имеется произвольная анизотропия упругих свойств. В связи с этим все соотношения записаны в тензорной форме.

ответствующим естественным краевым условиям. В силу строгой выпуклости функционала (5.71) и, следовательно, единственности его минимизирующего элемента найденные функции $\bar{z}$ и $\bar{z}_\alpha$ есть минимизирующие функции. Их подстановка в (5.71) дает

$$C = a^2 G^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\lambda} e^{\beta\sigma} b_{\lambda\mu} b_{\sigma\nu} I^{\mu\nu},$$

где $I^{\mu\nu} = \langle \xi^\mu \xi^\nu \rangle$ — тензор моментов инерции поперечного сечения. В главных осях эллипса $b_{11} = h^2/b_1^2$, $b_{22} = h^2/b_2^2$, $b_{12} = 0$, $I_{11} = \frac{1}{4}\pi b_1^3 b_2$, $I_{22} = \frac{1}{4}\pi b_2^3 b_1$ (b_1, b_2 — полуоси) имеем

$$C = \frac{\pi b_1^3 b_2^3}{G^{(-1)}_{11} b_1^2 + G^{(-1)}_{22} b_2^2} = \frac{4}{G^{(-1)}_{11} (I_{22})^{-1} + G^{(-1)}_{22} (I_{11})^{-1}} \tag{5.79}$$

Здесь $G^{(-1)}_{11}$ есть проекция на ось 1 тензора $G^{(-1)}_{\alpha\beta}$, обратного к тензору $G^{\alpha\beta}$; аналогичен смысл $G^{(-1)}_{22}$.

Обратим внимание, что это значение получено без предположения соосности тензоров $G^{\alpha\beta}$ и $I^{\alpha\beta}$. Если же тензоры $G^{\alpha\beta}$ и $I^{\alpha\beta}$ соосны, то $G^{(-1)}_{11} = (G_{11})^{-1}$, $G^{(-1)}_{22} = (G_{22})^{-1}$ и

$$C = \frac{\pi G_{11} G_{22} b_1^3 b_2^3}{G_{22} b_1^2 + G_{11} b_2^2}.$$

В случае трансверсально-изотропного материала $G^{\alpha\beta} = G\delta^{\alpha\beta}$,

$$C = \frac{\pi G b_1^3 b_2^3}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{4G}{(I_{11})^{-1} + (I_{22})^{-1}} = \frac{4G}{I^{(-1)\alpha}_{\alpha}},$$

где $I^{(-1)}_{\alpha\beta}$ — тензор, обратный к тензору $I^{\alpha\beta}$.

Оценка крутильной жесткости однородного анизотропного стержня произвольного поперечного сечения. Покажем, что для крутильной жесткости справедлива оценка

$$C \leqslant \frac{4}{G^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} I^{(-1)}_{\mu\nu}}. \tag{5.80}$$

Неравенство (5.80) является обобщением на анизотропный случай неравенства Е.Л. Николаи

$$C \leqslant \frac{4 G I_{11} I_{22}}{I_{11} + I_{22}}$$

или, в тензорной форме,

$$C \leqslant 4G / I^{(-1)\alpha}_{\alpha}.$$

Подставим в функционал Θ в качестве пробных функции (5.76), (5.78), в которых $b_{\alpha\beta}$ — некоторые постоянные. Это даст следующую оценку сверху крутильной жесткости:

$$C \leqslant 4 \bar{G}^{\mu\nu} b_{\mu\lambda} b_{\nu\sigma} I^{\lambda\sigma} / (\bar{G}^{\mu\nu} b_{\mu\nu})^2. \tag{5.81}$$

Здесь временно введено обозначение $\bar{G}^{\mu\nu} = G^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu}$.

Минимизируем правую часть (5.81) по параметрам $b_{\alpha\beta}$. Поскольку правая часть (5.81) не меняется при заменах $b_{\alpha\beta} \to \lambda b_{\alpha\beta}$, эта задача эквивалентна минимизации квадратичной формы $4\bar{G}^{\mu\nu} b_{\mu\lambda} b_{\nu\sigma} I^{\lambda\sigma}$ при ограничении $\bar{G}^{\mu\nu} b_{\mu\nu} = 1$. Легко найти, что минимальное значение квадратичной форме доставляет тензор $b_{\mu\nu} = I^{(-1)}_{\mu\nu} (\bar{G}^{\lambda\sigma} I^{(-1)}_{\lambda\sigma})^{-1}$. Это доказывает высказанное утверждение.

Неравенство (5.80) позволяет установить некоторые экстремальные свойства крутильной жесткости.

Рассмотрим крутильные жесткости стержней с различными поперечными сечениями и, возможно, разными модулями упругости, но такими, что свертка $G^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} I^{(-1)}_{\mu\nu}$ имеет для них одно и то же значение. Из сравнения соотношений (5.79) и (5.80) видно, что на введенном таким образом множестве стержней максимальную крутильную жесткость имеет стержень эллиптического сечения. Если дополнительно тензор $G^{\alpha\beta}$ является шаровым (и $G^{(-1)}_{\alpha\beta} = G^{(-1)} \delta_{\alpha\beta}$), то $G^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} I^{(-1)}_{\mu\nu} = G^{-1} I^{(-1)\alpha}_{\alpha}$, и, усиливая оценку (5.80) при помощи неравенства

$$\frac{1}{I^{(-1)\mu}_{\mu}} \leqslant \frac{1}{4} I^{\mu}_{\mu},$$

получим

$$C \leqslant G I^{\mu}_{\mu}.$$

Это неравенство для круглого стержня переходит в равенство, следовательно, из всех сечений с одинаковым полярным моментом инерции I^{μ}_{μ} максимальной жесткостью обладает круг.

Неоднородные стержни. При рассмотрении неоднородных стержней ограничимся случаем, когда стержень имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси. При этом "двумерные" тензоры упругих модулей с нечетным числом индексов обращаются в нуль ($C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, $C_{\alpha} = 0$), и задача о минимуме функционала Θ распадается на две независимые задачи: задачу о минимуме функционала

$$\Theta_{\angle} = \frac{1}{2} \langle G^{\alpha\beta} (y_{|\alpha} + h\Omega e_{\sigma\alpha} \zeta^{\sigma}) (\alpha \to \beta) \rangle$$

по функциям $y(\zeta^{\alpha})$, удовлетворяющим ограничению $\langle y \rangle = 0$, и задачу о минимуме функционала

$$\Theta_{\perp} = \frac{1}{2} \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta} (y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta} (\gamma + h\Omega_{\sigma} \zeta^{\sigma})) (\alpha, \beta \to \gamma, \delta) \rangle \qquad (5.82)$$

по функциям y_{α}, удовлетворяющим ограничениям

$$\langle y_{\alpha} \rangle = 0, \quad \langle y_{\alpha|\beta} \rangle e^{\alpha\beta} = 0. \qquad (5.83)$$

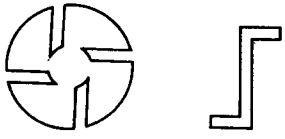
Первая из них представляет по существу известную задачу Сен-Венана о кручении (см. [4]). Минимизирующая функция функционала $\Theta_{\angle}$ пропорциональна Ω, и $\inf\limits_{y} \Theta_{\angle} = \frac{1}{2} C\Omega^2$, где крутильная жесткость C есть нижняя грань функционала:

$$C = h^2 \inf_{\bar{y}} \langle G^{\alpha\beta} (\bar{y}_{|\alpha} + e_{\sigma\alpha} \zeta^{\sigma}) (\alpha \to \beta) \rangle \quad (\bar{y} = y/h\Omega).$$

Вторая задача соответствует некоторой плоской задаче теории упругости. Минимизирующие функции линейно зависят от γ и Ω_α, поэтому минимальное значение $\Theta_\perp$ будет квадратичной формой по γ и Ω_α:

$$\Psi_\perp = \inf_{y_\alpha} \Theta_\perp = \tfrac{1}{2}(E_\perp \gamma^2 + 2E_\perp^\alpha \gamma\Omega_\alpha + E_\perp^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta).$$

Итак, для стержней с плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси, функция Ψ складывается из энергии кручения $\tfrac{1}{2}C\Omega^2$ и некоторого



а) *б)*

Рис. 53.

вклада в энергии растяжения и изгиба $\Psi_\perp$ и не содержит перекрестных членов между кручением и растяжением $\gamma \cdot \Omega$ и кручением и изгибом $\Omega \cdot \Omega_\alpha$.

Более существенные заключения можно сделать, если дополнительно поперечное сечение и упругие свойства стержня обладают центральной симметрией. Говорят, что поперечное сечение центрально-симметрично, если, наряду с каждой точкой с координатами ζ^α, оно содержит точку с координатами $-\zeta^\alpha$. Подчеркнем, что сечение может быть центрально-симметричным и не иметь двух осей симметрии (два таких сечения изображены на рис. 53).

Для функций, определенных в центрально-симметричных областях, можно ввести понятие четности. По определению упругие характеристики стержня центрально-симметричны, если $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G^{\alpha\beta}$ и $C^{\alpha\beta}$ — четные функции ζ^α.

Представим y_α в виде суммы нечетной и четной функций (они отмечаются соответственно штрихом и двумя штрихами) $y_\alpha = y'_\alpha + y''_\alpha$. Тогда функционал $\Theta_\perp$ разделится на сумму двух функционалов, один из которых зависит только от y'_α, а другой — от y''_α: $\Theta_\perp = \Theta'_\perp + \Theta''_\perp$,

$$\Theta'_\perp = \tfrac{1}{2}\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}(y'_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}\gamma)\,(\alpha,\beta \to \gamma,\delta)\rangle,$$

$$\Theta''_\perp = \tfrac{1}{2}\langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}(y''_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}h\Omega_\sigma\zeta^\sigma)\,(\alpha,\beta \to \gamma,\delta)\rangle.$$

Функционалы $\Theta'_\perp$ и $\Theta''_\perp$ можно минимизировать независимо. Нижняя грань $\Theta'_\perp$ пропорциональна γ^2, нижняя грань $\Theta''_\perp$ есть квадратичная форма по $h\Omega_\alpha$. Итак, $2\Psi_\perp = E_\perp\gamma^2 + E_\perp^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta$, и энергия не содержит перекрестных членов между γ, Ω_α и Ω. Как легко видеть, аналогичный вывод получается, если сохранить предположение о четности $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и допустить, что $G^{\alpha\beta}$ имеют произвольную четность, а $C^{\alpha\beta}$ — либо четные, либо нечетные функции ζ^α.

Неоднородный стержень с постоянными коэффициентами Пуассона. Оказывается, что для стержней с постоянными коэффициентами Пуассона имеет место следующее замечательное обстоятельство: Ψ содержит только энергию кручения ($\Psi = \tfrac{1}{2}C\Omega^2$) и

$$\Psi_\perp = 0. \tag{5.84}$$

Для доказательства воспользуемся тем, что вычисление значения на каких-нибудь функциях y_α дает оценку Ψ сверху. Положим

$$y_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\beta - \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta\gamma}(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle/|S|). \tag{5.85}$$

В качестве постоянных $a_{\alpha\beta\gamma}$ выберем решения линейной системы уравнений

$$a_{(\alpha\beta)\gamma} = C_{\alpha\beta} h \Omega_\gamma. \tag{5.86}$$

На этих функциях $\Theta_\perp = 0$. Следовательно, $\inf_{y_\alpha} \Theta_\perp \leqslant 0$. В силу неотрицательности функционала $\Theta_\perp$ отсюда следует равенство (5.84).

Минимизирующие функции y_α имеют универсальную форму для произвольного поперечного сечения и произвольной зависимости от координат упругих модулей $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$; эта форма находится из (5.85), (5.86) и (5.68)

$$y_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\beta - (C_{\alpha(\beta}h\Omega_{\gamma)} - \tfrac{1}{2}C_{\beta\gamma}h\Omega_\alpha)(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle/|S|). \tag{5.87}$$

Критерий обращения $\Psi_\perp$ в нуль. Квадратичная форма $\Psi_\perp$ тождественно равна нулю не только для стержней с постоянными коэффициентами Пуассона, но также и для некоторых стержней с переменными коэффициентами Пуассона. Докажем следующее утверждение.

Пусть область S разделена на две части S_1 и S_2 дифференцируемой линией L. В каждой части коэффициенты Пуассона $C_{\alpha\beta}$ непрерывны, а на линии L терпят разрыв. Тогда, для того чтобы квадратичная форма $\Psi_\perp$ тождественно равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $c(\zeta^\alpha)$ такая, что в областях непрерывности коэффициентов Пуассона

$$C_{\alpha\beta} = c_{|\alpha\beta}, \tag{5.88}$$

а на линии разрыва [1]

$$[c_{|\alpha}] = \text{const}. \tag{5.89}$$

Достаточность. Положим

$$y_\alpha = -c_{|\alpha}\gamma - c_{|\alpha}h\Omega_\sigma\zeta^\sigma + ch\Omega_\alpha \pm \omega e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma + a_\alpha, \tag{5.90}$$

где ω, a_α — постоянные, значения которых в S_1 и S_2 различны. Тогда в областях непрерывности

$$y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}\gamma + C_{\alpha\beta}h\Omega_\sigma\zeta^\sigma = 0. \tag{5.91}$$

Подберем постоянные ω и a_α так, чтобы на линии разрыва выполнялось условие непрерывности y_α:

$$-r_\alpha\gamma - r_\alpha h\Omega_\sigma\zeta^\sigma + [c]h\Omega_\alpha + [\omega]e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma + [a_\alpha] = 0. \tag{5.92}$$

Здесь через r_α обозначены постоянные, равные $[c_{|\alpha}]$.

Из условий кинематической совместности $d[c]/d\sigma = r_\alpha d\zeta^\alpha/d\sigma$, где σ — параметр на линии разрыва, следует, что

$$[c] = r_\alpha\zeta^\alpha + r, \quad r = \text{const}. \tag{5.93}$$

Постоянные слагаемые в уравнении (5.92) аннулируются, если положить

$$[a_\alpha] = r_\alpha\gamma + rh\Omega_\alpha. \tag{5.94}$$

Члены, линейные по ζ^σ, имеют вид $(r_\sigma h\Omega_\alpha - r_\alpha h\Omega_\sigma + [\omega]e_{\alpha\sigma})\zeta^\sigma$. Поэтому, выбирая

$$[\omega] = e^{\sigma\alpha}r_\sigma h\Omega_\alpha, \tag{5.95}$$

полностью удовлетворяем уравнению (5.92).

---

[1] Напомним, что символом $[A]$ обозначается разность значений A с двух сторон линии разрыва.

Формулы (5.94) и (5.95) задают разности постоянных ω и a_α в областях S_1 и S_2. Ограничения на y_α (5.48) полностью определяют эти постоянные.

Функции y_α являются допустимыми и обращают функционал $\Theta_\perp$ в нуль. Следовательно, $\Psi_\perp = 0$.

Необходимость. Пусть $\Psi_\perp = 0$. Тогда в силу невырожденности квадратичной формы $U_\perp$ имеют место равенства (5.91). Поскольку параметры γ и $h\Omega_\alpha$ независимы, из (5.91) следует, что в S_1 и S_2 должны выполняться условия совместности для тензоров $C_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}\zeta^\sigma$, гарантирующие, что тензоры $C_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}\zeta^\sigma$ можно представить в виде симметричной части градиента векторного поля. Для произвольного тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$, допускающего такое представление, необходимые и достаточные условия совместности имеют вид

$$\Delta\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon^\lambda_{\lambda|\alpha\beta} - \epsilon^\mu_{\alpha|\beta\mu} - \epsilon^\mu_{\beta|\alpha\mu} = 0, \tag{5.96}$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты двумерного тензора деформаций, Δ — оператор Лапласа. Подстановка в (5.96) в качестве $\epsilon_{\alpha\beta}$ величин $C_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}\zeta^\sigma$ приводит к системе уравнений

$$\Delta C_{\alpha\beta} + C^\lambda_{\lambda|\alpha\beta} - C^\mu_{\alpha|\beta\mu} - C^\mu_{\beta|\alpha\mu} = 0, \tag{5.97}$$

$$2C_{\alpha\beta|\lambda} + (C^\nu_{\nu|\alpha} - C^\nu_{\alpha|\nu})\,\delta_{\lambda\beta} + (C^\nu_{\nu|\beta} - C^\nu_{\beta|\nu})\,\delta_{\lambda\alpha} - C_{\alpha\lambda|\beta} - C_{\beta\lambda|\alpha} = 0. \tag{5.98}$$

Сворачивая равенства (5.98) по α, β, получим

$$C^\nu_{\nu|\lambda} = C^\nu_{\lambda|\nu}. \tag{5.99}$$

Уравнения (5.98) с учетом (5.99) приобретают форму [1])

$$2C_{\alpha\beta|\lambda} = C_{\alpha\lambda|\beta} + C_{\beta\lambda|\alpha}. \tag{5.100}$$

Запишем эти уравнения с заменой индексов $\beta \to \lambda$, $\lambda \to \beta$:

$$2C_{\alpha\lambda|\beta} = C_{\alpha\beta|\lambda} + C_{\lambda\beta|\alpha}, \tag{5.101}$$

и выразим $C_{\alpha\lambda|\beta}$ в (5.100) по формуле (5.101). Учитывая симметрию $C_{\alpha\beta}$, получим $C_{\beta\alpha|\lambda} = C_{\beta\lambda|\alpha}$. Следовательно, существует вектор c_α такой, что $C_{\alpha\beta} = c_{\alpha|\beta}$. Условие симметрии $C_{\alpha\beta}$ означает, что вектор c_α потенциален: $c_\alpha = c_{|\alpha}$ и, следовательно имеют место равенства (5.88). Уравнения (5.97) и (5.98) при этом удовлетворены.

Из соотношений (5.88) и (5.91) вытекают равенства (5.90): надо взять частное решение неоднородных уравнений (5.91) (первые три слагаемых в (5.90)) и добавить общее решение однородных уравнений — твердые движения (последние два слагаемых в (5.90)). Остается убедиться, что требование непрерывности y_α приводит к ограничениям (5.89). Действительно, произвольность параметров γ и $h\Omega_\alpha$ позволяет заключить, что $[\omega] = \theta\gamma + \theta^\alpha h\Omega_\alpha$, $[a_\alpha] = r_\alpha\gamma + r^\lambda_\alpha h\Omega_\lambda$, где $\theta, \theta^\alpha, r_\alpha$ и r^β_α — некоторые постоянные. Уравнения $[y_\alpha] = 0$ сводятся к системе равенств

$$[c_{|\alpha}] = r_\alpha + \theta e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma, \quad [c]\,\delta^\beta_\alpha = (r_\alpha + \theta e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma)\,\zeta^\beta - \theta^\beta e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma - r^\beta_\alpha. \tag{5.102}$$

---

[1]) Если бы в левой части уравнений (5.100) не было коэффициента 2, то эти уравнения можно было бы интерпретировать как условия обращения в нуль объекта связности плоской метрики $C_{\alpha\beta}$, которые, как известно, удовлетворяются лишь при $C_{\alpha\beta}$=const.

Положим во втором равенстве (5.102) $\alpha = 1, \beta = 2$ и $\alpha = 2, \beta = 1$. Получим, что на линиях разрыва выполняются два соотношения

$$r_1\zeta^2 + \theta(\zeta^2)^2 - \theta^2\zeta^2 - r_1^2 = 0, \quad r_2\zeta^1 - \theta(\zeta^1)^2 + \theta^1\zeta^1 - r_2^1 = 0.$$

По крайней мере одно из них должно выполняться тождественно по координатам ζ^1, ζ^2, в противном случае первое соотношение определяет прямую $\zeta^2 = \text{const}$, а второе $\zeta^1 = \text{const}$, и они не могут удовлетворяться на одной линии разрыва. Пусть тождественно выполняется первое соотношение. Тогда $\theta = 0$ и из первого уравнения (5.102) следует, что $[c_{|\alpha}] = \text{const}$, что и требовалось. Такой же результат получится, если тождественно выполняется второе соотношение. При $[c_{|\alpha}] = \text{const}$ непрерывность y_α, как уже проверялось, может быть обеспечена выбором постоянных ω и a_α в областях S_1 и S_2.

Ясно, что аналогичные рассуждения справедливы и для нескольких линий разрыва.

Следствие 1. Для того чтобы для неоднородного стержня с разрывными коэффициентами Пуассона $\Psi_\perp \equiv 0$, необходимо, чтобы на линии разрыва выполнялись условия

$$[C_{\alpha\beta}]\tau^\beta = 0, \tag{5.103}$$

где τ^β – касательный вектор к линии разрыва.

Соотношения (5.103) получаются дифференцированием равенства (5.89) вдоль линии разрыва.

Следствие 2. Для трансверсально изотропного тела $\Psi_\perp \equiv 0$ тогда и только тогда, когда коэффициент Пуассона ν постоянен.

Действительно, если $C_{\alpha\beta} = \nu\delta_{\alpha\beta}$, то уравнения (5.88) принимают вид $c_{|12} = 0, c_{|11} = c_{|22}$ и имеют единственное решение $\nu = c_{|11} = c_{|22} = \text{const}$; условия (5.103) при $[\nu] \neq 0$ не могут быть удовлетворены ни для какой кривой.

Следствие 3. Для того чтобы для неоднородного стержня с кусочно постоянными коэффициентами Пуассона $\Psi_\perp \equiv 0$, необходимо, чтобы: 1) $\det \| [C_{\alpha\beta}] \| = 0$ и 2) линии разрыва были прямыми, перпендикулярными к той из главных осей тензора $[C_{\alpha\beta}]$, для которой соответствующее собственное значение отлично от нуля.

Это утверждение также является элементарным следствием (5.103).

Энергия стержня из физически линейного материала. Приведем окончательные формулы для плотности энергии Φ в разобранных выше частных случаях.

Для однородных анизотропных стержней, согласно (5.54) и (5.72),

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(E\,|\,S\,|\,\gamma^2 + EI^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta + C(\Omega - \tfrac{1}{2}e^{\mu\nu}C_\mu\Omega_\nu)^2), \tag{5.104}$$

где E – продольный модуль Юнга, $I^{\alpha\beta}$ – тензор моментов инерции поперечного сечения, жесткость на кручение C – нижняя грань функционала (5.71), C_μ – вектор коэффициентов Пуассона.

Если стержень имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси, то $C_\alpha = 0$ и выражение (5.104) переходит в классическое

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(E\,|\,S\,|\,\gamma^2 + EI^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta + C\Omega^2).$$

В противном случае в энергию входит перекрестный член между кручением и изгибом $-Ce^{\mu\nu}C_\mu\Omega_\nu\Omega$, а эффективные изгибные жесткости

определяются не только тензором моментов инерции ($EI^{\alpha\beta}$ – как в классическом выражении), но и добавкой, связанной с крутильной жесткостью, и имеют вид $EI^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} C e^{\mu\alpha} e^{\nu\beta} C_\mu C_\nu$.

Отметим, что перекрестный эффект и увеличение эффективной изгибной жесткости возникают лишь для изгибов в плоскости, перпендикулярной вектору C_μ.

Для неоднородных стержней с плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси, функция Ψ, помимо энергии кручения, содержит вклады в энергии растяжения и изгиба, и формула для Φ принимает вид

$$\Phi = \tfrac{1}{2}[(\langle E\rangle + E_\perp)\gamma^2 + 2(\langle E\xi^\alpha\rangle + E_\perp^\alpha)\Omega_\alpha\gamma +$$
$$+ (\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle + E_\perp^{\alpha\beta})\Omega_\alpha\Omega_\beta) + C\Omega^2].$$

Добавочные жесткости $E_\perp$, $E_\perp^\alpha$, $E_\perp^{\alpha\beta}$ находятся из решения задачи о минимуме функционала $\Theta_\perp$.

С этим равенством связано интересное замечание, установленное в изотропном случае Н.И. Мусхелишвили [172]. Пусть имеется два стержня с одинаковыми значениями $\langle E\rangle$, $\langle E\xi^\alpha\rangle$ и $\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle$ и разными значениями коэффициетов Пуассона ν, причем у одного стержня коэффициенты Пуассона постоянны. Тогда изгибная жесткость и эффективный модуль Юнга больше у стержня, коэффициенты Пуассона которого переменны [1]). Это утверждение следует из критерия обращения в нуль $\Psi_\perp$.

Для стержней с центрально-симметричным поперечным сечением и четными упругими свойствами $\langle E\xi^\alpha\rangle = E_\perp^\alpha = 0$, и перекрестный эффект между растяжением и изгибом исчезает.

§ 6. ТЕОРИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Постановка проблемы. Идейно близка к проблеме построения теории оболочек задача о выводе уравнений теории мелкой воды. Эта задача заключается в следующем.

Рассмотрим потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости над плоскостью. Выделенную координату, направленную по нормали к плоскости, обозначим через x, декартовы координаты в плоскости – через x^α (малые греческие индексы пробегают значения 1,2). Высоту уровня жидкости в точке x^α в момент времени t обозначим через $h(x^\alpha, t)$ (рис. 54).

На жидкость действует сила тяжести с потенциалом gx. Давление над поверхностью жидкости считается постоянным. Поскольку в жидкости давление определено с точностью до постоянной, можно считать, что на свободной поверхности давление равно нулю.

Жидкость либо не ограничена в направлениях осей x^α и тогда покоится на бесконечности, либо занимает в плоскости x^α некоторую ограниченную область Ω с границей Γ и, таким образом, содержится в сосуде, ограниченном вертикальными стенками $\Gamma \times [0, \infty]$ и дном $x = 0$. Стенки и дно сосуда непроницаемы для жидкости.

---

[1]) Если они не удовлетворяют при этом критерию вырождения (5.88), (5.89). Н.И. Мусхелишвили рассматривал кусочно однородные изотропные стержни, для которых, согласно следствию 2, вырождения быть не могло.

Ясно, что при малых значениях отношения уровня жидкости к характерному продольному масштабу зависимость характеристик течения от поперечной координаты несущественна и движение можно достаточно точно описать при помощи функций только от переменных x^α и t. Требуется построить соответствующие приближенные уравнения.

Выведем их вариационно-асимптотическим методом.

Вывод уравнений мелкой воды. Возьмем в качестве исходного принцип Люка для функционала (3.6..34). Согласно вариационному принципу Люка

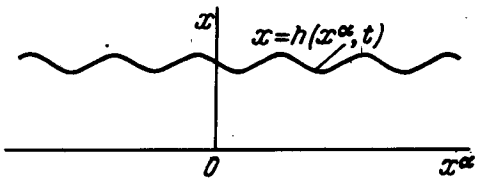


Рис. 54.

потенциал течения $\varphi\ (x, x^\alpha, t)$ и уровень жидкости $h\ (x^\alpha, t)$ являются экстремалями функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \int_{0}^{h(x^\alpha, t)} \Lambda \, dx \, dx^1 \, dx^2 \, dx\,, \tag{6.1}$$

$$\Lambda = \varphi_{,t} + \tfrac{1}{2}\varphi_{,x}^2 + \tfrac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} + gx\,.$$

Для дальнейшего функцию φ удобно переопределить, сделав замену

$$\varphi \to \varphi - gh_0 t,$$

где $h_0 = \text{const}$ – характерный уровень жидкости. В зависимости от конкретной задачи можно считать, что h_0 – уровень жидкости в начальный момент времени, либо h_0 – уровень жидкости на бесконечности и т.п. После замены лагранжиан Λ примет вид

$$\Lambda = \varphi_{,t} + \tfrac{1}{2}\varphi_{,x}^2 + \tfrac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} + g(x - h_0)\cdot \tag{6.2}$$

Дадим сначала неформальный вывод приближенного выражения для Λ.

Пусть $\Delta\varphi$ – характерная величина изменения потенциала, l – характерная длина изменения потенциала в продольных направлениях, τ – характерное время изменения потенциала. За характерную длину изменения потенциала в поперечном направлении примем величину h_0. Согласно определению характерных масштабов это означает, что

$$\varphi_{,\alpha} \sim \frac{\Delta\varphi}{l}\,,\quad \varphi_{,x} \sim \frac{\Delta\varphi}{h_0}\,,\quad \varphi_{,t} \sim \frac{\Delta\varphi}{\tau}\,.$$

Возможность перехода от задачи, трехмерной по пространственным переменным, к двумерной задаче, связана с тем, что характерная длина изменения потенциала в поперечном направлении h_0 гораздо меньше харак-

терной длины изменения потенциала в продольном направлении. Это условие

$$h_0 \ll l$$

примем дальше в качестве основного предположения.

Предположим, кроме того, что характерная скорость l/τ порядка скорости распространения малых возмущений $\sqrt{gh_0}$, а инерционный член $\varphi_{,t}$ порядка потенциальной энергии в поле сил тяжести $g(h - h_0)$. Тогда, вводя обозначение $\alpha = \max\limits_{\Omega} (h - h_0)/h_0$, имеем

$$\varphi_{,t} \sim g(h - h_0) \sim \alpha g h_0, \quad \Delta\varphi \sim \varphi_{,t}\,\tau \sim \alpha \sqrt{gh_0}\,l,$$
$$\varphi^2_{,x} \sim \frac{(\Delta\varphi)^2}{h_0^2} \sim \frac{l^2}{h_0^2}\ \alpha^2 g h_0, \quad \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} \sim \frac{(\Delta\varphi)^2}{l^2} \sim \alpha^2 g h_0. \tag{6.3}$$

Фиксируем функцию $h(x^\alpha, t)$ и будем искать функцию φ. Поскольку $l/h_0 \gg 1$, главным членом в функционале является слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \int_{0}^{h} \frac{1}{2}\, \varphi^2_{,x}\, dx\, dx^1\, dx^2\, dt. \tag{6.4}$$

Очевидно, что экстремали функционала (6.4) доставляют ему минимум. Минимизирующие элементы имеют вид

$$\varphi = \Phi(x^\alpha, t). \tag{6.5}$$

Таким образом, потенциал течения в первом приближении не зависит от поперечной координаты. Функция $\Phi(x^\alpha, t)$ остается пока произвольной.

Функции φ вида (6.5) образуют множество $\mathcal{M}_0$ в общей схеме вариационно – асимптотического метода.

На следующем шаге ищем потенциал φ в виде

$$\varphi = \Phi(x^\alpha, t) + \varphi'(x, x^\alpha, t), \tag{6.6}$$

где характерная величина изменения φ' гораздо меньше характерной величины изменения φ

$$\Delta\varphi' \ll \Delta\varphi,$$

а характерные длины изменения у функций Φ, φ' те же, что и у φ.

Поскольку функция Φ пока не определена, можно сделать замену:

$$\varphi' \to \varphi' - \langle\varphi'\rangle, \quad \Phi \to \Phi + \langle\varphi'\rangle, \quad \langle\varphi'\rangle = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi'\, dx.$$

Тогда Φ будет иметь смысл среднего от трехмерного потенциала φ по поперечному направлению

$$\Phi = \langle\varphi\rangle,$$

а функция φ' будет удовлетворять ограничению

$$\int_0^h \varphi'\, dx = 0. \tag{6.7}$$

Ограничение (6.7) позволяет однозначно находить Φ и φ' по известному потенциалу φ. Таким образом, между всеми функциями φ и всеми парами $\{\Phi, \varphi'\}$ имеется взаимно-однозначное соответствие и равенство (6.6) можно рассматривать как невырожденную замену искомой функции φ.

Подставим (6.6) в функционал (6.1), (6.2). Получим

$$\int_{t_0}^{t^1} \int_{\Omega} \int_{0}^{h} \Lambda \, dx \, dx^1 \, dx^2 \, dt \,, \tag{6.8}$$

$$\Lambda = \Phi_{,t} + \varphi'_{,t} + \tfrac{1}{2} \varphi'^2_{,x} + \tfrac{1}{2} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} + \Phi^{,\alpha} \varphi'_{,\alpha} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \varphi'_{,\alpha} \varphi'^{,\alpha} + g(x - h_0).$$

Аналогично предыдущему, главный член, содержащий φ', есть $\tfrac{1}{2} \varphi'^2_{,x}$. Однако, в отличие от функционала (6.1), функционал (6.8) содержит перекрестный член между φ', Φ и h:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} F \, dx^1 \, dx^2 \, dt \,, \quad F = \int_{0}^{h} (\varphi'_{,t} + \Phi^{,\alpha} \varphi'_{,\alpha}) \, dx.$$

Преобразуем функционал F к более удобному виду, вынося производные по t и x^α за знак интеграла. Используя ограничение (6.7), получим

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{h} \varphi' \, dx + \Phi^{,\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int_{0}^{h} \varphi' \, dx - \varphi' \mid_{x=h} \dot{h} = - \varphi' \mid_{x=h} h \,.$$

Здесь введено обозначение

$$\dot{h} = h_{,t} + \Phi^{,\sigma} h_{,\sigma} \,.$$

Выделяя из (6.8) главный член по φ' и перекрестный член, придем к функционалу

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} J \, dx^1 \, dx^2 \, dt, \quad J = \int_{0}^{h} \tfrac{1}{2} \varphi'^2_{,x} \, dx - \dot{h} \varphi' \mid_{x=h} \,. \tag{6.9}$$

Из формулы (6.9) видно значение ограничения (6.7) – оно аннулирует ядро квадратичной части функционала J. На множестве функций φ', удовлетворяющих условию (6.7), функционал (6.9) является строго выпуклым и имеет единственный минимизирующий элемент. Таким образом, следующий член разложения единственным образом определяется по предыдущему, и множество $\mathcal{N}$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода совпадает с $\mathcal{M}_0$. Функция φ' находится из уравнений Эйлера

$$\varphi'_{,xx} = \lambda, \quad \varphi'_{,x} \mid_{x=0} = 0, \quad \varphi'_{,x} \mid_{x=h} = \dot{h} \,. \tag{6.10}$$

Здесь λ – множитель Лагранжа для ограничения (6.7). Решение уравнений (6.10), (6.7) дается формулой

$$\varphi' = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} \left(x^2 - \frac{h^2}{3} \right). \tag{6.11}$$

На минимизирующем элементе, согласно обобщенной формуле Клапейрона

(см. (2.2.3)), функционал J имеет значение

$$J = -\frac{1}{2}\dot{h}\,\varphi'|_{x=h} = -\frac{1}{6}h\dot{h}^2 . \qquad (6.12)$$

Рассмотрим теперь исходный функционал на потенциалах вида (6.5). Получим

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[h\left(\Phi_{,t} + \frac{1}{2}\Phi_{,\sigma}\Phi^{,\sigma}\right) + \frac{g(h-h_0)^2}{2}\right]dx^1\,dx^2\,dt . \qquad (6.13)$$

Здесь отброшено постоянное слагаемое $gh_0^2/2$.

Функционал (6.13) соответствует классической теории мелкой воды Действительно, варьируя (6.13) по Ф, получим уравнение неразрывности

$$h_{,t} + (h\Phi^{,\sigma})_{,\sigma} = 0 ,$$

варьируя по h – интеграл Коши – Лагранжа

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}\Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha} + g(h-h_0) = 0 .$$

Осталось убедиться, что учет φ' приводит к поправкам более высокого порядка малости.

Подстановка выражения (6.11) в (6.8) и интегрирование по x с учетом (6.12) дает

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\Lambda\,dx^1\,dx^2\,dt,$$

$$\Lambda = h\left(\Phi_{,t} + \frac{1}{2}\Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha} - \frac{1}{6}\dot{h}^2\left(1 - \frac{4}{15}h_{,\alpha}h^{,\alpha}\right) + \frac{1}{90}h^2\dot{h}_{,\alpha}\dot{h}^{,\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{g(h-h_0)^2}{2} . \qquad (6.14)$$

Оценим порядки добавочных членов. По основному предположению параметр $\beta = (h_0/l)^2$ мал. Будем считать также, что h_0 можно выбрать так, чтобы был малым параметр $\alpha = \max_{\Omega}(h-h_0)/h_0$.

Из оценок (6.3) и условия $l/\tau \sim \sqrt{gh_0}$ имеем

$$h_{,t} \sim \frac{h-h_0}{\tau} \sim \alpha\sqrt{\beta}\sqrt{gh_0}, h_{,\sigma} \sim \frac{h-h_0}{l} \sim \alpha\sqrt{\beta}, \Phi_{,\sigma} \sim \frac{\Delta\varphi}{l}\,\alpha\sqrt{gh_0}.$$

Поэтому в выражении для $\dot{h}$ можно пренебречь членом $\Phi^{,\sigma}h_{,\sigma}$ по сравнению с $h_{,t}$:

$$\dot{h} \approx h_{,t} .$$

Дополнительные члены в лагранжиане, связанные с учетом φ', имеют порядок не меньше $\alpha^2\beta gh_0^2$ и малы по сравнению с потенциальной энергией в поле сил тяжести $\frac{1}{2}g(h-h_0)^2 \sim \alpha^2 gh_0^2$. Следовательно, классическая теория мелкой воды действительно соответствует первому приближению к точной теории.

Из всех дополнительных членов главным является слагаемое $h h_{,t}^2 \approx \approx h_0 h_{,t}^2$. Сохраняя его, получаем второе приближение – приближение Буссинеска

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left[h \left(\Phi_{,t} + \frac{1}{2} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} \right) + \frac{g(h - h_0)^2}{2} - \frac{1}{6} h_0 h_{,t}^2 \right] dx^1 dx^2 dt \,. \quad (6.15)$$

Формализация вывода. Для придания изложенному уровня строгости формальных асимптотических разложений осталось определить понятия характерных длин и характерных величин изменения функций. Под $\Delta\varphi$ можно понимать максимальное колебание функции φ в области $\Omega \times [0, h] \times [t_0, t_1]$:

$$\Delta\varphi = \max\varphi - \min\varphi \,.$$

Наилучшую постоянную l в неравенствах

$$\sqrt{\varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}} \leqslant \frac{\Delta\varphi}{l} \,, \quad |\varphi_{,t}| \leqslant \frac{\sqrt{g h_0}}{l} \Delta\varphi$$

назовем характерной длиной изменения φ в продольном направлении.

Примем, что:

1) после замены переменных

$$y = x/h_0 \,, \quad y^\alpha = x^\alpha / l, \quad \theta = t/\tau$$

функция $\varphi / \sqrt{g h_0}\, l$ имеет предел $f(y, y^\alpha, \theta)$ при $\beta = (h_0/l)^2 \to 0$;

2) разность $\varphi / \sqrt{g h_0}\, l - f$ при $\beta \to 0$ стремится к нулю вместе со своими производными по y, y^α и θ.

Тогда при $\beta \to 0$.

$$\varphi_{,x} \to \frac{\sqrt{g h_0}\, l}{h_0} \frac{\partial f}{\partial y} \,, \quad \varphi_{,\alpha} \to \sqrt{g h_0} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \,, \quad \varphi_{,t} \to g h_0 \frac{\partial f}{\partial \theta} \,.$$

Так как $\partial f / \partial y$, $\partial f / \partial y^\alpha$ и $\partial f / \partial \theta$ одного порядка и не зависят от β, то формально главным в лагранжиане трехмерной теории является член $\frac{1}{2} \varphi_{,x}^2$. Отбрасывая формально малые члены, приходим к функционалу (6.4), и т.д.

Другие коротковолновые экстраполяции [1]. Приведем еще два варианта коротковолновых экстраполяций в приближении Буссинеска:

$$\Lambda = h \left(\Phi_{,t} + \frac{1}{2} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} - \frac{1}{6} h_{,t}^2 \right) + \frac{g(h - h_0)^2}{2} \,,$$
$$\Lambda = h \left(\Phi_{,t} + \frac{1}{2} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} - \frac{1}{6} \dot{h}^2 \right) + \frac{g(h - h_0)^2}{2} \,. \quad (6.16)$$

Совпадение с (6.15) в длинноволновом приближении следует из того, что разность, например, первого лагранжиана (6.16) и лагранжиана в (6.15) есть $(h - h_0) h_{,t}^2$ – величина, малая по сравнению с $h_0 h_{,t}^2$.

---

[1]) О понятии коротковолновой экстраполяции см. § 2.

§ 7. МОДЕЛИ ДИСПЕРСНЫХ СМЕСЕЙ

Механика дисперсных смесей изучает следующую задачу. В области V находятся две сплошные среды с разными свойствами. Область, занятая одной сплошной средой, связна, а область, занятая второй сплошной средой, состоит из большого числа связных компонент – "частиц". Первую среду называют непрерывной или несущей фазой, вторую – дискретной фазой. Дискретная фаза в свою очередь может состоять из частиц с различными физическими свойствами. Пусть указаны модели, описывающие непрерывную и дискретную фазы, и известны краевые и начальные данные. Тогда поведение системы полностью определено. Ясно, что при достаточно большом числе частиц задача в точной постановке практически неразрешима, и можно пытаться описать лишь некоторые средние характеристики движения. Составление и исследование уравнений для средних характеристик и есть предмет механики дисперсных смесей.

Механика дисперсных смесей напоминает по содержанию статистическую механику, однако является более сложной в силу более сложного характера взаимодействия между частицами. Например, в механике смесей только в весьма специальных случаях можно считать взаимодействие частиц парным. Как правило, сила, связанная с взаимодействием двух частиц, зависит от движения всех остальных частиц. Основная идеализация статистической механики, представляющая частицы как материальные точки, в механике смесей также обычно неприменима.

Феноменологический подход в механике дисперсных смесей основан на моделировании несущей и дискретной фазы двумя континуумами. Если бы континуумы не взаимодействовали, то составление уравнений, описывающих их движение, не представляло бы затруднений. Основная проблема заключается в описании взаимодействия. Взаимодействие континуумов обусловлено эффектами трех типов: инерционными эффектами, описываемыми кинетической энергией, "упругими" и обратимыми тепловыми эффектами, описываемыми внутренней энергией, и необратимыми эффектами, описываемыми диссипацией. Обычно необратимые эффекты типа стоксова сопротивления играют основную роль, и их описание, как и многих других "грубых" эффектов, не вызывает трудностей. Значительно сложнее охарактеризовать более тонкие инерционные взаимодействия. Единственным подходом к решению этой проблемы, если верить в то, что при отбрасывании членов, связанных с необратимостью, должны получиться уравнения с вариационной структурой, является вариационный подход. Описанию инерционных эффектов, основанных на вариационном подходе, посвящен настоящий параграф. Мы ограничиваемся рассмотрением инерционных эффектов в связи с тем, что в нем содержатся все основные особенности вариационного подхода; более полная теория, включающая необратимые процессы, имеется в работе [32].

Определяющие функции. Рассмотрим идеальную сжимаемую баротропную жидкость, содержащую большое число твердых частиц или пузырьков баротропного газа. Средний радиус частиц для жидкости с пузырьками может меняться со временем. Число частиц в единице объема достаточно мало, чтобы можно было пренебречь их соударениями.

Будем моделировать как непрерывную, так и дискретную фазы некоторыми континуумами. Лагранжевы координаты непрерывной фазы обозначим через ξ^a, дискретной фазы – через η^p. Малые латинские индексы a, b, c и p, q, r пробегают значения 1, 2, 3. В соответствии с тем, что координаты ξ и η преобразуются под действием разных групп, выбраны разные буквенные индексы (a, b, c) и (p, q, r) для обозначения проекций на сопутствующие оси первого и второго континуумов.

За независимые определяющие функции непрерывной фазы возьмем закон движения $x^i = x_1^i(\xi, t)$, за независимые определяющие параметры дискретной фазы – закон движения $x^i = x_2^i(\eta, t)$ и средний радиус частиц $a(\eta, t)$. Индексами 1,2 отмечаются величины, соответствующие непрерывной фазе и дискретной фазе.

Обозначим через d_1/dt и d_2/dt производные по времени соответственно при постоянных лагранжевых координатах ξ и η. Координаты ξ и η по условию вводятся так, что скорости непрерывной и дискретной фаз $v_1^i = dx_1^i(\xi, t)/dt$, $v_2^i = dx_2^i(\eta, t)/dt$ являются среднеобъемными скоростями.

Средний радиус a вычисляется по среднему объему частиц $|A|$ из формулы $|A| = \dfrac{4\pi}{3} a^3$.

В теории будут фигурировать также истинная плотность непрерывной фазы $\rho_1(\xi, t)$, истинная плотность дискретной фазы $\rho_2(\eta, t)$, число частиц в единице объема $n(\eta, t)$, объемная концентрация дискретной фазы

$$c = {}^4/_3\, \pi a^3\, n \tag{7.1}$$

и объемная концентрация непрерывной фазы $c_1 = 1 - c$. Для более симметричной записи формул объемная концентрация дискретной фазы обозначается также через c_2 ($c_1 + c_2 = 1$).

Число частиц считается неизменным

$$n \det \left\| \frac{\partial x_2^i}{\partial \eta^a} \right\| = f(\eta^a) . \tag{7.2}$$

Фазовые переходы жидкость $\leftrightarrow$ частицы не рассматриваются, поэтому сохраняется масса частиц

$$\rho_2\, {}^4/_3\, \pi a^3 = M_2(\eta) \tag{7.3}$$

и масса жидкости

$$\rho_1 c_1 \det \left\| \frac{\partial x_1^i}{\partial \xi^a} \right\| = M_1(\xi^a). \tag{7.4}$$

Правые части (7.2) – (7.4) – заданные функции сопутствующих координат.

Кинетическая и внутренняя энергия. Кинетическую энергию единицы объема K и внутреннюю энергию единицы объема U будем задавать,

опираясь на формулы

$$K = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \tfrac{1}{2}\rho' v_i' v'^i dv \equiv \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_1} \tfrac{1}{2}\rho_1' v_i' v'^i dv +$$

$$+ \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_2} \tfrac{1}{2}\rho_2' v_i' v'^i dv, \qquad (7.5)$$

$$U = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \rho' U' dv = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_1} \rho_1' U_1' dv + \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_2} \rho_2' U_2' dv.$$

Здесь ΔV – представительный объем, содержащий большое число частиц и много меньший макрообъема V, ΔV_1 и ΔV_2 части V, занятые непрерывной и дискретной фазами, штрихами отмечаются неосредненные микропараметры, $U_1'(\rho_1')$ и $U_2'(\rho_2')$ – плотность энергий единицы массы непрерывной и дискретной фаз[1]).

В соответствии с (7.5) естественно написать

$$K = \rho_1 c_1 K_1 + \rho_2 c_2 K_2, \quad U = \rho_1 c_1 U_1 + \rho_2 c_2 U_2. \qquad (7.6)$$

Здесь K_1, K_2, U_1, U_2 – кинетические и внутренние энергии единицы массы непрерывной и дискретной фаз.

Кинетическая энергия жидкой фазы K_1 складывается из кинетической энергии поступательного движения жидкости $\frac{1}{2} v_1^2$ и кинетической энергии $\bar{K}$, связанной с движением жидкости относительно частиц:

$$K_1 = \tfrac{1}{2} v_1^2 + \bar{K}. \qquad (7.7)$$

Естественно считать, что $\bar{K}$ есть квадратичная форма по относительной скорости частиц $v_2^i - v_1^i$ и скорости пульсаций:

$$2\bar{K} = \beta(v_1 - v_2)^2 + \gamma \dot{a}^2. \qquad (7.8)$$

Коэффициенты β и γ предполагаются известными функциями от c. Вычисление $\bar{K}$ в приближении идеальной жидкости при малых концентрациях приводит к следующим значениям коэффициентов β и γ: $\beta = \frac{1}{2} c$, $\gamma = 3c$. (см. пример 2 § 10 гл. III).

Учет вязкости связан с появлением дополнительных слагаемых, описывающих память. Форма этих слагаемых видна из соотношения (3.10.18). Дальше для простоты память не учитывается, и для кинетической энергии используется выражение (7.8).

Внутреннюю энергию непрерывной фазы U_1 будем считать известной функцией ρ_1:

$$U_1 = U_1(\rho_1). \qquad (7.9)$$

Как правило, можно принять, что U_1 совпадает с истинной внутренней энергией непрерывной фазы $U_1(\rho_1) = U_1'(\rho_1)$.

[1]) Напомним, что под плотностью энергии баротропного газа с уравнением состояния $p(\rho)$ понимается функция $U(\rho)$, определяемая уравнением $p(\rho) = \rho^2 dU/d\rho$.

Плотность кинетической энергии единицы массы частиц K_2 естественно определить формулой

$$K_2 = \tfrac{1}{2} v_2^2. \tag{7.10}$$

Внутренняя энергия дискретной фазы U_2 при отсутствии соударений сводится к собственной внутренней энергии частиц.

Это означает, что в случае недеформируемых твердых частиц $\rho_2 = \text{const}$, а для пузырьков газа

$$\rho_2 c_2 U_2 = \rho_2 c_2 U_2'(\rho_2) + 4\pi a^2 \sigma n, \tag{7.11}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Из (7.6) – (7.11) следует, что лагранжиан системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\Lambda = \rho_1 c_1 \Lambda_1 + \rho_2 c_2 \Lambda_2 , \\ &\Lambda_1 = \Lambda_1 (v_1^i, v_2^i, \dot{a}, a, n), \\ &\Lambda_2 = \Lambda_2 (v_2^i, a, n). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Основные соотношения выведем в общем случае для лагранжиана(7.12), не подразумевая специальные зависимости (7.6) – (7.11).

Вариационный принцип. Будем считать, что движение жидкости с частицами происходит в некотором неподвижном в пространстве сосуде V. Стенки сосуда непроницаемы как для жидкости, так и для частиц. Тогда система жидкость – частицы, находящаяся в сосуде V, является консервативной, и вариационное уравнение для всего объема сплошной среды переходит в условие стационарности действия

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \Lambda \, dv \, dt, \tag{7.13}$$

которое, согласно (7.12), можно представить в виде суммы действий, соответствующих непрерывной и дискретной фазам

$$I = I_1 + I_2 , \quad I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_1 c_1 \Lambda_1 \, dv \, dt, \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_2 c_2 \Lambda_2 \, dv \, dt . \tag{7.14}$$

Взаимодействие континуумов проявляется в том, что Λ_1 зависит от характеристик движения второго континуума $v_2^i, a, \dot{a}$, и n.

Выведем соответствующие уравнения Эйлера. Независимому варьированию подвергаются функции $x_1^i(\xi, t)$, $x_2^i(\eta, t)$ и $a(\eta, t)$. Вариации при постоянных ξ и η обозначим через δ_ξ и δ_η, вариации при постоянных эйлеровых координатах, как и раньше, – через ∂. Вариация закона движения $x_1^i(\xi\ t)$ вычисляется только при постоянных ξ, а вариация $x_2^i(\eta, t)$ – при постоянных η, поэтому индексы ξ и η не пишутся, и $\delta x_1^i \equiv \delta_\xi x_1^i$, $\delta x_2^i \equiv \equiv \delta_\eta x_2^i$. Аналогично при варьировании v_2^i, a, c, n при постоянных η и v_1^i, $c_1, \ldots$ при постоянных ξ, индексы η и ξ у вариаций опускаются. Они сохраняются только в тех случаях, когда вычисляется вариация при постоянных "чужих" лагранжевых координатах, например $\delta_\xi n$ или $\delta_\eta v_1^i$.

Пусть имеется некоторая функция эйлеровых координат $f(x, t)$. Ее можно рассматривать также как функцию лагранжевых координат непрерывной фазы $f(x, t) = f(x_1(\xi, t), t)$ и дискретной фазы $f(x, t) = f(x_2(\eta, t), t)$

Вариации $\delta_\xi f$, $\delta_\eta f$ и ∂f связаны соотношениями[1]) .

$$\delta_\xi f = f'(\xi, t) - f(\xi, t) = f'(x_1'(\xi, t), t) - f(x_1(\xi, t), t) = \partial f + \delta x_1^i \partial_i f,$$
$$\delta_\eta f = \partial f + \delta x_2^i \partial_i f. \quad \delta_\xi f = \delta_\eta f + (\delta x_1^i - \delta x_2^i) \partial_i f. \tag{7.15}$$

В частности, для a, $\dot{a}$ и v_2^i имеем

$$\delta_\xi a = \delta a + (\delta x_1^i - \delta x_2^i) \partial_i a,$$

$$\delta_\xi \dot{a} = \frac{d_2 \delta a}{dt} + (\delta x_1^i - \delta x_2^i) \partial_i \dot{a}$$

$$\delta_\xi v_2^i = \delta v_2^i + (\delta x_1^k - \delta x_2^k) \partial_k v_2^i = \frac{d_2 \delta x_2^i}{dt} + (\delta x_1^k - \delta x_2^k) \partial_k v_2^i$$

Формулы, аналогичные (7.15) имеют место для пересчета производных

$$\frac{d_1 f}{dt} = \frac{d_2 f}{dt} + (v_1^i - v_2^i) \partial_i f.$$

Для вариаций аргументов лагранжиана легко получить соотношения

$$\delta n = -n \partial_i \delta x_2^i, \quad \delta c = 4\pi a^2 n \delta a - c \partial_i \delta x_2^i,$$
$$\delta c_1 = -\delta_\xi c = -\delta c - (\delta x_1^i - \delta x_2^i) \partial_i c,$$

$$\delta \rho_2 = -\frac{3\rho_2}{a} \delta a, \quad \delta \rho_1 = -\rho_1 \partial_i \delta x_1^i - \frac{\rho_1}{c_1} \delta c_1.$$

В силу (7.4) и (7.1) – (7.3)

$$\delta I_1 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_1 c_1 \Lambda_1 d^3 x dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_1 c_1 \delta_\xi \Lambda_1 d^3 x \, dt, \tag{7.16}$$
$$\delta I_2 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_2 c_2 \Lambda_2 d^3 x \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho_2 c_2 \delta_\eta \Lambda_2 d^3 x \, dt.$$

Вариации лагранжианов фаз имеют вид

$$\delta_\xi \Lambda_1 = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_1^k} \frac{d_1 \delta x_1^k}{dt} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_2^k} \frac{d_2 \delta x_2^k}{dt} - \left(n \frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} + \rho_1 c c_1^{-1} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \rho_1} \right) \partial_i \delta x_2^i +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda_1}{\partial a} \delta a + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{a}} \frac{d_2 \delta a}{dt} - \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \rho_1} \rho_1 \partial_i \delta x_1^i +$$

$$+ 4\pi a^2 n \rho_1 c_1^{-1} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \rho_1} \delta a + \rho_1^{-1} c_1^{-1} F_i (\delta x_1^i - \delta x_2^i),$$

$$\delta_\eta \Lambda_2 = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial v_2^k} \frac{d_2 \delta x_2^k}{dt} - n \frac{\partial \Lambda_2}{\partial n} \partial_i \delta x_2^i + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial a} \delta a. \tag{7.17}$$

Здесь введено обозначение

$$\rho_1^{-1} c_1^{-1} F_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v_2^k} \partial_i v^k{}_2 + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} \partial_i n + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial a} \partial_i a + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{a}} \partial_i a + \rho_1 c_1^{-1} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \rho_1} \partial_i c.$$

[1]) Производные по x^i обозначаются через ∂_i .

Если лагранжиан непрерывной фазы представлен в форме

$$\Lambda_1 = K_1 (v_1, v_2, n, a, \dot{a}) - U_1 (\rho_1),$$

то выражение для F_i принимает простой вид

$$F_i = \rho_1 c_1 \left(\frac{\partial K_1}{\partial x^i} - \frac{\partial K_1}{\partial v_1^k} \partial_i v_1^k \right) - p \partial_i c,$$

где $p = \rho_1^2 \partial U_1 / \partial \rho_1$ – „истинное" давление в непрерывной фазе.

Система уравнений. После подстановки (7.17) в (7.16) и интегрирования по частям из условия стационарности действия получим систему уравнений:

уравнение импульсов непрерывной фазы

$$\partial_t J_1^i + \partial_k (J_1^i v_1^k) = \partial_k p_1^{ik} + F^i, \tag{7.18}$$

$$J^i{}_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{v}^i{}_1}, \quad p^{ik}{}_1 = -p_1 \delta^{ik}, \quad p_1 = c_1 p, \tag{7.19}$$

уравнение импульсов дискретной фазы

$$\partial_t J_2^i + \partial_k (J_2^i v_2^k) = \partial_k p_2^{ik} - F^i, \tag{7.20}$$

$$J_2^i = \frac{\partial \Lambda}{\partial v_2^i}, \quad p_2^{ik} = -p_2 \delta^{ik}, \quad p_2 = c_2 p - \rho_1 c_1 n \frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} - \rho_2 c_2 n \frac{\partial \Lambda_2}{\partial n}. \tag{7.21}$$

обобщенное уравнение Рэлея

$$\partial_t J_{(a)} + \partial_k (J_{(a)} v_2^k) = -4\pi a^2 n p + \rho_1 c_1 \frac{\partial \Lambda_1}{\partial a} + \rho_2 c_2 \frac{\partial \Lambda_2}{\partial a}, \quad J_{(a)} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{a}}. \tag{7.22}$$

Если непрерывная фаза несжимаема

$$\rho_1 = \rho_1 (\xi^a), \tag{7.23}$$

то уравнение $p = \rho_1^2 \partial U_1 / \partial \rho_1$ надо заменить на (7.23). Величина p становится дополнительной независимой искомой функцией и имеет смысл множителя Лагранжа для ограничения (7.23).

Рассмотрение ненулевых значений вариаций на границе области $V \times [t_0, t_1]$ показывает, что тензоры p_1^{ij} и p_2^{ij} „работают" на бесконечно малых перемещениях частиц соответственно первой и второй фазы δx_1^i и δx_2^i и потому имеют смысл компонент тензора напряжений. Векторы J_1^i и J_2^i „работают" на δx_1^i и δx_2^i в начальный и конечный моменты времени и, следовательно, являются импульсами фаз. Подчеркнем, что для смеси импульс фазы не совпадает с произведением плотности на скорость.

Перепишем полученные соотношения в рамках моделей с энергией (7.6) – (7.11).

Непрерывная фаза. Из (7.18), (7.19) получим:

1°. Импульс непрерывной фазы

$$J_1^i = \rho_1 c_1 (v_1^i + \beta (v_1^i - v_2^i)). \tag{7.24}$$

2°. Давление в непрерывной фазе

$$p_1 = c_1 p. \tag{7.25}$$

3°. Выражение для внедивергентной объемной силы взаимодействия непрерывной и дискретной фаз [1])

$$F^i = \rho_1 c_1 \left(\partial^i \bar{K} - \beta \left(v^k_1 - v^k_2\right) \partial^i v_{1k}\right) + p \partial^i c_1 . \tag{7.26}$$

4°. Уравнение неразрывности непрерывной фазы (следствие (7.4))

$$\partial_t (\rho_1 c_1) + \partial_k (\rho_1 c_1 v^k_1) = 0. \tag{7.27}$$

5°. Уравнение импульсов непрерывной фазы

$$\partial_t J^i_1 + \partial_k \left(J^i_1 v^k_1\right) = - \partial^i p_1 + F^i. \tag{7.28}$$

На основании (7.24) – (7.27) уравнение импульсов может быть переписано в следующей форме:

$$\rho_1 c_1 \frac{d_1}{dt} (v^i_1 + \beta (v^i_1 - v^i_2)) = -c_1 \partial^i p + \rho_1 c_1 \partial^i \bar{K} - \rho_1 c_1 \beta (v^k_1 - v^k_2) \partial^i v_{1k}. \tag{7.29}$$

Дискретная фаза. Имеем:

1°. Импульс дискретной фазы

$$J^i_2 = \rho_2 c_2 v^i_2 + \rho_1 c_1 \beta (v^i_2 - v^i_1). \tag{7.30}$$

2°. Давление дискретной фазы

$$p_2 = c_2 p - \rho_1 c_1 \left(c \frac{\partial \beta}{\partial c} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} + c \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{\dot{a}^2}{2}\right). \tag{7.31}$$

Если β и γ линейны по c, то формула (7.31) приобретает простой вид

$$p_2 = c_2 p - \rho_1 c_1 \bar{K}. \tag{7.32}$$

3°. Уравнение сохранения числа частиц (следствие (7.2))

$$\partial_t n + \partial_k (n v^k_2) = 0. \tag{7.33}$$

4°. Уравнение сохранения массы одной частицы (следствие (7.3))

$$\partial_t \left(\rho_2 \, {}^4/_3 \, \pi a^3\right) + v^k_2 \, \partial_k \left(\rho_2 \, {}^4/_3 \, \pi a^3\right) = 0. \tag{7.34}$$

5°. Уравнение неразрывности дискретной фазы (следствие (7.33) и (7.34))

$$\partial_t (\rho_2 c_2) + \partial_k (\rho_2 c_2 v^k_2) = 0. \tag{7.35}$$

6°. Уравнение импульсов дискретной фазы

$$\partial_t J^i_2 + \partial_k \left(J^i_2 v^k_2\right) = - \partial^i p_2 - F^i. \tag{7.36}$$

Рассмотрим упрощения, возникающие в уравнении импульсов в пределе малых концентраций, когда в уравнении сохраняются только члены порядка c. В этом случае β и γ линейны по c, а для давления верна

[1]) Термии „внедивергентная объемная сила" подчеркивает, что F^i – объемная сила, входящая в правую часть уравнения импульсов (7.18) в сумме с дивергенцией тензора напряжений, когда в левой частн уравнения фигурирует скорость изменения импульса. Обычно объемиую силу взаимодействия определяют при условии, что в левой части уравнения импульсов стоит произведение плотности на ускорение жидкости.

формула (7.32). Уравнение (7.36) приобретает форму

$$\rho_2 c_2 \frac{d_2 v_2^i}{dt} = -c_2 \partial^i p + \rho_1 c_1 \beta \left(\frac{d_2 v_1^i}{dt} - \frac{d_2 v_2^i}{dt} \right) +$$

$$+ (v_1^i - v_2^i) n \frac{d_2}{dt} \frac{\rho_1 c_1 \beta}{n} + \rho_1 c_1 \beta (v_1^k - v_2^k)(\partial^i v_{1k} - \partial_k v_1^i) + \bar{K} \partial^i \rho_1 c_1 . \quad (7.37)$$

В (7.37) можно положить $c_1 = 1, \beta = c/2$. Если, кроме того, непрерывная фаза несжимаема, то в (7.37) можно отбросить последнее слагаемое, а для производной от $\rho_1 \beta / n$ использовать равенство

$$n \frac{d_2}{dt} \frac{\rho_1 \beta}{n} = \rho_1 \beta \frac{3\dot{a}}{a},$$

справедливое при $\rho_1 = \text{const}, \beta = c/2$. В результате получим

$$\rho_2 c \frac{d_2 v_2^i}{dt} = -c \partial^i p + \rho_1 \frac{c}{2} \left(\frac{d_2 v_1^i}{dt} - \frac{d_2 v_2^i}{dt} \right) + (v_1^i - v_2^i) \frac{\rho_1 c}{2} \frac{3\dot{a}}{a} +$$

$$+ \rho_1 \frac{c}{2} (v_1^k - v_2^k)(\partial^i v_{1k} - \partial_k v_1^i) . \quad (7.38)$$

Учет сжимаемости несущей фазы связан с добавлением в правую часть (7.38) двух слагаемых

$$(v_1^i - v_2^i) \frac{c}{2} \frac{d\rho_1}{dt} + \bar{K} \partial^i \rho_1 . \quad (7.39)$$

7°. Обобщенное уравнение Рэлея

$$n \frac{d_2}{dt} \left(\rho_1 c_1 \frac{\gamma}{c} \frac{4}{3} \pi a^3 \dot{a} \right) = \frac{3}{2} c \left(p_r - p - \frac{2\sigma}{a} \right) + \rho_1 c_1 \frac{3}{a} c \frac{\partial \bar{K}}{\partial c} . \quad (7.40)$$

Здесь $p_r = \rho_2^2 \dfrac{dU_2}{d\rho_2}$ — давление в частице.

Если β и γ линейны по c, непрерывная фаза несжимаема и концентрации малы, то из (7.40) следует

$$\gamma \ddot{a} = \frac{3c}{\rho_1 a} \left(p_r - p - \frac{2\sigma}{a} \right) + \frac{3}{a} (\bar{K} - \gamma \dot{a}^2).$$

При $\beta = c/2, \gamma = 3c$ приходим к известному уравнению

$$\ddot{a} = \frac{1}{\rho_1 a} \left(p_r - p - \frac{2\sigma}{a} \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{4} (v_1 - v_2)^2 - \frac{3\dot{a}^2}{2} \right). \quad (7.41)$$

В сжимаемой жидкости в левую часть (7.41) добавится слагаемое

$$\dot{a} \frac{1}{\rho_1} \frac{d}{dt} \rho_1 .$$

Суммарное уравнение импульсов. Складывая уравнения (7.28) и (7.36), после простых преобразований с использованием (7.32) получим уравнение импульсов

$$\rho_1 c_1 \frac{d_1 v_1^i}{dt} + \rho_2 c_2 \frac{d_2 v_2^i}{dt} + \partial_k (\rho_1 c_1 \beta (v_1^i - v_2^i)(v_1^k - v_2^k)) =$$

$$= -\partial^i (p - \rho_1 c_1 \bar{K}). \qquad (7.42)$$

Обратим внимание на то, что третий член в левой части (7.42) связан с суммированием импульсов, и нет оснований включать его в суммарный тензор напряжений. Суммарное давление не сводится к истинному давлению в жидкой фазе p, а содержит также кинетическую энергию относительно движения и пульсаций частиц $\bar{K}$.

Суммарное уравнение импульсов можно переписать также, используя уравнения неразрывности фаз (7.27) и (7.35) в дивергентной форме

$$\partial_t (\rho_1 c_1 v_1^i + \rho_2 c_2 v_2^i) + \partial_k (\rho_1 c_1 v_1^i v_1^k + \rho_2 c_2 v_2^i v_2^k +$$

$$+ \rho_1 c_1 \beta (v_1^i - v_2^i)(v_1^k - v_2^k) + (p - \rho_1 c_1 \bar{K}) \delta_i^k) = 0,$$

из которой ясно, что, как и должно быть, выполняется закон сохранения суммарного импульса.

§ 8. МОДЕЛЬ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ

Продемонстрируем вариационный метод построения моделей еще на одной проблеме – проблеме построения теории зернистых сред. Здесь в рамках принятых допущений вариационный метод также является, по-существу, единственным методом построения уравнений.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из очень большого числа хаотически упакованных одинаковых абсолютно твердых сферических частиц. Частицы заполняют сосуд V и образуют в нем плотную упаковку, т.е. такую упаковку, объемную концентрацию частиц в которой нельзя уменьшить бесконечно малыми перемещениями их центров [1]). Частицы взаимодействуют только посредством нормальных контактных сил; силы трения не учитываются. Система находится в поле внешних объемных сил, кроме того, внешние силы могут быть приложены к части ∂V_p границы области V Остальная часть границы ∂V_w непроницаема для частиц. Будем рассматривать только малые отклонения от состояния равновесия.

Естественно моделировать частицы некоторой сплошной средой, заполняющей объем V Перемещения сплошной среды w^i можно считать бесконечно малыми, так что вся последующая теория является геометрически линейной.

Рассматриваемая среда обладает специальными свойствами. Во-первых, при деформации из начального состояния (плотной упаковки) она не может уменьшить свой объем. Во-вторых, если в среде происходит бесконечно

[1]) Это следует понимать как макроскопическое выражение того факта, что для плотно упакованной сыпучей среды мера множества микроперемещений, приводящих к уменьшению объема, близка к нулю.

малый сдвиг, описываемый девиатором тензора деформаций $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_k^k \delta_{ij}$, то в силу чисто геометрических причин (частицы из состояния плотной упаковки переходят в неплотно упакованное состояние) сдвиг порождает разрыхление среды, увеличение ее объема, поэтому след тензора деформаций, характеризующий относительное изменение объема, есть некоторая функция от γ_{ij}:

$$\epsilon_i^i = \theta\,(\gamma_{ij}). \tag{8.1}$$

Функцию $\theta\,(\gamma_{ij})$ можно найти из статистической теории случайных упаковок. При малых γ_{ij} можно принять, что

$$\theta = \mu\gamma_{ij}\gamma^{ij} = \mu\,(\epsilon_{ij}\epsilon^{ij} - \tfrac{1}{3}(\epsilon_k^k)^2), \tag{8.2}$$

где μ – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от объемной концентрации плотной упаковки.

Кроме относительного изменения объема, вызванного сдвигом, допустимо независимое расширение среды за счет „разлета" частиц. Поэтому допустимые поля перемещений подчиним кинематическому ограничению

$$\epsilon_i^i \geqslant \theta\,(\gamma_{ij}). \tag{8.3}$$

Плотность внутренней энергии системы абсолютно твердых частиц равна, очевидна, нулю, и функционал энергии системы сведется к работе внешних сил

$$I = -\Big(\int\limits_V F_i w^i\,dv + \int\limits_{\partial V_p} P_i\,w^i\,d\sigma\Big). \tag{8.4}$$

Положения равновесия есть точки минимума функционала (8.4) при условии, что допустимые поля перемещений удовлетворяют ограничению (8.3), а также условию непроницаемостн части ∂V_w границы области

$$w^i n_i \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial V_w. \tag{8.5}$$

Здесь n_i – нормаль к ∂V_w, направленная в сторону, внешнюю к V.

Вариационная задача (8.3) – (8.5) корректно поставлена не для всех внешних сил; необходимым условием существования статического решения является ограниченность снизу функционала (8.4) на полях перемещений, подчиненных условиям (8.3) и (8.5).

Допустим, что функционал (8.4) ограничен снизу, и построим уравнения, которым удовлетворяет минимизирующий элемент.

Вводя множители Лагранжа p и P для ограничений (8.3) и (8.5), перепишем вариационную задачу как минимаксную

$$\inf_{w\in(8.3),(8.5)} I = \inf_{w}\sup_{\substack{p\geqslant 0\\ P\geqslant 0}}\Big[\int\limits_V (-F_i w^i + p(\theta\,(\gamma_{ij}) - \epsilon_i^i))\,dv -$$

$$- \int\limits_{\partial V_p} P_i\,w^i d\sigma + \int\limits_{\partial V_w} P w^i n_i\,d\sigma\Big].$$

Изменяя последовательность нахождения нижней и верхней граней, приходим к уравнениям

$$p^{ij}_{,j} + F^i = 0 \text{ в } V, \quad p^{ij} n_j = P^i \text{ на } \partial V_p, \; p^{ij} n_j = -Pn^i, P \geqslant 0 \text{ на } \partial V_w, \tag{8.6}$$

$$p^{ij} = -p\delta^{ij} + \tau^{ij}, \tau^{ij} = p\,\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_{ij}}, p \geqslant 0. \tag{8.7}$$

Уравнения (8.6) представляют обычные уравнения равновесия и краевые условия сплошной среды. Однако уравнения состояния сплошной среды (8.7) не вполне обычны: множитель Лагранжа – давление p – входит в уравнение состояния для девиатора напряжений τ^{ij}. Если, например, $\theta = \mu\gamma_{ij}\gamma^{ij}$, то девиатор напряжений, как и в линейно упругом теле, пропорционален девиатору деформаций γ^{ij}: $\tau^{ij} = 2\mu p\gamma^{ij}$, однако соответствующий „модуль сдвига" оказывается линейно зависящим от давления. Это вполне соответствует физике явления – при увеличении всестороннего давления модуль сдвига сыпучей среды должен увеличиваться, а при нулевом давлении сыпучая среда „не держит" касательных напряжений.

Формулы (8.7) предсказывают следующий эффект. Если функция θ зависит только от второго инварианта девиатора деформации $\gamma(\gamma = (\gamma_{ij}\gamma^{ij})^{1/2})$ и имеет точку перегиба γ_*, в которой вторая производная $d^2\theta/d\gamma^2$ меняет знак, то в точке γ_* отношение τ/p (τ – второй инвариант τ^{ij}) достигает максимального значения. Этот эффект наблюдается экспериментально.

§ 9. ПРОБЛЕМА ОСРЕДНЕНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ КОНТИНУУМОВ

Постановка проблемы. Многие статические задачи механики и физики могут быть сформулированы как задачи о нахождении стационарных точек функционалов вида

$$I = \int_V \Lambda(a^\kappa, u^\kappa, u^\kappa_{,i})\, d^3x - \int_{\partial V} P \cdot u \, d\sigma, \tag{9.1}$$

где V – область в трехмерном пространстве [1], $u^\kappa(x^i)$ – полевые функции [2], a^κ – физические характеристики среды, $P \cdot u = P_\kappa u^\kappa, P_\kappa$ – внешние „поверхностные силы"; индексы в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, дальше опускаются. Если физические характеристики среды меняются от частицы к частице и характерный масштаб ϵ изменения функций a значительно меньше характерного размера области V, то говорят, что среда микронеоднородна. Численное решение задачи для микронеоднородных сред нереально не только из-за ограниченных возможностей ЭВМ, но и в связи с тем, что обычно отсутствует полная информация о микроструктуре. Поэтому возникает проблема осредненного описания.

Проблема осреднения имеет большую историю, однако только в последние годы была осознана ее асимптотическая природа, и дана соответствующая

---

1) Дальнейшее не зависит от числа переменных x^i, поэтому можно считать, что V – область в R_n.

2) Во избежание недоразумений напомним еще раз, что греческая буква κ (каппа) и близкая по начертанию латинская буква k пробегают разное число значений.

математическая постановка (см. [6] и работы, процитированные в обзоре [94]). В вариационных терминах постановка проблемы осреднения заключается в следующем.

Введем вспомогательное трехмерное пространство R_y так называемых быстрых переменных y, которые будем считать безразмерными. Пусть в R_y заданы функции $a(y)$, характерный масштаб изменения которых есть единица. Положим в (9.1) $a = a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ и рассмотрим предельный переход $\epsilon \to 0$. Если стационарные точки $\breve{u}_\epsilon$ функционала (9.1) сходятся (в некотором смысле) к функциям $\breve{v}(x)$, не зависящим от ϵ, и $\breve{v}(x)$ есть стационарные точки функционала

$$\bar{I} = \int_V \bar{\Lambda}(v, v_{,i})\, d^3x - \int_{\partial V} \bar{P} v\, d\sigma, \tag{9.2}$$

то будем говорить, что функционал (9.2) представляет результат осреднения функционала (9.1), а $\breve{v}$ есть средние от поля $\breve{u}$.

Независимость $\breve{v}$ от ϵ означает, что для достаточно малых ϵ характерный масштаб изменения функций $\breve{v}$ гораздо больше ϵ, что согласуется с обычным представлением о средних характеристиках, используемом в физике.

Задание функций $a(y)$ означает задание реализации микроструктуры. Проблема осреднения заключается в описании реализаций или классов реализаций, для которых возможен переход от (9.1) к (9.2), и в построении функционала (9.2) по функционалу (9.1).

Важный пример сред с микроструктурой – периодические структуры, у которых функции $a(y)$ – периодические функции координат y.

Случайные структуры характеризуются тем, что задается ансамбль микроструктур, определяемый функциями $a(y, \omega)$, зависящими от параметра ω („номера" реализации). Параметр ω принимает значения в некотором множестве Ω. Кроме того, указывается „вес" различных реализаций в ансамбле, что выражается заданием вероятностной меры μ на Ω. Стационарные точки функционала (9.1) $\breve{u}$ зависят от реализации: $\breve{u} = \breve{u}(x, \omega)$. Согласно общему определению [230] $a(y, \omega)$ и $\breve{u}(x, \omega)$ являются случайными полями. Дальше будет видно, что осреднение проводится фактически для каждой реализации. При этом $\bar{\Lambda}$, вообще говоря, также зависит от реализации.

В проблеме осреднения случайных структур большой интерес представляет конструирование ансамблей микроструктур, для которых $\bar{\Lambda}$ не зависит от реализации микроструктуры, и фактическое вычисление $\bar{\Lambda}$.

В этом параграфе будут построены вариационные задачи для вычисления осредненного лагранжиана $\bar{\Lambda}$ по известной реализации $a(y)$ и „микролагранжиану" Λ.

Осреднение периодических структур. Рассмотрим в пространстве R_y решетку, образованную векторами $\underset{\rightarrow}{\tau}_{(p)}$ $(p = 1,2,3)$ с координатами узлов $n^p \tau^i_{(p)}$. Каждому узлу решетки с координатами $n^p \tau^i_{(p)}$ (n^p – целые числа) поставим в соответствие ячейку B_n – параллелепипед, натянутый на векторы $\tau_{(p)}$, центр которого находится в точке $n^p \tau^i_{(p)}$. Ячейка B_0 обозначается также через B. Векторы обратной решетки обозначим через $\underset{\rightarrow}{\tau}^{(p)}$ (номер вектора обратной решетки пишется сверху). Они определяются по $\underset{\rightarrow}{\tau}_{(p)}$

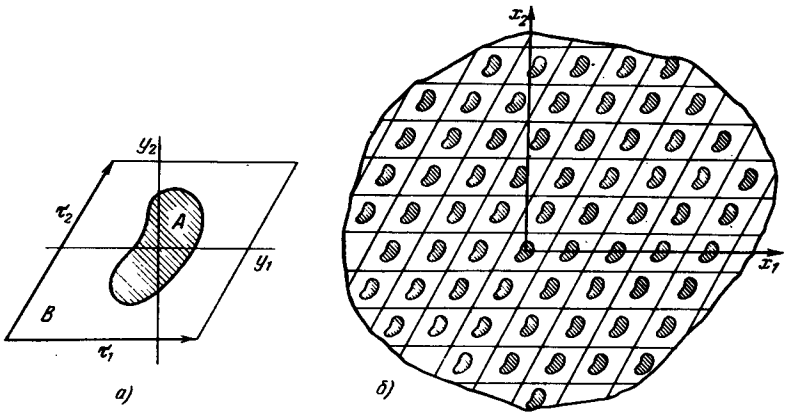


Рис. 55.

из уравнений: $\tau^i_{(p)}\tau^{(q)}_i = \delta^q_p$ или $\tau^i_{(p)}\tau^{(p)}_j = \delta^i_j$. Координаты обратной решетки $y^{(p)}$ связаны с координатами y^i равенствами $y^{(p)} = \tau^{(p)}_i y^i$, $y^i = \tau^i_{(p)} y^{(p)}$ и изменяются в единичном кубе $|y^{(p)}| \leqslant {}^1/_2$.

Функции $a(y)$ определяются своими значениями в ячейке, а вне ее продолжаются по периодичности. Функция $a(y)$ могут быть кусочно непрерывными, в частности на противоположных гранях ячейки B значения $a(y)$ не обязательно совпадают. Важный случай кусочно непрерывных функций $a(y)$ — кусочно постоянные функции, которые в некоторой подобласти A ячейки B (включении) принимают значение a_2, а в $B - A$ (матрице) — значение a_1 (см. рис. 55, *а*, в x-пространстве при некотором малом но конечном ϵ ячейке 55, *а* соответствует тело с микроструктурой, изображенной на рис. 55, *б*).

Проблема осреднения заключается в исследовании функционала, зависящего от малого параметра ϵ,

$$\int_V \Lambda\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right), u, u_{,i}, \epsilon\right) d^3x - \int_{\partial V} P \cdot u \, d\sigma. \tag{9.3}$$

В (9.3) введена также явная зависимость лагранжиана от малого параметра ϵ. Эта зависимость обычно моделирует присутствие среди характерных масштабов модели масштабов, сравнимых с периодом ячейки. Например, для лагранжиана $\Lambda = u_{,i}u^{,i} + au^2$ коэффициент a имеет вид $a = k/l^2$, где k — безразмерная постоянная, а l — постоянная, имеющая размерность длины, — некоторая физическая характеристика модели. Если в исследуемой задаче масштаб l имеет порядок шага решетки ϵ, то в предельном переходе $\epsilon \to 0$ масштаб l также надо устремить к нулю; при этом возникает явная зависимость лагранжиана от параметра ϵ.

Будем искать минимизирующий элемент функционала (9.3) в классе функций вида

$$u = u\left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon\right), \tag{9.4}$$

где функции $u(y, x, \epsilon)$ являются периодическими по y с периодами $\tau_{(p)}$.

Для производных функций u вида (9.4) имеем

$$u_{,i} = \frac{1}{\epsilon} u_{|i} + \partial_i u,$$

где вертикальной чертой в индексах отмечается дифференцирование по y^i, а через ∂_i обозначено дифференцирование по x^i при фиксированных y^i. В первом приближении $u_{,i} = \frac{1}{\epsilon} u_{|i}$, поэтому функционал (9.4) можно заменить функционалом

$$\int_V \Lambda\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right), u, \frac{1}{\epsilon} u_{|i}, \epsilon\right) d^3x - \int_{\partial V} P_{\{} u d\sigma. \qquad (9.5)$$

Рассмотрим отображение $y \to x : x^i = \epsilon y^i$. При этом отображении ячейки B_n пространства R_y переходят в некоторые ячейки $\widetilde{B}_n$ со стороной порядка ϵ в области V. Объемный интеграл в (9.5) можно переписать в виде суммы интегралов по ячейкам

$$\int_V \Lambda\, d^3x = \sum_n \int_{\widetilde{B}_n} \Lambda\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right), u\left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon\right), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}\left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon\right), \epsilon\right) d^3x. \qquad (9.6)$$

В сумму включены ячейки, которые при заданном малом значении ϵ целиком попадают в V. Интегралы по ячейкам, примыкающим к границе и частично попадающим в V, могут быть опущены, так как таких ячеек мало (порядка $1/\epsilon^2$ по сравнению с общим числом $1/\epsilon^3$), и они дают малый вклад в (9.6).

В каждом интеграле по ячейке $\widetilde{B}_n$ можно пренебречь зависимостью u от медленной переменной, при этом

$$\int_{\widetilde{B}_n} \Lambda d^3x = \epsilon^3 \int_{B_n} \Lambda\left(a(y), u(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon\right) d^3y.$$

В силу периодичности по y интеграл по B_n можно заменить на интеграл по B.

Сумма (9.6) является интегральной, и первое слагаемое в (9.5) можно записать в форме

$$\int_V \Lambda d^3x = \int_V \left(\frac{1}{|B|} \int_B \Lambda\left(a(y), u(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon\right) d^3y \right) d^3x. \qquad (9.7)$$

Примем, что $\Lambda\left(a^\kappa, u^\kappa, \frac{1}{\epsilon} u^\kappa{}_{|i}, \epsilon\right) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$.

Тогда поверхностный интеграл в (9.5) можно отбросить, и функционал примет вид (9.7).

Отыскание стационарных точек функционала (9.7) сводится к отысканию стационарных точек функционала на ячейке

$$\frac{1}{|B|} \int_B \Lambda(a(y), u(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon)\, d^3y \qquad (9.8)$$

на множестве периодических по y функций u. Аргумент x входит в эту задачу как параметр.

Дальнейшее существенно зависит от того, как устроены при $\epsilon \to 0$ стационарные точки функционала (9.8).

Разберем случай, когда стационарные точки функционала (9.8) являются константами (не зависят от y). Типичный лагранжиан, для которого это имеет место, – лагранжиан квазилинейного эллиптического уравнения $\Lambda = a^{ij}(y, u)\, u_{,i}\, u_{,j}$ с положительно определенной матрицей a^{ij}.

Для лагранжианов, обладающих указанным свойством, стационарные точки функционала (9.3) в первом приближении не зависят от быстрых переменных: $u = v(x)$. Функции $v(x)$ пока произвольны. Они образуют множество $\mathcal{M}_0$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода.

Фиксируем v и будем искать решение в виде

$$u = v + u'(y, x, \epsilon), \tag{9.9}$$

где u' периодичны по y и в асимптотическом смысле меньше v. Не ограничивая общности, u' можно подчинить условиям

$$\langle u' \rangle = 0, \quad \langle \cdot \rangle = \frac{1}{|B|} \int_B \cdot\, d^3 y. \tag{9.10}$$

При этом v приобретают смысл среднего по ячейке от поля u

$$v(x, \epsilon) = \langle u(y, x, \epsilon) \rangle. \tag{9.11}$$

Подстановка (9.9) в функционал (9.5) и отбрасывание члена $\partial_i u'$, малого по сравнению с $\frac{1}{\epsilon} u'_{|i}$, дает

$$\int_V \Lambda\left(a, v + u', v_i + \frac{1}{\epsilon} u_{|i}', \epsilon\right) d^3 x - \int_{\partial V} P(v + u')\, d\sigma. \tag{9.12}$$

Здесь $v_i \equiv v_{,i}$. Величины u' во втором аргументе Λ и в работе внешних сил можно отбросить, как малые по сравнению с v. Аналогично предыдущему, определение u' сводится к отысканию стационарных точек функционала на ячейке

$$\frac{1}{|B|} \int_B \Lambda\left(a(y), v, v_i + \frac{1}{\epsilon} u_{|i}', \epsilon\right) d^3 y \tag{9.13}$$

на множестве периодических функций u', удовлетворяющих условию (9.10). В (9.13) v и v_i – некоторые постоянные параметры (они не зависят от быстрых переменных). Функционал (9.13) инвариантен относительно сдвигов по u' на постоянную, поэтому ограничение (9.10) не влияет на стационарные значения функционала и нужно только для определения u'

Если лагранжиан Λ не зависит явно от ϵ, то замена $u' \to \psi : u' = \epsilon \psi$ переводит функционал (9.13) в функционал, не зависящий от ϵ:

$$\frac{1}{|B|} \int_B \Lambda(a(y), v, v_i + \psi_{|i}) d^3 y. \tag{9.14}$$

Стационарные точки $\check{\psi}$ не зависят от ϵ, и первые два члена разложения u по ϵ имеют вид

$$u = v(x) + \epsilon \check{\psi}(y, v, v_i), \tag{9.15}$$

где $\check{\psi}$ – периодические функции y, которые зависят от медленных переменных x через v и v_i.

Будем считать, что $\check{\psi}$ – единственная стационарная точка функционала (9.14). Тогда второй член разложения полностью определяется по первому, и множество $\mathcal{N}$ в общей схеме вариационно-асимтотического метода совпадает с $\mathcal{M}_0$.

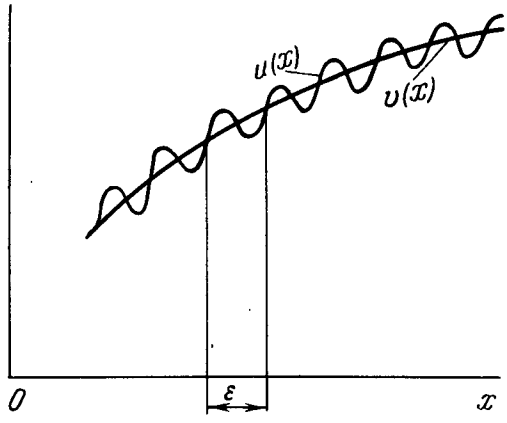


Рис. 56.

Обозначим значение функционала (9.14) в стационарной точке через $\bar{\Lambda}$. Величина $\bar{\Lambda}$ есть функция v и v_i.

В первом приближении справедливы равенства

$$\int_V \Lambda \, d^3x = \int_V \left(\frac{1}{|B|} \int_B \Lambda \, d^3y \right) d^3x = \int_V \bar{\Lambda}(v(x), v_i(x)) \, d^3x.$$

Можно показать, что следующие члены в разложении (9.15) вносят малый вклад в функционал, поэтому нахождение v сводится к определению стационарных точек функционала [1])

$$\bar{I} = \int_V \bar{\Lambda}(v, v_{,i}) \, d^3x - \int_{\partial V} P \cdot v \, d\sigma. \tag{9.16}$$

Итак, решение проблемы осреднения заключается в решении задачи на ячейке – задачи о построении стационарной точки функционала (9.14). Осредненный функционал (9.16) восстанавливается по решению задачи на ячейке.

Согласно (9.15) поле u при $\epsilon \to 0$ стремится к своему объемному среднему v. Для производных $u_{,i}$ это не имеет места: в силу (9.15)

$$u_{,i} = v_{,i} + \check{\psi}_{|i}. \tag{9.17}$$

Таким образом, для вычисления поля u в первом приближении при известном $\bar{\Lambda}$ достаточно решить осредненную задачу, для вычисления производных $u_{,i}$ в первом приближении необходимо знать также решение задачи на ячейке. Качественно характер построенной асимптотики изображен на рис. 56: на медленно изменяющееся поле $v(x)$ накладываются малые

[1]) Чертой над буквами отмечаются средние характеристики; верхняя грань функционала, также обозначаемая через $\bar{I}$, дальше не встречается. Величины $v_{,i} \equiv v_i$ пишутся с запятой в индексах в равенствах, в которых они имеют смысл производных функций v, и без запятой, если они рассматриваются как постоянные параметры задачи на ячейке.

периодические осцилляции. Из рис. 56 видно, что малые осцилляции существенны для вычисления производных поля $u(x)$. В силу периодичности ψ по y средние по объему от $u_{,i}$ совпадают с $v_{,i}$:

$$\langle u_{,i} \rangle = v_{,i}.$$

Если интересоваться только средними полями v, то нет необходимости полностью решать задачу не ячейке, достаточно найти значение функционала (9.14) в его стационарной точке. Во всех рассматриваемых дальше частных задачах функционал (9.14) является строго выпуклым функционалом по ψ, поэтому $\bar{\Lambda}$ есть нижняя грань функционала (9.14)

$$\bar{\Lambda}(v, v_i) = \inf_{\psi} \frac{1}{|B|} \int_B \Lambda(a(y), v, v_i + \psi_{|i}) d^3 y \tag{9.18}$$

на множестве периодических функций ψ. Формула (9.18) может служить источником для приближенных подходов к определению $\bar{\Lambda}$, в частности для получения оценок $\bar{\Lambda}$ сверху.

Построим двойственную вариационную задачу: Обозначим через [1]) $p_\kappa{}^i$ переменные, двойственные к $u,^\kappa{}_i$, через Λ^* – преобразование Юнга – Фенхеля функции $\Lambda(a^\kappa, u^\kappa, u^\kappa{}_{,i})$ по $u^\kappa{}_{,i}$. Запишем вариационную задачу (9.18) в виде минимаксной задачи:

$$\Lambda = \inf_{\psi^\kappa} \langle \Lambda \rangle = \inf_{\psi^\kappa} \sup_{p_\kappa^i} \langle p_\kappa^i (v_i^\kappa + \psi^\kappa_{|i}) - \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, p_\kappa^i) \rangle.$$

Очевидно, что к сравнению достаточно допустить только те функции $p^i{}_\kappa$, для которых на всех периодических функциях ψ^κ выполняется равенство $\langle p^i{}_\kappa \, \psi^\kappa{}_{|i} \rangle = 0$. Оно эквивалентно условиям

$$p_\kappa^i{}_{|i} = 0, \qquad [p_\kappa^i]_{(s)} \nu_{(s)}^i = 0. \tag{9.19}$$

Символом $[A]_{(s)}$ обозначается разность значений величины A на противоположных гранях ячейки: $[A]_{(s)} = A|_{y(s)=\frac{1}{2}} - A|_{y(s)=-\frac{1}{2}}$, $\nu^i_{(s)}$ – вектор внешней единичной нормали к грани $y^{(s)} = 1/2$.

Следовательно,

$$\bar{\Lambda}(v^\kappa, v^\kappa{}_i) = \sup_{p^i{}_\kappa} (\langle p^i{}_\kappa \rangle v^\kappa{}_i - \langle \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, p_\kappa^i) \rangle), \tag{9.20}$$

где верхняя грань ищется по всем $p^i{}_\kappa$, удовлетворяющим ограничениям (9.19).

Двойственную вариационную задачу можно переписать также в другой весьма изящной форме, если ввести в рассмотрение функцию $\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}^i_\kappa)$ – преобразование Юнга – Фенхеля функции $\bar{\Lambda}(v^\kappa, v^\kappa{}_i)$ по $v^\kappa{}_i$:

$$\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}^i_\kappa) = \sup_{v^\kappa_i} [\bar{p}^i_\kappa v_i^\kappa - \bar{\Lambda}(v^\kappa, v_i^\kappa)]. \tag{9.21}$$

[1]) При записи двойственной задачи восстановлен индекс κ с тем, чтобы было яснее видно число двойственных переменных и соответствующих ограничений.

Отыскивая верхнюю грань по $p^i{}_\kappa$ в (9.20) последовательно, сначала максимизируя по всем $p^i{}_\kappa$, удовлетворяющим условиям (9.19) и дополнительному условию $\langle p^i{}_\kappa \rangle = \bar{p}^i{}_\kappa$, а затем по всем $\bar{p}^i{}_\kappa$, получим искомую формулу

$$\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}^i{}_\kappa) = \inf_{\substack{p^i{}_\kappa \in (9,19), \\ \langle p^i{}_\kappa \rangle = \bar{p}^i{}_\kappa}} \langle \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, p^i{}_\kappa) \rangle \tag{9.22}$$

При помощи формул (9.18) и (9.20), (9.22) можно строить двусторонние оценки $\bar{\Lambda}$.

В линейных задачах, когда Λ есть квадратичная форма

$$\Lambda = a^{ij}{}_{\kappa\kappa'} u^\kappa{}_{,i} u^{\kappa'}{}_{,j} + a^i{}_{\kappa\kappa'} u^\kappa{}_{,i} u^{\kappa'} + a_{\kappa\kappa'} u^\kappa u^{\kappa'},$$

задача на ячейке также линейна, при этом v^κ и v^κ_i линейно входят в уравнения и краевые условия. Следовательно $\check{\psi}^k$ линейно зависят от v^k и $v^k{}_i$, осредненный лагранжиан $\bar{\Lambda}$ также является квадратной формой по v^k и $v^k{}_i$. Таким образом, при осреднении линейных уравнений снова получаются линейные уравнения, но уже с некоторыми постоянными "эффективными" коэффициентами. Иначе обстоит дело при осреднении нелинейных уравнений; после осреднения могут получаться уравнения, по форме совершенно не похожие на исходные уравнения.

На вид окончательных формул (9.14) – (9.22) существенно повлияли два предположения: 1) стационарные точки функционала (9.8) являются константами и 2) лагранжиан Λ не зависит явно от ϵ. Обсудим кратко, что получается при отказе от этих предположений.

Отличие стационарных точек функционала (9.8) от постоянных означает, что главный член в разложении u^κ по ϵ будет зависеть от быстрой переменной. Это может быть, например, в задачах с условием Дирихле на границе включений [1]) (см. [29, 378]. где разобрана задача о течении вязкой жидкости в пористой среде). В качестве другого примера можно привести задачу об эффективном стержне в теории пружин [41, 224].

Если лагранжиан Λ зависит явно от ϵ, то при переходе от (9.13) к (9.14) сохранится зависимость от ϵ функционала, и, следовательно, стационарной точки $\check{\psi}^\kappa$. Поэтому может измениться порядок u'^κ по ϵ.

Исследование подобных задач проводится по изложенной схеме, однако окончательные формулы зависят от конкретного вида лагранжиана.

Осреднение случайных структур. Проведенное рассмотрение почти дословно переносится на случайные структуры. Начнем с определения средних по объему.

Обозначим через B единичный куб в пространстве R_y с центром в начале координат, через λB – куб с центром в начале координат и с длиной стороны λ. Пусть в пространстве R_y определена функция $f(y)$ и для любого постоянного вектора c существует не зависящий от c предел

$$\langle f \rangle = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda B} f(y + c)\, d^3 y.$$

[1]) Хотя выше задачи с условиями Дирихле специально не упоминались, формально они содержатся в изложенном, если положить $\Lambda = a\,(u_\kappa u^\kappa + u^\kappa{}_{,i} u_\kappa{}^i)$ при $y \in A$ и рассмотреть предельный переход $a \to \infty$.

Он называется средним по объему от $f(y)$. Для дальнейшего удобно несколько сузить это определение и считать, что в него входят, помимо постоянных векторов c, также зависящие от λ векторы вида $\lambda \cdot c$.

Рассмотрим непрерывную функцию быстрой и медленной переменных $f(x, y)$, для которой при каждом x определено среднее по объему $\langle f(y, x) \rangle$. Справедливо равенство

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_V f\left(\frac{x}{\epsilon}, x\right) d^3x = \int_V \langle f(y, x) \rangle \, d^3x. \tag{9.23}$$

Для доказательства разобьем область V на кубики $\widetilde{B}_n$ с ребром Δ, причем Δ столь мало, что в каждом кубике можно считать функцию $f\left(\frac{x}{\epsilon}, x\right)$ постоянной по второму аргументу. Поскольку при $\Delta \gg \epsilon$

$$\int_{\widetilde{B}_n} f\left(\frac{x}{\epsilon}, x\right) d^3x \approx \Delta^3 \left(\frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda B} f\left(y + \lambda \frac{x_n}{\Delta}, x\right) d^3y \right) \approx$$

$$\approx \langle f(y, x) \rangle \, \Delta^{*3},$$

где сделана замена переменных $\frac{x - x_n}{\epsilon} = y$, x_n – центр куба B_n и $\lambda = \Delta/\epsilon$, имеет место равенство (9.23). Ясно, что условие непрерывности функции $f(y, x)$ несущественно – необходимо лишь, чтобы были определены все операции в (9.23).

Пусть $a(y)$ – некоторая реализация микроструктуры. Будем искать решение в виде $u = u\left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon\right)$, где функции $u(y, x, \epsilon)$ определены по y во всем пространстве R_y. В первом приближении $u_{,i} = \frac{1}{\epsilon} u_{|i}$, и объемный интеграл в (9.3) согласно (9.23) принимает форму

$$\int_V \left\langle \Lambda_0 \left(a(y), u(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon \right) \right\rangle d^3x. \tag{9.24}$$

Здесь под Λ_0 понимается часть лагранжиана Λ, которая содержит лишь главные в асимптотическом смысле члены. Кроме того, подразумевается, что реализации микроструктуры $a(y)$ и допустимые поля $u(y, x, \epsilon)$ таковы, что $\langle \Lambda_0 \rangle$ существует.

Пусть $\Lambda_0 \left(a, u, \frac{1}{\epsilon} u_{|i}, \epsilon \right) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$. Тогда в первом приближении работу поверхностных сил в (9.3) можно отбросить. Отыскание стационарных точек функционала (9.24) в первом приближении сводится к отысканию стационарных точек функционала на ячейке

$$\left\langle \Lambda_0 \left(a(y), u(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} u_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon \right) \right\rangle. \tag{9.25}$$

Аргумент x входит в этот функционал как параметр.

Как и в случае периодических структур, дальнейшее существенно зависит от того, как устроены стационарные точки функционала (9.25). В этом

пункте будут рассмотрены лагранжианы, для которых стационарные точки функционала (9.25) есть константы. Все сказанное относительно других лагранжианов в случае периодических структур справедливо и для случайных структур.

Поскольку стационарные точки функционала (9.25) есть константы, функции u в первом приближении не зависят от быстрых переменных: $u = v(x)$. Функции $v(x)$ образуют множество $\mathcal{M}_0$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода.

Фиксируем v и будем искать решение в виде

$$u = v + u'(y, x, \epsilon), \tag{9.26}$$

где u' в асимптотическом смысле меньше v, т.е. $u' \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Будем считать, что u обладает средними по объему и фиксируем v условием: $v = \langle u \rangle$. Тогда

$$\langle u' \rangle = 0. \tag{9.27}$$

Подстановка (9.26) в функционал (9.3), отбрасывание $\partial_i u$ по сравнению с $\frac{1}{\epsilon} u'_{|i}$ и u' по сравнению с v аналогично предыдущему приводит к функционалу [1])

$$\int_V \left\langle \Lambda\left(a(y), v(x), v_i(x) + \frac{1}{\epsilon} u'_{|i}(y, x, \epsilon), \epsilon\right)\right\rangle d^3x. \tag{9.28}$$

Предположим, что Λ не зависит явно от ϵ, и сделаем замену $u' = \epsilon\psi$. Тогда определение ψ сведется к построению стационарных точек функционала

$$\langle \Lambda(a(y), v, v_i + \psi_{|i}(y)) \rangle, \tag{9.29}$$

в котором v и v_i рассматриваются как постоянные параметры.

Условие "u' в асимптотическом смысле меньше v" означает, что $\psi(y)$ растут при $y \to \infty$ медленнее, чем линейная функция:

$$(\psi(y)/|y|) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty, \tag{9.30}$$

где $|y| = (y_i y^i)^{1/2}$. Действительно, если $\psi(y) \sim |y|$ при $|y| \to \infty$, то $\epsilon\psi \sim x$ при $y \to \infty$, т.е. второй член разложения (9.26) дает такой же вклад, как и первый. Если $\psi(y)$ растут при $|y| \to \infty$ быстрее $|y|$, то вклад второго члена в разложении (9.26) будет больше первого. Поэтому должно выполняться условие (9.30).

Стационарные точки функционала (9.29) ищутся на множестве функций ψ, удовлетворяющих условию (9.30) и ограничению $\langle \psi \rangle = 0$, которое следует из (9.27). В силу инвариантности функционала (9.29) относительно сдвигов по ψ на постоянную, ограничение $\langle \psi \rangle = 0$ не влияет на стационарные значения функционала. Вариационную задачу для функционала (9.29) будем называть, как и в периодическом случае, задачей на ячейке.

Стационарные точки функционала на ячейке (9.29) не зависят от ϵ, и первые два члена разложения u по ϵ имеют вид

$$u = v + \epsilon \check{\psi}(y, v, v_{,i}). \tag{9.31}$$

---

[1]) Вообще говоря, мы должны были бы оставить лишь главные в асимптотическом смысле члены, однако не совершаем ошибки, и сохраняя весь исходный лагранжиан.

Примем, что функционал на ячейке имеет единственную стационарную точку. Тогда второй член разложения определяется по v, и множество $\mathcal{N}$ в общей схеме вариационно-асимптотического метода совпадает с $\mathcal{M}_0$.

Значение функционала на ячейке в стационарной точке обозначим через $\bar{\Lambda}(v, v_i)$.

Можно проверить, что следующие члены в разложении (9.31) дадут в функционал малый вклад. Поэтому в первом приближении функционал (9.21) совпадает с функционалом

$$\bar{I} = \int_V \bar{\Lambda}(v, v_{,i})\, d^3x - \int_{\partial V} P \cdot v\, d\sigma, \tag{9.32}$$

а истинное значение поля $\check{v}$ есть стационарная точка функционала (9.32).

Если Λ – строго выпуклая функция от $u_{,i}$, то задача на ячейке сводится к задаче о минимуме

$$\bar{\Lambda}(v, v_i) = \inf_{\psi} \langle \Lambda(a(y), v, v_i + \psi_{|i}(y)) \rangle \quad , \tag{9.33}$$

где нижняя грань ищется по всем функциям ψ, растущим на бесконечности медленнее, чем линейная функция. Заметим, что из последнего условия следует, что

$$\langle \psi_{|i} \rangle = 0. \tag{9.34}$$

Для доказательства (9.34) достаточно в определении среднего по объему перейти от объемного интеграла к поверхностному и воспользоваться условием (9.30).

Обычно минимизирующий элемент $\check{\psi}$ функционала на ячейке ограничен на бесконечности, поэтому достаточно искать минимум в (9.33) на множестве ограниченных на бесконечности функций. Кроме того, в физических задачах естественно считать ограниченными на бесконечности величины $\psi_{|i}$ и $\partial\Lambda/\partial\psi_{|i}$. Поэтому дальше будем рассматривать только такие лагранжианы Λ и микроструктуры $a(y)$, для которых решение задачи на ячейке $\check{\psi}$ ограничено на бесконечности вместе с производными $\check{\psi}_{|i}$ и $\partial\Lambda(a, v, v_i + \check{\psi}_{|i})/\partial\check{\psi}_{|i}$.

Выпишем уравнения Эйлера вариационной задачи (9.33). Варьируя функционал $\langle \Lambda \rangle$ и интегрируя по частям, получим

$$\left\langle \delta\psi \quad \frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} \right\rangle = 0, \qquad \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} \equiv -\frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{|i}} \right).$$

Из этого равенства, однако, еще нельзя сделать вывод, что $\delta\Lambda/\delta\psi = 0$. Если, например, $\delta\Lambda/\delta\psi$ – произвольная финитная функция в R_y, то $\langle \tilde{\psi}\delta\Lambda/\delta\psi \rangle = 0$ для любой функции ψ, так как интеграл от $\tilde{\psi}\delta\Lambda/\delta\psi$ по R_y конечен. Для того, чтобы можно было гарантировать выполнение равенства $\delta\Lambda/\delta\psi = 0$, надо предположить, что $\delta\Lambda/\delta\psi$ "одинаково ведет себя" во всех сколь угодно отдаленных частях пространства. Например, если $\delta\Lambda/\delta\psi$ – периодическая функция, то, выбирая $\delta\psi$ также периодической функцией, получим, что $\langle \delta\psi\, \delta\Lambda/\delta\psi \rangle$ сводится к интегралу по ячейке, поэтому из равенства $\langle \delta\psi\, \delta\Lambda/\delta\psi \rangle = 0$ следует, что $\delta\Lambda/\delta\psi = 0$. Также

обстоит дело для почти периодических функций: если $\delta\Lambda/\delta\psi$ – почти периодическая функция, то из равенства $\langle \delta\psi\, \delta\Lambda/\delta\psi \rangle = 0$, верного для для любых (или только для почти периодических) функций $\delta\psi$, как легко проверить, следует, что $\delta\Lambda/\delta\psi = 0$. Мы не останавливаемся на исследовании интересного математического вопроса об описании возможно более широкого класса функций, в рамках которого вариационная задача (9.33) приводит к уравнению Эйлера

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} = 0,$$

однако будем подразумевать, что вариационная задача ставится именно в таком классе функций. Ясно, что он значительно шире класса периодических функций.

Перейдем к формулировке двойственной задачи на ячейке. По общей схеме построения двойственных вариационных задач находим

$$\bar{\Lambda}(v^\kappa, v_i^\kappa) = \sup_{p_\kappa^i} \left(\langle p_\kappa^i \rangle\, v_i^\kappa - \langle \Lambda^*(a^\kappa(y), v^\kappa, p_\kappa^i(y)) \rangle \right), \tag{9.35}$$

где нижняя грань ищется по всем функциям p_κ^i, которые удовлетворяют условиям

$$p_{\kappa\,|i} = 0,\ p_\kappa^i \text{ ограничены на бесконечности.} \tag{9.36}$$

Также, как и для периодических структур, вариационную задачу (9.35) можно переписать в терминах преобразования Юнга – Фенхеля $\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa^i)$ функции $\bar{\Lambda}(v^\kappa, v_i^\kappa)$ по v_i^κ:

$$\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa^i) = \inf_{\substack{p_\kappa^i \in (9.36) \\ \langle p_\kappa^i \rangle = \bar{p}_\kappa^i}} \langle \Lambda^*(a^\kappa(y), v^\kappa, p_\kappa^i) \rangle . \tag{9.37}$$

В случае периодических функций $a^\kappa(y)$ стационарные точки вариационных задач (9.33) и (9.35) являются периодическими функциями y. В самом деле, при строго выпуклой по $u_{,i}$ функции $\Lambda(a, u, u_{,i})$ функционалы в (9.33) и (9.35) являются строго выпуклыми и имеют одну стационарную точку. Решения периодической задачи на ячейке принадлежит множеству допустимых функций и удовлетворяют уравнениям Эйлера вариационных задач (9.33) и (9.35) и, следовательно, доставляют минимум в (9.33) и максимум в (9.35). При этом минимум в (9.33) и максимум в (9.35) совпадают.

Таким образом, для периодических структур можно сузить множество допустимых функций в (9.33), (9.35) и (9.37) и считать их периодическими. При этом оператор осреднения по R_y переходит в оператор осреднения по ячейке периодической структуры, а вариационные формулы (9.33), (9.35) и (9.37) – в соответствующие формулы для периодических структур (9.18), (9.20), (9.22). В дальнейшем мы будем использовать общие формулы (9.33), (9.35) и (9.37), имея в виду, что они справедливы как для периодических, так и для случайных структур.

Из формул (9.33), (9.35) и (9.37) можно извлечь ряд утверждений о качественных свойствах макросреды. Наиболее важное из них – свойство

строгой выпуклости $\bar{\Lambda}$ по v_i, которое имеет место при условии строгой выпуклости микролагранжиана Λ по $u_{,i}$. Докажем это свойство. Воспользуемся формулой (9.33). Пусть $\check{\psi}(y, v, v_i)$ – минимизирующий элемент в задаче (9.33), $\overset{1}{v}_i$ и $\overset{2}{v}_i$ – два значения v_i ($\overset{1}{v}_i \neq \overset{2}{v}_i$). Полагая в (9.33) $v_i = \frac{1}{2}(\overset{1}{v}_i + \overset{2}{v}_i)$ и выбирая в качестве пробной функцию $\psi(y) = \frac{1}{2}(\check{\psi}(y, v, \overset{1}{v}_i) + \check{\psi}(y, v, \overset{2}{v}_i))$, получим оценку.

$$\bar{\Lambda}\left(v, \tfrac{1}{2}\left(\overset{1}{v}_i + \overset{2}{v}_i\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left\langle \Lambda\left(a(y), v, \tfrac{1}{2}\left(\overset{1}{v}_i + \check{\psi}_{|i}(y, v, \overset{1}{v}_i) + \overset{2}{v}_i + \check{\psi}_{|i}(y, v, \overset{2}{v}_i)\right)\right)\right\rangle.$$

Привлекая теперь свойство строгой выпуклости Λ, придем к неравенству $\bar{\Lambda}\left(v, \frac{1}{2}\left(\overset{1}{v}_i + \overset{2}{v}_i\right)\right) < \frac{1}{2}\left(\bar{\Lambda}(v, \overset{1}{v}_i) + \bar{\Lambda}(v, \overset{2}{v}_i)\right)$, что и требовалось. Аналогично доказывается строгая выпуклость Λ по совокупности аргументов v, v_i, если выпуклостью по совокупности аргументов u, u_i обладает микролагранжиан Λ.

Итак, композит, состоящий из фаз с "хорошими" свойствами, не может иметь аномалий в энергии типа невыпуклости. Единственные особенности, которые могут возникнуть, связаны с обращением в нуль $\bar{\Lambda}$ или $\bar{\Lambda}^*$; соответствующие примеры приведены в следующем параграфе.

Отметим еще одно следствие общих формул осреднения: оказывается, что "средние напряжения" $\bar{p}^i_\kappa$ и "средние деформации" v^κ_i связаны между собой, эта связь потенциальна и потенциалом является осредненный лагранжиан

$$\bar{p}^i_\kappa = \frac{\partial \bar{\Lambda}(v^\kappa, v^\kappa_i)}{\partial v^\kappa_i}, \quad v^\kappa_i = \frac{\partial \bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}^i_\kappa)}{\partial \bar{p}^i_\kappa}. \tag{9.38}$$

Формулы (9.38) следуют непосредственно из (9.21).

Явных формулировок задачи на ячейке до последнего времени не было, однако, и не располагая ими, во многих прикладных вопросах, исходя из интуитивных соображений, исследовались задачи, которые сводятся к задачам на ячейке. Точных решений задачи на ячейке известно мало; почти все они приведены в следующих двух параграфах.

§ 10. ОСРЕДНЕНИЕ В СЛУЧАЕ ОДНОГО И ДВУХ ИЗМЕРЕНИЙ

Одномерные структуры. Наиболее просто решается проблема осреднения, когда характеристики среды и искомые функции зависят от одной независимой переменной:

$$\Lambda = \Lambda\left(a^\kappa(y), u^\kappa(x), \frac{du^\kappa(x)}{dx}\right), \quad y = \frac{x}{\epsilon}.$$

Покажем, что в этом случае вычисление осредненного лагранжиана сводится к алгебраической задаче вычисления преобразования Юнга – Фенхеля и интегрированию.

Проще всего осредненный лагранжиан находится при помощи двойственной вариационной задачи (9.37), (9.36). Действительно, ограничения в двойственной вариационной задаче имеют вид: $dp_\kappa/dy = 0$, $\langle p_\kappa \rangle = \bar{p}_\kappa$, поэтому множество допустимых полей $p_\kappa(y)$ состоит из одного элемента $p_\kappa(y) = \text{const} = \bar{p}_\kappa$. Из (9.37) следует, что Λ^* получается интегрированием Λ^* по y:

$$\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa) = \langle \Lambda^*(a^\kappa(y), v^\kappa, \bar{p}_\kappa) \rangle. \tag{10.1}$$

Для вычисления $\bar{\Lambda}$ надо найти преобразование Юнга – Фенхеля $\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa)$ по $\bar{p}_\kappa$:

$$\bar{\Lambda}\left(v^\kappa, \frac{dv^\kappa}{dx}\right) = \sup_{\bar{p}_\kappa}\left[\bar{p}_\kappa \frac{dv^\kappa}{dx} - \bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa)\right].$$

Минимизирующие функции задачи на ячейке $\check{\psi}^\kappa$ определяются из соотношения, связывающего минимизирующее поле двойственной вариационной задачи на ячейке $\bar{p}_\kappa$ и $\check{\psi}^\kappa$:

$$\frac{dv^\kappa}{dx} + \frac{d\check{\psi}^\kappa}{dy} = \frac{\partial \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, \bar{p}_\kappa)}{\partial \bar{p}_\kappa}. \tag{10.2}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (10.2) надо дополнить условиями (см. (9.27))

$$\langle \check{\psi}^\kappa \rangle = 0$$

и алгебраическими уравнениями, связывающими dv^κ/dx и $\bar{p}_\kappa$ (см (9. 38)):

$$\frac{dv^\kappa}{dx} = \frac{\partial \bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p}_\kappa)}{\partial \bar{p}_\kappa} = \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\kappa} \langle \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, \bar{p}_\kappa) \rangle. \tag{10.3}$$

Уравнения (10.3) можно рассматривать также как необходимые условия разрешимости уравнений (10.2) в классе ограниченных на бесконечности функций (для периодических структур – в классе периодических функций): они получаются применением к (10.2) оператора усреднения $\langle \cdot \rangle$.

Уравнения (10.2) и (10.3) определяют функции $\check{\psi}^\kappa(y, v^\kappa, v^\kappa_x)$. Функции $\check{\psi}^\kappa$ растут на бесконечности медленнее линейной функции y, а при некоторых дополнительных ограничениях на Λ и $a^\kappa(y)$ ограничены на бесконечности. В частности, $\check{\psi}^\kappa$ ограничены на бесконечности и периодичны, если Λ – непрерывная функция a^κ, и a^κ периодичны по y.

Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим прямой растяжимый стержень на упругом основании:

$$2\Lambda = E(y)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + C(y)u^2.$$

Преобразование Юнга – Фенхеля функции Λ по du/dx дается равенством

$$2\Lambda^*(v, p) = E^{-1}(y)p^2 - C(y)v^2.$$

По формуле (10.1)

$$2\bar{\Lambda}^*(v, \bar{p}) = \langle E^{-1}(y) \rangle \bar{p}^2 - \langle C(y) \rangle v^2.$$

Вычисляя преобразование Юнга – Фенхеля функции $\bar{\Lambda}^*(v, \bar{p})$ по $\bar{p}$, находим осредненный лагранжиан $\bar{\Lambda}$:

$$2\bar{\Lambda} = \langle E^{-1}(y) \rangle^{-1} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \langle C \rangle v^2. \qquad (10.4)$$

"Эффективный" стержень также ведет себя как растяжимый стержень на упругом основании с макрохарактеристиками $\langle E^{-1} \rangle^{-1}$ и $\langle C \rangle$. Обратим внимание на разные законы осреднения коэффициентов E и C.

Пусть стержень составлен из периодически повторяющихся двух стержней одинаковой длины с характеристиками E_1, C_1 и E_2, C_2 и свойства стержней сильно различаются: $E_1 \ll E_2$, $C_1 \ll C_2$. Тогда $\langle E^{-1} \rangle^{-1} = 2\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \approx 2E_1$, $\langle C \rangle = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \approx \frac{1}{2} C_2$, т.е. композит приобретает в целом сжимаемость слабой фазы и упругость постели жесткой фазы.

Пример 2. Рассмотрим смесь n однородных сред с лагранжианами $\Lambda_1\left(u^\kappa, \frac{du^\kappa}{dx}\right), \ldots, \Lambda_n\left(u^\kappa, \frac{du^\kappa}{dx}\right)$. Среды входят в композит с концентрациями $c_1, \ldots, c_n$. По формуле (10.1)

$$\bar{\Lambda}^*(v^\kappa, \bar{p_k}) = c_1 \Lambda^*_1(v^\kappa, \bar{p_k}) + \ldots + c_n \Lambda^*_n(v^\kappa, \bar{p_k}). \qquad (10.5)$$

Обсудим частный случай, когда имеется одна искомая функция и $\Lambda_1 = \frac{a_1}{\alpha_1} \left| \frac{du}{dx} \right|^{\alpha_1}, \ldots, \Lambda_n = \frac{a_n}{\alpha_n} \left| \frac{du}{dx} \right|^{\alpha_n}$, $a_1, \ldots, a_n$ – постоянные. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ больше единицы и занумерованы в порядке возрастания. Поскольку $\Lambda^*_1 = \frac{a_1}{\beta_1} \left| \frac{p}{a_1} \right|^{\beta_1}, \ldots, \Lambda^*_n = \frac{a_n}{\beta_n} \left| \frac{p}{a_n} \right|^{\beta_n}$, где $1/\alpha_1 + 1/\beta_1 = 1, \ldots, 1/\alpha_n + 1/\beta_n = 1$, из (10.5) имеем

$$\bar{\Lambda}^*(\bar{p}) = \frac{c_1 a_1}{\beta_1} \left| \frac{\bar{p}}{a_1} \right|^{\beta_1} + \ldots + \frac{c_n a_n}{\beta_n} \left| \frac{\bar{p}}{a_n} \right|^{\beta_n}. \qquad (10.6)$$

Для построения функции $\bar{\Lambda}\left(\frac{dv}{dx} \right)$ остается вычислить преобразование Юнга – Фенхеля функции (10.6). Однако найти его явно, вообще говоря, невозможно. В связи с этим мы ограничимся только построением асимптотик $\bar{\Lambda}$ при $dv/dx \to 0$ и $dv/dx \to \infty$. При $dv/dx \to 0$ также $\bar{p} \to 0$. Поскольку числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ расположены в порядке убывания, главным при $\bar{p} \to 0$ в (10.6) является последнее слагаемое. Вычисляя его преобразование Юнга – Фенхеля, находим

$$\bar{\Lambda}\left(\frac{dv}{dx} \right) \sim \frac{a_n}{\alpha_n c_n^{\alpha_n/\beta_n}} \left| \frac{dv}{dx} \right|^{\alpha_n} \quad \text{при} \quad \left| \frac{dv}{dx} \right| \to 0. \qquad (10.7)$$

Аналогично строится асимптотика $\bar{\Lambda}$ при $\left|\frac{dv}{dx}\right| \to \infty$: при $\left|\frac{dv}{dx}\right| \to \infty$ также $|\bar{p}| \to \infty$, поэтому главным в выражении (10.6) становится первое слагаемое, и

$$\bar{\Lambda}\left(\frac{dv}{dx}\right) \sim \frac{a_1}{\alpha_1 c_1^{\alpha_1/\beta_1}} \left|\frac{dv}{dx}\right|^{\alpha_1} \text{ при } \left|\frac{dv}{dx}\right| \to \infty. \tag{10.8}$$

Эти на первый взгляд парадоксальные ответы связаны с тем, что всегда возбуждаются самые податливые элементы: при больших "силах" $\bar{p}$ самыми податливыми являются элементы с малым α, при малых $\bar{p}$ — с большими α.

Коэффициенты жесткости $a_n c_n^{-\alpha_n/\beta_n}$ и $a_1 c_1^{-\alpha_1/\beta_1}$ в (10.7) и (10.8) сильно возрастают при малых концентрациях в соответствии с тем, что при малых концентрациях податливые элементы должны давать малый вклад в общую "деформацию" композита dv/dx.

Пример 3. При осреднении у композита могут возникать новые свойства, которыми не обладают его компоненты. Проиллюстрируем это на следующем модельном примере.

Рассмотрим композит, состоящий из фаз с лагранжианами $\Lambda = \frac{a}{\alpha}\left|\frac{du}{dx}\right|^{\alpha}$, коэффициент a является одинаковым для всех фаз, а α — функция от y, $\alpha > 1$. Тогда по (10.1)

$$\bar{\Lambda}^* = \left\langle \frac{a}{\beta(y)} \left|\frac{\bar{p}}{a}\right|^{\beta(y)} \right\rangle, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Пусть β — случайное эргодическое поле. В силу эргодичности интегрирование по y можно заменить вычислением математического ожидания:

$$\bar{\Lambda}^*(\bar{p}) = a\, \mathrm{M}\left(\frac{1}{\beta}\left|\frac{\bar{p}}{a}\right|^{\beta}\right). \tag{10.9}$$

Свойства композита существенно зависят от того, по какому закону распределены показатели β: в частности, для некоторых функций распределения может оказаться, что $\mathrm{M}\left(\frac{1}{\beta}\left|\frac{\bar{p}}{a}\right|^{\beta}\right)$ конечно лишь при малых $\bar{p}$. Пусть, например, плотность распределения показателей $f(\xi)$ является гамма-распределением

$$f(\xi) = \frac{c^b}{\Gamma(b)} \xi^{b-1} e^{-c\xi}, \ \beta = 1 + \xi, \ \xi > 0, \tag{10.10}$$

$\Gamma(b)$ — гамма-функция. Параметры гамма-распределения выражаются через математическое ожидание β_0 и дисперсию σ показателя β по формулам

$$c = \frac{\beta_0 - 1}{\sigma}, \quad b = \frac{(\beta_0 - 1)^2}{\sigma} \quad (\beta_0 = \mathrm{M}\beta, \ \sigma = \mathrm{M}(\beta - \beta_0)^2).$$

Согласно (10.9) и (10.10) для $\bar{\Lambda}^*$ можно написать

$$\bar{\Lambda}^*(\bar{p}) = \frac{c^b}{\Gamma(b)} |\bar{p}| \int_0^{\infty} \frac{\xi^{b-1}}{1+\xi} e^{-\left(c - \ln\frac{\bar{p}}{a}\right)\xi} d\xi. \tag{10.11}$$

Отсюда видно, что $\bar{\Lambda}^* (\bar{p}) = \infty$, если амплитута нагрузки $|\bar{p}|$ превосходит величину $ae^c = ae^{(\beta_0 - 1)/\sigma}$ и $b \geqslant 1$ (дисперсия не очень велика). Таким образом, композит не выдерживает больших нагрузок и в этом смысле ведет себя как упруго-пластическая среда.

Слоистые среды. Следующей по сложности является задача осреднения слоистых сред. Под слоистыми средами понимают сплошные среды, у которых физические характеристики меняются только в одном направлении, а искомые функции могут зависеть от всех координат. Покажем, что осредненный лагранжиан слоистых сред вычисляется, по существу, так же, как осредненный лагранжиан одномерных структур. Обозначим координату вдоль направления, в котором изменяются физические характеристики, через x, соответствующую быструю переменную через y, а остальные две координаты через x^α (малые греческие индексы пробегают значения 1, 2, ..., $n-1$); запятой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по x^α, запятой перед x в индексах – дифференцирование по x: $u^\kappa{}_{,\alpha} \equiv \partial u^\kappa / \partial x^\alpha$, $u^\kappa{}_{,x} \equiv \partial u^\kappa / \partial x$. Будем искать решение в классе функций вида $u^\kappa = u^\kappa (y, x, x^\alpha)$. Пусть $\Lambda_0 (a^\kappa, u^\kappa{}_{,x})$ – главная в асимптотическом смысле часть лагранжиана $\Lambda (a^\kappa, u^\kappa, u^\kappa{}_{,x}\, u^\kappa{}_{,\alpha})$ при $|u^\kappa{}_{,x}| \to \infty$. Предположим, что вариационная задача

$$\langle\ \Lambda_0\ (a^\kappa\ (y),\ u^\kappa{}_{|y})\rangle \to \inf_{u(y)}\ ,$$

где $\langle \circ \rangle$ – оператор осреднения по y, имеет единственный минимизирующий элемент $u^\kappa = \text{const}$. Тогда первый член асимптотического разложения решения не зависит от быстрой переменной, и решение имеет вид $u^\kappa = v^\kappa (x, x^\alpha) + \epsilon\ \psi^\kappa (y, x, x^\alpha)$.

Учтем теперь, что в (9.33) функции ψ^κ зависят только от одной быстрой переменной y. Тогда вычисление осредненного лагранжиана сведется к вариационной задаче

$$\bar{\Lambda} (v^\kappa, v^\kappa_x,\ v^\kappa_\alpha) = \inf_{\psi^\kappa} \langle \Lambda (a^\kappa (y),\ v^\kappa, v^\kappa{}_x + \psi^\kappa{}_{|y}, v^\kappa{}_\alpha)\rangle\ , \qquad (10.12)$$

где нижняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности функциям $\psi^\kappa (y), v^\kappa_x \equiv v^\kappa{}_{,x}$.

Построим двойственную вариационную задачу. Обозначим через $\Lambda^\oplus$ преобразование Юнга – Фенхеля лагранжиана Λ по переменным $u^\kappa_{,x}$:

$$\Lambda^\oplus (a^\kappa, u^\kappa, p_\kappa, u^\kappa_{,\alpha}) = \sup_{u^\kappa_{,x}} [p_\kappa u^\kappa_{,x} - \Lambda (a^\kappa, u^\kappa, u^\kappa{}_{,x}, u^\kappa_{,\alpha})]\ .$$

Символ $\oplus$ введен для того, чтобы отличить это преобразование от преобразования Λ^* лагранжиана Λ по всем производным $u^\kappa_{,x}, u^\kappa_{,\alpha}$.

По общей схеме построения двойственных вариационных задач из (10.12) получим

$$\bar{\Lambda} (v^\kappa, v^\kappa_x, v^\kappa_\alpha) = \sup_{p_\kappa (y)}\ [\langle p_\kappa \rangle\ v^\kappa_x - \langle \Lambda^\oplus (a^\kappa, v^\kappa, p_\kappa, v^\kappa_\alpha)\rangle]\ . \qquad (10.13)$$

Здесь верхняя грань ищется по всем функциям $p_\kappa (y)$, удовлетворяющим ограничениям $dp_\kappa / dy = 0$. Поскольку допустимые функции $p_\kappa (y)$ посто-

яниы: $p_\kappa(y) = \text{const} = \bar{p}_\kappa$, формулу (10.13) можно переписать в виде

$$\bar{\Lambda}(v^\kappa, v_x^\kappa, v_\alpha^\kappa) = \sup_{\bar{p}_\kappa} [\bar{p}_\kappa v_x^\kappa - \langle \Lambda^\oplus(a^\kappa(y), v^\kappa, \bar{p}_\kappa, v_\alpha^\kappa)\rangle] \tag{10.14}$$

Таким образом, как и в случае одномерных структур, вычисление осредненного лагранжиана сводится к интегрированию и вычислению преобразования Юнга – Фенхеля.

Отметим еще, как получается формула (10.14) из общего соотношения (9.35). Будем считать, что значения $1, \ldots, n-1$ индекса i соответствуют проекциям на оси x^α, а $x^n \equiv x$. Разобьем переменные p_κ^i на две группы $\{p_\kappa^\alpha\}$ и $\{p_\kappa^n\}$, $(p_\kappa^n \equiv p_\kappa)$. Поскольку p_κ^i – функции только одной переменной y, общее решение уравнений $p_{\kappa\,|i}^i = 0$ имеет форму $p_\kappa = \text{const} = \bar{p}_\kappa$, p_κ^α – произвольные функции y. Подставляя допустимые функции в (9.35), получим

$$\Lambda = \sup_{\bar{p}_\kappa, p_\kappa^\alpha} [\bar{p}_\kappa v_x^\kappa + \langle p_\kappa^\alpha(y) v_\alpha^\kappa - \Lambda^*(a^\kappa(y), v^\kappa, \bar{p}_\kappa, p_\kappa^\alpha)\rangle]. \tag{10.15}$$

Под оператором $\langle\cdot\rangle$ в (9.35) и (10.15) можно понимать оператор усреднения по y, так как все функции не зависят от остальных быстрых переменных. Для вывода (10.14) из (10.15) остается заметить, что

$$\sup_{p_\kappa^\alpha} (p_\kappa^\alpha v_\alpha^\kappa - \Lambda^*(a^\kappa, v^\kappa, \bar{p}_\kappa, p_\kappa^\alpha)) = -\Lambda^\oplus(a^\kappa, v^\kappa, \bar{p}_\kappa, v_\alpha^\kappa).$$

Это соотношение следует из равенства

$$\Lambda^* = \sup_{p_\kappa^\alpha} \sup_{p_\kappa} (p_\kappa^\alpha v_\alpha^\kappa + p_\kappa v_x^\kappa - \Lambda) = \sup_{p_\kappa^\alpha} (p_\kappa^\alpha v_\alpha^\kappa + \Lambda^\oplus).$$

Пример 4. *Слоистая упругая среда.* Рассмотрим упругий слоистый геометрически линейный композит с плотностью внутренней энергии единицы объема $U(\epsilon_{ij})$, $\epsilon_{ij} = {}^1/_2 (u_{i,j} + u_{j,i})$. Пусть упругие характеристики меняются вдоль оси 3, $x^3 \equiv x$. Предположим, что при $\epsilon_{ij}\epsilon^{ij} \to \infty$ $U \geqslant \text{const}\ (\epsilon_{ij}\epsilon^{ij})^p$, $p > {}^1/_2$. Тогда вариационная задача, возникающая на первом шаге вариационно-асимптотического метода, имеет решение $u_i = \text{const}$. Следовательно, главный член асимптотического разложения перемещений не зависит от y, и осредненная энергия находится из вариационной задачи:

$$\bar{U}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{\epsilon}_{3\alpha}, \bar{\epsilon}_{33}) = \inf_{\psi_\alpha, \psi} \left\langle U\left(a^\kappa(y), \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \frac{1}{2}\frac{d\psi_\alpha}{dy} + \bar{\epsilon}_{\alpha 3}, \frac{d\psi}{dy} + \bar{\epsilon}_{33}\right)\right\rangle,$$

где $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} = v_{(\alpha,\beta)}$, $2\bar{\epsilon}_{\alpha 3} = v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha}$, $\bar{\epsilon}_{33} = v_{3,3}$ – макродеформации.

Обозначим через $U^\oplus$ преобразование Юнга – Фенхеля U по $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33}, через $\bar{U}^\oplus$ – преобразование Юнга – Фенхеля $\bar{U}$ по $\bar{\epsilon}_{\alpha 3}, \bar{\epsilon}_{33}$:

$$U^\oplus(a^\kappa(y), \epsilon_{\alpha\beta}, p^{\alpha 3}, p^{33}) = \sup_{\epsilon_{\alpha 3}, \epsilon_{33}} (2p^{\alpha 3}\epsilon_{\alpha 3} + p^{33}\epsilon_{33} - U),$$

$$\bar{U}^\oplus(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33}) = \sup_{\bar{\epsilon}_{\alpha 3}, \bar{\epsilon}_{33}} (2\bar{p}^{\alpha 3}\bar{\epsilon}_{\alpha 3} + \bar{p}^{33}\bar{\epsilon}_{33} - U).$$

Коэффициент 2 введен в эти формулы для того, чтобы $p^{\alpha 3}$ и $\bar{p}^{\alpha 3}$ имели смысл компонент микро- и макронапряжений.

Из двойственной вариационной задачи найдем

$$\bar{U}^{\oplus}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33}) = \langle U^{\oplus}(a^{\kappa}(y), \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33}) \rangle . \qquad (10.16)$$

Здесь $\bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33}$ – постоянные. После выполнения интегрирования в (10.16) макроэнергия восстанавливается преобразованием Юнга – Фенхеля

$$\bar{U}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{\epsilon}_{\alpha 3}, \bar{\epsilon}_{33}) = \sup_{\bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33}} [2\bar{p}^{\alpha 3}\bar{\epsilon}_{\alpha 3} + \bar{p}^{33}\bar{\epsilon}_{33} - \bar{U}^{\oplus}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}, \bar{p}^{\alpha 3}, \bar{p}^{33})] . \qquad (10.17)$$

Итак, вычисление макроэнергии сводится к интегрированию и вычислению преобразования Юнга – Фенхеля.

Найдем макроэнергию в частном случае слоистого композита, составленного из линейно-упругих изотропных фаз:

$$2U = \lambda(y)(\epsilon_i^i)^2 + 2\mu(y)\epsilon_{ij}\epsilon^{ij}. \qquad (10.18)$$

Перепишем выражение (10.18), выделив явно компоненты тензора деформаций $\epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{33}:

$$2U = \lambda(\epsilon_{\alpha}^{\alpha})^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} + 2\lambda\epsilon_{\alpha}^{\alpha}\epsilon_{33} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{33}^2 + 4\mu\epsilon_{\alpha 3}\epsilon^{\alpha 3}. \qquad (10.19)$$

Вычисляя $U^{\oplus}$, получим

$$2U^{\oplus} = (\lambda + 2\mu)^{-1}(p^{33} - \lambda\epsilon_{\alpha}^{\alpha})^2 + {}^1/_2\,\mu^{-1}p_{\alpha 3}p^{\alpha 3} - \lambda(\epsilon_{\alpha}^{\alpha})^2 - 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}. \qquad (10.20)$$

Из (10.16) и (10.20) следует выражение для $\bar{U}^{\oplus}$:

$$2\bar{U}^{\oplus} = \langle(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle(\bar{p}^{33})^2 - 2\langle\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle\bar{p}^{33}\bar{\epsilon}_{\alpha}^{\alpha} + \langle\lambda^2(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle(\bar{\epsilon}_{\alpha}^{\alpha})^2 + {}^1/_2\langle\mu^{-1}\rangle\bar{p}_{\alpha 3}\bar{p}^{\alpha 3} - \langle\lambda\rangle(\bar{\epsilon}_{\alpha}^{\alpha})^2 - 2\langle\mu\rangle\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}\bar{\epsilon}^{\alpha\beta}. \qquad (10.21)$$

Из формул (10.18) и (10.21) находим $\bar{U}$:

$$2\bar{U} = (\langle\lambda\rangle + \langle\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle^2\langle(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle^{-1} - \langle\lambda^2(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle)(\bar{\epsilon}_{\alpha}^{\alpha})^2 + 2\langle\mu\rangle\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}\bar{\epsilon}^{\alpha\beta} + 4\langle\mu^{-1}\rangle^{-1}\bar{\epsilon}_{\alpha 3}\bar{\epsilon}^{\alpha 3} + 2\langle\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle\langle(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle^{-1}\bar{\epsilon}_{\alpha}^{\alpha}\bar{\epsilon}_{33} + \langle(\lambda + 2\mu)^{-1}\rangle^{-1}\bar{\epsilon}_{33}^2. \qquad (10.22)$$

Для эффективных коэффициентов получились довольно причудливые выражения, однако "механизм" их построения физически совершенно прозрачен: истинные напряжения p^{33} и $p^{\alpha 3}$ в первом приближении должны быть постоянны. Если λ, μ = const ,то выражение (10.22), как и должно быть, переходит в (10.19).

Двумерные структуры. Переход от одномерных к двумерным структурам сопровождается усложнениями качественного характера, и на построение точных решений задачи на ячейке рассчитывать больше не приходится. Тем не менее в ряде исключительных случаев удается, не отыскивая полно-

го решения задачи на ячейке, вычислить осредненный лагранжиан. Остальная часть параграфа посвящена обсуждению этих случаев.

Рассмотрим двумерную структуру, описываемую одной искомой функцией u. Согласно (9.33)

$$\bar{\Lambda}(v, v_\alpha) = \inf_{\psi} \langle \Lambda(a^\kappa(y), v, v_\alpha + \psi_{|\alpha}) \rangle . \tag{10.23}$$

Малые греческие индексы α, β, γ пробегают значения 1, 2.

В основе построения осредненного лагранжиана двумерных структур лежит следующее замечательное свойство двойственной вариационной задачи: оказывается, что ее удается привести к тому же виду, что и исходную вариационную задачу. Установим этот факт.

Двойственная вариационная задача. В рассматриваемом случае из общей формулы (9.37) следует

$$\bar{\Lambda}^*(v, \bar{p}^\alpha) = \inf \langle \Lambda^*(a^\kappa(y), v, p^\alpha) \rangle. \tag{10.24}$$

Здесь нижняя грань ищется по всем ограниченным функциям p^α, удовлетворяющим условиям

$$p^\alpha_{|\alpha} = 0, \quad \langle p^\alpha \rangle = \bar{p}^\alpha. \tag{10.25}$$

Общее решение первого уравнения (10.25) имеет вид: $p^\alpha = e^{\alpha\beta}\chi_{|\beta}$, где $e^{\alpha\beta}$ – двумерный символ Леви-Чивита, χ – произвольная функция, растущая на бесконечности не быстрее линейной. Выделим в χ линейно растущую на бесконечности составляющую $\chi = k_\alpha y^\alpha + \varphi$, где k_α – постоянные, и примем, что минимизирующему элементу задачи (10.24) соответствует ограниченная на бесконечности функция φ, так что все допустимые функции φ можно считать ограниченными на бесконечности. Тогда из второго ограничения (10.25), которое принимает вид $e^{\alpha\beta}k_\beta = \bar{p}^\alpha$, находим значение постоянной k_β: $k_\beta = e_{\alpha\beta}\bar{p}^\alpha$. Итак, все допустимые поля представляются в форме

$$p^\alpha = e^{\alpha\beta}(k_\beta + \varphi_{|\beta}), \quad k_\beta = e_{\alpha\beta}\bar{p}^\alpha. \tag{10.26}$$

Подстановка (10.26) в (10.25) приводит к вариационной задаче

$$\bar{\Lambda}^*(v, e^{\alpha\beta}k_\beta) = \inf_{\varphi} \langle \Lambda^*(a^\kappa(y), v, e^{\alpha\beta}(k_\beta + \varphi_{|\beta})) \rangle, \tag{10.27}$$

где нижняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности функциям φ. Таким образом, двойственная вариационная задача записана в той же форме, что и исходная. В преобразовании задачи на ячейке существенно использована специальная структура функционала задачи, содержащего оператор осреднения по бесконечному пространству, а не интегрирование по конечной области, как в обычных интегральных функционалах; напомним, что для плоских задач в конечной области между двойственными задачами имеется различие: двойственной к задаче Неймана является задача Дирихле.

Перепишем двойственную вариационную задачу (10.27), сделав поворот системы координат на угол $\pi/2$ и перенос на вектор c^α, $y^\alpha \to y'^\alpha$: $y'^\alpha = e^\alpha_{.\beta}y^\beta + c^\alpha$. Используя, что $e^{\alpha\beta}k_\beta = \bar{p}^\alpha$, получим

$$\bar{\Lambda}^*(v, \bar{p}_\alpha) = \inf_{\varphi} \langle \Lambda^*(a^\kappa(y(y')), v, \bar{p}_\alpha + \varphi_{\|\alpha}) \rangle. \tag{10.28}$$

Здесь $\varphi_{\| \alpha}$ производные φ по новым переменным y'^{α}, $y(y')$ — линейные функции y': $y^{\alpha} = e^{\alpha}_{\beta}(y'^{\beta} - c^{\beta})$.

Уравнение для осредненного лагранжиана. Рассмотрим лагранжианы, зависящие только от производных искомой функции: $\Lambda = \Lambda(a^{\kappa}, u_{,\alpha})$. Тогда $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}(v_{\alpha})$, $\overline{\Lambda}^{*} = \overline{\Lambda}^{*}(\overline{p}^{\alpha})$.

Предположим, что для некоторого значения постоянной b и для всех постоянных v_{α} справедливо равенство

$$\inf_{\varphi} \langle \Lambda^{*}(a^{\kappa}(y(y')),\ b(v_{\alpha} + \varphi_{\| \alpha})) \rangle = \inf_{\varphi} \langle \Lambda(a^{\kappa}(y), v_{\alpha} + \varphi_{|\alpha}) \rangle. \tag{10.29}$$

Покажем, что в этом случае осредненный лагранжиан удовлетворяет уравнению

$$\overline{\Lambda}^{*}(b v_{\alpha}) = \overline{\Lambda}(v_{\alpha}). \tag{10.30}$$

Действительно, из (10.28) имеем

$$\overline{\Lambda}^{*}(b v_{\alpha}) = \inf_{\varphi} \langle \Lambda^{*}(a(v(y')),\ b v_{\alpha} + \varphi_{\| \alpha}) \rangle =$$

$$= \inf_{\widetilde{\varphi}} \langle \Lambda^{*}(a(y(y')),\ b(v_{\alpha} + \widetilde{\varphi}_{\| \alpha})) \rangle . \tag{10.31}$$

Здесь $\widetilde{\varphi} = \varphi / b$. Из (10.31), (10.29) и (10.23) следует (10.30).

Уравнение (10.30) легко решается:

$$\overline{\Lambda} = {}^{1}/_{2}\, b v_{\alpha} v^{\alpha}. \tag{10.32}$$

В самом деле, пусть функция нескольких переменных $f(x)$ ($x = \{ x_1, \ldots, x_n \}$) удовлетворяет уравнению $f^{*}(bx) = f(x)$. Положим в неравенстве Юнга — Фенхеля $f(x) + f^{*}(x^{*}) \geqslant x^{*}_{i} x^{i}$ (см. (2. 3. 31)), справедливого для всех x и x^{*}, $x^{*}_{i} = b x_{i}$. Получим оценку $f(x)$ снизу: $f(x) \geqslant {}^{1}/_{2}\, b x_{i} x^{i}$. Заменяя в равенстве $f^{*}(x^{*}) = \sup_{x} (x^{*}_{i} x^{i} - f(x))$ функцию $f(x)$ на меньшую функцию ${}^{1}/_{2}\, b x_{i} x^{i}$, находим, что $f^{*}(x^{*}) \leqslant {}^{1}/_{2}\, b^{-1} x^{*}_{i} x^{*i}$. Полагая $x^{*} = bx$, получим оценку $f(x)$ сверху: $f(x) \leqslant {}^{1}/_{2}\, b x_{i} x^{i}$. Следовательно, $f(x) = {}^{1}/_{2} b x_{i} x^{i}$.

Итак, если при некотором значении b выполняется равенство (10.29), то среда является микроскопически линейной и изотропной и имеет эффективный коэффициент, равный b. При этом микроскопически среда может быть как нелинейной, так и анизотропной. Таких случаев можно найти довольно много.

Формулы Дыхне. Начнем с обсуждения микроскопически линейных изотропных сред: $\Lambda = {}^{1}/_{2}\, a u_{,\alpha} u^{\alpha}$. Пусть композит составлен из двух однородных фаз, для которых коэффициент a принимает значения a_1, a_2. Фазы назовем равнопредставленными, если после перемены их местами осредненный лагранжиан не меняется. Под переменой фаз местами понимается следующая операция: в область, занятую первой фазой, помещается вторая фаза, а в область, занятую второй фазой, — первая. При этом, вообще говоря, относительные площади c_1 и c_2, занятые первой и второй фазами, могут не совпадать, т.е. замена фаз местами сопровождается добавлением одной фазы и изъятием другой, однако в проводимых дальше конкретных примерах

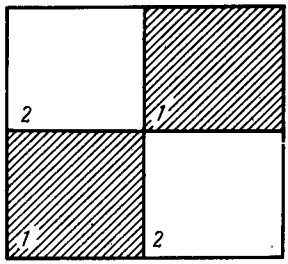


Рис. 57.

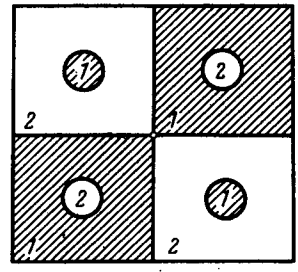


Рис. 58.

микроструктур относительные площади равнопредставленных фаз равны: $c_1 = c_2 = {}^1/_2$.

Предположим, что фазы перемешаны столь хорошо, что замена в левой части равенства (10.29) функций $a(y(y'))$ на функции $a(y')$ не меняет нижней грани функционала. Тогда условие (10.29) будет выполнено при $b = \sqrt{a_1 a_2}$. Действительно, для этого значения b лагранжиан $\Lambda^*(a(y), bu_{,\alpha}) = \dfrac{a_1 a_2}{2a(y)} u_{,\alpha} u^{,\alpha}$ является лагранжианом композита с переставленными фазами, и равенство (10.29) имеет смысл условия равнопредставленности фаз. Согласно (10.32) рассмотренный композит макроизотропен ($\bar{\Lambda} = {}^1/_2 \bar{a}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$, $\bar{a}^{\alpha\beta} = \bar{a}\delta^{\alpha\beta}$), а его эффективный коэффициент $\bar{a}$ дается формулой Дыхне [83]

$$\bar{a} = \sqrt{a_1 a_2}. \tag{10.33}$$

Изобразить на рисунке случайно расположенные равнопредставленные фазы трудно, поэтому дальше все иллюстрации даются для периодических структур. Простейший пример периодической структуры, для которой справедлива формула (10.33), – шахматная структура, ячейка которой изображена на рис. 57. Индексами *1* и *2* отмечаются области, занятые первой и второй фазами. Пример двухфазного композита с более сложной геометрией изображен на рис, 58. Для каждой из приведенных микроструктур справедлива формула Дыхне (10.33).

Формулу (10.33) можно обобщить следующим образом. Пусть среда макроскопически и микроскопически изотропна и в каждой точке среды коэффициент a есть случайная величина. Введем случайную величину σ равенством $a = a_0 e^{\sigma}$ и примем, что функция распределения σ четна, а поле $\sigma(y)$ эргодическое. Тогда при замене коэффициента $a_0 e^{\sigma(y)}$ на коэффициент $a_0 e^{-\sigma(y)}$ эффективная характеристика не изменится. Полагая $b = a_0$, убеждаемся в справедливости равенства (10.28). Поэтому $\bar{a} = a_0$. Смысл величины a_0 можно найти, применяя операцию математического ожидания к равенству $\ln a = \ln a_0 + \sigma$. Имеем $a_0 = e^{M \ln a}$. Итак, приходим ко второй формуле Дыхне:

$$\bar{a} = e^{M \ln a} \tag{10.34}$$

Если a принимает значения a_1 и a_2 с вероятностью ½, то $a_0 = \sqrt{a_1 a_2}$, величина $\sigma = \ln a - \ln a_0 = \ln \dfrac{a}{\sqrt{a_1 a_2}}$ с вероятностями ½ принимает

значения $\ln\sqrt{a_1/a_2}$ и $-\ln\sqrt{a_1/a_2}$ и, следовательно, имеет четную функцию распределения, а формула (10.34) переходит в формулу (10.33).

Эффективные характеристики как функционалы. Рассмотрим некоторые свойства эффективных характеристик линейной микронеоднородной среды, которые можно извлечь из формул (10.23) и (10.27). Для линейной среды $\Lambda = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta}$, $\Lambda^* = \frac{1}{2} a^{(-1)}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$, $\overline{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{a}^{\alpha\beta} v_{,\alpha} v_{,\beta}$, $\overline{\Lambda}^* = \frac{1}{2}\overline{a}^{(-1)}_{\alpha\beta} \overline{p}^\alpha \overline{p}^\beta$, поэтому равенства (10.23) и (10.26) записываются в форме

$$\overline{a}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = \inf_\psi \langle a^{\alpha\beta} (v_\alpha + \psi_{|\alpha}) (v_\beta + \psi_{|\beta}) \rangle, \tag{10.35}$$

$$\overline{a}^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\lambda} e^{\beta\nu} k_\lambda k_\nu = \inf_\varphi \langle a^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} (k_\mu + \varphi_{|\mu}) (k_\nu + \varphi_{|\nu}) \rangle. \tag{10.36}$$

Равенство (10.36) можно несколько упростить при помощи соотношения

$$a^{(-1)}_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} = a^{\mu\nu}/a^2, \quad a^2 = \det \| a^{\mu\nu} \|, \tag{10.37}$$

которое справедливо для любого невырожденного двумерного тензора второго ранга.

Согласно (10.37) формулу (10.36) можно переписать в виде

$$\overline{a}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / \overline{a}^2 = \inf_\varphi \langle a^{\alpha\beta} (k_\alpha + \varphi_{|\alpha}) (k_\beta + \varphi_{|\beta}) / a^2 \rangle. \tag{10.38}$$

Здесь $\overline{a}^2 = \det \| \overline{a}^{\alpha\beta} \|$.

Вариационный принцип (10.35) определяет эффективные коэффициенты $\overline{a}^{\alpha\beta}$ как некоторые функционалы от полей микрохарактеристик $a^{\alpha\beta}$; в тех случаях, когда $\overline{a}^{\alpha\beta}$ рассматриваются как функционалы от $a^{\alpha\beta}$, будем писать $\overline{a}^{\alpha\beta} = \overline{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$.

Значение функционала $\overline{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$ содержит очень большую информацию о решении задачи на ячейке. Изменим, например, в некоторой части плоскости Ω с ненулевой удельной площадью c значение $a^{\alpha\beta}$ на малую постоянную величину $\delta a^{\alpha\beta}$. Тогда из (10.35), привлекая вариационно-асимптотический метод, можно найти, что

$$\frac{\delta \overline{a}^{\alpha\beta}}{\delta a^{\mu\nu}} v_\alpha v_\beta = c \langle (v_\mu + \psi_{|\mu}) (v_\nu + \psi_{|\nu}) \rangle_\Omega, \tag{10.39}$$

где ψ – решение задачи на ячейке при $\delta a^{\mu\nu} = 0$, а $\langle \cdot \rangle_\Omega$ – операция осреднения по области Ω:

$$\langle f \rangle_\Omega = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{|\lambda B \cap \Omega|} \int_{\lambda B \cap \Omega} f \, d^2 y.$$

При помощи равенства (10.39) можно находить средние от решения по любому достаточно мощному (с ненулевой удельной площадью) множеству. В частности, дифференцируя выражение Дыхне (10.33) по a_1 и a_2, найдем средние по фазам от квадрата градиента истинного поля

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} v_\mu v^\mu &= \langle (v_\mu + \psi_{|\mu}) (v^\mu + \psi^{|\mu}) \rangle_1, \\ \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} v_\mu v^\mu &= \langle (v_\mu + \psi_{|\mu}) (v^\mu + \psi^{|\mu}) \rangle, \end{aligned} \tag{10.40}$$

Здесь $\langle\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot\rangle_2$ — средние по первой и второй фазам, и принято, что $c_1 = c_2 = 1/2$. Из формул (10.40) видно, что градиент поля в среднем больше в той фазе, у которой меньше значение коэффициента a, и с уменьшением a он возрастает как $a^{-1/4}$. Средние энергии в каждой из фаз совпадают: $\frac{1}{2}\langle a_1(v_\mu + \psi_{|\mu})(v^\mu + \psi^{|\mu})\rangle_1 = \frac{1}{2}\langle a_2(v_\mu + \psi_{|\mu})(v^\mu + \psi^{|\mu})\rangle_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_1 a_2}\, v_\mu v^\mu$. Это равенство получается, если умножить первое соотношение (10.40) на a_1, а второе — на a_2. Умножая соотношения (10.40) соответственно на a_1^2 и a_2^2, найдем средние по фазам значения потока $p^\alpha = a(v^\alpha + \psi^{|\alpha})$:

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\bar{p}_\alpha\bar{p}^\alpha = \langle p_\alpha p^\alpha\rangle_1,\quad \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,\bar{p}_\alpha\bar{p}^\alpha = \langle p_\alpha p^\alpha\rangle_2,\ \bar{p}_\alpha = \sqrt{a_1 a_2}\, v_\alpha. \tag{10.41}$$

Формулы (10.41) показывают, что средний по фазе поток растет с ростом коэффициента a фазы как $a^{1/4}$ (при фиксированном среднем потоке $\bar{p}_\alpha$).

Установим некоторые общие свойства функционалов $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$. Прежде всего из формулы (10.35) находим, что функционалы $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$ вогнуты: для любых v_α

$$\bar{a}^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}(a_1^{\mu\nu} + a_2^{\mu\nu})\right)v_\alpha v_\beta \geqslant \frac{1}{2}(\bar{a}^{\alpha\beta}(a_1^{\mu\nu}) + \bar{a}^{\alpha\beta}(a_2^{\mu\nu}))\,v_\alpha v_\beta. \tag{10.42}$$

Действительно,

$$\bar{a}^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}(a_1^{\mu\nu} + a_2^{\mu\nu})\right)v_\alpha v_\beta = \inf_\psi\langle\frac{1}{2}(a_1^{\mu\nu} + a_2^{\mu\nu})(v_\mu + \psi_{|\mu})(v_\nu + \psi_{|\nu})\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\inf_\psi\langle a_1^{\mu\nu}(v_\mu + \psi_{|\mu})(v_\nu + \psi_{|\nu})\rangle + \inf_\psi\langle a_2^{\mu\nu}(v_\mu + \psi_{|\mu})(v_\nu + \psi_{|\nu})\rangle\right).$$

Кроме того, согласно (10.34), функционалы $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$ полулинейны: для любого $k > 0$

$$\bar{a}^{\alpha\beta}(ka^{\mu\nu}) = k\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu}). \tag{10.43}$$

Функционалы $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})/\bar{a}^2(a^{\mu\nu}) = \bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu}/a^2). \tag{10.44}$$

Эти уравнения являются непосредственным следствием формул (10.35), (10.38).

Уравнения (10.44) показывают, что тензоры $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu})$ и $\bar{a}^{\alpha\beta}(a^{\mu\nu}/a^2)$ являются соосными, а главные значения $\bar{a}_1(a^{\mu\nu})$ и $\bar{a}_2(a^{\mu\nu})$ тензора $\bar{a}^{\alpha\beta}$ связаны соотношениями

$$\bar{a}_2(a^{\mu\nu})\,\bar{a}_1(a^{\mu\nu}/a^2) = 1,\ \bar{a}_1(a^{\mu\nu})\,\bar{a}_2(a^{\mu\nu}/a^2) = 1.$$

Вычисляя определители матриц, стоящих в правой и левой частях равенства (10.44), приходим к соотношению, найденному Козловым [114]:

$$\bar{a}^2(a^{\mu\nu})\,\bar{a}^2\left(\frac{a^{\mu\nu}}{a^2}\right) = 1. \tag{10.45}$$

Формулу Дыхне (10.33) можно вывести из этого соотношения: поскольку $\bar{a}^{\alpha\beta} = \bar{a}\delta^{\alpha\beta}$ (среда макроизотропна), $a^{\mu\nu} = a\,\delta^{\mu\nu}$ (среда микроизотропна),

$\bar{a}\left(a_1 a_2 \dfrac{\delta^{\mu\nu}}{a}\right) = a_1 a_2 \bar{a}\left(\dfrac{\delta^{\mu\nu}}{a}\right)$ (свойство полулинейности (10.43)), $\bar{a}\left(a_1 a_2 \dfrac{\delta^{\mu\nu}}{a}\right) =$

$= \bar{a}(a\delta^{\mu\nu})$ (фазы равнопредставлены), имеем $\bar{a}^2(a\delta^{\mu\nu})\,\bar{a}^2\left(\dfrac{\delta^{\mu\nu}}{a} a_1 a_2\right) = a_1^2 a_2^2 =$

$= \bar{a}^4(a\delta^{\mu\nu})$; следовательно, $\bar{a} = \sqrt{a_1 a_2}$.

Приведем еще один пример применения уравнения (10.45).

Пример 5. [114]. Пусть в каждой клетке шахматной доски располагается однородный анизотропный квадрат с собственными значениями тензора $a^{\alpha\beta}$, равными a_1 и a_2. Тензор $a^{\alpha\beta}$ в системе координат, направленной по осям квадрата, диагонален. Вероятности каждой из двух возможных ориентаций квадрата одинаковы. Группа симметрии композита содержит повороты на угол $\pi/2$. По теореме Германа–Германа [61, 300] двумерный тензор второго ранга, инвариантный относительно группы, содержащей повороты на угол, меньший π, является шаровым. Следовательно, тензор $\bar{a}^{\alpha\beta}$ шаровой. Поскольку величина $a^2 = a_1 a_2$ не меняется от точки к точке, из равенств (10.45) и (10.43) находим $\bar{a}$: $\bar{a} = \sqrt{a_1 a_2}$.

Этот результат, очевидно, допускает следующее обобщение: для любой макроскопически изотропной среды, у которой произведение a^2 собственных значений тензора $a^{\alpha\beta}$ одинаково во всех точках, $\bar{a} = a$.

Некоторые нелинейные задачи. В проблеме осреднения нелинейных структур ситуация значительно осложняется. Одна из причин заключается в том, что макроскопические свойства в нелинейных задачах характеризуются не только тензором второго ранга $\bar{a}^{\alpha\beta}$, но и, вообще говоря, тензорами более высоких рангов – осредненный лагранжиан может содержать, например, слагаемое $\bar{a}^{\alpha\beta\gamma\delta} v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta$. Мотивов геометрического характера уже недостаточно, чтобы существенно уменьшить число эффективных характеристик: например, имеются тензоры, инвариантные относительно поворотов на угол $\pi/2$ и не выражающиеся через метрический тензор. Таков, в частности, тензор $\bar{a}^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_1^\alpha e_1^\beta e_1^\gamma e_1^\delta + e_2^\alpha e_2^\beta e_2^\gamma e_2^\delta$, где e_1^α и e_2^α – единичные векторы, направленные по осям квадратной решетки; при поворотах на угол $\pi/2$ тензор $\bar{a}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ не изменяется, так как $e_1^\alpha \to e_2^\alpha$, $e_2^\alpha \to -e_1^\alpha$. Поэтому из одних геометрических соображений нельзя вывести, скажем, свойство изотропности нелинейной шахматной структуры.

Однако если выполняется условие (10.29), то композит будет макроизотропен (и даже линеен) – это выражается формулой (10.32).

Имеется широкий класс микроструктур, для которых можно гарантировать выполнение равенства (10.29). Это микроструктуры с лагранжианом Λ, удовлетворяющим при некотором значении b уравнению

$$\Lambda^*(a(y(y')),\ bu_{,\alpha}) = \Lambda(a(y'), u_{,\alpha}),\ y^\alpha = e_\beta^\alpha (y'^\beta - c^\beta). \qquad (10.46)$$

Рассмотрим пример.

Пример 6. Рассмотрим композит с микроструктурой, изображенной на рис. 57. Предположим, что среды 1 и 2 однородны и описываются лагранжианами $\Lambda_1(a_1^\kappa, u_{,\alpha})$ и $\Lambda_2(a_2^\kappa, u_{,\alpha})$, которые связаны уравнениями

$$\Lambda_1^*(a_1^\kappa,\ bu_{,\alpha}) = \Lambda_2(a_2^\kappa,\ u_{,\alpha}),\ \Lambda_2^*(a_2^\kappa,\ bu_{,\alpha}) = \Lambda_1(a_1^\kappa,\ u_{,\alpha}). \qquad (10.47)$$

Тогда справедлива формула (10.46) и, следовательно (10.29) и (10.32).

Найдем, какой произвол в выборе функций Λ_1 и Λ_2 оставляют уравнения (10.47). Применяя к первому уравнению операцию *, получим

$$(\Lambda_1^*)^* = \sup_{u,\alpha} [p^\alpha u_{,\alpha} - \Lambda_1^*(a^\kappa_1, bu_{,\alpha})] = \sup_{k_\alpha} [p^\alpha \frac{1}{b} k_\alpha - \Lambda_1^*(a^\kappa_1, k^\alpha)] =$$

$$= \Lambda_1 (a^\kappa_1, \frac{1}{b} p^\alpha) = \Lambda_2^* (a^\kappa_2, p^\alpha).$$

Полагая здесь $p_\alpha = bu_{,\alpha}$, видим, что второе равенство (10.47) эквивалентно первому. Таким образом, можно произвольно задать функцию Λ_1, и параметр b, а функцию Λ_2 найти из первого равенства (10.47). Вместо задания b можно произвольно задать один из параметров в функции Λ_2.

Пусть, например

$$\Lambda_1 = 2a_1 (u_{,\alpha} w^\alpha)^{r/2} / r, \quad \Lambda_2 = 2 a_2 (u_{,\alpha} w^\alpha)^{s/2} / s, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1.$$

Тогда $\bar{a} = a_1^{1/r} a_2^{1/s}$.

Плоские упругие композиты. Рассмотрим еще один класс моделей сплошных сред, для которых двойственная вариационная задача на ячейке по форме сводится к исходной, — плоские несжимаемые геометрически линейные упругие композиты.

Задача на ячейке. Пусть плотность энергии композита $U(a^\kappa(y), \epsilon_{\alpha\beta})$ — выпуклая функция компонент деформаций $\epsilon_{\alpha\beta} = u_{(\alpha,\beta)}$. Плотность макроэнергии U, как функции от компонент макродеформаций $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$, определяется, согласно (9.33), из вариационной задачи

$$\bar{U}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}) = \inf_{\psi_\alpha} \langle U(a^\kappa(y), \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha|\beta)}) \rangle. \tag{10.48}$$

Истинные деформации в первом приближении представляют сумму $\epsilon_{\alpha\beta} = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha|\beta)}$ (см. (9.17)), поэтому, если среда микроскопически несжимаема, ψ^α удовлетворяют дополнительному условию

$$\bar{\epsilon}^\alpha_\alpha + \psi^\alpha_{|\alpha} = 0. \tag{10.49}$$

Уравнение (10.49) выполняется в каждой точке среды. Будем считать, что среда не содержит пустот или разрезов (линий, на которых перемещения ψ_α могут терпеть разрыв). Тогда $\langle \psi^\alpha_{|\alpha} \rangle = 0$, и, применяя к уравнению (10.49) операцию $\langle \cdot \rangle$, получим, что $\bar{\epsilon}^\alpha_\alpha = 0$, т.е. среда является макроскопически несжимаемой.

Ограничение (10.49) принимает вид

$$\psi^\alpha_{|\alpha} = 0. \tag{10.50}$$

Двойственная вариационная задача на ячейке. Будем отмечать штрихом тензоры-девиаторы: для любого тензора $a^{\alpha\beta}$ по определению $a'^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a^\sigma_\sigma \delta^{\alpha\beta}$. В силу сделанных выше предположений $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} = \bar{\epsilon}'_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon'_{\alpha\beta}$.

Плотность энергии U несжимаемой среды можно рассматривать как функцию от девиатора деформаций $\epsilon'_{\alpha\beta}$. Обозначим через U^* преобразование Юнга — Фенхеля U по $\epsilon'_{\alpha\beta}$:

$$U^*(a^\kappa(y), p'^{\alpha\beta}) = \sup_{\epsilon'_{\alpha\beta}} [p'^{\alpha\beta} \epsilon'_{\alpha\beta} - U(a^\kappa(y), \epsilon'_{\alpha\beta})]. \tag{10.51}$$

По условию в (10.51) максимум ищется по всем $\epsilon'_{\alpha\beta}$ с нулевым следом $\epsilon'^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Очевидно, что U^* при этом будет зависеть только от девиатора напряжений.

Аналогично под $\bar{U}^*(\bar{p}'^{\alpha\beta})$ будем понимать преобразование Юнга – Фенхеля функции $\bar{U}(\bar{\epsilon}'_{\alpha\beta})$.

Легко проверить, что двойственная вариационная задача на ячейке (9.37) в рассматриваемом случае примет форму

$$\bar{U}^*(\bar{p}'^{\alpha\beta}) = \inf_{p'^{\alpha\beta}} \langle U^*(a^{\kappa}(y), p'^{\alpha\beta}) \rangle, \tag{10.52}$$

где нижняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности полям $p'^{\alpha\beta}$, подчиненным связям

$$p^{\alpha\beta}_{|\beta} = 0, \quad p'^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} p^{\gamma}_{\gamma} \delta^{\alpha\beta}, \quad \langle p'^{\alpha\beta} \rangle = \bar{p}'^{\alpha\beta}. \tag{10.53}$$

Покажем, что общее решение первых двух уравнений (10.53) можно записать в виде

$$p'^{\alpha\beta} = e^{(\alpha}_{\cdot\mu} \gamma^{\mu\beta)}, \quad \gamma^{\mu\beta} = \chi^{(\mu|\beta)}, \tag{10.54}$$

где χ^{μ} – произвольное поле, удовлетворяющее условию несжимаемости $\chi^{\alpha}_{|\alpha} = 0$.

Действительно, общее решение уравнения $\chi^{\alpha}_{|\alpha} = 0$ записывается в форме $\chi^{\alpha} = e^{\alpha\beta}\chi_{|\beta}$, где χ – произвольная функция. Из (10.54) находим выражения $p'^{\alpha\beta}$ через χ

$$p'_{11} = -p'_{22} = \gamma_{12} = \tfrac{1}{2}(\chi_{|22} - \chi_{|11}), \; p'_{12} = \gamma_{22} = -\gamma_{11} = -\chi_{|12},$$

а они совпадают с общим решением уравнений равновесия в терминах функций Эри (см. (3.1.29)). Из ограниченности $p'^{\alpha\beta}$ следует, что χ^{α} растут не быстрее линейной функции.

Выделим в χ^{α} растущую на бесконечности составляющую: $\chi^{\alpha} = \bar{\gamma}^{\alpha\beta} y_{\beta} + \varphi^{\alpha}$, и примем, что в решении двойственной задачи φ^{α} ограничены на бесконечности. Поскольку $\gamma^{\alpha}_{\alpha} = 0$, также и $\bar{\gamma}^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Следовательно,

$$\varphi^{\alpha}_{|\alpha} = 0. \tag{10.55}$$

Постоянные $\bar{\gamma}^{\alpha\beta}$ связаны с $\bar{p}'^{\alpha\beta}$ равенством, вытекающим из (10.53) и (10.54): $e^{(\alpha}_{\cdot\mu} \bar{\gamma}^{\mu\beta)} = \bar{p}'^{\alpha\beta}$.

Из выведенных соотношений следует, что двойственная вариационная задача на ячейке может быть записана в следующей форме:

$$\bar{U}^*(e^{(\alpha}_{\cdot\mu} \bar{\gamma}^{\mu\beta)}) = \inf_{\varphi^{\alpha}} \langle U^*(a^{\kappa}(y), \; e^{(\alpha}_{\cdot\mu} \gamma^{\mu\beta)}) \rangle. \tag{10.56}$$

Здесь $\gamma^{\mu\beta} = \bar{\gamma}^{\mu\beta} + \varphi^{(\mu|\beta)}$ и нижняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности полям φ^{α}, удовлетворяющим условию несжимаемости (10.55).

Придадим двойственной вариационной задаче (10.56) форму, полностью аналогичную исходной задаче. Для этого введем новую систему координат $\tilde{y}^{\alpha}$, повернутую относительно старой системы на угол $\pi/4$ и сдвинутую на вектор c^{α}: $\tilde{y}^{\alpha} = s^{\alpha}_{\beta} y^{\beta} + c^{\alpha}$; $s^1_1 = -s^1_2 = +s^2_1 = +s^2_2 = 1/\sqrt{2}$.

Легко проверяется, что любой тензор-девиатор удовлетворяет тождеству $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -e^{(\alpha}_{\cdot\mu}\epsilon_{\mu\beta)}$, где волной отмечаются компоненты тензора в новой системе координат.

Поскольку $e^{(\alpha}_{\cdot\mu}\bar{\gamma}^{\mu\beta)} = \bar{p}'^{\alpha\beta}$, $e^{(\alpha}_{\cdot\mu}\gamma^{\mu\beta)} = \bar{p}'^{\alpha\beta} + e^{(\alpha}_{\cdot\mu}\varphi^{(\mu|\beta))} = \bar{p}'^{\alpha\beta} - \tilde{\varphi}^{(\alpha\|\beta)}$, где $\tilde{\varphi}^{\alpha\|\beta}$ – производные $\tilde{\varphi}^{\alpha}$ по $\tilde{y}^{\beta}$, после замены $\tilde{\varphi}^{\alpha}$ на $-\tilde{\varphi}^{\alpha}$ двойственная вариационная задача приобретает следующую форму:

$$\bar{U}^*(\bar{p}'_{\alpha\beta}) = \inf_{\tilde{\varphi}_\alpha} \langle U^*(a^\kappa(y(\tilde{y})),\ \bar{p}'_{\alpha\beta} + \tilde{\varphi}_{(\alpha\|\beta)})\rangle. \tag{10.57}$$

Макроскопически линейные изотропные среды. Пусть для некоторой постоянной b справедливо равенство

$$\inf_{\tilde{\varphi}_\alpha} \langle U^*(a^\kappa(y(\tilde{y})),\ b(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \tilde{\varphi}_{(\alpha\|\beta)}))\rangle = \inf_{\psi_\alpha} \langle U(a^\kappa(y),\ \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha|\beta)})\rangle. \tag{10.58}$$

В этом случае макроэнергия удовлетворяет уравнению

$$\bar{U}^*(b\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}) = U(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}).$$

Это уравнение, как было показано выше, имеет единственное решение

$$\bar{U}(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}) = \bar{\mu}\,\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}\bar{\epsilon}^{\alpha\beta}, \quad \bar{\mu} = b/2. \tag{10.59}$$

Таким образом, любой упругий композит, который удовлетворяет условию (10.58), макроскопически ведет себя как линейно–упругое тело с модулем сдвига $b/2$.

Приведем одно достаточное условие для выполнения условия (10.58).

Пусть макроизотропный композит составлен из двух фаз, которые перемешаны настолько хорошо, что перемена местами фаз не влияет на макроскопические свойства композита. Предположим, что энергии фаз $U_1(\epsilon_{\alpha\beta})$ и $U_2(\epsilon'_{\alpha\beta})$ таковы, что для некоторой постоянной b справедливо равенство

$$U_1^*(b\epsilon'_{\alpha\beta}) = U_2(\epsilon'_{\alpha\beta}). \tag{10.60}$$

Тогда имеет место аналогичное равенство для преобразования Юнга – Фенхеля энергии второй фазы:

$$U_2^*(b\epsilon'_{\alpha\beta}) = \sup_{p'^{\alpha\beta}} [b\epsilon'_{\alpha\beta}p'^{\alpha\beta} - U_2(p'^{\alpha\beta})] =$$

$$= \sup_{bp'^{\alpha\beta}} [\epsilon'_{\alpha\beta}bp'^{\alpha\beta} - U_1^*(bp'^{\alpha\beta})] = U_1(\epsilon'_{\alpha\beta}).$$

В силу макроизотропности функции $a^\kappa(y(\tilde{y}))$ в (10.58) можно заменить на $a^\kappa(\tilde{y})$. Тогда в левой части (10.58) будет стоять макроэнергия, вычисленная для композита с переставленными фазами, которая по условию равна макроэнергии исходного композита. Таким образом, справедливо равенство (10.58) и, следовательно, формула (10.59). Приведем примеры.

Пример 7. Пусть каждая из фаз является линейной и изотропной:

$$U_1 = \mu_1\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}, \quad U_2 = \mu_2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}.$$

Условие (10.60) выполняется при $b = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}$, и композит имеет модуль сдвига, равный $\sqrt{\mu_1\mu_2}$.

Пример 8. Пусть для композитов с той же микроструктурой

$$U_1 = 2\mu_1(\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta})^{r/2}/r,\ U_2 = 2\mu_2(\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta})^{s/2}/s,\ r^{-1}+s^{-1}=1$$

Аналогично доказывается, что композит ведет себя как линейно-упругий и изотропный и имеет модуль сдвига, равный $\mu_1^{1/r}\mu_2^{1/s}$.

Пример 9. Рассмотрим композит с той же микроструктурой, состоящий из нелинейно-упругих фаз с энергиями

$$U_1 = \begin{cases} \mu_1\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \text{ при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \leqslant k_1^2, \\ +\infty \qquad \text{при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} > k_1^2, \end{cases}$$

$$U_2 = \begin{cases} \mu_2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \qquad\qquad\qquad \text{при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \leqslant k_2^2, \\ a(\sqrt{\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}} - k_2) + \mu_2 k_2^2 \ \text{ при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} > k_2^2. \end{cases}$$

Предположим, что характеристики фаз связаны соотношениями $\mu_1 k_1^2 = \mu_2 k_2^2$, $a = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}\,k_1$. Так же, как в примере 7, доказывается, что композит ведет себя как изотропный и линейно упругий с модулем сдвига $\bar{\mu} = \sqrt{\mu_1\mu_2}$.

Пример 10. Рассмотрим вязкопластический композит с той же геометрической микроструктурой. Плотности диссипации фаз определим формулами

$$D_1 = k_1\sqrt{\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}} + \mu_1\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta},$$

$$D_2 = \begin{cases} 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \leqslant k_2^2, \\ \mu_2(\sqrt{\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}} - k_2)^2 \ \text{ при } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} \geqslant k_2^2. \end{cases}$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеют смысл тензора скоростей деформаций. Если характеристики фаз связаны соотношением $k_1 = 4\mu_1\mu_2 k_2$, то выполняется условие (10.60), и композит ведет себя как линейно вязкая жидкость с вязкостью $\bar{\mu} = \sqrt{\mu_1\mu_2}$, не зависящей от модулей пластичности k_1, k_2.

Инвариантность макросвойств при поворотах на угол $\pi/2$. Запишем формулу (10.57) для упругого композита с энергией $U^*(a^\kappa(y(\tilde{y})), \epsilon'_{\alpha\beta})$. Получим

$$\bar{U}(\bar{\epsilon}'_{\alpha\beta}) = \inf_{\tilde{\varphi}} \langle U(a^\kappa(y(\tilde{y}(z))), \bar{\epsilon}'_{\alpha\beta} + \tilde{\varphi}_{(\alpha|||\beta)})\rangle,$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha|||\beta} = \partial\tilde{\varphi}/\partial z^\beta$, z^β – координаты, повернутые относительно координат. $\tilde{y}^\beta$ на угол $\pi/4$. Координаты z^β повернуты относительно y^β на угол $\pi/2$. В правой части равенства стоит плотность энергии композита, микроструктура которого повернута на угол $\pi/2$, а равенство означает, что макроэнергия при таком повороте не меняется.

Это свойство не является очевидным. Рассмотрим, например, четырехфазный композит с периодической микроструктурой, изображенной на рис. 59. Поворот на угол $\pi/2$ соответствует некоторой перестановке фаз

местами, и нет оснований ожидать, что макромодули при перестановке фаз останутся неизменными. Тем не менее, как следует из полученного равенства, они не меняются. По-видимому, этот факт существенно связан с несжимаемостью упругой среды и для сжимаемых упругих сред не будет иметь места.

Для сред, описываемых одной искомой функцией, аналогом поворота на угол $\pi/2$ является поворот на угол π, при этом также легко привести примеры периодических структур, для которых инвариантность макросвойств при поворотах на угол π не очевидна.

Многие плоские периодические структуры имеют в качестве элемента симметрии поворот на угол $\pi/2$, это позволяет составить уравнение типа (10.30), которое гарантирует макроизотропию. Поворот на угол $\pi/4$ не переводит в себя ни одну периодическую структуру. Поэтому аналогичное уравнение для упругих композитов, вообще говоря, не имеет места, упругая среда характеризуется несколькими модулями, и возможность записать двойственную вариационную задачу в форме, аналогичной исходной, позволяет лишь устанавливать некоторые связи между макромодулями, а не вычислять их явно. Найдем эти связи для линейно упругих композитов.

Эффективные характеристики как функционалы. Начнем с построения общего выражения для плотности энергии плоского несжимаемого упругого анизотропного тела.

Тензор $\epsilon'_{\alpha\beta}$ имеет в каждой системе координат две независимые компоненты $\epsilon_1 = \epsilon'_{11}$ и $\epsilon_2 = \epsilon'_{12}$ (а $\epsilon'_{22} = -\epsilon'_{11}$). Поэтому для плотности энергии U можно написать

$$U = b_{11}\epsilon_1^2 + 2b_{12}\epsilon_1\epsilon_2 + b_{22}\epsilon_2^2.$$

Нетрудно проверить, что при повороте системы координат на угол θ величины ϵ_1, ϵ_2 преобразуются как компоненты вектора при повороте на угол 2θ:

$$\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1 \cos 2\theta + \epsilon_2 \sin 2\theta, \quad \tilde{\epsilon}_2 = -\epsilon_1 \sin 2\theta + \epsilon_2 \cos 2\theta,$$

где $\tilde{\epsilon}_1$, $\tilde{\epsilon}_2$ — компоненты ϵ'_{11} и ϵ'_{12} в повернутой системе координат. Следовательно, b_{11}, b_{12} и b_{22} преобразуются как компоненты симметричного тензора при повороте на угол -2θ, и существует система координат, в которой этот тензор приводится к диагональному виду ($b_{12} = 0$). Введем симметричный тензор $a_{\alpha\beta}$ с нулевым следом, имеющий в главной системе координат тензора $b_{\alpha\beta}$ значения $a_{11} = -a_{22} = 1/\sqrt{2}$, $a_{12} = 0$. Положим в главной системе координат

$$b_{11} = 2(\mu + \eta), \quad b_{22} = 2\mu.$$

Тогда функция $\mu\epsilon'_{\alpha\beta}\epsilon'^{\alpha\beta} + \eta(a^{\alpha\beta}\epsilon'_{\alpha\beta})^2$ в этой системе координат будет совпадать с плотностью внутренней энергии и, поскольку плотность внутренней энергии является скаляром, совпадает с ней во всех системах координат.

Итак, для плотности внутренней энергии плоского несжимаемого упругого тела без ограничения общности можно написать

$$U = \mu\epsilon'_{\alpha\beta}\epsilon'^{\alpha\beta} + \eta(a^{\alpha\beta}\epsilon'_{\alpha\beta})^2, \tag{10.61}$$

где μ, η и $a^{\alpha\beta}$ — физические характеристики упругого тела, $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$, $a^{\alpha}_{\alpha} = 0$.

Тензор $a^{\alpha\beta}$ нормирован условием $a^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} = 1$. Тензор $a^{\alpha\beta}$ определяется углом поворота φ своих главных осей по отношению к некоторым фиксированным осям. Упругие свойства характеризуются тремя параметрами μ, η, φ. Внутреняя энергия положительно определена тогда и только тогда, когда $\mu > 0, \mu + \eta > 0$. Для изотропной среды $\eta = 0$.

Функция $U^*(p'^{\alpha\beta})$ имеет вид

$$U^*(p'^{\alpha\beta}) = \frac{1}{4\mu}\left[p'^{\alpha\beta}p'_{\alpha\beta} - \frac{\eta}{\mu+\eta}(a^{\alpha\beta}p'_{\alpha\beta})^2\right].$$

Функция U^* в терминах $\gamma^{\alpha\beta}$ (см. (10.54)) записывается следующим образом:

$$U^* = \frac{1}{4(\mu+\eta)}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + \frac{\eta}{4\mu(\mu+\eta)}(a^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta})^2. \tag{10.62}$$

Для плотности внутренней энергии $\bar{U}$ плоского макроскопически несжимаемого анизотропного упругого композита, так же как и для U, справедлива формула вида (10.61)

$$\bar{U} = \bar{\mu}\bar{\varepsilon}'_{\alpha\beta}\bar{\varepsilon}'^{\alpha\beta} + \bar{\eta}(\bar{a}^{\alpha\beta}\bar{\varepsilon}'_{\alpha\beta})^2.$$

Эффективные характеристики $\bar{\mu}, \bar{\eta}$ и $\bar{\varphi}$ являются некоторыми функционалами от $\mu(y), \eta(y), \varphi(y)$. Функционалы $\bar{\mu}$ и $\bar{\eta}$ полулинейны по $\mu(y)$ и $\eta(y)$. Будем снабжать индексом $\times$ их значения на полях $(\mu+\eta)^{-1}, \eta\mu^{-1}(\mu+\eta)^{-1}, \varphi$. Из формул (10.48), (10.56) и (10.62) вытекает, что между функционалами $\bar{\mu}, \bar{\eta}$ и $\bar{\varphi}$ имеются следующие связи:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}(\bar{\mu}^\times + \bar{\eta}^\times) = 1,\\
&\bar{\eta}\bar{\mu}^\times = \bar{\eta}^\times/(\bar{\mu}^\times + \bar{\eta}^\times),\\
&\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^\times.
\end{aligned} \tag{10.63}$$

Второе равенство (10.63) можно переписать при помощи первого равенства в симметричной форме

$$\bar{\eta}\bar{\mu}^\times = \bar{\eta}^\times\bar{\mu}. \tag{10.64}$$

Применим эти соотношения к анализу упругих свойств шахматных структур.

Пример 11. Рассмотрим шахматную структуру, изображенную на рис. 57. Пусть фазы изотропны и имеют модули сдвига μ_1, μ_2. Рассмотрим функционал $\mu_1\mu_2\bar{\mu}^\times \equiv \mu_1\mu_2\bar{\mu}(1/\mu)$. В силу полулинейности функционала $\bar{\mu}(\mu)$ имеем $\mu_1\mu_2\bar{\mu}^\times = \bar{\mu}(\mu_1\mu_2/\mu)$. Функция $\mu_1\mu_2/\mu$ для шахматной структуры принимает значение μ_1 в фазе 2 и значение μ_2 в фазе 1. Поскольку при перестановке фаз значение $\bar{\mu}$ не меняется, $\mu_1\mu_2\bar{\mu}^\times = \bar{\mu}$. Аналогично $\mu_1\mu_2\bar{\eta}^\times = \bar{\eta}$. Подставляя эти значения $\bar{\mu}^\times$ и $\bar{\eta}^\times$ в первое равенство (10.63), находим соотношение, которое связывает макро- и микромодули упругости

$$\bar{\mu}(\bar{\mu} + \bar{\eta}) = \mu_1\mu_2. \tag{10.65}$$

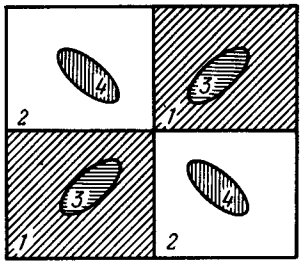


Рис. 59.

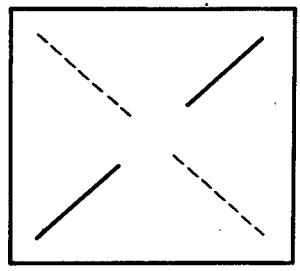


Рис. 60.

Если бы упругая шахматная структура была макроизотропна ($\overline{\eta} = 0$), то из соотношения (10.65) можно было бы найти эффективный модуль сдвига: $\overline{\mu} = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$. Однако ожидать этого нет оснований: растяжение вдоль сторон квадратов и вдоль их диагоналей сопровождается, вообще говоря, разными приращениями энергии. Поэтому приведенные соображения позволяют найти только связь между макромодулями, а не их значения.

Пример 12. Рассмотрим четырехфазный композит с периодической структурой, изображенной на рис. 59. Фазы характеризуются модулями сдвига μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Пусть модули сдвига фаз связаны ограничением $\mu_1\mu_2 = \mu_3\mu_4$. Тогда функция $\mu_1\mu_2/\mu(y)$ принимает в первой, второй, третьей и четвертой фазах значения соответственно μ_2, μ_1, μ_4 и μ_3. Они отвечают перестановке местами первой и второй фаз, третьей и четвертой фаз. Эту перестановку можно осуществить поворотом на угол $\pi/2$. Поэтому при перестановке фаз местами макромодули не меняются. Следовательно, $\mu_1\mu_2\overline{\mu}^{\times} = \overline{\mu}(\mu_1\mu_2/\mu) = \overline{\mu}$, $\mu_1\mu_2\overline{\eta}^{\times} = \overline{\eta}^{\times}(\mu_1\mu_2/\mu) = \overline{\eta}$. Из (10.64) находим связь между микро- и макромодулями упругости $\overline{\mu}(\overline{\mu} + \overline{\eta}) = \mu_1\mu_2 = \sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$. Эта связь содержит три свободных параметра μ_1, μ_2 и μ_3, четвертый находится из ограничения $\mu_1\mu_2 = \mu_3\mu_4$. Рассмотрим один частный случай. Положим $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и устремим μ_3 к нулю, а μ_4 — к бесконечности так, чтобы $\mu_3\mu_4 = \mu^2$. В пределе получим периодическую структуру, содержащую полости и жесткие включения. При этом макромодули связаны с модулем сдвига матрицы μ соотношением $\overline{\mu}(\overline{\mu} + \overline{\eta}) = \mu^2$. Если стянуть границы включений в отрезки, то получится однородное тело, содержащее периодически расположенные разрезы и жесткие подкрепления (штриховые и сплошные линии на рис. 60), при этом по-прежнему справедливо равенство $\overline{\mu}(\overline{\mu} + \overline{\eta}) = \mu^2$.

§ 11. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОСРЕДНЕНИЯ

Смесь идеальных жидкостей. Начнем с простейшей из пространственных задач осреднения — задачи о макроскопических свойствах гетерогенной смеси, состоящей из двух или нескольких идеальных сжимаемых жидкостей с различными свойствами.

Описание движений будем вести в лагранжевых координатах. Как и раньше, для того чтобы различать микро- и макрохарактеристики, введем быстрые и медленные лагранжевы координаты η^a и ξ^a. Будем рассматривать несколько более общую задачу, предполагая, что физические характе-

ристики, которые входят в выражение для внутренней энергии U (начальная плотность ρ_0, показатель адиабаты γ, удельная теплоемкость c_v и т.п.), являются произвольными функциями быстрых переменных η^a, определенными в трехмерном пространстве R_η. Если жидкость содержит только две фазы, то каждая из физических характеристик является кусочно постоянной функцией η^a и принимает два значения. Физические свойства компонент смеси задаются функцией $U(\eta, \rho, S)$.

Функции $\overset{\circ}{x}{}^i$ будем рассматривать как функции медленных переменных и положим для простоты $\det \left\| \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial \xi^a} \right\| = 1$. В закон движения входят как быстрая, так и медленная переменные: $x^i = x^i(\eta^a, \xi^a, t)$, $\eta^a = \xi^a/\epsilon$.

Естественно считать, что при $\epsilon \to 0$ удельный объем $\dfrac{1}{\rho} = \det \left\| \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right\| / \rho_0$ ограничен. Этому условию удовлетворяет асимптотическое разложение по ϵ закона движения вида

$$x^i = \bar{x}^i(\xi^a, t) + \epsilon y^i(\eta^a, \xi^a, t, \epsilon), \tag{11.1}$$

где y^i вместе со своими первыми производными ограничены в R_η.

Не уменьшая общности, на y^i можно наложить ограничения

$$\langle \rho_0 y^i \rangle = 0, \tag{11.2}$$

где $\langle \cdot \rangle$ – среднее по R_η. Тогда функции $\bar{x}^i$ будут иметь смысл осредненного (по массе) закона движения:

$$\bar{x}^i = \langle \rho_0 x^i \rangle / \bar{\rho}_0, \quad \bar{\rho}_0 = \langle \rho_0 \rangle.$$

Функции $\bar{x}^i(\xi^a, t)$ определяют движение макроконтинуума.

Процессы, происходящие в среде, будем считать настолько медленными, что оказываются справедливыми следующие два условия: 1) в каждом элементарном объеме смеси успевает установиться термодинамическое равновесие, и, следовательно, температура и давление являются функциями только медленных переменных и 2) $\epsilon^2 \cdot y^i_{,t} y_{i,t} \ll \bar{v}_i \bar{v}^i$, $\bar{v}^i = \bar{x}^i_{,t}$.

Наша задача заключается в вычислении действия смеси

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho_0 \left(\tfrac{1}{2} v_i v^i - U(\eta, \rho, S) \right) d\overset{\circ}{v} \tag{11.3}$$

как функционала от макрохарактеристик.

Сформулируем ответ: действие (11.3) как функционал от макрохарактеристик в первом приближении дается формулой

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \bar{\rho}_0 \left(\tfrac{1}{2} \bar{v}_i \bar{v}^i - \bar{U} \right) d\overset{\circ}{v}\, dt. \tag{11.4}$$

Макроэнергия $\bar{U}$, как функция от макроплотности $\bar{\rho}$ и макроэнтропии $\bar{S}$, вычисляется по правилу

$$\bar{U}(\bar{\rho}, \bar{S}) = \sup_{p, T} \left[\frac{\langle \rho_0 \Psi(\eta^a, p, T) \rangle}{\langle \rho_0 \rangle} - \frac{p}{\bar{\rho}} + T\bar{S} \right], \tag{11.5}$$

где Ψ – потенциал Гиббса (см. пример 8 § 3 гл. II), а максимум в (11.5)

ищется по всем постоянным p и T. Таким образом, для вычисления макроэнергии надо сначала найти интеграл $\langle \rho_0 \Psi \rangle / \langle \rho_0 \rangle$, который зависит от p и T как от параметров, а затем выполнить преобразование типа преобразования Юнга – Фенхеля.

Макроплотность и макроэнтропия определены равенствами

$$\frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} = \det \left\| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \xi^a} \right\|, \quad \bar{S} = \langle \rho_0 S \rangle / \bar{\rho}_0 . \tag{11.6}$$

Правило вычисления макроэнергии напоминает правило осреднения в одномерных структурах и отличается лишь тем, что среднее вычисляется по трехмерному пространству и имеется дополнительная термодинамическая переменная.

Доказательство формул (11.4) и (11.5) основано на следующем замечательном соотношении:

$$\left\langle \frac{\rho_0}{\rho} \right\rangle = \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}}. \tag{11.7}$$

При $\rho_0 \equiv \text{const}$ оно записывается в виде

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\rho}}$$

и показывает, что макроскопический удельный объем равен среднему от микроскопических удельных объемов.

Соотношение (11.7) следует из уравнения неразрывности $\frac{\rho_0}{\rho} = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right\|$, формулы для детерминанта (1.3.6) и равенства (11.1). Действительно, дифференцируя (11.1) по ξ^a, имеем $\partial x^i / \partial \xi^a = \bar{x}^i_a + y^i_{|a}$ $(y^i_{|a} \equiv \partial y^i / \partial \eta^a)$. Следовательно,

$$\left\langle \frac{\rho_0}{\rho} \right\rangle = \langle \det \| x^i_a \| \rangle = \frac{1}{3!} \langle e_{ijk} (\bar{x}^i_a + y^i_{|a}) (\bar{x}^j_b + y^j_{|b}) (\bar{x}^k_c + y^k_{|c}) e^{abc} \rangle =$$

$$= \frac{1}{3!} (\langle e_{ijk} \bar{x}^i_a \bar{x}^j_b \bar{x}^k_c e^{abc} \rangle + 3 \langle e_{ijk} \bar{x}^i_a y^j_{|b} y^k_{|c} e^{abc} \rangle +$$

$$+ 3 \langle e_{ijk} \bar{x}^i_a \bar{x}^j_b y^k_{|c} e^{abc} \rangle + \langle e_{ijk} y^i_{|a} y^j_{|b} y^k_{|c} e^{abc} \rangle).$$

Поскольку $\bar{x}^i_a$ не зависят от быстрых переменных, а

$$\langle y^j_{|b} y^k_{|c} e^{abc} \rangle = \langle (y^j y^k_{|c} e^{abc})_{|b} \rangle = 0,$$

$$\langle y^i_{|a} y^j_{|b} y^k_{|c} e^{abc} \rangle = \langle (y^i y^j_{|b} y^k_{|c} e^{abc})_{|a} \rangle = 0$$

(так как y^i и их производные ограничены в R_η),

$$\left\langle \frac{\rho_0}{\rho} \right\rangle = \det \left\| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \xi^a} \right\|,$$

что и требовалось.

На первый взгляд формула (11.7) противоречит формуле

$$\bar{\rho} = \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2, \tag{11.8}$$

которую мы использовали в § 7 для двухфазной среды (там черта над ρ не ставилась, так как не было необходимости различать микро- и макрохарактеристики). Однако формула (11.8) также справедлива. Она следует из равенства

$$\bar{\rho} = \langle \rho \det \| \partial x^i/\partial \xi^a \| / \det \| \partial \bar{x}^i/\partial \xi^a \| \rangle. \tag{11.9}$$

Действительно, введем величины

$$c_1 = \langle \det \| \partial x^i/\partial \xi^a \| / \det \| \partial \bar{x}^i/\partial \xi^a \| \rangle_1,$$

$$c_2 = \langle \det \| \partial x^i/\partial \xi^a \| / \det \| \partial \bar{x}^i/\partial \xi^a \| \rangle_2,$$

где $\langle \cdot \rangle_1, \langle \cdot \rangle_2$ – средние по первой и второй фазам. Величины c_1 и c_2 имеют смысл объемных концентраций фаз в актуальном состоянии. Если плотности постоянны по частицам каждой из фаз, то из (11.9) следует равенство (11.8).

В справедливости соотношения (11.9) легко убедиться прямой выкладкой:

$$\left\langle \rho \frac{\det \| \partial x^i/\partial \xi^a \|}{\det \| \partial \bar{x}^i/\partial \xi^a \|} \right\rangle = \frac{\langle \rho_0 \rangle}{\det \| \partial \bar{x}^i/\partial \xi^a \|} = \bar{\rho}.$$

Перейдем к доказательству формул (11.4) и (11.5). Представим $U(\rho, S)$ в виде

$$U(\eta, \rho, S) = \sup_{p, T} \left[\Psi(\eta, p, T) - \frac{p}{\rho} + TS \right].$$

Тогда

$$\int_V \rho_0 U \, d\overset{\circ}{v} = \sup_{p, T} \int_V \left(\rho_0 \Psi(\eta, p, T) - p \frac{\rho_0}{\rho} + T \rho_0 S \right) d\overset{\circ}{v}. \tag{11.10}$$

По условию p и T – функции только медленных координат. Привлекая соотношения (9.23) и (11.7), можно переписать равенство (11.10) в виде

$$\int_V \rho_0 U \, d\overset{\circ}{v} = \sup_{p(\xi), T(\xi)} \int_V \left(\langle \rho_0 \Psi(\eta, p, T) \rangle - p \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} + T \langle \rho_0 S \rangle \right) d\overset{\circ}{v}.$$

Из этого соотношения следует формула (11.5).

Рассмотрим кинетическую энергию смеси

$$\int_V \tfrac{1}{2} \rho_0 v_i v^i \, d\overset{\circ}{v}. \tag{11.11}$$

Подставим в выражение для кинетической энергии (11.11) разложение (11.1). В силу (11.2) и (9.23)

$$\int_V \tfrac{1}{2} \rho_0 v_i v^i \, d\overset{\circ}{v} = \int_V \left[\tfrac{1}{2} \langle \rho_0 \rangle \bar{x}^i_{,t} \bar{x}_{i,t} + \tfrac{1}{2} \epsilon^2 \langle \rho_0 y^i_{,t} y_{i,t} \rangle \right] d\overset{\circ}{v}. \tag{11.12}$$

Второе слагаемое в (11.12) в соответствии со сделанным предположением можно отбросить по сравнению с первым, поэтому для действия в первом приближении справедлива формула (11.4).

Если характерное время, за которое устанавливается термодинамическое равновесие, гораздо больше характерного времени процесса, но процесс достаточно плавный для того, чтобы успевало выравниваться давление, то движение можно считать адиабатическим, при этом, как легко проверить, макроэнергия как функция макроплотности будет вычисляться по правилу

$$\bar{U} = \sup_p \left[\frac{\langle \rho_0\, i(\eta, p, S(\eta)) \rangle}{\langle \rho_0 \rangle} - p\,\frac{1}{\bar{\rho}} \right], \tag{11.13}$$

где i – энтальпия (см. пример 8 § 3 гл. II).

Предположение об адиабатичности обычно приемлемо в задачах о распространении звука в смесях. Скорость звука в смеси находится по функции $\bar{U}(\bar{\rho})$ (11.13) по такой же формуле, как и в идеальном газе

$$\bar{a}^2 = \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}}\,\bar{\rho}^2\,\frac{d\bar{U}}{d\bar{\rho}}\,.$$

Если сжимаемости фаз сильно различаются, то скорость звука в смеси может оказаться гораздо меньше скорости звука в жесткой фазе, даже когда объемная доля мягкой фазы очень мала. Это видно из равенства

$$\frac{1}{\bar{\rho}^2\bar{a}^2} = \frac{1}{\langle \rho_0 \rangle}\left\langle \rho_0 \frac{1}{\rho^2 a^2} \right\rangle, \tag{11.14}$$

которое легко выводится[1]) из (11.13). Действительно, для волн, распространяющихся по начальному состоянию, $\rho_0 = \rho$, $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}$, поэтому

$$\frac{1}{\bar{a}^2} = \bar{\rho}_0 \left\langle \frac{1}{\rho_0 a^2} \right\rangle.$$

Пусть в двухфазной смеси a_1 и a_2 – скорости звука в каждой из фаз, c_1, c_2 – объемные концентрации фаз, ρ_1 и ρ_2 – плотности фаз в начальном состоянии. Тогда

$$\frac{1}{\bar{a}^2} = \bar{\rho}_0 \left(\frac{c_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{c_2}{\rho_2 a_2^2} \right). \tag{11.15}$$

Если $\rho_1 \gg \rho_2$, $c_1 \gtrsim c_2$, $a_1 \gtrsim a_2$ (например, фаза 1 – жидкость, фаза 2 – пузырьки газа), то первым слагаемым в правой части (11.15) можно пренебречь по сравнению со вторым, и поскольку $\bar{\rho}_0 \approx c_1\rho_1$,

$$\bar{a}^2 = \rho_2 a_2^2/\rho_1 c_1 c_2\,. \tag{11.16}$$

Например, при $a_1 = 1500$ м/с, $a_2 = 300$ м/с, $c_2 = 10^{-3}$, $\rho_2/\rho_1 = 10^{-3}$ имеем $\bar{a} \approx 300$ м/с, при $c_2 = 10^{-2}$ скорость еще меньше и равна 95 м/с. Ошибка, возникающая при переходе от (11.15) к (11.16), составляет при $c_2 = 10^{-3}$ около 5 м/с.

Смесь упругих сред с разными сжимаемостями. Приведенные выше решения удается обобщить на упругий композит, если его компоненты изотропны и имеют одинаковые модули сдвига, а перемещения настолько

[1]) Дифференцируя равенства $1/\rho = \partial i/\partial p$, $1/\bar{\rho} = \langle \rho_0\, \partial i/\partial p \rangle/\langle \rho_0 \rangle$ по p, получим соотношения $1/\rho^2 a^2 = -\partial^2 i/\partial p^2$, $1/\bar{\rho}^2\bar{a}^2 = -\langle \rho_0\, \partial^2 i/\partial p^2 \rangle/\langle \rho_0 \rangle$, из которых и следует (11.14).

малы, что можно применить геометрически линейную теорию. При этом, как и для смеси жидкостей, давление может быть нелинейной функцией плотности (в геометрически линейной теории $\rho - \rho_0 = -\mu_0 \epsilon_i^i$).

Итак, пусть микроэнергия среды имеет вид

$$U = U_0 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon^{ij},$$

где μ – постоянная, а U_0 – функция от быстрых переменных и от первого инварианта тензора деформаций ϵ_i^i: $U_0 = U_0(y, \epsilon_i^i)$. Функцию U_0 будем считать строго выпуклой по ϵ_i^i. Для линейно упругого тела $U_0 = \frac{1}{2} \lambda(y)(\epsilon_i^i)^2$.

Макроэнергия $\bar{U}$, как функция от макродеформаций $\bar{\epsilon}_{ij}$, находится из решения вариационной задачи

$$\bar{U} = \inf_{u^i(y)} \langle U_0(y, \bar{\epsilon}_i^i + u_{|i}^i) + \mu(\bar{\epsilon}_{ij} + u_{(i|j)})(\bar{\epsilon}^{ij} + u^{(i|j)}) \rangle. \tag{11.17}$$

Покажем, что $\bar{U}$ дается формулой

$$\bar{U} = H(\bar{\epsilon}_i^i) + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij} - \mu(\bar{\epsilon}_i^i)^2, \tag{11.18}$$

где функция H находится по функции U_0 при помощи интегрирования и вычисления преобразования Юнга – Фенхеля:

$$H(\bar{\epsilon}_i^i) = \sup_c [c\, \bar{\epsilon}_i^i - \langle G^*(y, c) \rangle], \quad c = \text{const}, \tag{11.19}$$

$$G^*(y, c) = \sup_{\epsilon_i^i} [c \epsilon_i^i - G(y, \epsilon_i^i)],$$

$$G(y, \epsilon_i^i) = U_0(y, \epsilon_i^i) + \mu(\epsilon_i^i)^2. \tag{11.20}$$

Выпишем уравнения Эйлера вариационной задачи (11.17):

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_k^k} \delta^{ij} + 2\mu(\bar{\epsilon}^{ij} + u^{(i|j)}) \right)_{|j} = 0. \tag{11.21}$$

Будем искать u_i в классе потенциальных векторов: $u_i = \varphi_{|i}$. Потенциал φ считаем ограниченным на бесконечности вместе со своими первыми и вторыми производными. Уравнения (11.21) для потенциальных векторов перемещений сводятся к одному уравнению для потенциала φ

$$\frac{\partial U_0(y, \bar{\epsilon}_i^i + \Delta\varphi)}{\partial \bar{\epsilon}_i^i} + 2\mu \Delta\varphi = \text{const}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\left. \frac{\partial G(y, \epsilon_i^i)}{\partial \epsilon_i^i} \right|_{\epsilon_i^i = \bar{\epsilon}_i^i + \Delta\varphi} = c = \text{const}, \tag{11.22}$$

где $G(y, \epsilon_i^i)$ – функция (11.20). Разрешая уравнение (11.22) относительно $\Delta\varphi$, найдем

$$\bar{\epsilon}_i^i + \Delta\varphi = \frac{\partial G^*(y, c)}{\partial c}, \quad c = \text{const}. \tag{11.23}$$

Применяя к уравнению (11.23) оператор осреднения $\langle \cdot \rangle$, получим необходимое условие разрешимости этого уравнения

$$\bar{\epsilon}_i^{\,i} = \left\langle \frac{\partial G^*(y, c)}{\partial c} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial c} \langle G^*(y, c) \rangle, \tag{11.24}$$

которое представляет связь между постоянными $\bar{\epsilon}_i^{\,i}$ и c. Дальше предполагается, что решение уравнения (11.23) существует (для периодических микроструктур это устанавливается при помощи неравенств (2.1.27) по общей схеме, изложенной в § 1 гл. II).

Поле $u_i = \varphi_{|i}$, построенное по решению уравнения (11.23), удовлетворяет уравнениям Эйлера вариационной задачи (11.17) и в силу единственности решения является минимизирующим. Осталось вычислить энергию на поле $\varphi_{|i}$. Поскольку $\langle \bar{\epsilon}^{ij} \varphi_{|ij} \rangle = 0$ ($\varphi_{|i}$ ограничены на бесконечности),

$$\langle U \rangle = \langle U_0 \rangle + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij} + \mu \langle \varphi_{|ij} \varphi^{|ij} \rangle.$$

Интегрированием по частям устанавливается справедливость равенства $\langle \varphi_{|ij} \varphi^{|ij} \rangle = \langle (\Delta\varphi)^2 \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \langle U_0 + \mu(\bar{\epsilon}_i^{\,i} + \Delta\varphi)^2 \rangle + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij} - \mu(\bar{\epsilon}_i^{\,i})^2 = \\ &= \langle G(y, \bar{\epsilon}_i^{\,i} + \Delta\varphi) \rangle + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij} - \mu(\bar{\epsilon}_i^{\,i})^2 = \\ &= \langle c(\bar{\epsilon}_i^{\,i} + \Delta\varphi) - G^*(y, c) \rangle + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij} - \mu(\bar{\epsilon}_i^{\,i})^2. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Здесь величина c связана с $\bar{\epsilon}_i^{\,i} + \Delta\varphi$ уравнением (11.23). Так как $\langle c(\bar{\epsilon}_i^{\,i} + \Delta\varphi) \rangle = c\bar{\epsilon}_i^{\,i}$ и имеет место равенство (11.24), из (11.25) вытекают соотношения (11.18)–(11.20).

В частном случае линейно упругой среды

$$G(y, \epsilon_i^i) = \tfrac{1}{2} (\lambda + 2\mu)(\epsilon_i^i)^2, \quad G^*(y, c) = \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} c^2,$$

поэтому

$$\bar{U} = \tfrac{1}{2} [\langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} - 2\mu] (\bar{\epsilon}_k^{\,k})^2 + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij}. \tag{11.26}$$

Для слоистой упругой среды с одинаковыми модулями сдвига это выражение переходит в выражение (10.22)[1]).

Для двухфазной среды со значениями коэффициентов Ламе λ_1, λ_2 и объемными концентрациями c_1, c_2 из формулы (11.26) следует формула Хилла [301]

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1\lambda_2 + 2\mu(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)}{c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1 + 2\mu} (\bar{\epsilon}_i^{\,i})^2 + \mu \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}^{ij}.$$

Теплопроводность периодически микронеоднородной среды. Задача на ячейке. Остальная часть параграфа посвящена задаче об установившейся

---

[1]) При доказательстве этого утверждения надо воспользоваться легко проверяемыми равенствами

$$\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} - 2\mu = \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} = 2\mu \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}.$$

теплопроводности в покоящейся сплошной среде. В этой задаче ищется минимум функционала

$$\int_V \tfrac{1}{2}\,\lambda^{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}\,d^3x - \int_{\partial V} q\theta\,d\sigma. \tag{11.27}$$

Здесь θ – температура, λ^{ij} – тензор коэффициентов теплопроводности, q – приток тепла на единицу поверхности. Объемный интеграл имеет смысл диссипации, поверхностный – притока тепла.

Из большого числа результатов, относящихся к осреднению функционала (11.27), мы разберем несколько: общие формулы осреднения периодических структур и свойства задачи на ячейке, теорию пространственных периодических гармонических функций, построение точного решения задачи на ячейке для сферических включений, формулы Максвелла и Рэлея и их уточнения, обобщенные формулы Рэлея на произвольные решетки, обобщение неравенства Полиа – Шиффера на периодические структуры.

Начнем с задачи об осредненном описании изотропной среды, содержащей периодически расположенные включения (рис. 55). Включения имеют коэффициент теплопроводности λ_2, матрица – коэффициент теплопроводности λ_1.

В соответствии с общей теорией решение имеет вид

$$\theta = T(x) + \epsilon\psi\left(\frac{x}{\epsilon},\ x\right), \tag{11.28}$$

где $\psi(y, x)$ – периодическая функция y, $T(x)$ – поле средней температуры и

$$\langle\psi\rangle = 0. \tag{11.29}$$

Задача на ячейке заключается в минимизации функционала

$$J = \frac{1}{2\,|B|}\int_B \lambda(y)\,(T_i + \psi_{|i})\,(T^i + \psi^{|i})\,d^3y \tag{11.30}$$

по всем периодическим функциям $\psi(y)$, удовлетворяющим условию $\langle\psi\rangle = 0$. Здесь $T_i \equiv T_{,i}$ считаются постоянными. Функция $\lambda(y)$ принимает значение λ_1 в области $B-A$ и значение λ_2 в области A.

Из строгой выпуклости функционала J (при $\lambda(y) > 0$ и $\langle\psi\rangle = 0$) и выпуклости множества периодических функций следует, что минимизирующий элемент находится единственным образом.

Для построения осредненных уравнений надо знать минимальное значение $\Phi(T_i)$ функционала J.

Ограничение $\langle\psi\rangle = 0$ для нахождения минимального значения функционала J несущественно, так как функционал инвариантен относительно сдвигов по ψ на постоянную. Поэтому дальше ψ будем искать с точностью до постоянной и ограничение $\langle\psi\rangle = 0$ отбросим.

Минимизирующий элемент $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области B:

$$\Delta\psi = 0 \qquad \text{в } B, \tag{11.31}$$

условиям склейки решений на границе включения ∂A

$$[\psi]_{\partial A} = 0,\quad [\lambda(T_i + \psi_{|i})]_{\partial A}\,\nu^i = 0 \quad \text{на } \partial A \tag{11.32}$$

и условию периодичности

$$[\psi]_{(s)} = 0,\quad [\lambda(T_i + \psi_{|i})]_{(s)}\,\nu^i_{(s)} = 0. \tag{11.33}$$

Здесь $[f]_{\partial A} \equiv f_2 - f_1$, индексами 1 и 2 отмечаются предельные значения величин при подходе к поверхности ∂A соответственно со стороны матрицы и включения, вектор нормали ν^i на ∂A направлен в сторону матрицы, а на ∂B – в сторону, внешнюю к ячейке.

В силу линейности краевой задачи (11.31)–(11.33) ее решение линейно зависит от T_i. Поэтому Ф есть квадратичная форма по T_i: $\Phi = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{ij} T_i T_j$. Осредненный функционал имеет вид

$$\int_V \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}^{ij} T_{,i} T_{,j}\, dv - \int_V qT\, d\sigma,$$

а осредненные уравнения суть уравнения Эйлера этого функционала –

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\ \bar{\lambda}^{ij}\ \frac{\partial T}{\partial x^j} = 0 \quad \text{в } V, \quad \bar{\lambda}^{ij}\ \frac{\partial T}{\partial x^j}\ \nu_i = q \quad \text{на } \partial V.$$

Если решение краевой задачи (11.31)–(11.33) построено, то Ф находится по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2|B|} \int_B \left\{ \lambda(T_i + \psi_{|i}) \psi^{|i} + \lambda(T_i + \psi_{|i}) T^i \right\} d^3y =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \lambda \rangle T_i T^i + \frac{[\lambda]}{2|B|} T_i \int_{\partial A} \psi \nu^i\, d^2y; \tag{11.34}$$

где $[\lambda] = \lambda_2 - \lambda_1$.

В случае сферических включений на основании равенства

$$\int_{\partial A} \psi \nu^i\, d^2y = \int_A \psi_{|i}\, d^3y$$

и теоремы о среднем по объему для гармонических функций (интеграл по шару от гармонической функции равен ее значению в центре шара, умноженному на объем шара) выражению (11.34) можно придать следующую форму:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \langle \lambda \rangle T_i T^i + \tfrac{1}{2} c\, [\lambda]\, T^i \psi_{|i}(0), \tag{11.35}$$

где $c = |A|/|B|$ – объемная концентрация включений.

Определим средний по ячейке вектор потока тепла равенством

$$\bar{q}_i = \langle \lambda (T_i + \psi_{|i}) \rangle = \langle \lambda \rangle T_i + \langle \lambda \psi_{|i} \rangle.$$

Переходя в слагаемом $\langle \lambda \psi_{|i} \rangle$ от интегрирования по ячейке к интегрированию по поверхности, получим

$$\bar{q}_i = \langle \lambda \rangle T_i + \frac{[\lambda]}{|B|} \int_{\partial A} \psi \nu_i\, d^2y. \tag{11.36}$$

Из равенства (11.34) следует

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \bar{q}^i T_i.$$

Отсюда

$$\bar{q}^i = \bar{\lambda}^{ij} T_j. \tag{11.37}$$

Вектор T_i, очевидно, совпадает со средним по ячейке градиентом температуры $\langle T_i + \psi_{|i} \rangle$. Уравнения (11.37) устанавливают связь между средним потоком тепла и средним градиентом температуры. При осреднении континуум утрачивает изотропию и тензор эффективных коэффициентов теплопроводности $\overline{\lambda}^{ij}$, вообще говоря, не является шаровым. Отметим, что соотношения взаимности Онсагера $\overline{\lambda}^{ij} = \overline{\lambda}^{ji}$ остаются справедливыми. В терминах среднего потока тепла осредненные уравнения принимают естественную форму

$$\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial x^i} = 0 \quad \text{в } V, \quad \bar{q}^i \nu_i = q \text{ на } \partial V.$$

Обсудим два предельных случая. Если $\lambda(y) = \text{const}$, то в силу периодичности $\psi(y)$ выражение для функционала J можно переписать в виде

$$J = \frac{1}{2} \lambda T_i T^i + \frac{\lambda}{2|B|} \int_B \psi_{|i} \psi^{|i} \, d^3 y.$$

Поэтому минимум достигается при $\psi \equiv \text{const}$ и равен $\frac{1}{2} \lambda T_i T^i$. Осредненный функционал, как и следовало ожидать, совпадает с исходным.

Пусть теперь $\lambda_1 = 0$. Полагая $\psi = -T_i y^i$ при $y \in A$ и доопределяя ψ вне A так, чтобы выполнялись условия периодичности, получим $\inf J = 0$. Это согласуется с физическим смыслом: при $\lambda_1 = 0$ среда тепло не проводит.

Отметим одно важное свойство минимизирующего элемента. Пусть $\lambda(y)$ — четная функция y, или, что то же, область A центрально симметрична. Тогда минимизирующий элемент функционала J есть нечетная функция y. В самом деле, представим $\psi(y)$ в виде суммы четной и нечетной составляющих $\psi_2(y)$ и $\psi_1(y)$: $\psi_1(y) = \frac{1}{2}(\psi(y) - \psi(-y))$, $\psi_2(y) = \frac{1}{2}(\psi(y) + \psi(-y))$. Поскольку дифференцирование меняет четность,

$$J = \frac{1}{2} \int_B \lambda(y)(T_i + \psi_{1|i})(T^i + \psi_1^{|i}) \, d^3 y + \frac{1}{2} \int_B \lambda(y) \psi_{2|i} \psi_2^{|i} \, d^3 y.$$

При минимизации ψ_1 и ψ_2 можно изменять независимо, поэтому минимум по ψ_2 достигается при $\psi_2 \equiv \text{const}$.

Значение эффективных коэффициентов теплопроводности даже в простейшем случае сферических включений может быть найдено только численными методами. Поэтому оказывается полезным то обстоятельство, что $\overline{\lambda}^{ij}$ связаны с минимальным значением некоторого функционала. Задаваясь периодическими функциями ψ и вычисляя интеграл (11.30), будем получать оценки $\overline{\lambda}^{ij}$ сверху. Например, полагая $\psi = 0$, придем к оценке: для любых T_i справедливо неравенство $\Phi = \frac{1}{2} \overline{\lambda}^{ij} T_i T_j \leqslant \frac{1}{2} \langle \lambda \rangle T_i T^i$. В частности, для изотропного осредненного континуума с диагональным тензором $\overline{\lambda}^{ij} = \overline{\lambda} \delta^{ij}$ это неравенство показывает, что $\overline{\lambda} \leqslant \langle \lambda \rangle$.

Двойственная вариационная задача выглядит следующим образом:

$$\Phi(T_i) = \sup_{q^i} \left(T_i \langle q^i \rangle - \frac{1}{2|B|} \int_B \frac{1}{\lambda} q^i q_i \, d^3 y \right), \tag{11.38}$$

где верхняя грань вычисляется по всем q^i, удовлетворяющим ограничениям

$$\frac{\partial q^i}{\partial y^i} = 0 \text{ в } B, \quad [q_i]_{\partial A} \nu^i = 0 \text{ на } \partial A, \quad [q_i]_s \nu^i_{(s)} = 0 \text{ на } \partial B, \quad s = 1, 2, 3 \tag{11.39}$$

Простейшая двойственная оценка получается при $q^i = \text{const}$. Из (11.38) найдем, что $\langle\lambda^{-1}\rangle^{-1}\ T_i T^i \leqslant \Phi$ и, таким образом,

$$\langle\lambda^{-1}\rangle^{-1} \leqslant \bar{\lambda} \leqslant \langle\lambda\rangle.$$

Дальнейшее исследование задачи на ячейке основано на введении достаточно богатого класса гармонических функций, которые удовлетворяют условию периодичности, — пространственного аналога двоякопериодических функций комплексной переменной.

Пространственные периодические гармонические функции. Обозначим узлы решетки (точки с координатами $n^p\tau_{(p)}^i$, n^p — целые числа) через y_n, расстояние между точками y и y_n — через $|y - y_n|$. Функция $\dfrac{1}{|y - y_n|}$ является гармонической. Для того чтобы построить гармоническую периодическую функцию, которая в узлах решетки имеет особенность типа $\dfrac{1}{|y - y_n|}$, естественно "периодизировать" $\dfrac{1}{|y - y_n|}$, введя ряд $\sum\limits_n \dfrac{1}{|y-y_n|}$. Этот ряд, однако, расходится. Поэтому реализуем идею периодизации следующим образом: продифференцируем $\dfrac{1}{|y - y_n|}$ столько раз, сколько нужно для сходимости суммы по узлам и затем построим первообразную получившейся функции. Возьмем гармоническую функцию $\left(\dfrac{1}{|y|}\right)_{|ijk}$ и рассмотрим ряд

$$\mathscr{P}_{ijk}(y) = \sum_n \left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|ijk}. \tag{11.40}$$

Поскольку $\left(\dfrac{1}{|y|}\right)_{|ijk} = \dfrac{1}{|y|^4} p_{ijk}\left(\dfrac{y_m}{|y|}\right)$, где $p_{ijk}(z_m)$ — полином по z_m, справедлива оценка $|(1/|y|)_{|ijk}| \leqslant M/|y|^4$. С другой стороны, для узлов с $|y_n| > 2|y|$, имеем $|y - y_n| = |y_n|\left|\dfrac{y}{|y_n|} - \dfrac{y_n}{|y_n|}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}|y_n|$. Итак,

$$\left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|ijk} \leqslant \frac{2^5 M}{|y_n|^4} \quad \text{при} \quad |y_n| > 2|y|, \tag{11.41}$$

и ряд (11.40) абсолютно сходится, так как мажорируется сходящимся рядом $\Sigma|y_n|^{-4}$. Аналогично доказывается абсолютная сходимость рядов вида

$$\mathscr{P}_{i_1 \ldots i_m} = \sum_n \left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|i_1 \ldots i_m}, \quad m > 3. \tag{11.42}$$

Поэтому ряды (11.40) и (11.42) можно почленно дифференцировать, и (при $k \geqslant 3$)

$$\mathscr{P}_{i_1 \ldots i_k | j_1 \ldots j_m} = \mathscr{P}_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_m}.$$

Члены рядов для $\mathscr{P}_{i_1 \ldots i_m}$ есть гармонические функции, следовательно, $\mathscr{P}_{i_1 \ldots i_m}$ — также гармонические функции. Кроме того, $\mathscr{P}_{i_1 \ldots i_m}$ об-

ладают свойством периодичности по y с периодами решетки. Из определения тензоров $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}$ следует, что они симметричны при перестановке любых двух индексов. Свертка $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}$ по любым двум индексам (в точках $y \neq y_n$) равна нулю.

Функции $\mathcal{P}_{ijk}$ являются нечетными функциями y. Действительно, обозначая $(1/|y|)_{|ijk}$ через $f_{ijk}(y)$, имеем $f_{ijk}(-y) = -f_{ijk}(y)$, $f_{ijk}(y - y_n) = -f_{ijk}(-y + y_n)$, $\mathcal{P}_{ijk}(y) = \sum_n f_{ijk}(y - y_n) = -\sum_n f_{ijk}(-y + y_n) = -\sum_n f_{ijk}(-y - y_n) = -\mathcal{P}_{ijk}(-y)$, что и требовалось.

Дифференцирование меняет четность функции. Поэтому $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}$ являются четными функциями y, если число индексов четно, и нечетными функциями в противоположном случае. Регулярную в нуле часть $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}$ будем обозначать через $\mathcal{P}'_{i_1 \dots i_m}$:

$$\mathcal{P}'_{i_1 \dots i_m} = \mathcal{P}_{i_1 \dots i_m} - \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m} = \sum_n{}' \left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|i_1 \dots i_m}$$

Здесь $\sum_n{}'$ – сумма по всем узлам решетки, исключая узел $y_n = 0$. Функции $\mathcal{P}'_{i_1 \dots i_m}$ являются гармоническими функциями и обладают теми же свойствами четности, что и $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}$. Из нечетности $\mathcal{P}'_{i_1 \dots i_{2s+1}}$ и регулярности в нуле следует, что

$$\mathcal{P}'_{i_1 \dots i_{2s+1}}(0) = 0. \tag{11.43}$$

Определим теперь функции $\mathcal{P}$ с числом индексов, меньшим трех. Рассмотрим контур Γ, который соединяет точку $y = 0$ и точку y и не проходит через узлы решетки, и введем функцию

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|ij} + \sum_n{}' \int_\Gamma \left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|ijk} dy^k. \tag{11.44}$$

В силу оценки (11.41) члены ряда (11.44) мажорируются членами ряда $|\Gamma|\,|y_n|^{-4}$. Следовательно, ряд (11.44) сходится абсолютно. Вычисляя интеграл в (11.44), имеем

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|ij} + \sum_n{}' \left\{\left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|ij} - \left(\frac{1}{|y - y_n|}\right)_{|ij}\Bigg|_{y=0}\right\}. \tag{11.45}$$

Заметим, что ряд в (11.45) нельзя переписать в виде разности рядов, так как $(1/|y - y_n|)_{|ij} \sim 1/|y_n|^3$ при $|y_n| \to \infty$, и составленный из таких слагаемых ряд будет расходиться.

Определение (11.44) можно переписать также в форме

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|ij} + \int_\Gamma \mathcal{P}'_{ijk}\, dy^k \equiv \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|ij} + \mathcal{P}'_{ij}. \tag{11.46}$$

Отсюда видно, что $\mathcal{P}_{ij}$ есть четные функции y, $\mathcal{P}'_{ij}(0) = 0$ и $\mathcal{P}^i_i = 0$ при $y \neq y_n$.

Покажем, что $\mathcal{P}_{ij}$ – периодические функции y. Рассмотрим функции $\gamma_{ij(s)} = \mathcal{P}_{ij}(y + \tau_{(s)}) - \mathcal{P}_{ij}(y)$, где $\tau_{(s)}$ – периоды решетки. Дифференцируя их по y и учитывая равенства $\mathcal{P}_{ij|k} = \mathcal{P}_{ijk}$ и периодичность

$\mathcal{P}_{ijk}$, получим нуль. Поэтому $\gamma_{ij(s)}$ – постоянные. Полагая $y = -\frac{1}{2}\tau_{(s)}$, имеем $\gamma_{ij(s)} = \mathcal{P}_{ij}(\frac{1}{2}\tau_{(s)}) - \mathcal{P}_{ij}(-\frac{1}{2}\tau_{(s)})$, и, в силу четности $\mathcal{P}_{ij}$, $\gamma_{ij(s)} = 0$. Итак, $\mathcal{P}_{ij}$ – четные, периодические, гармонические функции. Они являются пространственным аналогом $\mathcal{P}$-функции Вейерштрасса.

Построим аналог ζ-функции Вейерштрасса – функции $\mathcal{P}_i(y)$ – по формуле

$$\mathcal{P}_i(y) = \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i} + \int_{\Gamma} \mathcal{P}'_{ij}\, dy^j. \tag{11.47}$$

Так как $\mathcal{P}_{i|j} = \mathcal{P}_{ij}$ и $\mathcal{P}_{i|jk} = \mathcal{P}_{ijk}$, $\mathcal{P}_i$ – гармонические функции. Из (11.47) видно, что $\mathcal{P}_i$ – нечетные функции y, и $\mathcal{P}'_i(0) = 0$.

Тензор γ_{ij}. Составим разность

$$\gamma_{i(s)} = \mathcal{P}_i(y + \tau_{(s)}) - \mathcal{P}_i(y). \tag{11.48}$$

Дифференцируя ее по y и используя периодичность $\mathcal{P}_{ij}$, убеждаемся, что $\gamma_{i(s)}$ – постоянные. Полагая в (11.48) $y = -\frac{1}{2}\tau_{(s)}$, в силу нечетности $\mathcal{P}_i$ получим

$$2\mathcal{P}_i(\tfrac{1}{2}\tau_{(s)}) = \gamma_{i(s)}. \tag{11.49}$$

Чуть позже мы увидим, что $\gamma_{i(s)}$ отличны от нуля, и, следовательно, функции $\mathcal{P}_i$ не периодичны.

Покажем, что тензор $\gamma_{ij} = \gamma_{i(s)}\tau_j^{(s)}$ симметричный. Вычислим интеграл по ∂B от $\mathcal{P}_i \nu_j$. Согласно (11.48)

$$\int_{\partial B} \mathcal{P}_i \nu_j\, d^2y = \sum_{s=1}^{3} \int_{\Gamma_s^+} \gamma_{i(s)} \nu_j\, d^2y, \tag{11.50}$$

где Γ_s^+ – грань ячейки B с уравнением $y^{(s)} = \frac{1}{2}$. Перепишем правую часть (11.50) в виде интеграла по ∂B при помощи равенства

$$[\tau_k^{(s)} y^k]_{(p)} = [y^{(s)}]_{(p)} = \delta_p^s. \tag{11.51}$$

Имеем

$$\sum_{s=1}^{3} \int_{\Gamma_s^+} \gamma_{i(s)} \nu_j\, d^2y = \int_{\partial B} \gamma_{i(s)} \tau_k^{(s)} y^k \nu_j\, d^2y.$$

Отсюда

$$\int_{\partial B} \mathcal{P}_i \nu_j\, d^2y = \int_B \gamma_{i(s)} \tau_j^{(s)}\, d^3y = \gamma_{ij} |B|. \tag{11.52}$$

Окружим точку $y = 0$ малой сферой A_ϵ с радиусом ϵ. По теореме Гаусса–Остроградского

$$\int_{\partial B} \mathcal{P}_i \nu_j\, d^2y - \int_{\partial A_\epsilon} \mathcal{P}_i \nu_j\, d^2y = \int_{B - A_\epsilon} \mathcal{P}_{ij}\, d^3y. \tag{11.53}$$

Найдем значение интеграла по ∂A_ϵ. Подставляя $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}'_i + \left(\frac{1}{|y|}\right)_i$, получим

$$\int_{\partial A_\epsilon} \mathcal{P}_i \nu_j d^2y = -\int_{\partial A_\epsilon} \frac{1}{|y|^3} y_i \nu_j\, d^2y + \int_{\partial A_\epsilon} \mathcal{P}'_i \nu_j\, d^2y =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\delta_{ij} + \int_{A_\epsilon} \mathcal{P}'_{ij}\, d^3y = -\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}. \tag{11.54}$$

Здесь использована теорема о среднем по объему для гармонических функций и равенство $\mathcal{P}^i_{ij}(0) = 0$. Из формул (11.52)–(11.54) следует, что $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Свернем равенства (11.52)–(11.54) по i, j. Так как $\mathcal{P}^i_i = 0$, получим

$$\gamma^i_i = -\frac{4\pi}{|B|}. \tag{11.55}$$

Эта формула является аналогом соотношения $\delta_1\tau_2 - \delta_2\tau_1 = 2\pi i$ в теории двоякопериодических функций. Из нее, в частности, следует, что тензоры γ_{ij} и $\gamma_{i(s)}$ отличны от нуля.

Функция Q. Трехмерным аналогом σ-функции Вейерштрасса является функция

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{|y|} + \int_{\Gamma} \mathcal{F}^i_i dy^i. \tag{11.56}$$

Очевидно, что $\mathcal{P}(y)$ – четная функция y, $\mathcal{P}_{|i} = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_{|ij} = \mathcal{P}_{ij}$ и, так как $\mathcal{P}^i_i = 0$, $\mathcal{P}(y)$ – гармоническая функция.

Рассмотрим функцию $\mathcal{P}(y) - \frac{1}{2}\gamma_{ij}y^iy^j$ и составим разность ее значений в точках $y + \tau_{(s)}$ и y:

$$r_{(s)} = \mathcal{P}(y + \tau_{(s)}) - \mathcal{P}(y) - \gamma_{ij}\tau^i_{(s)}y^j - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\tau^i_{(s)}\tau^j_{(s)}. \tag{11.57}$$

Производные $r_{(s)}$ по y^i, в силу соотношений $\mathcal{P}_{|i} = \mathcal{P}_i$, $\gamma_{ij}\tau^i_{(s)} = \gamma_{j(s)}$ и равенства (11.48), равны нулю. Следовательно, $r_{(s)}$ – постоянные. Полагая в (11.57) $y = -\frac{1}{2}\tau_{(s)}$ и используя четность $\mathcal{P}(y)$, получим $r_{(s)} = 0$. Итак $\mathcal{P}(y) - \frac{1}{2}\gamma_{ij}y^iy^j$ – периодическая функция y^i. Для дальнейшего удобнее периодическая функция

$$Q(y) = \mathcal{P}(y) - \frac{1}{2}\gamma_{ij}y^iy^j + Q_0, \tag{11.58}$$

где постоянная Q_0 подобрана так, что $\langle Q(y) \rangle = 0$.

В отличие от $\mathcal{P}(y)$, функция $Q(y)$ не является гармонической: при $y \neq y_n$

$$\Delta Q = -\gamma^i_i = \frac{4\pi}{|B|}.$$

Функция $\mathcal{P}(y)$ возрастает на бесконечности как квадратичная форма $\frac{1}{2}\gamma_{ij}y^iy^j$, а $\mathcal{P}_i$ – как линейные функции $\gamma_{ij}y^j$.

Свойства инвариантности. Пусть решетка инвариантна относительно некоторой группы ортогональных преобразований. Покажем, что функции $\mathcal{P}(y)$ и $Q(y)$ также инвариантны относительно этой группы. Из определений $\mathcal{P}$ (11.56), $\mathcal{P}_i$ (11.57) и $\mathcal{P}_{ij}$ (11.45) следует, что функцию $\mathcal{P}$ можно представить в форме ряда

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{|y|} + \sum_n{}' \left\{ \frac{1}{|y - y_n|} - \frac{1}{|y_n|} - \frac{y^i_{(n)}y_i}{|y_n|^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{3y^i_{(n)}y_iy^j_{(n)}y_j}{|y_n|^5} - \frac{|y|^2}{|y_n|^3} \right) \right\},$$

где $y^i_{(n)}$ – координаты узла y_n. Рассмотрим значение функции $\mathcal{P}$ в точке

αy с координатами $\alpha^i_j y^j$, где α^i_j – компоненты ортогональной матрицы, соответствующей преобразованию группы симметрии решетки. При ортогональных преобразованиях величины $|y|$, $|y - y_n|$, $|y_n|$, а также и скалярные произведения $y^i_{(n)} y_i$ не меняются. Принадлежность α группе симметрии означает, что узлы решетки переходят в узлы решетки. Поэтому $\mathcal{P}(\alpha y) = \mathcal{P}(y)$ и функция $\mathcal{P}(y)$ обладает симметрией решетки.

Докажем, что тензор γ_{ij} также имеет симметрию решетки. Пусть τ – один из периодов решетки. Тогда

$$\mathcal{P}(y + \tau) - \mathcal{P}(y) = \gamma_{ij}\tau^i y^j + \frac{1}{2}\gamma_{ij}\tau^i\tau^j . \qquad (11.59)$$

Напишем аналогичное равенство в точке z для периода решетки $\alpha^i_k \tau^k$:

$$\mathcal{P}(z + \alpha\tau) - \mathcal{P}(z) = \gamma_{ij}\alpha^i_k \tau^k z^j + \frac{1}{2}\gamma_{ij}\alpha^i{}_k \alpha^j_m \tau^k \tau^m . \qquad (11.60)$$

Положим $z = \alpha y$. Так как $\mathcal{P}(z + \alpha\tau) = \mathcal{P}(\alpha(y + \tau)) = \mathcal{P}(y + \tau)$, $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(y)$, после вычитания из (11.60) соотношения (11.59) получим

$$(\gamma_{ij}\alpha^i_k\alpha^j_m - \gamma_{km})\left(\tau^k y^m + \frac{1}{2}\tau^k\tau^m\right) = 0.$$

Это равенство удовлетворяется только при $\gamma_{ij}\alpha^i_k\alpha^j_m = \gamma_{km}$, что и требовалось.

Из определения Q (11.58) и инвариантности $\mathcal{P}$ и γ_{ij} следует, что функция $Q(y)$ также инвариантна относительно группы симметрии решетки.

Разложим функцию $Q(y)$ в ряд в окрестности точки $y = 0$. Согласно (11.43) и равенствами $\mathcal{P}'_i(0) = 0$, $\mathcal{P}'_{ij}(0) = 0$, получим

$$Q(y) = \frac{1}{|y|} + Q_0 - \frac{1}{2}\gamma_{ij}y^i y^j + \frac{1}{4!}\mathcal{P}'_{ijkl}(0) y^i y^j y^k y^l + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(2s)!}\mathcal{P}'_{i_1 \ldots i_{2s}}(0) y^{i_1} \ldots y^{i_{2s}} + \ldots . \qquad (11.61)$$

Из инвариантности $Q(y)$ следует, что коэффициенты разложения (11.61) также инвариантны относительно группы симметрии решетки. Это позволяет находить структуру коэффициентов, основываясь на свойствах симметрии. Рассмотрим, например, решетки, обладающие кубической симметрией. Имеется три типа таких решеток: простая кубическая ($\tau^i_{(1)} = (1, 0, 0)$, $\tau^i_{(2)} = (0, 1, 0)$, $\tau^i_{(3)} = (0, 0, 1)$, $|B| = 1$), объемоцентрированная $\left(\tau^i_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)\right.$, $\tau^i_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$, $\left.\tau^i_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\right.$, $\left.|B| = \frac{1}{6\sqrt{3}} \approx 0{,}096\right)$, гранецентрированная $\left(\tau^i_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right.$, $\tau^i_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\left.\tau^i_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\right.$, $\left.|B| = 1/8\sqrt{2} \approx 0{,}088\right)$. Для каждой из них инвариантный тензор нечетного ранга равен нулю, а инвариантный тензор четного ранга есть линейная комбинация тензоров, представляющих произведения δ^{ij} и тензора o_{ijkl} – тензора,

Таблица 1

Решетки	Простая кубическая	Объемоцентрированная	Гранецентрированная
$\left(\frac{4\pi}{3\lvert B\rvert}\right)^{-1/3} Q_0$	−1,760	−1,791	−1,791
$\left(\frac{4\pi}{3\lvert B\rvert}\right)^{-5/3} p$	17,13238	−5,39443	−3,30237
$\left(\frac{4\pi}{3\lvert B\rvert}\right)^{-7/3} r$	37,97846	27,66895	−26,69578

который имеет лишь три отличные от нуля компоненты $o_{1111} = o_{2222} = o_{3333} = 1$.

Инвариантные тензоры второго ранга являются шаровыми, поэтому для нахождения γ_{ij} достаточно равенства (11.55)

$$\gamma_{ij} = -\frac{4\pi}{3\lvert B\rvert}\delta_{ij}.$$

Из общей теории тензорных функций можно вывести, что инвариантные тензоры четвертого и всех последующих рангов в силу симметрии по индексам и обращения в нуль свертки по любым двум индексам имеют только одну существенную компоненту. В частности,

$$\mathscr{P}'_{ijkl}(0) = p\left\{o_{ijkl} - \frac{1}{5}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right\},$$

$$\mathscr{P}'_{ijklmn}(0) = r\left\{\frac{77}{2}o_{ijks}o^{s}_{lmn} - \frac{7}{2}\delta_{(ij}o_{klmn)} + \delta_{(ij}\delta_{kl}\delta_{mn)}\right\}.$$

Здесь круглые скобки в индексах означают операцию симметризации без деления на число слагаемых, получающихся при перестановках индексов.

Таким образом, для решеток, обладающих кубической симметрией, первые пять членов разложения $Q(y)$ (11.61) задаются тремя параметрами Q_0, p, r. Значения постоянных Q_0, p, r для кубических решеток представлены в табл. 1.

Функции $\chi_{i_1 \ldots i_m}$. Для решения задачи на ячейке со сферическим включением нам потребуются периодические гармонические функции, не имеющие сингулярности в нуле. Для их построения введем функции $\chi_{i_1 \ldots i_m}$, определенные равенствами

$$\chi_{i_1 \ldots i_m}(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lvert y\rvert}\right)_{\lvert i_1 \ldots i_m} & y \in B - A, \quad m = 0, 1, 2 \ldots, \\ \left(\frac{\lvert y\rvert}{\alpha}\right)^{2m+1}\left(\frac{1}{\lvert y\rvert}\right)_{\lvert i_1 \ldots i_m} & y \in A, \end{cases}$$

где $\alpha = a/\epsilon$ – "безразмерный" радиус шара A (a – радиус включения, ϵ –

шаг решетки). При $y \in B - A$ $\chi_{i_1 \dots i_m} = \chi_{|i_1 \dots i_m}$, и $\chi_{i_1 \dots i_m}$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Нетрудно убедиться, что $\chi_{i_1 \dots i_m}$ являются гармоническими функциями и при $y \in A$. Для этого следует привлечь равенство

$$y^i \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m i} = -(m+1)\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m}. \tag{11.62}$$

Функции $\chi_{i_1 \dots i_m}$ непрерывны в B. Производные $\chi_{i_1 \dots i_m}$ на сфере ∂A терпят разрыв. Для вычисления скачка производной полезно соотношение

$$y^i \left(|y|^{2m+1}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m}\right)_{|i} = m|y|^{2m+1}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m}. \tag{11.63}$$

Дальше потребуется величина $[\lambda \chi_{i_1 \dots i_m |i}]\nu^i$. Учитывая, что на сфере $\nu^i = y^i/\alpha$, найдем

$$[\lambda \chi_{i_1 \dots i_m |i}]\nu^i = \frac{m\lambda_2 + (m+1)\lambda_1}{\alpha}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_m}. \tag{11.64}$$

Функции $Q'_{|i_1 \dots i_m} + \chi_{i_1 \dots i_m}$ при $y \in B - A$ совпадают с функциями $Q_{|i_1 \dots i_m}$ и потому периодичны. Кроме того, они удовлетворяют (при $m \geqslant 1$) уравнению Лапласа в области B и не имеют сингулярности в нуле.

Решение задачи на ячейке для сферических включений. Будем искать $\psi(y)$ в виде

$$\psi = \psi^i(y)\, T_i,$$
$$\psi^i(y) = \sum_{s=0}^{\infty} k^{ii_1 \dots i_{2s+1}} (Q'_{|i_1 \dots i_{2s+1}} + \chi_{i_1 \dots i_{2s+1}}). \tag{11.65}$$

Здесь учтено, что $\psi^i(y)$ — нечетные функции y, и разложение ведется только по функциям с нечетным числом индексов.

Функции вида (11.65) удовлетворяют всем уравнениям задачи на ячейке, за исключением второго равенства (11.32). Подставляя (11.65) в (11.32) и используя (11.64), получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} k^{ii_1 \dots i_{2s+1}} \Big([\lambda]\nu^j Q'_{|i_1 \dots i_{2s+1} j} + \frac{(2s+1)\lambda_2 + (2s+2)\lambda_1}{\alpha}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1 \dots i_{2s+1}}\Big) + [\lambda]\nu^i = 0. \tag{11.66}$$

Если умножить уравнения (11.66) на $(1/|y|)_{|i_1 \dots i_{2s+1}}$ и проинтегрировать по поверхности сферы, то при $s = 0, 1, 2 \dots$ получится система линейных уравнений для определения $k^{ii_1 \dots i_{2s+1}}$. Для вычисления

коэффициентов системы уравнений нужны равенства

$$\int\limits_{\partial A}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\dots i_s}\left(\frac{1}{|y|}\right)^{j_1\dots j_m}d^2y=\begin{cases}0, & m\neq s,\\ \alpha^{-2m}D^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_s}, & m=s,\end{cases}\tag{11.67}$$

$$\int\limits_{\partial A}\nu^j Q'_{|i_1\dots i_sj}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\dots j_m}d^2y=$$

$$=\frac{(-1)^m}{(2m-1)!!(m-1)!}Q'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_m}(0)D^{k_1\dots k_m}_{j_1\dots j_m}.\tag{11.68}$$

Здесь $D^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_s}$ – компоненты некоторого тензора, симметричного по перестановке любых двух верхних и нижних индексов, значение которых для дальнейшего несущественно, $(2m-1)!!$ – произведение всех нечетных чисел от 1 до $2m-1$, $Q'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_m}(0)=\mathcal{P}'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_m}(0)$ при $s+m\geqslant 3$, $Q'_{ij}(0)=-\gamma_{ij}$, $Q'_i(0)=0$.

Равенство (11.67) выражает свойство ортогональности сферических гармоник.

Для вывода равенства (11.67) следует представить функции $Q'_{|i_1\dots i_s}$ в виде ряда

$$Q'_{|i_1\dots i_s}=\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{1}{r!}Q'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_r}(0)y^{k_1}\dots y^{k_r}.$$

Тогда

$$\nu^jQ_{|i_1\dots i_sj}=\frac{1}{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r-1)!}Q'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_r}(0)y^{k_1}\dots y^{k_r},$$

и остается заметить, что разложение $y^{k_1}\dots y^{k_r}$ по сферическим гармоникам начинается со слагаемого $\frac{(-1)^r}{(2r-1)!!}|y|^{2r+1}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\dots i_r}$, а каждое последующее слагаемое содержит метрический теизор и его свертка с $Q'_{i_1\dots i_sk_1\dots k_r}(0)$ дает нуль.

Согласно (11.67), (11.68) система уравнений для определения $k^{ii_1\dots i_{2s+1}}$ имеет вид

$$\frac{2\lambda_1+\lambda_2}{\alpha^3}k^{ij}+[\lambda]\gamma^j_sk^{sj}=[\lambda]\delta^{ij}+[\lambda]\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{P}'^{ij}_{i_1\dots i_{2s+1}}(0)k^{ii_1\dots i_{2s+1}},\tag{11.69}$$

$$\frac{(2s+1)\lambda_2+(2s+2)\lambda_1}{\alpha^{4s+3}}k^{ij_1\dots j_{2s+1}}=$$

$$=\frac{[\lambda]}{(4s+1)!!(2s)!}\sum_{r=0}^{\infty}\mathcal{P}'^{j_1\dots j_{2s+1}}_{i_1\dots i_{2r+1}}(0)k^{ii_1\dots i_{2r+1}},\tag{11.70}$$

$s=1,2,\dots$

Решение системы уравнений (11.69), (11.70) существует и единственно, поскольку, как можно показать, заменой $k^{ij_1\dots j_{2s+1}}\to\bar{k}^{ij_1\dots j_{2s+1}}=$

$= k^{ij\ldots j_{2s+1}}/2^s(4s+3)\sqrt{(4s+3)!}$ она приводится к нормальной системе Пуанкаре–Коха.

Построим асимптотику решений системы уравнений (11.69), (11.70) при $\alpha \to 0$. Ясно, что при $\alpha \to 0$ $k^{ij} \sim \alpha^3$, и в первом приближении

$$k^{ij} = \frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1 + \lambda_2}\delta^{ij},$$

$$k^{ij_1\ldots j_{2s+1}} = \frac{\alpha^{4s+6}[\lambda]^2 \mathcal{P}'^{ij_1\ldots j_{2s+1}}(0)}{(4s+1)!!(2s)!(2\lambda_1+\lambda_2)[(2s+1)\lambda_2 + (2s+2)\lambda_1]}. \tag{11.71}$$

Из уравнения (11.69) теперь находим уточненное значение тензора k^{ij}:

$$k^{ij} = \frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1+\lambda_2}\tilde{\gamma}^{ij}. \tag{11.72}$$

Здесь $\tilde{\gamma}^{ij}$ – тензор, обратный к тензору $\delta^{ij} + \frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1+\lambda_2}\gamma^{ij}$. Погрешность формулы (11.72) есть $O(\alpha^{13})$.

Подставляя (11.72) в (11.70) и отбрасывая в сумме все члены, кроме k^{ij}, получим уточненное значение коэффициента k^{ijmn}:

$$k^{ijmn} = \frac{\alpha^{10}[\lambda]^2}{30(2\lambda_1+\lambda_2)(4\lambda_1+3\lambda_2)}\mathcal{P}'^{kjmn}(0)\tilde{\gamma}^i_k + O(\alpha^{17}).$$

Если сохранить теперь член с k^{ijmn} в уравнении (11.69), то найдем значение k^{ij} с погрешностью $O(\alpha^{17})$:

$$k^{ij} = \frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1+\lambda_2}\tilde{\gamma}^{ij} + \frac{\alpha^{13}[\lambda]^3}{30(2\lambda_1+\lambda_2)^2(4\lambda_1+3\lambda_2)}\tilde{\gamma}^i_s\tilde{\gamma}^j_r\mathcal{P}'^{si_1i_2i_3}(0)\mathcal{P}'^{r}_{i_1i_2i_3}(0). \tag{11.73}$$

Для решетки с кубической симметрией $\gamma^{ij} = -\frac{4\pi}{3|B|}\delta^{ij}$, $\tilde{\gamma}^{ij} = \frac{(2\lambda_1+\lambda_2)\delta^{ij}}{2\lambda_1+\lambda_2-c[\lambda]}$ и с точностью до $O(\alpha^{13})$

$$k^{ij} = \frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1+\lambda_2-c[\lambda]}\delta^{ij}.$$

Поскольку в случае кубической симметрии

$$\mathcal{P}'^{si_1i_2i_3}(0)\mathcal{P}'_{ri_1i_2i_3}(0) = \frac{2}{5}p^2\delta^s_r, \tag{11.74}$$

учет следующих поправок, согласно (11.73), дает

$$k^{ij} = \left\{\frac{\alpha^3[\lambda]}{2\lambda_1+\lambda_2-c[\lambda]} + \frac{\alpha^{13}[\lambda]^3p^2}{75(4\lambda_1+3\lambda_2)(2\lambda_1+\lambda_2-c[\lambda])^2}\right\}\delta^{ij} \tag{11.75}$$

Приведенные выражения можно уточнять дальше рекуррентным способом.

Эффективный коэффициент теплопроводности. Покажем, что эффективные коэффициенты теплопроводности $\bar{\lambda}^{ij}$ определяются только по первому коэффициенту ряда (11.65) k^{ij} по формуле

$$\bar{\lambda}^{ij} = \lambda_1 \left(\delta^{ij} + \frac{4\pi}{|B|} k^{ij} \right). \tag{11.76}$$

Действительно, поскольку

$$Q'_{|ij}(0) = -\gamma_{ij}, \quad \chi_{i|j}(0) = -\alpha^{-3}\delta_{ij},$$

$$\chi_{i_1 \dots i_m | j}(0) = 0 \quad (m > 1); \quad Q'_{i_1 \dots i_m}(0) = \mathcal{P}'_{i_1 \dots i_m}(0) \quad (m > 2),$$

можно написать:

$$\Phi = \frac{1}{2}\langle \lambda \rangle T_i T^i + \frac{1}{2} c[\lambda] T_i T^j \Big(\sum_{s=1}^{\infty} k^{ii_1 \dots i_{2s+1}} \mathcal{P}'_{|i_1 \dots i_{2s+1}j}(0) - k^{is}\gamma_{sj} - \alpha^{-3} k^i_j \Big). \tag{11.77}$$

Выразим сумму в (11.77) из уравнения (11.69). Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2}\langle \lambda \rangle T_i T^i + \frac{1}{2} c[\lambda] T_i T^j \left(\frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{\alpha^3 [\lambda]} k^i_j - \alpha^{-3} k^i_j - \delta^i_j \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_1 T_i T_j \left(\delta^{ij} + \frac{4\pi}{|B|} k^{ij} \right),$$

что и требовалось.

Как и следовало ожидать, эффективные коэффициенты теплопроводности $\bar{\lambda}^{ij}$ пропорциональны теплопроводности несущей фазы λ_1 и обращаются в нуль вместе с λ_1 (k^{ij} ограничены при $\lambda_1 \to 0$).

Принимая для k^{ij} приближенное выражение (11.72), получим

$$\bar{\lambda}^{ij} = \lambda_1 \left(\delta^{ij} + \frac{3c[\lambda]}{2\lambda_1 + \lambda_2} \tilde{\gamma}^{ij} \right). \tag{11.78}$$

В случае решеток с кубической симметрией формула (11.78) переходит в формулу Максвелла

$$\bar{\lambda}^{ij} = \bar{\lambda}\,\delta^{ij}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_1 \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2c[\lambda]}{2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda]}.$$

Соотношение (11.73) показывает, что погрешность формулы Максвелла есть $O(\alpha^{13})$.

Из равенств (11.75) и (11.77) находим уточнение формулы Максвелла, имеющее погрешность $O(\alpha^{17})$:

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 \left\{ \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2c[\lambda]}{2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda]} + \frac{[\lambda]^3 p^2 \alpha^{10}}{25(4\lambda_1 + 3\lambda_2)(2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda])^2} \right\}.$$

Эта формула в случае простой кубической решетки сфер переходит в

Таблица 2

Решетки	Простая кубическая	Объемоцентрированная	Гранецентрированная
ξ	3,913	0,387	0,145
η	1,469	0,779	0,725

формулу, полученную Рэлеем. Приведем также следующую поправку:

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 \left\{ \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2c[\lambda]}{2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda]} + \frac{[\lambda]^3 p^2 c^{10}}{25(4\lambda_1 + 3\lambda_2)(2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda])^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{11[\lambda]^3 r^2 c\alpha^{14}}{2160(6\lambda_1 + 5\lambda_2)(2\lambda_1 + \lambda_2 - c[\lambda])^2} \right\}. \qquad (11.79)$$

Интересны два предельных значения эффективного коэффициента теплопроводности при $\lambda_2 \to \infty$ и $\lambda_2 \to 0$. Первое из них соответствует среде, содержащей включения с теплопроводностью, значительно превышающей теплопроводность среды. В этом случае температура включения практически может считаться постоянной. Устремляя λ_2 к бесконечности, из (11.79) находим

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 \left\{ \frac{1 + 2c}{1 - c} + \xi \frac{c^{13/3}}{(1-c)^2} + \eta \frac{c^{17/3}}{(1-c)^2} \right\}. \qquad (11.80)$$

Значение постоянных ξ и η приведено в табл. 2.

Во втором предельном случае $\lambda_2 = 0$ формула Максвелла приводит к следующему приближенному выражению:

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 \frac{2(1-c)}{2+c}.$$

Поправки имеют вид

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 \left\{ \frac{2(1-c)}{2+c} - \frac{3}{4}\xi \frac{c^{13/3}}{(2+c)^2} - \frac{5}{6}\eta \frac{c^{17/3}}{(2+c)^2} \right\},$$

где параметры ξ и η имеют те же значения, что и при $\lambda_2 = \infty$.

Полученные соотношения показывают, что формула Максвелла дает очень хорошее приближение для эффективного коэффициента теплопроводности кубических решеток.

Двусторонние оценки эффективного коэффициента теплопроводности для сферических включений. Полученное выше выражение для эффективного коэффициента теплопроводности при $\lambda_2 \gg \lambda_1$ (11.80) и положительность коэффициентов ξ, η показывают, что формула Максвелла дает заниженное значение $\bar{\lambda}$. При $\lambda_2 \ll \lambda_1$ значение эффективного коэффициента теплопроводности, вычисленное по формуле Максвелла, оказывается больше истинного. Покажем, что это свойство является общим: при $[\lambda] \leqslant 0$ формулу Максвелла можно интерпретировать как оценку эффективного коэффициента теплопроводности сверху, а при $[\lambda] \geqslant 0$ – как оценку снизу.