Э. Р. ЭККЕРТ и Р. М. ДРЕЙК

ТЕОРИЯ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

Перевод с английского
Э. М. ФУРМАНОВОЙ, Г. Р. МАЛЯВСКОЙ
и Л. Б. ШАШКОВОЙ
под редакцией
акад. АНБССР А. В. ЛЫКОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1961 ЛЕНИНГРАД

HEAT and MASS TRANSFER

by E. R. G. Eckert

with Part A, Heat Conduction
and Appendix of Property Values
by Robert M. Drake, Jr.

Second Edition of
INTRODUCTION TO THE TRANSFER OF HEAT AND MASS

1959

Данная книга является вторым, заново переработанным изданием монографии Эккерта «Введение в теорию тепло- и массообмена». В ней систематически рассматриваются основные вопросы теории теплопроводности, конвективного и лучистого теплообмена, а также вопросы массообмена в процессах пористого охлаждения и испарения. В книге дано обобщение последних работ по теории пограничного слоя в процессах тепло- и массообмена. Теоретические вопросы иллюстрируются конкретными примерами расчетов теплообменных аппаратов, реактивных двигателей, газовых турбин и другой аппаратуры современной техники.

Книга рассчитана на научных сотрудников, аспирантов и инженеров-теплотехников, и она может быть рекомендована в качестве учебного пособия для втузов.

6П2.2
Э 35

Эккерт Э. Р. и Дрейк Р. М.
Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. под ред. А. В. Лыкова. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
с. с черт. и илл.

6П2.2

* * *

Редактор *А. Г. Шашков* Техн. редактор *Г. Е. Ларионов*

Сдано в пр-во 6/VI 1961 г. Подписано к печати 16/IX 1961 г.
Формат бумаги 84×108¹/₃₂ 34,85 п. л. 39,8 уч.-изд. л.
Тираж 9 000 Цена 2 р. 89 к. Зак. 308

Типография Госэнергоиздата. Москва, Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Процессы тепло- и массообмена являются одним из важнейших разделов современной науки и имеют большое практическое значение в станционной и промышленной энергетике. Особое значение приобретают вопросы тепло- и массообмена в реактивной и ракетной технике, когда высота и скорость полета самолета или реактивного снаряда в значительной степени зависят от условий тепло- и массообмена. Не меньшее значение процессы тепло- и массообмена имеют в атомной энергетике при расчете и конструировании ядерных реакторов. При этом характерная особенность процессов переноса тепла и массы вещества в указанных областях новой техники — это их взаимосвязь, т. е. тепло- и массообмен является единым комплексным процессом. Аналогичное положение будет иметь место и в теплоэнергетических процессах при значительной интенсификации их в связи с переходом на высокие режимные параметры.

Современное состояние науки о переносе энергии (тепла) определило характер и методическую направленность монографии крупнейшего ученого в этой области проф. Э. Р. Эккерта «Теория тепло- и массообмена» Данная книга является вторым изданием, она заново переработана Э. Р. Эккертом совместно с Р. М. Дрейком. При этом было не только расширено большинство разделов книги, но и включен ряд новых разделов (теплопроводность в системах с подвижными границами, теплообмен в разреженных газах, в жидких металлах, пористое охлаждение, расчет теплообменников), а также заново переработан основной теоретический материал.

Книга написана методически очень удачно, в ней в краткой доходчивой форме рассматривается физика явления, затем дается аналитическое отображение процесса простыми математическими соотношениями, а конец каждого раздела иллюстрируется конкретными числовыми расчетами, взятыми из инженерной практики. Помимо этого,

приводится ряд задач, которые предлагается читателю решить самостоятельно. Весьма полезным является вводный раздел книги об единицах измерения физических величин, поскольку в практике теплотехнических расчетов применяются разные системы единиц измерения, что создает дополнительные трудности для инженера.

Необходимо сделать несколько замечаний по содержанию книги. Значительно расширен раздел теплопроводности, в котором много внимания уделяется оребрению поверхностей нагрева, что имеет большое значение для авиационной техники. Удачно изложен раздел о периодическом стационарном состоянии тела, где рассмотрено распространение температурных волн в полуограниченной среде при наличии n-гармоник. Дано решение ряда задач с подвижными источниками тепла. Все решения задач теплопроводности получены методом разделения переменных, что иногда излишне обременяет излагаемый материал математическими преобразованиями. Эти решения можно было бы получить быстрее и проще, используя операционные методы и методы интегральных преобразований.

Совершенно справедливо авторы отмечают, что для понимания физической сущности явлений конвективного тепло- и массообмена последний должен быть рассмотрен в первую очередь на основе теории пограничного слоя с использованием приближенных решений, получаемых методами Кармана. После этого можно перейти к рассмотрению точных решений и обобщению экспериментальных данных методами теории подобия.

Также методически удачным следует считать вначале изложение вынужденной конвекции в условиях внешней задачи (обтекание пластины), потом в условиях внутренней задачи (движение жидкости в трубах) и, наконец, теплообмен при естественной конвекции.

Вопросы теплообмена в разреженных газах, имеющие большое значение для ракетной техники, рассматриваются достаточно подробно.

Наглядным примером взаимосвязи процессов переноса тепла и массы вещества является пористое и пленочное охлаждение, рассмотренное в двух разделах: «Конвективный теплообмен» (§ 10-5) и «Перенос массы» (§ 16-2). Анализ процессов тепло- и массообмена дан на основе решений уравнений переноса в пограничном слое, полученных на электронно-счетных машинах.

В отличие от обычного изложения раздела о лучистом

теплообмене авторы уделяют большое внимание физике процесса температурного излучения (приводится вывод законов Стефана-Больцмана, Джинса-Релея, формулы Планка и др.), а также моделированию лучистого теплообмена на основе электроаналогии. Последнее обстоятельство позволяет получить ряд соотношений для лучистого теплообмена, имеющих большой практический интерес. Помимо этого, приведены методы расчета солнечной печи.

Перенос массы вещества рассматривается на основе соотношений молекулярно-кинетической теории для бинарной смеси применительно к влажному воздуху. При этом используются решения, полученные для случая пористого охлаждения пластины. Необходимо отметить, что последние решения не применимы для процесса тепло- и массопереноса при испарении жидкости со свободной поверхности и из капиллярно-пористых тел. К сожалению, для решения этой проблемы не используются методы термодинамики необратимых процессов, которые дают наиболее полное и строгое описание комплексного процесса тепло- и массообмена.

В качестве общего недостатка книги надо отметить то обстоятельство, что работы советских ученых не нашли в ней отражения, между тем как по ряду важнейших вопросов теории тепло- и массообмена советские теплофизики имеют большие достижения, которые опубликованы в ряде монографий и периодической литературе. Поэтому мы считали необходимым привести дополнительный список литературы, в котором приведены основные монографии, учебные пособия и журнальные статьи, вышедшие за последние пять лет в советской печати.

При переводе книги с английского языка на русский мы стремились сохранить стиль и методику изложения, а также основные обозначения физических величин. Только часть обозначений была изменена. Например, обозначения коэффициентов теплопроводности и теплообмена были заменены общепринятыми.

Благодаря простоте и доступности изложения книга является не только хорошим учебным пособием для студентов высших учебных технических заведений, но и представляет интерес для широкого круга читателей; она поможет инженерам-теплотехникам выбрать оптимальный режим процесса и тем самым решить актуальные вопросы современной техники.

А. В. ЛЫКОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Книга ставит целью: научить читателя понимать физические основы процессов переноса вообще и процесса тепло- и массообмена, в частности, кроме того, познакомить читателя с законами, которым подчиняются физические явления, наблюдаемые в этих процессах, а также и с аналитическими методами исследования, разработанными для описания этих явлений. Осуществлению этой задачи служило и первое издание книги, но колоссальный размах исследований и соответствующее накопление новых данных за последние 8 лет вызвало необходимость пересмотра прежних теоретических положений.

При выборе проблем руководствовались желанием рассмотреть как можно больше важнейших явлений теплообмена с позиции современного понимания их природы и законов. Но и по сей день у нас все еще нет четкого представления о некоторых случаях теплообмена. Вообще говоря, это обычно такие случаи, когда поверхность или внутрифазовая площадь, через которую проходит тепло, не имеет четкого очертания. У нас еще накопилось мало знаний для понимания таких процессов, да и те знания, которые у нас уже имеются, сводятся лишь к эмпирическим соотношениям, приводимым в многочисленных справочниках по теплообмену.

В основном материал подбирался таким образом, чтобы осветить как можно больше физических явлений, не прибегая по возможности к громоздким математическим выкладкам. Главной проблемой, с которой встречаются в техническом исследовании, является перевод физического процесса на язык математики. Этим вопросом исследователь непременно должен заниматься сам или вынужден прибегнуть к помощи математика, если не сможет самостоятельно получить решения уравнений, при помощи которых он формулирует свою задачу.

При чтении глав, где кратко излагается более сложный материал, требуются более глубокие знания математики. Такие главы включены преднамеренно, ибо они способствуют пониманию особых форм тепло- или массообмена; однако их можно опустить без ущерба для понимания остального текста. Разделы 3-8, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-3, 6-6, 7-2, 7-3, 10-3, 11-3 и 16-2 относятся к этой категории.

Не делалось попыток более или менее полно представить литературу или хотя бы включить всю наиболее важную. Целью ссылок в книге является указать на оригинальные работы по обсуждаемым темам и источники для получения более обширных сведений.

Во 2-м издании введены дополнительные задачи. Решение этих задач поможет читателю или студенту уяснить проработанный материал. Необходимо отметить, что некоторые задачи не имеют однозначного решения, это справедливо и для задач, встречающихся в инженерной практике. Для некоторых задач невозможно получить какое-нибудь аналитическое решение, а в других случаях читатель должен переходить к численным вычислениям в зависимости от знания аналитических методов решения. Все это опять-таки подчеркивает тот факт, что многие задачи, с которыми встречаются в инженерной практике, по своей природе такого типа.

Участие Р. М. Дрейка младшего заключалось в разработке части А — «Теплопроводность», раздела 10-3 «Теплообмен в газах при низких плотностях» и дополнения к Приложению с таблицами и графиками физических параметров.

Читатели, знакомые с первым изданием книги, увидят, что бóльшая часть ее написана совершенно заново и что это издание может рассматриваться как новая книга, ибо наука, о которой идеть речь в книге, за последние годы сделала весьма значительные успехи. Надеюсь, что настоящая книга написана на достаточном научном уровне и найдет такой же благосклонный прием среди работающих в области тепло- и массообмена, как и первое издание.

Э. Р. ЭККЕРТ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора 3
Предисловие автора 6
Перечень обозначений 12
Глава первая. **Введение** 17
1-1. Единицы измерения 17
1-2. Различные способы переноса тепла 24
1-3. Коэффициенты теплопроводности, теплообмена и теплопередачи 26
1-4. Прямоток, противоток, перекрестный ток 32

Часть А. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Глава вторая. **Теория теплопроводности и уравнения теплопроводности** 44
2-1. Понятие теплопроводности 44
2-2. Основной закон теплопроводности 47
2-3. Уравнение теплопроводности 50
Глава третья. **Теплопроводность при стационарном режиме** 58
3-1. Решения простейших уравнений теплопроводности для условий стационарного режима 58
3-2. Конвективный теплообмен граничных поверхностей 61
3-3. Критическая толщина изоляции 61
3-4. Тонкий стержень 63
3-5. Ребристая поверхность нагрева 67
3-6. Стенка с внутренним источником тепла 84
3-7. Подземный кабель 87
3-8. Двухмерная стационарная теплопроводность 91
Глава четвертая. **Теплопроводность при нестационарном режиме** 103
4-1. Переходные процессы теплопередачи 103
4-2. Периодический перенос тепла 129

Глава пятая. **Теплопроводность в системах с подвижными границами** 143
5-1. Теплопроводность при плавлении или затвердевании 143
5-2. Движущиеся источники тепла 147

Часть В. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Глава шестая. **Движение вдоль поверхностей и в каналах** 158
6-1. Пограничный слой и турбулентность 158
6-2. Уравнение количества движения пограничного слоя 167
6-3. Уравнение пограничного слоя ламинарного потока 171
6-4. Движение вдоль плоской стенки 177
6-5. Градиенты давления вдоль поверхности 189
6-6. Точные решения уравнений ламинарного пограничного слоя для плоской пластины 191
6-7. Движение жидкости в трубе 195
6-8. Поперечное обтекание цилиндра 204
6-9. Обтекание осесимметричных тел 208
Глава седьмая. **Вынужденная конвекция при ламинарном режиме** 212
7-1. Уравнение теплового потока через пограничный слой 212
7-2. Уравнение энергии ламинарного пограничного слоя 215
7-3. Движение жидкости вдоль плиты 220
7-4. Плоская пластина с произвольно изменяющейся температурой поверхности 227
7-5. Поперечное омывание цилиндрических тел 233
7-6. Точные решения уравнения энергии ламинарного пограничного слоя 236
7-7. Движение жидкости в трубе 241
Глава восьмая. **Вынужденная конвекция в турбулентном потоке** 253
8-1. Аналогия между количеством движения и теплообменом . . 253
8-2. Движение жидкости в трубе 260
8-3. Продольное обтекание плиты 270
8-4. Последние достижения в теории теплообмена при турбулентном режиме движения 274
Глава девятая. **Вынужденная конвекция в потоке при отрывных обтеканиях** 287
9-1. Анализ явления теплообмена с применением теории размерности 287
9-2. Поперечное омывание труб и пучков труб 300
9-3. Шары и насадки 312

Глава десятая. **Некоторые особые случаи теплообмена** 318
10-1. Теплообмен при больших скоростях 318
10-2. Перенос тепла в газах при высоких скоростях 327
10-3. Перенос тепла в разреженных газах 339
10-4. Перенос тепла в жидких металлах 369
10-5. Транспирация (просачивание через поры) и пленочное охлаждение 373
Глава одиннадцатая. **Свободная конвекция** 384
11-1. Ламинарный перенос тепла на вертикальной пластине и горизонтальной трубе 385
11-2. Турбулентный перенос тепла на вертикальной пластине . . 398
11-3. Вывод уравнений пограничного слоя 401
11-4. Свободная конвекция в жидкости, заключенной между двумя плоскими стенками 404
11-5. Смешанная свободная и вынужденная конвекция 408
Глава двенадцатая. **Конденсация и испарение** 411
12-1. Конденсация 411
12-2. Испарение 418

Часть C. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Глава тринадцатая. **Свойства теплового излучения** . . 434
13-1. Абсолютно черное тело 442
13-2. Твердые и жидкие тела 455
13-3. Газы 467
Глава четырнадцатая. **Лучистый теплообмен** 482
14-1. Абсолютно черные тела 482
14-2. Твердые, жидкие и газообразные тела 491
14-3. Лучистый теплообмен внутри замкнутой поверхности . . . 497
14-4. Лучеиспускание факела 500
14-5. Коэффициент теплообмена при тепловом излучении 515
14-6. Погрешность, обусловленная излучением при измерениях температуры 519
14-7. Пирометрия 522
14-8. Солнечное излучение 527

Часть D. ПЕРЕНОС МАССЫ

Глава пятнадцатая. **Уравнения для двухкомпонентных смесей** 536
15-1. Основные уравнения для смесей двух компонентов 536
15-2. Основные уравнения и $i-d$ диаграмма влажного воздуха 538

Глава шестнадцатая. **Массообмен** 548
16-1. Диффузия 548
16-2. Ламинарный пограничный слой на плоской плите при переносе массы и тепла 557
16-3. Интегральные уравнения диффузионного пограничного слоя 565
16-4. Подобие процессов массообмена и теплообмена 573
16-5. Испарение воды в воздух 581

Часть Е. ТЕПЛООБМЕННИКИ

Глава семнадцатая. **Расчеты теплообменников** 587
17-1. Теплообменники рекуперативного типа 587
17-2. Теплообменники регенеративного типа 592
Приложения. Качественные показатели 602
Литература 640
Предметный указатель 678

ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

a — ускорение, коэффициент аккомодации, коэффициент температуропроводности.

b — толщина стенки, ребра.

c — удельная теплоемкость.

c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

d — диаметр.

d_h — эквивалентный диаметр.

f — коэффициент трения при движении жидкости в трубе, безразмерная функция тока.

f_c — коэффициент лобового сопротивления цилиндра.

f_p — коэффициент трения о плоскую плиту.

f_s — коэффициент скорости, скольжения.

g — ускорение силы тяжести.

i — энтальпия.

i_{fg} — удельная теплота испарения.

j — степень свободы.

k — постоянная Больцмана.

l — длина.

m — масса.

$\dot{m}$ — скорость потока массы.

n — нормаль, гармоническое число; число молекул.

p — давление.

q — удельный тепловой поток.

r — радиус; коэффициент восстановления.

s — толщина; расстояние; коэффициент молекулярной скорости.

t — температура.

t_B — средняя интегральная температура.

u — внутренняя энергия.

u, v, w — составляющие скорости.

v — удельный объем.

v^* — скорость сдвига, скорость касательного напряжения.

x, y, z — координаты.

x_0 — длина волны.

A — площадь.

C — постоянная величина, периметр.

E — напряжение (электрическое) или разность потенциалов; энергия.

F — сила.

J — интенсивность турбулентности; электрический ток; интеграл.

L — длина.

L_e — длина ввода; участок стабилизации.

M — молекулярный вес.

Q — количество тепла, передаваемое в единицу времени.

R — электрическое сопротивление; газовая постоянная.

R_c — термическое сопротивление теплопроводности.

R_t — термическое сопротивление конвективной передачи тепла.

T — абсолютная температура.

U — внутренняя энергия; общий коэффициент переноса.

V — объем, скорость.

W — вес, работа.

α — угол, параметр, характеризующий свойства, коэффициент теплообмена.

β — угол, параметр, указывающий на свойства потока, коэффициент распространения.

γ — параметр для температуры стенки, отношение удельных теплоемкостей.

δ — толщина пограничного слоя.

δ^* — эквивалентная толщина пограничного слоя.

δ_t — толщина теплового пограничного слоя.

ε — пористость.

ε_m — гидродинамический коэффициент турбулентной диффузии.

ε_q — тепловой коэффициент турбулентной диффузии.

ζ — отношение толщины теплового пограничного слоя к толщине гидродинамического пограничного слоя.

η — эффективность оребрения, безразмерная переменная.

θ — разность температур.

k — коэффициент теплопередачи, собственные величины (характеристические корни).

λ — коэффициенты теплопроводности.

$\overline{\lambda}$ — длина свободного пробега.

μ — коэффициент динамической вязкости.

ν — коэффициент кинематической вязкости.

ρ — плотность, радиус, электрическое сопротивление.

σ — поверхностное натяжение.

τ — напряжение трения, время.

τ_0 — период.

Φ — эффективность оребрения, рассеяние, источник тепла.

ϕ — функция тока.

Критерии

Bi — критерий Био.
E — критерий рассеяния.
Fo — критерий Фурье.
Gr — критерий Грасгофа для теплообмена.
Gr_D — критерий Грасгофа для массообмена.
Le — критерий Льюиса.
M — критерий Маха.
Nu — критерий Нуссельта.
Pe — критерий Пекле.
Pr — критерий Прандтля.
Re — критерий Рейнольдса.
Sc — критерий Шмидта.
St — критерий Стантона.

Индексы

b — значения на границе между ламинарным подслоем и турбулентным пограничным слоем.
cr — критическое значение при переходе к турбулентному режиму.
d — относящиеся к диаметру.
dy — динамические значения (динамическая нагрузка и т. д.).
e — выходное отверстие.
f — жидкая или газообразная среда.
i — входное отверстие; основывается на энтальпии.
l — жидкость.
m — среднее значение.
p — парциальный.
r — коэффициент восстановления.
s — значение в потоке вне пограничного слоя.
st — статические значения (статическое давление).
t — турбулентный режим.
v — пар.
w — значения на поверхности стенки.
x — относящееся к расстоянию *x*.
B — объем, толщина.
M — среднее арифметическое значение.
T — общее значение (общее давление и т. п.).
0 — значения в исходной точке.
∞ — значения на большом расстоянии от тела.
‾ — среднее значение.
* — сноска.
′ — значение флуктуации.

Дополнительные обозначения к тепловому излучению

a — коэффициент поглощения.
c — скорость света.
e — излучательная способность, мощность излучения.
h — постоянная Планка.
i — интенсивность излучения.
k — газовая постоянная на молекулу.
n — показатель преломления.
p_r — давление излучения.
u — плотность излучения.
B — полное излучение, покидающее промежуточную фазу.
E — погрешность.
F — коэффициент формы.
H — иррадиация — падающее излучение на промежуточную фазу.
L_e — эквивалентный радиус.
A — поглощательная способность.
β — угол.
ε — относительная излучательная способность.
η — к. п. д.
λ — длина волны.
ν — частота.
R — отражательная способность.
D — пропускательная способность.
ω — телесный угол.

Индексы

b — черный.
c — конвекция, цвет.
e — эквивалент.
g — газ, зеленый.
i — отраженный.
n — нормаль к поверхности.
r — излучение, красный.
s — поверхность.
β — под углом.
λ — монохроматический.
c — концентрация.

Дополнительно к переносу массы

h_D — коэффициент массообмена.
i — энтальпия.
n — число молекул.
φ — относительная влажность.

d — удельное влагосодержание.
w — массосодержание.
C_p — удельная объемная теплоемкость.
D — коэффициент диффузии.
N — число молей.
R — универсальная газовая постоянная.
δ — толщина диффузионного пограничного слоя.
σ — коэффициент испарения.

Индексы

a — воздух.
s — насыщение.
v — пар.

Дополнительно к расчетам теплообменников

ε — к. п. д. эффективность.
η — безразмерный параметр для времени.
ξ — безразмерный параметр для длины.

Индексы

l — большой.
s — маленький.
C — охлаждение.
H — нагрев.
L — на единицу длины.
P — период.
S — твердое тело.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

1-1. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Законы переноса тепла, так же как и все законы физики, весьма четко выражаются математическим языком. Однако уравнения, применяемые в физике, отличаются от уравнений математики, ибо они рассматривают физические величины. Такие величины имеют размерность (длина, скорость, энергия) и измеряются определенными единицами (*м*, *м/сек*, *кГ·м*). Физическая величина известна только тогда, когда установлена единица измерения, а также приводится число, указывающее на то, сколько раз данная единица измерения содержится в величине. Следовательно, каждый символ в физическом уравнении является числом, умноженным на единицу измерения ($V=3$ *м/сек*). Мы подразделяем основные единицы и производные. Последние образуются из групп основных единиц измерения (*м/сек*, *кГ·м*). Понятие размерности и единицы измерения следует четко разграничивать. Физическая величина имеет только одну размерность, но может быть выражена в различных единицах. Размерность длины, например, выражается в сантиметрах, метрах, километрах. Одну и ту же размерность можно выразить различными единицами.

Например, 1 *ч*$=3\,600$ *сек*;

1 *брит. тепл. ед.*$=778{,}26$ *фут фунт.*

1 *ккал*$=426{,}939$ *кГ·м*.

В зависимости от того, какие единицы считаются основными, различаются разные системы единиц.

Физическая система единиц основывается на трех единицах: сантиметр (*см*) — единица измерения длины, грамм (*г*) — единица измерения массы, секунда — единица измерения времени. Иногда градус (°С) используется как четвертая основная единица. Все остальные единицы являются производными от основных. Число основных еди-

ниц ни в коей мере не предписано нам природой. Например, градус (°С) по стоградусной шкале может быть выражен основными единицами *см*, *г*, применяя законы термодинамики. В принципе число основных единиц можно сократить еще больше. Например, вполне возможно рассматривать грамм (*г*) как основную единицу массы, используя общий закон притяжения. Сила притяжения двух масс m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r одна от другой, выражается по закону притяжения Ньютона формулой

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1\text{-}1)$$

Это выражение содержит универсальную постоянную K, которая в физической системе единиц равна $K = 6{,}685 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г*·*сек*^{2}. Эта постоянная опускается, когда уравнение используется для определения единицы массы, и уравнение принимает вид:

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Чтобы исключить силу, это уравнение объединим с формулой, выражающей закон Ньютона, для массы m_1, подверженной ускорению a:

$$F = m_1 a.$$

Совместно оба уравнения дают:

$$m_2 = ar^2.$$

Можно видеть, что правая часть уравнения имеет размерность *см*^{2}/*сек*^{2}. Поскольку различные члены, появляющиеся в физическом уравнении, должны иметь одинаковую размерность, то таким образом мы получили размерность массы. Однако обычно сохраняют грамм в качестве основной единицы измерения массы дополнительно к другим единицам, о которых упоминалось выше.

Техническая система единиц, основанная на английской системе единиц, развивалась под влиянием нужд техники. Эта система не нашла такого широкого распространения, как физическая система единиц. Например, нет полного соглашения о числе и типе основных единиц. Обычно техническая система определяется таким образом, что основные единицы применяются для измерений длины (метр),

силы (килограмм), времени (секунда), температуры (градус). Продолжают пользоваться и другими единицами.

Более того, довольно часто в технической литературе килограмм (*кг*) выражает массу и силу одновременно.

В 1954 г. X Международная конференция мер и весов разработала новую международную систему, называемую MKSA или Giorgi системой, которая основывается на следующих единицах:

м, m — метр (для длины);
кг, kg — килограмм (для массы);
сек, s — секунда (для времени);
A — ампер (для электрического тока);
°K — градус Кельвина (для температуры);
св, cd — свеча (для светового потока).

По этой системе энергия измеряется в джоулях ($1J = 1\ m^2\ kg/sec^2$) или в килоджоулях ($1\ KJ = 1\,000\ J$) и мощность в ваттах ($1\ W = 1\ m^2\ kg/sec^3$) или киловаттах ($1kW = 1\,000\ W$).

Существует такая зависимость:

1 *дж* = 1 $м^2 \cdot кг/сек^2$;
1 *кдж* = 1 000 *дж*;
1 *вт* = $м^2 \cdot кг/сек^3$;
1 *квт* = 1 000 *вт*.

1 *кдж* = 0,23844 *ккал* = $2{,}7783 \cdot 10^4$ *квт* · *ч* = 101,972 *кГ* · *м* = 0,94621 *Бт. е.**. Эта система имеет много преимуществ. Она, например, объединяет естественным путем единицы электричества с единицами, применяемыми в механике или термодинамике. Ряд стран принял соответствующий закон о системе мер и весов. Можно надеяться, что эта система получит большее признание в Соединенных Штатах. В связи с тем, что процессы переноса тепла широко распространены, статьи по этому вопросу можно найти как в физических, так и в технических журналах. Поэтому для всех работающих в этой области возникает необходимость переводить величины из одной системы единиц в другую. Возможность ошибок при таких вычислениях велика, но можно избежать этих ошибок, если придерживаться следующих правил:

1. Всегда следует помнить, что физическая величина определяется только тогда, когда установлена единица измерения, так же как и число, указывающее, сколько раз данная единица содержится в величине. Если, следователь-

* Международная таблица термодинамических параметров пара.

но, физическое уравнение используется для того, чтобы провести числовые вычисления, тогда для каждого знака вводится не только число, но также и соответствующая единица. Несколько примеров, приводимых в следующих параграфах, подтвердят применение этого правила.

2. Следует помнить, что только величины одного и того же вида, т. е. в одинаковых единицах измерения, можно прибавлять, вычитать, сравнивать.

В результате все члены в физическом уравнении должны иметь одну и ту же размерность.

3. Следует четко различать килограмм как единицу массы и как единицу силы.

В частности, следует уточнять в каждом отдельном случае, основываются ли физические характеристики величин (плотность ρ, теплоемкость C и т. д.) на массе или весе. В США они обычно основываются на массе, в то время как на европейском континенте отдают предпочтение технической системе, которая основывается на величинах, выраженных в единицах веса, который служит также определением силы, действию которой подвергается масса в 1 *кг* под влиянием ускорения силы тяжести.

Вся проблема системы единиц в основном перестает быть проблемой, если все вышеприведенные правила применяются постоянно и перевод из одной системы в другую происходит почти автоматически. Следующие примеры поясняют эти правила:

1. Если объем увеличивается при постоянном давлении на величину ΔV, тогда согласно первому закону термодинамики расход тепла Q в этом процессе за счет изменения внутренней энергии ΔU и механической работы, определяется следующим уравнением:

$$Q = \Delta U + p\frac{\Delta V}{J}, \qquad (1\text{-}2)$$

$J = 426{,}4$ *кГм/ккал* — механический эквивалент тепла. Допустим, что $\Delta U = 0{,}75$ *ккал*, $p = 5\,000$ *кГ/м*^{2}, $\Delta V = 0{,}06$ *м*^{3}. Требуется вычислить подведенное количество тепла. Введем в правую часть уравнения (1-2) величины для обозначений единиц измерения:

$$Q = 0{,}75\ \text{ккал} + \frac{5\,000\ \text{кГ/м}^2 \cdot 0{,}06\ \text{м}^3}{427\ \text{кГм/ккал}} = 1{,}45\ \text{ккал}.$$

Действительно, коэффициент J, являющийся в первом законе термодинамики, как сказано выше, является только

лишь коэффициентом преобразования для перехода от одной системы единиц к другой, и поэтому нет нужды в специальном обозначении для него в физическом уравнении. Обычно указываются физические величины, в которых данная единица будет использована. Поэтому выражение для первого закона может быть записано следующим образом:

$$Q = \Delta U + p\Delta V. \qquad (1\text{-}3)$$

Теперь покажем, что вычисления при применении установленных выше правил приводят к точно такому же результату для тепла Q, дополнительно введенному в процесс. Вводя предусмотренные ранее значения в правую часть уравнения, получаем следующее выражение:

$$Q = 0{,}75\ ккал + 5\,000\ кГ/м^2 \times 0{,}06\ м^3 = \\ = 0{,}75\ ккал + 300\ кГм.$$

Теперь два члена правой части уравнения выражены в различных единицах. Для того чтобы мы могли произвести сложение, один из членов следует перевести в единицы измерения другого. Поскольку по традиции тепло выражают в *ккал*, то преобразованию подвергается второй член. Вводя коэффициент преобразования *кГм в ккал*, можно продолжить вычисления:

$$1\ кГм = 1/427\ ккал;$$

$$Q = 0{,}75\ ккал + 300\,\frac{1}{427}\ ккал = 1{,}45\ ккал.$$

2. Уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости имеет вид:

$$p = p_{st} + \rho\,\frac{v^2}{2}. \qquad (1\text{-}4)$$

Оно выражает тот факт, что сумма статического давления p_{st} и динамического давления $\rho v^2/2$ в каждой точке жидкости равна полному давлению p. Полагаем, что

$$p_{st} = 10\ кГ/м^2, \quad v = 10\ м/сек, \quad \rho = 102\ кг/м^3.$$

Необходимо вычислить полное давление. Вычисление производится таким же образом, как и в первом примере. Введем в правую часть уравнения единицы измерения:

$$p = 10\ кГ/м^2 + 102\ кг/м^3 \cdot \frac{100}{2}\ м^2/сек^2 = \\ = 10\ кГ/м^2 + 5\,100\ кг/м \cdot сек^2.$$

Очевидно, что два члена правой части уравнения, которые должны иметь одну и ту же размерность, выражаются в разных единицах. Следовательно, одну из единиц нужно перевести в размерность другой. Для проведения этого преобразования вспомним определение килограмма силы (*кГ*): один килограмм силы — это такая сила, которая действует на массу в один килограмм [*кг*] в гравитационном поле с обычным ускорением силы тяжести 9,81 *м/сек*^{2}. Это определение можно записать как уравнение

$$1\ кГ = 1\ кг \cdot 9{,}81\ м/сек^2 = 9{,}81\ кгм/сек^2.$$

Подставив выражение для 1 *кг* массы, полученное из вышеприведенного соотношения, в уравнение

$$p = 10\ кГ/м^2 + \frac{1}{9{,}81}\ \frac{5\,100}{м \cdot сек^2}\ \frac{кГ \cdot сек^2}{м} = 520\ кГ/м^2.$$

Иногда в литературе встречается такая форма записи уравнения Бернулли:

$$p = p_{st} + \rho\frac{v^2}{2g}. \qquad (1\text{-}5)$$

В этом уравнении g является коэффициентом преобразования:

$$g = 9{,}81\ кг \cdot м/кг \cdot сек^2.$$

Вычисление в этом случае производится так же, как в предыдущем,

$$p = 10\ кГ/м^2 + 0{,}102\ кг/м^3 \times \frac{100}{2}\ м^2/сек^2 \times \frac{1}{9{,}81}\ \frac{кГ \cdot сек^2}{кг \cdot м} =$$
$$= 520\ кГ/м^2.$$

Таким образом, обе формы записи уравнения при вычислении приводят к одной и той же величине полного давления.

3. Третий пример относится к измерениям температуры в высокоскоростном потоке газа. Далее в книге последует пояснение наличия в таком потоке двух различных видов температур: полной температуры T и статической температуры T_{st}. Обе эти температуры связываются следующим уравнением, в котором теплоемкость считается величиной постоянной:

$$T = T_{st} + \frac{v^2}{2c_p}.$$

В этом уравнении теплоемкость c_p при постоянном давлении находится во втором члене правой части уравнения. Для того чтобы тщательно провести вычисление, необходимо знать, является ли теплоемкость количеством тепла на единицу килограмма массы и на 1° С или на единицу килограмма веса и 1° С. В вышеприведенном уравнении теплоемкость отнесена к единице массы. Вычисления производятся следующим образом. Значения для членов правой части уравнения предусматриваются следующими выражениями:

$$T_{st} = 50^\circ\,\text{C},\quad v = 340\ м/сек,\quad c_p = 0{,}240\ ккал/кг \cdot град,$$

$$T = 50^\circ\,\text{C} + \frac{115\,600}{2}\ м^2/сек^2\ \frac{1}{0{,}240}\ кг \cdot град/ккал =$$

$$= 50^\circ\,\text{C} + 240\,800\ м^2 \cdot кг \cdot град/сек^2 \cdot ккал.$$

Очевидно, что второй член должен иметь размерность температуры. С этой целью заменим килограмм массы в числителе на килограмм силы, чтобы получить выражение для механической работы:

$$T = 50^\circ\,\text{C} + 240\,800\ м^2 \cdot град/сек^2 \cdot ккал \cdot \frac{1}{9{,}81}\ кГ \cdot сек^2/м =$$

$$= 50^\circ\,\text{C} + 2{,}45 \cdot 10^4\ кГ \cdot м \cdot град/ккал.$$

Окончательно, переводя *ккал* в $кГ \cdot м$, получаем:

$$T = 50^\circ\,\text{C} + 2{,}45 \cdot 10^4\ кГ \cdot м \cdot град/ккал\ \frac{1}{427}\ ккал/кГ \cdot м =$$

$$= 107{,}2^\circ\,\text{C}.$$

Легко показать, что уравнение, приведенное выше для полной температуры, может быть представлено следующим образом:

$$T = T_{st} + \frac{v^2}{2gc_p},$$

где g — обычное ускорение силы тяжести, а теплоемкость отнесена к единице веса.

На этих примерах можно было бы убедиться, что коэффициенты преобразования подобно механическому эквиваленту тепла J и гравитационному коэффициенту преобра-

зования g могут быть опущены в физических уравнениях и тогда, когда проводятся вычисления в числовых значениях, применяя три установленных правила. Поэтому в уравнениях этой книги подобные коэффициенты преобразования не приводятся. Кроме того, все собственные значения, такие как плотность, теплоемкость и т. д., основываются на единице массы, которая является наиболее подходящей размерностью для измерения определенного количества материала.

1-2. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

Благодаря наличию потока тепла от областей с более высокой температурой к областям с более низкой температурой разность температур в одном и том же теле с течением времени выравнивается.

Знакомство с законами, которые управляют такими процессами, весьма важно для всех областей техники, поскольку знание этих законов дает возможность управлять тепловым потоком и изыскивать средства его регулирования. При конструировании новых тепловых двигателей сталкиваются снова и снова с этой проблемой. С точки зрения термодинамики тепловой двигатель состоит в принципе из двух резервуаров с разной температурой и самого двигателя, помещенного между ними. Рабочее тело часто изменяется на протяжении процесса, и тепло должно передаваться от одного теплоносителя к другому при незначительном перепаде температур. В паросиловых установках первоначальным теплоносителем являются газообразные продукты, образующиеся в результате горения, затем в паровом котле тепло превращается в пар. В конденсаторе пар отдает свое тепло охлаждающей воде, и охлаждающая вода, проходя через градирню, передает это тепло воздуху. В двигателе внутреннего сгорания такого вида теплообмена не существует, поскольку тепло, полученное при горении, образуется непосредственно в рабочей среде. Некоторая часть этого тепла превращается в работу, а другая часть тепла вместе с отработанными газами выпускается наружу. Тем не менее полное представление о процессе теплопереноса представляет также большое значение при проектировании таких двигателей, поскольку применение воздушного или водяного охлаждения стенок цилиндров должно обеспечить безопасную температуру нагрева материала. Поэтому допустимая мощ-

ность цилиндра двигателя с высокими техническими характеристиками главным образом определяется решением проблем охлаждения. Для газовых турбин, которые теперь начинают все больше и больше применяться в технике, разработка проблем тепломассообмена приобретает первостепенное значение.

С другой стороны, мы часто встречаемся с задачей ограничения теплоотдачи. Это достигается применением изоляционного материала с низким коэффициентом теплопроводности. Снижение теплопотерь также является немаловажным фактором, влияющим на эффективность тепловых процессов.

Согласно второму закону термодинамики, чем выше температура теплоносителя, тем бо́льшую часть данного количества тепла можно использовать для производства полезной работы. Любое снижение температуры без произведения работы ведет к повышению энтропии, а это означает нежелательную потерю механической энергии.

Тепловой поток в твердом теле является результатом передачи тепловой энергии от одной молекулы к другой. Такой процесс называется теплопроводностью. Он наблюдается также в жидкостях и газах. В последних, однако, молекулы не занимают фиксированного положения, а постоянно меняют свое место, даже если вещество в целом находится в состоянии покоя. Вместе с ними переносится и тепловая энергия. Этот процесс относится к процессам теплопроводности и рассматривается вместе с последними.

Имеется еще один тип переноса тепла в жидкостях и газах. В такой среде могут возникнуть макроскопические движения, и тепло может передаваться от одной точки к другой вместе с массами вещества. Этот процесс называется конвективным теплообменом. Третий способ теплообмена — лучистый теплообмен. Твердые тела, так же как жидкости и газы, способны излучать и поглощать тепловую энергию в виде электромагнитных волн. В производственных процессах часто все три вида теплообмена участвуют одновременно.

Однако для изучения влияний теплообмена необходимо четко разграничивать все способы, поскольку они подчиняются различным законам. Мы будем рассматривать процессы теплообмена (теплопроводность, конвекцию и излучение) каждый в отдельности в последующих главах этой книги.

1-3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В технических расчетах чаще всего приходится интересоваться количеством тепла, передаваемого за единицу времени между двумя жидкостями или газами, разделенными стенкой и обладающими разными температурами.

Как уже говорилось в разделе 1-2, ясно, что в этом случае наблюдается наложение одних процессов на другие. Во-первых, тепло одного газа (или жидкости) должно быть подведено к разделяющей стенке. Затем тепло должно пройти через стенку и, наконец, оно воспринимается с противоположной поверхности стенки более холодным газом (или более холодной жидкостью). В настоящем параграфе мы займемся определением теплового потока для простейшего случая, а именно для стационарного режима и плоской стенки, и вместе с этим выведем основные законы теплообмена. Отдельные процессы будут подробно исследованы в следующих разделах.

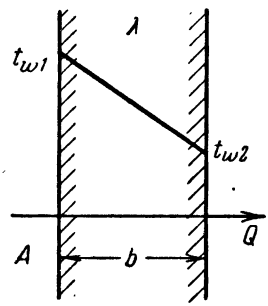


Рис. 1-1. Теплопроводность через плоскую стенку при стационарном режиме.

Итак, рассмотрим сначала плоскую стенку толщиной b, обе поверхности которой имеют различные, но постоянные во времени температуры t_{w1} и t_{w2} (рис. 1-1). Количество тепла, которое при указанном перепаде температур проходит за единицу времени через участок стенки площадью A, обозначается буквой Q*. По закону Фурье это количество тепла определяется следующим уравнением:

$$Q = \frac{\lambda}{b} A (t_{w1} - t_{w2}), \qquad (1\text{-}6)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, характеризующий свойство вещества, из которого состоит стенка.

Из уравнения (1-6) можно легко установить размерность коэффициента теплопроводности

$$\lambda = \frac{Qb}{A(t_{w1} - t_{w2})} \quad [ккал/м \cdot ч \cdot град].$$

* В отличие от термодинамики, где Q означает любое количество теплоты независимо от времени.

Количество тепла, проходящее через единицу площади поверхности за единицу времени, называется тепловым потоком. Как следует из определения, тепловой поток

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{\lambda}{b}(t_{w1} - t_{w2}). \qquad (1\text{-}7)$$

Если теплопроводность не зависит от температуры, то, как видно из рис. 1-1, температура внутри стенки убывает по линейному закону от t_{w1} до t_{w2}. Теплопроводность различных веществ дается в приложении. Как видно из таблиц, среди твердых тел металлы обладают наилучшей теплопроводностью. Например, коэффициент теплопроводности чугуна равняется приблизительно 45 *ккал/м · ч · град*, меди—приблизительно 300 *ккал/м·ч·град*. Металлические сплавы имеют значительно более низкую теплопроводность, чем чистые металлы. Например, величины теплопроводности нержавеющей стали около 13,3 *ккал/м·ч·град*. Величины теплопроводности неметаллических веществ составляют приблизительно от 0,05 до 3 *ккал/м·ч·град*.

Величина коэффициентов теплопроводности газов на порядок меньше теплопроводности жидкостей. Поэтому газы обладают самой низкой теплопроводностью из всех веществ. Низкий коэффициент теплопроводности теплоизоляционных материалов (диатомитовые земли, шлаковая вата, торф, пробка) обусловливается их пористостью. Поэтому тепловой поток в таких материалах является в основном процессом теплопередачи через воздух, заключенный в порах. Твердое вещество таких материалов не позволяет воздуху приходить в состояние движения от разности температур, а тем самым и предотвращает передачу дополнительного количества тепла конвективными токами. Закон Фурье для процессов теплопередачи весьма напоминат закон Ома для электрического тока. В этом можно легко убедиться, если уравнение (1-6) написать в следующей форме:

$$t_{w1} - t_{w2} = \frac{b}{\lambda A} Q \qquad (1\text{-}8)$$

и сравнить с формулой закона Ома

$$E = RI. \qquad (1\text{-}9)$$

Здесь количество передаваемого тепла Q соответствует силе тока I. Распространение тепла обусловливается тем-

пературным напором (t_{w1}—t_{w2}), который соответствует разности потенциалов.

Отношение $b/\lambda A$ называется термическим сопротивлением и обозначается символом R_c:

$$R_c = \frac{b}{\lambda A} \tag{1-10}$$

(что соответствует сопротивлению R в формуле закона Ома). Величина, обратная коэффициенту теплопроводности, т. е. удельное термическое сопротивление, соответствует удельному сопротивлению в электротехнике

$$\frac{1}{\lambda} = R_c \frac{A}{b}.$$

Теперь предположим, что стенка состоит из нескольких, например трех, слоев различных материалов, характеризующихся коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2 и λ_3. Если предположить, что температура на стыках слоев t_{w2} и t_{w3} (рис. 1-2), то уравнение (1-8) можно составить для каждого из слоев:

$$t_{w1} - t_{w2} = \frac{b_1}{\lambda_1 A} Q;$$

$$t_{w2} - t_{w3} = \frac{b_2}{\lambda_2 A} Q;$$

$$t_{w3} - t_{w4} = \frac{b_3}{\lambda_3 A} Q.$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$t_{w1} - t_{w4} = \left(\frac{b_1}{\lambda_1 A} + \frac{b_2}{\lambda_2 A} + \frac{b_3}{\lambda_3 A}\right) Q = (R_{c1} + R_{c2} + R_{c3}) Q. \tag{1-11}$$

Это уравнение позволяет определять количество передаваемого тепла по температурам на противоположных поверхностях стенки t_{w1} и t_{w4}. Термическое сопротивление многослойной стенки равняется сумме термических сопротивлений каждого слоя. Поэтому в рассмотренном случае можно применять тот же закон, что и для сопротивлений, включенных последовательно, в электротехнике.

В инженерной практике мы чаще всего сталкиваемся со стенками, разделяющими жидкости или газы. В этом случае мы не знаем температур на обеих поверхностях стенки; нам известны лишь температуры жидкостей по обе стороны стенки. На рис. 1-3 эти температуры обозначаются

буквами t_1 и t_2. Определяя температурное поле в жидкостях, мы получаем кривые, изображенные на рисунке. Температурный градиент заметен лишь в сравнительно тонком слое у самой поверхности стенки, тогда как на больших расстояниях от стенки в большинстве случаев существуют только незначительные разности температур. Для простоты эту температурную кривую можно заменить пунктирной ломаной линией. Объяснить это явление можно, предположив, что тонкий пограничный слой жидкости (толщиной δ') связан со стенкой, тогда как за пределами этого слоя в ре-

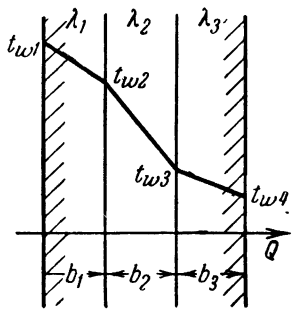


Рис. 1-2. Теплопроводность через многослойную стенку при стационарном режиме.

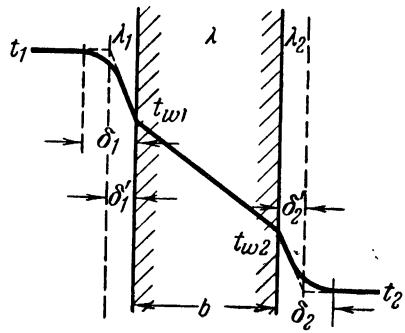


Рис. 1-3. Теплопередача через плоскую стенку при стационарном режиме.

зультате хаотических движений в жидкости разности температур не существует. Как мы увидим далее, это слишком упрощенная картина гораздо более сложного процесса, однако она объясняет основные явления и обладает преимуществом исчерпывающей ясности. В пограничном слое передача тепла осуществляется путем теплопроводности, как в твердых телах. Поэтому температурный градиент в слое изображается прямой и перенос тепла описывается уравнением (1-6), в которое необходимо подставить значение коэффициента теплопроводности жидкости или газа λ и толщину пограничного слоя δ'.

Таким образом, для количества тепла, подводимого к поверхности стенки, получаем следующее уравнение:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta'} A (t - t_w). \qquad (1\text{-}12)$$

Количество передаваемого тепла Q можно определить, зная толщину пограничного слоя δ'. Последняя, однако,

в значительной степени зависит от характера движений жидкости, например от скорости движения жидкости вдоль стенки, от формы самой стенки, от поверхности стенки и от других подобных факторов. В практике расчеты обычно производят, пользуясь величиной отношения λ/δ' без определения истинной толщины пограничного слоя δ. Это отношение называется коэффициентом теплообмена и обозначается буквой α. Таким образом, получаем аналитическое выражение

$$Q = \alpha A (t - t_w), \tag{1-13}$$

которое было найдено еще Исааком Ньютоном (1643—1727). Сначала считали, что коэффициент теплообмена α характеризует собой свойство текущей жидкости или газа. Лишь благодаря сравнительно недавним изысканиям в теории теплообмена был выяснен сложный характер этой величины. В настоящей книге вопросу определения коэффициента теплообмена посвящена целая большая глава. Порядки величин коэффициента теплообмена, встречающиеся в технической практике, приводятся в табл. 1-1. Она дает представление об относительной величине этого параметра. Так как коэффициент теплообмена является частным от деления коэффициента теплопроводности на толщину пограничного слоя, следует ожидать, что газы, которые обладают небольшой теплопроводностью, имеют меньший коэффициент теплобмена, чем жидкости. Табл. 1-1 подтверждает этот вывод.

Таблица 1-1

Порядок величины коэффициентов теплообмена, *ккал/м²·ч·град*

Движущийся воздух	10—250
Движущаяся вода	500—5 000
Кипящая вода	2 500—5 000
Конденсирующиеся водяные пары	500—25 000

Применяя уравнение (1-13) к условиям, существующим у обеих поверхностей стенки, на рис. 1-3, получаем:

$$Q = \alpha_1 A (t_1 - t_{w1});$$

$$Q = \alpha_2 A (t_{w2} - t_2).$$

При стационарном режиме количества передаваемого тепла в том и другом случаях должны быть равны. Эти два уравне-

ния также можно записать в форме, соответствующей формуле закона Ома:

$$\left.\begin{aligned} t_1 - t_{w1} &= \frac{1}{\alpha_1 A} Q; \\ t_{w2} - t_2 &= \frac{1}{\alpha_2 A} Q. \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

Отношение $1/\alpha A$ называется термическим сопротивлением теплообмена R_t:

$$R_t = \frac{1}{\alpha A}. \tag{1-15}$$

Сложив почленно уравнение (1-8) с уравнениями (1-14), можно установить зависимость между количеством передаваемого через стенку тепла и температурами t_1 и t_2 (рис. 1-3):

$$t_1 - t_{w1} = \frac{1}{\alpha_1 A} Q;$$

$$t_{w1} - t_{w2} = \frac{b}{\lambda A} Q;$$

$$t_{w2} - t_2 = \frac{1}{\alpha_2 A} Q;$$

$$t_1 - t_2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{b}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}\right) Q =$$

$$= (R_{t1} + R_c + R_{t2}) Q = R_0 Q. \tag{1-16}$$

Сумма частных термических сопротивлений равна общему термическому сопротивлению теплопередачи R_0. Таким образом, и в этом случае применим тот же закон, что и для электрических сопротивлений, включенных последовательно. В большинстве случаев практических расчетов вместо термических сопротивлений применяются коэффициенты теплопроводности и теплообмена. Тогда будут справедливы следующие равенства, легко получаемые из уравнения (1-16):

$$Q = kA(t_1 - t_2); \tag{1-17}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \tag{1-18}$$

Величина k называется коэффициентом теплопередачи и имеет размерность *ккал/м²·ч·град*. Если стенка

состоит из нескольких слоев с различными коэффициентами теплопроводности λ_i и различной толщиной b_i, то средний член уравнения (1-18) заменяется суммой $\Sigma b_i/\lambda_i$.

Пример 1-1. Плоская чугунная стенка толщиной 10 *мм* омывается с обеих сторон воздухом; величина коэффициентов теплообмена $\alpha_1=\alpha_2$ равна 10 *ккал/м²·ч·град* (табл. 1-1). Определить общее термическое сопротивление теплопередачи и коэффициент теплопередачи. Коэффициент теплопроводности стенки $\lambda=45$ *ккал/м·ч·град*. Из уравнения (1-16) следует:

$$R_0=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{b}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{10}+\frac{0{,}01}{45}+\frac{1}{10}\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\,0{,}2002\ \textit{ч·град/ккал}.$$

Коэффициент теплопередачи

$$k=\frac{1}{AR}=\frac{1}{0{,}2002}\approx 5\ \textit{ккал/м²·ч·град}.$$

Таким образом, термическое сопротивление чугунной стенки совершенно незначительно, и если необходимо усилить тепловой поток, бесполезно уменьшать это сопротивление. Однако необходимо увеличить коэффициент теплообмена.

Пример 1-2. Чугунная стенка толщиной 10 *мм* и алюминиевая стенка толщиной 20 *мм* положены друг на друга таким образом, что между ними имеется воздушная прослойка толщиной 0,01 *мм*. Определить общее термическое сопротивление этой многослойной стенки. Из уравнения (1-11) и табл. П-1 и П-4 (приложение) находим:

$$R_c=\frac{1}{A}\left(\frac{b_1}{\lambda_1}+\frac{b_2}{\lambda_2}+\frac{b_3}{\lambda_3}\right)=\frac{1}{A}\left(\frac{0{,}01}{45}+\frac{0{,}02}{196}+\frac{0{,}00001}{0{,}021}\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\,(0{,}000222+0{,}000102+0{,}00047)\ \textit{ч·град/ккал}.$$

Таким образом, на величину общего термического сопротивления рассматриваемой многослойной стенки большое влияние оказывает воздушная прослойка, которой невозможно избежать даже при самой тщательной пригонке двух стенок. Термическое сопротивление без наличия воздушной прослойки равнялось бы $\frac{1}{A}(0{,}000222+0{,}000102)$ *ч·град/ккал*, что составляет менее половины предыдущего.

1-4. ПРЯМОТОК, ПРОТИВОТОК, ПЕРЕКРЕСТНЫЙ ТОК

В предыдущем параграфе рассматривались вопросы теплопередачи между двумя газами или жидкостями при условии, что температуры на обеих сторонах разделяющей стенки постоянны по всей поверхности A. В действительно-

сти температуры двух жидкостей при движении вдоль омываемых поверхностей меняются в результате процессов теплообмена. Поэтому в формулах предыдущего параграфа следует применять значение усредненного температурного напора. Вычислим этот усредненный температурный напор. Прежде всего следует рассмотреть случай, когда обе жидкости, омывающие поверхности стенки, текут параллельно в одном и том же направлении (рис. 1-4); такая схема движения называется прямотоком. На рис. 1-4 показан также график изменения температур обеих жидкостей по мере их движения вдоль омываемой поверхности A. Выделим элемент поверхности dA. Температуры жидкостей по обе стороны этого элемента t_1 и t_2. Пусть разность температур жидкостей равна Δt. Тогда

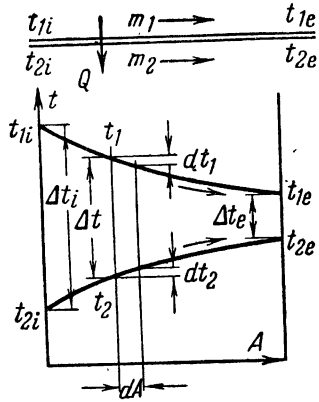


Рис. 1-4. Теплопередача при прямотоке.

$$\Delta t = t_1 - t_2. \qquad (1\text{-}19)$$

Количество передаваемого тепла dQ через участок dA определяют из уравнения (1-17), а именно, применяя принятые обозначения:

$$dQ = k dA \Delta t. \qquad (1\text{-}20)$$

Коэффициент теплопередачи k принимается постоянным для всей омываемой поверхности. Вследствие теплообмена более горячая жидкость охлаждается на dt. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$dQ = -m_1 c_1 dt_1, \qquad (1\text{-}21)$$

где m_1 — масса жидкости, протекающей над омываемой поверхностью за единицу времени (весовой расход жидкости), а c_1 — теплоемкость жидкости. Коэффициент $m_1 c_1$ представляет собой водяной эквивалент или теплоемкость жидкости, протекающей над поверхностью за единицу времени. Из уравнения

$$dQ = m_2 c_2 dt_2, \qquad (1\text{-}22)$$

где m_2 и c_2 — соответственно весовой расход и теплоёмкость второй жидкости, следует, что более холодная жидкость нагревается на dt_2. Дифференцирование уравнения (1-19) дает:

$$d(\Delta t) = dt_1 - dt_2. \tag{1-23}$$

Если в это уравнение подставить выражения дифференциалов температуры из уравнений (1-21) и (1-22), то оно принимает вид:

$$d(\Delta t) = -\left(\frac{1}{m_1 c_1} + \frac{1}{m_2 c_2}\right) dQ = -\mu dQ, \tag{1-24}$$

где μ равно выражению, заключенному в скобки. Уравнение (1-24) легко интегрируется. Выражая температурный напор в начале омываемой поверхности A через Δt_i и в конце — через Δt_e, получаем уравнение

$$\Delta t_i - \Delta t_e = \mu Q. \tag{1-25}$$

Подстановка значения dQ из уравнения (1-20) в уравнение (1-24) дает следующее равенство:

$$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -\mu k dA, \tag{1-26}$$

а интегрирование по всей поверхности нагрева A с учетом граничных условий ($A = 0$ для $\Delta t = \Delta t_i$) приводит к уравнению

$$\ln \frac{\Delta t_e}{\Delta t_i} = -\mu k A. \tag{1-27}$$

Отсюда температурный напор в конце поверхности нагрева можно определить из выражения

$$\Delta t_e = \Delta t_i e^{-\mu k A}. \tag{1-28}$$

Количество передаваемого тепла через всю омываемую поверхность A можно вычислить из уравнения, получаемого заменой μ в уравнении (1-25) его значением, находимым из уравнения (1-27):

$$Q = kA \frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{\ln \Delta t_i / \Delta t_e}. \tag{1-29}$$

Дробь в правой части последнего уравнения представляет собой не что иное, как искомый усредненный температурный

напор Δt_m. Таким образом, количество передаваемого тепла можно вычислить при помощи следующих формул:

$$Q = kA\Delta t_m; \tag{1-30}$$

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{\ln \Delta t_i/\Delta t_e}. \tag{1-31}$$

Другой тип теплообменников строится таким образом, что две жидкости текут параллельно, но в противоположных направлениях, как показано на рис. 1-5. Такая схема движения жидкостей называется противотоком. В этом случае расчет усредненного температурного напора производится таким же образом, как и для теплообменников с прямотоком, но в уравнении (1-22) появляется минус, так как температура холодной жидкости падает, если двигаться по поверхности нагрева A в положительном направлении. Значение μ находится из выражения

$$\mu = \frac{1}{m_1 c_1} - \frac{1}{m_2 c_2}. \tag{1-32}$$

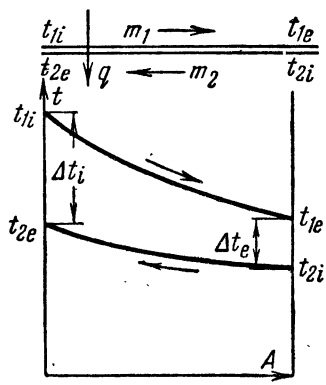


Рис. 1-5. Теплопередача при противотоке.

Приведенные в параграфе формулы (1-28)—(1-31) считаются справедливыми и для противотока.

Среднелогарифмический температурный напор, вычисленный из уравнения (1-31), бывает всегда меньше среднего арифметического Δt_M между начальным и конечным температурными напорами

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2}. \tag{1-33}$$

Отношение a среднелогарифмического значения [уравнение (1-31)] к среднеарифметическому зависит от величины отношения температурных напоров $\Delta t_i/\Delta t_e$, как это видно из табл. 1-2. Эту таблицу можно использовать для более простого определения среднелогарифмического температурного напора по среднеарифметическому путем умножения последнего на коэффициент a, приведенный в таблице.

Таблица 1-2

Отношение a среднелогарифмического температурного напора Δt_m к среднеарифметическому температурному напору Δt_M при прямотоке и противотоке[1]

$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_e}$	a	$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_e}$	a	$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_e}$	a	$\frac{\Delta i_i}{\Delta t_e}$	a
1,0	1,000	2,0	0,962	3,0	0,910	6,0	0,798
1,2	0,998	2,2	0,952	3,5	0,889	7,0	0,770
1,4	0,991	2,4	0,942	4,0	0,867	8,0	0,748
1,6	0,981	2,6	0,928	4,5	0,846	9,0	0,729
1,8	0,971	2,8	0,918	5,0	0,829	10,0	0,710

[1] Значения в таблице также справедливы и для обратных величин $\Delta t_e/\Delta t_i$.

Третья схема движения жидкостей в теплообменниках такова, что жидкости текут в направлениях, перпендикулярных друг другу. Такая схема называется перекрестным током и показана на рис. 1-6. Одна из жидкостей омывает поверхность нагрева спереди, а другая — сзади и скорость обоих потоков жидкостей одна и та же. Определить средний температурный напор в этом случае бывает гораздо труднее, чем для теплообменников с прямотоком и противотоком. Такой расчет был выполнен В. Нуссельтом [Л. 1]. Как видно из рис. 1-6, температура обеих жидкостей в конце пути неодинакова по всему сечению канала. Средняя температура по сечению канала в конце пути обозначается символом t_e. Температурный напор в начале пути двух жидкостей, омывающих поверхность нагрева, находится из выражения

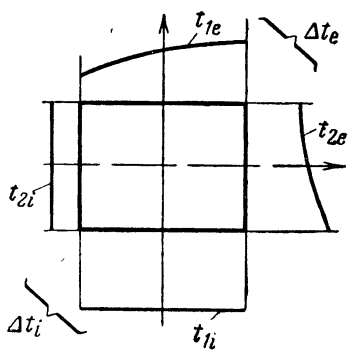


Рис. 1-6. Теплопередача при перекрестном токе.

$$\Delta t_i = t_{1i} - t_{2i}, \qquad (1\text{-}34)$$

где t_{1i} — начальная температура горячей жидкости;

t_{2i} — начальная температура холодной жидкости.

Конечный температурный напор находится из выражения

$$\Delta t_e = t_{1e} - t_{2e}, \qquad (1\text{-}35)$$

где t_{1e} — средняя конечная температура жидкости, отдающей тепло;

t_{2e} — средняя конечная температура жидкости, получающей тепло.

В этом случае средний температурный напор зависит не только от величины отношения $\Delta t_i/\Delta t_e$, но также и от величины отношения m_1c_1/m_2c_2 водяных эквивалентов обоих жидкостей. Отношение среднелогарифмического температурного напора Δt_m к среднеарифметическому температурному напору Δt_M можно определить из табл. 1-3, которая составлена на основании результатов исследований Нуссельта; средний температурный напор определяется, как и в случаях прямотока и противотока.

Таким образом, при противотоке можно применять наименьшую поверхность нагрева для данного количества передаваемого тепла и при данных начальном и конечном температурных напорах.

При прямотоке необходима большая площадь поверхности нагрева.

Более того, противоток выгоднее прямотока и в том отношении, что конечную температуру холодной жидкости t_{2e} можно поднять выше конечной температуры горячей жидкости t_{1e} (рис. 1-5). Такого же результата можно достичь и с перекрестным током [в области отрицательных значений $\Delta t_e/\Delta t_i$ (табл. 1-3)]. Что касается величины поверхности нагрева, то перекрестный ток занимает среднее положение. Разница в величине поверхности нагрева бывает наибольшей, когда теплоемкости обеих жидкостей одинаковы. С увеличением теплоемкости одной из жидкостей разница в величине поверхности нагрева становится меньше.

Если же теплоемкость одной из жидкостей становится бесконечно большой, разницы в величине поверхности нагрева уже не существует. Как показано на рис. 1-7, в этом случае температура одной жидкости остается постоянной по всей поверхности нагрева, и здесь уже не имеет смысла говорить о прямотоке, противотоке или перекрестном токе. На практике картина, иллюстрируемая на рис. 1-7, получается, например, при испарении или конденсации одной из жидкостей.

Таблица 1-3

Отношение a среднелогарифмического температурного напора Δt_m к среднеарифметическому температурному напору Δt_M для перекрестного тока (на основании расчетов Нуссельта)

$$\Delta t_m = a\Delta t_M$$

m_1c_1/m_2c_2	$\Delta t_e/\Delta t_i$								
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,3	0,2	0,1
0	0,998	0,993	0,986	0,978	0,962	0,939	0,902	0,836	0,707
0,2	0,998	0,993	0,987	0,981	0,971	0,958	0,936	0,902	0,848
0,5	0,998	0,993	0,988	0,982	0,977	0,968	0,945	0,935	0,913
1,0	0,998	0,993	0,989	0,983	0,978	0,974	0,961	0,948	0,933

m_1c_1/m_2c_2	$\Delta t_e/\Delta t_i$								
	0	—0,1	—0,2	—0,3	—0,4	—0,5	—0,6	—0,7	—0,8
0	0								
0,2	0,762	0,630							
0,5	0,874	0,819	0,750	0,632	0,519				
1,0	0,912	0,876	0,835	0,766	0,710	0,618	0,500	0,380	0,220

[1] Значения этой таблицы справедливы также и для обратных величин m_2c_2/m_1c_1.

Если теплоемкость одинакова для обеих жидкостей, то при противотоке начальный температурный напор Δt_i [см. уравнение (1-25)] равняется конечному температурному

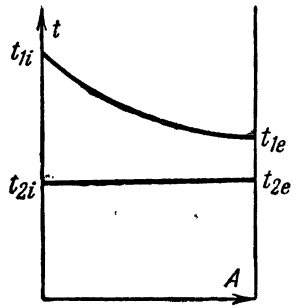


Рис. 1-7. Теплопередача при бесконечной теплоемкости одной из жидкостей.

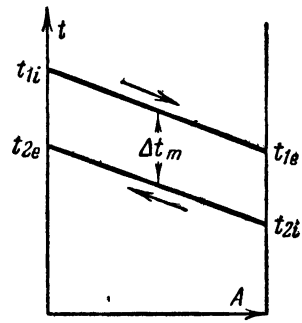


Рис. 1-8. Теплопередача при противотоке и равной теплоемкости жидкостей.

напору Δt_e, так как для этого случая согласно уравнению (1-32) $\mu=0$. Среднелогарифмический и среднеарифметический температурные напоры также имеют одну и ту же величину:

$$\Delta t_m = \Delta t_M = \Delta t_i. \qquad (1\text{-}36)$$

В этом случае температуры меняются вдоль поверхности нагрева по линейному закону, как показано на рис. 1-8. Поверхность нагрева необязательно должна быть плоской,

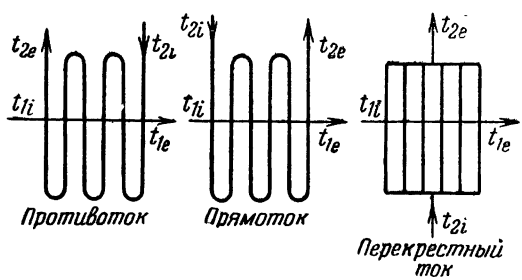


Рис. 1-9. Противоток, прямоток и перекрестный ток в системе с пучками труб.

как это показано на рис. 1-4—1-8. Пользуясь выведенными формулами, можно также рассчитать охлаждение жидкостей или газов, проходящих через пучки труб (рис. 1-9).

Однако, строго говоря, эти уравнения будут справедливы только для очень большого количества рядов труб, хотя на практике их можно применять и для небольшого количества труб.

При выполнении предыдущих расчетов предполагалось, что коэффициент теплопередачи k имеет постоянное значение на всей поверхности нагрева. Однако часто бывает необходимо делить всю поверхность нагрева на отдельные участки, для каждого из которых коэффициент теплопередачи можно считать постоянным. Расчеты для каждого из участков можно производить, пользуясь выведенными формулами.

Расчет теплообмена при прямотоке и противотоке был произведен также и для случая, когда коэффициент теплопередачи меняется прямо пропорционально изменению температуры [Л. 2]. Тогда вместо уравнений (1-30) и (1-31) необходимо применять формулу

$$Q = A\frac{k_e\Delta t_i - k_i\Delta t_e}{\ln k_e\Delta t_i/k_i\Delta t_e}.$$

Кроме того, расчеты можно производить, пользуясь средним коэффициентом теплопередачи. Расчетную температуру при этом необходимо брать из номограмм [Л. 3].

Помимо случаев, рассмотренных в настоящей главе и иллюстрированных рис. 1-9, на практике встречаются и другие схемы, как, например, смешанная схема с прямотоком и противотоком. Значения температурных напоров для подстановки в уравнение (1-30) были вычислены и сведены в номограммы Боумэном, Мюллером и Наглем для большого количества различных сочетаний [Л. 4]. Дополнительные сведения приводятся в главе, посвященной расчету теплообменников.

Пример 1-3. Необходимо нагревать 45 *кг* воды ($m_1 = 45$ *кг*) в 1 *ч* от 10 до 75° С дымовыми газами с начальной температурой 165° С. Расход дымовых газов $m_2 = 180$ *кг/ч*; удельная теплоемкость газов $c_p = 0{,}25$ *ккал/кг · град*; коэффициент теплопередачи $k = 100$ *ккал/м² · ч · град*. Требуется вычислить величину поверхности нагрева A для прямотока, противотока и перекрестного тока.

Охлаждение дымовых газов можно определить для каждого случая из уравнения теплового баланса. Поглощение тепла водой равно:

$$45(75 - 10) = 2\,925 \text{ ккал/ч}$$

При отсутствии теплопотерь количество тепла, передаваемого дымовыми газами, должно равняться количеству тепла, поглощаемого водой. На основании этого можно вычислить конечную температуру дымовых газов

$$2\,925 = 180 \cdot 0{,}25(165 - t_e);\ t_e = 100° \text{ С}.$$

При прямотоке справедлива следующая схема распределения температуры по поверхности нагрева:

$$155^\circ\ \text{C}\left(\frac{165^\circ\ \text{C}\rightarrow 100^\circ\ \text{C}}{10^\circ\ \text{C}\rightarrow 75^\circ\ \text{C}}\right)25^\circ\ \text{C}.$$

Таким образом, начальный температурный напор $\Delta t_i = 155^\circ$ C и конечный температурный напор $\Delta t_e = 25^\circ$ C. Среднеарифметический температурный напор $\Delta t_M = \frac{155+25}{2} = 90^\circ$ C, а отношение $\Delta t_i/\Delta t_e = \frac{155}{25} = 6{,}2$. Из табл. 1-2 находим, что $a \approx 0{,}798$. Теперь находим среднелогарифмический температурный напор $\Delta t_m = 0{,}798 \cdot 90 = 72^\circ$ C. Из уравнения (1-30) следует, что

$$A = \frac{2\,925}{100 \cdot 72{,}0} = 0{,}405\ м^2.$$

Для противотока получаем следующую схему:

$$90^\circ\ \text{C}\left(\frac{165^\circ\ \text{C}\rightarrow 100^\circ\ \text{C}}{75^\circ\ \text{C}\leftarrow 10^\circ\ \text{C}}\right)90^\circ\ \text{C},$$

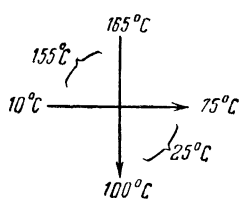
где $\Delta t_i = \Delta t_e = 90^\circ$ C. Таким образом, $\Delta t_i/\Delta t_e = 1$; следовательно, и $a=1$. Отсюда среднелогарифмический температурный напор $\Delta t_m = 90^\circ$ C, а поэтому

$$A = \frac{2\,925}{100 \cdot 90} = 0{,}325\ м^2.$$

Для перекрестного тока имеем:

$$\Delta t_i = 155^\circ\ \text{C};\ \Delta t_e = 25^\circ\ \text{C};\ \Delta t_M = \frac{155+25}{2} = 90^\circ\ \text{C};$$

$$\frac{\Delta t_e}{\Delta t_i} = \frac{25}{155} = 0{,}161 \text{ и } \frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = 1;$$



Интерполированием из табл. 1-3 находим, что $a = 0{,}942$, откуда

$$\Delta t_m = 0{,}942 \cdot 90 = 84{,}6^\circ\ \text{C}.$$

Отсюда находим, что величина поверхности нагрева

$$A = \frac{2\,925}{100 \cdot 84{,}6} = 0{,}345\ м^2.$$

Результаты показывают, что наименьшая поверхность нагрева требуется при противотоке, а наибольшая — при прямотоке. Если воду необходимо нагревать до более высокой температуры, то величина поверхности нагрева при прямотоке возрастает чрезвычайно сильно. Если конечная температура воды должна равняться 87,5° С, то конечный температурный напор Δt_e будет равен нулю, а поэтому и протяженность поверхности нагрева возрастает до бесконечности. Отсюда следует, что повышение температуры воды выше указанной не может быть достигнуто прямотоком, а лишь противотоком или перекрестным током.

ЗАДАЧИ

1-1. В этой главе было показано, что термическое сопротивление многослойной стенки может быть вычислено так же как последовательное соединение электрических сопротивлений.

Покажите, что подобная аналогия существует между электрическим параллельно включенным сопротивлением и термическим сопротивлением стенки толщиной b, составленной из различных материалов так, что площадь поверхности разделена на участки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и каждый участок по всей толщине b сохраняет однородность материала.

1-2. В теплообменнике с перекрестным током при атмосферном давлении нагревают 10 *кг/сек* воды от 26 до 100° С, затем испаряют и доводят перегрев до 126° С. Нагревающей средой служат топочные газы, проходящие со скоростью 45 *кг/сек* при начальной температуре 650° С. Коэффициент теплообмена для всей площади равен 170 $ккал/м^2 \cdot ч \cdot град$. Требуется вычислить площадь теплообменника.

1-3. Составьте дифференциальные уравнения и установите граничные условия для вычисления температурного поля в теплообменниках с перекрестным током. Как изменяются дифференциальные уравнения, если одна среда постоянно смешивается в пределах каждого поперечного сечения нормального к направленного потока?

ЧАСТЬ А

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

В следующих четырех главах рассматриваются физические явления, физические законы, физические свойства и их математические формулировки, знание которых необходимо при изучении процесса теплопроводности. Тепловой поток в твердых телах обусловливается исключительно теплопроводностью, в то время как в жидкостях и газах действуют одновременно процессы теплопроводности, конвекции и теплового излучения. Наибольшее внимание уделяется рассмотрению твердых тел, ибо все предыдущие рассуждения и результаты рассмотренных задач в предыдущих главах, посвященных теплопроводности, применимы ко всем твердым телам. В отдельных особых случаях, когда невозможен конвективный теплообмен, а тепловое излучение ничтожно мало, допустимо использовать понятие теплопроводности применительно также к жидкостям и газам. Изучение теплопроводности в твердых телах целесообразно разбить на четыре самостоятельных раздела: 1) Теория теплопроводности и уравнения теплопроводности, 2) Теплопроводность в условиях стационарного режима, 3) Теплопроводность в условиях нестационарного режима и 4) Теплопроводность с движущимися границами. Эти подразделения выбирались произвольно и служат для систематизации излагаемого материала.

Теплопроводность с макроскопической, феноменологической точки зрения легко можно понять без привлечения микроскопического представления явления теплопроизводности в твердых телах. Не следует все же считать, что физика твердых тел не играет никакой роли, поскольку эта наука также имеет будущее. Для глубокого понимания науки о тепло- и массообмене необходимо всесторонне знать как микроскопическую точку зрения, так и макроскопическую. В последующих главах теплопроводность бу-

дет рассматриваться на основе макроскопической феноменологической теории. При таком подходе к решению поставленной задачи физические понятия легко воспринимаются, но математическое выражение таких понятий, как температурное поле, интенсивность теплового потока, температурно-временная зависимость и т. д., обычно очень сложное. Встречаются чисто математические трудности, но это отнюдь не означает, что излагаемый в книге материал изобилует ими. Более сложные задачи и задачи с граничными условиями читатель найдет в превосходной книге Карслоу и Егера [Л. 5].

Исключая один-два случая, полагается что теплопроводность не зависит от температуры. Такое предположение не только упрощает математическое описание, но является и допустимым приближением при решении различных физических задач в случае небольших колебаний температуры. При решении задач, связанных с химическими реакциями или фазовыми превращениями, не следует пренебрегать температурной зависимостью. Поэтому при выборе физических постоянных необходимо тщательнейшим образом всесторонне разобраться в каждой поставленной задаче с точки зрения физики. Задачи теплопроводности обычно затрагивают конвективный или лучистый теплообмен в тех случаях, когда устанавливаются соответствующие граничные условия. При рассмотрении задач теплопроводности, в которых учитывается конвективный теплообмен, полагается, что коэффициенты теплообмена известны. Сущность коэффициентов теплообмена и способы их определения устанавливаются в главах, посвященных конвективному теплообмену.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2-1. ПОНЯТИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Принятая теперь теория тепла ассоциируется с понятием тепловой энергии вещества, которую в термодинамике связывают с физическим или химическим состоянием вещества — положением и движением молекул и атомов в теле. Кинетическая теория тепла дает несколько весьма важных выводов, которые обычно подтверждаются опытом.

1. Поскольку тепло как энергия связывается с поступательным, вращательным и колебательными движениями молекул, атомов и их составляющими, то теплопроводность совершенно определенно может быть отнесена к этим видам движения.

2. С повышением температуры увеличиваются интенсивность и частота движения молекул и атомов: поэтому теплопроводность будет увеличиваться с повышением температуры [1].

Согласно теориям тепла и строения вещества теперь принято считать, что теплопроводность в аморфных твердых телах, жидкостях и газах является результатом непосредственного переноса молекулярного (или атомного) движения от молекулы к молекуле в соприкасающихся поверхностях. Этот способ теплообмена часто представляют как процесс диффузии тепла. В веществах с более сложной структурой, таких, например, как кристаллы, движения атомов превращаются в колебательные движения всего каркаса кристалла.

Твердые тела. В соответствии с последними данными теории теплопроводности в твердых телах проводят четкое разграничение между диэлектриками (неметаллами) и металлами, таким образом эти вещества вообще имеют более высокую теплопроводность. В диэлектриках теплообмен осуществляется колебаниями атомов кристаллической решетки.

В металлах и других твердых проводниках электричества передача тепла осуществляется колебаниями кристаллической решетки и свободными электронами. Таким образом, эти вещества вообще обладают большей теплопроводностью.

Жидкости. Процессы фазовых изменений — от твердого тела к жидкости — предполагают изменение от состояния относительно упорядоченного расположения молекул к неупорядоченному состоянию. Это изменение фазы порождает существенные изменения в молекулярном строении. Оно ослабляет молекулярные связи, нарушает состояние

[1] Имеются исключения: 1. Теплопроводность неметаллических кристаллов и металлов уменьшается от минимального значения при очень низких температурах до точки плавления. 2. Теплопроводность большинства жидкостей понижается с уменьшением температуры. Однако в некоторых жидкостях, таких как вода, она увеличивается с повышением температуры в некотором температурном диапазоне и уменьшается в другом.

твердого тела и создает возможность теплового движения молекул. Эти изменения приводят к заключению, что жидкость может быть совершенно подобна газу в том отношении, что молекулы в жидкости находятся полностью в хаотическом состоянии, но группируются на средних межмолекулярных расстояниях, меньших, чем молекулы газа.

Этот вывод не является абсолютно бесспорным, поскольку вблизи точки плавления жидкое состояние не может очень отличаться от твердого и, следовательно, нет условий для свободного молекулярного движения. По этой причине в основе современных теорий лежит положение, что строение жидкостей более напоминает строение твердых тел, чем строение газов, и сохраняет видимость порядка в большей степени. Это представление подтверждается такими экспериментальными данными, как рентгеновские дифракционные измерения.

Газы. Процесс испарения ослабляет межмолекулярные связи, которые существуют в жидкостях, и увеличивает межмолекулярные расстояния до такой степени, что молекулы обретают возможность свободного движения в любом направлении. Единственным препятствием на их пути могут быть только другие молекулы, с которыми они могут столкнуться. Газ вблизи любой границы поверхности имеет случайное распределение молекул. В этом случае все свойства и особенности газа можно объяснить кинетической теорией газов. Иными словами, теплопроводность в газах можно сравнивать с процессами молекулярной диффузии от более горячих слоев к более холодным, при этом теплопроводность в газах обусловливается обменом местоположения и энергией молекул.

Существуют и другие представления о физической сущности переноса тепловой энергии; однако в любом случае перенос энергии связывают с теплом и процесс переноса энергий называют теплопроводностью.

Хотя даже основной механизм теплопроводности неполностью ясен, но тем не менее гипотезы, на которых зиждится наука о теплопроводности, основываются на экспериментальных наблюдениях.

Последовательное применение этих гипотез как основ для математического анализа, который подтверждается экспериментальными данными, само по себе уже достаточно, чтобы установить закон, характеризующий перенос. Установленный таким образом основной закон полностью

соответствует классической термодинамике. Все вышеуказанное в меньшей мере касается физической природы теплопроводности и главным образом иллюстрирует применение основного закона теплопроводности к теплопереносу в системах.

2-2. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В соответствии со вторым законом термодинамики тепло распространяется от одного тела к другому (или от одной части тела к другой части того же тела), если существует разность температур. При этом поток тепла направлен от точки с большей температурой к точке с меньшей температурой. В соответствии с первым законом термодинамики (сохранение энергии) поток тепловой энергии сохраняется при отсутствии источников тепла или стоков. Поэтому в твердом теле имеет место распределение температур, которое зависит от пространственных координат и времени наблюдения:

$$t = f(x, y, z, \tau).$$

Можно предполагать, что в этом случае в твердом теле есть такая поверхность, при наблюдении за которой в определенное время окажется, что все ее точки имеют одинаковую температуру. Такая поверхность называется *изотермической поверхностью*. Можно обнаружить другие изотермические поверхности внутри этого тела, температуры которых отличаются от температуры указанной поверхности на величину $+\delta t$. Эти изотермические поверхности никогда не пересекаются, так как никакая точка не существует в этом твердом теле при двух разных температурах в одно и то же время. Таким образом, твердое тело представляется нам как бы составленным из некоторого числа произвольно тонких изотермических оболочек, которые, конечно, изменяются со временем.

Далее рассматриваются только изотропные твердые тела, т. е. такие твердые тела, свойства которых и их структура в окрестности любой точки не зависят от направления. В этом случае вследствие симметрии поток тепла в точке обязательно имеет направление, перпендикулярное к изотермической поверхности через точку. Это положение будет обсуждаться ниже.

Математическая формулировка закона теплопроводности может быть выражена следующим образом:

$$Q = \frac{dQ_i}{d\tau} = -\lambda A \frac{\partial t}{\partial n}. \qquad (2\text{-}1)$$

Уравнение (2-1) можно пояснить, воспользовавшись рис. 2-1. Поток тепла Q/A протекает по перпендикуляру n к площади A в направлении уменьшения температуры, т. е. в направлении отрицательного градиента температуры. Знак минуса в уравнении (2-1) указывает на то, что поток тепла идет по направлению отрицательного градиента и служит для того, чтобы сделать поток тепла в этом смысле положительным. Коэффициент пропорциональности λ выражает теплопроводность и является характеристикой материала, через который проходит поток тепла.

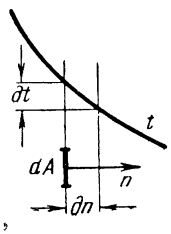


Рис. 2-1. К выводу закона теплопроводности.

Для бесконечно малой площадки, выделенной из площади, уравнение (2-1) можно записать в виде:

$$dQ = -\lambda dA \frac{\partial t}{\partial n}. \qquad (2\text{-}2)$$

Уравнения (2-1) и (2-2) обычно приписываются французскому математику Жану Батисту Фурье и в его честь названы уравнениями теплопроводности Фурье.

Количество тепла, проходящее за час через единицу площади любой поверхности, называется удельным потоком тепла q и измеряется в *ккал/м²·ч*.

Поток тепла — вектор, иными словами, он должен характеризоваться как величиной, так и направлением.

Тепловой поток может быть определен вдоль любого направления через площадь, перпендикулярную этому направлению.

На рис. 2-2 показаны изотермы тела t и $t+dt$. Перпендикуляр к этим изотермам обозначен лучом n, который является также перпендикуляром и к элементу площади dA. Поток тепла по перпендикуляру и в направлении s можно вычислить следующим образом:

$$q_n = \frac{dQ}{dA} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n};$$

$$q_s = \frac{dQ}{dA \cos\alpha} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial s}.$$

Легко показать, что $n = s\cos\alpha$. Поэтому

$$q_s = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cos\alpha. \qquad (2\text{-}3)$$

Или иначе, q_s является составляющей вектора теплового потока q_n.

Из уравнения (2-3) следует, что самым большим потоком тепла будет тот, который рассчитан вдоль нормали к изотермическим поверхностям. В частности, если составляющие потоки относятся к плоскостям, имеющим системы координат x, y, z, то это будут потоки

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \qquad (2\text{-}4)$$

Потоки, выраженные уравнением (2-4), являются составляющими вектора теплового потока

$$q = iq_x + jq_y + kq_z.$$

Теплопроводность. Следует отметить, что коэффициент теплопроводности λ необязательно должен быть постоянным. В действительности теплопроводность является функцией температуры для всех фаз, а в жидкостях и газах зависит также от давления, особенно вблизи к критическому состоянию. Теплопроводность в дереве и кристаллах также заметно меняется от направления. Так, например, теплопроводность в дереве поперек волокна по сравнению с теплопроводностью дерева вдоль волокна изменяется на множитель от 2 до 4.

Зависимость теплопроводности от температуры для отдельных небольших диапазонов температуры может быть приемлемо выражена в линейном виде:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta t), \qquad (2\text{-}5)$$

где λ_0 — величина теплопроводности при некоторых начальных условиях;

β — температурный коэффициент, он может быть положительным или отрицательным в зависимости от материала.

Рис. 2-3 показывает изменение температурного градиента в теле в зависимости от того, положительно или отрицательно β.

Легко понять, что линейный градиент температуры существует только при постоянной теплопроводности.

Интересно отметить, что уравнение Фурье для теплопроводности совершенно аналогично закону Ома для электрического проводника. Закон Ома для проводника любой формы можно выразить так:

$$dI = -\sigma dA \frac{\partial E}{\partial n}. \qquad (2\text{-}6)$$

В уравнении (2-6) электрический ток соответствует потоку тепла Q, электрический потенциал E соответствует температуре t и электропроводность σ ($\sigma = 1/\rho$, где ρ — электрическое сопротивление) соответствует теплопроводности. Поскольку уравнения (2-2) и (2-6) имеют один и тот же

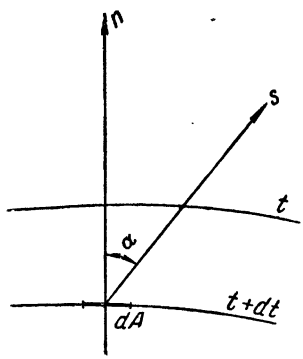


Рис. 2-2. Направление потока тепла.

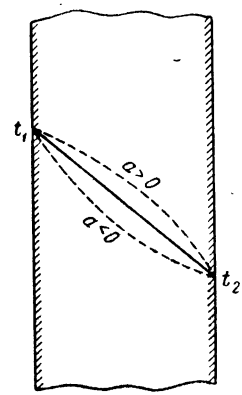


Рис. 2-3. Распределение температуры в простой плите.

вид, то температурное поле внутри нагретого тела и поле электрического напряжения в телах такой же формы аналогичны при условии, что распределение температур на поверхности соответствует поверхностному распределению электрического напряжения. Эта аналогия способствует более детальному уяснению задач теплопроводности при помощи подобных электрических цепей.

2-3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этом разделе приводится вывод уравнения теплопроводности в виде дифференциального уравнения в прямоугольной системе координат. Дифференциальный вид уравнения теплопроводности является наиболее удобным.

Уравнение теплопроводности для изотропных материалов. Рассмотрим бесконечно малый объем пространства с измерениями δx, δy и δz, изображенный в трехмерной системе координат x, y и z, как показано на рис. 2-4. Рассмотрим также и нестационарные условия, т. е. изменение температуры времени τ.

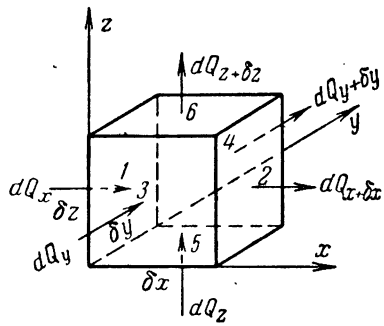


Рис. 2-4. К выводу уравнения теплопроводности.

Согласно закону теплопроводности Фурье тепло, протекающее в элементарный объем вдоль оси x, можно записать в виде:

$$dQ_x = -\lambda \delta y \delta z \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Величину теплового потока, выходящего из объема вдоль оси x, можно получить, разлагая dQ_x в ряд Тейлора и сохраняя только первые два члена, как достаточное приближение:

$$dQ_{x+\delta x} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x)\,\delta x + \ldots$$

Приращение потока тепла, вызванного теплопроводностью в направлении x, будет:

$$dQ_x - dQ_{x+\delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)\delta x \delta y \delta z. \qquad (2\text{-}7)$$

Два уравнения, подобных уравнению (2-7), для направлений y и z можно записать подобным же образом:

$$dQ_y - dQ_{y+\delta y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right)\delta x \delta y \delta z;$$

$$dQ_z - dQ_{z+\delta z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z.$$

Сумма приращений тепловых потоков является тем количеством тепла, которое должно накопиться в объеме:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right)\right]\delta x \delta y \delta z. \qquad (2\text{-}8)$$

Если за единицу времени в единичном объеме возникает количество тепла $Q'(x, y, z, \tau)$, тогда накопление тепла в элементарном объеме будет равно:

$$Q'\delta x\delta y\delta z. \tag{2-9}$$

Тепло, которое осталось в элементе объема благодаря проводимости [уравнение (2-8)] и тепло, выделившееся в самом объеме [уравнение (2-9)], увеличивает тепловую энергию элемента объема. Такое увеличение тепловой энергии вызывает изменение теплоемкости элемента объема и может быть записано:

$$c\rho\delta x\delta y\delta z\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{2-10}$$

где c — удельная теплоемкость;
ρ — плотность;
τ — время.

Баланс энергии для элемента объема может быть составлен путем приравнивания изменения содержания тепла в элементе объема к потоку тепла, поступающему благодаря теплопроводности и теплу, образовавшемуся в самом элементе:

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q'. \tag{2-11}$$

Здесь следует отметить, что

$$\lambda=\lambda(x, y, z, t);\quad c=c(x, y, z, t) \text{ и } \rho=\rho(x, y, z, t).$$

Таким образом, (2-11) справедливо для изотропных, гетерогенных сред.

Если член уравнения, выражающий тепловыделение в объеме, можно опустить (тело свободно от источников), то (2-11) можно записать в проекции на три оси координат как

$$-c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(q_x)+\frac{\partial}{\partial y}(q_y)+\frac{\partial}{\partial z}(q_z). \tag{2-12}$$

Это выражение носит более общий характер и будет полезно в разделе, посвященном неизотропным материалам.

Уравнение (2-11) можно упростить применительно к изотропным однородным материалам, и если величина теплопроводности считается величиной постоянной; таким образом,

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]+\frac{Q'}{\rho c}=a\nabla^2 t+\frac{Q'}{\rho c}. \tag{2-13}$$

Комплекс $\lambda/\rho c$ имеет размерность квадрата линейного измерения, деленного на время, и называется температуропроводностью a. Он характеризует свойства материалов.

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат. При помощи преобра-

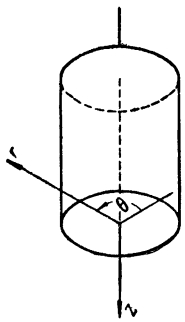


Рис. 2-5. Цилиндрическая система координат.

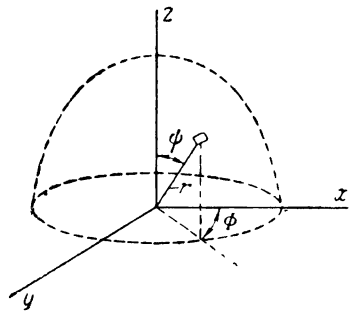


Рис. 2-6. Сферическая система координат.

зования системы координат (2-13) может быть записано в виде, более удобном для цилиндрической системы. Таким образом, в соответствии с рис. 2-5

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad z = z;$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{Q'}{\rho c}. \qquad (2\text{-}14)$$

Уравнение теплопроводности в сферической системе координат. Подобное преобразование для сферической системы (рис. 2-6) приводит к следующим выражениям:

$$x = r\sin\psi\cos\varphi; \quad y = r\sin\psi\sin\varphi; \quad z = r\cos\psi;$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (rt)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}\right] + \frac{Q'}{\rho c}. \qquad (2\text{-}15)$$

Уравнение теплопроводности для анизотропных материалов. В предыдущем разделе получено уравнение теплопроводности для изотропных сред.

Некоторые, технически важные слоистые материалы имеют теплопроводность весьма заметно изменяющегося в зависимости от направления потока тепла, проходящего через тело. К этой категории материалов относятся кристаллические вещества, дерево, сложные пластинки и металлы, использующиеся в якорях трансформаторов, и фанера. Чтобы применить к этим анизотропным материалам уравнение теплопроводности, его необходимо соответственно пересмотреть. Обычная форма этого уравнения очень сложная [Л. 5] и поэтому не рассматривается в этой книге; однако

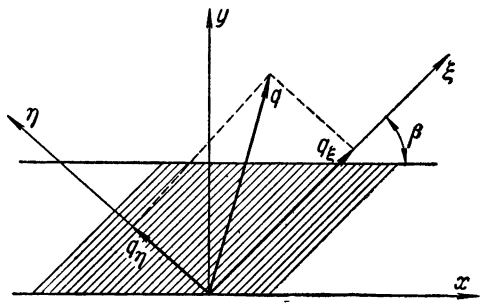


Рис. 2-7. Поток тепла в анизотропной среде.

основные понятия будут рассмотрены в случае двухмерного измерения.

Теплопроводность в случае двухмерного измерения распределена таким образом, что максимальные и минимальные значения имеют место по «предпочтительным» осям или, как их называют, главным осям. Величины теплопроводности в других направлениях имеют промежуточные значения. Распределение теплопроводности можно представить эллипсом, оси которого соответствуют максимальному и минимальному значениям теплопроводности.

Рассмотрим тело, расположенное в (x, y) системе координат (рис. 2-7), которая образует угол β с главными осями теплопроводности материала. Система координат (ξ, η) совпадает с главными осями теплопроводности. Потоки тепла через тело в направлении координат ξ и η:

$$q_\xi = -\lambda_\xi \frac{\partial t}{\partial \xi}; \quad q_\eta = -\lambda_\eta \frac{\partial t}{\partial \eta}.$$

Потоки в направлениях x и y будут:

$$\left.\begin{aligned} q_x &= q_\xi \cos\beta - q_\eta \sin\beta = -\lambda_\xi \cos\beta \frac{\partial t}{\partial \xi} + \\ &+ \lambda_\eta \sin\beta \frac{\partial t}{\partial n}; \\ q_y &= q_\xi \sin\beta + q_\eta \cos\beta = -\lambda_\xi \sin\beta \frac{\partial t}{\partial \xi} - \\ &- \lambda_\eta \cos\beta \frac{\partial t}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}16)$$

Температурный градиент может быть преобразован в градиенты x и y следующими соотношениями:

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

и согласно геометрии фигуры

$$y = \xi \sin\beta = \eta \cos\beta; \quad x = \xi \cos\beta = -\eta \sin\beta.$$

Подставляя эти значения в уравнения (2-16) и преобразуя их, получаем для потоков тепла

$$q_x = -(\lambda_\xi \cos^2\beta + \lambda_\eta \sin^2\beta)\frac{\partial t}{\partial x} - (\lambda_\xi - \lambda_\eta)\cos\beta \sin\beta \frac{\partial t}{\partial y};$$

$$q_y = -(\lambda_\xi - \lambda_\eta)\sin\beta \cos\beta \frac{\partial t}{\partial x} - \left(\lambda_\xi \sin^2\beta + \lambda_\eta \cos^2\beta\right)\frac{\partial t}{\partial y}. \quad (2\text{-}17)$$

Применяя уравнения теплопроводности в общем виде [уравнение (2-12)] тепловых потоков [уравнение (2-17)], можно написать уравнение теплопроводности в двух измерениях для неизотропных материалов в виде:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = (\lambda_\xi \cos^2\beta + \lambda_\eta \sin^2\beta)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} +$$

$$+ (\lambda_\xi \sin^2\beta + \lambda_\eta \cos^2\beta)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + (\lambda_\xi - \lambda_\eta)\sin 2\beta \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}. \quad (2\text{-}18)$$

Для изотропной среды $\lambda_\xi = \lambda_\eta$ и $\beta = 0$. Для этих условий уравнение (2-18) сокращается до двухмерного уравнения (2-13).

Интересно отметить, что если пластинку из анизотропного материала зажать между изотермическими поверхностями испытываемой теплопроводящей системы и если пла-

стина образца приготовлена так, что ее главные оси составляют угол β с изотермическими поверхностями, то измеряемые теплопроводности (зависящие от того, проводились ли измерения по направлениям x или y) выражаются как

$$\lambda_x = \lambda_\xi \cos^2\beta + \lambda_\eta \sin^2\beta;$$
$$\lambda_y = \lambda_\xi \sin^2\beta + \lambda_\eta \cos^2\beta.$$

Если геометрические оси анизотропного тела совпадают с главными осями теплопроводности, тогда уравнение (2-18) упрощается:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda_\xi \frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \lambda_\eta \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2}. \qquad (2\text{-}19)$$

Для древесины, которая имеет различную теплопроводность вдоль волокна z и поперек волокна r и по окружности θ, можно использовать идею уравнения (2-19) применительно к

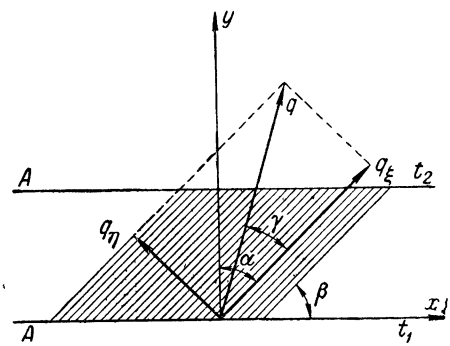


Рис. 2-8. Вектор потока тепла в слоистом материале.

уравнению (2-14), располагая ось z по линии центра дерева и пренебрегая членом, выражающим источник тепла: таким образом, в цилиндрических координатах

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\lambda_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \qquad (2\text{-}20)$$

Пример 2-1. Плита (пластина) слоистого материала используется в опыте на теплопроводность. Слои составляют угол β с гладкими поверхностями образца (рис. 2-8). Поверхности A сохраняют постоянную, но различную температуру и, таким образом, являются изотермическими поверхностями. Требуется вычислить угол, составленный вектором тепло-

вого потока с перпендикуляром n к изотермическим поверхностям. Из рис. 2-8 можно сделать вывод, что для $\lambda_\xi > \lambda_\eta$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{q_\eta}{q_\xi} = \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}\frac{\partial t/\partial \eta}{\partial t/\partial \xi}.$$

Но на основании более ранних расчетов

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = -\sin\beta\frac{\partial t}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial t}{\partial y};$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \cos\beta\frac{\partial t}{\partial x} + \sin\beta\frac{\partial t}{\partial y},$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda_\eta[\cos\beta(\partial t/\partial y) - \sin\beta(\partial t/\partial x)]}{\lambda_\xi[\cos\beta(\partial t/\partial x) - \sin\beta(\partial t/\partial y)]}. \qquad \text{(а)}$$

Однако в рассматриваемой здесь системе граничные поверхности остаются изотермическими: т. е. ось координат y находится в направлении перпендикуляра n и x лежит в изотермической плоскости. Отсюда $\partial t/\partial x = 0$, и выражение (а) принимает вид:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}\operatorname{ctg}\beta = \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, $\gamma < \alpha$ и вектор теплового потока не перпендикулярен к изотермической поверхности, как это имело бы место, если бы материал был изотермическим. Если $\lambda_\xi = 2\lambda_\eta$ среда—дерево и $\beta = 45°$, тогда

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2};$$

$$\gamma = 26{,}6°.$$

ЗАДАЧИ

2-1. Предложите метод измерения теплопроводности жидких металлов при высоких температурах. Укажите схематически основные части прибора и определите погрешность предложенного измерения.

2-2. Используя цилиндрическую систему координат, разверните уравнение (2-14) по образцу уравнения (2-11).

2-3. Используя сферическую систему координат и малый элемент объема в этой системе координат, разверните уравнение (2-15) по образцу уравнения (2-11).

2-4. Составьте уравнение теплопроводности для анизотропной среды в трех измерениях, полагая, что

$$\lambda_\xi \neq \lambda = \lambda_\zeta.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

3-1. РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ УСЛОВИЙ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Для тел простой формы, таких как стена, полая труба, полый шар в случае стационарного одномерного распространения тепла, уравнение теплопроводности значительно упрощается.

Плоская стена (плита). В плоской стене с постоянной теплопроводностью толщиной l и с бесконечной протяженностью в другом измерении (рис. 3-1) тепловой поток в рассматриваемой области действительно одномерный. Поэтому такое тело удобно рассматривать в прямоугольной системе координат. Если в стене отсутствуют источники тепла и поток тепла стационарный и одномерный, то уравнение (2-13) примет вид:

$$\frac{d^2t}{dx^2}=0, \tag{3-1}$$

решение которого будет:

$$t=C_1x+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 можно вычислить из граничных условий определяющих температуру поверхностей $x=0$ и $x=l$. Используя эти условия, получаем выражение для распределения температур в стене:

$$\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{x}{l}. \tag{3-2}$$

Поток тепла через стену можно получить из закона теплопроводности Фурье:

$$Q=-\lambda A\frac{dt}{dx}=-\lambda A\frac{t_2-t_1}{l}=\frac{t_1-t_2}{l/\lambda A}. \tag{3-3}$$

Итак, снова уместно отметить совпадение по форме уравнения (3-3) с обычным законом Ома. Член $l/\lambda A$ является эквивалентом электрического сопротивления и соответственно называется тепловым или термическим сопротивлением.

Труба. Трубу (рис. 3-2) или полый цилиндр удобно рассматривать в цилиндрической системе координат. Рассматриваемый случай — стационарный режим, постоянные свойства и отсутствие источников тепла. При этих и других ограничениях поток тепла имеет

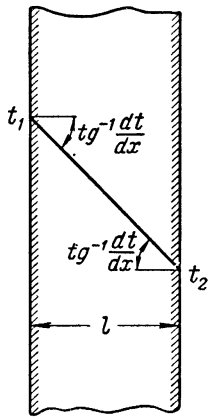


Рис. 3-1 Теплопроводность в плите при стационарном режиме.

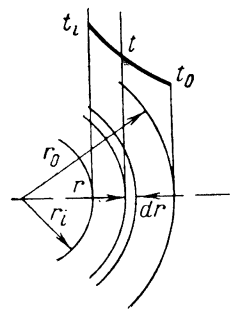


Рис. 3-2. Теплопроводность через толстостенную трубу при стационарном режиме.

только радиальное направление (это обусловливается значительной длиной трубы по оси), уравнение (2-14) упрощается до обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}=0, \tag{3-4}$$

решение которого имеет вид:

$$t=C_1\ln r+C_2.$$

Граничные условия состоят в задании температур t_i и t_0 на радиусах r_i и r_0 и позволяют вычислить постоянные C_1 и C_2, дающие в пределе выражение для радиального распределения температуры в трубе

$$\frac{t-t_0}{t_i-t_0}=\frac{\ln(r/r_0)}{\ln(r_i/r_0)}. \tag{3-5}$$

Тепловой поток поперек сечения стен трубы определяется законом Фурье; однако площадь, нормальная к вектору тепло-

вого потока, изменяется вместе с радиусом и ее следует учитывать. Таким образом,

$$Q = -\lambda A(r)\frac{dt}{dr} = -\lambda(2\pi rL)\frac{dt}{dr}, \qquad (3\text{-}6)$$

где L — длина трубы по оси.

Продифференцировав уравнение (3-5) и подставив этот результат в уравнение (3-6), получаем:

$$Q = \frac{t_i - t_0}{(1/2\pi\lambda L)\ln(r_0/r_i)}. \qquad (3\text{-}7)$$

Уравнение (3-7) аналогично уравнению (3-3) для плиты. Отличается оно только выражением для теплового сопротивления

$$\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_0}{r_i}.$$

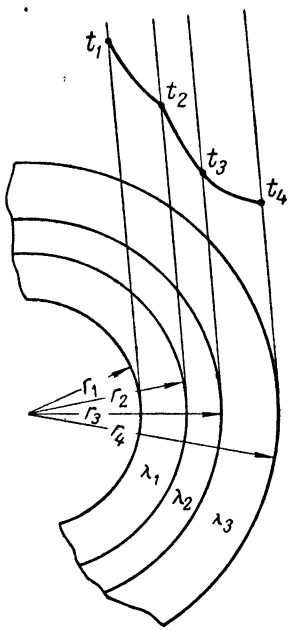


Рис. 3-3. Теплопроводность в сложной трубе при стационарном режиме.

Многослойная труба (рис. 3-3). Как и в случае многослойной стенки, можно рассматривать и многослойную трубу. С точки зрения физики это может быть труба с различными видами изоляционных оболочек. Поток тепла может быть определен так же, как и в случае плиты, состоящей из ряда последовательно соединенных тепловых сопротивлений.

$$Q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{1}{2\pi\lambda_1 L}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_2 L}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\pi\lambda_3 L}\ln\frac{r_4}{r_3}}. \qquad (3\text{-}8)$$

Промежуточные температуры, так же как и для плиты, можно легко определить.

Шар. Распределение температур и величину теплового потока через стенки полого шара можно вычислить из уравнения (2-15) и закона Фурье, применяя аналогичные

допущения, как и в случае плиты и трубы. Полученное таким образом распределение температур

$$\frac{t-t_0}{t_i-t_0}=\frac{\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\left(\frac{1}{r_i}\right)-\left(\frac{1}{r_0}\right)}. \tag{3-9}$$

Отсюда находим тепловой поток

$$Q=\frac{t_i-t_0}{(1/4\pi\lambda)[(1/r_i)-(1/r_0)]}. \tag{3-10}$$

Выражение для составного шара легко находится из уравнения (3-10) таким же образом, как и из уравнения (3-8).

3-2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Основной задачей изучения теплопроводности является определение температурного поля и величины теплового потока внутри тела. При этом условия на поверхности оказывают существенное влияние. Граничные условия могут быть заданы распределением температур на поверхности либо плотностью теплового потока в любой точке поверхности.

Если сопротивление потоку тепла в теле намного меньше, чем сопротивление конвекции на поверхности, то тепловой поток определяют условия на поверхности, а не условия внутри тела.

Основная задача конвективного теплообмена довольно сложная, и решение ее зависит от нескольких переменных. Детально она будет рассматриваться в последующих главах. Однако между общей проблемой конвекции и чистой теплопроводностью имеется много общего, о чем говорилось в гл. 1, в связи с формулировкой закона охлаждения Ньютона. Мы используем это положение о важности конвективного теплообмена, чтобы установить граничные условия для тех задач, которые будут рассмотрены в этой главе.

3-3. КРИТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА ИЗОЛЯЦИИ

Применение изоляционного материала к внешней поверхности круглых труб с небольшим диаметром в некоторых случаях может увеличить теплоотдачу от поверхности.

Теплоотдача от трубы с изоляцией к окружающему потоку жидкости определяется выражением

$$Q = \frac{2\pi L(t_i - t_0)}{(1/\lambda)\ln(r_0/r_i) + (1/\alpha_0 r_0)}. \qquad (3\text{-}11)$$

При минимальной величине знаменателя отдача тепла будет максимальной. Минимальную величину знаменателя можно вычислить, принимая производную знаменателя по r_0 равной нулю.

При этом r_i считается постоянным параметром, тогда

$$\frac{1}{\lambda r_0} - \frac{1}{\alpha_0 r_0^2} = 0, \qquad (3\text{-}12)$$

откуда

$$r_{0\text{крит}} = \frac{\lambda}{\alpha_0}. \qquad (3\text{-}13)$$

Очевидно, что этот результат не зависит от r_i. Коэффициент теплообмена считается постоянным при этом расчете. Такое допущение закономерно для многих практических случаев, где изменение r_0 незначительно.

Физически результат уравнения (3-12) можно объяснить следующим образом. Член $(1/\lambda)\ln(r_0/r_i)$ выражает тепловое сопротивление изоляции; член $1/\alpha_0 r_0$ — тепловое сопротивление пленки жидкости. Первый увеличивается с увеличением r_0, в то время как последующий уменьшается с увеличением r_0. При критическом радиусе $r_{0\text{ крит}}$ скорость увеличения сопротивления изоляции равна скорости уменьшения сопротивления в пленке, давая таким образом минимальную величину суммы сопротивлений, как и показано уравнением (3-12). Таким образом, для труб с внешними радиусами (в данном случае r_i), меньшими критического $r_{0\text{ крит}}$, как подсчитано здесь, может иметь место увеличение теплоотдачи, если довести изоляцию до величины критической толщины. Обычно это требует небольших радиусов, сравнительно больших теплопроводностей изоляции и малых коэффициентов теплообмена. Практическим применением является задача изоляции электрических проводов, целью которой является обеспечение электрической изоляции и одновременно максимального охлаждения провода.

3-4. ТОНКИЙ СТЕРЖЕНЬ

Другим простым, но важным примером является решение уравнения (2-13) для случая тонкого стержня, основание которого помещено на нагретой стене, а теплоотдача происходит с его поверхности в окружающую среду. Эта система показана на рис. 3-4. Температура в месте соединения стержня со стеной t_1; площадь поперечного сечения стержня A; периметр сечения C, длина l. Предполагается, что коэффициент теплообмена постоянен по всей поверхности. Площадь A и периметр C — постоянны по всей длине стержня. Если диаметр стержня невелик по сравнению с его длиной и если конвективная пленка по существу контролирует тепловой поток, то в стержне не будет радиального распределения температур, но будет температурное поле по длине, т. е. в стержне имеет место случай одномерной стационарной теплопроводности.

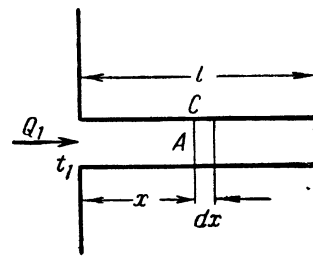


Рис. 3-4. Передача тепла через стержень при стационарном режиме.

Так как тепло, переносимое от основания стержня, рассеивается в окружающую среду конвекцией, то задача может быть решена в результате сокращения уравнения (2-13) до членов, описывающих аксиальную теплопроводность и отдачу тепла конвекцией.

Таким образом имеем:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{Q'}{\lambda}. \tag{3-14}$$

Потеря тепла Q' должна быть выражена величинами, определяющими теплоотдачу конвекцией, где Q' — потеря тепла единицей объема:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\alpha C \delta x (t - t_f)}{\lambda A \delta x}. \tag{3-15}$$

Физический смысл уравнения (3-15) очевиден; такой же результат мог бы быть получен путем приравнивания потока тепла, обусловленного теплопроводностью к конвективной

теплоотдаче. Если использовать обозначение $\vartheta = t - t_f$, то уравнение (3-15) принимает вид:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{\alpha C}{\lambda A}\vartheta = 0. \tag{3-16}$$

Уравнение (3-16) можно решить обычными методами [Л. 6], которые дают в пределе решение в виде:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}, \tag{3-17}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\alpha C}{\lambda A}}.$$

Постоянные C_1 и C_2 должны вычисляться с помощью соответствующих граничных условий. Конец стержня, прикрепленный к стене, имеет температуру t_1. Другой конец может передавать тепло к окружающей газообразной или жидкой среде. Математически процесс теплоотдачи на конце стержня может быть выражен следующим уравнением:

$$-\lambda A\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = \alpha A \vartheta_{x=l}. \tag{3-18}$$

Если стержень достаточно длинный и тонкий, то можно написать:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = 0. \tag{3-19}$$

Подстановка этих двух граничных условий в общее решение (3-17) дифференциального уравнения дает:

$$\vartheta_1 = t_1 - t_f = C_1 + C_2;$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = 0 = mC_1 e^{ml} - mC_2 e^{-ml}. \tag{3-20}$$

Решение уравнений (3-20) относительно C_1 и C_2 и подстановка этих величин в уравнение (3-17) дает:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}} = \frac{\operatorname{ch} m(l-x)}{\operatorname{ch} ml}. \tag{3-21}$$

Избыточная температура конца стержня ($x = l$) равняется:

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1}{\operatorname{ch} ml}. \tag{3-22}$$

Тепловой поток через основание стержня ($x=0$) будет равен:

$$Q_1 = -\lambda A\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = m\lambda A\vartheta_1\left[\frac{\operatorname{sh} m(l-x)}{\operatorname{ch} ml}\right]_{x=0} = \sqrt{\alpha C\lambda A}\,\vartheta_1 \operatorname{th} ml. \quad (3\text{-}23)$$

Графики функции $1/\operatorname{ch} ml$ и $\operatorname{th} ml$ приводятся на рис. 3-5, а численные значения — в табл. 3-1. Как видно из рис. 3-5, вначале с увеличением l количество передаваемого тепла сильно возрастает, но затем приращения функции делаются все меньше и меньше и, наконец, количество передаваемого тепла приближается к асимптотическому значению.

Таблица 3-1

Вычисленные значения функции для расчета теплопроводности стержня

ml	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
$\operatorname{ch} ml$	1	1,1276	1,543	2,352	3,762	10,07	27,31	74,21	201,7
$\operatorname{th} ml$	0	0,4621	0,7616	0,9052	0,9640	0,9951	0,9993	0,9909	1

Избыточная температура на конце очень длинного стержня равна нулю.

Решение уравнения (3-16) с граничными условиями, выраженными уравнением (3-18) (т. е. случай учета теплоотдачи на конце стержня), имеет более громоздкий вид:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{\operatorname{ch} m(l-x) + (\alpha_2/m\lambda)\operatorname{sh} m(l-x)}{\operatorname{ch} ml + (\alpha_2/m\lambda)\operatorname{sh} ml}, \quad (3\text{-}24)$$

т. е. учитывается распределение температур вдоль стержня.

Избыточная температура на конце стержня ($x=l$) оказывается равной:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{1}{\operatorname{ch} ml + (\alpha_2/m\lambda)\operatorname{sh} ml}. \quad (3\text{-}25)$$

Тепловой поток через основание стержня ($x=0$) равен:

$$Q_1 = m\lambda A\vartheta_1 \frac{(\alpha_2/m\lambda) + \operatorname{th} ml}{1 + (\alpha_2/m\lambda)\operatorname{th} ml}. \quad (3\text{-}26)$$

В последних трех уравнениях величина α_2 — коэффициент теплообмена на конце стержня; эта величина обычно отличается от коэффициента теплообмена вдоль поверхности стержня. Уравнение (3-26) сводится к уравнению (3-23) для достаточно малых величин $\alpha_2/m\lambda$.

Следующий пример числового расчета имеет большое практическое значение. Температуру газа, протекающего по трубе, обычно измеряют термометром, который вставляют в специальную гильзу, вваренную в трубу, как показано на рис. 3-6. Если температура газа сильно отличается от внешней температуры, то стенки трубы имеют более низкую температуру, чем газ, и тепло отводится по гильзе к стенкам трубы. Таким образом, конец гильзы, где нахо-

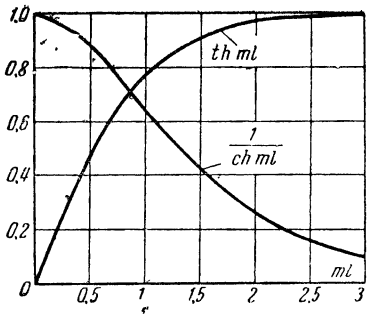


Рис. 3-5. Кривая для определения теплового потока и распределения температуры в стержне.

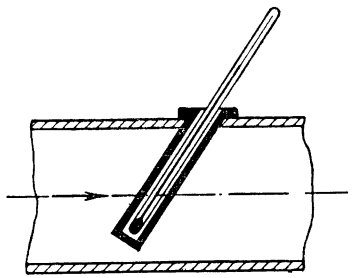


Рис. 3-6. Измерение температуры жидкости в движущейся трубе.

дится шарик термометра, может иметь более низкую температуру, чем газ, и термометр не будет показывать истинную температуру газа. Эту погрешность можно определить, используя уравнения (3-22) и (3-25). С этой целью следует обратиться к рис. 3-5 и табл. 3-1, с помощью которых можно определить длину трубы, при которой погрешность не превосходит заданной величины.

Пример 3-1. В трубу диаметром 90 *мм* для перегретого пара вварена железная гильза (рис. 3-6) диаметром 15 *мм* для термометра. Давление пара 1,0 *кГ/см²*, температура 315° С. Пар проходит по трубе со скоростью 20 *м/сек*. Необходимо найти длину гильзы, при которой погрешность показаний термометра составляла бы менее 0,5% разности между температурой пара и температурой стенок трубы. Коэффициент теплообмена от пара к стенкам трубы $\alpha=90$ *ккал/м² · ч · град*. Если толщина стенок гильзы $s=0{,}9$ *мм*, то поперечное сечение, через которое передается тепло $A=d\pi s$, а периметр $C=\pi d$. Отсюда

$$m=\sqrt{\frac{\alpha C}{\lambda A}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda s}}=\sqrt{\frac{90}{47{,}5\cdot 0{,}0009}}=46\ м^{-1}.$$

Применяя обозначения настоящего параграфа, погрешность $\vartheta_2/\vartheta_1=0{,}005$. Из табл. 3-1 находим, что для такого значения произведение ml должно равняться 6. Отсюда длина гильзы $l=\frac{6}{m}=\frac{6}{46}=0{,}13\ м=$

=130 *мм*. Так как длина гильзы больше диаметра трубы, то гильзу надо вварить под углом к оси трубы (рис. 3-6).

Теплообмен излучением между концом гильзы и стенками трубы может также внести погрешность в показания термометра, но об этом будет говориться в отдельной главе.

3-5. РЕБРИСТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ НАГРЕВА

В гл. 1 было показано, что общее термическое сопротивление плоской стенки определяется наибольшим из частных термических сопротивлений. Если последнее является конвективным сопротивлением, то тепловой поток через стенку можно увеличить путем оребрения поверхности в месте с наибольшим сопротивлением. Ребристые поверхности нагрева находят широкое применение, например, в экономайзерах паровых котлов, в радиаторах паровых и водяных систем отопления, электротрансформаторах, двигателях внутреннего сгорания с воздушным охлаждением цилиндров, авиамоторах и пр.

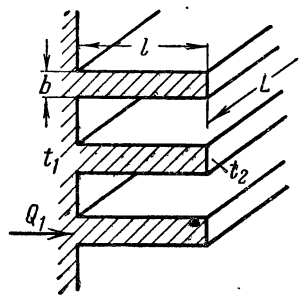


Рис. 3-7. Поверхность нагрева с ребрами прямоугольного сечения.

Прямоугольное ребро. Простейшим случаем является расчет плоской оребренной поверхности. Если высота ребер на трубе сравнительно невелика, то для расчета цилиндрических ребристых поверхностей можно применять формулы, выведенные для плоских оребренных поверхностей. Для ребер постоянной толщины высотой l справедливы формулы, выведенные в § 3-4. Применяя обозначения рис. 3-7, находим, что площадь поперечного сечения ребра равна bL и периметра $C=2L$, что справедливо при b малом относительно L. Значение m определяется в результате подстановки найденных значений в выражение

$$m=\sqrt{\frac{\alpha C}{\lambda A}}=\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda b}}. \qquad (3\text{-}27)$$

Теплопотери ребра определяются из уравнений (3-23) и (3-26).

Весьма важно знать те условия, при которых ребристая поверхность выгоднее плоской. Ответ на этот вопрос зависит от относительной важности соображений стоимости, веса и габаритов теплообменного устройства. Прежде все-

го необходимо ответить на вопрос, при каких условиях вообще оребрение увеличивает тепловой поток через стенку. Очевидно, оребрение выгодно в том случае, когда тепловой поток через ребро усиливается с возрастанием высоты ребра. Если же тепловой поток ослабляется с возрастанием высоты ребра, то ребра выгоднее делать как можно ниже, т. е. выгоднее совсем не прибегать к оребрению. Поэтому предельные условия выгодности оребрения описываются уравнением

$$\frac{dQ_1}{dl}=0. \tag{3-28}$$

Это уравнение дает правильные результаты в том случае, если используется уравнение (3-26). Так как в рассматриваемой задаче λ, A, m и ϑ могут считаться постоянными величинами, то в уравнении (3-26) достаточно продифференцировать только числитель и знаменатель дроби. Получающееся выражение равняется нулю, когда либо числитель равен нулю, либо знаменатель — бесконечно большая величина. Последнее соответствует тривиальному решению $\lambda=0$, поскольку это значение удовлетворяет решению уравнения (3-28). Поэтому рассмотрим лишь числитель. Дифференцирование уравнения (3-26) дает для числителя следующий результат:

$$\left(1+\frac{\alpha_2}{\lambda m}\operatorname{th} ml\right)\frac{m}{\operatorname{ch}^2 ml}-\left(\frac{\alpha_2}{\lambda m}+\operatorname{th} ml\right)\frac{\alpha_2/\lambda}{\operatorname{ch}^2 ml}=0.$$

После упрощений получаем выражение

$$m-\frac{\alpha_2^2}{\lambda^2 m}=0.$$

Подстановка формулы (3-27) дает:

$$\frac{2\lambda}{\alpha b}=1. \tag{3-29}$$

Левая часть последнего равенства представляет собой термическое сопротивление теплообмена, а правая часть — термическое сопротивление теплопроводности плоской стенки, толщина которой в 2 раза меньше толщины ребра. Когда оба термических сопротивления обладают одной и той же величиной, оребрение бесполезно. Надо, конечно, учитывать, что действительные условия, характерные для коротких ребер [уравнение (3-26)], отличаются от тех, которые приняты для расчетов. Линии теплового потока и

изотермы в таком ребре в действительности имеют вид, изображенный на рис. 3-8, а при приведенных выше расчетах предполагалось, что температура изменяется только в направлении высоты, а поэтому она постоянная в плоскостях, перпендикулярных оси ребра. Это обстоятельство отражается на числовом выражении уравнения (3-29). Однако справедливо, что к оребрению поверхности выгодно прибегать при условии

$$\frac{2\lambda}{\alpha b} > 5. \qquad (3\text{-}30)$$

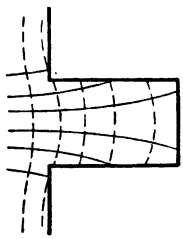


Рис. 3-8. Тепловой поток в коротком ребре прямоугольного сечения.

На рис. 3-9 приведено сравнение теплового потока, проходящего через основание трех различных ребер: A — короткое ребро, B — длинное ребро с изолированным концом, C — длинное ребро с утечкой тепла через конец. На рисунке указаны длины ребер, которые можно рассматривать как длинные ребра и, следовательно, применять к ним более простой анализ одномерного теплового потока.

Пример 3-2. Необходимо определить, когда на поверхности нагрева выгодно иметь чугунные ребра толщиной 3 *мм*. Коэффициент теплопроводности чугуна дается в приложении. Возьмем среднее значение $\lambda = 49$ *ккал/м · ч · град*. Если тепло передается воздуху, то значение коэффициента теплообмена заключается в пределах 10÷100 *ккал/м² · ч · град*. Возьмем наибольшее значение, тогда

$$\frac{2\lambda}{\alpha b} = \frac{2{,}49}{100 \cdot 0{,}003} \approx 330.$$

Следовательно, при передаче тепла воздуху (или другим газам) оребрение поверхности выгодно. Если тепло передается воде, значение коэффициента теплообмена будет заключено в пределах 500÷5 000 *ккал/м² · ч · град*. Если снова взять наибольшее значение, то

$$\frac{2\lambda}{\alpha b} = \frac{2{,}49}{5\,000 \cdot 0{,}003} = 6{,}5.$$

Так как эта величина очень низка, оребрение поверхности практически не усиливает теплоотдачу. Эффективность оребрения для жидкостей можно повысить применением металлов с лучшей теплопроводностью и более тонких ребер. Однако на практике толщину ребер нельзя сделать значительно меньше 3 *мм*, а теплопроводность меди, наиболее теплопроводного металла, лишь в 5 раз больше теплопроводности чугуна, поэтому оребрение незначительно увеличивает теплоотдачу жидкостям.

В случае целесообразности оребрения теплообмен увеличивается, если ребра располагаются на практически возможно близком расстоянии друг от друга. Поскольку коэффициенты теплообмена уменьшаются,

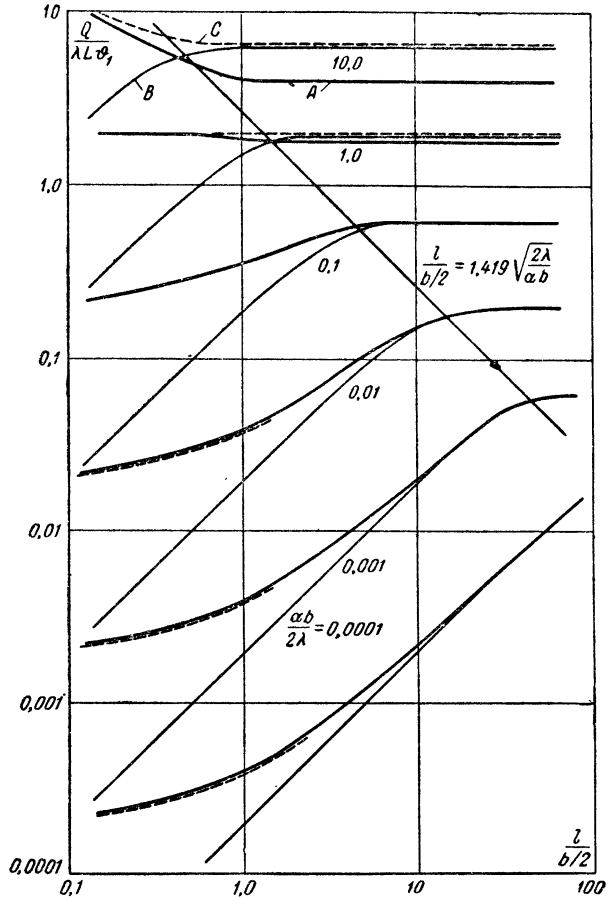


Рис. 3-9. Поток тепла через короткие и длинные ребра.

A — короткие ребра; *B* — длинные ребра с изолированным концом; *C* — длинное ребро с утечкой тепла с торца.

когда наблюдается взаимовлияние пограничных слоев, расположенных на поверхности, то расстояние между соседними ребрами не должно быть заметно меньшим, чем двойная толщина пограничного слоя. Расчет толщины пограничного слоя будет производиться в другой главе этой книги. Однако здесь укажем, что поток воздуха, омывающий пластину длиной в 30 *см* со скоростью 15 *м/сек*, создает пограничный слой толщиной примерно в 1,25 *см*.

Прямоугольное оребрение минимального веса. При конструировании систем охлаждения для транспортных ма-

шин, в особенности для самолетов, приобретает особую важность решение проблемы максимального теплообмена при минимальном весе теплообменника. Решим эту задачу для ребристой поверхности. Вес одного ребра (рис. 3-7)

$$W = \rho L b l = \rho L A_1, \tag{3-31}$$

где ρ — плотность материала ребра;

A_1 — площадь поперечного сечения ребра, перпендикулярного L.

Длина L задана, а значения b и l надо подобрать таким образом, чтобы при данной величине A_1 тепловой поток через ребро был максимальным. Подставляем в уравнение (3-23) значения $m = \sqrt{2\alpha/\lambda b}$ и $A = bL$ (следует заметить разницу между A и A_1. A — сечение, нормальное к тепловому потоку, A_1 — сечение в плоскости чертежа (рис. 3-7). Если выразить высоту ребра l через площадь поперечного сечения A_1 ($l = A_1/b$), получим:

$$Q_1 = L\sqrt{2\alpha\lambda b}\,\vartheta_1 \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda b}}\frac{A_1}{b}\right). \tag{3-32}$$

Выражение (3-32) будет иметь максимальное значение при $dQ_1/db = 0$; дифференцируя уравнение (3-32) и приравнивая производную нулю, получаем:

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda b}}\frac{A_1}{b}\right) - \sqrt{b}\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}} A_1 \frac{3}{2} b^{-5/2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2[\sqrt{2\alpha/\lambda b}\,(A_1/b)]} = 0. \tag{3-33}$$

Подстановка

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda b}}\frac{A_1}{b} = u \tag{3-34}$$

дает:

$$\operatorname{th} u = \frac{3u}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

Это трансцендентное уравнение необходимо решать либо численно, либо графически, составив, например, графики изменения обеих частей уравнения с изменением u и определив точку пересечения кривых. Таким образом, для u можно получить значение $u = 1{,}419$. Следовательно, максимальный тепловой поток через ребро данного веса получается, когда справедливо следующее равенство:

$$\frac{l}{b/2} = 1{,}419\sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha b}}. \tag{3-35}$$

Отсюда видно, что отношение высоты ребра к половине его толщины обусловливается той же характеристической величиной, которую мы находим в уравнении (3-29). Комплекс $\alpha \frac{b}{2}/\lambda$ встречается так часто в задачах теплопроводности в условиях пограничного конвективного теплообмена, что этот комплекс назвали критерием Био. Он безразмерный и подобен числу Нуссельта, с которым мы встретимся при изучении конвективного теплообмена. Однако между ними есть существенное различие. Теплопроводность в критериях Био приписывается проводящему телу, в то время как теплопроводность, выраженная числом Нуссельта, относится к конвективному потоку жидкости или газа.

Избыточная температура на конце ребра относительно температуры окружающего воздуха равна:

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1'}{\operatorname{ch} u} = 0{,}457\vartheta_1'. \qquad (3\text{-}36)$$

Это равенство дает возможность выяснить, достигнута ли оптимальная высота ребра при данных ϑ_1 и ϑ_2.

Когда поверхность нагрева не имеет ребер, поверхность, равная площади сечения у основания ребра, отдает количество тепла $Q' = \alpha b L \vartheta_1$. Таким образом, отношение количества тепла, отдаваемого ребрами, к количеству тепла Q' для наилучшего ребра согласно уравнению (3-32) будет иметь следующую величину:

$$\frac{Q_1}{Q'} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha b}} \operatorname{th} u = 0{,}889 \sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha b}}. \qquad (3\text{-}37)$$

Это уравнение позволит определить, насколько можно интенсифицировать теплообмен оребрением поверхности нагрева.

Пример 3-3. Для чугунного ребра толщиной 3 *мм* значение $2\lambda/\alpha b$ равно 330. Подставляя это значение в формулу (3-35), получаем: при теплоотдаче в воздух оптимальное значение отношения $l/(b/2) = 25{,}8$, при теплоотдаче в воду $l/(b/2) = 3{,}64$. Для алюминиевого ребра толщиной 1,0 *мм* с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 178$ *ккал/м · час · град* оптимальное значение отношения $l/(b/2)$ равно 85,1 для воздуха и 12,0 для воды. Можно заметить, что толщина ребра должна быть больше, когда отношение термического сопротивления теплообмена к термическому сопротивлению теплопроводности становится меньше. Чугунные ребра крайне слабо интенсифицируют теплоотдачу в воду.

Ребра стальных цилиндров авиационных поршневых двигателей воздушного охлаждения делаются приблизительно 1,0 *мм* толщиной и

20 *мм* высотой при шаге 4,0 *мм*. Головка цилиндра обычно снабжена алюминиевыми ребрами приблизительно толщиной в 1,5 *мм* и высотой 35,6 *мм* при расстоянии между ребрами 5,08 *мм*. Эти величины очень близки к оптимальным величинам, получаемым из уравнения (3-35). Радиаторы с водяным охлаждением также имеют очень тонкие ребра (приблизительно 0,10—0,20 *мм* при высоте 5,08 *мм*).

В стационарных теплообменных установках толщина ребер обычно делается больше оптимальной, так как вес в этом случае не играет существенной роли. Оребренные трубы экономайзеров паровых котлов имеют ребра от 1,25 до 4 *мм* толщиной и от 13 до 25 *мм* высотой с расстоянием между ними от 13 до 20 *мм*. Трубы системы водяного отопления имеют обычно ребра толщиной 1,0—2,5 *мм* и высотой 25—40 *мм* при шаге 10—25 *мм*.

Эффективность ребра. Уравнение (3-37) является математическим определением понятия «эффективность ребра». Поскольку система передачи теплового потока может быть произвольной, требуется обсудить два определения эффективности ребра: 1) эффективность относительно основания площади ребра в случае его отсутствия; 2) эффективность относительно такого же ребра с бесконечной теплопроводностью.

Ясно, что уравнение (3-37) относится к первому типу. В качестве иллюстрации ниже приводится выражение для обоих видов эффективности простого прямоугольного ребра.

Бесконечно длинное ребро

$$\eta = \frac{\sqrt{\alpha C \lambda A}\,\vartheta_1}{\alpha A \vartheta_1} = \sqrt{\frac{\lambda C}{\alpha A}}; \qquad (3\text{-}38)$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{\alpha C \lambda A}\,\vartheta_1}{\alpha C l \vartheta_1} = \frac{1}{ml}. \qquad (3\text{-}39)$$

Ограниченное ребро

$$\eta = \frac{\sqrt{\alpha C \lambda A}\vartheta_1 \operatorname{th} ml}{\alpha A \vartheta_1} = \sqrt{\frac{\lambda C}{\alpha A}} \operatorname{th} ml; \qquad (3\text{-}40)$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{\alpha C \lambda A}\vartheta_1 \operatorname{th} ml}{\alpha C_1 l \vartheta_1} = \frac{\operatorname{th} ml}{ml}. \qquad (3\text{-}41)$$

В уравнениях (3-38)—(3-41) η—эффективность относительно площади основания и Φ—эффективность относительно такого же ребра бесконечной теплопроводности.

Прямое ребро треугольного профиля. При определении оптимального ребра возникает вопрос, нельзя ли сэконо-

мить на весе, применяя ребра не прямоугольного поперечного сечения, какие рассматривались до этого, а ребра с какими-либо другими формами сечения. Далее будут рассматриваться прямые ребра треугольного сечения. Такое ребро изображено на рис. 3-10. Математический анализ в этом случае такой же, как и в случае ребра прямоугольного сечения, за исключением примера, в котором площадь, перпендикулярная к тепловому потоку, рассматривается как функция расстояния по ребру, уменьшающаяся с увеличением длины ребра. Таким образом, дифференциальное уравнение, записанное для постоянной теплопроводности и коэффициента теплообмена, принимает вид:

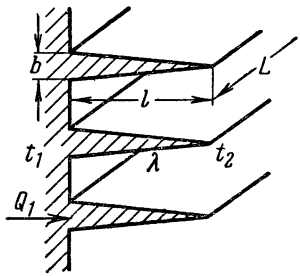


Рис. 3-10. Ребра треугольного сечения.

$$\frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{dt}{dx}\right]=\frac{\alpha C}{\lambda}\vartheta_1. \qquad (3\text{-}42)$$

Площадь $A(x)$ можно выразить непосредственно в членах, выражающих отношение высоты ребра к длине x/l:

$$A(x)=lL\frac{x}{l}$$

и для случая, когда $L \gg b$, периметр

$$C=2L.$$

Подставив эти величины в уравнение (3-42), имеем:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx}-\beta\frac{\vartheta}{x}=0, \qquad (3\text{-}43)$$

где ϑ — избыточная температура ребра относительно температуры окружающего воздуха и

$$\beta=\frac{2\alpha l}{\lambda b}.$$

Уравнение (3-43) не что иное, как модифицированное уравнение Бесселя [Л. 7], решение которого имеет вид:

$$\vartheta=AI_0(2\sqrt{\beta x})+BK_0(2\sqrt{\beta x}). \qquad (3\text{-}44)$$

Функции $I_0(\alpha)$ и $K_0(\alpha)$ графически изображены на рис. 3-11, а их численные значения приведены в табл. 3-2.

Очевидно, что $K_0(2\sqrt{\beta x})$ имеет бесконечно большие величины у конца ребра ($x=0$), и поскольку температура физически не бесконечно большая в этой точке, то коэффициент B для этого члена должен быть равен нулю.

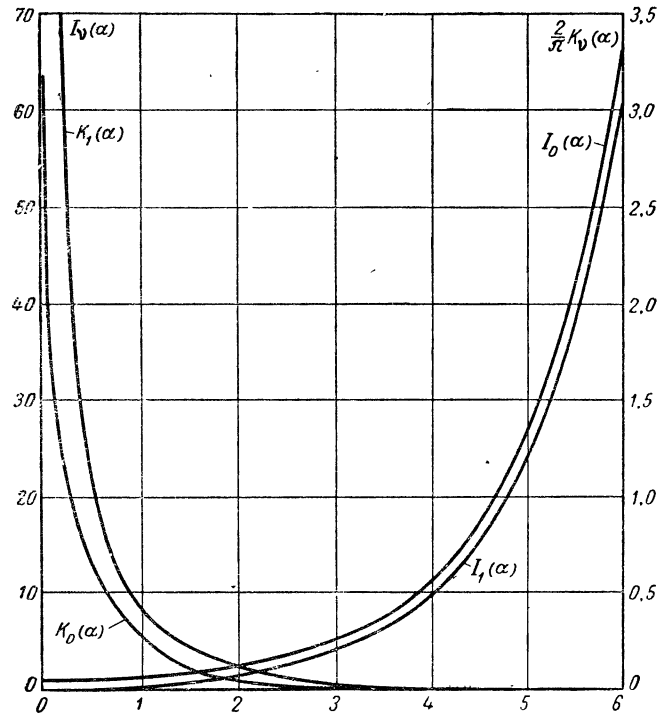


Рис. 3-11. Модифицированная функция Бесселя.

Остающееся граничное условие относится к температуре у основания ребра

$$\vartheta = \vartheta_1 \text{ для } x = l.$$

Подставив эти граничные условия в уравнение (3-44), можно определить оставшуюся постоянную:

$$A = \frac{\vartheta_1}{I_0(2\sqrt{\beta l})}.$$

Таблица 3-2

Некоторые значения функций Бесселя [Л. 8]

α	$I_0(\alpha)$	$I_1(\alpha)$	$\frac{2}{\pi}K_0$	(α)	$\frac{2}{\pi}K_1$	(α)
0,0	1,0000	0,0000				
0,2	1,01003	0,1005	1	116	3	040
0,4	1,04040	0,2040	0,7	095	1	391
0,6	1,09205	0,3137	0,4	950	0,8	294
0,8	1,665	0,4329	0,3	599	0,5	486
1,0	1,2661	0,5652	0,2	680	0,3	832
1,2	1,3937	0,7147	0,2	028	0,2	767
1,4	1,5534	0,8861	0,15	512	0,2	043
1,6	1,7500	1,0848	0,11	966	0,15	319
1,8	1,9896	1,3172	0,09	290	0,11	626
2,0	2,2796	1,5906	0,07	251	0,08	904
2,2	2,6291	1,9141	0,05	683	0,06	869
2,4	3,0493	2,2981	0,04	470	0,05	330
2,6	3,5533	2,7554	0,03	527	0,04	156
2,8	4,1573	3,3011	0,02	790	0,03	254
3,0	4,8808	3,9534	0,02	212	0,02	556
3,2	5,7472	4,7343	0,017	568	0,02	014
3,4	6,7848	5,6701	0,013	979	0,015	915
3,6	8,0277	6,7927	0,011	141	0,012	602
3,8	9,5169	8,1404	0,028	891	0,029	999
4,0	11,3019	9,7595	0,027	105	0,027	947
4,2	13,4425	11,7056	0,025	684	0,026	327
4,4	16,0104	14,0462	0,024	551	0,025	044
4,6	19,0926	16,8626	0,023	648	0,024	027
4,8	22,7937	20,2528	0,022	927	0,023	218
5,0	27,2399	24,3356	0,022	350	0,022	575
5,2	32,5836	29,2543	0,022	888	0,022	062
5,4	39,0088	35,1821	0,0215	181	0,0216	531
5,6	42,7376	42,3283	0,0212	214	0,0213	262
5,8	66,0381	50,9462	0,039	832	0,0210	648
6,0	67,2344	61,3419	0,037	920	0,038	556
6,2	80,72	73,89	0,036	382	0,036	879
6,4	96,98	89,03	0,035	146	0,035	534
6,6	116,54	107,30	0,034	151	0,034	455
6,8	140,14	129,38	0,033	350	0,033	588
7,0	168,6	156,04	0,032	704	0,032	891
7,2	202,9	188,3	0,032	184	0,032	331
7,4	244,3	227,2	0,0317	646	0,031	880
7,6	294,3	274,2	0,0314	262	0,0315	172
7,8	354,7	331,1	0,0311	530	0,0312	248

Продолжение табл. 3-2

α	$I_0(\alpha)$	$I_1(\alpha)$	$\frac{2}{\pi}K_0$	(α)	$\frac{2}{\pi}K_1$	(α)
8,0	427,6	399,9	0,049	325	0,049	891
8,2	515,6	483,0	0,047	543	0,047	991
8,4	621,9	583,7	0,046	104	0,046	458
8,6	750,5	705,4	0,044	941	0,045	220
8,8	905,8	852,7	0,044	000	0,044	221
9,0	1 093,6	1 030,9	0,043	239	0,043	415
9,2	1 320,7	1 246,7	0,042	624	0,042	763
9,4	1 595,3	1 507,9	0,042	126	0,042	236
9,6	1 927	1 824	0,0417	226	0,041	810
9,8	2 329	2 207	0,0413	962	0,0414	658
10,0			0,0411	319	0,0411	872

Таким образом, окончательное уравнение распределения температуры будет следующим:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1}=\frac{I_0(2\sqrt{\beta x})}{I_0(2\sqrt{\beta l})}. \tag{3-45}$$

Интенсивность теплового потока можно определить по закону Фурье и первой производной уравнения (3-45), имея в виду, что $dI_0(\alpha)/d\alpha = I_1(\alpha)$:

$$Q_1 = L\sqrt{2\alpha\lambda b}\,\frac{I_1(2\sqrt{\beta l})}{I_0(2\sqrt{\beta l})}. \tag{3-46}$$

Если тепловой поток входит в ребро треугольного сечения при оптимальных условиях, то наилучшее отношение l/b может быть выражено следующим образом:

$$\frac{l}{b/2}=1{,}309\sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha b}}. \tag{3-47}$$

Избыточная температура на вершине ребра

$$\vartheta_2 = 0{,}277\vartheta_1. \tag{3-48}$$

Отношение толщины ребра треугольного сечения к толщине ребра прямоугольного сечения при одинаковом тепловом потоке равно 1,31; отношение площадей поперечных сечений равно 1 : 1,44. Следовательно, при использовании ребер треугольного сечения можно сэкономить 44% материала.

Ребро с минимальным весом [Л. 9, 10]. Теперь интересно определить, какова оптимальная форма сечения ребра, имеющего наименьший вес при заданной величине теплового потока. Очевидно, что каждая часть такого ребра должна использоваться с одинаковым к. п. д., т. е. удельный теплозой поток должен оставаться постоянным по всему сечению ребра. Доказательство этого положения было дано Е. Шмидтом.

Линии теплового потока в таком ребре должны иметь форму, показанную на рис. 3-12. Они представляют собой ряд равноудаленных друг от друга прямых, параллельных оси ребра. При постоянном тепловом потоке температура изменяется вдоль линии теплового потока по линейному закону от температуры t_1 у основания ребра. Необходимо добиваться того, чтобы температура на вершине ребра как можно меньше отличалась от температуры t_s окружающего газа. Изменение температуры внутри ребра показано в верхней части рис. 3-12. На расстоянии x от вершины ребра температура равна t. Вследствие одномерности температурного поля разность между температурой t и температурой газа t_f можно выразить следующим образом:

$$t - t_f = \frac{x}{l}(t - t_f).$$

Пусть тепловой поток вдоль оси ребра равен q. Рассмотрим элемент поверхности ребра на расстоянии x. Пусть этот участок поверхности составляет с осью ребра угол φ. Тогда тепловой поток через участок будет равен $q \sin\varphi$, а так как тепло, снимаемое с этого участка, передается окружающему газу, то справедливо уравнение

$$q \sin\varphi = \alpha(t - t_f) = \alpha \frac{x}{l}(t_1 - t_f).$$

Это уравнение определяет угол φ как функция расстояния x, а именно:

$$\sin\varphi = \frac{\alpha\vartheta_1}{ql} x.$$

Числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения имеют постоянную величину.

Таким образом, контур ребра, найденный указанным методом, представляет собой дугу окружности, так как окружность определяется уравнением $\sin\varphi = x/r$, которое точно соответствует приведенному выше уравнению, причем в данном случае радиус окружности равняется $ql/\alpha\vartheta_1$.

Тот факт, что контур сечения ребра минимального веса образуется дугами окружности, был впервые обнаружен Ф. Вейнигом. Необязательно ребро должно иметь бесконечно малую по тонкости вершину, как показано на рис. 3-12. Для построения контура сечения ребра с постоянным тепловым потоком можно использовать любую часть окружности, как показано пунктирной линией на рис. 3-12. Разница в весе ребра с такими вогнутыми поверхностями и ребра треугольного сечения очень мала. Так как в производстве легче получить ребра треугольного сечения, то такое ребро практически можно считать наилучшим.

Устройство ребра. Площадь поперечного сечения A_1, которая необходима для определенного теплового потока в ребре прямоугольного сечения, находится из уравнения (3-32) подстановкой (3-34). Решение уравнения относительно A_1 дает:

$$A_1 = \left(\frac{Q_1}{\vartheta_1}\right)^3 \frac{1}{L^3} \frac{u}{\mathrm{th}^3 u} \frac{1}{4\alpha^2\lambda} = \frac{2{,}109}{4L^3\alpha^2\lambda} \left(\frac{Q_1}{\vartheta_1}\right)^3. \qquad (3\text{-}49)$$

Это уравнение показывает, что ребра выгоднее делать настолько маленькими, насколько это возможно. Ведь для удвоения снимаемого тепла поверхность одного ребра необходимо увеличить в 8 раз, тогда как достаточно применить два ребра исходных размеров.

Уравнение (3-49) позволяет выяснить сравнительные достоинства различных материалов для ребер. Площадь поперечного сечения A_1 обратно пропорциональна величине коэффициента теплопроводности λ. Поэтому вес пропорционален ρ/λ. В табл. 3-3 приведены значения отношения плотности ρ к величине коэффициента теплопроводности λ для различных материалов. Следует отметить, что при использовании алюминия вместо меди достигается 50% экономии в весе. Чугунные ребра весят в 10, а ребра из леги-

Таблица 3-3

Материал	Теплопроводность λ, *ккал/м·ч·град*	Плотность ρ, *г/см³*	ρ/λ, $\frac{\text{ч·кг·град}}{\text{ккал/м}^2}$	$\frac{\rho/\lambda}{(\rho/\lambda)_{Al}}$
Медь	327	8,965	27,4	1,96
Алюминий чистый	193	2,722	14,0	1,00
Алюминий сплав	134	2,658	20,0	1,42
Магний чистый	149	1,761	14,0	1,01
Сталь	48	7,845	164,5	11,80
Сталь нержавеющая	12	7,845	658,0	47,10

рованной стали в 50 раз больше. Таким образом, нет смысла для оребрения цилиндров авиационных двигателей воздушного охлаждения применять медь вместо алюминия, тогда как замена железа алюминием представляет большие преимущества.

Цилиндрические ребра. Весьма часто в технике встречают-

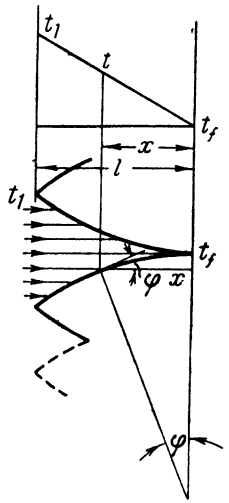


Рис. 3-12. Сечение ребра минимального веса.

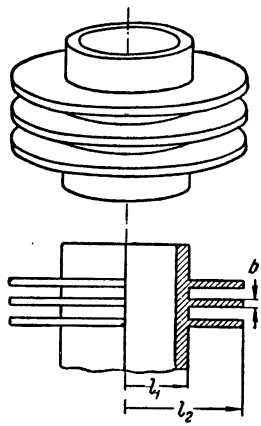


Рис. 3-13. Поверхность с цилиндрическим оребрением.

ся так называемые цилиндрические ребра, которые устанавливаются на трубах. Такая система ребер изображена на рис. 3-13. Задача может быть решена аналогично тому, как она решалась в случае прямоугольных ребер, только здесь следует учитывать зависимость площади от радиуса. Площадь, перпендикулярная к вектору теплового потока, может быть записана в виде:

$$A = 2\pi r b,$$

а периферию можно выразить как

$$C = 4\pi r.$$

Эти величины, введенные в уравнение (3-42), где x заменен на r, в пределе дают дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda b}\vartheta = 0. \qquad (3\text{-}50)$$

Соответствующие граничные условия для уравнения (3-50) могут быть следующие:

$$r = l_1,\ \vartheta = \vartheta_1;$$

$$r = l_2\quad \frac{d\vartheta}{dr} = 0.$$

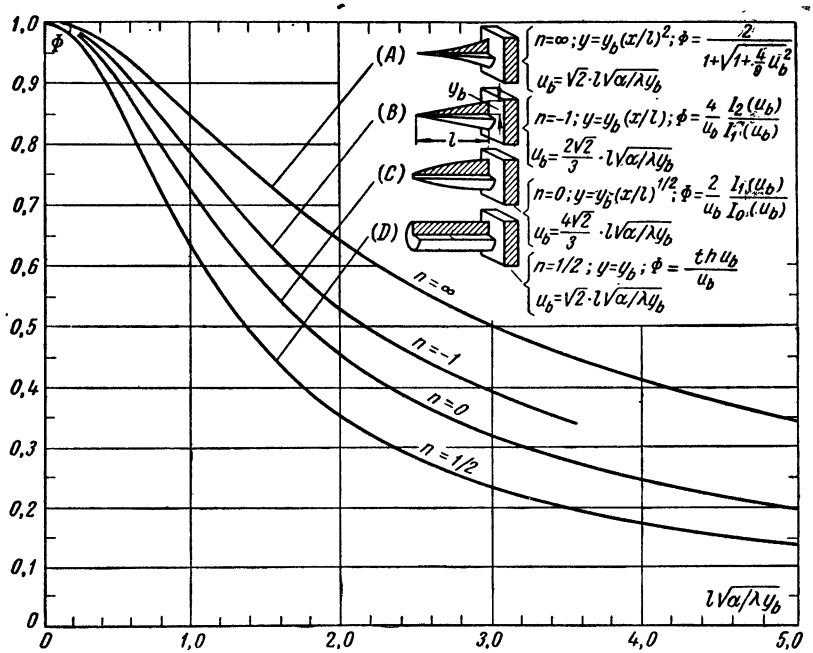


Рис. 3-14. Игольчатое оребрение [Л. 317].

Решение уравнения (3-50) получаем в виде модифицированных функций Бесселя:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{K_1(l_2\sqrt{\beta})\,I_0(r\sqrt{\beta}) + I_1(l_2\sqrt{\beta})\,K_0(r\sqrt{\beta})}{K_1(l_2\sqrt{\beta})\,I_0(l_1\sqrt{\beta}) + I_1(l_2\sqrt{\beta})\,K_0(l_1\sqrt{\beta})}. \qquad (3\text{-}51)$$

Поток тепла к основанию

$$Q_1 = 2\pi l_1 b\lambda\sqrt{\beta}\,\vartheta_1\left[\frac{I_1(l_2\sqrt{\beta})\,K_1(l_1\sqrt{\beta}) - K_1(l_2\sqrt{\beta})\,I_1(l_1\sqrt{\beta})}{I_1(l_2\sqrt{\beta})\,K_0(l_1\sqrt{\beta}) + K_1(l_2\sqrt{\beta})\,I_0(l_1\sqrt{\beta})}\right], \qquad (3\text{-}52)$$

где

$$\beta = \frac{2\alpha}{\lambda b}.$$

К. А. Гарднер [Л. 11] обобщил расчетные соотношения для систем теплообменников с развитой поверхностью не только на виды теплообменников, описанных в предыдущих параграфах, но и на некоторые другие формы. Эти результа-

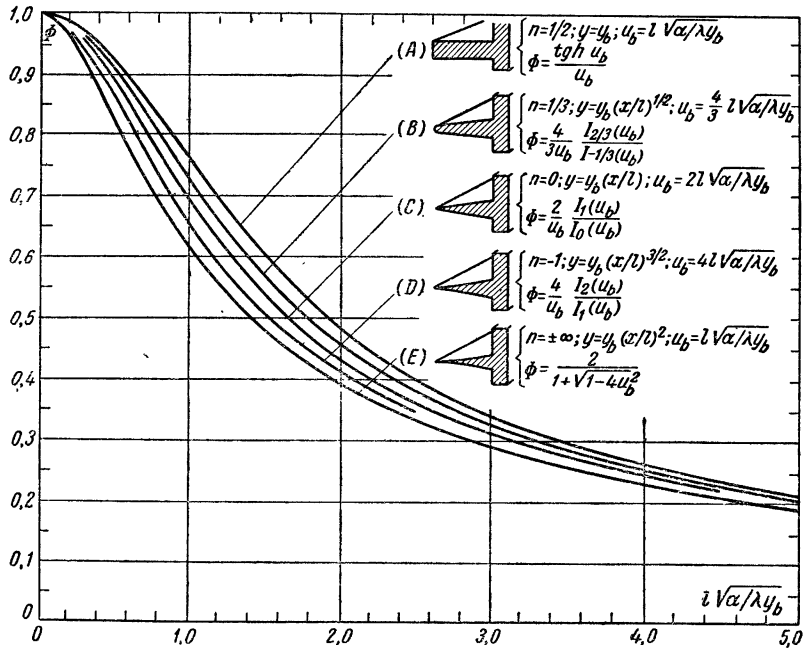


Рис. 3-15. Прямое оребрение [Л. 318].

ты, могущие быть использованы при проектировании, представлены на рис. 3-14—3-17 в виде эффективности, основанной на таком же ребре с бесконечной теплопроводностью. Дополнительные данные по решениям для развитых поверхностей теплообменников имеются в работе Шнейдера [Л. 12].

Пример 3-4. С целью увеличения отвода тепла от двигателя с воздушным охлаждением используют обычные цилиндрические ребра (рис. 3-13). Сравним отвод тепла от оребренного цилиндра и от цилиндра без оребрения.

Уравнение (3-52) выражает тепловые потери одного ребра этого вида. Предположим, что по спецификациям требуются, чтобы ребра были длиной в 25,4 и 2,28 *мм*, толщиной с расстоянием между ними 4,56 *мм*. Коэффициент теплообмена α принимаем 244,1 *ккал/м² · ч · град* вследствие наличия вынужденного потока по поверхности ребра.

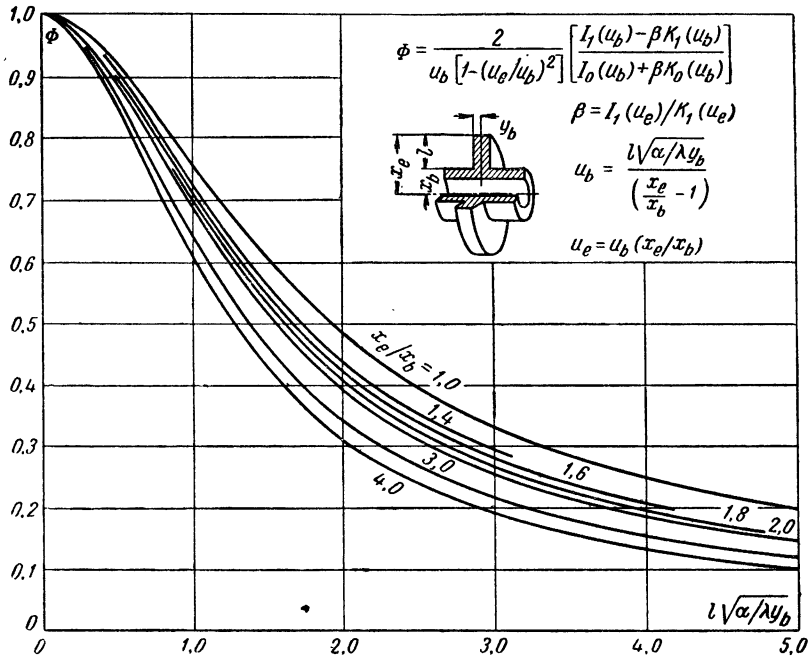


Рис. 3-16. Цилиндрическое оребрение с прямоугольным поперечным сечением [Л. 319].

Коэффициент теплопроводности $\lambda = 41{,}66$ *ккал/м · ч · град* берется из приложения. Температура стенки цилиндра равна 121° С, а температура окружающего воздуха 21° С:

$$l_1 = 7{,}62 \text{ см}; \quad l_2 = 10{,}14 \text{ см};$$

$$\vartheta_1 = 121 - 21 = 100^\circ \text{ С};$$

$$\beta = \frac{2\alpha}{\lambda b} = \frac{2 \cdot 244{,}1}{41{,}66 \cdot 0{,}00228} = 5\,139; \quad \sqrt{\beta} = 71{,}68 \text{ м}^{-1};$$

$$l_1\sqrt{\beta} = 0{,}0762 \cdot 71{,}68 = 5{,}45;$$

$$l_2\sqrt{\beta} = 0{,}1014 \cdot 71{,}68 = 7{,}26.$$

Из табл 3-2

$$I_1(7{,}26) = 188; \quad K_1(7{,}26) = 0;$$

$$I_1(5{,}45) = 37{,}2; \quad K_1(5{,}45) = 0{,}0024;$$

$$I_0(5{,}45) = 41{,}0; \quad K_0(5{,}45) = 0{,}0022.$$

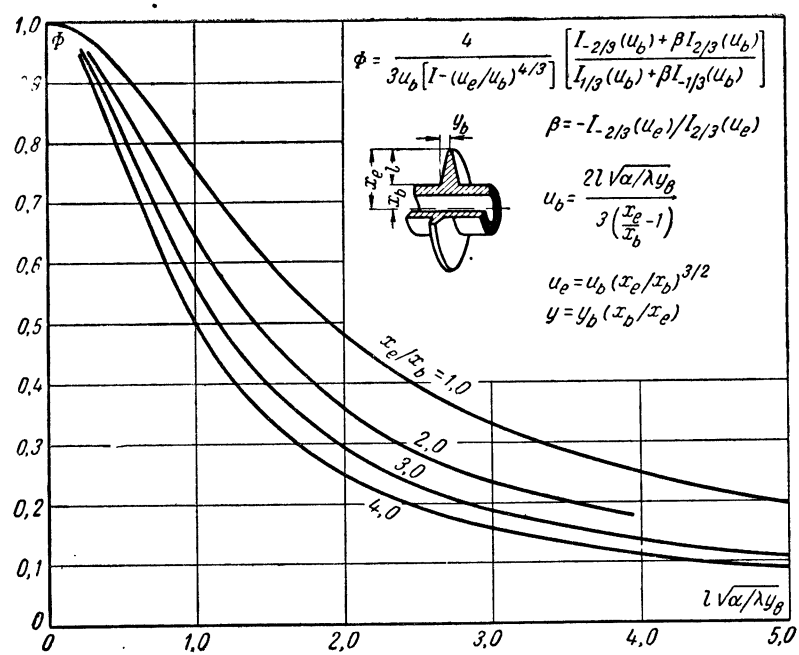


Рис. 3-17. Цилиндрическое оребрение с треугольным поперечным сечением [Л. 320].

Таким образом,

$$Q_1 = 6,28 \cdot 0,0762 \cdot 0,00228 \cdot 41,66 \cdot 71,68 \cdot 100 \frac{188 \cdot 0,0024}{188 \cdot 0,0022} =$$

$$= 355,4 \text{ ккал/ч}.$$

Для неоребренной трубы

$$Q_B = 80,1 \text{ ккал/ч};$$

$$\frac{Q_1}{Q_B} = \frac{355,4}{80,1} = 4,4.$$

3-6. СТЕНКА С ВНУТРЕННИМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Предыдущие рассуждения можно распространить также и на любой случай генерации тепла, например на такой случай, когда источники тепла равномерно распределены по всему телу. Простейшим примером тела с внутренними источниками тепла является электрический проводник, в котором электрическая энергия превращается в тепло. Расчеты температур, возникающих при таком выделении

представляют собой интерес при проектировании электрических машин и приборов. В области химии и ядерных исследований также возникает много вопросов, связанных с проблемами «источника тепла». Например, специальные охладительные системы должны быть предусмотрены проектом для того, чтобы предотвратить возможность возникновения недопустимо высоких температур при выделении тепла во время укладки бетона. Тепло образуется так же за счет механической работы движущихся жидкостей и газов, причем для газов, движущихся с большими скоростями (нагрев при трении), в частности в авиации, повышение температуры может быть порядка нескольких сотен градусов и увеличивается пропорционально квадрату числа Маха. Значительное повышение температур наблюдается при выделении тепла за счет внутреннего трения в смазке быстроходных подшипников. В настоящем параграфе мы рассмотрим только твердые тела, а именно плоскую стенку или плиту (рис. 3-18). Пусть в стене имеются равномерно распределенные источники тепла с удельной мощностью Q'. Тогда Q' не зависит от пространственной координаты. Внешняя поверхность плиты омывается циркулирующим потоком, температура которого t_f. Коэффициент теплообмена для каждой поверхности α. Если полагать, что теплопроводность постоянна и условия стационарны, то уравнение (2-13) сводится к

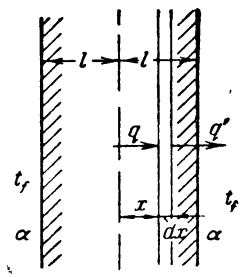


Рис. 3-18. Стенка с внутренним источником тепла.

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{Q'}{\lambda}=0, \qquad (3\text{-}53)$$

где ϑ — избыточная температура.

Граничные условия для определения двух постоянных, которые появятся в решении уравнения (3-58), могут быть выражены следующим образом:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0}=0;$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=l}=\alpha\vartheta_{x=l}.$$

Решение уравнения (3-53)

$$\vartheta = -\frac{Q'}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2. \qquad (3\text{-}54)$$

Выражая с помощью граничных условий постоянные в уравнении (3-54), получаем:

$$\vartheta = \frac{Q'}{2\lambda}(l^2 - x^2) + \frac{Q'l}{\alpha}. \qquad (3\text{-}55)$$

Следовательно, изотермы в плите с равномерным тепловыделением имеют форму парабол, как показано на рис. 3-19. Максимальную избыточную температуру получаем из уравнения (3-55), когда $x=0$:

$$\vartheta_0 = \frac{Q'}{2\lambda}l^2 + \frac{Q'l}{\alpha}. \qquad (3\text{-}56)$$

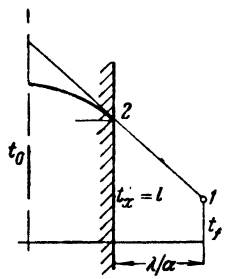


Рис. 3-19. Кривая распределения температур в стенке с внутренним источником тепла.

Рис. 3-19 иллюстрирует метод определения температурного градиента на поверхности. Если графически изобразить расстояние λ/α от поверхности и на этом расстоянии отложить температуру t_f как ординату и затем соединить точку *1*, которая получена таким образом, с точкой *2*, соответствующей температуре поверхности, то наклон прямой линии, соединяющей обе точки, дает температурный градиент у стены. Этот результат может быть непосредственно получен из решения второй части уравнения граничных условий для градиента у стены:

$$-\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = \frac{\vartheta_{x=l}}{\lambda/\alpha}. \qquad (3\text{-}57)$$

Пример 3-5. Цилиндрическая катушка трансформатора, выполненная из изолированной медной проволоки, имеет внутренний диаметр 170 *мм* и внешний диаметр 250 *мм*. Медь составляет $\varphi=0{,}6$ части общего поперечного сечения катушки, а остальная часть падает на изоляцию. Плотность тока в проводнике $j=200$ *а/см*^{2}; удельное сопротивление меди $\rho = 2 \cdot 10^{-6}$ *см · ом*. Отсюда количество тепла, выделяемое на единицу объема катушки, $Q' = 0{,}24\ \varphi j^2 \rho = 0{,}24 \cdot 10^{-3} \times 0{,}6 \times 200^2 \times 2 \cdot 10^{-6} = 41\,500$ *ккал/м*$^3 \cdot$ *ч*.

ккал/дж · *а*^{2}*/см*^{2} · *ом* · *см* · *см*^{3}*/м*^{3} · 3 600 *дж/вт* · *ч*

Коэффициент теплообмена обеих поверхностей катушки, охлажденной воздухом при температуре 21° С, $\alpha = 19{,}5$ *ккал/ч · м*^{2} *· град*; коэффициент теплопроводности катушки $\lambda = 0{,}3$ *ккал/м · ч · град* (слюда, клей). Если в первом приближении рассматривать катушку как плоскую стен-

ку толщиной $2l=40$ *мм*, то согласно уравнению (3-56) наивысшая температура в ней будет равна:

$$\vartheta_0=\frac{21\,500\cdot 0{,}02^2}{2\cdot 0{,}3}+\frac{41\,500\cdot 0{,}02}{19{,}5}=70^\circ\text{ C}.$$

Таким образом, температура в середине обмотки катушки равна $70+21=91^\circ$ С. При более точном расчете температурного поля в катушке, рассматриваемой как полый цилиндр, получается значение $91{,}5^\circ$ С. Следовательно, расчет катушки как плоской стенки дает довольно хорошие результаты даже для обмотки значительной толщины.

3-7. ПОДЗЕМНЫЙ КАБЕЛЬ

Использование понятия источника тепла (стока) дает возможность проанализировать определенные виды систем в стационарном состоянии, которые другим способом проанализировать не удается. Таким примером может служить подземный кабель. Предполагается, что кабель заложен в плотно утрамбованной почве и выделяет каким-то образом тепло (это может быть электрический кабель или трубопровод, по которому идет поток жидкости, возможно химически активной). Удельная мощность теплового потока постоянная. Окружающая кабель среда ограничена уровнем поверхности (рис. 3-20) на расстоянии a выше центральной линии кабеля. Температура поверхности кабеля t_0 и температура поверхности почвы t_s постоянны. Избыточная температура в любой точке $P\ (x,\ y)$ будет $\vartheta=t-t_s$ и избыточная температура $\vartheta_0=t_0-t_s$ на поверхности кабеля. Требуется определить температурное поле вокруг кабеля в самой почве.

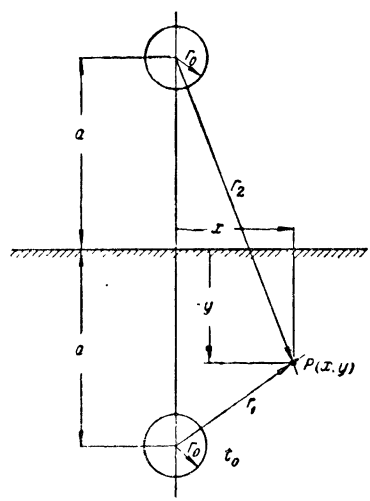


Рис. 3-20. Кабель, проложенный в земле.

Чтобы получить решение, кабель рассматривается как такой источник, который проводит тепло радиально. Полагается, что кабель очень длинный и имеет направление, перпендикулярное к плоскости бумаги. Ясно, что если почва имеет бесконечную протяженность в направлениях x и

y, то изотермами будут служит контуры, расположенные по окружности вокруг центра кабеля, и температура поверхности не будет линейно постоянной, как этого требует постановка задачи. Однако если представить себе зеркальную систему, показанную на рис. 3-20, и допустить, что верхний фиктивный кабель является стоком тепла, то на расстояниях, равноудаленных от источника и стока, будет как раз эта температура. Эта система дает изотерму $y=0$.

Рассмотрим кабель. Мы знаем, что поток тепла, выделяемый кабелем, равен:

$$Q=\frac{\vartheta_0-\vartheta_1}{(1/_2\pi\lambda L)\ln(r_1/r_0)}. \tag{3-58}$$

Благодаря этому температура в точке $P(x, y)$ будет:

$$\vartheta_1=\vartheta_0-\frac{Q}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_1}{r_0}. \tag{3-59}$$

Если фиктивный кабель выполняет функцию стока тепла, то он должен иметь температуру $-\vartheta_0$ на поверхности и поглощать такое же количество тепла, которое выделяет действительный кабель. Таким образом, его эффект в точке $P(x, y)$ определится следующим образом:

$$\vartheta_2=-\vartheta_0+\frac{Q}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_0}. \tag{3-60}$$

Поскольку уравнение теплопроводности линейное, то мы можем воспользоваться принципом суперпозиции. Сложение уравнений (3-59) и (3-60) дает в результате величину избыточной температуры в точке $P(x, y)$, обусловленной действием источника и стока тепла

$$\vartheta=\frac{Q}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{3-61}$$

Радиусы r_1 и r_2 могут быть записаны через x, y и a следующим образом:

$$r_1^2=x^2+(y+a)^2 \quad \text{и} \quad r_2^2=x^2+(y-a)^2.$$

Введем эти величины в уравнение (3-61):

$$\vartheta=\frac{Q}{4\pi\lambda L}\ln\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]. \tag{3-62}$$

Уравнение (3-62) может быть записано в виде:

$$e^{(4\pi\lambda L/Q)\vartheta}=\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}. \tag{3-63}$$

Уравнения изотерм могут быть получены, если положить левый член постоянным; обозначим его буквой C. Таким образом, решая это уравнение относительно C и считая x и y параметрами, получаем:

$$x^2+\left(y-\frac{1+C}{1-C}a\right)^2=\frac{4Ca^2}{(1-C)^2}. \qquad (3\text{-}64)$$

Уравнение (3-64) представляет семейство окружностей с центром в $x=0$:

$$y=a(1+C)/(1-C) \text{ с радиусами } r=2a\sqrt{C}/(1-C).$$

Для окружности, выражающей изотерму $\vartheta=0$, величина $C=1$ и радиус равен бесконечности, т. е. она вырождается в прямую линию. Центр этой окружности расположен на оси y.

Расчет теплообмена кабеля, такого же как мы рассматривали выше, может быть выполнен для любой глубины погружения. Следует заметить, что действительная линия источника тепла будет выше, чем центральная линия кабеля (в действительности это одна из изотерм) (рис. 3-21) потому, что величина $(1+C)/(1-C)>1$; поскольку $C>0$; таким образом, по мере увеличения радиусов центры изотермических окружностей опускаются.

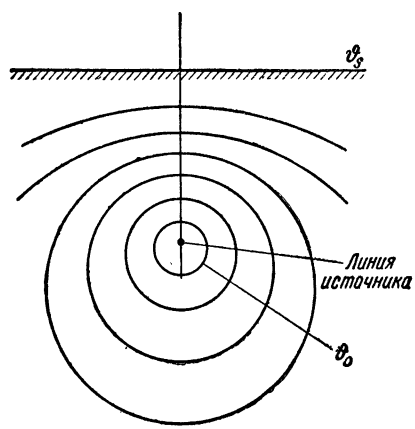


Рис. 3-21. Распределение температуры вокруг кабеля, проложенного в земле.

Если D — диаметр кабеля и N — глубина погружения центральной линии кабеля ниже поверхности, то

$$N=\frac{1+C}{1-C}a;$$

$$\frac{D}{2}=\frac{2a\sqrt{C}}{1-C}=\frac{2\sqrt{C}N}{1+C}.$$

Уравнение (3-64) может быть записано относительно C:

$$C^2+\left(2-16\frac{N^2}{D^2}\right)C+1=0. \tag{3-65}$$

Это квадратное уравнение может быть решено обычным способом:

$$C=\left[8\left(\frac{N}{D}\right)^2-1\right]\pm 4\frac{N}{D}\sqrt{4\left(\frac{N}{D}\right)^2-1}=e^{(4\pi\lambda L/Q)\vartheta}. \tag{3-66}$$

Вопрос выбора правильного знака в уравнении (3-66) определяется физическими характеристиками системы. Предположим, что N/D очень велико; поэтому

$$C=8\left(\frac{N}{D}\right)^2\pm 8\left(\frac{N}{D}\right)^2.$$

Если берется отрицательный знак, $C=0$ и, следовательно,

$$e^{(4\pi\lambda L/Q)\vartheta}=0$$

и отсюда ϑ — величина отрицательная. Это утверждение противоречит первоначальному предположению о том, что кабель является источником тепла. Следовательно нужно взять положительный знак. Окончательный результат

$$C_0=\left[8\left(\frac{N}{D}\right)^2-1\right]+4\frac{N}{D}\sqrt{4\left(\frac{N}{D}\right)^2-1}=e^{(4\pi\lambda L/Q)\vartheta_0}. \tag{3-67}$$

Решая уравнение (3-67) относительно Q, получаем:

$$Q=\frac{4\pi\lambda L\vartheta_0}{\ln\left\{[8(N/D)^2-1]+4(N/D)\sqrt{4(N/D)^2-1}\right\}}, \tag{3-68}$$

где ϑ_0 — разность температур, а все остальное в уравнении выражает термическое сопротивление[1]:

$$R=\frac{\ln\left\{[8(N/D)^2-1]+4(N/D)\sqrt{4(N/D)^2-1}\right\}}{4\pi\lambda L}. \tag{3-69}$$

Если $N/D\gg 1$, уравнение (3-68) сводится к

$$Q=\frac{4\pi\lambda L\vartheta_0}{\ln 4(N/D)}. \tag{3-70}$$

[1] Тепловые сопротивления для других проложенных под землей тел вычислены А. А. Лондоном и приводятся Мак Адамсом [Л. 13].

Полезно отметить, что уравнение (3-68) является также решением для теплового потока через цилиндр с круглым каналом, эксцентричным к внешней стенке. Однако необходимо сохранить постоянную температуру поверхностей, чтобы поверхность была изотермической в задаче о подземном кабеле.

3-8. ДВУХМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Уравнение теплопроводности для изотропных однородных материалов в двух измерениях, в которых распределение температуры во времени постоянно при отсутствии источников тепла, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0. \qquad (3\text{-}71)$$

Это уравнение может быть истолковано в результате использования комплексного переменного[1]. Рассмотрим рис. 3-22, на котором изображена плоскость z, причем $z=x+iy$. На этой плоскости нанесены следы плоскостей Φ и ψ, которые связаны с z посредством выражения

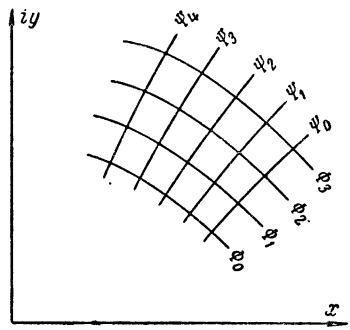


Рис. 3-22. Потенциальная функция тока в комплексной области.

$$\Phi+i\psi=f(x+iy)=f(z),$$

Φ и ψ — сопряженные функции комплексной переменной. Поэтому можно записать следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=f'(z);\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=if'(z).$$

Отсюда, разделяя и приравнивая действительные и мнимые части, получаем соотношения Коши—Римана:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}. \qquad (3\text{-}72)$$

[1] См., например И. С. и Е. С. Сокольниковы, Высшая математика для инженеров и физиков, 1941 [Л. 14].

Следы $\Phi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, таким образом, взаимно ортогональны, т. е. перпендикулярны друг другу в точках пересечения. Другим свойством сопряженных функций является то, что каждая из них удовлетворяет уравнению Лапласа. Это свойство можно продемонстрировать, дифференцируя уравнение (3-72) по частям, сначала по x, а затем по y:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

и

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}.$$

Из этих соотношений получаем два уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{3-73}$$

Если принять, что $\Phi = t$ обозначает температуру, то ψ должна обозначать линию теплового потока и поэтому относиться к Q*. Рассмотрим рис. 3-23, на котором изображена система координат s, n, расположенная таким образом, что n перпендикулярна к изотерме, а s является касательной к ней в этой же точке. Для потока тепла, направленного вдоль n, мы можем написать:

$$-\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\lambda\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \lambda\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Когда эти условия используются применительно к уравнению (3-72), это уравнение примет вид:

$$-\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\lambda\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \lambda\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial\psi}{\partial s}. \tag{3-74}$$

[Уравнение (3-74) графически изображено на рис. 3-23.] Поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s}. \tag{3-75}$$

---

* Сопряженные функции в уравнении Лапласа обычно называются потенциальной функцией и функцией тока. Здесь это соответствует температуре и потоку тепла соответственно.

В частности, если отрезки линий постоянной температуры и тока тепла берутся в конечных приращениях, то уравнение (3-75) может быть заменено следующим приближенным выражением:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta n}=\frac{\Delta\psi}{\Delta s}. \qquad (3\text{-}76)$$

Уравнение (3-76) полностью справедливо, когда скорости изменения Φ и ψ постоянны. Из уравнения (3-76) следует, что плоскость будет разделена на криволинейные квадраты, если $\Delta\Phi=\Delta\psi$ и приросты достаточно малы.[1] Чем

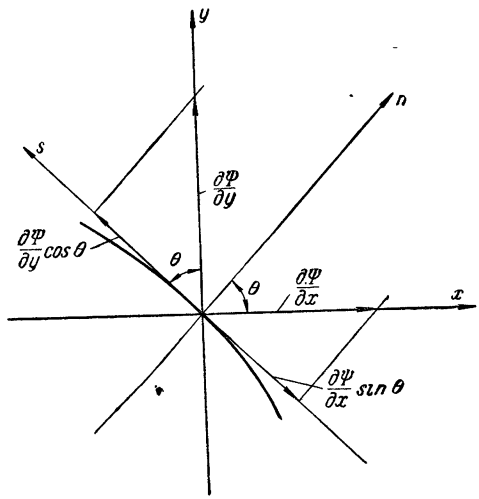


Рис. 3-23. Соотношения компонентов производных от функции потока.

меньше прирост, тем ближе криволинейные квадраты к геометрическим квадратам. Уравнение (3-76) имеет важное применение в технике графических расчетов, которая будет использоваться в следующем разделе.

Природа ψ функции потока может быть выражена, если

[1] Криволинейные квадраты — близкое приближение к обычным квадратам только в пределе, когда число квадратов стремится к бесконечности. В конечном виде криволинейные квадраты могут быть использованы в конструировании, когда нужно получить стороны с такой длиной, чтобы средние длины противоположных друг другу сторон были равны. Внутренние углы, конечно, равны $\pi/2$ в каждом случае.

мы вычислим поток тепла, проходящий через элементарную площадь (рис. 3-24):

$$dQ_x = -\lambda L \frac{\partial t}{\partial x} dy = -\lambda L \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy, \qquad (3\text{-}77)$$

где L — измерение, перпендикулярное к плоскости чертежа. Интегрируя уравнение (3-76) по высоте $(y_2 - y_1)$ с помощью уравнения (3-72), мы опять получаем:

$$Q_x = -\lambda L \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = -\lambda L \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\lambda L (\psi_2 - \psi_1).$$

Таким образом,

$$\frac{Q_x}{\lambda L} = -\Delta\psi \qquad (3\text{-}78)$$

или функция тока ψ принимает вид:

$$\psi = \frac{Q}{\lambda L}. \qquad (3\text{-}79)$$

Таким образом, функция тока ψ — общий поток тепла, рассчитанный на единицу теплопроводности и единицу глубины. Если ψ постоянно, тогда величина потока тепла Q постоянна и поверхности, выраженные линиями ψ_1 и ψ_2, образуют трубку тока тепла, в которой Q — постоянно.

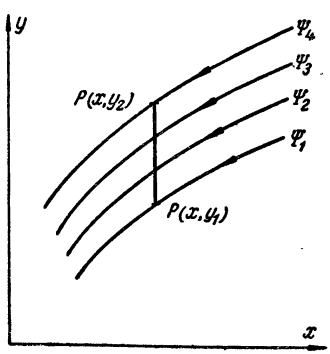


Рис. 3-24. Функция тока.

Графическое изображение потока. Изложенное в последних параграфах можно использовать при решении двухмерных стационарных задач теплопроводности, применяя способ, известный под названием графического изображения потока.

В основе этого метода лежит зарисовка от руки линий тока (линий течения) и потенциальных линий с соблюдением правил, относящихся к ортогональным линиям в криволинейных квадратах. Таким образом, вычерчивается сетка линий тока или гра-

фик потока. Далее приводится описание этого метода.

Рассмотрим параллелепипед (рис. 3-25), верхняя и нижняя поверхности которого имеют постоянные температуры соответственно t_1 и t_2, а другие поверхности полностью изолированы. Верхняя поверхность может быть совершенно исключена, чтобы образовать произвольное число проходов для теплового потока (трубок тока). Линии, изображающие изотермы, могут быть вычерчены с интервалами Δy, сохраняя при этом $\Delta y = \Delta x$ и условия перпендикулярности изотерм и линий потока тепла в точках их пересечения. Поток тепла через трубку теплового потока равен

$$\Delta Q = -\lambda L \Delta x \frac{\Delta t}{\Delta y}. \qquad (3\text{-}80)$$

Уравнение (3-80) можно записать аналогично уравнению (3-78) для условия $\Delta y = \Delta x$:

$$-\frac{\Delta Q}{\lambda L} = \Delta t. \qquad (3\text{-}81)$$

Построение должно быть продолжено до тех пор, пока поле потока H будет исчерпано. В результате имеем N_C трубок тока и N_R приростов температуры Δt. Весь поток тепла в теле, очевидно, является суммой приростов потоков тепла, обусловленной общей разностью температуры:

$$\frac{Q}{\lambda L} = \frac{N_C}{N_R} \frac{\Delta x}{\Delta y} (t_1 - t_2), \qquad (3\text{-}82)$$

где $t_1 > t_2$. При построении принималось $\Delta x = \Delta y$; отсюда

$$\frac{Q}{\lambda L} = \frac{N_C}{N_R} (t_1 - t_2). \qquad (3\text{-}83)$$

Отношение $N_C/N_R = \xi$ есть коэффициент формы[1] тела. Коэффициент формы тела — чисто геометрическая величина и может быть определен раз и навсегда для любой данной

[1] Термин «коэффициент формы» используется часто при изучении теплообмена и каждый раз имеет различное значение, которое читатель легко усвоит. Общее для всех коэффициентов формы это то, что они определяют геометрию и поэтому в каждом отдельном случае для каждого рассматриваемого тела определяются раз и навсегда.

системы. На рис. 3-25 коэффициент объема тела может быть вычислен путем подсчета и колонок и рядов

$$\xi = \frac{N_C}{N_R} = \frac{5}{6}. \qquad (3\text{-}84)$$

Легко показать, что если линии теплового потока поменять местами с изотермами (это более соответствует горизонтальному потоку тепла, чем вертикальному), коэффициент формы ξ' для этой сменной задачи является обратной величиной, определяемой уравнением (3-84):

$$\xi' = \frac{1}{\xi}.$$

Рассмотренная система была очень простой и как таковая имеет значение только в качестве иллюстрационного примера. Однако описанный метод применим не только к простейшим системам. Он часто очень полезен для быстрого получения приближенных результатов.

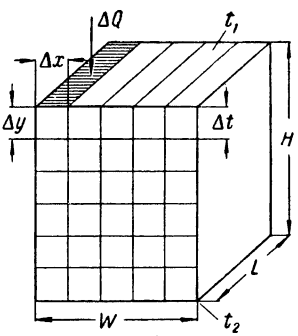


Рис. 3-25. Схема для расчета потока тепла в параллелепипеде при стационарном режиме.

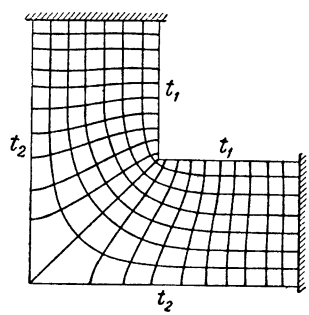


Рис. 3-26. Температурное поле и линии потока тепла в L-образном теле при стационарном режиме.

Пример 3-6. Рассмотрим распространение потока тепла в стенке канала квадратного сечения с постоянными температурами поверхностей. Поскольку канал симметричный, рассмотрим только один угол. На рис. 3-26 схематически изображены изотермы и линии теплового потока, при построении которых уделялось внимание вычерчиванию результирующих криволинейных квадратов. Коэффициент формы можно легко определить, подсчитав, что число линий теплового потока 10, а линий прироста температур 4. Поэтому коэффициент формы

$$\xi = \frac{N_C}{N_R} = \frac{20}{7} = 2{,}85$$

и поток тепла, передаваемый благодаря теплопроводности,

$$Q = 2{,}85\lambda L(t_1 - t_2).$$

Поток тепла можно вычислить, зная характеристики материала, из которого сделаны стенки канала, и падение температуры на толщине стенки[1].

Метод релаксации. Решение двух (трех) мерного уравнения теплопроводности с источником тепла или без источника тепла можно получить при помощи численного метода, разработанного Саусвеллом [Л. 16, 17, 18] и называемого методом релаксации. Этот метод применяется главным образом при решении уравнения Лапласа—Пуассона, но здесь его обсуждение связано с задачей теплопроводности.

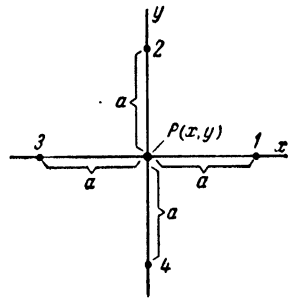


Рис. 3-27. Система координат для метода релаксации.

При стационарном режиме без внутренних источников тепла уравнение Лапласа является дифференциальным уравнением, решение которого с учетом соответствующих граничных условий определяет в результате стационарное температурное поле в теле, в котором отсутствуют источники тепла:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0. \qquad (3\text{-}85)$$

Рассмотрим точку $P(x, y)$ в теле, через которую проходит система прямоугольных координат (рис. 3-27). Другие точки в этом теле могут располагаться на небольших расстояниях от $P(x, y)$ таких, как $P(x+a, y)$, $P(x, y+a)$, $P(x-a, y)$, $P(x, y-a)$. Они для удобства соответственно пронумерованы 1, 2, 3, 4. Если температура в точке $P(x, y)$ известна, то, применяя ряды Тейлора, можно температуру в окружающих точках вычислить с любой желаемой степенью точности. Например, принимая точку $P(x, y)$ за нулевую, получим:

$$t_1 = t_0 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0 a + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_0 \frac{a^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right) \frac{a^3}{3!} + \ldots \qquad (3\text{-}86)$$

[1] Имеется ряд методов, основанных на аналогии теплопроводности с электрической проводимостью, потоком жидкости и т. д., которые можно использовать, чтобы получить графическое изображение желаемой формы или для грубого определения коэффициента формы.

Более употребительные из этих систем обсуждаются П. Дж. Шнейдером, «Теплопроводность», гл. 13 [Л. 15] *.

* Имеется русский перевод. Прим. ред.

и

$$t_3 = t_0 - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0 a + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_0 \frac{a^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_0 \frac{a^3}{3!} + \ldots \quad (3\text{-}87)$$

Если уравнения (3-86) и (3-87) объединить, то получаем

$$t_1 + t_3 = 2t_0 + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_0 a^2 + O(a^4), \quad (3\text{-}88)$$

где $O(a^4)$ указывает на остаточные члены порядка a^4.

Уравнение (3-88) может быть записано явно в членах $(\partial^2 t/\partial x^2)_0$:

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{t_1 + t_3 - 2t_0}{a^2} + O(a^4).$$

Подобные уравнения, основанные на выражении для $\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_0$, можно записать:

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{t_2 + t_4 - 2t_0}{a^2} + O(a^4).$$

Сумма этих вторых производных дает решение уравнения Лапласа с точностью порядка a^4:

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0}{a^2} = 0. \quad (3\text{-}89)$$

Решение уравнения (3-89) для температуры t_0 выражается через температуры окружающих точек в состоянии равновесия

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}. \quad (3\text{-}90)$$

Целью этого метода является установление в теле такого температурного поля, каждая точка которого удовлетворяла бы уравнению (3-90). Чтобы проделывать это систематически, определяем остаток Q_0:

$$Q_0 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 \quad (3\text{-}91)$$

и задача сводится к приведению остатков к нулю для каждой точки тела. Рассматривая рис. 3-27 опять в свете уравнения (3-91), замечаем, что изменение температуры на единицу в любой из близлежащих точек может изменять остаток Q_0 на ± 1, в то время как изменение температуры самой точки на единицу изменяет остаток Q_0 на ± 4. Это

является ключом к вычислению. На рис. 3-28 изображена модель релаксации, которой удобно пользоваться. Следующий простой пример вполне объясняет этот процесс.

Пример 3-7. В качестве примера, иллюстрирующего этот метод, рассмотрим L-образный угол. Такой угол показан на рис. 3-29. Температура на границах стенки постоянна. Начальное распределение температур предполагается соответствующим граничным условиям. Величины распределения температур показаны справа от узловых точек. Следующим шагом является подсчет остатков для каждой из узловых точек путем использования соответствующей модели релаксации, которая в этом случае является моделью для уравнения Лапласа, поскольку источники тепла отсутствуют. Остатки показаны налево от узловых точек. Воздействуя на самые большие остатки, перемещаются от точки к точке, изменяя температуры и уменьшая остатки.

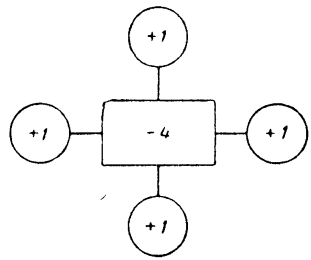


Рис. 3-28. Схема расчета методом релаксации для уравнения Лапласа.

При этом не надо стремиться точно установить температуру. Как и при любой экспериментальной работе, умение приходит с практикой. На рисунке показано несколько первичных вычислений, иллюстрирующих этот метод.

Ввиду симметрии вычисления произведены лишь для половины угла.

Если рассматриваемое нами тело имеет источники тепла, то уравнение теплопроводности принимает вид уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{Q'(x,\ y)}{\lambda}=f(x,\ y). \tag{3-92}$$

Снова используя выражения для частных производных, получаем:

$$\frac{t_1+t_2+t_3+t_4-4t_0}{a^2}+O(a^4)=f(x,\ y). \tag{3-93}$$

Остаток Q_0 в этом случае, пренебрегая членами четвертого и более высокого порядка, принимает вид:

$$Q_0=t_1+t_2+t_3+t_4-4t_0-a^2f(x,\ y). \tag{3-94}$$

В случае уравнения (3-94) модель релаксации нужно изменить, как показано на рис. 3-30, чтобы отобразить член $a^2f\ (x,\ y)$, характеризующий тепловыделение. Очевидно, что источники тепла могут быть произвольно распределены по всему телу, это распределение изображается точками при проведении вычисления. Таким образом, источник тепла является своего рода модификацией влияния изменения в нулевой точке.

Метод релаксации можно использовать и в цилиндрической системе координат; однако в этом случае уравнения, соответствующие уравне-

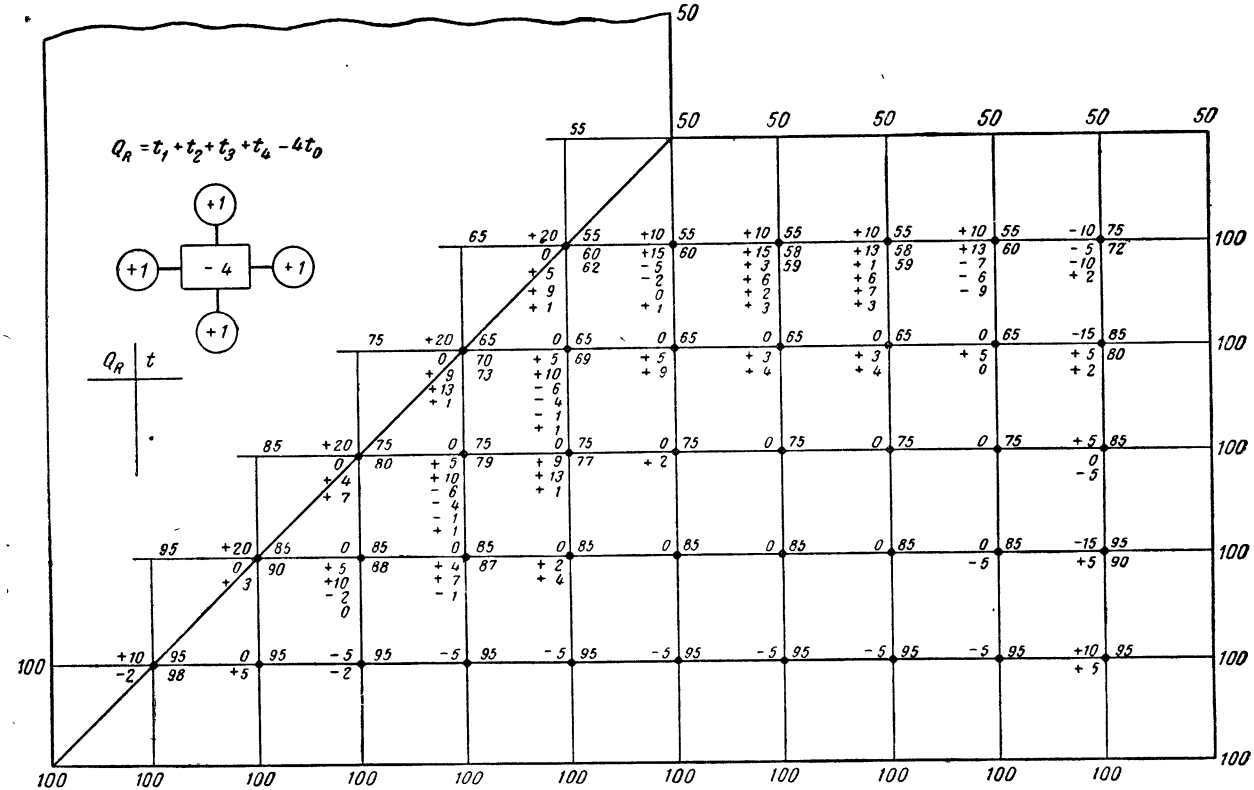


Рис. 3-29. Сетка релаксации для угла L-образной формы.

ниям (3-91) и (3-94), не так легко применить. Заменой переменных можно свести цилиндрическую систему координат к прямоугольной системе, выраженной в новых переменных. В условиях стационарного режима уравнение теплопроводности в двух измерениях r и θ принимает вид:

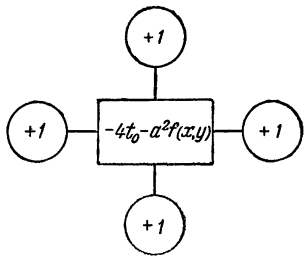


Рис. 3-30. Схема расчета методом релаксации для уравнения Лапласа—Пуассона.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2}=0. \qquad (3\text{-}95)$$

Примем $\zeta=\ln r$, $\eta=\theta$; таким образом,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial t}{\partial \zeta}.$$

Подставив эти значения в уравнение (3-95), получим:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2}=0, \qquad (3\text{-}96)$$

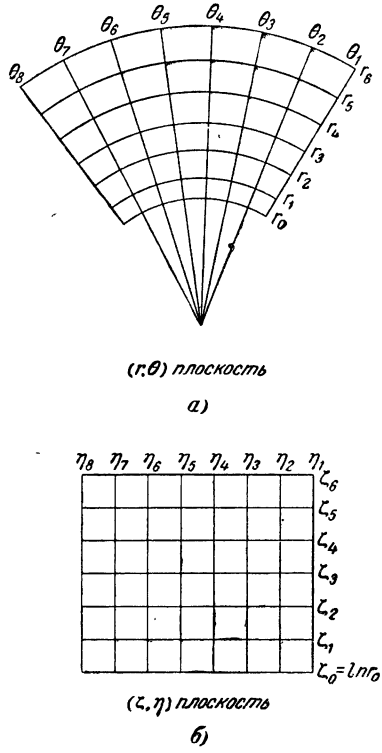


Рис. 3-31. Логарифмическое преобразование в цилиндрической системе.

а — цилиндрические координаты; *б* — труба в преобразованных координатах.

где теперь $t=t(\zeta, \eta)$. Теперь можно применить систему релаксации — уравнение (3-91). Новые граничные условия можно получить, используя соотношения $\zeta=\ln r$ и $\eta=\theta$. Полученные результаты легко изобразить графически, переходя от системы $t(\zeta, \eta)$ к системе $t(r, \theta)$.

Рассмотрим рис. 3-31. На рис. 3-31,*а* изображена часть трубы, для которой требуется определить температурное поле. На рис. 3-31,*б* изображена часть трубы, преобразованная в плоскость (ζ, η) путем замены $\zeta=\ln r$; $\eta=\theta$. Граничные условия изображаются здесь как постоянные температуры поверхности; однако если температура поверхности изменяется в зависимости от r или θ, или от r и θ вместе, то ее величина

у граничной точки будет соответствовать такой же точке преобразований в (ζ, η) плоскости. Прямоугольная сетка релаксации может быть применена непосредственно к рисунку в плоскости (ζ, η), чтобы вычислить температуры в каждой точке. Поскольку это уже установлено, величины температур для этих точек связаны через условие преобразования с точками в плоскости (r, θ) и таким образом задача решена.

ЗАДАЧИ

3-1. Напишите выражение для зависимости температурного поля от длины в коническом ребре, основание которого имеет радиус b и угол α у вершины. Температура у основания считается постоянной.

3-2. Измерения, проводимые при помощи ряда термопар, присоединенных к полубесконечному телу по направлению теплового потока, показывает, что $dt/dx<0$ и что $d^2t/dx^2<0$.

Какой вывод можно сделать на основании этих экспериментальных наблюдений?

3-3. Предложили нагревать воду при помощи двухкиловаттного нагревателя Калорда диаметром в 2,5 *мм* и длиной в 71 *см*. Нагреватель поместили (концентрически) в трубу с внутренним диаметром 1,59 *см*. Коэффициент теплообмена к потоку воды, проходящему через нагреватель 146 538 *ккал/м²·ч·град*, температура воды на выходе 60° С.

Можно ли использовать нагреватель в медной оболочке?

3-4. Труба диаметром 20,32 *см* проложена на глубине 76,2 *см* ниже поверхности земли. Температура на поверхности земли 4,4° С, температура стенки трубы 83,5° С. Определите стационарный поток тепла от трубы к поверхности земли при помощи графического изображения потока.

Сравните результаты этого измерения с результатами, полученными вычислениями.

3-5. Сколько требуется стеклянной и минеральной ваты для изоляции, чтобы температура плиты в кухне не превышала 58° С. Максимальная температура в печи поддерживалась при помощи термостатической регулировки и достигала 288° С.

3-6. Стены холодильника изолированы стеклянной ватой толщиной 7,62 *см*, которую поместили между наружной и внутренней стенками холодильника. Поверхность внутренней стенки вблизи испарителя —6,6° С. Показания тепломера, установленного на внешней стенке, 40,7 *ккал/м²·ч*; температура внешней среды 32,2° С.

Эффективна ли изоляция? Если нет, то укажите причины низкой эффективности.

3-7. Определите температурное поле при стационарном режиме в балке прямоугольной поперечной площади сечения 6,35×25,4 *мм* очень большой длины по сравнению с другими измерениями, через которую проходит ток 100 *а*.

Балка — медная, температура окружающего воздуха 18,3° С.

3-8. Вычислите теплообмен через стенку круглого цилиндра с эксцентрическим каналом. Внешний диаметр равен 20,32 *см*, а внутренний 12,7 *см* и эксцентричность 2,54 *см*. Температура внутренней поверхности равна 121° С, а внешней поверхности 30° С. Материал, из которого изготовлен цилиндр, проводящий, неизолирующий.

3-9. Завершите решение задачи, показанной на рис. 3-29.

3-10. Определить стационарное температурное поле в любой точке $P(r, \theta)$ длинного стержня радиусом R, половина поверхности которого при $0<\theta<\pi$ сохраняет температуру t_s, в то время как другая половина $\pi<\theta<2\pi$ сохраняет нулевую температуру.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

4-1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В предыдущих главах рассматривались такие системы, в которых в результате теплопроводности процессы изменения температуры во времени были завершены. Теоретически считается, что требуется значительный промежуток времени для установления стационарного потока тепла и исчезновения влияния переходных явлений на границах системы.

В этом разделе будет обсуждаться процесс нагревания или охлаждения тел, т. е. так называемые переходные процессы.

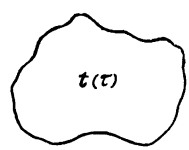


Рис. 4-1. Однородная болванка.

Твердые тела с бесконечно большой теплопроводностью. Если тело имеет очень большую теплопроводность и низкий коэффициент теплообмена, то тепловой поток к телу или от тела главным образом определяется конвективным сопротивлением и в теле либо имеют место малые градиенты температуры, либо они совсем отсутствуют, т. е. тело пространственно изотермично, температура меняется только со временем. Некоторые небольшие тела с ограниченной теплопроводностью удовлетворяют вышеупомянутым условиям. Рассмотрим небольшую болванку (рис. 4-1), которая находится в среде, имеющей равномерную температуру. В некоторый момент времени ее поместили в поток жидкости или газа, который имеет другую температуру. Задача заключается в том, чтобы определить изменение температуры со временем как функцию характеристик системы. Запишем уравнение теплового баланса для болванки:

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = -\alpha A (t - t_f). \qquad (4\text{-}1)$$

В уравнении (4-1) V — объем болванки и A — площадь поверхности. Соответствующие начальные условия $t = t_0$ при $\tau = 0$. Температура окружающего потока t_f — постоянная. Уравнение (4-1) можно записать в виде дифференциального уравнения для избыточной температуры, где $\vartheta = t - t_f$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\vartheta} = \frac{\alpha A}{\rho c V} d\tau. \tag{4-2}$$

Используя граничные условия $\tau = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$, получим решение уравнения (4-2) в следующем виде:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-(\alpha A/\rho c V)\,\tau}. \tag{4-3}$$

Ясно, что графическое изображение уравнения (4-3) в координатах $\ln \vartheta/\vartheta_0$ от τ дает семейство прямых линий с $\alpha A/\rho c V$ в качестве параметра. Уравнение (4-3) можно переписать в более удобной форме:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-(\alpha L/\lambda)\,(a\tau/L^2)}, \tag{4-4}$$

где $\alpha L/\lambda$ — критерий Био;

$a\tau/L^2$ — критерий Фурье;

a — коэффициент температуропроводности.

Соответствующий график уравнения (4-4) представляет собой зависимость $\ln \vartheta/\vartheta_0$ от $a\tau/L^2$ с $\alpha L/\lambda$ в качестве параметра (рис. 4-2).

Величина L в критериях Био и Фурье представляет собой характерный размер системы и определяется как отношение объема тела к площади его поверхности. Таким образом, для простейших геометрических форм величину L легко получить:

шар

$$L = \frac{4/3\pi r_0^3}{4\pi r_0^2} = \frac{r_0}{3},$$

цилиндр

$$L = \frac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \frac{r_0}{2} \quad l \gg r_0;$$

куб

$$L = \frac{l^3}{6l^2} = \frac{l}{6}.$$

Критерии Био и Фурье — безразмерные величины. В случае конвективного теплообмена использование их позволяет представить температурно-временную зависимость [уравнение (4-4)] для всех тел с бесконечно большой теплопроводностью одним универсальным графиком.

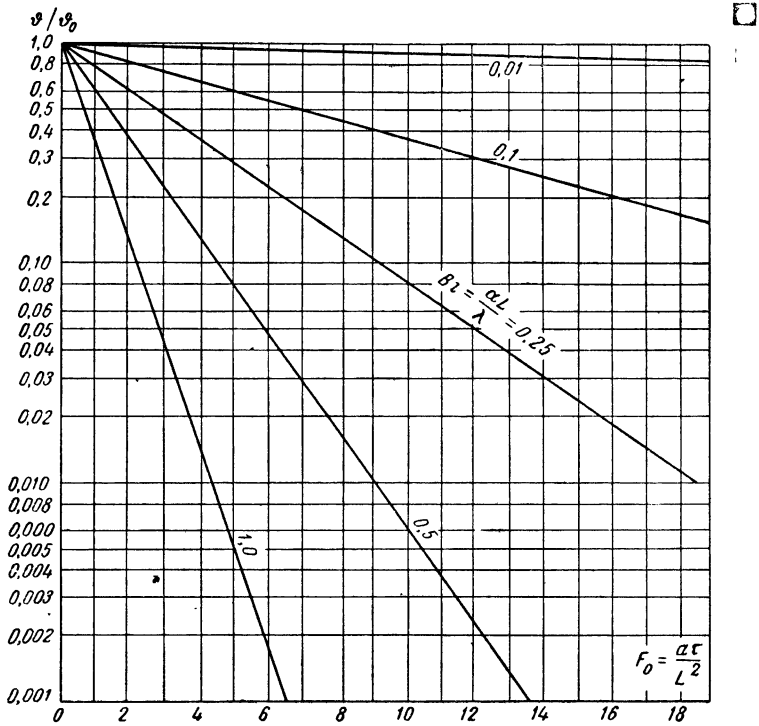


Рис. 4-2. Графики охлаждения однородной болванки.

Электрическим аналогом охлаждения болванки является разряд электрического конденсатора в цепи с линейным сопротивлением. Процесс изменения напряжения на таком конденсаторе описывается уравнением

$$\frac{E}{E_0} = e^{-\left(\frac{\tau}{RC}\right)}, \qquad (4\text{-}5)$$

где E_0 — напряжение в момент времени, равный нулю;
R — сопротивление;
C — электрическая емкость.

Эта аналогия привела к созданию многих приборов, основанных на R, C-цепях, моделирующих переходные процессы теплообмена.

Пример 4-1. При измерении переменной температуры термометром важно знать, насколько быстро термометр реагирует на изменение температуры. Полупериодом называют интервал времени, в пределах которого начальная разность между истинной температурой и показанием термометра сокращается наполовину после внезапного изменения истинной температуры. Необходимо определить этот полупериод для ртутного термометра, находящегося в потоке воздуха. Пусть ртутный шарик имеет форму цилиндра радиусом 3 *мм*. Коэффициент теплопроводности ртути $\lambda = 7{,}45$ *ккал/м·ч·град* (см. приложение). Коэффициент температуропроводности $a = 0{,}0166$ *м²/ч*, термическим сопротивлением тонкой стеклянной стенки пренебрегаем. Коэффициент теплообмена для потока воздуха $\alpha = 50$ *ккал/м²·ч·град*.

Отсюда критерий Био $\frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{50 \cdot 0{,}003}{7{,}45 \cdot 2} = 0{,}01$. Отношение t/t_0 в уравнении (4-4) равно 0,5, когда численное значение показателя степени равно 0,693. Таким образом уравнение для определения полупериода времени τ_H будет $(a\tau_H/L^2)$.

$$\left(\frac{\alpha L}{\lambda}\right) = 0{,}693.$$

Отсюда характеристическая величина $\frac{a\tau_H}{L^2} = \frac{0{,}693}{0{,}01} = 69{,}3$ и полупериод

$$\tau_H = \frac{69{,}3 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{0{,}0166 \cdot 4} = 0{,}0094 \cdot 3\,600 = 33{,}8 \text{ } сек.$$

Таким образом, можно полагать, что показания термометра правильно отражают истинное изменение температуры, если это изменение происходит более медленным темпом (для синусоидального колебания температуры найденный период должен быть в 10 раз больше [Л. 19]).

Твердые тела бесконечно большой теплоемкости. Граничные условия — функция времени. Рассмотрим болванку, изображенную на рис. 4-1, приняв, что температура потока меняется от нуля линейно со временем, т. е. температура потока определяется следующим выражением:

$$t_f = B\tau. \tag{4-6}$$

Уравнение (4-1) можно написать иначе, учитывая изменение температуры потока:

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{\alpha A}{\rho c V} t = \frac{\alpha A B}{\rho c V} \tau. \tag{4-7}$$

Решение уравнения (4-7) принимает вид:

$$t = B\left(\tau - \frac{\rho cV}{\alpha A}\right) + c_1 e^{-(\alpha A\tau/\rho cV)} \qquad (4\text{-}8)$$

Постоянная C_1 может быть оценена из начального условия, которое предполагает, что начальная температура равна нулю. Следовательно, общее решение принимает следующий вид:

$$t = B\tau - \frac{\rho cV}{\alpha A} B\left[1 - e^{-(\alpha A\tau/\rho cV)}\right]. \qquad (4\text{-}9)$$

Уравнение (4-9) графически изображено на рис. 4-3. Можно видеть, что температура плиты всегда отстает от температуры потока. Как только переходные явления исчезают, отставание становится постоянным. Это можно заключить из уравнения (4-9) для очень большого τ.

Пример 4-2. Термометр из примера 4-1 используется для того, чтобы контролировать температуру в обыкновенной кухонной плите. Нужно вычислить отставание показаний термометра при нагреве плиты со скоростью 204° С/*ч*.

Примем коэффициент теплообмена $\alpha = 9{,}8$ *ккал/м²·ч·град*. В этом случае

$$\frac{\rho cV}{\alpha A} = \frac{r_0\lambda}{2a\alpha} = \frac{0{,}003 \cdot 7{,}45}{2 \cdot 0{,}0166 \cdot 9{,}8} = 0{,}08 \text{ ч};$$

$$\Delta t = 0{,}08 \cdot 204 = 16{,}32° \text{ С}.$$

Бесконечно большая плоская пластина. Вопросы переходных процессов теплопроводности в системах с пространственным распределением температуры связаны с очень громоздкими и сложными математическими выкладками. Фурье [Л. 20] разработал знаменитый метод рядов Фурье для решения этой проблемы.

Для плиты толщиной l в направлении x и бесконечной в направлениях y и z, изолированной на поверхности $x=0$ и теряющей тепло конвекцией на поверхности $x=l$, уравнение теплопроводности при отсутствии источников тепла сводится к

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}, \qquad (4\text{-}10)$$

где ϑ — избыточная температура в любой точке тела. Изображение плиты приводится на рис. 4-4. Уравнение (4-10) можно решить для ряда граничных условий методом разделения переменных.

Принимаем в качестве решения выражение вида:

$$\vartheta = F(\tau)\, G(x),$$

где, как указано, F является функцией только τ, а G — функцией только x:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = G(x)\, F'(\tau);$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = F(\tau)\, G''(x).$$

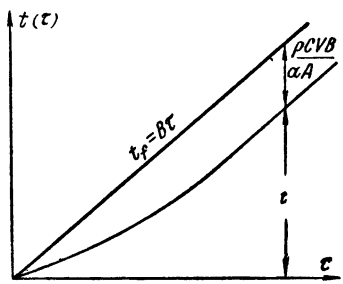


Рис. 4-3. Графики нагревания однородной болванки под воздействием линейных изменений температуры жидкости.

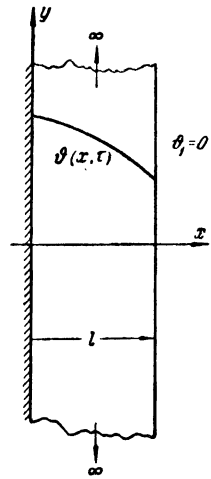


Рис. 4-4. Теплопроводность в бесконечной плите.

Подстановка этих двух величин в уравнение (4-10) приводит к выражению

$$G(x)\, F'(\tau) = aF(\tau)\, G''(x), \qquad (4\text{-}11)$$

в котором переменные разделяются:

$$\frac{1}{a}\frac{F'}{F} = \frac{G''}{G} = \pm k^2, \qquad (4\text{-}12)$$

где k — постоянная[1].

Уравнение (4-12) представляет собой два дифференциальных уравнения вместо одного уравнения (4-10), но эти уравнения являются обычными линейными уравнениями и поэтому поддаются решению. Эти два уравнения можно написать так:

$$F' \pm k^2 aF = 0; \qquad (4\text{-}13)$$

$$G'' \pm k^2 G = 0. \qquad (4\text{-}14)$$

[1] k называется собственной величиной.

Решение уравнения (4-13) дает:

$$F = C_1 e^{\pm k^2 a\tau}$$

и, поскольку мы знаем, что избыточная температура уменьшается со временем, мы принимаем отрицательный знак.

Решение уравнения (4-14) с отрицательным k^2 дает:

$$G = C_2 e^{+ikx} + C_3 e^{-ikx}.$$

Полное решение, конечно, $\vartheta = F(\tau)\,G(x)$, поэтому

$$\vartheta = e^{-k^2 a\tau}\,(A\cos kx + B\sin kx). \tag{4-15}$$

Граничные и начальные условия следующие:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad x = 0; \tag{4-16}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{dx} = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta_l; \quad x = l; \tag{4-16а}$$

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \tau = 0. \tag{4-16б}$$

По существу нужно определить три постоянные A, B и k. Соответственно имеются три условия для их определения.

Уравнение (4-16) требует, чтобы производная $\partial\vartheta/\partial x = 0$ при $x = 0$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = e^{-k^2 a\tau}(-A_1 k\sin kx + Bk\cos kx). \tag{4-17}$$

Из уравнения (4-17) видно, что B должно быть равно нулю, для того чтобы температурный градиент $(\partial\vartheta/\partial x)_{x=0} = 0$. Получаем решение

$$\vartheta = Ae^{-k^2 a\tau}\cos kx. \tag{4-18}$$

Второе граничное условие, уравнение (4-16а), можно использовать, чтобы определить k:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=l} = -A_1 e^{-k^2 a\tau} k\sin kl = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta_l. \tag{4-19}$$

Из уравнения (4-18)

$$\vartheta_l = Ae^{-k^2 a\tau}\cos kl. \tag{4-20}$$

Объединяя уравнения (4-19) и (4-20), получаем:

$$\operatorname{ctg} kl = \frac{\lambda k}{\alpha}. \tag{4-21}$$

Уравнение (4-21) служит для определения величины k, которую можно получить, построив график каждой части уравнения в зависимости от k, как показано на рис. 4-5.

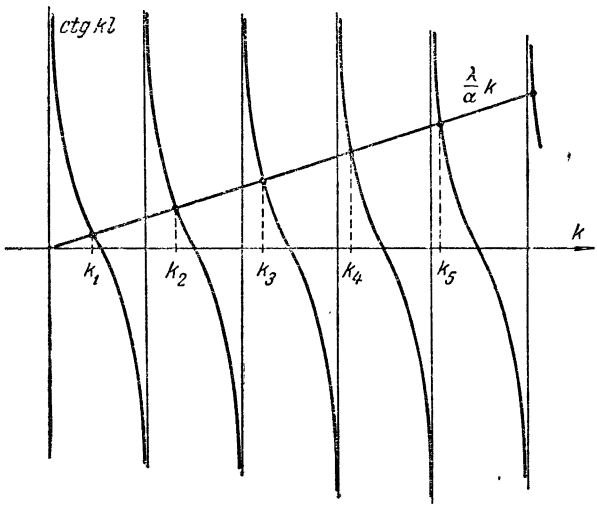


Рис. 4-5. Определение величин собственных значений для задачи теплопроводности бесконечной плоской плиты.

Из пересечений кривых двух функций можно получить столько значений k, сколько необходимо.

Температурное поле

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 a\tau} \cos k_n x, \tag{4-22}$$

где теперь можно определить величину A_n для каждого k_n. Для этой цели используется начальное условие.

Допустим, что ϑ_0 можно разложить в бесконечный ряд:

$$\vartheta_0 = A_1 \cos k_1 x + A_2 \cos k_2 x + A_3 \cos k_3 x + \ldots \tag{4-23}$$

Если уравнение (4-23) умножить на $\cos k_n x\,dx$ и проинтегрировать от $x=0$ до $x=l$ (полагая, что интегрирование допустимо), то можно показать, что

$$\int_0^l A_m \cos k_n x \cos k_m x\,dx = 0,$$

если $m \neq n$. Оставшиеся значения

$$\int_0^l \vartheta_0 \cos k_n x\,dx = \int_0^l A_n \cos^2 k_n x\,dx,$$

дают возможность получить постоянные A_n.

Следовательно,

$$A_n = \frac{2\vartheta_0 \sin k_n l}{k_n l + \sin k_n l \cos k_n l}. \qquad (4\text{-}24)$$

Теперь для удобства предположим, что $k_n = \delta_n / l$ и, таким образом, получим окончательную формулу распределения температуры:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (a\tau/l^2)} \frac{2\vartheta_0 \sin \delta_n \cos (\delta_n x/l)}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n}. \qquad (4\text{-}25)$$

Тепловые потери для полубесконечной плиты получаем из закона теплопроводности Фурье

$$dQ_i = -\lambda A \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=l} d\tau;$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{2\vartheta_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (a\tau/l^2)} \frac{\delta_n \sin^2 \delta_n}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n}. \qquad (4\text{-}26)$$

Если уравнение (4-26) подставить в формулу теплопроводности закона Фурье, то

$$\frac{Q_i}{A} = \frac{2\lambda\vartheta_0}{l} \int_0^{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (a\tau/l^2)} \frac{\delta_n \sin^2 \delta_n\,d\tau}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n}. \qquad (4\text{-}27)$$

Интегрирование уравнения (4-27) дает тепловой поток на единицу площади:

$$\frac{Q_i}{A}=\frac{2\lambda l}{a}\vartheta_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\delta_n\left[1-e^{-\delta_n^2(a\tau/l^2)}\right]}{\delta_n^2+\delta_n\sin\delta_n\cos\delta_n}. \qquad (4\text{-}28)$$

Уравнение (4-21), содержащее характеристические корни k_n, можно записать через δ_n:

$$\frac{\alpha l}{\lambda}=\delta_n\operatorname{tg}\delta_n. \qquad (4\text{-}29)$$

Отсюда следует, что $\delta_n=\Phi\left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)$.

Результаты решений уравнений (4-26), (4-28) и (4-29) можно графически изобразить в виде функций

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0}=f_1\left(\frac{\alpha l}{\lambda},\ \frac{a\tau}{l^2},\ \frac{x}{l}\right);$$

$$\frac{\vartheta_c}{\vartheta_0}=f_2\left(\frac{\alpha l}{\lambda},\ \frac{a\tau}{l^2},\ 0\right);$$

$$\frac{\vartheta_l}{\vartheta_0}=f_3\left(\frac{\alpha l}{\lambda},\ \frac{a\tau}{l^2},\ 1\right);$$

$$\frac{Q_i}{Q_0}=f_4\left(\frac{\alpha l}{\lambda},\ \frac{a\tau}{l^2}\right).$$

Эти результаты были вычислены и представлены в виде графиков изменения Гребером [Л. 21], Гарней — Лурье [Л. 22], Хайслером [Л. 23] и другими. Аналогичные решения были получены для цилиндра и шара. Результаты этих трех решений графически изображены на рис. 4-6—4-8 в виде номограмм для ограниченного диапазона переменных.

Решения двух- и трехмерных задач. Чаще всего задачи нестационарной теплопроводности затрагивают ограниченные тела, такие как прямоугольные параллелепипеды или короткие цилиндры. Те решения, которые уже подверглись обсуждению, в этих случаях нельзя применить непосредственно. Однако метод А. Б. Ньюманна [Л. 24] дает возможность распространить метод решения одномерных задач, для которых решения существуют, на двух- и трехмерные. Метод для двухмерных задач может быть легко использован при решении трехмерной задачи и заключается в следующем.

Рассмотрим длинный прямоугольный брус, изображенный в разрезе, на рис. 4-9. Теплообмен конвекцией имеет место на внешних поверхностях бруска, при этом коэффициент теплообмена α_1 может быть повсюду постоянным или равным на противоположных сторонах.

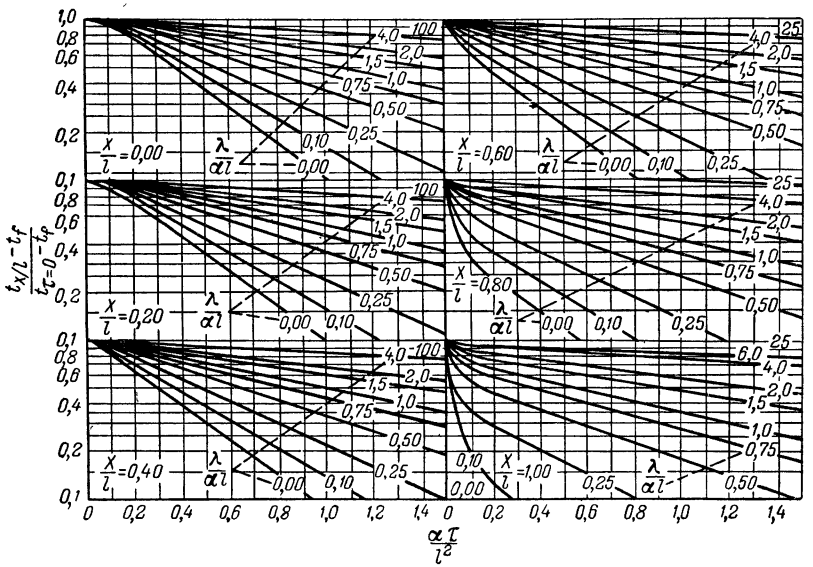


Рис. 4-6. Нестационарная теплопроводность в плите [Л. 321].

Поскольку система симметрична, следует рассмотреть только одну четвертую часть бруска.

Дифференциальное уравнение для системы:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right). \qquad (4\text{-}30)$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=0, \quad x=0;$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=0, \quad y=0;$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=A}=(\alpha\vartheta)_A, \quad x=A;$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_{y=B}=(\alpha\vartheta)_B, \quad y=B.$$

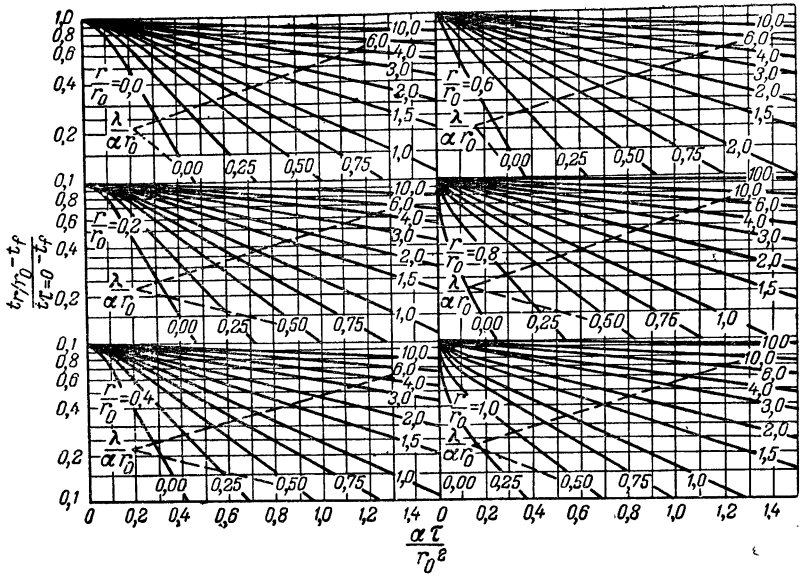


Рис. 4-7. Нестационарная теплопроводность в цилиндре [Л. 322].

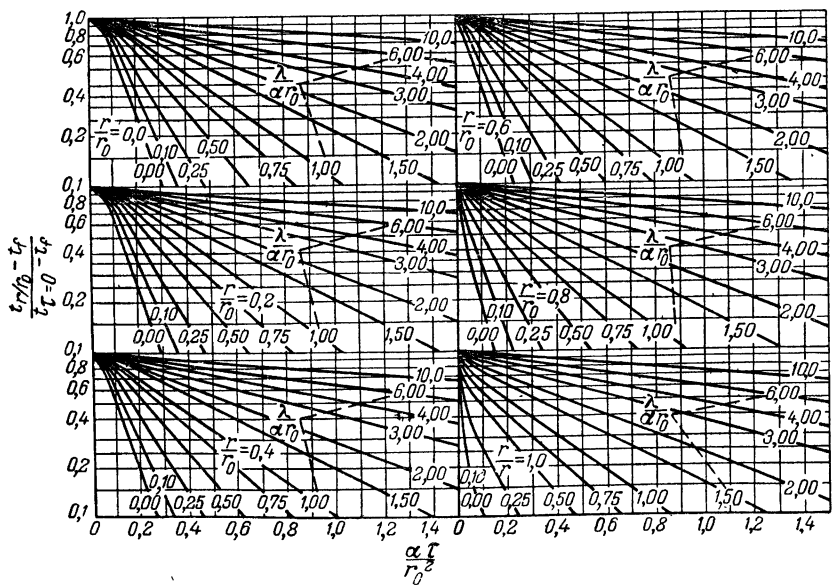


Рис. 4-8. Нестационарная теплопроводность в шаре [Л. 323].

Уравнение (4-30) и граничные условия становятся безразмерными, если мы полагаем:

$$x' = \frac{x}{A} \quad y' = \frac{y}{B} \quad \tau'_x = \frac{a\tau}{A^2} \quad \tau'_y = \frac{a\tau}{B^2} \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$$

и учитываем тот факт, что безразмерные отрезки времени есть критерии Фурье.

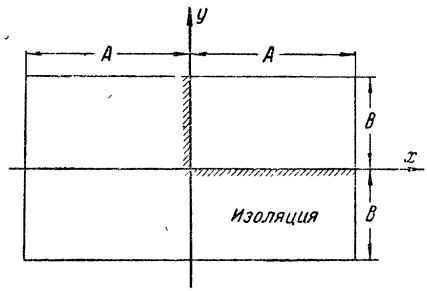


Рис. 4-9. Двухмерный поток тепла в бесконечном стержне.

Подстановка приводит к следующему:

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial \tau'_x} + \left(\frac{A}{B}\right)^2 \frac{\partial \vartheta'}{\partial \tau'_y} = \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x'^2} + \left(\frac{A}{B}\right)^2 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial y'^2}; \qquad (4\text{-}31)$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} = 0, \quad x' = 0;$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial y'} = 0, \quad y' = 0;$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} = \frac{\alpha A}{\lambda} \vartheta', \quad x' = 1;$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial y'} = \frac{\alpha B}{\lambda} \vartheta', \quad y' = 1.$$

Решение предполагается получить в виде $\vartheta' = \vartheta'_x \times \vartheta'_y$, где

$$\vartheta'_x = f_1\left(x', \frac{a\tau}{A^2}, \frac{\alpha A}{\lambda}\right);$$

$$\vartheta'_y = f_2\left(y', \frac{a\tau}{B^2}, \frac{\alpha B}{\lambda}\right).$$

Подстановка принятого вида решения в уравнение (4-31) дает:

$$\frac{1}{\vartheta'_x}\frac{\partial\vartheta'_x}{\partial\tau'_x}+\left(\frac{A}{B}\right)^2\frac{1}{\vartheta'_y}\frac{\partial\vartheta'_y}{\partial\tau'_y}=$$

$$=\frac{1}{\vartheta'_x}\frac{\partial^2\vartheta'_x}{\partial x'^2}+\left(\frac{A}{B}\right)^2\frac{1}{\vartheta'_y}\frac{\partial^2\vartheta'_y}{\partial y'^2}. \qquad (4\text{-}32)$$

Уравнение (4-32) имеет форму

$$\Phi_x(x,\ \tau)=\Phi_y(y,\ \tau)=0^*.$$

Таким образом, имеем два уравнения:

$$\frac{\partial\vartheta'_x}{\partial\tau'_x}=\frac{\partial^2\vartheta'_x}{\partial x'^2}\quad\text{и}\quad\frac{\partial\vartheta'_y}{\partial\tau'_y}=\frac{\partial^2\vartheta'_y}{\partial y'^2}. \qquad (4\text{-}33)$$

Уравнения (4-33) — это безразмерная форма уравнения (4-10), которая имеет решения, подобные решениям уравнений (4-25) и (4-28).

Итак, ясно, что произведение решений для двух полубесконечных пластин толщиной $2A$ и $2B$ дает решение для бесконечного бруска с поперечным сечением $2A\times2B$.

Легко убедиться, что параллелепипед с измерениями $2A\times2B\times2C$ имеет решение, которое является произведением решений для трех полубесконечных плит, с измерениями соответственно $2A$, $2B$, $2C$. На рис. 4-10 приводятся кривые для тел различных форм, которые вначале имели избыточную температуру ϑ_0 и поверхности которых затем были мгновенно охлаждены до $\vartheta=0$ [Л. 25]. Многие другие решения приводятся в книгах Карслоу и Егера [Л. 26], Шнейдера [Л. 27] и Мак Адамса [Л. 28].

Пример 4-3. При термической обработке стальной болванки в форме прямоугольного параллелепипеда с измерениями $0{,}3\times0{,}3\times0{,}6$ *м* требуется, чтобы все части болванки нагревались до 370° С, но так, чтобы температура любой части болванки не превышала 398° С. Для того чтобы создать эти условия, болванку при начальной температуре в 21° С помещают в печь, в которой происходит циркуляция инертной атмосферы при 398° С, вследствие чего коэффициент теплообмена равен 788,6 *ккал/м² · ч · град*. Как долго должна болванка находиться в печи, чтобы температура ее центра достигла 370° С.

Для того чтобы использовать уже имеющиеся решения, применяемые только для случая твердых тел с равномерным начальным распре-

---

* По условию необходимо, чтобы эти две величины были равны постоянной. Однако любое уравнение должно быть справедливо при отсутствии другого, поэтому постоянная должна быть равна нулю.

делением температуры, которые в момент времени, равный нулю, погрузили в жидкость с нулевой температурой, мы должны решать задачу с болванкой таким же образом. Это сопровождается изменением граничных условий, причем 398° С берем за нулевую температуру. Это приводит к появлению эквивалентной задачи, из условия которой вытекает, что первоначальная температура болванки должна быть 398—21=377° С;

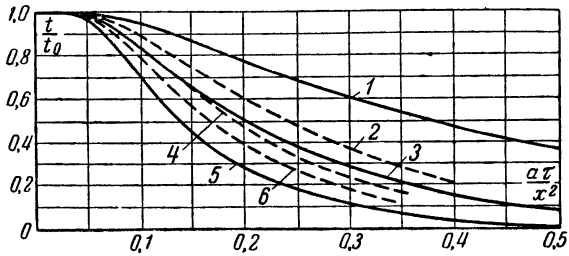


Рис. 4-10. Распределение температур по центральным осям тел различной формы в процессе охлаждения [Л. 324].

1—плита; *2*—цилиндр квадратного сечения бесконечной длины; *3*—цилиндр круглого сечения бесконечной длины; *4*—куб; *5*—шар; *6*—цилиндр круглого сечения, длина равна диаметру.

болванка погружена в жидкость с нулевой температурой в момент времени, равный нулю, причем теперь надо вычислить время, которое необходимо, чтобы температура в центре болванки достигла 398—370=28° С. Из приложения находим $\lambda=37{,}2$ *ккал/м·ч·град* и коэффициент температуропроводности $a=0{,}053$ *м²/ч*.

На основании решения произведение Ньюмана равно

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)_A\left(\frac{t}{t_0}\right)_B\left(\frac{t}{t_0}\right)_C=\frac{t}{t_0}=\frac{28}{377}=0{,}074.$$

Поскольку $A=B=0{,}3$ *м* и $C=0{,}6$ *м*, вышеприведенное выражение принимает вид:

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)_A^2\left(\frac{t}{t_0}\right)_C=0{,}074;$$

$$\frac{\alpha A}{\lambda}=\frac{\alpha B}{\lambda}=\frac{488{,}6\cdot 0{,}3}{37{,}2}=3{,}9 \text{ и } \frac{\alpha C}{\lambda}=\frac{488{,}6\cdot 0{,}6}{37{,}2}=7{,}8 \text{ (а)}.$$

Эту задачу можно решить методом последовательных приближений. Берем время, равное τ, вычисляем две величины $a\tau/A^2$ и $a\tau/C^2$ и используем их вместе с величинами $\alpha A/\lambda$ и $\alpha C/\lambda$, чтобы определить $\left(\frac{t}{t_0}\right)_A$ и $\left(\frac{t}{t_0}\right)_C$ из графика для $x/l=0$, изображенного на рис. 4-6. Эти величины подставляем в вышеприведенное выражение (а). Процесс повторяется вплоть до тех пор, пока не получим удовлетворительное значе-

ние для (а). Время, взятое для этого значения, — время, за которое температура в центре болванки повышается до 370° С.

Приведем результаты, полученные после нескольких попыток, допустим, что $\tau = 1{,}53$ *ч*:

$$\frac{\alpha\tau}{A^2} = \frac{0{,}053 \cdot 1{,}53}{0{,}09} = 0{,}901; \quad \frac{\lambda}{\alpha A} = 0{,}25;$$

$$\frac{\alpha\tau}{C^2} = \frac{0{,}053 \cdot 1{,}53}{0{,}36} = 0{,}225; \quad \frac{\lambda}{\alpha C} = 0{,}125.$$

Из рис. 4-6 для $x/l = 0$ (центр каждой плиты) находим значения параметров

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)_A = 0{,}302;$$

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)_C = 0{,}805.$$

Таким образом, $(0{,}302)^2 (0{,}805) = 0{,}0735$, т. е. время, необходимое для того, чтобы температура в центре болванки достигала 370° С в условиях, поставленных задачей $\tau = 1{,}53$ *ч*.

Неограниченное твердое тело. Рассмотрим характер распределения температуры в твердом теле для $\tau > 0$, если при $\tau = 0$ температурное поле описывается выражением $t = f(x)$. Подлежит решению уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{4-34}$$

Рассмотрим выражение

$$t = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-x^2/4a\tau}, \tag{4-35}$$

которое продифференцировав по τ один раз и по x — дважды и подставив в уравнение (4-34), убедимся, что оно полностью удовлетворяет уравнению.

Выражение (4-35) можно записать в слегка измененном виде, которое все еще является решением дифференциального уравнения:

$$t = \frac{f(\xi)}{2\sqrt{\pi a \tau}} e^{-(x-\xi)^2/4a\tau} d\xi, \tag{4-35а}$$

где ξ — параметр. Это выражение имеет то свойство, что оно везде равно нулю в момент времени, равный нулю, за исключением случая, когда $x = \xi$, где оно конечное. При возрастающих значениях τ температурное поле по про-

странственной координате x такое, как показано на рис. 4-11. Уравнение (4-35а) можно рассматривать с физической точки зрения как температуру мгновенного плоского источника тепла, в момент времени, равный нулю, расположенного в точке $x=\xi$. Тогда температура в любой точке x является результатом действия источника, распо-

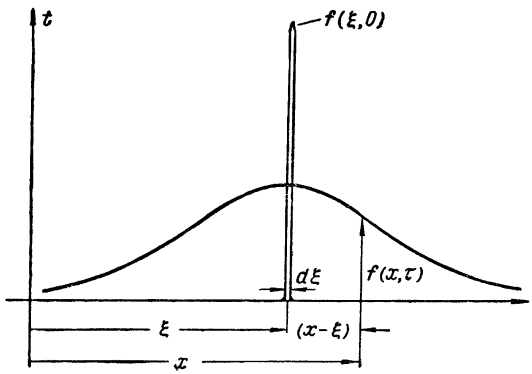


Рис. 4-11. Мгновенный источник тепла и последующее распределение температуры в бесконечном твердом теле.

ложенного в точке ξ. Мощность источника равна $f(\xi)$, а количество тепла, выделенного единицей площади плоскости, равно $f(\xi)\,\rho\,C$, т. е. $f(\xi)$ — температура, до которой могла бы подняться температура объема (единица площади$\times$ $\times\delta\xi$), под воздействием тепла, выделенного источником.

Поскольку уравнение теплопроводности линейное, сумма любого числа частных решений также является решением; отсюда

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/4a\tau}\,d\xi. \qquad (4\text{-}36)$$

Если в решении (4-36) произвести замену переменной

$$\xi=x+\beta\sqrt{4a\tau},$$

тогда

$$t(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\beta\sqrt{4a\tau})\,e^{-\beta^2}\sqrt{4a\tau}\,d\beta$$

или

$$t(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\beta\sqrt{4a\tau})\,e^{-\beta^2}d\beta.$$

Если в вышеприведенном уравнении $\tau=0$, то $f(x+\beta\sqrt{4a\tau})=f(x)$, поэтому

$$t(x,0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}f(x)\int_{0}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta=f(x).$$

Таким образом, решение (4-35а) удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию и, следовательно, является решением задачи.

Полубесконечное твердое тело. Полубесконечным твердым телом может быть тело, ограниченное плоскостью

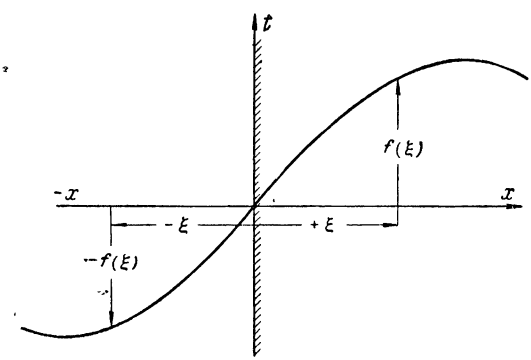


Рис. 4-12. Модель распределения температуры для полубесконечного твердого тела.

$x=0$ и стремящееся к бесконечности в направлении положительного x. Предположим, что тело имеет температуру $t=f(x)$ в момент времени, равный нулю. Температура поверхности равна нулю для $\tau\geqslant 0$. Температурное поле для этого тела можно определить с помощью решения для бесконечного тела [уравнение (4-36)], если продолжить твердое тело в направлении отрицательных x и начальное распределение температуры принять равным $f(\xi)$, а

плоскость $x=0$ останется при нулевой температуре (рис. 4-12). Таким образом, из решения (4-36)

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\left\{\int_0^{\infty} f(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/4a\tau}\,d\xi+\int_{-\infty}^{0}\left[-f(-\xi)\right]e^{-(x-\xi)^2/4a\tau}d\xi\right\}$$

или, переписав, получим

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_0^{\infty} f(\xi)\left[e^{-(x-\xi)^2/4a\tau}-e^{-(x+\xi)^2/4a\tau}\right]d\xi. \qquad (4\text{-}37)$$

Когда начальная температура t_0 постоянна, решение (4-37) можно упростить подстановкой вместо первого члена в интеграле $\xi=x+2\beta\sqrt{a\tau}$ и вместо второго члена $\xi=-x+2\beta\sqrt{a\tau}$. Таким образом, получаем:

$$t=\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{a\tau}}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta-\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{a\tau}}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta=$$

$$=\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{a\tau}}^{x/2\sqrt{a\tau}} e^{-\beta^2}d\beta=\frac{2t_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{a\tau}} e^{-\beta^2}d\beta. \qquad (4\text{-}38)$$

Определенный интеграл в решении (4-38) табулирован, краткое табулирование приводится в табл. 4-1.

Если определенный интеграл в решении (4-38) обозначить как

$$\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z} e^{-\beta^2}d\beta,$$

тогда решение задачи для полубесконечного твердого тела, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре и начальная температура которого t_0, дается выражением

$$\frac{t}{t_0}=\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}. \qquad (4\text{-}39)$$

Теплоотдача с поверхности $x=0$ определяется как

$$\frac{Q}{A}=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{\lambda t_0}{\sqrt{\pi a\tau}}. \qquad (4\text{-}40)$$

Решение (4-36) можно применить к случаю, когда два листа тяжелого материала сварены вместе заливанием между ними расплавленного металла.

Таблица 4-1

Функция ошибок или интеграл ошибок [Л. 29]

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\beta^2} d\beta$$

z	erf z	z	erf z	z	erf z	z	erf z
0,00	0,00000	0,66	0,64938	1,30	0,93401	1,94	0,99392
0,02	0,02256	0,68	0,66378	1,32	0,93807	1,96	0,99443
0,04	0,04511	0,70	0,67780	1,34	0,94191	1,98	0,99489
0,06	0,06762	0,72	0,69143	1,36	0,94556	2,00	0,99532
0,08	0,09008	0,74	0,70468	1,38	0,94902	2,05	0,99626
0,10	0,11246	0,76	0,71754	1,40	0,95229	2,10	0,99702
0,12	0,13476	0,78	0,73001	1,42	0,95538	2,15	0,99764
0,14	0,15695	0,80	0,74210	1,44	0,95830	2,20	0,99814
0,16	0,17901	0,82	0,75381	1,46	0,96105	2,25	0,99854
0,18	0,20094	0,84	0,76514	1,48	0,96365	2,30	0,99886
0,20	0,22270	0,86	0,77610	1,50	0,96611	2,35	0,9991107
0,22	0,24430	0,88	0,78669	1,52	0,96841	2,40	0,9993115
0,24	0,26570	0,90	0,79691	1,54	0,97059	2,50	0,9995930
0,26	0,28690	0,92	0,80677	1,56	0,97263	2,60	0,9997640
0,28	0,30788	0,94	0,81627	1,58	0,97455	2,70	0,9998657

z	erf z	z	erf z	z	erf z	z	erf z
0,30	0,32863	0,96	0,82542	1,60	0,97635	2,80	0,9999250
0,32	0,34913	0,98	0,83423	1,62	0,97804	2,90	0,9999589
0,34	0,36936	1,00	0,84270	1,64	0,97962	3,00	0,9999779
0,36	0,38933	1,02	0,85084	1,66	0,98110	3,10	0,9999884
0,38	0,40901	1,04	0,85865	1,68	0,98249	3,20	0,9999940
0,40	0,42839	1,06	0,86614	1,70	0,98379	3,30	0,9999969
0,42	0,44747	1,08	0,87333	1,72	0,98500	3,40	0,9999985
0,44	0,46623	1,10	0,88020	1,74	0,98613	3,50	0,99999925691
0,46	0,48466	1,12	0,88679	1,76	0,98719	3,60	0,99999964414
0,48	0,50275	1,14	0,89308	1,78	0,98817	3,70	0,99999983285
0,50	0,52050	1,16	0,89910	1,80	0,98909	3,80	0,99999992300
0,52	0,53790	1,18	0,90484	1,82	0,98994	3,90	0,99999996521
0,54	0,55494	1,20	0,91031	1,84	0,99074	4,00	0,99999998458
0,56	0,57162	1,22	0,91553	1,86	0,99147	4,20	0,99999999714
0,58	0,58792	1,24	0,92051	1,88	0,99216	4,40	0,99999999951
0,60	0,60386	1,26	0,92524	1,90	0,99279	4,60	0,99999999992
0,62	0,61941	1,28	0,92973	1,92	0,99338	4,80	0,99999999999
0,64	0,63459						1,00

Если предположить, что не имеется никаких осложнений, обусловленных фазовыми изменениями, и что поверхность листов теряет тепло значительно медленнее, чем то тепло, которое притекает к металлу, благодаря теплопроводности, задачу можно идеализировать введением неко-

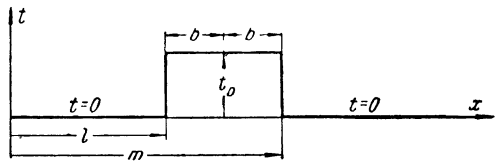


Рис. 4-13. Начальное распределение температуры при сварке двух листов.

торого начального распределения температуры, как показано на рис. 4-13. Это температурное поле показывает, что $t=0$ для $x<l$ и $x>m$, $t=t_0$ для $l<x<m$. Решение можно написать, если уравнение (4-36) записать по частям. Интеграл от l до m является единственным участком, который дает добавление:

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\int_{l}^{m} t_0 e^{-(x-\xi)^2/4a\tau}\,d\xi. \qquad (4\text{-}41)$$

Производя замену переменной, как и прежде,

$$t=\frac{t_0}{\sqrt{\pi}}\int_{(l-x)/2\sqrt{a\tau}}^{(m-x)/2\sqrt{a\tau}} e^{-\beta^2}d\beta$$

или, переписывая в символах функции ошибок, получаем:

$$t=\frac{t_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{m-x}{2\sqrt{a\tau}}-\operatorname{erf}\frac{l-x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \qquad (4\text{-}42)$$

Решение (4-42) является адекватным решением, но если $x=0$ равноотстоит от l и m, $b=(m-l)/2$; тогда решение (4-42) выражается через b следующим образом:

$$t=\frac{t_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{b-x}{2\sqrt{a\tau}}+\operatorname{erf}\frac{b+x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \qquad (4\text{-}43)$$

Графический метод Шмидта. Во многих случаях быстрое решение для полубесконечного тела и плиты можно получить, если применить приближенный графиче-

ский метод Шмидта [Л. 30]. Уравнение теплопроводности можно преобразовать в уравнение в конечных разностях путем деления времени на интервалы $\Delta\tau$ и толщины (глубины) стенки на интервалы Δx с последующим рассмотрением изменений температуры в этих интервалах (рис. 4-14). Уравнение (4-34) в конечных разностях имеет вид:

$$\frac{\Delta_\tau t}{\Delta\tau} = a\frac{\Delta_x^2 t}{(\Delta x)^2}. \qquad (4\text{-}44)$$

Индексы у символов разности указывают, что либо время τ, либо координата x являются переменными при нахождении разности Δt. Интервалы координаты и времени необходимо по порядку занумеровать. Так, например, n (рис. 4-14) можно считать номером какого-либо пространственного интервала в плите, а k — номером какого-либо момента времени.

Основываясь на этом, величину $\Delta_\tau t$ можно выразить таким образом:

$$\Delta_\tau t = t_{n,k+1} - t_{n,k},$$

а также величину $\Delta_x t = t_{n+1,k} - t_{n,k}$.

Выражение $\Delta_x^2 t$ есть разность между двумя последующими разностями, а именно:

$$\Delta_x^2 t = (t_{n+1,k} - t_{n,k}) - (t_{n,k} - t_{n-1,k}) =$$
$$= t_{n+1,k} - 2t_{n,k} + t_{n-1,k}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4-44) дает:

$$t_{n,k+1} - t_{n,k} = a\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}(t_{n+1,k} - 2t_{n,k} + t_{n-1,k}). \qquad (4\text{-}45)$$

При помощи этого уравнения можно определить температурное поле в стене в $(k+1)$-й интервал времени, если распределение температур известно для (k)-го интервала времени. Исходя из известного начального распределения температур, последовательным применением этого уравнения можно постепенно установить изменение температурного поля. Вместо аналитических расчетов можно использовать графический метод решения, иллюстрируемый рис. 4-14. На этом рисунке показана кривая распределения температуры t_k в k-й интервал времени. Соединим прямой две точки температурного поля, разделенные двумя интер-

валами координаты Δx, например точку $t_{n-1,k}$ на ординате $(n-1)$ с точкой $t_{n+1,k}$ на ординате $(n+1)$ (рис. 4-14).

Отрезок прямой пересекает ординату в точке A. Этот отрезок имеет величину

$$l = \frac{t_{n-1,k} + t_{n+1,k}}{2} - t_{n,k} = \frac{1}{2}(t_{n+1,k} - 2t_{n,k} + t_{n-1,k}). \tag{4-46}$$

Это уравнение весьма напоминает разность температур, выраженную правой частью уравнения (4-45); единственное отличие одного выражения от другого заключается лишь в том, что вместо коэффициента $^1/_2$ в выражении

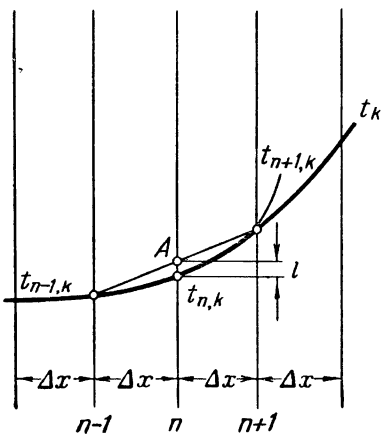


Рис. 4-14. Графический метод определения температурного поля плоской стенки при нестационарном режиме по Шмидту.

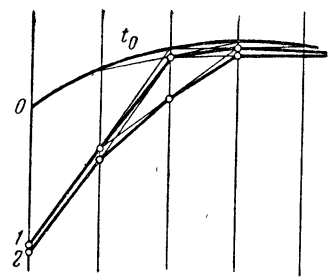


Рис. 4-15. Графический метод определения температурного поля плоской стенки при нестационарном режиме по Шмидту.

(4-46) в уравнении (4-45) имеется множитель $a\Delta\tau/\Delta x^2$. Однако мы всегда можем подобрать величину интервала времени $\Delta\tau$ относительно произвольно избираемого интервала Δx таким образом, чтобы удовлетворялось условие $a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}$. Методом, показанным на рис. 4-14, находим точку A температурного поля, которая соответствует температуре $(k+1)$-го интервала времени, равного

$$\Delta\tau = \frac{(\Delta x)^2}{2a}.$$

Соединяя другие точки температурной кривой, мы можем получить все точки температурного поля для $(k+1)$-го интервала времени и, таким образом, определить все температурное поле, пользуясь лишь этим методом. Чтобы иметь возможность применить описанный графический метод решения, необходимо знать распределение температур в стенке для какого-либо определенного момента времени. Если, кроме того, известно изменение температуры поверх-

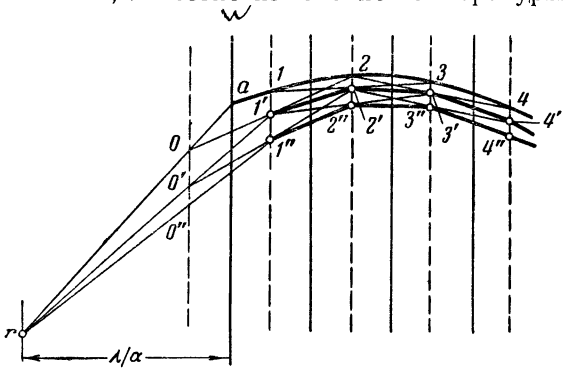


Рис. 4-16. Графический метод определения температурного поля плоской стенки и пограничного слоя при нестационарном режиме по Шмидту.

ности во времени, то распределение температур в стенке можно изобразить так, как показано на рис. 4-15. Здесь даны температура t_0 для момента времени $\tau=0$ и температура поверхности (точки *0*, *1*, *2* и т. д.) для последовательных интервалов времени. Однако чаще известны лишь температура t_f жидкости, омывающей стенку, и коэффициент теплообмена на ее поверхности. Поэтому деление на слои лучше производить методом, показанным на рис. 4-16. В этом случае градиент температур на поверхности стенки определяется для каждого момента из граничного условия

$$-\lambda \frac{dt}{dx} = \alpha (t - t_f).$$

Графически это означает, что касательная к температурной кривой в точке, лежащей на поверхности, должна проходить через направляющую точку, расстояние которой от стенки равно λ/α и ордината которой равна температуре жидкости. Эта зависимость уже была изображена ранее.

Здесь она может быть использована следующим образом. Продолжаем кривую начального распределения температур *1*, *2*, *3*, ... (рис. 4-16) до точки пересечения прямой (*r*, *a*) с поверхностью стенки и соединяем, как описывалось выше, точку *0* с точкой *2*, точку *1* с точкой *3* и т. д. отрезками пря-

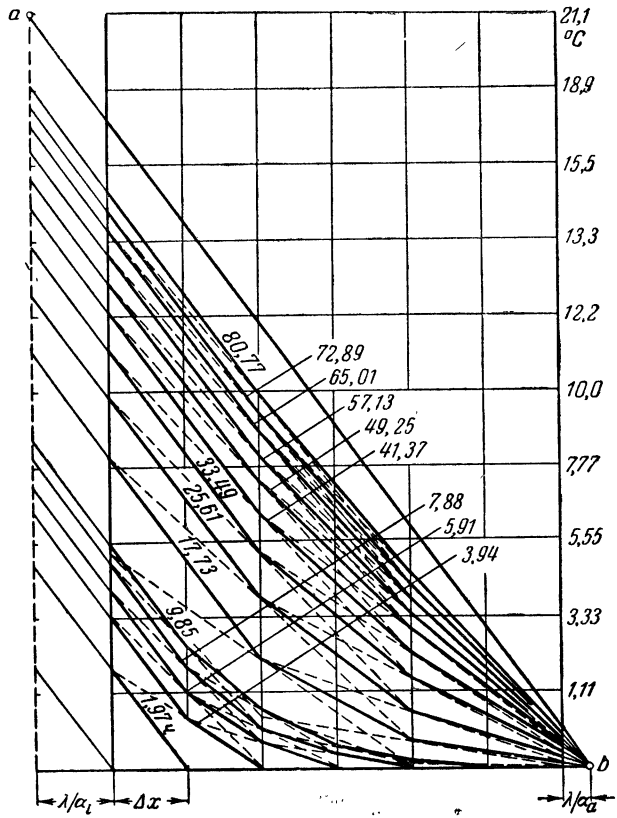


Рис. 4-17. Температурное поле кирпичной стенки при нестационарном режиме.

мых. В результате получаем новую кривую распределения температур *1'*, *2'*, *3'* ... Продолжаем эту ломаную линию до пересечения с поверхностью путем соединения точки *1* с направляющей точкой *r*. Таким образом, получаем точку *0'*. Затем продолжаем этот процесс несколько раз. Если с течением времени изменяется температура окружающей среды t_f или коэффициент теплообмена α, это обстоятель-

ство можно легко учесть путем соответствующего перемещения направляющей точки в вертикальном или горизонтальном направлении.

Эта легкость в обращении с различными условиями на поверхности является одним из преимуществ графического метода по сравнению с аналитическим решением дифференциального уравнения, когда переменные граничные условия приводят к значительным математическим трудностям. Впоследствии этот метод был применен А. Несси и Л. Ниссолем для тел других форм и для гомогенных систем [Л. 31].

Пример 4-4. Начинают отапливать жилую комнату с кирпичными стенами, температура которой первоначально равна внешней температуре — 1° С. Необходимо определить, через какой промежуток времени в комнате и стенах установится постоянное распределение температур. Конечная температура в комнате 21° С. Коэффициент теплообмена на внутренней поверхности стены $\alpha_i = 6$ *ккал/м² · ч · град*; коэффициент теплообмена на внешней поверхности $\alpha_a = 14{,}5$ *ккал/м² · ч · град*; коэффициент температуропроводности $a = 0{,}0011$ *м²/ч*; толщина стены 0,396 *м*. Распределение температуры в стене при стационарном режиме задается прямой, соединяющей точки *a* и *b* при температуре — 1 и 21° С, которые отстоят от поверхностей стены на расстоянии λ/α_i и λ/α_a. Если предположить, что теплоотдача к внутренней поверхности стены постоянна, то за время прогрева наклон температурной кривой к внутренней поверхности будет оставаться неизменным. Теперь, чтобы приступить к графическому решению, разделим стену на шесть слоев толщиной $\Delta x = 0{,}066$ *м*. Отсюда находим интервал времени

$$\Delta\tau = \frac{(\Delta x)^2}{2a} = \frac{0{,}066^2}{2 \cdot 0{,}0011} = 1{,}97 \text{ ч}.$$

Построение температурных кривых можно проследить на рис. 4-17. Как видно из рисунка, для установления стационарного режима необходимо более 80 *ч*, т. е. более 4 дней. По истечении 9,85 *ч* интервал по координате увеличен до $2\Delta x$; в соответствии с этим увеличен и интервал времени: $4 \times 1{,}97 = 7{,}88$ *ч*.

4-2. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА

На практике явления передачи тепла часто наблюдаются в таких условиях, когда температурные граничные условия периодически изменяются во времени. Эти явления имеют место в цилиндрах паровых машин и двигателей внутреннего сгорания, в процессах производства, где тепловой цикл системы более желателен с точки зрения осуществления контроля, и во многих других случаях. Такие процессы можно рассматривать с помощью только что описанного графического метода Шмидта. Однако этот метод связан с определенными затруднениями графического выпол-

нения. Применение некоторых аналитических методов позволяет изучить природу периодической передачи тепла и в тех случаях, когда этого нельзя сделать, используя графические методы.

Твердое тело с бесконечной теплопроводностью, температура окружающей среды — периодическая функция времени. Рассмотрим маленькую болванку, о которой мы уже упоминали, но теперь будем полагать, что она погружена в жидкость, температура которой периодически изменяется. Любая периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье [Л. 32]. Поэтому для колебаний температуры жидкости можно написать:

$$t_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} + b_n \sin \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} \right), \qquad (4\text{-}47)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье и τ_0 — период колебания температуры. Подставив уравнение (4-47) в уравнение (4-1), получим выражение

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{\alpha A}{\rho c V} t = \frac{\alpha A}{\rho c V} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} + b_n \sin \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} \right) \right], \qquad (4\text{-}48)$$

интегрируя которое, будем иметь [Л. 33]:

$$t = e^{-\alpha A\tau/\rho cV} \left\{ \int e^{\alpha A\tau/\rho cV} \frac{\alpha A}{\rho c V} \left[\frac{a_0}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} + b_n \sin \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} \right) \right] d\tau + C_1 \right\}$$

или в окончательном виде [Л. 34]

$$t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha A}{\rho c V} \left\{ \frac{a_n \cos\left[(2\pi n\tau/\tau_0) - \delta\right] + b_n \sin\left[(2\pi n\tau/\tau_0) - \delta\right]}{\sqrt{(\alpha A/\rho cV)^2 + (2\pi n/\tau_0)^2}} \right\} +$$

$$+ C_1 e^{-\alpha A\tau/\rho cV}, \qquad (4\text{-}49)$$

где

$$\delta = \mathrm{tg}^{-1}(2\pi n/\tau_0)\,(\rho cV/\alpha A).*$$

Постоянную C_1 можно определить, учитывая распределение температуры в момент времени, равный нулю, однако

* Символ tg^{-1} обозначает arctg. Прим. ред.

с течением времени переходный член стремится к нулю, и колебания температуры принимают регулярный характер. Температурно-временное состояние болванки по истечении переходного времени можно выразить так:

$$t=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos\left[(2\pi n\tau/\tau_0)-\delta\right]+b_n\sin\left[(2\pi n\tau/\tau_0)-\delta\right]}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}. \quad (4\text{-}50)$$

На основании решения (4-50) можно сделать заключение, что температура болванки всегда отстает от температуры жидкости на фазовый угол δ, а амплитуда температурных колебаний уменьшается на коэффициент $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}$.

Пример 4-5. Термометр сопротивления применяется для замера температуры газа в цилиндре машины, делающей 120 *об/мин*. Величина сопротивления термометра просматривается на осциллоскопе.

Требуется определить возможную ошибку в измерении. Предположим, что колебания температуры синусоидальные, тогда мы можем использовать данные решения (4-50) при $n=1$. Термометр сопротивления имеет цилиндрическую форму и изготовлен из платины, его диаметр 0,51 *мм*. Теплопроводность платины равна 59,5 *ккал/м·ч·град*, а температуропроводность $a=0{,}087$ *м²/ч*. Коэффициент теплообмена цилиндра может быть порядка $\alpha=244{,}3$ *ккал/м²·ч·град*. Характерное измерение чувствительного элемента составляет $L=0{,}51:4=0{,}127$ *мм*. Машина делает $120\times60=7\,200$ циклов в час; таким образом,

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{2\pi}{\tau_0}\frac{\rho cV}{\alpha A}=\frac{2\pi}{\tau_0}\frac{\rho c}{\lambda}\frac{L\lambda}{\alpha}=\frac{2\pi\cdot7\,200\cdot59{,}5\cdot0{,}127}{0{,}087\cdot244{,}3\cdot1\,000}=16{,}1;$$

$$\operatorname{tg}^2\delta=25{,}9.$$

Коэффициент уменьшения амплитуды равен $\frac{1}{\sqrt{1+25{,}9}}=0{,}19$,

$$\delta=\operatorname{tg}^{-1}16{,}1=86{,}5°.$$

Следовательно, здесь имеют место погрешность в температурных показаниях на 81% и отставание в показаниях на 86,5° или почти на четверть оборота.

Полубесконечное твердое тело, температура поверхности периодически изменяется во времени. Рассмотрим еще раз полубесконечное твердое тело протяженностью от поверхности $x=0$ до бесконечности, где температура внешней поверхности при $x=0$ изменяется периодически во времени. Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2t}{\partial x^2}$$

и должно удовлетворять следующим начальным и граничным условиям:

$$\tau = 0; \qquad t = 0;$$

$$x = 0; \qquad t_0 = f(\tau);$$

$$x \to \infty; \qquad t_\infty \neq \infty.$$

Решение может быть вида:

$$t = F(\tau)\, G(x). \tag{4-51}$$

Поскольку изменение температуры должно быть периодическим, необходимо, чтобы как время τ, так и пространственная координата x входили в аргумент некоторой тригонометрической функции. Это достигается в результате представления решения для $F(\tau)$ в виде экспоненты с мнимым показателем. Дифференцируя уравнение (4-51) и разделяя переменные, получаем:

$$\frac{F'(\tau)}{aF(\tau)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = \pm ik^2, \tag{4-52}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Как отмечалось раньше при анализе решений, уравнение (4-52) на самом деле представляет собой два уравнения:

$$F'(\tau) - (\pm ik^2)\, aF(\tau) = 0;$$

$$G''(x) - (\pm ik^2)\, G(x) = 0,$$

из решения которых получим

$$t = Ce^{\pm k^2 a\tau} e^{\pm k^2 \sqrt{\pm i}\, x}. \tag{4-53}$$

Решение (4-53) может быть представлено в четырех частных решениях:

$$t_1 = C_1 \exp\left[-\sqrt{1/2}\, kx + i\left(k^2 a\tau - \sqrt{1/2}\, kx\right)\right];$$

$$t_2 = C_2 \exp\left[-\sqrt{1/2}\, kx - i\left(k^2 a\tau - \sqrt{1/2}\, kx\right)\right];$$

$$t_3 = C_3 \exp\left[\sqrt{1/2}\, kx + i\left(k^2 a\tau - \sqrt{1/2}\, kx\right)\right];$$

$$t_4 = C_4 \exp\left[\sqrt{1/2}\, kx - i\left(k^2 a\tau - \sqrt{1/2}\, kx\right)\right].$$

Два из этих решений с физической точки зрения невозможны, поскольку температура не может бесконечно возрастать с ростом x. Эти два решения отбрасываются (t_3 и t_4), а два

других складываются, чтобы получить другое частное решение:

$$t = e^{-\sqrt{1/2}kx}\left[C_1 e^{+i(k^2a\tau-\sqrt{1/2}kx)} + C_2 e^{-i(k^2a\tau-\sqrt{1/2}\,kx)}\right]. \quad (4\text{-}54)$$

Уравнение (4-54) можно записать через тригонометрические функции:

$$t = e^{-\sqrt{1/2}kx}\left[A\cos(k^2a\tau - \sqrt{1/2}\,kx) + B\sin(k^2a\tau - \sqrt{1/2}kx)\right] \quad (4\text{-}55)$$

или через фазовый угол

$$t = Ce^{-\sqrt{1/2}kx}\cos(k^2a\tau - \sqrt{1/2}\,kx - \delta), \quad (4\text{-}56)$$

где

$$\delta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{B}{A} \quad \text{и} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Необходимо определить постоянные A, B и k из граничных условий. Полагаем, что функцию $t_0 = f(\tau)$ можно выразить рядом Фурье:

$$t_0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} + b_n\sin\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}\right). \quad (4\text{-}57)$$

Уравнение (4-55) для $x = 0$ принимает вид:

$$t_0 = A\cos k^2a\tau + B\sin k^2a\tau. \quad (4\text{-}58)$$

Таким образом, сравнивая уравнение (4-57) и (4-58), мы видим, что

$$A = a_n;\ B = b_n;\ k = \sqrt{\frac{2\pi n}{a\tau_0}}.$$

Постоянный член $a_0/2$ или средняя температура при $x = 0$ не входит в решение (4-58). Этот член обычно является средней величиной колеблющейся температуры при $x = 0$ и является результатом начальной неравномерности в момент времени, равный нулю. Ранее мы получили такое решение, которое для этого случая имеет вид:

$$t = \frac{a_0}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \quad (4\text{-}59)$$

Сложив решение (4-59) с решением (4-56), получим другое частное решение

$$t=\frac{a_0}{2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}\,x}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\,x\right)+\right.$$

$$\left.+b_n\sin\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\,x\right)\right]. \qquad (4\text{-}60)$$

То, что решение (4-60) удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям, можно установить на основании его оценки при $x=0$ и $x\to\infty$. Решение (4-60) не удовлетворяет условиям $t=0$, $\tau=0$ и не может быть использовано в области малого времени[1]. Однако для больших τ $\operatorname{erf}x/2\sqrt{a\tau}$ стремится к нулю и конечное выражение представляет собой периодическое распределение температуры для случая, когда первоначальная неравномерность ослаблена:

$$t=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}x}\,C_n\cos\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\,x-\delta_n\right), \qquad (4\text{-}61)$$

где

$$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\quad\text{и}\quad\delta_n=\operatorname{tg}^{-1}\frac{b_n}{a_n}.$$

Для более простого случая, когда температура поверхности есть функция косинуса

$$t_0=t_{0м}\cos\frac{2\pi n\tau}{\tau_0},$$

рассматриваются только колебания около средней температуры.

Это равносильно тому, что за данную температуру принимается $a_0/2$. $t_{0м}$ является максимальной абсолютной величиной изменения температуры поверхности. Решение (4-61) сводится к выражению

$$t=t_{0\,м}e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}x}\cos\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\,x\right). \qquad (4\text{-}62)$$

[1] Решение, справедливое для малых τ, приводится там же.

Физический смысл только что записанных более сложных решений можно выяснить, рассматривая более простое решение (4-62). Рассмотрим уравнение (4-62) при некоторых значениях пространственной координаты x, полагая, что x — постоянная величина.

Поскольку $\cos 2m\pi = +1$, когда $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, t$ будет максимальным, когда

$$\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\, x = 2m\pi$$

или

$$\tau_{t\ \text{макс}} = m\frac{\tau_0}{n} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_0}{an\pi}}\, x$$

для любого x.

Для поверхности $x = 0$ температура $t_0 = t_{0\,м}\cos\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}$ и является максимальной, когда $\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} = 2m\pi$ или $\tau_{t\,0м} = m\frac{\tau_0}{n}$ при $x = 0$.

Сравнивая значения времени, когда имеет место максимальная температура на глубине x и на поверхности, можно видеть, что колебания имеют такой же период τ_0/n на каждом расстоянии от поверхности, но колебание на расстоянии

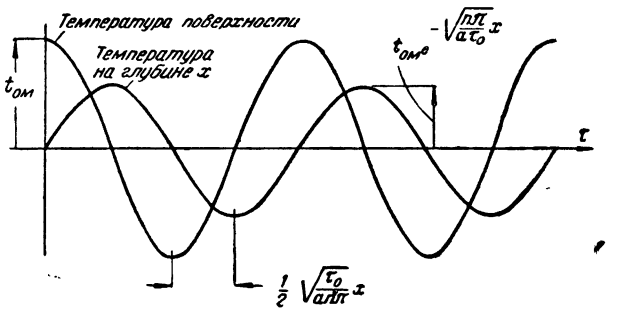


Рис. 4-18. Сравнение изменения температуры поверхности и изменения температуры на глубине x с течением времени для периодического стационарного состояния в полубесконечном теле.

от поверхности x запаздывают по фазе от колебаний на поверхности на $1/2\sqrt{\tau_0/an\pi}x$. Кроме того, амплитуда колебания на расстоянии от поверхности x уменьшается на множитель $e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}x}$. Эти физические особенности графически изображены на рис. 4-18 и 4-19.

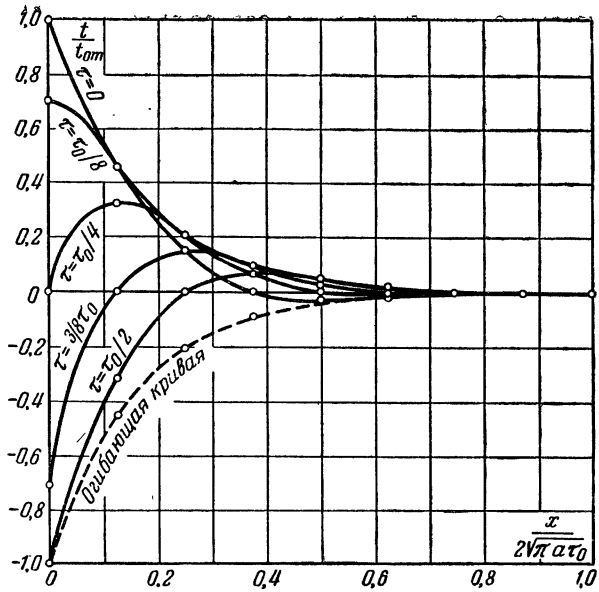


Рис. 4-19. Распределение температурных колебаний в стенке бесконечной толщины [Л. 325].

Если напомнить, что косинус является четной функцией, т. е.

$$\cos(-\beta)=\cos\beta,$$

то решение (4-62) может быть записано в виде:

$$t=t_{0м}e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}x}\cos\left(\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}x-\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}\right). \qquad (4\text{-}63)$$

Величина $t_{0м}\cos\sqrt{n\pi/a\tau_0}x$ выражает косинусоидальную волну с амплитудой $t_{0м}$ и длиной волны x_0. Длина волны равна:

$$x_0=2\sqrt{\frac{\pi a\tau_0}{n}}.$$

Величина

$$t_{0м}\cos\left[\sqrt{n\pi/a\tau_0}x-(2\pi n\tau/\tau_0)\right]$$

выражает ту же волну, что и раньше, но сдвинутую в положительную сторону направления x на величину $2\pi n\tau/\tau_0$.

Таким образом, скорость распространения волны принимает вид $2\sqrt{\pi an/\tau_0}$. Амплитуда упреждающей волны умень-

шается с удалением от поверхности на множитель $e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}x}$. Эти характеристики приведены на рис. 4-20.

Решение (4-63) показывает также, что чем выше частота (чем больше n), тем меньше проникновение тепловой волны, т. е. высокочастотные тепловые колебания быстро затухают по сравнению с основными или более низкими гармоническими колебаниями.

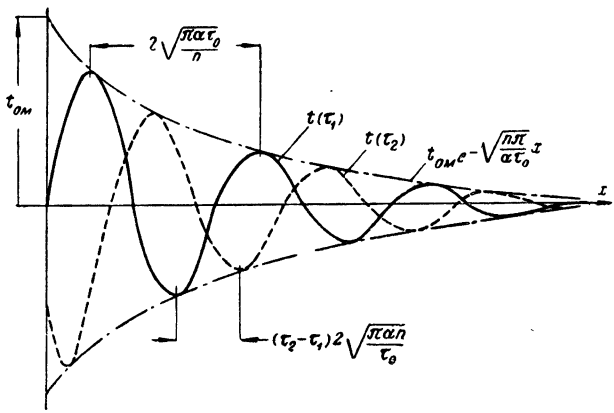


Рис. 4-20. Характеристика колебания температуры в полубесконечной стенке.

Пример 4-6. Следует определить, на какую глубину проникают в землю дневные и годовые температурные колебания. Из приложения можно получить температуропроводность глиноподобной почвы $3{,}62 \cdot 10^{-3}$ *м²/ч* и температуропроводность песчаника от $3{,}81 \cdot 10^{-3}$ до $4{,}55 \cdot 10^{-3}$ *м²/ч*. Вычисления проводились при более низких значениях $0{,}039$—$3{,}62 \cdot 10^{-3}$. Из рис. 4-19 видим, что практически колебания затухают при $x/(2\sqrt{\pi a\tau_0}) = 0{,}8$. Для дневных колебаний $\tau_0 = 24$ *ч*. Таким образом, получаем:

$$x = 1{,}6\sqrt{\pi \cdot 3{,}62 \cdot 10^{-3} \cdot 24} = 0{,}835 \text{ м}.$$

Для годовой флуктуации глубина проникновения будет кратна $\sqrt{365}$, т. е. 15,94 *м*.

После того как начальные нестационарные явления исчезают, в периодическом процессе направление потока тепла будет изменяться, поскольку температурный градиент на поверхности то положительный, то отрицательный. Количество поглощаемого или отдаваемого тепла можно определить из уравнения теплопроводности Фурье:

$$dQ_i = -\lambda A \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} d\tau, \qquad (4\text{-}64)$$

Если решение (4-62) продифференцировать, например, по x и подставить в уравнение (4-64), мы получим уравнение

$$dQ_i = -\lambda A t_{0м} \sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}} \left(\sin \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} \right) d\tau$$

или

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = -\sqrt{2}\lambda A t_{0м} \sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}} \sin \left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \frac{\pi}{4} \right),$$

которое при интегрировании в пределах от τ_1 до τ_2 принимает вид:

$$Q = Q_i \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \lambda A t_{0м} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi na}} \cos \left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \qquad (4\text{-}65)$$

Зависимость между максимальной и минимальной температурой, а также между максимальным и минимальным тепловым потоком показана в табл. 4-2.

Таблица 4-2

Фазовые соотношения в периодическом стационарном состоянии тепла [Л. 326]

$t_{x=0}$	τ	Q	τ	Q_i
Max	0	0	$\frac{1}{8}\frac{\tau_0}{n}$	Max
0	$\frac{1}{4}\frac{\tau_0}{n}$	Min	$\frac{3}{8}\frac{\tau_0}{n}$	0
Min	$\frac{1}{2}\frac{\tau_0}{n}$	0	$\frac{5}{8}\frac{\tau_0}{n}$	Min
0	$\frac{3}{4}\frac{\tau_0}{n}$	Max	$\frac{7}{8}\frac{\tau_0}{n}$	0
Max	$\frac{\tau_0}{n}$	0	$\frac{9}{8}\frac{\tau_0}{n}$	Max

Используя величины времени для $Q_{макс}$ и $Q_{мин}$ в решении (4-65), можно вычислить количество тепла, втекающего в твердое тело за полупериод:

$$Q_i \Big|_{1/8(\tau_0/n)}^{5/8(\tau_0/n)} = \lambda A t_{0м} \sqrt{\frac{2\tau_0}{\pi na}}. \qquad (4\text{-}66)$$

Решение (4-65) изображается графически на рис. 4-21.

Полубесконечное твердое тело. Температура окружающей жидкости периодически изменяется во времени. Если температура жидкости, соприкасающейся с открытой поверхностью $x=0$, изменяется периодически

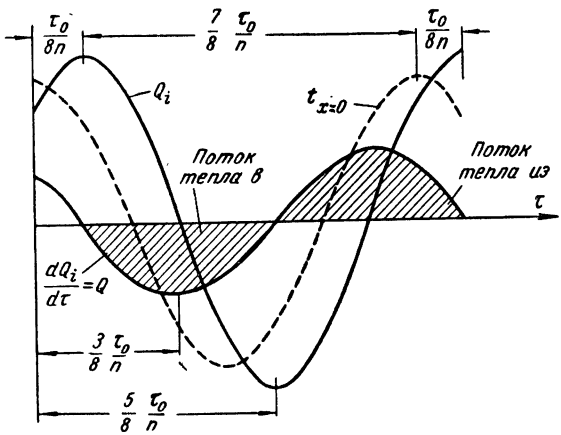


Рис. 4-21. Фазовые зависимости в периодическом потоке тепла [Л. 328].

и теплообмен происходит с коэффициентом теплообмена α, то решение в основном такое же, как и полученное в предыдущем разделе. Температура жидкости изменяется по закону

$$t_f = t_{f\,м} \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0}, \qquad (4\text{-}67)$$

а граничное условие на открытой поверхности с учетом переноса тепла конвекцией

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = -\alpha (t - t_f). \qquad (4\text{-}68)$$

Частное решение дифференциального уравнения дается решением (4-56), которое повторно приводится здесь для удобства:

$$t = C_1 e^{-\sqrt{1/2}kx} \cos (k^2 a\tau - \sqrt{1/2}kx - \delta).$$

Следовательно, необходимо определить значения C_1, k и δ, используя решения (4-56), (4-67) и (4-68), чтобы получить

решение предложенной задачи. По вычислении этих постоянных, решение принимает вид:

$$t = t_{f\,м} \frac{e^{-\sqrt{\pi n/a\tau_0}\,x}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{(\pi n\lambda^2/a\tau_0\alpha^2)} + 2(\pi n\lambda^2/a\tau_0\alpha^2)}} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}}\,x - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{a\tau_0\alpha^2/\pi n\lambda^2}}\right)\right]. \quad (4\text{-}69)$$

Тщательное рассмотрение решения (4-69) для условий на поверхности ($x=0$) приводит к заключению, что температура поверхности t_0 колеблется с такой же частотой n/τ_0, как и температура окружающей жидкости, но амплитуда колебания температуры на поверхности уменьшается на величину

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\pi n\lambda^2/a\tau_0\alpha^2} + 2(\pi n\lambda^2/a\tau_0\alpha^2)}}. \quad (4\text{-}70)$$

Из вышеприведенного решения очевидно также, что для больших значений критерия Био температура поверхности подходит близко к температуре жидкости, а для меньших значений критерия Био разница становится больше. Кроме того, более высокая частота тепловых колебаний менее эффективна при проникновении в тело, чем низкочастотные колебания.

Пример 4-7. Случай периодического переноса тепла имеет место в цилиндре двигателя внутреннего сгорания с возвратно-поступательным движением рабочих частей. Нужно рассчитать глубину проникновения температурных колебаний в стенку цилиндра. Предположим, что двигатель делает 2 000 *об/мин*. Если двигатель имеет двойной ход поршня, то период одного колебания равен:

$$\tau_0 = \frac{1}{60 \cdot 2\,000} = \frac{1}{12 \cdot 10^4}\ ч.$$

Температуропроводность железа составляет $a = 0{,}0596\ м^2/ч$. Таким образом, используя опять величину $x/2\sqrt{\pi a\tau_0} = 0{,}8$ согласно рис. 4-19 как меру практической глубины проникновения, мы можем вычислить x

$$x = 1{,}6\sqrt{\frac{\pi \cdot 0{,}0596}{12 \cdot 10^4}} = 2 \cdot 10^{-3}\ м.$$

Таким образом, колебания температуры проникают только на глубину 2 *мм* в стенку цилиндра. Из-за конечной величины коэффициента теплообмена температура поверхности стенки цилиндра будет изменяться со значительно меньшей амплитудой, чем температура газа в цилиндре.

Уменьшение амплитуды можно вычислить при помощи формулы (4-70). Принимаем $n=1$ для основной волны и берем из приложения $\lambda=44{,}6$ *ккал/м² · ч · град* и оцениваем $\alpha=488{,}6$ *ккал/м² · ч · град*, тогда

$$\frac{\pi\lambda^2}{a\tau_0\alpha^2}=\frac{\pi(44{,}6)^2\cdot 12\cdot 10^4}{0{,}0596\ 488{,}6}=52\,760;$$

$$(1+2\sqrt{52\,760}+2\cdot 52\,760)^{-1/2}=0{,}0031.$$

Если температура газа изменяется с двойной амплитудой в 1 647° С, тогда температура поверхности стенки цилиндра имеет двойную амплитуду

$$1\,647\times 0{,}0031=5{,}1^\circ\text{ С}.$$

Согласно испытаниям, проделанным А. Майером [Л. 36] с двигателем Отто при $n=2\,000$ *об/мин*, колебания температуры поверхности составляли приблизительно 11° С.

ЗАДАЧИ

4-1. Стальная болванка, параллелепипед по форме, с измерениями $1{,}22\times 1{,}22\times 3{,}05$ *м* с начальной температурой 260° С помещается в печь, в которой температура поверхности составляет 1 203° С. Определить температуру точки вблизи угла болванки через 25 *мин*. Точка, о которой идет речь, расположена в 5,1 *см* от одной поверхности и в 20,3 *см* от каждой из других поверхностей.

4-2. Поверхность твердого тела повернута к спокойному потоку воздуха; температура по всему твердому телу такая же, как и температура воздуха. Поверхность твердого тела неожиданно подвергают действию потока тепла $q=1\,085$ *ккал/м² · ч*. Определить изменения температуры поверхности твердого тела как функцию времени. Через 1 *сек* облучение прекращается. Определить изменение температуры поверхности со временем от момента прекращения облучения.

	λ, *ккал/ч·м·град*	ρ, *кг/м³*	C_p, *ккал/кг·град*
Твердое тело . . .	0,149	544	0,50
Воздух	0,022	1,2	0,24

4-3. Кусок броневой плиты из 15% марганцевой стали ($a=0{,}0111$ *м²/ч*, $\lambda=14{,}88$ *ккал/ч · м · град*) толщиной в 40,6 *см* извлечен из нагревательного колодца для поверхностной закалки.

Плита закаливается в воде при 100° С, причем коэффициент теплообмена равен 10,750 *ккал/м² · ч · град* на поверхности. За какое время температура плиты в точках, удаленных от поверхности на расстоянии 6,4 *мм*, достигнет 370° С.

4-4. Если известно, что отбивная хорошо поджаривается при температуре в центре куска в 71° С, вычислите время, необходимое для приготовления куска мяса в 3,63 *кг* цилиндрической формы и длиной, равной диаметру. Начальная температура мяса 10° С; температура духовки равна 176,5° С.

4-5. Требуется определить коэффициент теплообмена для конвективного переноса тепла от круглого цилиндра при поперечном обтека-

нии из наблюдения за зависимостью температуры от времени для медного цилиндра диаметром в 25,4 *мм* при его охлаждении в потоке воздуха.

а) Полагая, что температура воздуха равна 15,5° С, определить минимальную величину коэффициента теплообмена, для которого можно не учитывать внутреннее сопротивление цилиндра.

б) Изобразите графически зависимость температуры от времени для цилиндра при начальной температуре цилиндра 65,5° С для этого коэффициента теплообмена.

4-6. По трубе протекает воздух. Термопара, измеряющая температуру воздуха, вставлена в гильзу, сделанную из стальной трубки, диаметром 6 *мм*, причем гильза вставлена перпендикулярно направлению потока. Температура воздуха 65,5° С и коэффициент теплообмена гильзы с термопарой равен 171 *ккал/м²·ч·град*. Имеет место мгновенное изменение температуры на 28° С.

Вычислите время, необходимое для того, чтобы термопара указала изменение температуры на 1° С, предполагая, что показания термопары дают величину температуры, близкую к внутренней температуре гильзы.

4-7. Рассмотрим кусочек хлеба, помещенный в автоматическое электрическое устройство для выпечки хлеба. Хлеб подогревается с обеих сторон витками проволоки, которая образует поверхность с равномерным тепловым излучением в 1356,5 *ккал/м²·ч*.

Предполагая, что имеет место свободная конвекция, и учитывая ее, вычислить при помощи графика Шмидта время, необходимое для того, чтобы температура поверхности хлеба достигла 176,5° С. Как сравнить это время с обычным временем выпечки в таких установках?

4-8. Выведите зависимость температуры от времени для тела с очень большой теплопроводностью, которое неожиданно погрузили в жидкую ванну, в которой изменение температуры во времени имеет вид:

$$t = t_0 (1 + B \sin \omega_0 \tau).$$

Изобразите графически колебания температуры ванны и тела со временем.

4-9. На какую глубину нужно заложить трубу, чтобы избежать замерзания в области, имеющей климатические условия, типичные для Миннеаполиса? Дайте рекомендации относительно глубины закладки трубы, принимая во внимание почвенные условия и влагосодержание грунта.

4-10. Колебания температуры в полубесконечном теле, обусловленные синусоидальным изменением температуры поверхности, описываются выражением

$$t = t_{0м}\, e^{-\sqrt{n\pi/a\tau_0}\, x} \cos\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\, x\right).$$

Если затухание считается полным, когда конечная двойная амплитуда температурной волны составляет 5% температурной волны на поверхности, насколько глубже будет проникать в тело первая гармоника по сравнению с девятой гармоникой?

4-11. «Несгораемый» сейф нужно изготовить из листовой стали с асбестовой прокладкой между внутренней и внешней оболочками. Определите необходимую толщину асбеста, если нужно предусмотреть защиту от огня на протяжении 1 *ч* при наружной температуре в 815° С на этот период, в течение которого внутренняя температура поверхности не превысит 121° С.

Сравните результаты, полученные здесь, с гарантиями для торговых сейфов, чтобы определить, насколько приемлемы торговые гарантии.

4-12. Два полубесконечных тела с различными тепловыми свойствами, находящиеся первоначально при различных, но постоянных температурах, внезапно приводят в тесный контакт друг с другом.

Выведите выражение для температуры внутренних обращенных друг к другу поверхностей тел.

4-13. Рассмотрим стальную плиту, достаточно толстую для того, чтобы можно было использовать решение для полубесконечного твердого тела. На одной поверхности температура изменяется периодически $t=5\sin(2\pi\tau/0{,}10)+50$, а другая поверхность находится при температуре 10° С.

а) Сравните тепловые потоки через поверхности для двух случаев.

б) Какой толщины должна быть плита, чтобы использовать вышеприведенные условия?

ГЛАВА ПЯТАЯ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СИСТЕМАХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

5-1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ ИЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ

Много задач возникает в области техники, где теплообмен сопровождается фазовым превращением в проводящей среде или там, где химический состав изменяется вследствие некоторых химических реакций, которые распространяются в среде. Подобные явления часто сопровождаются высвобождением или поглощением тепла в активной зоне. Образованная таким образом энергия обычно распространяется в системе механизмом теплопроводности. Примерами такого явления служат плавление и затвердевание твердых тел, такие химические реакции, как горение, а также промерзание грунта. Существенной и общей чертой этих систем является то, что существует поверхность, разделяющая две области с различными теплофизическими свойствами, и эта поверхность раздела перемещается, как некоторая функция времени. Кроме того, тепло высвобождается или поглощается у поверхности раздела. Для решения подобных задач необходимо определить, каким образом будет двигаться поверхность раздела. Такая постановка задач вызывает значительные затруднения и, несмотря на их очевидную важность для практики, не привлекает к себе соответствующего внимания [Л. 37, 38, 39, 40]. Здесь будет рассматриваться задача затвердевания жидкости с учетом того, что и другие задачи можно рассматривать подобным образом. В задаче,

подобной этой, следует учитывать скрытую теплоту плавления и иметь в виду, что такие характеристики, как теплопроводность, температуропроводность, удельная теплоемкость и плотность, различаются иногда очень заметно для двух фаз. Рассмотрим рис. 5-1 и предположим, что область $x>0$ первоначально заполнена веществом и замораживается отводом тепла от внешней поверхности, которая сохраняет постоянную температуру T_1. В любой момент времени τ поверхность, разделяющая жидкую и твер-

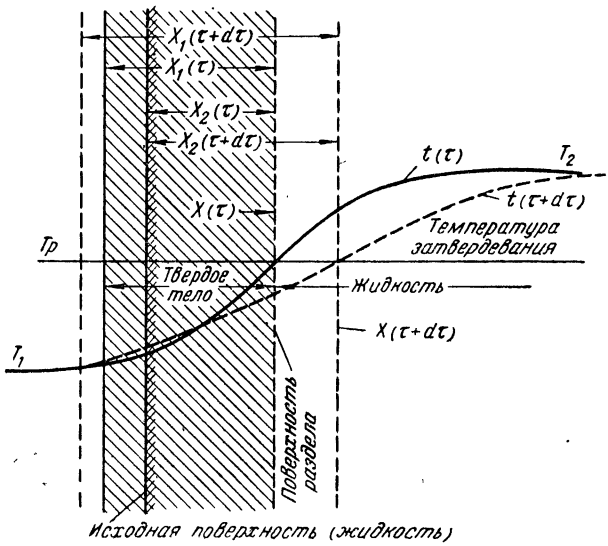


Рис. 5-1. Теплопроводность в процессе затвердевания жидкости.

дую фазы, есть $x(\tau)$. Средняя интегральная температура жидкости на большом расстоянии от поверхности раздела равна T_2 и постоянна. Тепло проводится, следовательно, от жидкости через твердую фазу к свободной поверхности. На поверхности раздела система высвобождает скрытую теплоту плавления.

В некоторый момент времени τ область $x<X(\tau)$ состоит из твердой фазы с характеристиками λ_1, a_1, ρ_1, c_1.

Если t_1 — температура в пределах этой твердой фазы, то она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = 0 \qquad (5\text{-}1)$$

и

$$t_1 = T \text{ при } x = 0.$$

Область $x > X(\tau)$ состоит из жидкой фазы с характеристиками λ_2, a_2, ρ_2, c_2. Если t_2 — температура внутри жидкой фазы, то, пренебрегая потоками конвекции, она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 t_2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{a_2}\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

и

$$t_2 \to T_2 \text{ при } x \to \infty.$$

В случае, когда вода превращается в лед, наблюдается увеличение объема (уменьшение плотности), и этот эффект можно принимать во внимание, если отметить, что поверхность льда будет отодвигаться от начальной поверхности в соответствии с плотностью каждой фазы. Это можно выразить при помощи соотношения

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \beta. \qquad (5\text{-}3)$$

Кроме того, необходимо, чтобы у поверхности раздела, которая имеет температуру, необходимую для изменения фазы, температура была $t_1 = t_2 = T_p$ при $x_1 = X_1(\tau)$ или $x_2 = X_2(\tau)$.

Если Q_L — скрытая теплота плавления твердого тела, то когда поверхность раздела фаз передвигается на расстояние dx, высвобождается количество тепла

$$Q_{L\rho_1}\frac{dX_1}{d\tau} = Q_{L\rho_2}\frac{dX_2}{d\tau},$$

которое должно быть отведено. Это требует, чтобы на единицу площади

$$\lambda_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=X_1} - \lambda_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=X_2} = Q_{L\rho_1}\frac{dX_1}{d\tau} = Q_{L\rho_2}\frac{dX_2}{d\tau}. \qquad (5\text{-}4)$$

От этой точки и дальше процедура осуществляется по методу Ньюмана [Л. 41].

Предполагаем решения вида

$$\vartheta_1 = t_1 - T_p = (T_1 - T_p) + A\,\mathrm{erf}\frac{x_1}{2\sqrt{a_1\tau}}; \qquad (5\text{-}5)$$

$$\vartheta_2 = t_2 - T_p = (T_2 - T_p) + B\,\mathrm{erfc}\frac{x_2}{2\sqrt{a_2\tau}}, \qquad (5\text{-}6)$$

где A и B — постоянные и, таким образом, уравнения (5-5) и (5-6) удовлетворяют соответственно уравнениям (5-1) и (5-2)*. Условия, относящиеся к температуре поверхности раздела, т. е. $t_1 = t_2 = T_p$ при $x = X_1(\tau)$ и $x_2 = X_2(\tau)$, приводят к выражениям

$$\left.\begin{aligned} T_p - T_1 &= A \operatorname{erf} \frac{X_1}{2\sqrt{a_1 \tau}} \\ -(T_p - T_2) &= B \operatorname{erf c} \frac{X_2}{2\sqrt{a_2 \tau}} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

Теперь, поскольку решения (5-7) должно быть справедливым и для всех значений X_1 или X_2, они должны быть пропорциональны $\sqrt{\tau}$.

Отсюда, используя уравнение (5-3), имеем зависимости

$$\begin{aligned} X_1 &= K\beta\sqrt{\tau}; \\ X_2 &= K\sqrt{\tau}, \end{aligned} \tag{5-8}$$

где K — постоянная, которую нужно определить. Когда результаты решений (5-5), (5-6) и (5-8) используются в уравнении (5-4), получаем:

$$\frac{A\lambda_1}{\sqrt{\pi a_1}} e^{-K^2\beta^2/4a_1} - \frac{B\lambda_2}{\sqrt{\pi a_2}} e^{-K^2/4a_2} = \frac{Q_{L\rho_1} K\beta}{2}, \tag{5-9}$$

а когда (5-7) используется в (5-9), тогда получаем:

$$\frac{(T_p - T_1)\lambda_1 e^{-K^2\beta^2/4a_1}}{\sqrt{\pi a_1}\operatorname{erf}(K\beta/2\sqrt{a_1})} - \frac{(T_2 - T_p)\lambda_2 e^{-K^2/4a_2}}{\sqrt{\pi a_2}\operatorname{erf c}(K/2\sqrt{a_2})} = \frac{Q_{L\rho_1} K\beta}{2}. \tag{5-10}$$

Уравнение (5-10) можно решить численно, получив величину K как функцию от T_1, T_2, T_p и тепловых характеристик материала. Когда K известно, A и B определяют из решений (5-7) и (5-8).

Из решения (5-8) ясно, что для $\tau \to 0$, $X_1 \to 0$ и $X_2 \to 0$, а из решения (5-6) следует, что для $x_2 > 0$ и $\tau \to 0$ температура $t_2 = T_2$; таким образом, начальное условие таково, что область $x > 0$ при $\tau = 0$ представляет целиком жидкость при температуре T_2. Уравнение (5-10) решено относительно K для предельных значений T_1 и T_2 вблизи температуры затвер-

* $\operatorname{erf c} z = (1 - \operatorname{erf} z)$.

дёвания 0° С, характерной для систем вода—лёд при $\beta = 1$ и для $\beta = 1{,}09$ отношения плотности воды к плотности льда. Приемлемое приближение [Л. 42] для K в случае системы вода—лед можно записать в виде:

$$K_0 = \sqrt{\frac{2(T_p - T_1)\lambda_1}{Q_{L\rho_1}}}, \quad \beta = 1;$$

$$K_\beta = \sqrt{\frac{2(T_p - T_1)\lambda_1}{Q_{L\rho_1}\beta^2}}, \quad \beta > 1.$$

Таким образом, $K = 1{,}09K_\beta$ в случае наличия системы вода — лед. Легко видеть, что получается меньшее время промерзания, если учитывается изменение плотности фазы льда в зависимости от плотности водяной фазы.

5-2. ДВИЖУЩИЕСЯ ИСТОЧНИКИ ТЕПЛА

Перенос тепла в теле, возникающий при наличии движущегося источника тепла (или стока), имеет огромное значение для техники и широко применяется в дуговой сварке, поверхностном закаливании, непрерывном литье или закалке и охлаждении вращающихся систем струей, охлаждающей жидкости. Движущиеся источники тепла тщательно рассматривались Розенталем [Л. 43] Анализ их основывается на понятии, что если источник тепла движется по телу достаточно больших размеров, то получается квазистационарное состояние, когда система имеет кажущееся установившееся состояние с точки зрения наблюдателя, расположенного в источнике и движущегося с источником. Для системы трех измерений в декартовой системе координат можно применять уравнение, если не рассматриваются источники тепла:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).$$

Если считать, что свойства материала постоянны, то количество тепла Q может быть передано точечным источником, движущимся вдоль оси с постоянной скоростью U. Теперь представим себе, что наблюдатель передвигается с этим источником и проходит при этом материал. Если мы придадим наблюдателю передвижную систему координат, центром которой он является, то эта система займет относительно неподвижной системы положение, показанное на рис. 5-2.

Точка $P(x, y, z)$ в неподвижной системе преобразуется в точку $P(\xi, \eta, \zeta)$ в подвижной системе, и поскольку перемещение в направлении x не изменяет другие координаты $y=\eta$ и $z=\zeta$, то $P(x, y, z)=P(\xi, y, z)$. Необходимо про-

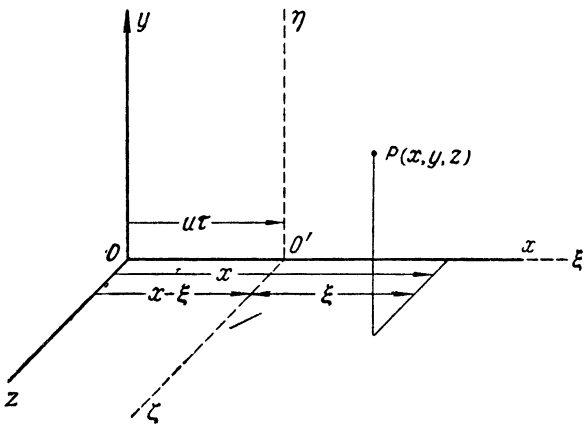


Рис. 5-2. Система координат движущегося источника тепла.

вести преобразование переменных стационарной системы координат, где $t=f(x, y, z, \tau)$. В новом ряду переменных $\xi=x-u\tau$; следовательно $\partial\xi/\partial x=1$, $\partial\xi/\partial\tau=-u$ и $\partial\tau'/\partial\tau=1$. Таким образом, преобразование приводит к выражениям

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+\frac{\partial t}{\partial\tau'}\frac{\partial\tau'}{\partial\tau}=-u\frac{\partial t}{\partial\xi}+\frac{\partial t}{\partial\tau'};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2};\quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 t}{\partial\eta^2};\quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2}.$$

Если эти замены произведены в уравнении (2-13), мы получаем уравнение (5-11):

$$a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial t}{\partial\tau'}-u\frac{\partial t}{\partial\xi}. \qquad (5\text{-}11)$$

Величина $\partial t/\partial\tau'$ равна нулю с точки зрения наблюдателя в источнике, и таким образом уравнение (5-11) принимает квазистационарный вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=-\frac{u}{a}\frac{\partial t}{\partial\xi}. \qquad (5\text{-}12)$$

Тонкий стержень. Рассмотрим стержень, подобный стержню, рассмотренному в разделе 3-4, который имеет постоянную площадь поперечного сечения. Температуру в любом поперечном сечении считаем постоянной, т. е. физически это означает что сопротивление теплопотерям с поверхности стержня намного больше, чем внутреннее сопротивление тепловому потоку в самом стержне. Это соотношение сопротивлений дает возможность уравнять температуры в каждой точке из-за высокой теплопроводности проводящего материала по сравнению с низким коэффициентом теплообмена, регулирующим конвективные потери. В таком случае температурные градиенты $\partial t/\partial y$ и $\partial t/\partial z$ отсутствуют. Таким образом, соответствующее дифференциальное уравнение для избыточной температуры $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{Q'}{\rho c}$. Если член, выражающий конвективную потерю тепла от поверхности, принимается таким же, как в § 3-4, вышеприведенное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - m^2\vartheta\right), \tag{5-13}$$

где $m = \sqrt{\alpha C/\lambda A}$. Производя преобразование с введением переменной ξ в случае квазистационарного состояния, как и раньше, из уравнения (5-13) получаем

$$-\frac{u}{a}\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - m^2\vartheta, \tag{5-14}$$

которое имеет решение вида $\vartheta = e^{-(u/2a)\xi} \cdot f(\xi)$, где нужно определить $f(\xi)$. Следовательно, дифференцируя выражение для ϑ и подставляя в уравнение (5-14), получаем:

$$f''(\xi) - \left[\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2\right] f(\xi) = 0. \tag{5-15}$$

Уравнение (5-15) имеет решение

$$f(\xi) = Ae^{n\xi} + Be^{-n\xi},$$

где

$$n = \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + \frac{\alpha C}{\lambda A}},$$

и поскольку $\vartheta = e^{-(u/2a)\xi} f(\xi)$, выражение для ϑ принимает вид:

$$\vartheta = A \exp\left\{+\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}-\frac{u}{2a}\right]\xi\right\}+$$

$$+ B \exp\left\{-\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}+\frac{u}{2a}\right]\xi\right\}. \qquad (5\text{-}16)$$

Соответствующие граничные условия, которые следует применить к уравнению (5-16), следующие:

$$\vartheta = 0, \quad \xi \to \pm\infty.$$

Решение принимает два вида, зависящие от $\xi \lessgtr 0$:

$$\vartheta = A \exp\left\{+\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}-\frac{u}{2a}\right]\xi\right\} \quad \xi < 0;$$

$$\vartheta = B \exp\left\{-\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}+\frac{u}{2a}\right]\xi\right\} \quad \xi > 0.$$

При $\xi = 0$ температуры обоих видов решений равны и определяют максимальную температуру. Таким образом $A = B = \vartheta_{\text{макс}}$:

$$\vartheta = \vartheta_{\text{макс}} \exp\left\{+\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}-\frac{u}{2a}\right]\xi\right\} \quad \xi < 0;$$

$$\vartheta = \vartheta_{\text{макс}} \exp\left\{-\left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}+\frac{u}{2a}\right]\xi\right\} \quad \xi > 0. \qquad (5\text{-}17)$$

Тепло, которое протекает в каждом направлении от $\xi = 0$ можно получить из (5-17) дифференцированием относительно ξ и подстановкой в выражение

$$Q = -\lambda A \frac{dt}{d\xi};$$

$$Q_1 = \lambda A \vartheta_{\text{макс}} \left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}-\frac{u}{2a}\right] \qquad \xi < 0,$$

что дает:

$$Q_2 = \lambda A \vartheta_{\text{макс}} \left[\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\frac{\alpha C}{\lambda A}}+\frac{u}{2a}\right] \quad \xi > 0. \qquad (5\text{-}18)$$

Поскольку общая мощность источника тепла должна быть равна сумме положительного и отрицательного потоков

тепла, то это отношение дает возможность вычислить максимальную температуру $\vartheta_{макс}$, которая выражается через полную тепловую мощность источника:

$$\vartheta_{макс} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\lambda A \sqrt{(u/2a)^2 + \alpha C/\lambda A}}. \qquad (5\text{-}19)$$

График решения уравнения (5-17), приводимый на рис. 5-3, показывает, что больше тепла проводится впереди источника, чем отводится за источником.

Решения уравнений (5-17)—(5-19) могут быть изменены, чтобы дать чисто физический пример тонкого стержня, изолированного на поверхности. Для этого случая $\alpha = 0$ и вышеупомянутые уравнения упрощаются.

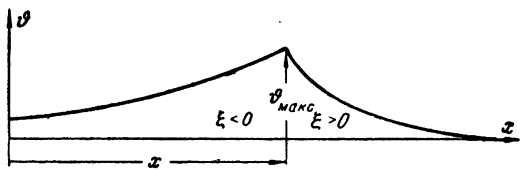


Рис. 5-3. Распределение температуры в тонком стержне как результат движения источника тепла вдоль стержня.

Точечный источник. Если поток тепла распространяется в трех направлениях из точечного источника, расположенного в точке O', двигающегося со скоростью u в направлении x (рис. 5-2), то система выглядит более просто, если вместо координат x, y, z пользоваться радиусом из точки O'.

Уравнение (5-12) имеет решение вида:

$$\vartheta = e^{-(u/2a)\xi} f(\xi, y, z),$$

которое при использовании в уравнении (5-12) дает дифференциальное уравнение для неизвестной функции $f(\xi, y, z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{u}{2a}\right)^2 f = 0.$$

Это вспомогательное уравнение можно записать для

$$r = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}$$

в виде:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2df}{r\,dr} - \left(\frac{u}{2a}\right)^2 f = 0, \qquad (5\text{-}20)$$

когда начальная температура и температура поверхности таковы, что изотермические поверхности представляют собой концентрические сферы, и, таким образом, в этих квазистационарных условиях температура зависит только от r. Это требует граничных условий для ϑ, которые будут удовлетворять понятию радиального теплового потока от источника.

Эти граничные условия могут быть:

$$\vartheta = 0;\ r \to \infty;$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{q'}{4\pi\lambda r^2};\ r = 0, \tag{5-21}$$

где q' — мощность источника тепла.

Решение уравнения (5-20) может быть выполнено путем преобразования $g = fr$ [Л. 44], чтобы получить выражение

$$\frac{d^2g}{dr^2} - \left(\frac{u}{2a}\right)^2 g = 0,$$

которое имеет стандартное решение

$$g = Ae^{+(u/2a)r} + Be^{-(u/2a)r},$$

Желательно получить решение для ϑ, которое представляет собой выражение

$$\vartheta = e^{-(u/2a)\xi} \cdot \frac{g}{r},$$

таким образом,

$$\vartheta = \frac{1}{r}\left[Ae^{(u/2a)(r-\xi)} + Be^{-(u/2a)(r+\xi)}\right]. \tag{5-22}$$

Применяя граничные условия (5-21) для решения уравнения (5-22), окончательно получаем:

$$\vartheta = \frac{q'}{4\pi\lambda r} e^{-(u/2a)(r+\xi)}. \tag{5-23}$$

Решение (5-23) дает распределение температуры около движущегося точечного источника в бесконечной среде. Этот результат приближенно справедлив для источника, движущегося по поверхности полубесконечной среды, если наружная поверхность теряет тепло в количестве, незна-

чительном по сравнению с мощностью источника тепла. Использование этого анализа лежит в рассмотрении сварочного электрода, движущегося по поверхности очень толстой пластины, где потери минимальны. При решении задач сварки в качестве тепла рассматривается только нижняя полуплита. Решение (5-23) нужно изменить, чтобы можно было написать:

$$\vartheta = \frac{q''}{2\pi\lambda r} e^{-(u/2a)(r+\xi)}, \qquad (5\text{-}24)$$

где q'' — тепло, выделяемое электродом.

Вышеприведенные методы применяются в задачах по дуговой сварке, штамповке, закалке, отжигу и прохождению снаряда по каналу орудия.

ЗАДАЧИ

5-1. Медная проволока протаскивается через волочильную доску с постоянной скоростью. Допуская, что тепло, образовавшееся при трении, передается проволоке в плоскости, перпендикулярной оси волочильной доски, определите распределение температуры в проволоке как функцию расстояния от волочильной доски.

5-2. Поток жидкости протекает одномерно в направлении x и в плоскости $x=\xi$ он проходит через тонкую (мелкую) сетку, которая подогревается электричеством. Определите распределение температуры в жидкости.

5-3. Лед образуется на поверхности озера при —18° С из воды при 0° С. По мере утолщения слоя льда скорость замерзания снижается благодаря тепловому сопротивлению уже образованного слоя льда. Получите выражение, определяющее толщину слоя льда, как функцию времени. В качестве первого приближения можно пренебречь теплоемкостью льда.

5-4. Автомобиль весом 1 361 *кг*, идущий со скоростью 48,3 *км/ч*, останавливается за 5 *сек* четырьмя тормозами, причем тормозные ленты имеют площадь 258,1 *см*^{2}. Каждая лента прижимается к стальному цилиндру, имеющему ту же самую площадь поверхности. Какого максимального подъема температуры можно ожидать при этом?

Проанализируйте допущения, принятые в решении.

5-5. Рассмотрим замораживание сферического объема воды, начальная температура которого 15,5° С, при условии, что начиная с нулевого момента времени, температура поверхности сферы поддерживалась при —15,5° С. Для дальнейшего упрощения физической задачи предполагается, что тепловые характеристики независимы от температуры, что плотность воды и льда одна и та же и перенос тепла наблюдается только в радиальном направлении.

При этих допущениях уравнение теплопроводности для сферы может быть преобразовано при помощи подстановки $u=tr$ в уравнение теплопроводности для полубесконечного тела, для которого решение

известно. Сделайте такое преобразование уравнения и получите решение для сферы. Для каких значений времени будет справедливо полученное уравнение? Когда оно становится несправедливым?

Какие иные методы физического анализа этой задачи можно было бы использовать?

5-6. Нужно сварить два куска стали длиной 1,83 *м*, шириной 0,61 *м* и толщиной 3,2 *мм*. Сварочный электрод дает местную температуру 1 647° С и передвигается со скоростью 61 *см/мин*. Стальная плита покрыта слоем краски для предохранения от ржавчины. Вычислите площадь поверхности, которую следует окрасить вновь после окончания сварки. Поможет ли в достаточной мере конвекция от поверхности?

ЧАСТЬ В

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Различные виды теплообмена

В этой главе рассматривается теплообмен между жидкостью или газом и твердой поверхностью, которая соприкасается с ними. Движение жидкости или газа может быть вызвано либо каким-нибудь внешним источником, например насосом, либо наличием разности температур, возникающей в результате местного подогрева. Примером первого типа теплообмена является перенос тепла от стен канала к жидкости, которая насосом подается через канал. Примером второго типа теплообмена служит передача тепла от печи, обогревающей комнату, к воздуху. Теплообмен между стенкой и жидкостью или газом, когда перемещение массы происходит под воздействием посторонних побудителей, называется *теплообменом при вынужденной конвекции*. Теплообмен между стенкой и жидкостью или газом, массы которых перемещаются под влиянием разности температур между поверхностью стенки и окружающим потоком, называется *теплообменом при свободной или естественной конвекции*. Бывают и такие случаи, когда трудно провести четкое разграничение между этими видами теплообмена и когда определение бывает несколько произвольным.

Основная область сопротивления теплообмену обычно концентрируется в тонком слое, непосредственно примыкающем к поверхности стенки. Об этом уже говорилось в разделе 1-3. Таким образом, теплообмен в сущности обусловливается взаимодействием теплопроводности и переноса энергии движущейся среды внутри этого слоя. Тепло, проникающее в этот слой, отводится потоком жидкости или газа. Следовательно, коэффициент теплообмена определяется главным образом толщиной и свой-

ствами этого пограничного слоя, которые в свою очередь зависят от всех параметров, определяющих поток, движущийся вдоль поверхности стенки.

Из дифференциальных уравнений, определяющих процессы тепло- и массопереноса при вынужденной конвекции, можно сделать вывод, что ни поле скоростей, ни образование пограничного слоя не зависят от теплообмена, если параметры жидкости или газа, которые входят в уравнение потока, не зависят от температуры.

Тогда образование пограничного слоя является проблемой аэро- и гидродинамики. Однако, как можно видеть из таблиц приложения, все физические параметры в действительности зависят от температуры. В этом случае существует взаимосвязь между процессами тепло-и массопереноса. Такая взаимосвязь значительно затрудняет понимание процесса теплообмена. Чтобы избежать этого, значительная часть настоящей главы посвящается рассмотрению идеальной жидкости, физические параметры которой не зависят от температуры.

В такой постановке вопроса имеется еще и дополнительное преимущество. Только для такой идеальной жидкости могут быть выведены соотношения, имеющие универсальное применение, тогда как соотношение для жидкостей, физические свойства которых изменяются с температурой или давлением, справедливы для конкретной жидкости или в лучшем случае для определенной группы жидкостей. Обнаружение этого факта и его использование для разработки универсальных соотношений явились наиболее важным вкладом В. Нуссельта (1916). Наконец, имеется много случаев, когда разность температур в поле потока настолько мала, что изменением физических свойств, вызванным разностью температур, можно пренебречь. В таких случаях соотношения, разработанные для идеальной жидкости с постоянными физическими свойствами, точно описывают действительный процесс теплообмена. Для такого положения не имеет значения, рассматриваем ли мы поток жидкости или газа, и соотношения для идеального потока справедливы и для жидкости и для газа.

В газах, физические параметры потока, в особенности плотность, зависят не только от температуры, но также и от давления, и, следовательно, изменения давления должны быть настолько малы, чтобы изменения плотно-

сти, связанные с этим, могли бы считаться также небольшими.

С другой стороны, это может быть обеспечено тогда, когда скорости потока малы по сравнению со скоростью звука. Например, нашли, что для потока воздуха соотношения, предполагающие постоянство свойств, хорошо описывают действительные процессы до скорости приблизительно 91,5 *м/сек*.

В технике иногда встречаются явления, когда имеют место большие изменения физических свойств. Например, температурная зависимость вязкости масла такова, что она значительно влияет на теплообмен в маслоохладителях даже тогда, когда разность температур весьма умеренная. В ядерных реакторах или при многих других высокотемпературных процессах разности температур настолько велики, что они вызывают очень большие изменения физических свойств. В газах при высоких дозвуковых и особенно при сверхзвуковых скоростях большие колебания давления и температуры связаны с процессами в потоке. В области теплообмена стало обычной практикой видоизменять соотношения, разработанные для потоков жидкостей или газов с постоянными физическими свойствами таким образом, чтобы они учитывали также явления, вызванные изменением физических свойств. Разработаны также некоторые характерные соотношения, которые будут обсуждаться в следующей главе.

При свободной конвекции движение обусловливается только разностью температур. Следовательно, здесь с самого начала процессы тепло- и массообмена тесно связаны между собой.

Настоящая глава посвящена почти исключительно процессам теплообмена при стационарном режиме. В нестационарном процессе (переходном или периодическом) данные здесь соотношения заметно изменяются, поскольку изменение температуры в пограничном слое происходит со значительными запозданиями вследствие аккумуляции тепла (приблизительно, как показано на рис. 4-4).

Однако это относится только к случаям очень быстрых изменений, так как толщина пограничного слоя обычно невелика. Теплоотдачу в цилиндрах дизелей, например, можно рассчитать, пользуясь значениями коэффициентов теплообмена для стационарного режима [Л. 45]. Теплоотдача поверхности самолета или ракеты существенно отли-

чается от теплообмена при стационарном режиме, если имеет место ускорение порядка 20—40 g [Л. 46].

Как указывалось выше, теплообмен определяется гидродинамическими процессами. Поэтому в следующей главе будут рассмотрены наиболее важные элементы теории движения жидкости.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ И В КАНАЛАХ

6-1. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Существуют в основном два понятия теории движения жидкостей, которые важны для понимания явлений теплообмена, а именно: понятие пограничного слоя и понятие турбулентности.

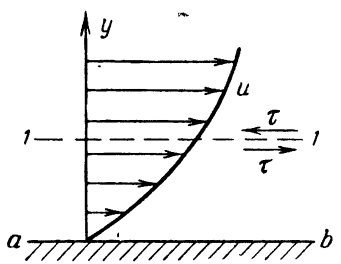


Рис. 6-1. Напряжение сдвига в вязкой жидкости.

Если даже жидкости и газы обладают значительной вязкостью, которая при течении вдоль поверхности твердых тел обусловливает возникновение сил трения, то все же во многих случаях имеется возможность приблизиться к действительным условиям, приняв гипотезу существования жидкости без трения. В такой жидкости наблюдается действие двух сил — инерции и давления. Состояние равновесия обеих сил вдоль каждой струи жидкости определяется уравнением Бернулли (D. Bernouli, 1700—1782):

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const}, \qquad (6\text{-}1)$$

где p — давление жидкости;
ρ — плотность;
v — скорость потока жидкости.

Помимо указанных сил, в реальных жидкостях и газах действуют также другие силы, существование которых обусловливается вязкостью. Эти силы проявляют себя в форме напряжений сдвига между отдельными слоями жидкости, когда последние движутся с различными скоростями. При движении по схеме рис. 6-1, когда вектор скорости u параллелен поверхности стенки ab, а в направле-

нии y, перпендикулярном стенке, наблюдается разность скоростей, напряжение сдвига или напряжение трения τ появляется в результате вязкости в плоскостях, параллельных стенке, например в плоскости *1—1*. Значение этого напряжения дается уравнением Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \tag{6-2}$$

а его направление указывается стрелками на рис. 6-1.

Для других видов потока выражение для напряжения трения более сложное. Выражения для напряжений трения в вязкой жидкости, в обычных условиях которых компоненты скорости u, v, w существуют во всех трех направлениях в пространстве и являются функциями всех трех координат x, y, z, установлены Г. Г. Стоксом (1845).

Согласно Стоксу в плоскости, нормальной направлению y, две величины напряжения трения можно представить в следующем виде:

$$\tau_{y,x} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \tag{6-3}$$

$$\tau_{y,z} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \tag{6-4}$$

Первый индекс при этих напряжениях τ указывает, что эти напряжения действуют в плоскости, перпендикулярной y; второй индекс указывает направление, в котором действует сила, вызванная напряжением. В этом более общем случае скорее уравнение (6-3), чем уравнение (6-2) описывает напряжение трения в направлении, указанном на рис. 6-1.

Подобные напряжения трения существуют в плоскостях, перпендикулярных x и z. Кроме этих напряжений трения, нормальные напряжения существуют во всех плоскостях. Читатель, интересующийся этими соотношениями, найдет более подробную информацию в учебниках по механике жидкостей, например в книге Х. Шлихтинга «Теория пограничного слоя». В нашей книге мы будем рассматривать только такие потоки, для которых простое уравнение (6-2) описывает напряжение трения с достаточной точностью.

Согласно уравнению (6-2), напряжение трения пропорционально градиенту скорости вдоль нормали к направлению потока. Коэффициент пропорциональности μ является физическим параметром, называемым динамической

вязкостью. Его размерность, определяемая из уравнения (6-2), $кГ \cdot сек/м^2$ или $кг/сек \cdot м$. Кроме динамической вязкости, часто применяют кинематическую вязкость. Кинематическая вязкость связывается с динамической вязкостью соотношением

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (6\text{-}5)$$

где ρ — плотность.

Размерность кинематической вязкости — квадратный метр в секунду. В таблицах физических параметров в приложении даются значения коэффициентов вязкости для некоторых жидкостей и газов. Так как значения коэффициентов динамической вязкости в некоторых справочниках даются в абсолютной системе, а именно в пуазах (1 пуаз — 1 $г/см \cdot сек$), то часто при использовании табличных данных вместе с величинами в технической системе мер допускаются ошибки. Этих ошибок можно избежать, если при расчетах применять кинематическую вязкость, которая в обеих системах мер имеет одинаковую размерность. По этой причине кинематическая вязкость приводится в таблицах приложения.

Для жидкостей, а также для газов значение коэффициента динамической вязкости μ зависит главным образом от температуры и лишь в незначительной степени от давления. Только близ критической точки начинает сильно сказываться зависимость от давления. Рис. П-4 иллюстрирует это явление для воды и пара. Все другие исследования жидкости ведут себя принципиально подобным же образом. Согласно уравнению (6-5) кинематическая вязкость ν жидкостей практически тоже не зависит от давления вследствие их незначительной сжимаемости. Для газов согласно уравнению состояния она обратно пропорциональна давлению.

Численное значение коэффициентов динамической вязкости для жидкостей значительно выше, чем для газов. Для кинематической вязкости часто бывает справедливым как раз обратное. Так, например, значение коэффициента кинематической вязкости для воды при комнатной температуре составляет лишь одну десятую значения этого коэффициента для воздуха при той же температуре.

Так как численные значения коэффициентов вязкости сравнительно невелики, высокие напряжения трения в потоке бывают только при значительных градиентах ско-

рости du/dy, как это и следует из уравнения (6-2). Такие значительные градиенты скорости всегда существуют у поверхности твердых тел, находящихся в потоке. Если при помощи трубки Пито определить распределение скоростей близ поверхности твердого тела в потоке, получим кривую распределения скорости, изображенную на рис. 6-2.

У самой поверхности скорость потока равна нулю, затем она возрастает в тонком слое толщиной δ, пока не достигает некоторого постоянного значения. Это явление, весьма важное для гидродинамики и теории теплообмена, было впервые установлено Людвигом Прандтлем в 1904 г. в его знаменитой теории пограничного слоя. Термин пограничный слой для тонкого слоя с резким увеличением скорости был также предложен Прандтлем. За пределами пограничного слоя градиент скорости, нормальный к направлению потока, обычно настолько мал, что вязкостью можно пренебречь. Таким образом, поток можно разделить на две зоны, а именно: на пограничный слой, где наблюдается действие вязкости, и на основное ядро потока за пределами пограничного слоя, где течение происходит практически без трения и поэтому для каждой струи потока справедливо уравнение Бернулли. Тот факт, что пограничный слой делит поток на зоны и, таким образом, вносит изменение в режим основного ядра потока, будет подробнее рассматриваться ниже.

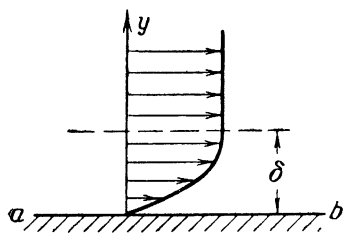


Рис. 6-2. Пограничный слой на поверхности твердого тела.

В 1883 г. Осборн Рейнольдс впервые показал, что существуют два основных режима движения: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме отдельные струи потока располагаются упорядоченно, параллельно друг другу, тогда как при турбулентном режиме они хаотически переплетены друг с другом. В последнем случае отдельные частицы жидкости или газа совершают колебательные движения относительно некоторого среднего пути потока совершенно беспорядочно.

Оба режима можно наблюдать в повседневной жизни по струйкам дыма от папирос. Как видно из рис. 6-3, дым сначала поднимается в виде прямой струйки. Однако вскоре она делается волнистой и кудреватой, и, наконец, дым

совершенно исчезает, перемешиваясь с воздухом. Первая часть струйки дыма представляет собой ламинарную форму потока, а вторая — турбулентную. Турбулентность в потоке воздуха можно создать, внося в него проволочную сетку. В каждой аэродинамической трубе существует турбулентность, создаваемая в потоке воздуха воздуходувкой

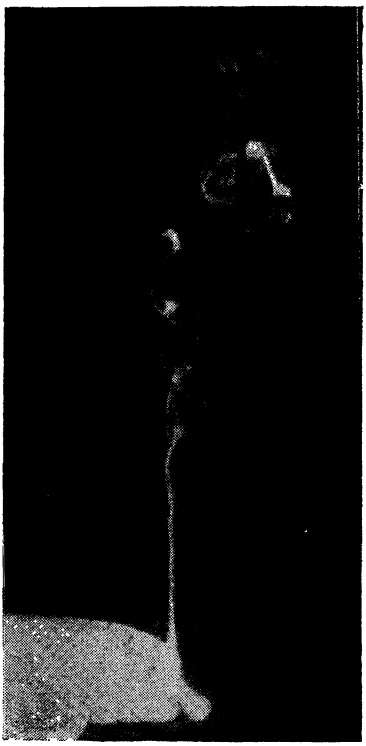


Рис. 6-3. Ламинарный и турбулентный режимы движения струйки табачного дыма.

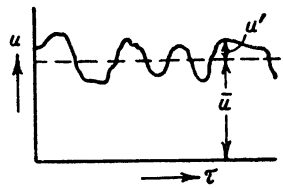


Рис. 6-4. Колебания турбулентной скорости.

и направляющими лопатками.

Количественное описание турбулентного потока и особенно интенсивности турбулентности обычно получают следующим путем. Представьте, что измеряют составляющую скорости u в определенном месте турбулентного потока как функцию времени. В результате получаем график, подобный графику, представленному на рис. 6-4. Составляющая скорости u в любой момент может быть записана как

$$u = u' + \bar{u}, \qquad (6\text{-}6)$$

где $\bar{u}$ — средняя во времени величина u и u' — колебание скорости.

Турбулентный поток называется стационарным, когда $\bar{u}$ не изменяется во времени, а u' определяется тем фактом, что его средняя во времени $\bar{u}'$ равна нулю, когда она берется за достаточно длинный промежуток времени. Подобные соотношения справедливы для составляющих скорости v и w. Допустим, что $\bar{v} = \bar{w} = 0$, это означает, что

средняя скорость имеет место в направлении x. Тогда интенсивность турбулентности обычно описывается выражением

$$J = \frac{\sqrt{1/3\,(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{\bar{u}}, \qquad (6\text{-}7)$$

в которой член $\overline{u'^2}$ — средний во времени квадрат флуктуации скорости u'. Другие члены, которые важны в описании турбулентного потока, это средние во времени произведений колебаний скорости, подобные $\overline{u'v'}$, потому что они связаны с турбулентными напряжениями трения. Подробное рассмотрение этого будет предпринято в следующем разделе.

Вообще для рассуждений в этой книге нам необходимы только осредненные во времени скорости. Поэтому символы u, v, w будут применяться к ним до тех пор, пока мы не установим противное.

Конвективный теплообмен усиливается хаотическими движениями в турбулентном потоке. Поэтому теплообмен в турбулентном потоке происходит гораздо интенсивнее, чем в ламинарном.

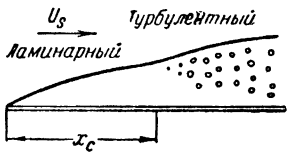


Рис. 6-5. Ламинарный и турбулентный пограничные слои на поверхности плиты.

Турбулентный режим может наблюдаться также и в пределах пограничного слоя. Турбулентность такого рода представляет большой интерес при рассмотрении процессов теплообмена. На поверхности плиты, параллельной потоку, образование пограничного слоя происходит так, как показано на рис. 6-5. Толщина пограничного слоя возрастает в направлении потока, начиная от нуля у переднего края плиты. На некотором критическом расстоянии x_c от переднего края режим движения в пограничном слое меняется с ламинарного на турбулентный. При возрастании скорости потока u_s значение критического расстояния x_c уменьшается, но при этом произведение $u_s x_c$ остается постоянным. Опыты, произведенные с несколькими газами или жидкостями, характеризующимися различными значениями вязкости, показали, что переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при определенном значении безразмерного комплекса $u_s x_c/\nu$. Это явление было впервые открыто Рейнольдсом. В его честь безразмерный комплекс, получаемый делением произведения

скорости потока на расстояние от переднего края плиты на коэффициент кинематической вязкости, был назван числом Рейнольдса или критерием Рейнольдса Re.

Та величина числа Рейнольдса, при которой режим потока меняется с ламинарного на турбулентный, называется критическим или переходным числом Рейнольдса и обозначается Re_c. Более глубокие исследования показывают, что на критическое значение числа Рейнольдса для пограничного слоя оказывают влияние внешние условия. Если ламинарный режим нарушается, например, внесением в поток решетки либо особой формы переднего края плиты, либо шероховатостью поверхности, то переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при более низких значениях числа Рейнольдса. Если, однако, эти причины возмущений в потоке устранены, возможно получить более высокое критическое значение числа Рейнольдса.

Национальным бюро стандартов в результате измерений установлено, что для пограничного ламинарного слоя потока, протекающего по плоской плите, существует определенный верхний предел. В этом исследовании уровень турбулентности потока к верху пластины, систематически изменялся. Интенсивность турбулентности — параметр, определяемый уравнением (6-7),— указывается на оси ординат (рис. 6-6). Критическое число Рейнольдса Re_c откладывается на оси абсцисс.

Из рис. 6-6 можно видеть, что переходное число Рейнольдса увеличивается с понижением турбулентности свободного потока. Это, однако, справедливо только до определенного уровня турбулентности. Ниже величины 0,08% интенсивности турбулентности на критическое число Рейнольдса не влияет турбулентность свободного потока. Поэтому это число Рейнольдса означает верхний предел для пограничного ламинарного слоя потока на плоской пластине. Переходное число Рейнольдса зависит, помимо турбулентности потока, также и от других параметров, например от того, как меняются давление потока и скорость u_s вдоль поверхности. Переходное число Рейнольдса выше, когда давление понижается или когда скорость увеличивается вдоль поверхности, тогда как уменьшение скорости вдоль поверхности понижает критическое число Рейнольдса. Предсказание условий, в которых существует ламинарный или турбулентный поток, очень важно для расчетов теплообмена, потому что ламинарный и турбу-

лентный теплообмен очень различны по своим величинам. За многие годы собрано большое количество данных по критическому числу Рейнольдса для различных условий потока. Затрачено также много усилий на исследование, направленное к уточнению природы турбулентного потока

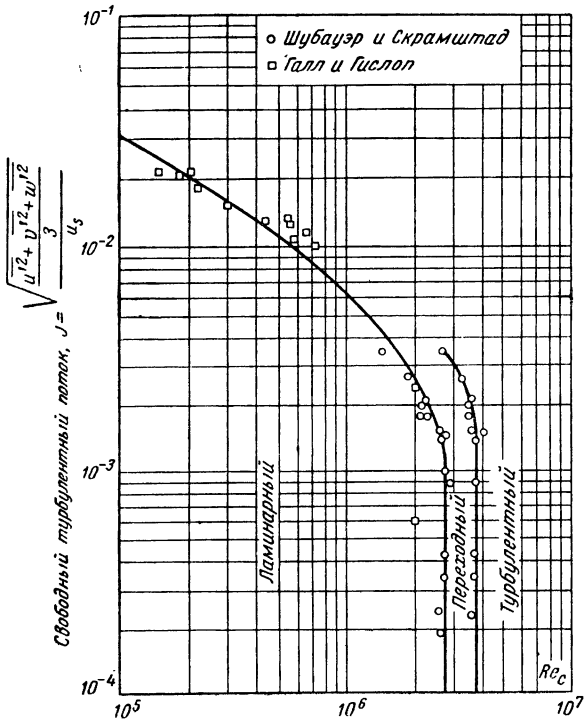


Рис. 6-6. Критическое число Рейнольдса для перехода пограничного слоя к турбулентности на плоской пластине как функция турбулентного потока [Л. 327].

и переходных процессов. Однако сейчас мы располагаем весьма ограниченными данными для понимания этих явлений. Кажется, что по существу переход вызывается тем, что ламинарный поток становится нестабильным в определенных условиях и переходит в турбулентный под влиянием даже незначительных внешних возмущений.

Сам по себе процесс перехода следует рассматривать в большинстве случаев как непрерывный колебательный

процесс. Например, установлено, что точка перехода часто длительно колеблется во времени около среднего положения. Необходим также определенный промежуток времени и, следовательно, в самом поле потока определенное расстояние для полного установления турбулентности после появления первых возмущений. Наблюдения за начальными возмущениями в ламинарном потоке привели к выводу о меньшем критическом числе Рейнольдса, чем измерения параметров, которые указывают установление турбулентного потока. Поэтому различают нижнее и верхнее критическое число Рейнольдса. Две кривые на рис. 6-6 показывают обе эти величины. Особыми средствами, например, при помощи так называемых турбулизирующих устройств (местная шероховатость) можно от-

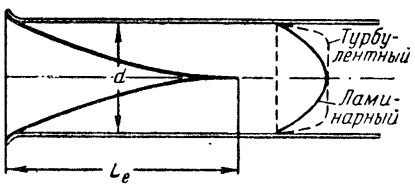


Рис. 6-7. Движение жидкости в трубе на участке близ входного отверстия.

метить расположение переходной точки и ускорить установление турбулентного потока. Такие способы очень полезны и часто применяются в экспериментальных исследованиях теплообмена в турбулентном потоке.

Условия в трубе вблизи входа подобны условиям на продольно обтекаемой пластине.

У внутренней поверхности трубы также образуется пограничный слой, толщина которого до выходного края равна нулю, а затем по мере удаления от входного отверстия постепенно возрастает, как показано на рис. 6-7. Предполагается, что при соответствующей форме входного отверстия трубы движение частиц в трубе происходит без возмущений.

На определенном расстоянии L_e от входа пограничный слой утолщается настолько, что он заполняет все сечение. Кривая распределения скоростей в направлении потока дальше этой точкой не меняется (рис. 6-7) и имеет форму либо параболы, либо выпуклой кривой в зависимости от того, происходит ли движение в пограничном слое все еще при ламинарном режиме или оно уже стало турбулентным.

Эта часть потока называется установившимся потоком. Величина, представляющая собой отношение расстояния L_e к диаметру трубы d, является функцией числа Рейнольдса. В области установившегося потока поток является турбулентным, когда число Рейнольдса превышает критическое значение. Если число Рейнольдса определяется средней скоростью u_m в поперечном сечении трубы диаметра d, то критическая величина критерия Рейнольдса будет определяться выражением

$$\mathrm{Re}_c = \frac{u_m d}{\nu} = 2\,300.$$

Тщательно устраняя все причины, вызывающие в потоке возмущения, можно получить критическое число Рейнольдса, равное 500 000. Для условий, которые обычно наблюдаются в практике, поток в трубах турбулентный тогда, когда число Рейнольдса превышает 3 000.

6-2. УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для следующих ниже расчетов теплообмена необходимо знать характеристики пограничного слоя, в особенности его толщину. Для ламинарного пограничного слоя на поверхности тел различной формы эта задача решена интегрированием уравнений пограничного слоя, которые были выведены Л. Прандтлем в 1904 г. Эти уравнения и некоторые из их решений будут приведены в следующей главе. Однако вычислительная работа трудна и промоздка. Поэтому в настоящей книге принимается приближенный метод, разработанный Т. Карманом [Л. 47]. Этот метод отличается большой простотой и имеет то преимущество, что он может быть применен для тех случаев, когда точное решение невозможно. Во всех случаях разумного применения этого приближенного метода он давал удовлетворительные результаты. Он основан на законе количества движения, который для стабилизированного потока можно сформулировать следующим образом:

Выделим в потоке участок, ограниченный постоянной поверхностью произвольной формы. Частицы жидкости, проходя через этот участок, меняют свое количество движения. Известно, что количество движения равно массе, умноженной на скорость.

Увеличение количества движения всех частиц, проходящих через данный участок за единицу времени, можно вы-

разить как разность между количеством движения частиц, вышедших из участка за единицу времени, и количеством движения частиц, вошедших в участок за ту же единицу времени. Это изменение количества движения в единицу времени равно силам инерции и должно находиться в равновесии с внешними силами, действующими на поверхности участка или внутри него.

Теперь применим этот закон к двухмерному потоку вдоль плоской стенки (рис. 6-8). Используемая система координат расположена таким образом, что ось x параллельна поверхности стенки, а ось y перпендикулярна к ней. Вектор скорости u параллелен поверхности стенки. Вектор скорости v, нормальный к плоскости стенки, незначителен. Закон изменения количества движения применяется к направлению движения вдоль оси x. Контрольный участок в форме параллелепипеда выделяется двумя плоскостями: *1—2* и *3—4*, находящимися на расстоянии dx друг от друга, плоскостью, параллельной поверхности стенки и проходящей на расстоянии l от последней, и поверхностью самой стенки. Значение l превышает толщину пограничного слоя δ. Кривая распределения скоростей в плоскости *1—2* изображена на рис. 6-8. На расстоянии y от поверхности стенки скорость равна u. Скорость потока u_s за пределами пограничного слоя достигается на расстоянии δ от поверхности стенки, а поэтому наблюдается и в выделенном участке l. Плоскости, ограничивающие выделенный участок параллельно плоскости чертежа, находятся на расстоянии единицы друг от друга. За единицу времени через элемент dy на расстоянии y от поверхности стенки протекает масса, равная $\rho u dy$. Ее количество движения в направлении оси x получается умножением этой величины на составляющую скорости u. Тогда для количества движения получаем величину $\rho u^2 dy$. Количество движения жидкости, протекающей через всю плоскость *1—2*, равняется:

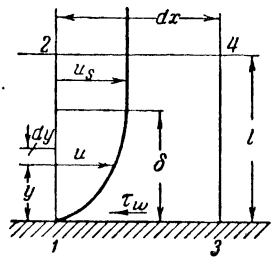


Рис. 6-8. К расчету гидродинамического пограничного слоя.

$$\rho \int_0^l u^2 dy.$$

При движении вдоль оси x количество движения изменяется на величину

$$\rho \frac{d}{dx}\left(\int_0^l u^2 dy\right) dx = \rho dx \frac{d}{dx}\int_0^l u^2 dy.$$

Через плоскость *1—3* движения частиц нет, однако через плоскость *2—4* движение частиц обычно происходит и его можно рассчитать следующим образом. Через плоскость *1—2* за единицу времени проходит масса, равная $\rho\int_0^l u dy$. При перемещении на расстояние dx масса изменяется на $\rho dx \frac{d}{dx} \times$

$$\times \int_0^l u dy.$$

Эта разность массы потока, проходящего через плоскости *3—4* и *1—2*, должна выйти в параллелепипед через плоскость *2—4*. Составляющая скорости в направлении оси x в этой плоскости u_s, поэтому количество движения жидкости, проходящей через плоскость *2—4*, равно:

$$\rho u_s dx \frac{d}{dx}\int_0^l u dy.$$

Отсюда общее увеличение количества движения жидкости в параллелепипеде равно:

$$-\rho u_s dx \frac{d}{dx}\int_0^l u dy + \rho dx \frac{d}{dx}\int_0^l u^2 dy = -\rho dx \frac{d}{dx} \times$$

$$\times \int_0^l (u_s - u) u dy + \rho dx \frac{du_s}{dx}\int_0^l u dy.$$

На поверхность параллелепипеда в направлении оси x действуют следующие внешние силы: напряжение трения τ_w вдоль поверхности стенки *1—3* и давления p и $p + (dp/dx)dx$ на поверхности *1—2* и *3—4* соответственно. На поверхности *2—4* напряжений трения нет, так как эта плоскость находится за пределами пограничного слоя.

Приравнивая эти силы приращению количества движения, получаем:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^l (u_s - u)\, u dy - \rho \frac{du_s}{dx} \int_0^l u dy = \tau_w + l \frac{dp}{dx}. \qquad (6\text{-}8)$$

Теория пограничного слоя показывает, что давление p изменяется в направлении y по всему пограничному слою лишь незначительно.

Поэтому уравнение Бернулли (6-1) можно использовать, чтобы привести уравнение количества движения (6-8) к виду, более подходящему для числовых вычислений. Согласно уравнению Бернулли скорость u_s в потоке за пределами пограничного слоя связана с градиентом давления следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_s \frac{du_s}{dx}. \qquad (6\text{-}9)$$

Это уравнение можно использовать, чтобы выразить последний член правой части уравнения (6-8), имея в виду, что скорость потока u_s не зависит от y:

$$l \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{du_s}{dx} \int_0^l u_s dy.$$

Подстановка в уравнение (6-8) приводит к выражению

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta (u_s - u)\, u dy + \rho \frac{du_s}{dx} \int_0^\delta (u_s - u)\, dy = \tau_w. \qquad (6\text{-}10)$$

Пределы интегрирования теперь изменились, поскольку в области $\delta < y < l$ член $(u_s - u)$ в подынтегральных функциях равен нулю.

Это уравнение можно записать в более простом виде, если использовать следующие сокращения:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) dy \qquad (6\text{-}11)$$

$$\delta_i = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) \frac{u}{u_s} dy \qquad (6\text{-}12)$$

Первая величина называется (displacement thickness) эквивалентной толщиной смещения пограничного слоя, поскольку она указывает, до какой степени следует перемещать поверхность в направлении к потоку для того, чтобы создать такое же внешнее поле потока в невязкой жидкости. Вторая величина δ_i называется (momentum thickness) толщиной количества движения пограничного слоя, поскольку он связан с потоком количества движения или импульсом через плоскость, нормальную к поверхности. Уравнение пограничного слоя, записанное с двумя толщинами пограничного слоя, имеет вид:

$$\rho \frac{d}{dx}(u_s^2 \delta_i) + \rho u_s \frac{du_s}{dx} \delta^* = \tau_w. \qquad (6\text{-}13)$$

Решения уравнения количества движения пограничного слоя будут рассматриваться в следующих параграфах. Однако в начале рассмотрим точные уравнения пограничного слоя, выведенные Л. Прандтлем.

6-3. УРАВНЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

В этом параграфе мы выведем уравнение пограничного слоя из уравнений Навье — Стокса. Эти уравнения, которые, вообще говоря, описывают поток вязкой жидкости, были выведены Навье (1827) и С. Д. Пуассоном (1831) в результате рассмотрения межмолекулярных сил и Сен-Венаном (1843) и Г. Г. Стоксом (1845) на основании предположения, что нормальное напряжение и напряжение трения в жидкости пропорциональны скоростям деформации.

Уравнение Навье — Стокса не будут выводиться здесь, поскольку такая операция займет много места. Вывод этих уравнений можно найти в учебниках по механике жидкостей, например в «Теории пограничного слоя», Х. Шлихтинга. Для жидкости с постоянными характеристиками, движущейся относительно стационарной системы координат x, y, z с составляющими скорости u, v, w, уравнения Навье — Стокса выражающие баланс сил давления и сил вязкости по трем направлениям, имеют вид[1]:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{du}{dy} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} +$$

[1] Предполагается, что объемными силами можно пренебречь.

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \qquad (6\text{-}14)$$

где τ выражает время. Кроме того, нужно выполнить условие сохранения массы:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \qquad (6\text{-}15)$$

В своей знаменитой статье по пограничным слоям, опубликованной в 1904 г., Л. Прандтль пришел к заключению, что в жидкостях с незначительной вязкостью влиянием вязкости можно пренебречь; исключение составляет лишь тонкий слой вдоль твердых поверхностей. На основании этого он начал упрощать уравнения Навье — Стокса путем определения порядка величин различных членов в этих уравнениях. Придерживаясь в основном его идей по выведению уравнений пограничного слоя, мы ограничиваемся двухмерным потоком ($w=0$, $\partial/\partial z=0$).

Применение этих уравнений к ротационно симметричному потоку будет сделано ниже.

Трехмерный поток в пограничном слое обратил внимание на себя недавно в связи с второстепенными задачами. Однако это слишком специфичная и сложная задача, чтобы обсуждать ее здесь.

Исходя из того, что уравнение (6-14) должно описывать поток в тонком пограничном слое, мы предполагаем, что толщина этого слоя δ очень мала по сравнению с любым размером твердого тела, погруженного в поток и окруженного пограничным слоем.

Если поверхность этого тела искривлена, тогда мы предполагаем, что пограничный слой также тонкий по сравнению с радиусом кривизны в любом месте вдоль поверхности. При этих условиях можно выбрать систему координат внутри пограничного слоя, как показано на

рис. 6-9, на котором ось x направлена вдоль поверхности тела, а ось y ориентирована нормально к ней и указывает направление наружу.

Следует ожидать, что в тонком пограничном слое изменение таких параметров, как u, v, p, характеризующих поток, происходит гораздо скорее в направлении y, чем в направлении x. Приняв это во внимание, мы выбираем направление y измерением его в меньшем масштабе, чем длину в направлении x. Это можно сделать, полагая что x является величиной порядка единицы, тогда как y имеет порядок величины δ.

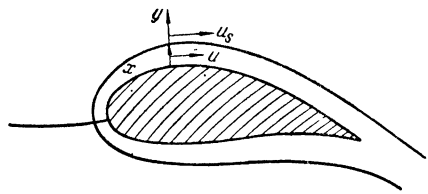


Рис. 6-9. Пограничный слой вокруг обтекаемого потоком тела.

Все другие величины, входящие в уравнения (6-14) и (6-15), мы предполагаем, что они порядка 1, за исключением вязкости, которая считается небольшой.

Например, мы измерим скорость в главном потоке u_s, в таком масштабе, что она также будет порядка единицы. Можно ожидать, что скорости в направлении основного потока в самом пограничном слое — величины такого же порядка. Мы можем легко определить порядок величины составляющих скорости v в направлении y из уравнения непрерывности. Это уравнение требует, чтобы два его члена были величинами одного и того же порядка. Поскольку u и x порядка единицы, производная du/dx должна быть такого же порядка. Мы можем поэтому заключить, что dv/du порядка 1 и что v должно быть порядка δ. Под каждым из членов приведенного ниже уравнения непрерывности указывается порядок величины:

$$\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{\frac{\delta}{\delta}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0.$$

Теперь перейдем к уравнению количества движения в направлении x. Ниже приводится уравнение количества движения и под ним указан порядок величины каждого члена:

$$\underset{1}{\rho}\left(\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial \tau}} + \underset{1}{u}\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{\delta\frac{1}{\delta}}{v}\underset{\frac{1}{\delta}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = \underset{1}{-\frac{\partial p}{\partial x}} + \underset{1}{\mu}\left(\underset{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underset{\frac{1}{\delta^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right).$$

Можно сразу же сказать, что второй член в левой части является величиной порядка единицы. Первый член может быть величиной порядка, меньшего 1, в случае чего мы рассматриваем действительный поток как квазистационарный, или порядок величины этого члена может быть 1, как указывается здесь, или, наконец, он может быть бо́льшим по сравнению с 1. Это означало бы очень быстрое изменение скорости во времени. Однако мы исключаем здесь эту возможность. Мы можем также сразу определить, что порядок величины третьего члена левой части уравнения будет 1. Допустим, что плотность ρ также порядка 1. Для того чтобы определить порядок величины первого члена в правой части уравнения, вспомним, что уравнение Бернулли (6-1) справедливо для потока вне пограничного слоя. Это уравнение для струи может быть записано в таком виде:

$$\underset{1}{\frac{\partial p}{\partial x}} + \underset{1}{\rho} \underset{1}{u_s} \underset{1/l}{\frac{\partial u_s}{\partial x}} = 0.$$

Из-за тонкого пограничного слоя градиент давления не может изменить порядок величины. Поэтому можно заключить, что градиент давления такого же порядка величины, как и член, выражающий инерцию. Теперь следует проанализировать два оставшихся члена правой части уравнения. Порядок величины двух членов внутри круглых скобок можно сразу установить и указать под соответствующими членами. Очевидно, что можно пренебречь членом $\partial^2 u/\partial x^2$ по сравнению с членом $\partial^2 u/\partial y^2$. Оставшийся член, выражающий вязкость, должен быть теперь такого же порядка, как и другие члены в уравнении, если желательно иметь уравнение, содержащее члены, которые будут соответствовать силам вязкости. Поэтому $\mu(\partial^2 u/\partial y^2)$ должно быть порядка 1, что будет выполнено, если мы предположим, что имеем вязкость порядка δ^2. Это означает, что для того, чтобы создать поток пограничного слоя, вязкость должна быть совсем мала, а именно — порядка δ^2.

Такой же порядок величины аргумента для уравнения количества движения по направлению y приводит к выводам, содержащимся в следующем уравнении:

$$\underset{\frac{\delta}{1}}{\rho}\left(\underset{\frac{\delta}{1}}{\frac{\partial v}{\partial \tau}} + \underset{1\frac{\delta}{1}}{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \underset{\delta\frac{\delta}{\delta}}{v\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \underset{\delta^2\left(\frac{\delta^2}{1}+\frac{\delta^2}{\delta^2}\right)}{\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}.$$

Все указанные члены имеют порядок величины δ. Следовательно, $\partial p/\partial y$ должно быть порядка δ, которым можно пренебречь по сравнению с величинами порядка 1 в первом уравнении. Это указывает на то, что изменение давления по всему пограничному слою в направлении, перпендикулярном поверхности, пренебрежимо мало. Другими словами, давление в пограничном слое определяется основной струей потока вне пограничного слоя. Система уравнений, описывающих двухмерный поток пограничного слоя жидкости с постоянными характеристиками, имеет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{6-16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0; \tag{6-17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{6-18}$$

Граничные условия для этих уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad y=0 \qquad u=0, \qquad v=0; \\ &\text{при} \quad y=\infty \qquad u=u_s. \end{aligned} \tag{6-19}$$

Предполагается, что стенка, у которой образуется пограничный слой, находится в состоянии покоя. Может показаться странным, что второе граничное условие записывается для $y=\infty$, тогда как система уравнений пограничного слоя описывает поток в предполагаемом тонком пограничном слое.

Решения, полученные из этих уравнений, показывают, что скорость потока фактически быстро приближается на коротком расстоянии от стенки к постоянной величине. Решения для этих трех уравнений можно получить значительно более простым путем, чем для уравнений Навье—Стокса. Эти уравнения нелинейные; однако одно переменное исключается, поскольку давление теперь следует рассматривать как величину, предписанную основным потоком. Кроме того, один из двух членов вязкости в оставшемся уравнении количества движения также опущен.

Для вращательно-симметричного потока уравнения абсолютно одинаковы. Единственное изменение имеет место

в уравнении непрерывности, которое нужно записать следующим образом:

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial y}=0. \tag{6-20}$$

x опять измеряется вдоль поверхности тела вращения, y — нормально к поверхности, u и v — соответствующие составляющие скорости и r — расстояние рассматриваемой точки поверхности от оси вращения.

Можно заметить, что система уравнений пограничного слоя совершенно не зависит от температуры, поскольку свойства величин ρ и μ, входящих в них, считаются постоянными. Это подтверждает вывод, сделанный ранее о том, что для жидкости с постоянными физическими свойствами поле скорости полностью не зависит от температурного поля в самой жидкости. Теплообмен не имеет никакого влияния на физические характеристики потока.

На стр. 155 упоминалось, что почти все потоки, которые встречаются в технике, можно с достаточной степенью точности считать стационарными. Количественная оценка того факта, когда поток пограничного слоя можно считать квазистационарным, теперь может быть сделана путем сравнения первого члена в уравнении (6-16) со вторым членом. Скорость u имеет порядок u_s, градиент скорости $\partial u/\partial x$ порядка u_s/L при L, указывающем характерный размер тела. Если величина, которой мы измеряем время, равна τ_0, тогда $\partial u/\partial \tau$ будет порядка u_s/τ_0. Первым членом уравнения (6-16) можно пренебречь, когда

$$\frac{u_s}{\tau_0} \ll \frac{u_s^2}{L} \quad \text{или} \quad \tau \gg \frac{L}{u_s}.$$

Для тела с размером $L=0{,}3$ *м*, погруженного в поток, движущийся со скоростью $u_s=30$ *м/сек*, поток можно рассматривать как квазистационарный, когда изменения в нем имеют место за период времени, больший, чем $\tau_0=1/10$ *сек*. Изменения за такое короткое время встречаются редко.

Некоторые решения уравнений пограничного слоя будут рассмотрены позднее. Теперь же вернемся к интегральному уравнению количества движения и с его помощью вычислим толщину пограничного слоя. Это действие дает только приближенные результаты; однако оно имеет то огромное преимущество, особенно для задач технических, что само вычисление значительно короче и этот метод может приме-

няться широко, тогда как даже со значительными усилиями решения дифференциальных уравнений пограничного слоя были получены для ламинарного потока только в ограниченном числе случаев. Преимущество интегрального уравнения количества движения заключается главным образом в том, что оно является общим дифференциальным уравнением для x, в то время как полные уравнения пограничного слоя являются частными дифференциальными уравнениями для x и y.

6-4. ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Используем уравнение (6-8) для расчета толщины пограничного слоя на поверхности плоской стенки при установившемся потоке. Как уже упоминалось выше, у поверхности плиты близ ее переднего края существует ламинарный пограничный слой (рис. 6-5). Пусть скорость движения жидкости за пределами пограничного слоя будет постоянной вдоль всей плиты. Тогда согласно уравнению Бернулли и давление также будет постоянным, поэтому последний член уравнения (6-8) обращается в нуль. Как показали измерения, кривая распределения скоростей в ламинарном пограничном слое имеет форму кривой, изображенной на рис. 6-10.

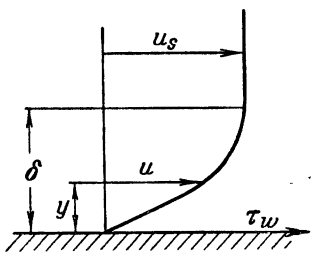


Рис. 6-10. Ламинарный пограничный слой на плоской плите.

Метод решения, предложенный Т. Карманом, основан на допущении произвольного выражения для распределения скорости с некоторым числом постоянных, вычисляемых с соблюдением определенных условий. В качестве последних могут быть использованы условия на поверхности стенки ($y=0$) или на границе между пограничным слоем и потоком ($y=\delta$). Известно, что

при $y=0$

$$u=0; \tag{6-21}$$

при $y=\delta$

$$u=u_s. \tag{6-22}$$

Если уравнение пограничного слоя (6-16) записано для $y=0$, тогда для постоянного давления при $y=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{6-23}$$

По выходе за пределы пограничного слоя $y>\delta$ кривая распределения скоростей должна отражать существование постоянной скорости u_s, не претерпевая разрывы непрерывности.

Поэтому для $y=\delta$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{6-24}$$

Это необходимое условие. Можно показать, что вторая, третья или любая другая более высокая производная будет также равна 0 при $y=\delta$. Но мы удовлетворимся здесь четырьмя условиями (6-21) — (6-24). Соответственно мы можем выбрать для профиля скорости выражение с четырьмя неопределенными коэффициентами, например

$$u=a+by+cy^2+dy^3 \tag{6-25}$$

Эти коэффициенты можно определить, подставляя уравнение (6-21) — (6-24) в уравнение (6-25). Они будут иметь вид:

$$a=0;\quad b=\frac{3u_s}{2\delta};\quad c=0;\quad d=-\frac{1}{2}\frac{u_s}{\delta^3}$$

и кривая распределения скоростей определяется уравнением

$$\frac{u}{u_s}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{6-26}$$

Используя эту формулу для интеграла количества движения в уравнении (6-8), получаем:

$$I=\rho\int_0^l (u_s-u)\,u\,dy=\rho u_s^2\int_0^{\delta}\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy.$$

Верхний предел определенного интеграла необходимо было изменить на δ, так как для $y>\delta$ скорость $u=u_s$ и подынтегральное выражение обращается в нуль, а также поскольку уравнение (6-26) справедливо только для $y\leqslant\delta$.

Если перемножить выражения в скобках, а затем выполнить интегрирование, получим:

$$I = \frac{39}{280} \rho u_s^2 \delta.$$

Градиент скорости у поверхности плиты определяется из уравнения (6-26):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{3}{2} \frac{u_s}{\delta}.$$

Поэтому напряжение трения у поверхности равно:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{3}{2} \mu \frac{u_s}{\delta}.$$

Подстановка этого выражения и значения I в уравнение количества движения [уравнение (6-8)] дает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{39}{280} \rho u_s^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_s}{\delta}.$$

Разделив переменные, получим:

$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_s} dx. \qquad (6\text{-}27)$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к следующей формуле:

$$\delta = 4{,}64 \sqrt{\frac{\nu x}{u_s}} + \text{const}. \qquad (6\text{-}28)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, когда x измеряется от переднего края плиты, так как при $x = 0$ толщина δ также равна нулю. Формула (6-28) показывает, что δ увеличивается пропорционально корню квадратному из расстояния x. Этой формуле полезно придать безразмерный характер:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{u_s x/\nu}}.$$

Подкоренное выражение является критерием Рейнольдса для данного расстояния x от переднего края плиты. Если это выражение обозначить символом Re_x, придем к следующему уравнению:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (6\text{-}29)$$

Таким образом, толщина пограничного слоя δ измеряется тем расстоянием от поверхности плиты, где скорость, определяемая из уравнения (6-26), достигает значения скорости основного ядра потока. Ясно, что такое определение толщины пограничного слоя является несколько условным. Точный расчет ламинарного пограничного слоя показывает, что кривая распределения скоростей лишь асимптотически приближается к значению скорости основного ядра потока. При такой форме кривой распределения скоростей для толщины пограничного слоя по приведенному выше определению не существует конечных значений. Применялись и другие определения; так как, например, за толщину пограничного слоя принимали то расстояние от поверхности плиты, где скорость равняется 0,99 скорости основного ядра потока. В настоящее время, однако, широкое распространение получила величина, называемая эквивалентной толщиной пограничного слоя (displacement thickness) *. Ее определяют методом, который иллюстрируется рис. 6-11. Прямоугольник *abcd* равновелик фигуре, образуемой кривой распределения скоростей, ординатой и асимптотой. Ширина этого прямоугольника δ^* и есть эквивалентная толщина пограничного слоя.

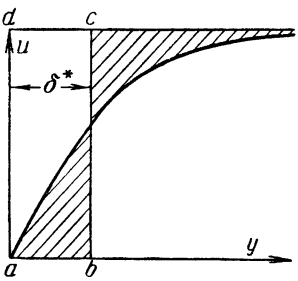


Рис. 6-11. К определению эквивалентной толщины пограничного слоя.

Математически она описывается уравнением

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) dy. \qquad (6\text{-}30)$$

Название этой величины основано на том, что в потоке жидкости без трения и пограничного слоя скоростное поле осталось бы таким же, как и для реальной жидкости с пограничным слоем, только при смещении стенки на величину δ^*. Для скоростного поля, определяемого уравнением

* Величину δ^* часто называют толщиной вытеснения, что не соответствует ее аналитическому определению. (*Прим. ред.*)

(6-26), приведенный выше интеграл дает следующий результат:

$$\delta^* = 0{,}375\delta \approx \frac{\delta}{3}.$$

Величина количества движения, даваемая уравнением (6-12),

$$\delta_i = \frac{39}{280}\delta = 0{,}139\delta \approx \frac{\delta}{7}.$$

Тогда напряжение трения у стенки

$$\tau_w = \frac{0{,}323\rho u_s^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (6\text{-}31)$$

Вместо этой величины часто применяют коэффициент трения f_p, который равняется силе сопротивления движению по поверхности плиты, деленной на площадь поверхности плиты и динамическое давление в потоке. Необходимо различать две величины: локальный коэффициент трения f_p и средний коэффициент трения f_{pm}. Первый определяется из уравнения

$$\tau_w dx = f_p dx \rho \frac{u_s^2}{2},$$

откуда

$$f_p = \frac{2\tau_w}{\rho u_s^2}.$$

Второй можно найти из равенства

$$\int_0^x \tau_w dx = f_{pm} x \rho \frac{u_s^2}{2},$$

откуда

$$f_{pm} = \frac{2}{x\rho u_s^2} \int_0^x \tau_w dx = \frac{1}{x} \int_0^x f_p dx$$

или

$$f_{pm} = \frac{1{,}292}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Более точные расчеты для числителя данной формулы, основанные на решении уравнений пограничного слоя, дают значение 1,327, т. е. на 3% больше. Формула находится в хорошем соответствии с результатами опытов.

Пример 6-1. Необходимо определить толщину пограничного слоя на расстоянии 100 *мм* от переднего края плиты при движении воздуха вдоль ее поверхности. Скорость движения воздуха 10 *м/сек*, температура 16° С, давление — атмосферное. Находим критерий Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_s x}{\nu} = \frac{10 \cdot 0{,}1}{1{,}48 \cdot 10^{-5}} = 67\,500.$$

Значение коэффициента кинематической вязкости взято из таблиц приложения. Отношение толщины пограничного слоя к расстоянию от переднего края плиты

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}67}{\sqrt{67\,500}} = 0{,}0178,$$

откуда толщина пограничного слоя на расстоянии 100 *мм* от края равна 1,8 *мм*. Эквивалентная толщина пограничного слоя $\delta^* = 0{,}6$ *мм*. Отсюда видно, что при обычных скоростях и расстояниях толщина пограничного слоя достигает около 2 *мм*.

Для турбулентного пограничного слоя кривая распределения скоростей обладает гораздо большей кривизной, чем для ламинарного пограничного слоя. Хорошее приближение к действительному распределению скоростей дает формула Прандтля:

$$u = u_s \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}. \qquad (6\text{-}32)$$

Однако для участка, лежащего непосредственно у поверхности плиты, формула неверна. В этом можно убедиться, сделав расчет напряжения сдвига у поверхности. Градиент скорости

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{7} \frac{u_s}{(\delta^{1/7})(y^{6/7})},$$

т. е. у самой поверхности плиты (при $y = 0$) бесконечно велик. Вследствие этого и напряжение сдвига у поверхности должно было бы быть бесконечно большим, что физически невозможно. В действительности турбулентность всегда исчезает у поверхности. Реальные условия можно упростить, приняв гипотезу Прандтля, что между турбулентным пограничным слоем и поверхностью плиты существует ламинарный подслой, в пределах которого скорость воз-

растает прямо пропорционально изменению ординаты y. За пределами этого подслоя справедливо уравнение (6-32). Предполагаемые кривые распределения скоростей сопрягаются на границе подслоя, образуя очень небольшой угол, как показано на рис. 6-12.

Напряжение трения у поверхности плиты здесь необходимо определять непосредственным измерением.

Для неслишком больших значений критерия Рейнольдса и гладких поверхностей хорошие результаты дает формула Блазиуса:

$$\tau_w = 0{,}0228\rho u_s^2 \left(\frac{\nu}{u_s\delta}\right)^{1/4}. \quad (6\text{-}33)$$

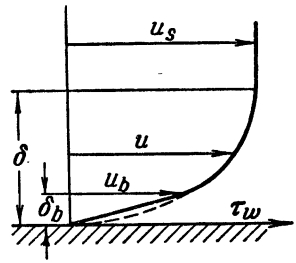


Рис. 6-12. Ламинарный подслой и турбулентный пограничный слой.

Формула выведена на основании результатов опытов с движением жидкостей и газов в трубах. Шульц-Грунов [Л. 48] опытным путем доказал справедливость этой формулы для движения вдоль плоских плит вплоть до $\mathrm{Re}=10^7$. Для более высоких значений критерия Рейнольдса существует весьма сложное уравнение, речь о котором будет идти ниже.

Подставив значение u из формулы (6-32) в уравнение количества движения (6-8), получим:

$$I = \rho\int_0^l u(u_s - u)\,dy = \rho u_s^2\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]dy = \frac{7}{72}\rho u_s^2\delta.$$

Здесь также верхний предел интегрирования необходимо заменить на δ, так как уравнение (6-32) справедливо лишь для $y < \delta$. При $y > \delta$ и $u = u_s$ интегрируемое выражение обращается в нуль.

Подстановка значения интеграла I и формулы (6-33) в уравнение количества движения приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{7}{72}\rho u_s^2\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0228\rho u_s^2\left(\frac{\nu}{u_s\delta}\right)^{1/4}.$$

Разделив переменные, получим:

$$\delta^{1/4}d\delta = 0{,}235\left(\frac{\nu}{u_s}\right)^{1/4}dx.$$

После интегрирования имеем:

$$\delta = 0{,}376 \left(\frac{\nu}{u_s}\right)^{1/5} x^{4/5} + \text{const.} \qquad (6\text{-}34)$$

Некоторые трудности возникают при определении константы интегрирования. Из рис. 6-5 следует, что начало турбулентного пограничного слоя находится на некотором критическом расстоянии x_c от переднего края. В этой точке он уже имеет определенную толщину, так как он возникает из ламинарного пограничного слоя. Оба слоя должны соединяться в этой точке. Иногда говорят, что величины количества движения турбулентного и ламинар-

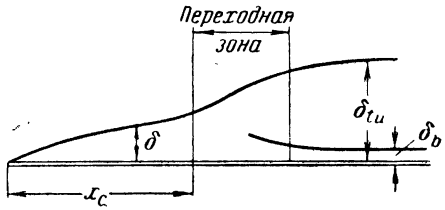


Рис. 6-13. Ламинарный и турбулентный пограничные слои на плоской плите.

ного слоя здесь равны. По Л. Прандтлю [Л. 49] (рис. 6-13) выражение (6-34) хорошо согласуется с измерениями, если определить толщину турбулентного пограничного слоя, положив, что он начинается у переднего края, имея в этом месте нулевую толщину. Последние экспериментальные наблюдения показывают, что это не совсем так, но мы, однако, примем это упрощающее допущение. Постоянная в уравнении (6-34) тогда равна 0, причем x выражает расстояние от переднего края. В критериальной форме уравнение (6-34) приобретает вид:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}376}{(u_s x/\nu)^{1/5}} = \frac{0{,}376}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}. \qquad (6\text{-}35)$$

В правой части равенства снова появляется критерий Рейнольдса, вычисленный для расстояния x. Эквивалентная толщина пограничного слоя турбулентного потока согласно уравнению (6-32) равна $\delta^* = \delta/8$, а величина $\delta_i = \frac{7}{72}\delta$. Если для критического расстояния рассчитать и ламинарный и турбулентный пограничные слои, то последний окажется толще. В дейст-

вительности мгновенное возрастание толщины пограничного слоя невозможно.

Переход от ламинарного к турбулентному пограничному слою имеет место в переходной зоне, показанной на рис. 6-13.

Переход от ламинарного к турбулентному режиму движения в пределах пограничного слоя начинается с колебаний сравнительно большой длины волны. В основном эти колебания носят тот же характер, что и волны, которые можно наблюдать при обтекании вертикальной плиты в пограничном слое в случае свободной конвекции (рис. 11-11). Как было аналитически доказано В. Толлымином [Л. 50] и Х. Шлихтингом [Л. 51], движение в пограничном слое становится неустойчивым при таких колебаниях с определенной длиной волны, когда толщина пограничного слоя достигает некоторого определенного значения. Эти колебания всегда существуют в потоке вследствие действия различного ряда побудителей, приходящих из внешнего потока. В неустойчивой области пограничного слоя они не затухают, а усиливаются по направлению течения жидкости. Постепенно волны приобретают неправильную форму и превращаются в завихрения, которые в конце концов совсем размываются, приобретая характер умеренного турбулентного движения. Из-за случайной природы возмущений наложение переходной зоны зависит от беспорядочных колебаний во времени. Эта зона чрезвычайно трудно поддается изучению, и наши знания о процессах в ней весьма ограничены. Расчеты, приводимые в настоящем параграфе, относятся исключительно к области с вполне установившейся турбулентностью.

Для последующих расчетов теплообмена необходимо знать толщину ламинарного подслоя δ. Для этого требуется раньше определить скорость u_b на границе между турбулентным слоем и ламинарным подслоем. По напряжению трения на поверхности плиты находим увеличение линейной скорости в ламинарном подслое:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{y}.$$

Подстановка значения τ_w в это равенство дает следующую формулу:

$$u = 0{,}0228 \rho \frac{u_s^2}{\mu} \left(\frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{1/4} y.$$

Решая это уравнение относительно y и имея в виду, что при $y=\delta_b$, $u=u_b$, получаем:

$$\frac{\delta_b}{\delta}=\frac{u_b}{u_s}\frac{1}{0{,}0228}\left(\frac{\nu}{u_s\delta}\right)^{3/4}.$$

С другой стороны, использовав уравнение (6-32), находим:

$$\frac{\delta_b}{\delta}=\left(\frac{u_b}{u_s}\right)^7.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, приходим к следующему выражению:

$$\frac{u_b}{u_s}=1{,}878\left(\frac{u_s\delta}{\nu}\right)^{-1/8}=\frac{1{,}878}{(\mathrm{Re}_\delta)^{1/8}}. \qquad (6\text{-}36)$$

Здесь критерий Рейнольдса вычисляется по толщине пограничного слоя. С помощью уравнения (6-35) вводим расстояние x:

$$\frac{u_b}{u_s}=2{,}12\left(\frac{\nu}{u_s x}\right)^{0,1}=\frac{2{,}12}{(\mathrm{Re}_x)^{0,1}}. \qquad (6\text{-}37)$$

Теперь толщину ламинарного подслоя можно определить из уравнения

$$\frac{\delta_b}{\delta}=\left(\frac{u_b}{u_s}\right)^7=\frac{194}{(\mathrm{Re}_x)^{0,7}}. \qquad (6\text{-}38)$$

Напряжение сдвига у поверхности плиты определяется из формулы

$$\tau_w=\mu\frac{u_b}{\delta_b}$$

или

$$\tau_w=\frac{0{,}0296}{(\mathrm{Re}_x)^{0,2}}\rho u_s^2.$$

Сопротивление потоку можно рассчитать по напряжению сдвига на участке с ламинарным пограничным слоем и на участке с турбулентным пограничным слоем. Для критического значения критерия Рейнольдса, равного 485 000, этот расчет дает следующий результат:

$$f_{pm}=\frac{0{,}074}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}-\frac{1\,700}{\mathrm{Re}_x},$$

а для критического значения Re, равного 85 000,

$$f_{pm} = \frac{0{,}074}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} - \frac{300}{\mathrm{Re}_x}.$$

На рис. 6-14 представлен график поля скоростей в турбулентном пограничном слое согласно экспериментальным исследованиям ван дер Хегге-Цинен [Л. 52]. Здесь тоже вместо резкого перехода от одного режима к другому наблюдается переходная зона, в пределах которой турбулентность постепенно замирает. На рис. 6-15 дано сравнение

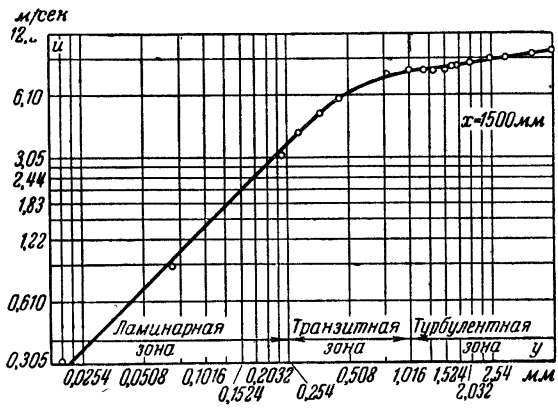


Рис. 6-14. Кривая распределения скоростей в турбулентном пограничном слое на плоской плите по результатам опытов ван дер Хегге—Цинен [Л. 329].

кривых, построенных на основании двух данных выше формул для коэффициента трения, с экспериментальными данными. При больших числах Рейнольдса (свыше 10^7) уравнение Блазиуса не описывает результаты измерений с достаточной точностью. Интерполяцией были получены различные формулы, которые достаточно точны вплоть до $\mathrm{Re} = 10^9$. Хорошо известно уравнение Кармана — Шоенгерра:

$$\frac{0{,}242}{\sqrt{f_{pm}}} = \lg(\mathrm{Re}_x f_{pm}).$$

Зависимость, предложенная Прандтлем и Шлихтингом, более удобна:

$$f_{pm} = \frac{0{,}455}{(\lg \mathrm{Re}_x)^{2{,}58}}.$$

Для коэффициента локального трения Шульц-Грюнов дает следующее соотношение:

$$f_p = \frac{0{,}370}{(\lg \mathrm{Re}_x)^{2{,}584}}.$$

При более высоких числах Рейнольдса влиянием ламинарного пограничного слоя можно пренебречь, о чем свидетельствует рис. 6-15.

Вышеприведенные соотношения справедливы для абсолютно гладкой поверхности. Обычно на шероховатых по-

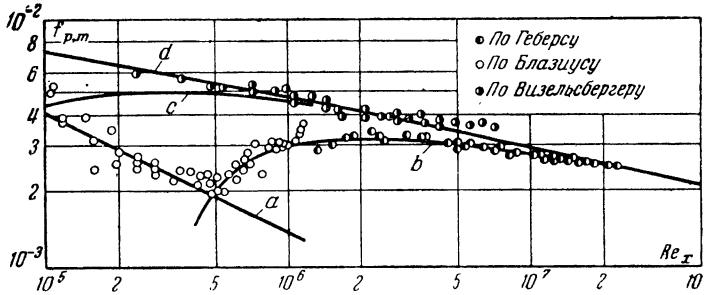


Рис. 6-15. Значение коэффициента трения для ламинарного и турбулентного пограничных слоев на плоской плите [Л. 330].

верхностях трение больше, чем на гладких. Подробнее о шероховатости поверхностей будет сказано в разделе 6-7.

Пример 6-2. Требуется рассчитать толщину турбулентного пограничного слоя на расстоянии 300 *мм* от переднего края плоской плиты, которая омывается потоком воздуха со скоростью 10 *м/сек* при температуре 16° С и атмосферном давлении.

Определим критерий Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{10 \cdot 0{,}3}{1{,}48 \cdot 10^{-5}} = 203\,000.$$

Из уравнения (6-35) находим, что отношение толщины пограничного слоя к расстоянию от переднего края плиты $\frac{\delta}{x} = 0{,}03$. Отсюда толщина пограничного слоя равна 10 *мм*, а эквивалентная толщина пограничного слоя равна 1,25 *мм*. Согласно формуле (6-38) отношение толщины ламинарного подслоя к толщине турбулентного слоя $\frac{\delta_b}{\delta} = 0{,}037$. Таким образом, толщина подслоя равна 0,37 *мм*. Вследствие незначительности толщины подслоя напряжение сдвига у поверхности плиты для турбулентного потока в значительной степени определяется шероховатостью плиты, тогда как для ламинарного потока шероховатость

играет лишь незначительную роль. Это можно объяснить тем, что напряжение сдвига и сила трения о поверхность значительно возрастают, если шероховатость не полностью покрывается ламинарным подслоем. Точные экспериментальные измерения показывают, что сопротивление потоку сильно возрастает, если высота шероховатости приблизительно на одну треть превосходит толщину ламинарного подслоя. Для рассматриваемого примера поверхность плиты с высотой шероховатости менее 0,1 *мм* может считаться гидравлически гладкой. Толщина ламинарного подслоя обратно пропорциональна скорости u_s и лишь в слабой степени обусловливается расстоянием от переднего края плиты. При высоких скоростях во избежание сильного повышения сопротивления потоку поверхность плиты надо обрабатывать с особой тщательностью. Формула (6-33) справедлива только для гладкой плиты.

6-5. ГРАДИЕНТЫ ДАВЛЕНИЯ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

При наличии потока, в котором давление изменяется вдоль поверхности плиты, методику расчета следует изменить, чтобы учесть этот градиент давления. Проведем такой расчет для ламинарного пограничного слоя у поверхности ($y=0$). При этом уравнение (6-16) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_w .$$

Это выражение заменяет уравнение (6-23) предыдущего параграфа. Используя уравнение Бернулли и зная, что dp/dx постоянно для всего пограничного слоя, можно записать его в следующем виде:

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_w=-\frac{1}{\nu}u_s\frac{du_s}{dx}. \qquad (6\text{-}39)$$

На основании этого уравнения и уравнений (6-21), (6-22) и (6-24) определяем коэффициенты в выражении для поля скоростей

$$u=a+by+cy^2+dy^3.$$

Дифференцируя это уравнение дважды и полагая, что $y=0$, приходим к следующему уравнению для коэффициента c:

$$c=-\frac{1}{2\nu}u_s\frac{du_s}{dx}.$$

Коэффициенты a, b и d определяются из других граничных условий.

Таким образом, профиль скорости выражается формулой

$$\frac{u}{u_s}=\left(\frac{3}{2}+\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{y}{\delta}-\varkappa\left(\frac{y}{\delta}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\varkappa}{2}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \qquad (6\text{-}40)$$

где

$$\varkappa = \frac{\delta^2}{2\nu}\frac{du_s}{dx}.$$

Напряжение трения

$$\tau_w = \mu\left(\frac{3}{2}+\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{u_s}{\delta}. \qquad (6\text{-}41)$$

Вводя выражение для профиля скорости и напряжения трения в уравнение количества движения пограничного слоя и интегрируя его, получим:

$$\rho\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{39}{280}-\frac{1}{208}\varkappa-\frac{1}{420}\varkappa^2\right)\right]u_s^2\delta+$$

$$+\rho\left(\frac{3}{8}-\frac{\varkappa}{24}\right)u_s\frac{du_s}{dx}\delta=\left(\frac{3}{2}+\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{u_s\mu}{\delta}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{39}{280}-\frac{1}{208}\varkappa-\frac{1}{420}\varkappa^2\right)u_s^2\delta\right]=\frac{\nu u_s}{\delta}\left(\frac{3}{2}-\frac{\varkappa}{4}+\frac{\varkappa^2}{12}\right). \qquad (6\text{-}42)$$

Необходимо знать изменение скорости потока вдоль поверхности. Уравнение (6-42) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной величины δ, поскольку параметр $\varkappa$ является функцией толщины пограничного слоя δ [уравнение (6-41)] и известных параметров. Интегрирование лучше проводить численно или графически. В результате такого расчета получаем толщину пограничного слоя вдоль поверхности. Эта величина в любой точке x вдоль поверхности определяет параметр $\varkappa$ уравнения (6-41), а с ним и форму профиля пограничного слоя. Можно видеть, что отрицательное $\varkappa$ указывает на положительную кривизну профиля скорости на поверхности ($y=0$), т. е. профиль в форме буквы S. При $\varkappa=-3$ у стены имеется дополнительный градиент скорости $du/dy=0$. Большие отрицательные значения $\varkappa$ привели бы к профилю скорости с отрицательными скоростями около стены, указывающими на наличие обратного потока. Поэтому, когда расчет пограничного слоя дает величину $\varkappa=-3$ в любом месте, тогда этот факт можно рассматривать как указывающий на отделение потока. Первые такие вычисления проводились Польхаузеном [Л. 53]. Для описания профиля скорости в пограничном слое вместо уравнения (6-40) он использовал полином

четвертого порядка и рассчитал развитие пограничного слоя вокруг круглого цилиндра.

Подобные методы расчета разработаны также для турбулентного пограничного слоя. Турбулентные пограничные слои в потоках при больших градиентах давления встречаются значительно реже, чем ламинарные, поэтому методы расчета для них здесь не обсуждаются.

6-6. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Установление ламинарного пограничного слоя вдоль плоской пластины при постоянном давлении для стационарного состояния было изучено довольно рано путем интегрирования уравнений пограничного слоя потока. Эти расчеты были выполнены Х. Блазиусом после того, как Л. Прандтль показал, что для рассматриваемых условий потока возможно преобразование дифференциальных уравнений в частных производных (6-16) и (6-18) в полные дифференциальные уравнения. Два дифференциальных уравнения, описывающие поток, можно объединить в одно уравнение, вводя функцию тока Ψ, определяемую следующим образом:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Введение функции тока в уравнение непрерывности (6-18) удовлетворяет это уравнение. Уравнение количества движения (6-16) принимает вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \tag{6-43}$$

Л. Прандтль показал, что это уравнение может быть преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение, если ввести новую независимую переменную

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{u_s}{\nu x}}$$

и допустить, что функция тока может быть записана следующим образом:

$$\Psi = \sqrt{\nu u_s x}\, f(\eta),$$

где f является функцией только η. Введение этих двух новых

параметров f и η в уравнение количества движения дает новое уравнение

$$\frac{d^3f}{d\eta^3}+f\frac{d^2f}{d\eta^2}=0. \tag{6-44}$$

Граничные условия (6-19) для двух новых переменных такие:

при $\eta=0$

$$f=0;\quad \frac{df}{d\eta}=0;$$

при $\eta=\infty$

$$\frac{df}{d\eta}=2.$$

Совершенно очевидно, что функция f сразу же описывает две составляющие скорости согласно соотношениям

$$u=\frac{u_s}{2}\frac{df}{d\eta};\quad v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_s}{x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta}-f\right).$$

Блазиус решил это уравнение, разлагая функцию f в ряды.

Позже Пиерси и Престон [Л. 54] дали другой метод, который привел к простому решению путем последовательных приближений. Для этого обозначим вторую производную от f через z. Тогда дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{d\eta}=-fz.$$

Если мы в какой-то момент рассматриваем f как данную функцию η, то можно разделить переменные:

$$\frac{dz}{z}=-fd\eta$$

и произвести интегрирование

$$\ln z=-\int fd\eta+\ln C_1;\quad z=C_1e^{-\int fd\eta}.$$

Дополнительное интегрирование приводит к следующему выражению для скорости u в пограничном слое:

$$\frac{u}{u_s}=\frac{1}{2}\frac{df}{d\eta}=\frac{1}{2}\int zd\eta=\frac{C_1}{2}\int e^{-\int fd\eta}d\eta+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий и после подстановки дают:

$$\frac{u}{u_s}=\frac{\int_0^{\eta} e^{\int_0^{\eta} f\,d\eta}\,d\eta}{\int_0^{\infty} e^{\int_0^{\eta} f\,d\eta}\,d\eta}. \qquad (6\text{-}45)$$

Это уравнение нельзя рассматривать как решение уравнения (6-44), поскольку неизвестна функция f, которая появляется в показателе степени в правой части уравнения. Однако оно может быть использовано для того, чтобы получить решение путем последовательных приближений следующим образом.

Делается первая оценка функции f. Эта величина подставляется в уравнение (6-45), и уравнение решается относительно u. Дополнительное интегрирование дает f, которое опять можно подставить в уравнение (6-45) как второе приближение функции f. Интегрированием получаем третье приближение, и так можно продолжать до тех пор, пока последовательные приближения не будут удовлетворительно совпадать одно с другим. Пиерси и Престон начали свои вычисления с грубого допущения, что $f=2\eta$, и получили очень хорошее решение для профиля скорости всего лишь после трех последовательных повторений.

Профиль скорости, полученный таким образом, изображен на рис. 6-16. Здесь приводится также профиль, описываемый уравнением (6-26), с эквивалентной толщиной пограничного слоя. Из рисунка видно, что совпадение вполне удовлетворительное. Точные решения уравнений ламинарного пограничного слоя получены также для двухмерного потока на поверхности, когда скорость потока изменяется согласно соотношению

$$u_s=Cx^m.$$

Это распределение скорости устанавливается вдоль поверхности бесконечного клина с углом раскрытия $\alpha=2m\pi/(m+1)=\beta\pi$ в несжимаемом потоке, направленном симметрично по направлению к вершине. Поэтому эти решения относятся к типу решений для потока, омывающего клин. Опять-таки преобразование уравнений пограничного

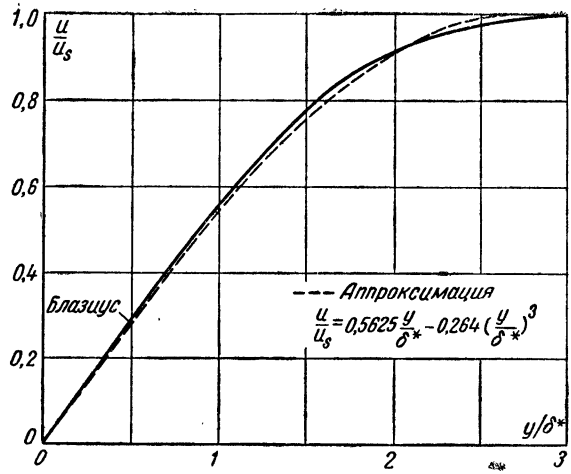


Рис. 6-16. Кривая распределения скорости в ламинарном пограничном слое вдоль плоской пластины, рассчитанная Х. Блазиусом и аппроксимированная полиномом третьей степени.

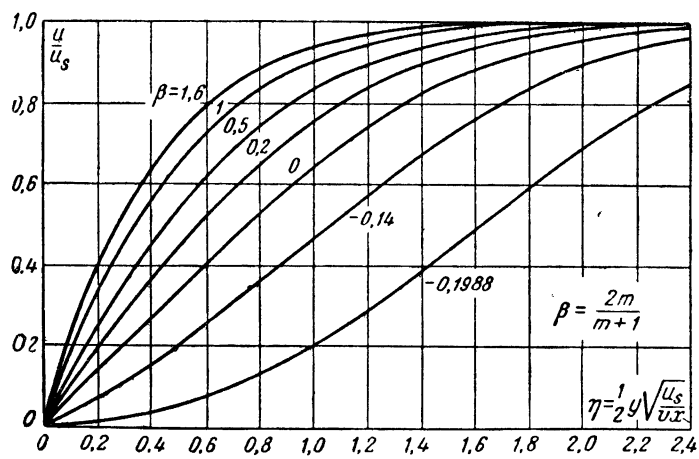


Рис. 6-17. Кривые распределения скорости для потока с ламинарным пограничным слоем над клином при разных значениях параметра давления β [Л. 331].

слоя в обыкновенные дифференциальные уравнения возможно путем таких же преобразований, какими мы пользовались и прежде. Окончательное дифференциальное уравнение в полных производных будет иметь вид [Л. 55]:

$$\frac{d^3f}{d\eta^3}+f\frac{d^2f}{d\eta^2}-\frac{2m}{m+1}\left[\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2-1\right]=0. \qquad (6\text{-}46)$$

Профили скорости для этого типа потока показаны на рис. 6-17. Профиль с параметром $\beta=0$ ($m=0$) является профилем Блазиуса. Положительные значения β или m указывают увеличение скорости вдоль поверхности. Значение $m=1$ ($\beta=1$) соответствует углу клина $\alpha=180°$ или двухмерному потоку, направленному нормально к плоской пластине. Этот поток также имеет место вблизи любой образующей тупого цилиндра. Отрицательные значения m соответствуют потоку, скорость которого понижается вдоль поверхности. Значение $m=-0{,}1104$ ($\beta=-0{,}1988$) характеризуется тем фактом, что градиент скорости этого профиля у поверхности равен нулю (профиль разделения потока).

6-7. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Расчет потока в трубе вблизи входного отверстия можно также производить при помощи уравнения количества движения (6-8). Для труб круглого сечения уравнения количества движения выводятся и решаются для асимметричного потока.

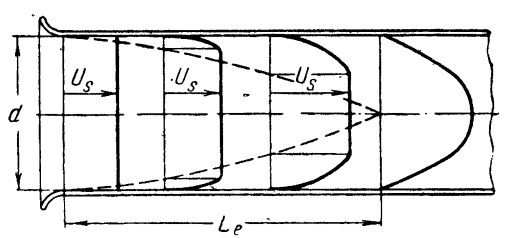


Рис. 6-18. Развитие скоростного поля при ламинарном движении в трубе на участке стабилизации.

Этот расчет был выполнен Л. Шиллером [Л. 56]. Кривую распределения скоростей он строил из двух парабол, соединенных прямой. Вершина каждой из ветвей парабол лежит на границе пограничного слоя (рис. 6-18). Скорость основного ядра потока за пределами пограничного слоя

возрастает в направлении движения жидкости, так как через любое сечение трубы проходит одно и то же количество жидкости, а толщина пограничного слоя увеличивается. Поэтому согласно уравнению Бернулли, справедливого для основного ядра потока, давление падает. В конце участка стабилизации (на расстоянии от входного отверстия) кривая распределения скоростей по сечению имеет форму параболы. Разность между давлением в сечении с гидравлически стабилизированным потоком и областью снаружи трубы, где поток имеет незначительную скорость, можно определить по Л. Шиллеру прибавлением к потере давления, которая имела бы место, если бы поток был стабилизирован по всей длине трубы величины падения давления

$$\Delta p = 2{,}16\rho\frac{u_m^2}{2}. \qquad (6\text{-}47)$$

Результаты такого расчета вполне соответствуют опытным данным. Отношение длины участка стабилизации к диаметру трубы является функцией критерия Рейнольдса:

$$\frac{L_e}{d} = 0{,}0288\frac{u_m d}{\nu} = 0{,}0288\,\mathrm{Re}_d. \qquad (6\text{-}48)$$

Критерий Рейнольдса вычисляется по средней скорости в данном сечении и по диаметру трубы d. Так обычно и вычисляют критерий Рейнольдса в технической литературе. Следует помнить, однако, что в действительности нельзя провести резкую границу между участком стабилизации и областью гидравлически стабилизированного потока. Поток приближается к условиям гидравлической стабилизации асимптотически. Поэтому и на расстояниях, превышающих длину участка стабилизации L_e, уравнение (6-48), возможно обнаружить некоторое отклонение от режима полной стабилизации.

Если значение критерия Рейнольдса превышает критическое, то где-то на участке стабилизации режим движения в пограничном слое меняется на турбулентный. При возрастании значения критерия Рейнольдса переходная зона приближается к входному отверстию. Так как толщина турбулентного пограничного слоя увеличивается быстрее, чем ламинарного [см. уравнение (6-35)], то длина участка стабилизации L_e сокращается. При $\mathrm{Re}_d = 3\,000$ поток на всем участке стабилизации носит ламинарный характер.

В этом случае L_e равняется приблизительно $100d$ [см. уравнение (6-48)]. При росте значений критерия Рейнольдса сверх указанной величины длина участка стабилизации сначала быстро сокращается приблизительно до $40d$, а затем начинает снова увеличиваться.

Установившийся ламинарный поток через круглую трубу является одним из многих случаев, для которого можно получить простое, точное решение уравнений Навье — Стокса. Это решение показывает, что профиль скорости представляет собой параболу и дает для коэффициента трения, согласно формулы (6-53), соотношение

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}_d}. \qquad (6\text{-}49)$$

Обычно этот тип потока относят к потоку Пуазейля.

Кривая распределения скорости в области гидравлически стабилизированного потока для $\mathrm{Re} = 100\,000$ хорошо описывается формулой (6-32), если вместо толщины пограничного слоя подставить радиус r. Это соответствует гипотезе, что пограничный слой смыкается по оси трубы. В этом случае u_s обозначает скорость движения по оси. Справедливо также уравнение (6-33) для определения напряжения трения у поверхности плиты и уравнение (6-36) для определения скорости движения на границе между турбулентным пограничным слоем и ламинарным подслоем. Последний образуется в трубах так же, как и на поверхности плит. Если в упомянутых уравнениях радиус r заменить диаметром d и скорость u_s средней скоростью u_m, интегрированием уравнения (6-32) находим, что $u_m = 0{,}82\,u_s$, то получим следующие соотношения, которые будут использованы нами позже:

$$\tau_w = 0{,}0384 \rho u_m^2 \left(\frac{\nu}{u_m d}\right)^{1/4} = \frac{0{,}0384}{(\mathrm{Re}_d)^{1/4}} \rho u_m^2; \qquad (6\text{-}50)$$

$$\frac{u_b}{u_m} = 2{,}44 \left(\frac{\nu}{u_m d}\right)^{1/8} = \frac{2{,}44}{(\mathrm{Re}_d)^{1/8}}; \qquad (6\text{-}51)$$

$$\frac{\delta_b}{d} = 63{,}5 \left(\frac{\nu}{u_m d}\right)^{7/8} = \frac{63{,}5}{(\mathrm{Re}_d)^{7/8}}. \qquad (6\text{-}52)$$

В действительности здесь, как и в случае плиты, не существует определенного ламинарного слоя, а имеет место

только постепенное понижение турбулентности по мере приближения к стенке. Уравнения, учитывающие наличие такой переходной зоны, приведены на рис. 6-20. Вместо напряжения трения чаще применяют коэффициент трения f, который определяют из формулы

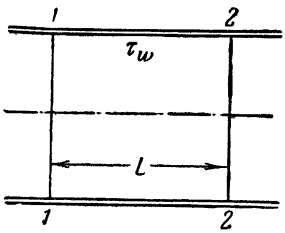


Рис. 6-19. К применению закона количества движения к гидродинамически стабилизированному потоку в трубе.

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2}, \qquad (6\text{-}53)$$

где Δp — падение давления на участке трубы L. Согласно закону количества движения между давлениями в сечениях *1—1* и *2—2* и напряжениями трения на стенку отрезка трубы длиной L (рис. 6-19) в стационарном потоке существует равновесие. Отсюда для установившегося потока

$$\Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \tau_w \pi d L. \qquad (6\text{-}54)$$

Коэффициент трения можно вычислить по напряжению трения, использовав уравнения (6-50), (6-53) и (6-54):

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho u_m^2} = \frac{0{,}316}{(\mathrm{Re}_d)^{1/4}}. \qquad (6\text{-}55)$$

Это выражение обычно называют законом Блазиуса. Если движение жидкости связано с теплообменом, то существует определенный температурный напор. Согласно Мак-Адамсу для газов [Л. 57] физические параметры определяются для температуры $(t_w + t_m)/2$ (t_w — температура стенки, t_m — средняя температура потока), а по Сидэру и Тэйту [Л. 58] коэффициент трения для масел рассчитывают по физическим параметрам, взятым при температуре t_m с последующим умножением на $(\mu_m/\mu_w)^{0{,}14}$, где μ_m — вязкость при температуре t_m и μ_w — вязкость при температуре t_w. Данные опытов Рохонца (Rohonczy) [Л. 59] с водой приближаются наилучшим образом к результатам вычислений по формуле (6-55), если физические параметры брать при температуре t_w.

Если $\mathrm{Re} > 10^5$, формулу (6-55) надо заменять формулой закона общего сопротивления потоку, который был найден Л. Прандтлем, Карманом и сотрудниками [Л. 60]:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2{,}0 \lg [(\mathrm{Re}_d)\sqrt{f}] - 0{,}8. \qquad (6\text{-}56)$$

Это выражение сложнее формулы (6-55), так как коэффициент трения имеется в обеих частях уравнения.

С недавнего времени кривую распределения скоростей в турбулентной зоне обычно представляют в полулогариф-

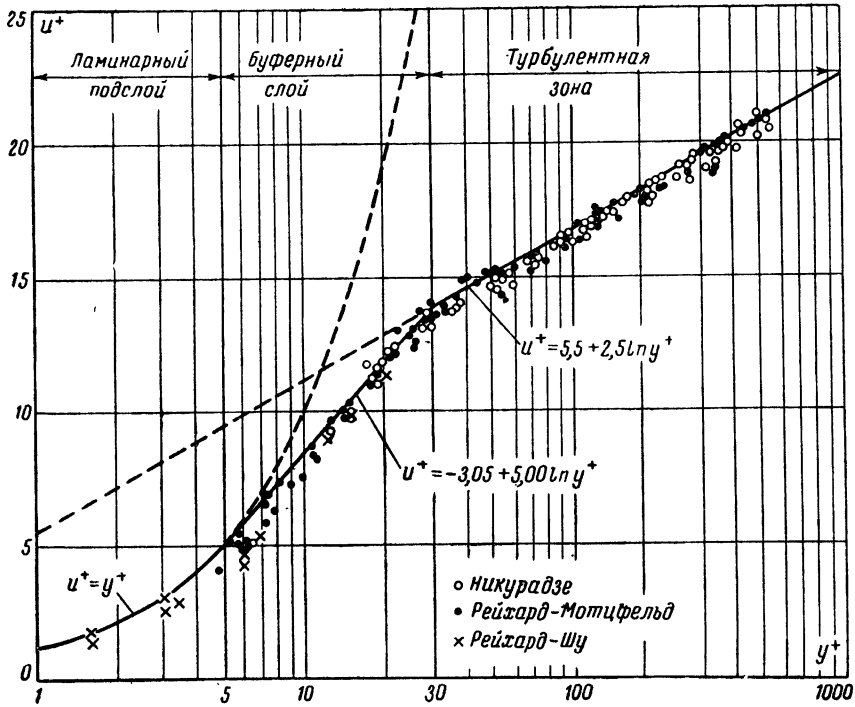


Рис. 6-20. Универсальная кривая распределения скорости [Л. 332].

мическом масштабе как показано на рис. 6-20 [Л. 61]. Значение скоростей делится на величину $\sqrt{\tau_w/\rho}$, которая имеет размерность скорости и называется скоростью трения (shear-stress velocity). В результате получается безразмерная величина $u^+ = u/\sqrt{\tau_w/\rho}$, которая отклады-

вается на оси ординат. Расстояние от стенки трубы преобразуется в критерий Рейнольдса путем умножения на скорость трения и деления на коэффициент кинематической вязкости: $y^+ = y\frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}$. Эта величина откладывается на оси абсцисс. Таким образом, кривая распределения скоростей не является в этом случае функцией критерия Рейнольдса Re_d и называется поэтому универсальной кривой распределения скоростей. На графике рис. 6-20 представлены результаты опытов Никурадзе, Рейхардта и др. В левой части графика вместо линейной зависимости в полулогарифмическом масштабе между скоростью и расстоянием от стенки в области ламинарного подслоя мы имеем другую функциональную зависимость, которая изображается кривой. Как видно из графика, опытные данные укладываются на эту кривую приблизительно до $y^+=5$. Прямая линия в правой части описывает скоростное поле в турбулентном ядре потока. График показывает, что между ламинарным подслоем и турбулентным ядром существует буферная зона, в которой турбулентность постепенно исчезает по направлению к стенке. Для описания поля скоростей в буферной зоне Карман [Л. 62] предложил отрезок прямой, представленный на графике, и установил границы этой зоны: $y^+_1=5$ и $y^+_2=30$. Формулы всех трех участков кривой распределения скоростей приведены на рис. 6-20.

Эти формулы остаются справедливыми и для труб с шероховатыми стенками, но в них необходимо ввести новый параметр, отражающий степень шероховатости [Л. 63].

При исследовании влияния шероховатости поверхности возникают некоторые затруднения, вызванные тем, что еще нет удовлетворительного геометрического описания шероховатой поверхности, ограниченным числом параметров. Обычно принимается, что наиболее важный параметр — это отношение средней высоты неровностей к диаметру трубы. В своих многочисленных экспериментах по трению в трубах с шероховатой поверхностью Никурадзе воспроизвел определенный образец шероховатости путем наклеивания песка достаточно однородного размера к поверхности трубы, чтобы создать как можно более плотное покрытие. Определенные таким образом величины коэффициентов трения графически изображены на рис. 6-21, где по оси абсцисс отложено значение Re_d, а отношение R/k_s

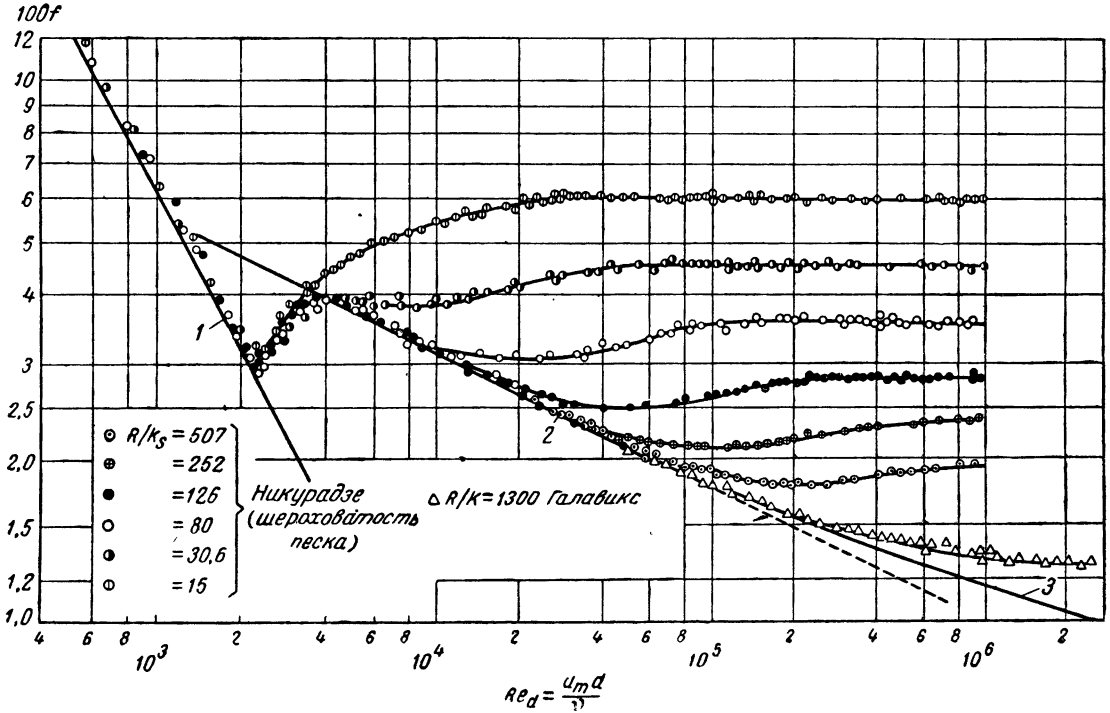


Рис. 6-21. Коэффициенты трения для потока, протекающего по трубе с шероховатыми стенками.
1 — формула (6-49); *2* — формула (6-55); *3* — формула (6-56) [Л. 333].

является параметром (k_s — средняя высота неровностей; R — радиус трубы). Очевидно, что как в ламинарном потоке, так и в турбулентном потоке с небольшими числами Рейнольдса шероховатость не влияет на трение. В этой области стенка трубы считается «гидравлически гладкой». Это объясняется тем, что все неровности полностью находятся в ламинарном подслое. Для достаточно больших чисел Рейнольдса кривые значений коэффициента трения принимают горизонтальное направление, указывая тем самым, что перепад давления в этом диапазоне возрастает пропорционально квадрату средней скорости. В этой области локальное дросселирование на элементах шероховатости вносит основной вклад в падение давления. Исследования других форм шероховатостей обнаружили, что форма кривых коэффициентов трения часто отличается от кривых, которые изображены на рис. 6-21. Измерения проводились на применяемых в практике трубах с шероховатой поверхностью и были систематизированы Мооди [Л. 64]. Эти измерения показывают, что коэффициент трения на таких поверхностях постепенно падает до постоянной величины при увеличении критерия Рейнольдса и что очевидный уклон кривых на рис. 6-21 отсутствует. Такая кривая на рис. 6-21 соответствует измерениям Галавикса. Полуэмпирические вычисления показали хорошее соответствие с измерениями коэффициентов трения и профилей скоростей в трубах с шероховатой поверхностью. Этот материал хорошо изложен в книге Х. Шлихтинга [Л. 65]. Когда толщину пограничного слоя принимают равной радиусу трубы, то в качестве первого приближения можно использовать данные рис. 6-21, чтобы получить коэффициенты трения для пластин с шероховатыми поверхностями. Трубы, применяемые в технике, часто имеют некруглую форму поперечного сечения. Коэффициент трения для установившегося ламинарного потока через трубы с поперечным сечением некруглой формы дается формулами такого же вида, как и формула (6-49), но в этом случае значения числовой постоянной зависят от формы поперечного сечения. В качестве линейного размера, входящего в критерий Рейнольдса, для труб таких сечений обычно принимают так называемый «эквивалентный диаметр», определенный выражением

$$d_h = \frac{4A}{C}, \qquad (6\text{-}57)$$

где A обозначает площадь, а C — периметр поперечного сечения. Для канала между двумя плоскими параллельными пластинами гидравлический диаметр равен двум расстояниям между стенками. Числовая постоянная в формуле (6-49) имеет для этой площади поперечного сечения значение 96, когда гидравлический диаметр используется вместо d в формулах (6-49) и (6-53).

Опыты на установившемся турбулентном потоке через некруглые трубы (каналы) показали, что формулы (6-55) и (6-56) описывают коэффициенты трения с достаточной точностью, когда диаметр, который определяет коэффициент трения в этих формулах и в формуле (6-53), заменяется эквивалентным диаметром. Это положение справедливо для тех случаев, когда поперечное сечение не имеет острых углов. Числовые постоянные остаются неизменными.

Интересны результаты наблюдений при переходном процессе от ламинарного потока к турбулентному в каналах с многоугольным поперечным сечением. Переход в этом случае имеет место не при определенной величине критерия Рейнольдса, а в диапазоне чисел Рейнольдса. При этом с увеличением чисел Рейнольдса вначале поток становится турбулентным в ядре жидкости, в то время как он остается ламинарным в области углов. При увеличении критерия Рейнольдса турбулентность проникает постепенно в углы.

Такое поведение потока более всего ощущается при небольших углах. Это становится очевидным при наблюдении над потоком и было доказано измерением профиля скоростей [Л. 66].

На рис. 6-22 изображены такие профили, измеренные по высоте треугольного поперечного сечения канала. Поперечным сечением канала был равнобедренный треугольник с отношением высоты L к основанию, равным 5. При критерии Рейнольдса $Re_{dh}=500$ поток полностью ламинарный, и кривая распределения скорости имеет пикообразную форму с параболическим увеличением скорости около малого угла. При $Re_{dh}=3\,000$ пик кривой распределения делается более плоским, но параболическое увеличение скорости все еще продолжается приблизительно выше половины высоты, указывая на то, что поток в этом диапазоне вблизи малого угла все еще по существу ламинарный. Только при $Re_{dh}=20\,580$ турбулентность распространяется на всю площадь поперечного сечения.

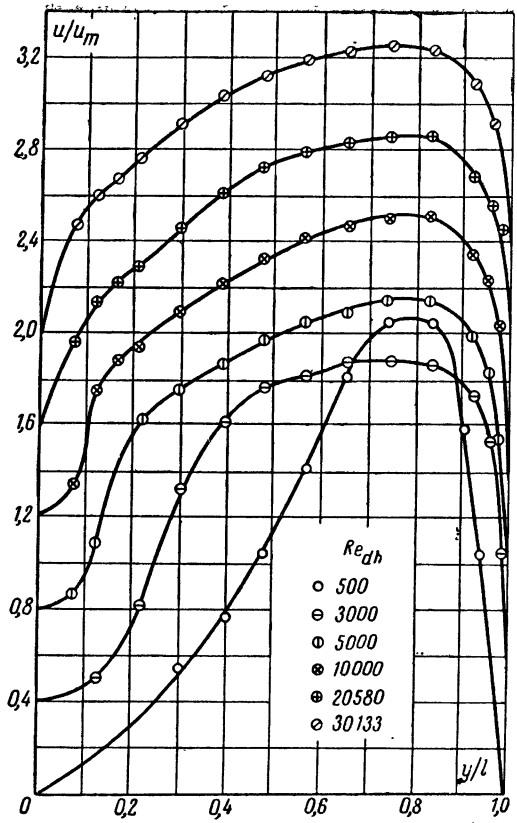


Рис. 6-22. Кривая распределения скорости вдоль центральной линии канала с треугольным поперечным сечением.

y — расстояние от угла; l — высота поперечного сечения. Кривые распределения для Re > 500 сдвинуты в вертикальном направлении [Л. 334].

6-8. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА

Пограничный слой играет большую роль при обтекании цилиндрической поверхности. На рис. 6-23 показана фотография потока, омывающего трубу. Как видно из фотографии, поток обтекает цилиндр с двух сторон, отрываясь от его поверхности, и у кормовой половины образуется зона с завихрениями. Если рассчитать распределение давления по периметру цилиндра для потока без трения и без

отрыва жидкости от поверхности, то получим пунктирную линию, показанную на рис. 6-24. Начиная от лобовой образующей ($\alpha=0$), давление падает и достигает минимума при $\alpha=90°$. Затем оно снова поднимается и в точке $\alpha=180°$ достигает той же величины, что и у лобовой образующей. При движении жидкости с трением у поверхности цилиндра образуется пограничный слой. Частицы жидкости за пределами пограничного слоя способны двигаться, преодолевая возрастающее давление за кормовой половиной, благодаря переходу их кинетической энергии в энергию давления. Частицы жидкости, находящиеся в пределах пограничного слоя, не обладают такой кинетической энергией. Поэтому они способны двигаться в области возрастающего давления лишь на определенное расстояние, пока не растратят свою кинетическую энергию. После того как их скорость упадет до нуля, частицы начинают двигаться в обратном направлении. Этот процесс и обусловливает отрыв струй. Благодаря отрыву струй с кормовой стороны цилиндра наблюдается изменение картины распределения давлений. Величина проникновения частиц в зону возрастающего давления зависит от их кинетической энергии. Последняя в среднем больше для частиц турбулентного пограничного слоя (рис. 6-12), чем ламинарного. Отрыв турбулентного пограничного слоя происходит приблизительно на угловом расстоянии $\alpha=110°$, а ламинарного пограничного слоя — на расстоянии $\alpha=82°$.

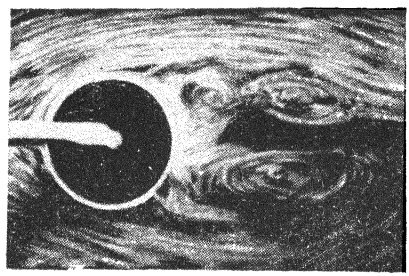


Рис. 6-23. Поперечное обтекание цилиндра (фотография Х. Рубаха из Mitt. Forschungsarb, 185, 1916) [Л. 335].

Картина соответствующего распределения давлений дана на рис. 6-24. Давление со стороны кормовой половины меньше, чем с фронтовой. Благодаря этому возникает сила, действующая в напразлении потока, называемая сопротивлением формы (form resistance). К этому необходимо добавить сопротивление трения, которое возникает благодаря наличию напряжений сдвига, действующих у поверхности цилиндра. Обе эти силы учитываются

коэффициентом лобового сопротивления f_c, который определяется из формулы

$$D = f_c L d \rho \frac{u_0^2}{2}, \qquad (6\text{-}58)$$

где d — диаметр;
L — длина;
D — лобовое сопротивление цилиндра;
ρ — плотность;
u_0 — скорость движения частиц до встречи с цилиндром;
Ld — сечение цилиндра, перпендикулярное направлению потока воздуха.

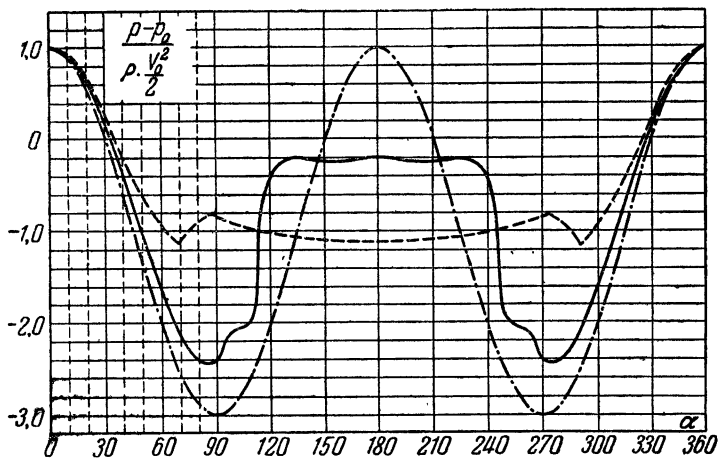


Рис. 6-24. Кривая распределения давлений по периметру цилиндра круглого сечения.

p — локальное давление; p_0 — давление на большом расстоянии от цилиндра; $\rho(v_0^2/2)$ — гидродинамическое давление свободного потока; α — угловое расстояние от застойной точки; —·— — теоретическая кривая распределения давлений, диаметр цилиндра $d = 25{,}0$ *см*; ——— кривая после критического распределения давлений $Re_{послекрит} = 6{,}7 \cdot 10^5$; — — — кривая докритического распределения давлений $Re_{докрит} = 1{,}86 \cdot 10^5$ [Л. 336].

На рис. 6-25 дан график значений коэффициента лобового сопротивления для различных значений критерия Рейнольдса. Значения критерия Рейнольдса вычисляются по u_0 и d. При очень малых скоростях отрыва струй не происходит и лобовое сопротивление обусловливается только напряжениями сдвига. Начиная со значения $Re_d \approx 1$, за кормовой частью цилиндра образуется застойная зона.

При дальнейшем возрастании значений критерия Рейнольдса застойная зона увеличивается. Начиная с $Re_d \approx 100$, то с правой, то с левой стороны цилиндра отрываются отдельные завихрения, которые уносятся потоком по направлению течения (вихревая зона Кармана). Резкое падение лобового сопротивления при $Re_d \approx 4 \cdot 10^5$ обусловливается тем фактом, что пограничный слой перед точкой отрыва становится турбулентным. При $Re_d > 4 \cdot 10^5$ вихревая зона Кармана уже не образуется: лишь в застойной зоне наблюдаются отдельные завихрения. Лобовое сопротивление цилиндра при малых скоростях обусловливается главным

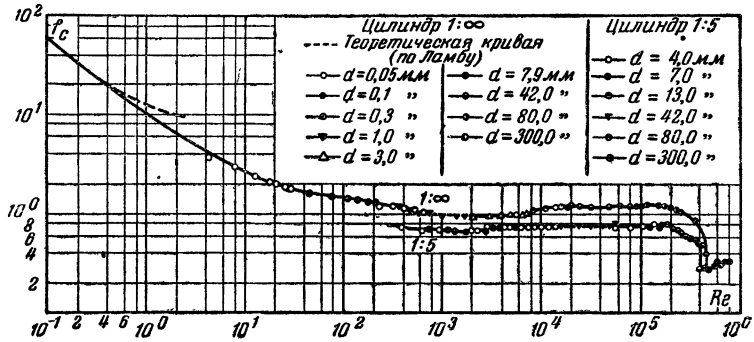


Рис. 6-25. Значение коэффициента лобового сопротивления цилиндра круглого сечения при поперечном омывании жидкостью [Л. 337]

образом сопротивлением трения, а при $Re_d > 1\,000$ — главным образом сопротивлением формы. Каждый из этих режимов потока влияет на теплообмен.

Установление ламинарного пограничного слоя вдоль передней части цилиндра можно рассчитать при помощи метода, представленного в разделе 6-5, когда распределение давления, показанного на рис. 6-24, вводится в уравнение Бернулли, чтобы определить местную скорость потока u_s. Такой расчет определяет также параметр формы $\varkappa$. Было найдено, что этот параметр формы изменяется от положительных значений около лобовой образующей до нулевого значения, которое получается в том месте, где градиент давления равен нулю и до отрицательных значений для той части поверхности, вдоль которой давление увеличивается в направлении потока. Точка, где ламинарный пограничный слой отрывается от поверх-

ности, определяется как такое место у цилиндра, где параметр формы принимает значение $\varkappa = -3$. Подобные методы вычисления можно разработать для турбулентных пограничных слоев. Одной из главных задач такого расчета является предсказание точки, в которой поток отрывается от цилиндра с произвольным поперечным сечением. Было найдено, что для таких вычислений форма кривой распределения скорости должна быть точно описана.

В литературе описано большое количество методов, в которых либо используются некоторые интегральные соотношения, либо пытаются разрешить сами уравнения пограничного слоя.

6-9. ОБТЕКАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Осесимметричное круговое обтекание любого погруженного в среду тела дает по существу такую же картину, как и круговое обтекание цилиндрических предметов. Например, поток, обтекающий шар, отрывается на боковых сторонах, а на задней стороне дает застойную область, заполненную вихрями. Этот отрыв происходит при больших числах Рейнольдса, тогда как для очень низких значений критерия Рейнольдса (ниже 1) ламинарный поток замыкается вокруг тыловой части шара. Лобовое сопротивление, связанное с этим типом потока, описывается законом Стокса:

$$D = 3\pi d \mu u_0. \tag{6-59}$$

Коэффициент лобового сопротивления шара в диапазоне больших значений критерия Рейнольдса представлен на рис. 6-26. Этот коэффициент определяется таким же путем, как и коэффициент лобового сопротивления для цилиндра. Опять-таки характерное падение наблюдается при числах Рейнольдса около $3 \cdot 10^5$. Было найдено, что значение критерия Рейнольдса, при котором происходит падение лобового сопротивления для шаров с гладкой поверхностью, зависит от турбулентности в свободном потоке, потому что степень турбулентности определяет, является ли пограничный слой перед точкой отрыва ламинарным или турбулентным. Эта связь между степенью турбулентности в свободном потоке и критическим числом Рейнольдса, при котором происходит падение лобового сопротивления шара, правильно истолковал Л. Прандтль. Это дает возможность использовать шар для измерения турбулентности в потоке воздуха, на-

пример в аэродинамической трубе. В настоящее время этот метод почти повсюду вытеснен непосредственным измерением колебаний скорости турбулентного потока (u', v', w') при помощи термоанемометра.

Установление пограничного слоя вокруг передней части осесимметричного тела можно описать некоторыми модификациями, методами, описанными ранее для двухмерных пограничных слоев. Очень полезно также преобразование, предложенное Манглером [Л. 67].

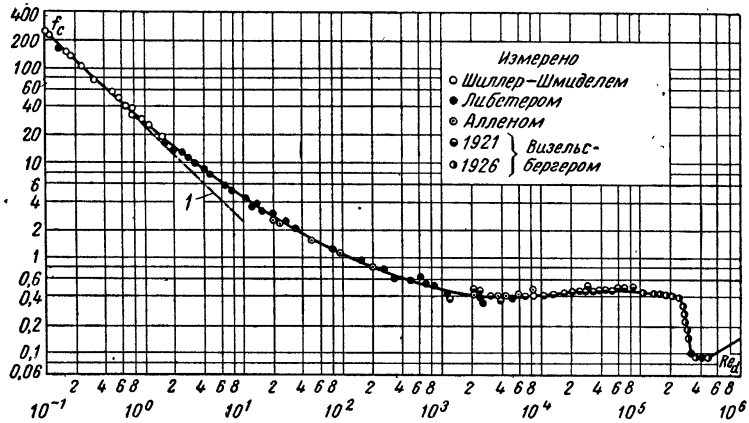


Рис. 6-26. Коэффициент лобового сопротивления шара в потоке [Л. 338].

Преобразование Манглера дает возможность определить поле для упомянутого осесимметричного пограничного слоя из известного поля скорости в стационарном двухмерном пограничном слое. Координаты x и y осесимметричного пограничного слоя связаны с координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ для двухмерного потока следующими уравнениями:

$$d\bar{x} = \frac{r^2}{C^2}\,dx;\quad d\bar{y} = \frac{r}{C}\,dy \tag{6-60}$$

или после интегрирования

$$\bar{x} = \frac{1}{C^2}\int r^2 dx \quad \bar{y} = \frac{r}{C}\,y, \tag{6-61}$$

r — расстояние точки поверхности рассматриваемого осесимметричного тела от оси; C — произвольная постоянная, имеющая размерность длины. То, что вышеприведенные соотношения преобразовывают осесимметричный погра-

ничный слой в двухмерный, можно проверить, записывая уравнения для потока с осесимметричным пограничным слоем и вводя в эти уравнения вышеприведенные преобразования. Уравнение непрерывности (6-20) осесимметричного пограничного слоя удовлетворяется введением функции тока $\Psi(\partial\Psi/\partial y = ru/C,\ \partial\Psi/\partial x = -rv/C)$. С этим выражением уравнение количества движения (6-16) принимает следующий вид:

$$\frac{C}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)-\frac{C}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Введение новых независимых переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$ приводит к выражению

$$\frac{r^2}{C^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{y}}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{y}}\right)-\frac{r^2}{C^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{y}}\right)=$$

$$=\frac{r^2}{C^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\nu\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{y}}\right)\right]-\frac{r^2}{C^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\bar{x}}.$$

Обе части уравнения можно разделить на r^2/C^2 и, таким образом, уравнение становится идентичным с уравнением (6-43) (с добавочным членом, выражающим давление) для двухмерного пограничного слоя. Это означает, что функция тока двухмерного пограничного слоя, выраженная в координатах $\bar{x}$ и $\bar{y}$, является в одно и то же время решением осесимметричного пограничного слоя в координатах x и y, если граничные условия одинаковы для обоих случаев. Для твердой поверхности подобие граничных условий на поверхности ($u=0$) выполняется. Сходство в граничных условиях на внешнем крае пограничного слоя требует, чтобы градиент давления dp/dx для осесимметричного потока был идентичен градиенту давления $dp/d\bar{x}$ для двухмерного потока. Зная функцию тока, можно легко найти скорость u.

ЗАДАЧИ

6-1. Требуется рассчитать толщину ламинарного пограничного слоя и коэффициент трения при обтекании плоской плиты в случае приближения кривой распределения скоростей к прямой линии или к параболе. Сравните эти результаты с результатами, полученными в разделе 6-4.

6-2. Требуется рассчитать установление пограничного слоя вблизи лобовой образующей цилиндра с круглой площадью поперечного сечения, предполагая, что скорость потока в данном диапазоне может быть приближенно дана выражением

$$du_s/dx=4u_0x/d$$

(u_0 — скорость свободного потока; d — диаметр).

Толщину пограничного слоя при $x=0$ можно определить из условий, что в этом месте $d\delta/dx=0$ (иначе толщина пограничного слоя, графически изображенная в зависимости от x для положительного и отрицательного x, имела бы точку пересечения при $x=0$).

6-3. Сравните форму кривых распределения скорости, описанных уравнением (6-40), с точными решениями для пограничного слоя, представленными на рис. 6-17, путем графического изображения их зависимости от отношения расстояния от стенки к эквивалентной толщине пограничного слоя, отложенного на оси абсцисс (параметры $\varkappa$ и β можно сравнить, выражая каждый как функцию количества движения пограничного слоя).

6-4. Выполните повторное решение уравнения (6-45), приняв в качестве первого приближения скорость $u=u_s$. Сравните результаты третьего повторения с решениями, полученными Блазиусом (рис. 6-16).

6-5. Требуется рассчитать кривую распределения скоростей напряжения трения у стенки и коэффициент трения для установившегося ламинарного потока через канал, образованный двумя параллельными плоскими пластинами. Введите гидравлический диаметр в выражение для коэффициента трения [заметим, что постоянная в этом выражении отличается от постоянной в уравнении (6-49)].

6-6. Требуется рассчитать кривую распределения скоростей в области входа в канал, составленный из двух параллельных стенок.

Принимаем такую же форму кривой распределения, как показано на рис. 6-18. Используйте уравнение непрерывности и уравнение Бернулли, чтобы вычислить скорости u_s в центральной части и интегрируемое уравнение количества движения для всего профиля скорости.

6-7. Требуется повторить вычисление, указанное в предшествующей задаче, допуская, однако, что поток турбулентный, начиная от входа в канал и используя закон седьмой степени для кривой распределения скорости вблизи стенок. Сравните длину входа для ламинарного и турбулентного потока.

6-8. Объясните, почему коэффициент лобового сопротивления цилиндра конечной длины меньше, чем для бесконечно длинного цилиндра. Этот факт можно наблюдать на рис. 6-25. Рассмотрите для этой цели распределение давления вокруг цилиндра, включая конечные области для цилиндра конечной длины.

6-9. Вычислите размер, который должен иметь шар, если при его помощи надо определить степень турбулентности в потоке воздуха при скоростях 30 и 180 *м/сек* и нормальных атмосферных условиях.

6-10. Вычислите размер капли, которая может оставаться в воздухе во взвешенном состоянии, не падая на землю, когда в воздухе имеется восходящий поток со скоростью 0,3 *м/сек* при нормальных атмосферных условиях.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ

7-1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ЧЕРЕЗ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Если тело, погруженное в поток жидкости или газа, нагревается или охлаждается, то в окружающей среде возникает температурное поле. Если не учитывать очень небольшие скорости и кильватерную струю, с которой тепло уносится от тела, то температурное поле образуется лишь в небольшой области, прилегающей к телу. Эта область называется тепловым пограничным слоем. В пределах этого слоя температура изменяется от t_w — температуры на поверхности тела до t_s — температуры сре-

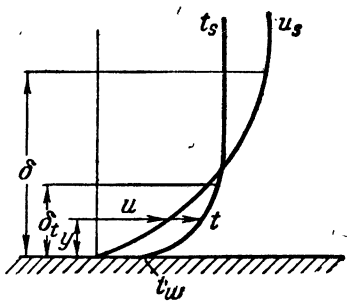


Рис. 7-1. Кривые распределения температур и скоростей на поверхности стенки.

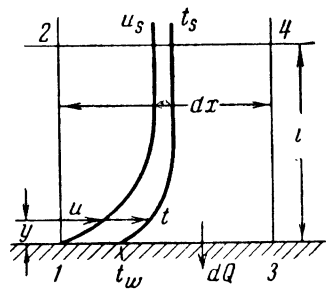


Рис. 7-2. К выводу уравнений теплового потока для пограничного слоя.

ды за пределами слоя. Кривая распределения температур близ поверхности тела показана на рис. 7-1. На расстоянии δ_t от поверхности тела температура потока бывает такой, как в случае, если бы тело не нагревалось и не охлаждалось. Величина δ_t и принимается за толщину теплового пограничного слоя. На рис. 7-1 показаны также кривая распределения скоростей и толщина δ гидродинамического пограничного слоя. Вообще говоря, эти пограничные слои имеют различную толщину.

Перенос энергии в тепловом пограничном слое можно описать уравнением пограничного слоя, которое выводится из уравнения энергии таким же образом, как и уравнения пограничного слоя потока из уравнений Навье — Сток-

са. Приближенное, но более быстрое и простое определение теплового пограничного слоя и теплообмена можно сделать при помощи уравнения теплового потока через тепловой пограничный слой. Оно выводится из теплового баланса элеменга объема, образованного на поверхности тела при помощи плоскостей *1—2* и *3—4* (рис. 7-2), находящихся на расстоянии dx друг от друга, плоскостью *2—4*, параллельной поверхности тела и находящейся на расстоянии l от нее, и поверхностью стенки *1—3*, причем l предполагается большей, чем обе толщины пограничного слоя δ и δ_t. При расчете опять можно ограничиться двухмерной задачей, приняв свойства жидкости постоянными, а скорости настолько малыми, что увеличением температуры, обусловленной внутренним трением в пограничном слое, можно пренебречь.

Элемент объема, показанный на рис. 7-2, ограничивается плоскостями, параллельными плоскости чертежа и находящимися на расстоянии единицы друг от друга. За единицу времени через плоскость *1—2* поступает количество тепла, определяемое следующим интегралом:

$$\rho c_p \int_0^l t u dy,$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении на единицу массы[1]. На расстоянии dx это количество тепла изменяется на величину

$$\rho c_p dx \frac{d}{dx} \int_0^l t u dy.$$

Таким образом, количество тепла, уходящего из элемента объема через плоскость *3 — 4*, больше количества тепла, поступающего через плоскость *1 — 2*, именно на эту величину. Как было показано в предыдущей главе, через плоскость *2 — 4* в рассматриваемый элемент поступает масса жидкости, измеряемая величиной $\rho dx \frac{d}{dx} \int_0^l u dy$. Вместе с этой массой в выделенный элемент поступает тепло, количество

[1] На стр. 214 объясняется, почему необходимо брать удельную теплоемкость при постоянном давлении.

которого определяется выражением $\rho c_p t_s dx \frac{d}{dx} \int_0^l u dy$. Определенное количество тепла поступает из параллелепипеда к поверхности тела или в обратном направлении через плоскость *1 — 3*. Так как частицы жидкости, находящиеся у самой поверхности тела, обладают нулевой скоростью, то это количество тепла должно передаваться к поверхности через этот слой жидкости путем теплопроводности. Поэтому справедливо уравнение (2-2). С принятыми здесь обозначениями поток тепла в единицу времени

$$dQ = -\lambda dx \left(\frac{dt}{dy}\right)_w,$$

где λ — коэффициент теплопроводности жидкости или газа. Для стационарного режима алгебраическая сумма количества тепла, поступающего в параллелепипед вследствие движения частиц, и количества тепла, отводимого из параллелепипеда к поверхности тела его теплопроводностью, должна быть равна нулю:

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \int_0^l t_s u dy - \rho c_p \frac{d}{dx} \int_0^l t u dy - \lambda \left(\frac{dt}{dy}\right)_w = 0. \qquad (7\text{-}1)$$

Внося в это выражение коэффициент температуропроводности $a = \lambda/\rho c_p$, получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^l (t_s - t) u dy = a \left(\frac{dt}{dy}\right)_w. \qquad (7\text{-}2)$$

Это и есть уравнение теплового потока через пограничный слой, при помощи которого можно рассчитывать теплообмен [Л. 68]*. Физические параметры, входящие в уравнение (7-2), даны в таблицах (см. приложение). Значения удельной теплоемкости c_p, коэффициента теплопроводности λ и вязкости μ зависят от давления только вблизи критической точки. Для водяного пара эта зависимость показана на рис. П-3 и П-7. Теоретически удельная теплоемкость c_p вблизи критической точки приближается к бесконечности. Это видно по очень крутому подъему кривой зна-

* Кружилин был первым, кто применил уравнение (7-2) для расчетов теплообмена.

чений c_p близ критической точки (рис. П-3). Плотность потока ρ весьма мало зависит от давления. Для газов ее можно вычислить из уравнения состояния. Близ критической точки зависимость от давления усложняется. В качестве примера на рис. П-1 эта зависимость показана для воды и пара. Значения коэффициентов температуропроводности a и кинематической вязкости ν жидкостей зависят лишь в крайне малой степени от давления, если не считать значений вблизи точки критического давления. Для газов обе эти величины обратно пропорциональны давлению.

Зависимость плотности удельной теплоемкости и теплопроводности от температуры можно также наблюдать на рисунках П-1, П-3, П-6 и П-7. Это особенно ощутимо около критического состояния. Уравнение (7-2) выведено на основании допущения, что свойства потока постоянны. Оно поэтому может быть использовано для процессов теплообмена, в которых перепады температур таковы, что действительное изменение свойств невелико. Путем введения соответственно подобранных средних значений этот диапазон применимости уравнения (7-2) можно расширить.

7-2. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение теплового потока, выведенное в предыдущем параграфе, дает возможность рассчитать теплообмен при вынужденной конвекции для различных случаев, если сделать соответствующие допущения относительно формы кривой распределения температуры. Прежде чем заняться таким расчетом, необходимо вывести дифференциальное уравнение, описывающее энергетические зависимости в движущейся среде. Это уравнение выводится из баланса энергии в стационарном элементе объема, расположенном в поле потока. Тепло в элемент объема может быть передано теплопроводностью или перенесено движущейся жидкостью через границы элемента. Кроме того, тепло может быть выделено внутренними источниками. Такие источники тепла всегда присутствуют в движущемся потоке вязкой жидкости, поскольку напряжения сдвига вызывают внутреннее трение и превращают кинетическую энергию в тепло. При небольших скоростях изменения температуры, вызванные внутренним трением, малы и ими обычно можно пренебречь. При больших скоростях потока вопросы влияния трения важны. В деле развития высокоскоростной авиации они привлекают к себе большое внимание

(аэродинамический нагрев). В предыдущем разделе выделение тепла внутренними источниками не учитывалось. Здесь, однако, его мы учитывать будем. Кроме того, позднее отдельный параграф будет посвящен процессу теплообмена при высоких скоростях.

Уравнение энергии для вязкой жидкости с постоянными свойствами можно легко получить, применяя уравнение (2-13). Это уравнение дает баланс количества тепла, аккумулированного внутри элементом объема со сторонами dx, dy, dz, тепла, переданного теплопроводностью в элемент объема через его поверхности, и тепла, которое выделено внутри элемента. Если рассматривается стационарный элемент объема, через который протекает поток с составляющими скорости u, v, w, добавочное тепло будет передано в элемент объема конвекцией.

Этот конвективный перенос тепла можно рассчитать таким же путем, как и в предыдущем параграфе[1]. Его включение в баланс энергии приводит к уравнению

$$\begin{array}{ccccc} \rho c_p\left(\dfrac{\partial t}{\partial \tau}+u\dfrac{\partial t}{\partial x}+v\dfrac{\partial t}{\partial y}+w\dfrac{\partial t}{\partial z}\right)= & & & & \\ 1 & 1 & \dfrac{1}{1} & \delta & \dfrac{1}{\delta} \qquad 0 \\ =\lambda\left(\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\Phi. & & & & (7\text{-}3) \\ \delta^2 & 1 & \dfrac{1}{\delta^2} & & 0 \end{array}$$

Тепло, выделенное за единицу времени в единице объема внутренним трением, в вышеприведенном уравнении обозначается буквой Ф. Оно называется *теплом рассеивания*. Вывод этого члена из поля скорости очень длинная процедура, и поэтому здесь не приводится. Этот вывод приведен, например, в книге Шлихтинга «Теория пограничного слоя».

[1] По существу нет никакой разницы между удельной теплоемкостью при постоянном объеме и удельной теплоемкостью при постоянном давлении для потока с постоянными свойствами (включая плотность). Величина c_p используется здесь и в последующих уравнениях потому, что многие из них применяются также и к сжимаемой жидкости.

Для потока с постоянными свойствами рассеяние тепла описывается следующим уравнением:

$$\Phi = 2\mu\left[\underset{\delta^2}{\underset{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}+\underset{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}+\underset{0}{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}\right]+\mu\left[\underset{\delta^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}+\underset{\delta^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right]^2+$$

$$+\mu\left[\underset{\delta^2}{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}+\underset{0}{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)}\right]^2+\mu\left[\underset{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}+\underset{0}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}\right]^2. \qquad (7\text{-}4)$$

Уравнение (7-3) вместе с уравнениями Навье — Стокса описывает температурное поле вязкого потока. Для обычных потоков числовые значения теплопроводности так малы, что кондуктивный перенос тепла становится заметным только в той области, где конвективный теплообмен мал из-за малых скоростей. Мы знаем, что такая область всегда существует около поверхности твердых тел, потому что там скорость потока уменьшается до нуля. Как следствие этого можно ожидать, что теплопроводность таких потоков следует рассматривать только вблизи твердых поверхностей. Другими словами, ожидается, что будет существовать тонкий слой, вдоль твердой поверхности, в котором теплопроводность равна по значению конвекции тепла, тогда как вне этого слоя перенос тепла теплопроводностью относительно так мал, что им можно пренебречь. Этот слой будет называться *тепловым пограничным слоем*. Теперь упростим дифференциальное уравнение, описывающее поток тепла в этом тепловом пограничном слое, путем учета порядка малости его членов. Рассуждения будут такими же, как и для гидродинамического пограничного слоя двухмерного потока. Соответственно этому членами в уравнениях (7-3) и (7-4), под которыми стоит нуль, пренебрегают.

Поскольку мы рассматриваем влияние небольших значений толщины пограничного слоя и небольшого значения теплопроводности на уравнение энергии, все другие величины в уравнении (7-3) будут измеряться в таких единицах, что они имеют порядок 1. Толщина теплового пограничного слоя предполагается порядка δ. Вопрос о порядке величины теплопроводности остается открытым. Составляющая скорости v будет порядка δ. Порядок величины членов левой части уравнения (7-3) можно теперь легко установить. Порядки величин опять указываются под уравнением. Первый член в скобках в левой части уравнения можно не учитывать по сравнению со вторым членом. Здесь

член в скобках имеет тот же порядок, как и члены в левой части уравнения, когда λ имеет порядок δ^2. Единственный член, остающийся в функции рассеяния Φ, — это величина $\mu(du/dy)^2$, которая имеет порядок 1. Уравнение энергии пограничного слоя для несжимаемого потока с постоянными свойствами будет иметь вид:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \qquad (7\text{-}5)$$

К этому дифференциальному уравнению относятся следующие граничные условия. Температура потока задается снаружи пограничного слоя ($t=t_s$). При постоянных свойствах эта температура постоянна. У стенки большее разнообразие граничных условий имеет место для температурного пограничного слоя, чем для гидродинамического пограничного слоя.

Наиболее часто встречающимся условием является либо задание температуры поверхности $t_{y=0}=t_w(x)$, либо значения теплового потока через поверхность твердого тела:

$$q_{y=0}=k\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}=q_w(x).$$

Уравнение энергии пограничного слоя внешне выглядит совершенно так же, как и уравнение количества движения пограничного слоя. Однако имеется два существенных отличия. В уравнении энергии (7-5) величины u и v должны рассматриваться как известные параметры, определяемые из решений уравнений движения. Соответственно уравнение энергии пограничного слоя есть линейное уравнение относительно температуры, что с математической точки зрения значительно упрощает задачу получения решений этого уравнения, поскольку здесь применим принцип суперпозиции. Это означает, что как только некоторое число решений этого уравнения становится известно, новые решения легко получить добавлением или вычитанием любого из известных решений. Другое отличие между двумя уравнениями связано с тем фактом, что член, соответствующий градиенту давления, не содержится в уравнении энергии. Исходя из этого, можно предположить и это будет подтверждено позже, что влияние на теплообмен изменений давления вдоль поверхности меньше, чем на такие параметры потока, как лобовое сопротивление.

Для потока с малой скоростью вдоль плоской пластины уравнение количества движения (без члена, содержащего dp/dx) уравнение энергии (без члена, выражающего тепло трения) очень похожи друг на друга. Кроме того, когда числовое значение температуропроводности равно величине кинематической вязкости, тогда уравнения идентичны и могут быть с легкостью преобразованы одно в другое. Как следствие этого, если граничные условия в этих случаях также одинаковы, то решение уравнения количества движения (кривая распределения скорости внутри пограничного слоя) и решение уравнения энергии (кривая распределения температуры внутри пограничного слоя) совершенно одинаковы по виду, а толщина пограничного слоя потока равна толщине теплового пограничного слоя. Более детально об этом будет идти речь позднее, когда будут представлены действительные решения уравнения энергии пограничного слоя.

Вышеизложенное позволяет допустить, что обе толщины пограничного слоя равного порядка. Это означает, что сочетание свойств, определяемых выражением

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a},$$

называемым числом Прандтля, имеет порядок 1. Это справедливо для большинства жидкостей.

Чтобы выяснить условия, когда членом, выражающим рассеяние, в уравнении (7-3) можно пренебречь, будем считать, что мы измеряем температуру единицей, имеющей порядок разности температур, заданной в задаче (например, разности между температурой стенки и температурой потока), тогда как величина, которой измеряются скорости, будет иметь порядок скорости потока u_s. Тогда второй член в правой части уравнения (7-3) будет порядка $\delta^2(\Delta t_0/\delta^2)$, член, выражающий рассеяние, — порядка $\delta^2(u_s^2/\delta^2)$ и оба они будут одного и того же порядка, когда $u_s^2/\Delta t_0$ будет порядка 1. Это отношение может быть разделено на c_p (порядка 1), чтобы сделать его безразмерным. Член, выражающий рассеяние, следовательно, такого же порядка, как и другие члены, когда $u_s^2/c_p\Delta t_0$ порядка 1. Когда выражение $u_s^2/c_p\Delta t_0$ имеет порядок, который мал по сравнению с 1, тогда рассеянием можно пренебречь.

Вводя числовые значения, находим, что в воздухе при разнице температур в 12° С скорость должна быть порядка 150 *м/сек,* чтобы выражение $u^2/c_p\Delta t_0$ имело порядок 1. В технике обычно применяются значительно меньшие скорости или бо́льшие разности температур. Поэтому в последующих расчетах, членом, выражающим рассеяние, можно вообще пренебречь.

7-3. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ПЛИТЫ

Пусть необходимо рассчитать теплоотдачу от плоской плиты, имеющей постоянную температуру t_w, потоку жидкости, обладающему постоянной скоростью. Первая часть плиты длиной x_0 не нагревается и не имеет температуру, равную температуре омывающей среды (рис. 7-3). Гидродинамический пограничный слой начинается у переднего края плиты, а тепловой слой — у границы нагреваемой части плиты.

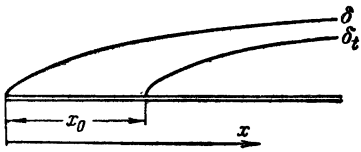


Рис. 7-3. Гидродинамический пограничный слой и термический пограничный слой на плоской плите.

Толщина обоих пограничных слоев δ и δ_t возрастает в направлении движения потока.

Вычисление толщины теплового пограничного слоя δ_t и с ее помощью вычисление теплообмена можно провести, применяя уравнение (7-2). Для этой цели нужно сделать отправное допущение относительно формул кривой распределения температуры в пограничном слое.

Результаты исследования будут тем лучше, чем ближе совпадет принятый профиль с действительным. С этой целью используем выражение с некоторыми произвольными функцимия, которые определяются таким образом, чтобы принятый профиль удовлетворял условиям, которые справедливы для реального профиля.

При $y=0$ $t=t_w$.

При $y=\delta_t$ $t=t_s$, $\frac{\partial t}{\partial y}=0$.

Уравнение (7-5), записанное для стационарного потока с малыми скоростями, для $y=0$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0,$$

В соответствии с этими четырьмя условиями нужно использовать полином с четырьмя функциями:

$$t = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Если, кроме того, вводится разность температур $\theta = t - t_w$ и если функции определяются из вышеупомянутых условий, тогда кривая распределения температур выражается уравнением

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_s} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3,$$

где $\theta = t - t_w$; $\theta_s = t_s - t_w$.

Теперь можно вычислить интеграл в уравнении теплового потока

$$\int_0^l (t_s - t)\, u dy = \int_0^l (\theta_s - \theta)\, u dy =$$

$$= \theta_s u_s \int_0^{\delta_t} \left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy.$$

Предположим, что тепловой пограничный слой меньше гидродинамического. Тогда второй интеграл должен иметь верхний предел $y = \delta_t$, так как при $y > \delta_t$, $\theta = \theta_s$ и подынтегральное выражение обращается в нуль. Если, положим, что $\zeta = \delta_t/\delta$, то по вычислении интеграла получим:

$$\int_0^l (\theta_s - \theta)\, u dy = \theta_s u_s \delta \left(\frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{3}{280}\zeta^4\right).$$

Так как мы положили, что $\delta_t < \delta$, а, следовательно, $\zeta < 1$, то второй член в правой части равенства будет весьма мал по сравнению с первым и им можно пренебречь. Из рис. 7-3 видно, что отношение ζ является функцией от x.

Если значение последнего интеграла подставить в уравнение (7-2), получим:

$$\frac{3}{20}\theta_s u_s \frac{d}{dx}(\zeta^2\delta) = \frac{3}{2}\, a\, \frac{\theta_s}{\zeta\delta}$$

или

$$\frac{1}{10}\, u_s \left(\zeta^3\delta\frac{d\delta}{dx} + 2\zeta^2\delta^2\frac{d\zeta}{dx}\right) = a,$$

Подстановка значения $\delta d\delta/dx$ из уравнения (6-27) и значения δ^2 из уравнения (6-28) дает:

$$\frac{14}{13}\frac{\nu}{a}\left(\zeta^3+4x\zeta^2\frac{d\zeta}{dx}\right)=1.$$

Отношение ν/a является безразмерной величиной которая часто встречается при расчетах теплообмена и как указывалось выше, называется критерием Прандтля и обозначается символом Pr.

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{a}=\frac{c_p\mu}{\lambda}. \qquad (7\text{-}6)$$

Значение критерия Прандтля определяется физическими параметрами, а поэтому и сам критерий является параметром. Его преимущество заключается в безразмерности. В таблицах приложения даны значения критерия Прандтля для жидкостей и газов. Значения критерия Прандтля для жидкостей и газов зависят от температуры. Заметная зависимость от давления наблюдается лишь вблизи критической точки. Изменение значения критерия Pr от температуры для газов незначительно. Введение числа Pr в вышеприведенное уравнение дает:

$$\zeta^3+\frac{4}{3}x\frac{d(\zeta^3)}{dx}=\frac{13}{14\,\mathrm{Pr}}$$

или с подстановкой $\zeta^3=y$

$$y+\frac{4}{3}x\frac{dy}{dx}=\frac{13}{14\,\mathrm{Pr}}.$$

Частный интеграл есть $y=13/(14\,\mathrm{Pr})$. Общее решение однородного уравнения можно найти, используя выражение $y=x^n$, причем n становится равным $^3/_4$. Поэтому полное решение вышеупомянутого уравнения будет иметь вид:

$$y=\frac{13}{14\,\mathrm{Pr}}+Cx^{-3/4}.$$

Из граничных условий для $x=x_0$, $\zeta=0$ или $y=0$ следует:

$$\zeta=\frac{1}{1{,}026\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}}\sqrt[3]{1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}}. \qquad (7\text{-}7)$$

Если плита нагревается по всей длине ($x=0$), то

$$\zeta=\frac{1}{1{,}026\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}}. \tag{7-8}$$

Вязкие масла имеют критерий Прандтля Pr=1000 или больше. Для этих жидкостей толщина теплового пограничного слоя составляет только одну десятую толщины гидродинамического пограничного слоя. Газы имеют критерий Прандтля меньше 1. Для этого случая ζ больше 1, и поэтому допущение, сделанное в приведенных выше расчетах, здесь несправедливо. Но поскольку наименьшим значением для газов является Pr=0,6, то $\zeta=1{,}16$ и погрешность, обусловленная упомянутым допущением, очень мала. Единственными веществами, которые характеризуются очень небольшой величиной критерия Прандтля, являются жидкие или расплавленные металлы. Для них результаты, полученные при помощи формулы (7-8), негодны.

Тепловой поток от плиты на единицу площади определяется уравнением

$$q=-\lambda\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_w.$$

С другой стороны, тепловой поток можно также определить и при помощи коэффициента теплообмена α:

$$q=\alpha(t_w-t_s)=-\alpha\theta_s.$$

Приравнивая правые части этих уравнений, получаем:

$$\alpha=\frac{\lambda}{\theta_s}\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_w=\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\delta_t}=\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\zeta\delta}. \tag{7-9}$$

Следовательно, коэффициент теплообмена обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя. Подставив значение ζ в формулу (6-28), получим:

$$\alpha=0{,}332\lambda\frac{\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}}{\sqrt[3]{1-(x_0/x)^{3/4}}}\sqrt{\frac{u_s}{\nu x}}, \tag{7-10}$$

а для плиты, нагреваемой по всей длине,

$$\alpha=0{,}332\lambda\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\frac{u_s}{\nu x}}. \tag{7-11}$$

Как видно из графика рис. 7-4, величина коэффициента теплообмена бесконечно велика у начальной точки участка нагрева

и уменьшается по мере возрастания x. Уравнение (7-10) выгодно записать в безразмерной форме:

$$\frac{\alpha x}{\lambda}=0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\frac{u_s x}{\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(x_0/x)^{3/4}}}.$$

В правой части снова появляется критерий Рейнольдса, вычисленный по скорости основного ядра потока и расстоянию x. Безразмерный комплекс в левой части называется

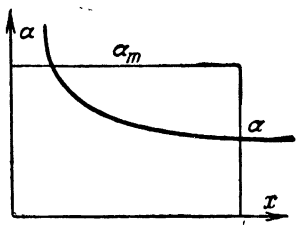


Рис. 7-4. Локальный коэффициент теплообмена как функция расстояния от переднего края плоской плиты.

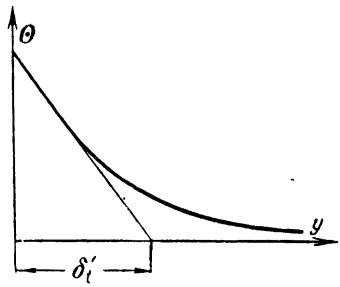


Рис. 7-5. К определению критерия Нуссельта при помощи условий толщины пограничного слоя.

критерием или модулем Нуссельта и обозначается символом Nu. Если критерий Нуссельта вычисляется по длине x, то он записывается в виде Nu_x:

$$\mathrm{Nu}_x=\frac{\alpha x}{\lambda}. \qquad (7\text{-}12)$$

Применяя это обозначение, приведенное выше уравнение можно записать:

$$\mathrm{Nu}_x=0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\frac{1}{\sqrt{1-(x_0/x)^{3/4}}}. \qquad (7\text{-}13)$$

а для плиты, нагреваемой по всей длине,

$$\mathrm{Nu}_x=0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad (7\text{-}14)$$

Критерий Нуссельта можно выразить также в форме отношения двух линейных величин. В § 1-3 было введено понятие условной толщины пограничного слоя (рис. 1-3), которая измеряется длиной подкасательной и кривой распределения температур в пределах пограничного слоя у поверхности плиты. На рис. 7-5 это показано более подробно. Для тем-

пературной кривой, имеющей форму кубической параболы, справедливо соотношение $\delta_t = 2/3\delta_t$. Из § 1-3 известно, что коэффициент теплообмена

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_t'},$$

поэтому критерий Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{x}{\delta_t'}$$

равняется отношению длины x к условной толщине теплового пограничного слоя δ_t'. Так как толщина пограничного слоя всегда мала по сравнению с длиной x, то значение критерия Нуссельта бывает большим. Толщина теплового пограничного слоя уменьшается с возрастанием значений критериев Рейнольдса и Прандтля, поэтому обе эти величины увеличивают значение критерия Нуссельта.

При расчетах промышленных теплообменников важно знать не локальное, а среднее значение коэффициента теплообмена. Для плиты, нагреваемой по всей длине, среднее значение коэффициента теплообмена

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x}\int_0^x \alpha dx = \frac{C}{x}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{C}{x}\,2\sqrt{x} = 2\frac{C}{\sqrt{x}} = 2\alpha, \quad (7\text{-}15)$$

где постоянная C включает в себя все величины, не зависящие от x. Из соотношения (7-15) следует, что среднее значение коэффициента теплообмена равно удвоенному значению локального коэффициента теплообмена на конце плиты. Теплоотдача от плиты, нагреваемой по всей длине, была рассчитана также путем точного решения дифференциальных уравнений пограничного слоя. Эти расчеты дают выражение (7-14) с численным коэффициентом 0,332.

Такое близкое совпадение результатов с нашими приближенными решениями, разумеется, случайное. Если физические параметры в уравнении зависят от температуры, тогда их значение необходимо брать при средней температуре. Из расчетов при решении уравнений ламинарного пограничного слоя для жидкости с переменными характеристиками можно показать, что формула (7-14) дает правильное решение для воздуха, когда физические параме-

тры берутся при определяющей температуре, которая находится из соотношения

$$t^* - t_s = 0{,}50\,(t_w - t_s) \text{ [Л.69].} \qquad (7\text{-}16)$$

Эта определяющая температура может быть применена к другим газам. Для жидкостей наши знания определяющей температуры менее определенны. Опыты подтвердили годность уравнения (7-14) для газов.

Уравнения (7-13)—(7-15) получены, исходя из допущения, что отношение ζ толщины теплового пограничного слоя к толщине гидродинамического пограничного слоя меньше 1. Было найдено, что это справедливо для потоков с числом Прандтля больше 1. Распространение предпринятого в этом разделе расчета на отношение ζ большее 1 совершенно допустимо. Но необходимо проводить интегрирование для двух интервалов, поскольку скорость u дается уравнением (6-26) для $0<y<\delta$ и $u=u_s$ для $\delta<y<\delta_t$. Следующее уравнение справедливо для пластины, нагретой до постоянной температуры на всей длине,

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\sqrt{\mathrm{Re\,Pr}}}{1{,}55\sqrt{\mathrm{Pr}}+3{,}09\sqrt{0{,}372-0{,}15\mathrm{Pr}}}.$$

Это соотношение применяется для расчета теплообмена в жидких металлах с числами Рейнольдса между 0,005 и 0,05. В этом диапазоне знаменатель мало зависит от Pr, так что критерий Нуссельта по существу зависит от произведения Re Pr, которое представляет собой критерий Пекле. Точное решение уравнений ламинарного пограничного слоя приводит к соотношению, которое имеет на месте знаменателя в приведенном выше уравнении слабую функцию Pr, которая изменяется на $\pm 5\%$ около величины 1,98 для данного выше диапазона чисел Прандтля [Л. 70]. Далее будет показано, что данное выше уравнение хорошо согласуется с этим результатом.

Пример. Вычислите коэффициент теплообмена для плиты в потоке воздуха на расстоянии 100 *мм* от переднего края плиты. Плита нагревается по всей длине, скорость воздуха $u_s = 10$ *м/сек*, температура воздуха $t_s = 52°$ С, температура поверхности плиты $t_w = 124°$ С.

Коэффициент кинематической вязкости воздуха при 100° С и нормальном давлении равен $2{,}36\cdot 10^{-5}$ *м²/сек* (см. приложение). Отсюда критерий Рейнольдса $\mathrm{Re}_x = 46\,600$. Из приложения находим критерий Прандтля $\mathrm{Pr} = 0{,}695$. Критерий Нуссельта определяем из уравнения (7-14): $\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\cdot\sqrt[3]{0{,}695}\cdot\sqrt{46\,600} = 63{,}3$. Из уравнения (7-12) находим ло-

кальный коэффициент теплообмена на расстоянии 100 *мм* от переднего края плиты: $\alpha = (\lambda/x)\,63{,}3$. Коэффициент теплопроводности для воздуха при 100° С $\lambda = 0{,}0276$ *ккал/м·ч·град*. Отсюда $\alpha = \frac{0{,}0276}{0{,}1} \cdot 63{,}3 = 17{,}5$ *ккал/м²·ч·град*.

Среднее значение коэффициента теплообмена на расстоянии 100 *мм* равно 33 *ккал/м²·ч·град*. Количество тепла, отводимого от плиты шириной в 0,31 *м* и длиной 100 *мм*, равно:

$$Q = \bar{\alpha}\, b x\, (t_w - t_s) = 33 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}1\,(124-52) = 73{,}5 \text{ ккал/ч}.$$

7-4. ПЛОСКАЯ ПЛАСТИНА С ПРОИЗВОЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущем разделе был исследован случай, в котором плита, омываемая стационарным потоком, имела температуру t_s до $x = x_0$ и температуру t_w при $x > x_0$. Температура стенки поэтому изменяется вдоль плиты ступенчато.

В технике представляют интерес другие виды изменения температуры стенки. Для некоторых из них Д. Чепман и М. В. Рубезин проинтегрировали дифференциальное уравнение пограничного слоя [Л. 71].

В таких случаях можно также применить для вычисления метод, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Изменение температуры поверхности вдоль оси x имеет двоякое влияние на температуру пограничного слоя. Оно влияет на форму кривой распределения температуры и на толщину пограничного слоя. Первое влияние становится заметным, когда уравнение (7-5) без члена, оценивающего рассеяние, дифференцируется относительно y и затем записывается для $y = 0$. В результате такого вычисления имеем:

$$\left(\frac{\partial^3 t}{\partial y^3}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{\partial t_w}{\partial x}.$$

Это уравнение выражает зависимость между третьей производной кривой распределения температуры и температурным градиентом стенки. Его можно использовать вновь, чтобы определить постоянную в принятом уравнении, при помощи которого аппроксимируется кривая распределения температуры. Кроме того, разность температур θ является теперь функцией x и должна оставаться в самом дифференциальном операторе d/dx в уравнении на стр. 221.

Другой метод расчета основывается на том, что уравнение энергии (7-5) является линейным дифференциаль-

ным уравнением и дает решение для температурного поля при произвольном изменении температуры стенки, которое можно представить как большое число ступенчатых изменений.

Этот метод, на который обычно ссылаются как на теорему Дюамеля (1833), часто применяется при анализе электрических цепей. К решению настоящей задачи этот метод впервые применил М. В. Рубезин в выдвинутых им положениях в 1945 г. Эти положения вполне оправдали себя, поскольку они очень удобны и имеют то преимущество, что могут быть использованы не только для плоской пластины с постоянной скоростью u_s, но также и для тел различной формы, а также и для ламинарного и турбулентного режима потока.

Уравнение (7-5) является линейным дифференциальным уравнением, описывающим температурное поле t внутри пограничного слоя. Допустим, что мы имеем ряд частных решений t_i этого уравнения для определенных граничных условий. Тогда легко можно видеть путем подстановки в уравнение (7-5), что выражение

$$t=\sum_1^n C_i t_i$$

также является его решением. Постоянные C_i можно использовать, чтобы согласовать это новое решение с требуемыми пограничными условиями. Поток тепла на поверхности будет:

$$q=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w=-\lambda\sum_1^n C_i\left(\frac{dt_i}{dy}\right)_w.$$

Теперь предположим, что каждое частное решение соответствует условию, при котором температура стенки равна температуре потока до определенного места, а затем внезапно изменяется до температуры t_{wi}. Для каждого частного решения коэффициент теплообмена можно определить из уравнения

$$-\lambda\left(\frac{\partial t_i}{\partial y}\right)_w=\alpha_i\Delta t_{wi},$$

где Δt_{wi} выражает скачок в температуре стенки или, другими словами, разность между температурным потоком и тем-

пературой стенки для частного случая. Для данного температурного поля t можно написать

$$q = \sum_{1}^{n} C_i \alpha_i \Delta t_{wi}.$$

Прямое, но несколько громоздкое вычисление показывает, что в этом случае все постоянные C_i имеют величину, равную 1.

Теперь воспользуемся вышеупомянутым методом, чтобы вычислить теплообмен к пластине с произвольно изменяющейся температурой стенки. Когда температура изменяется ступенчато на величины Δt_{w1}, $\Delta t_{w2}, \ldots$, $\Delta t_{w3} \ldots$ соответственно в точках ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$, $\xi_i \ldots$ (рис. 7-6), тогда поток тепла от стенки на длине x есть в соответствии с последним уравнением

$$q = \sum_{1}^{n} \alpha(x, \xi_i) \Delta t_{wi}. \qquad (7\text{-}17)$$

В этом уравнении α выражает коэффициент теплообмена, который описывает тепловой поток на длине x, когда имеется только одна ступень Δt_{wi} в температуре стенки в точке ξ_i. Этот коэффициент теплообмена для условий ламинарного потока приводится формулой (7-13), когда x_0 заменяется на ξ_i. На рис. 7-6 принято, что пластина имеет ненагретую переднюю часть до $x = \xi_1$. В противном случае нужно прибавить дополнительную температурную ступень $\Delta t_{w0} = t_{w0} - t_s$ при $\xi = 0$, где t_s—температура жидкости вне пограничного слоя. Непрерывно изменяющуюся температуру стенки можно представить как последовательность бесконечно малых температурных скачков dt_w, имеющих место на бесконечно близко расположенных интервалах $d\xi$. Исходя из этого величину потока тепла на длине x при температуре стенки, которая изменяется, как указано на рис. 7-7, можно получить,

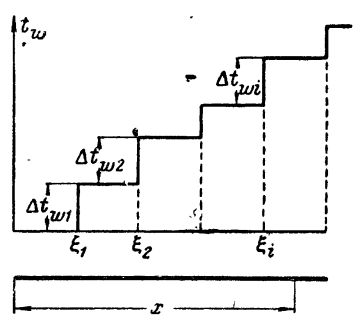


Рис. 7-6. Ступенчатое изменение температуры стенки.

заменяя ряд в вышеприведенном уравнении интегралом. Это приведет к следующему соотношению:

$$q = \int_0^x \alpha(x, \xi)\, dt_w(\xi).$$

Чтобы выразить этот интеграл через независимую переменную ξ, преобразуем предыдущее выражение:

$$q = \int_0^x \alpha(x, \xi) \frac{dt_w(\xi)}{d\xi} d\xi. \qquad (7\text{-}18)$$

Если конечные скачки температуры стенки имеют место одновременно с непрерывным изменением, как показано на рис. 7-8, тогда следует использовать следующее уравнение:

$$q = \int_0^x \alpha(x, \xi) \frac{dt_w(\xi)}{d\xi} d\xi + \sum_0^n \alpha(x, \xi_i)\, \Delta t_w(\xi_i). \qquad (7\text{-}19)$$

Следует помнить, что конечная разность температур между температурой стенки и температурой потока у переднего края пластины (для $x=0$) должен также рассматриваться как конечная ступень Δt_w и должна включаться

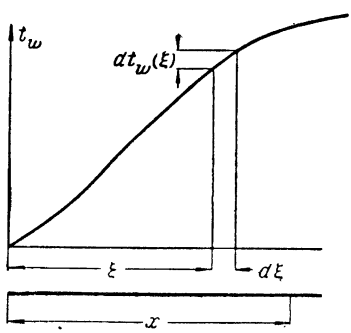


Рис. 7-7. Непрерывное изменение температуры стенки.

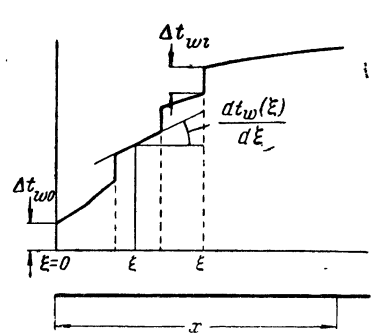


Рис. 7-8. Ступенчатое и непрерывное изменение температуры стенки.

членом ряда уравнения (7-17) или (7-19). Сложением и интегрированием вышеупомянутых уравнений тепловой поток вдоль плоской пластины может быть вычислен для любого заданного закона изменения температуры стенки. В некоторых технических приложениях чаще задается

тепловой поток на поверхности пластины, чем температура стенки. Трибус и Клейн рассмотрели эту задачу, улучшив и обобщив этот метод [Л. 72]. Его можно применить для турбулентного потока в пограничном слое, когда вместо $\alpha(x, \xi)$ вводятся коэффициенты турбулентного теплообмена для пластины со ступенчатым изменением температуры стенки.

При технических расчетах вычисление интеграла в уравнении (7-18) или (7-19) несколько утомительно. По этой

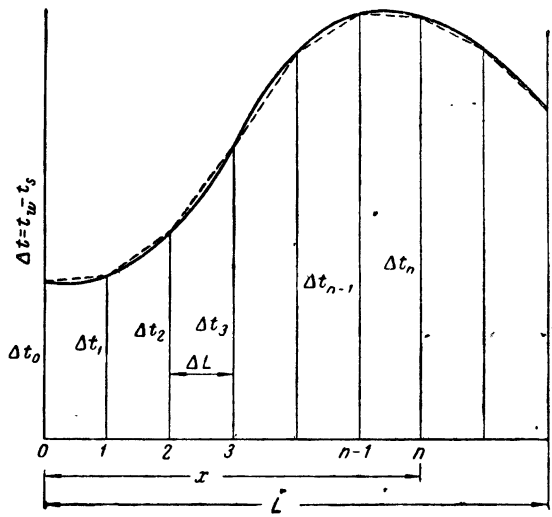


Рис. 7-9. Приближенное выражение непрерывно меняющейся температуры стенки при помощи прямолинейных сегментов.

причине был разработан приближенный метод расчета [Л. 73]. Задается закон изменения температуры t_w вдоль поверхности пластины длиной L в направлении потока. Задача состоит в том, чтобы найти местный тепловой поток $q(x)$ от поверхности в поток жидкости с температурой t_s в произвольном месте x и полный тепловой поток $Q(x)$ от поверхности длиной x в направлении потока на единицу ширины. Длина L разделяется на произвольное число равных частей длиной ΔL. Рис. 7-9 представляет график местной разности температуры $\Delta t = t_w - t_s$. Разность температур Δt_0, Δt_1, Δt_2 имеет место в точках 0, 1, 2. Следующее далее уравнение дает местный или полный поток тепла

для ламинарного или турбулентного режима потока, причем соответствующие физические константы взяты из табл. 7-1:

$$q(x) \quad \text{или} \quad \frac{Q(x)}{x} = \alpha_0(x)\left\{\Delta t_0 + a(\Delta t_n - \Delta t_0) + b\frac{\Delta L}{x} \times \right.$$

$$\left. \times [(2n-1)\Delta t_n - \Delta t_0 - 2(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots + \Delta t_{n-1})]\right\}, \tag{7-20}$$

$\alpha_0(x)$ — локальный или усредненный коэффициент теплообмена для пластины с постоянной температурой стенки [уравнения (7-10), (7-15), (8-18), (8-18)]. Уравнение (7-20) определяет тепловой поток для любой точки x на поверхности, которая совпадает с одним из местоположений (1, 2, 3, ...).

n — число местоположений, совпадающих с точкой x.

Таблица 7-1

	Локальный поток тепла		Полный поток тепла	
	a	b	a	b
Ламинарный	0,995	0,446	0,969	—0,432
Турбулентный	0,991	0,117	0,982	—0,478

Уравнение (7-20) вводится путем замены действительной разности между температурой стенки и температурой потока ломаной линией, изображенной на рис. 7-9. Интеграл уравнения (7-18) решен для случая линейного изменения температуры стенки, причем результат аппроксимирован уравнением второго порядка. Основываясь на этих данных, можно найти величину теплового потока, соответствующего ломаной линии.

Для турбулентного потока при интегрировании уравнения (7-18) было использовано уравнение, представленное на стр. 273, которое описывает критерий Нуссельта для ступенчатого изменения температуры.

Было найдено, что по сравнению с точными решениями уравнение (7-20) дает ошибку только на несколько процентов.

Уравнение $q_c(x) = \alpha_0(x)\Delta t_n$ описывает локальный поток тепла в точке n, когда разность температур над поверх-

ностью постоянна и равна Δt_n. Поскольку постоянная a в уравнении (7-20) почти равна 1, разность между локальным потоком тепла $q(x)$ и $q_c x$ зависит от величины постоянной b. Из таблицы 7-1 видно, что разность между q и q_c намного больше для ламинарного потока, чем для турбулентного. Другими словами, температурная предыстория потока выше по течению от рассматриваемой области в гораздо большей степени сказывается в ламинарном потоке, чем в турбулентном. Это положение справедливо также для потоков, проходящих через трубы и каналы. Для турбулентного потока необходимо учитывать предысторию только тогда, когда температура выше по течению от точки n очень быстро меняется.

7-5. ПОПЕРЕЧНОЕ ОМЫВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

В § 6-8 упоминалось, что на лобовой стороне тела, находящегося в потоке жидкости или газа, образуется пограничный слой. У лобовой образующей поток в этом пограничном слое всегда имеет ламинарный характер. Если тело нагревать, то образуется также и тепловой пограничный слой. В непосредственной близости от лобовой образующей скорость вне пограничного слоя всегда возрастает пропорционально расстоянию от лобовой образующей, измеряемому по периметру. Эта зависимость выражается соотношением $u_s = cx$. Теплообмен в этой области для цилиндрических тел при направлении потока, перпендикулярном к их оси, был рассчитан Сквайром [Л. 74] путем точного решения дифференциальных уравнений для случая постоянной температуры тела на всей его поверхности. Эти расчеты привели к следующей формуле для коэффициента теплообмена

$$\alpha = B\lambda \sqrt{\frac{u_s}{\nu x}} = B\lambda \sqrt{\frac{c}{\nu}}. \qquad (7\text{-}21)$$

Отсюда следует, что значение коэффициента теплообмена в окрестности лобовой образующей не является функцией расстояния от этой образующей. В табл. 7-2 даются значения безразмерной величины B для некоторых значений критерия Прандтля. Формулу (7-21) можно записать в безразмерной форме:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = B \sqrt{\frac{u_s x}{\nu}},$$

причем в правой части равенства снова появляется критерий Рейнольдса.

Таблица 7-2

Постоянная B для расчета коэффициента теплообмена в окрестности лобовой образующей по формуле (7-21) [Л. 339]

Pr	0,7	0,8	1,0	5	10
B	0,496	0,523	0,570	1,043	1,344

Скорость u_s за пределами пограничного слоя вокруг поверхности кругового цилиндра определяется из формулы $u_s = 2u_0 \sin\left(\frac{2x}{d}\right)$, где u_0 — скорость потока до встречи с цилиндром; x — расстояние, измеряемое по периметру от лобовой образующей, и d — диаметр цилиндра. Синус угла для точки в окрестности лобовой образующей можно заменить углом, т. е. $u_s = 4u_0(x/d)$, отсюда

$$\alpha = 2B\lambda\sqrt{\frac{u_0}{\nu d}}$$

или в безразмерной форме

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{\alpha d}{\lambda} = 2B\sqrt{\frac{u_0 d}{\nu}} = 2B\sqrt{\mathrm{Re}_d} \qquad (7\text{-}22)$$

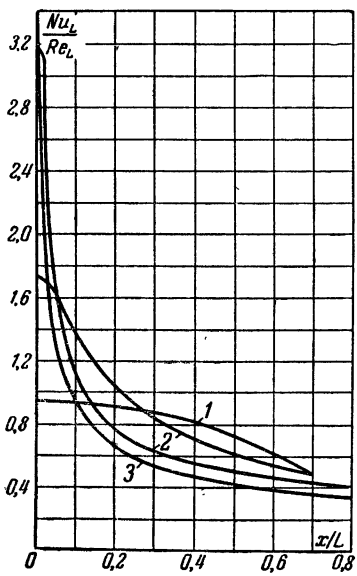


Рис. 7-10. Кривые значений локального коэффициента теплообмена по периметру цилиндров круглого и эллиптического сечений и по поверхности плоской плиты.

1 — цилиндр круглого сечения; *2* — цилиндры эллиптического сечения, 1:2 и 1:4; *3* — плоская плита [Л. 340].

В критерии Nu_d и Re_d входят скорость свободного потока и диаметр. Локальные коэффициенты теплообмена вдоль поверхности цилиндрического тела на большем расстоянии от лобовой образующей можно также определить при помощи уравнения (7-2). Методика таких вычислений была разработана Кружилиным, Фреслингом, Эккертом, Шахом, Сквайром и др.

Pr = ?

Заключение по некоторым из них можно найти в статье Е. Эккерта [Л. 75].

На графике рис. 7-10 даются значения коэффициентов теплообмена по периметру круговых и эллиптических цилиндров и для плоской плиты. Расстояние x от лобовой образующей делится на небольшой диаметр цилиндра (его

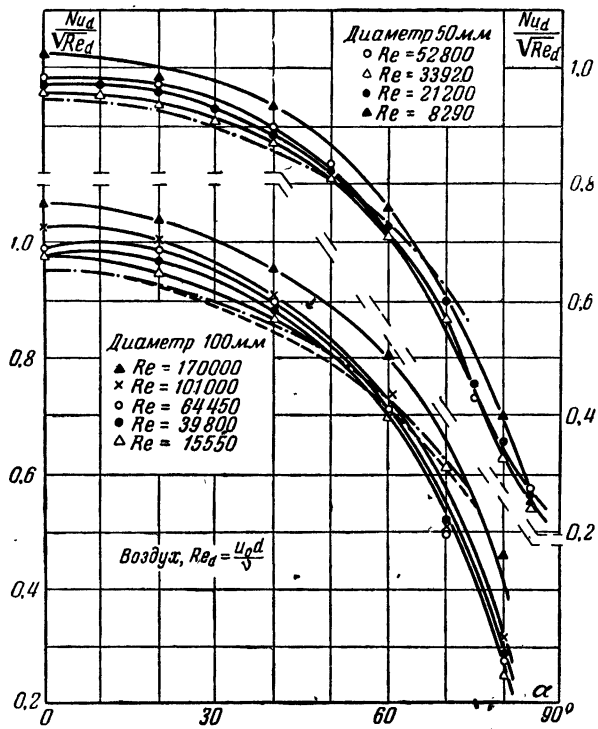


Рис. 7-11. Сравнение вычисленных и измеренных значений коэффициента теплообмена для цилиндров круглого сечения [Л. 341].

большую ось L). Для всякого ламинарного пограничного слоя значение критерия Нуссельта возрастает пропорционально квадратному корню из критерия Рейнольдса. Поэтому на графике рис. 7-10 значения отношения $\mathrm{Nu}_L/\sqrt{\mathrm{Re}_L}$ даются как функция от x/L. Как видно из графика, кривые изменения коэффициента теплообмена по периметру цилиндров тем ближе подходят к кривой для плоской плиты, чем больше эксцентриситет поперечного сечения цилиндра.

Чем меньше радиус кривизны в лобовой образующей, тем больше значение имеет коэффициент теплообмена для этой точки. На рис. 7-11 показано сравнение значений, полученных аналитическим путем, с результатами опытов Э. Шмидта и К. Ваннера [Л. 76]. Расчетами можно получить значения коэффициентов теплообмена только для ламинарного пограничного слоя. Как определено для плоской плиты, переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при $80\,000 > Re > 500\,000$. Если движение среды происходит с возрастанием давления на поверхности обтекаемого тела, переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при более низких значениях критерия Рейнольдса, если давление падает, этот переход совершается при более высоких значениях критерия Рейнольдса. Интересные в этом отношении опыты с наклонной плоской плитой были проведены Р. Дрейком [Л. 77].

7-6. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Температурное поле вблизи плоской пластины и связанный с этим теплообмен рассчитаны также путем точного решения уравнений пограничного слоя для стационарного двухмерного потока. Решение для пластины с постоянной температурой поверхности получил в 1921 г. Е. Польхаузен [Л. 78]. Он предположил, что скорости потока достаточно малы, и поэтому член уравнения, выражающий рассеяние, обусловленное вязкостью, не учитывается в уравнении энергии пограничного слоя. Это уравнение имеет тогда следующий вид:

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Соответствующие граничные условия:

при $y=0$

$$t=t_w;$$

при $y=\infty$

$$t=t_s.$$

В § 6 показано, что для частного случая уравнения пограничного слоя могут быть преобразованы в полные дифферен-

циальные уравнения, если мы введём следующие новые переменные:

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{u_s}{\nu x}}; \quad f = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x u_s}}.$$

Если эти же переменные вводятся в приведенное выше уравнение энергии и если, кроме того, ввести следующий безразмерный параметр, описывающий температуру внутри пограничного слоя:

$$\theta' = \frac{t - t_w}{t_s - t_w},$$

тогда в результате получим уравнение

$$\frac{d^2\theta'}{d\eta^2} + \Pr f \frac{d\theta'}{d\eta} = 0 \tag{7-23}$$

с граничными условиями для $\eta = 0$, $\theta' = 0$, для $\eta = \infty$, $\theta' = 1$. Это уравнение можно проинтегрировать таким же образом, как уравнение (6-44). В результате имеем:

$$\theta' = \frac{\int_0^{\eta} e^{-\int_0^{\eta} \Pr f d\eta} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\int_0^{\eta} \Pr f d\eta} d\eta}. \tag{7-24}$$

В этом случае f нужно рассматривать как известную функцию, и уравнение (7-24) является точным решением уравнения (7-23). Кривые распределения температур, полученные таким путем, изображены на рис. 7-12 для различных значений критерия Pr. Коэффициенты теплообмена даются выражением

$$\mathrm{Nu}_x = f(\Pr) \sqrt{\mathrm{Re}_x}.$$

Параметр $f(\Pr)$, вычисленный Е. Польхаузеном, в диапазоне чисел Прандтля от 0,6 до 15 с достаточной точностью может быть выражен зависимостью

$$f(\Pr) = 0{,}332 \sqrt[3]{\Pr}.$$

В разделе, посвященном вопросу о точных решениях уравнений пограничного слоя, был рассмотрен поток, омывающий клин. Для такого типа потока скорость за пределами пограничного слоя определяется уравнением

$$u_s = Cx^m$$

Рассмотрим теперь соответствующее уравнение энергии. Кроме того, рассмотрим также случай с переменной температурой стенки. Фейжи и Фалькнер [Л. 79] показали, что

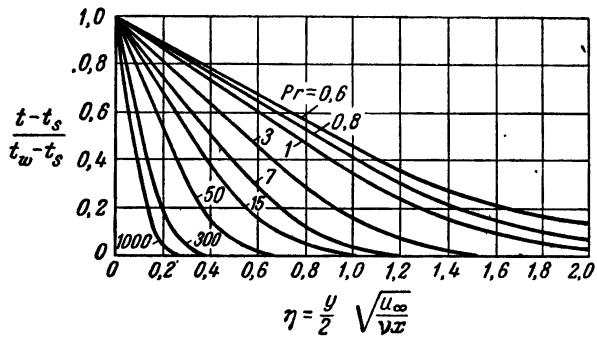


Рис. 7-12. Кривые распределения температуры для потока пограничного слоя на плоской плите [Л. 342].

уравнение энергии для потока, омывающего клин, можно преобразовать в полное дифференциальное уравнение, когда разность между температурами стенки и потока изменяется соответственно следующему закону:

$$t_w - t_s = C_t x^\gamma.$$

Преобразование дает следующее уравнение энергии пограничного слоя:

$$\frac{d^2\theta'}{d\eta^2} + \Pr f \frac{d\theta'}{d\eta} - 2\Pr \frac{df}{d\eta}\gamma(\theta' - 1) = 0. \qquad (7\text{-}25)$$

Это уравнение рассматривалось несколькими авторами. Полученные в результате кривые распределения температуры приводятся на рис. 7-13 и 7-14. Кривые на рис. 7-13 справедливы для особого случая, в котором величина γ равна нулю. Это означает, что постоянная разность температур и соответственно постоянная температура стенки за-

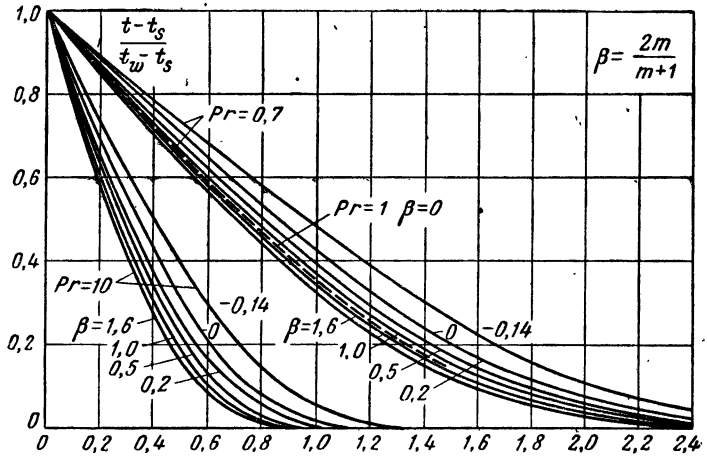


Рис. 7-13. Кривые распределения температуры для ламинарного клинообразного потока [Л. 343].

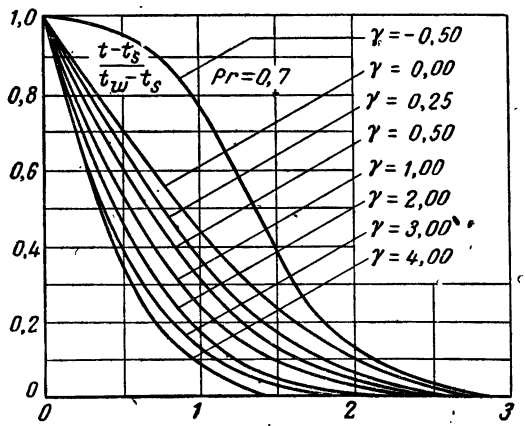


Рис. 7-14. Кривые распределения температуры для ламинарного потока на плоской плите с переменной температурой стенки [Л. 344].

ранее задаются. Влияние параметра $\beta=2m/(m+1)$, описывающего особые условия потока, на кривую распределения температуры не очень велико, особенно по сравнению с его влиянием на кривую распределения скорости. С другой стороны, на рис. 7-14 показаны кривые распределения температуры для потока над плоской пластиной ($\beta=0$), для случая, при котором температура стенки изменяется (в соответствии с различными значениями γ). Изменение температуры стенки имеет большее влияние на кривую распределения температуры, чем изменение скорости потока. Интересное положение существует для отрицательных значений γ. Предположим, что кривые распределения температуры имеют форму буквы S, а температурный градиент у стенки (и соответственно тепловой поток у стенки) могут стать равными нулю или даже отрицательными (для $\gamma<-0{,}5$). Это означает, что если даже локальная температура стенки больше, чем температура потока, этот частный случай может привести к такому положению, когда поток тепла направлен от омывающего потока к стенке. Этот довольно странный факт можно объяснить следующим образом. Отрицательное значение γ означает, что температура стенки понижается в направлении потока. В результате этого масса жидкости или газа из областей, расположенных в непосредственной близости от стенки выше по течению, где они соприкасались с более горячей стенкой, проходит в месте, где стенка более холодная. Они несут эту температуру вниз по течению, в результате чего получается, что поток у стенки горячее, чем сама стенка. Это обстоятельство в конце концов и вызывает обратный тепловой поток от жидкости к стенке. Изменение температуры стенки ($\gamma=-0{,}5$), для которой вычислена и проводится на рис. 7-14 кривая распределения температуры, трудно воспроизвести экспериментально, поскольку оно требует таких условий, при которых температура на переднем крае стенки бесконечно велика. Однако определено, что качественно инверсии температурного профиля и теплового потока встречаются также и при других законах изменения температуры стенки. Например, такие случаи рассчитаны и подверглись обсуждению Чепманом и Рубезиным [Л. 80], а также Шлихтингом [Л. 81]. Положение, подобное изображенному на рис. 7-14 для $\gamma=0{,}5$, встречается при пленочном охлаждении, когда пленка охладителя вспрыскивается в поток при $x=0$. Холодный пограничный слой, созданный охладителем, защищает поверхность плиты от бо-

лее горячей жидкости или газа в потоке. Влияние это уменьшается по течению потока, поскольку пограничный слой нагревается от потока путем теплопроводности.

7-7. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Если стенки трубы, через которую движется жидкость или газ, нагревать или охлаждать, то на их поверхности образуется тепловой пограничный слой. На некотором расстоянии от начального сечения, там где кончается гидродинамический пограничный слой, толщина пограничного слоя достигает величины радиуса трубы (рис. 6-18). В этом пограничном сечении заканчивается участок стабилизации. Сначала рассчитаем теплообмен в области полной тепловой стабилизации. Как и для плиты, предположим, что кривая распределения температуры в трубе представляет собой кубическую параболу. Тогда можно определить условие, определяющее кривизну кривой распределения температуры у стенки. Тепловой поток через слой, непосредственно прилегающий к стенке, должен быть постоянным, так как скорость движения жидкости в этом слое пренебрежимо мала, а поэтому тепло не передается конвекцией. Теплообмен через этот слой происходит только теплопроводностью. Для цилиндрической поверхности с образующей L и радиусом r (рис. 7-15) справедливо следующее уравнение:

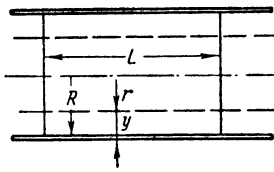


Рис. 7-15. К определению распределения температуры по сечению трубы при ламинарном режиме движения.

$$Q = -\lambda 2\pi r L \frac{dt}{dy},$$

где y — расстояние от стенки и r — радиус трубы.

Если сделать подстановку $r = R - y$, а затем решить это уравнение относительно температурного градиента и продифференцировать по y, получим:

$$\frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{1}{(R-y)^2}\frac{Q}{2\pi L\lambda} = \frac{1}{R-y}\frac{dt}{dy}.$$

Отсюда для $y = 0$ (на поверхности стенки)

$$\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)_w = \frac{1}{R}\left(\frac{dt}{dy}\right)_w. \qquad (7\text{-}26)$$

Таким образом, в этом случае скорость изменения температурного градиента не равняется нулю, как для плоской плиты, а связана с приведенной выше зависимостью с самим температурным градиентом. Причина этого заключается в том, что поперечное сечение потока тепла уменьшается по мере возрастания расстояния от стенок трубы, в то время пока для плоской плиты оно остается постоянным. Для удовлетворения приведенного выше условия мы должны следующим образом выразить температурный напор между стенкой трубы и основным ядром потока:

$$\theta = ay + by^2 + cy^3.$$

Дифференцирование и подстановка этого выражения в уравнение (7-26) дают:

$$b = \frac{a}{2R}.$$

Пусть температурный напор между осью и стенкой трубы равен θ_s. Температурный градиент в этом месте должен быть равен:

при $y = R$:

$$\theta = \theta_s, \quad \frac{d\theta}{dy} = 0.$$

Отсюда

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_s} = \frac{6}{5}\frac{y}{R} + \frac{3}{5}\left(\frac{y}{R}\right)^2 - \frac{4}{5}\left(\frac{y}{R}\right)^3. \qquad (7\text{-}27)$$

Тепловой поток на единицу поверхности стенки трубы и в единицу времени

$$q = -\lambda\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_w = \frac{6}{5}\lambda\frac{\theta_s}{R}. \qquad (7\text{-}28)$$

Коэффициент теплообмена для потока через трубу обычно рассчитывается по разности между средней температурой потока и температурой стенки. Обычно за среднюю температуру принимают ту температуру, которая получилась бы в результате смешения всей массы жидкости после рассматриваемого сечения; такая температура называется интегральной или объемной температурой и обозначается $t_в$.

Она определяется из уравнений

$$t_B = \frac{\int tudA}{\int udA} = \frac{\int_0^R turdr}{\int_0^R urdr}. \qquad (7\text{-}29)$$

Теперь, учитывая закон распределения температур [уравнение (7-27)] и закон распределения скоростей

$$\frac{u}{u_s} = 2\frac{y}{r} - \left(\frac{y}{r}\right)^2,$$

где u_s — скорость движения по оси трубы, мы получим выражение для разности между средней интегральной температурой и температурой стенки трубы

$$\theta_B = 0{,}583\theta_s.$$

Коэффициент теплообмена определяется из формулы

$$q = \alpha(t_B - t_w) = \alpha\theta_B,$$

откуда, учитывая соотношение (7-28), получаем:

$$\alpha = \lambda\frac{6}{5}\frac{1}{R}\frac{\theta_s}{\theta_B} = 4{,}12\frac{\lambda}{d},$$

где d — диаметр трубы. В критериальной форме имеем:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{\alpha d}{\lambda} = 4{,}12. \qquad (7\text{-}30)$$

Теплообмен к стенкам трубы вычислил Грэтц [Л. 82], Календар [Л. 83] и Нуссельт [Л. 84] решением дифференциальных уравнений.

Чтобы вывести эти уравнения, следует преобразовать уравнения Навье — Стокса, уравнения непрерывности и уравнения энергии в цилиндрических координатах. Затем некоторые члены в этом уравнении могут быть опущены вследствие особых условий, имеющих место в цилиндрической трубе с полностью установившимся потоком. Решение уравнения потока довольно простое и указывает, что в установившемся потоке кривая распределения скорости имеет форму параболы. Этот тип потока обычно относится к типу потока Пуазейля. Уравнение энергии может быть выведено

непосредственно из баланса энергии на элементе объема кольцевой формы длиной dx, радиусом r и шириною dr, расположенном концентрически в потоке относительно оси трубы. Тепло передается в этот элемент объема теплопроводностью и конвекцией. Вначале рассмотрим теплопроводность в радиальном направлении. Поток тепла через кольцевую площадь $2\pi r dx$ на расстоянии r от оси

$$Q = -\lambda 2\pi r dx \frac{\partial t}{\partial r}.$$

На пути к этой кольцевой площади на расстоянии $r + dr$ от оси тепловой поток изменяется на

$$\frac{\partial Q}{\partial r} dr = -\lambda 2\pi dx \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r}\right) dr.$$

Этот член дает разность между теплом, покидающим элемент объема через площадь, соответствующую радиусу $r+dr$, и теплом, входящим в элемент объема через площадь, соответствующую радиусу r. Здесь также может иметь место поток тепла в аксиальном направлении. Однако нужно ожидать, что этот тепловой поток будет значительно меньше, чем тепловой поток в радиальном направлении, так как градиенты температур в радиальном направлении больше. Соответственно теплопроводность в осевом направлении не учитывается в расчетах Грэтце и Нуссельта. В жидких металлах, однако, теплопроводность по длине может существенно повлиять на установление температурного поля. Поэтому в новейших расчетах это условие принимается во внимание [Л. 85]. Тепло будет также передаваться в элемент объема и конвекцией. Этот перенос тепла идет только в осевом направлении и количество тепла, оставшегося в элементе объема в результате поступления и отвода от него тепла, составляет:

$$2\pi r dr \rho c_p u \frac{\partial t}{\partial x} dx.$$

Для стационарного состояния теплопроводность и конвекция должны быть равны. Поэтому

$$\frac{1}{ur} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Это уравнение описывает поток энергии и определяет температурное поле. Граничные условия этого уравнения:

при $r = 0$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = 0;$$

при $r=R$

$$t=t_w \text{ или } -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_R=q_w.$$

У стенки задаются либо температурой, либо тепловым потоком. Если у поверхности трубы имеет место тепловой поток при постоянной скорости ($q_w=\text{const}$), тогда баланс энергии жидкости, протекающей через трубу, сразу же приводит к выводу, что при постоянных свойствах жидкости объемная температура жидкости повышается линейно в направлении потока. Для термически установившегося потока это должно быть также справедливо для температуры на любом расстоянии r от оси трубы. В соответствии с этим можно записать, что

$$\frac{\partial t}{\partial x}=C.$$

Уравнение энергии в этом случае сокращается до обыкновенного дифференциального уравнения относительно r, которое решается простым интегрированием и приводит к следующему выражению для кривой распределения температуры:

$$\theta=t-t_w=\frac{2\rho c_p u_m R^2}{\lambda}\frac{\partial t}{\partial x}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^4-\frac{3}{16}\right].$$

Температурный профиль остается таким же при любом положении x. Коэффициент теплообмена определяется температурным градиентом у стенки. Для критерия Нуссельта, основанного на локальной разности между температурой стенки и объемной температурой жидкости, вычисление дает:

$$\mathrm{Nu}_d=4{,}36. \qquad (7\text{-}31)$$

Для постоянной температуры стенки вышеприведенное уравнение можно решить разделением переменных, предполагая, что температуру можно выразить как произведение функции, зависящей только от радиуса, на другую функцию, зависящую только от осевого расположения. Найдено, что разность температур θ уменьшается в аксиальном направлении подобно функции e. Колебание температуры в радиальном направлении описывается функциями Бесселя. Температурный градиент на поверхности трубы снова определяет критерий Нуссельта.

Расчеты Грэтца и Нуссельта дают для локального числа Нуссельта (основанного на локальной разности между температурой стенки и объемной температурой) выражение

$$\mathrm{Nu}_d = 3{,}65. \tag{7-32}$$

При постоянной температуре стенки профили непрерывно изменяются в направлении x. В термически установившейся области, однако, это изменение таково, что про-

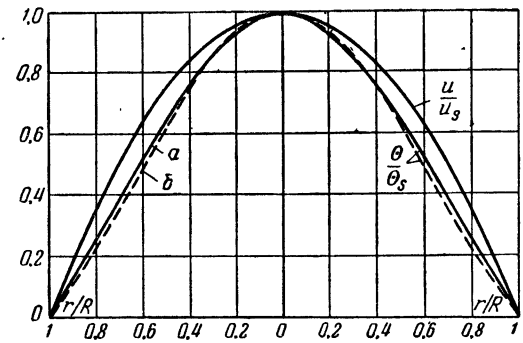


Рис. 7-16. Кривые распределения скорости и температуры в трубе с ламинарным режимом движения на большом расстоянии от входного отверстия.

а — приближенное решение Э. Эккерта; *б* — точное решение Грэтца и В. Нуссельта.

фили во всех точках вдоль трубы подобны один другому, а изменяется только масштаб. Рис. 7-18 показывает это условие для величин больше

$$(1/\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr})\,(x/d) = 0{,}05.$$

Результат приближенного вычисления в начале этого раздела [уравнение (7-30)] на 6% меньше, чем результат, даваемый уравнением (7-31) и на 13% больше по сравнению с уравнением (7-32). Кривая распределения температур уравнения (7-27) хорошо совпадает с точным вычислением (рис. 7-16). Теплообмен в плоском канале, образованном двумя плоскими стенками на расстоянии одна от другой, был вычислен В. Нуссельтом, Л. Эретом и Х. Ханеманном [Л. 86]. Они нашли, что

$$\mathrm{Nu}_b = \frac{\alpha b}{\lambda} = 3{,}75. \tag{7-33}$$

Большинство из существующих опытных данных по теплообмену в ламинарном потоке не совсем пригодно для сравнения с вышеприведенными уравнениями по трем причинам. Во-первых, опыты проводились главным образом с вязкими жидкостями, так как на практике в теплообменниках обычно используются именно такие жидкости. Жидкости с высокой вязкостью (масла) отличаются тем, что их вязкость находится в большой зависимости от температуры. Поэтому допущение, сделанное при выполнении приведенных выше расчетов, относительно неизменности физических параметров выполняется только при очень небольшой точности этих экспериментов.

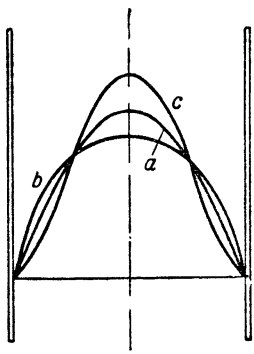


Рис. 7-17. Искажение кривой распределения скорости в нагреваемой или охлаждаемой трубе, когда вязкость жидкости зависит от температуры.

Кривая распределения температур, которая имеет форму параболы для изотермического потока, меняет свою форму в зависимости от вязкости. На рис. 7-17 даны кривые распределения скоростей по Кивилу и Мак-Адамсу [Л. 87]. Если теплоотдача происходит от стенки трубы к жидкости, то кривая распределения скорости (кривая *b*) более полога, чем парабола (кривая *a*), так как слои жидкости около стенок теплее и поэтому обладают меньшей вязкостью, чем жидкость близ оси трубы. Если теплоотдача происходит от жидкости к стенке, слои у стенок трубы обладают большей вязкостью, чем в основном ядре потока, поэтому скоростное поле описывается кривой *c*. Температурное поле и теплообмен находятся в известной зависимости от изменения скоростного поля. Таким образом, коэффициент теплообмена зависит как от направления теплового потока, так и от его величины. Расчет теплообмена в вязких жидкостях был выполнен К. Ямагата [Л. 88]. Во-вторых, расчетные и опытные данные трудно сравнивать потому, что часто при низких скоростях, характерных для ламинарного потока, вихревые токи свободной конвекции изменяют ламинарный характер движения: в результате получается сочетание свободной и вынужденной конвекции [Л. 89]. Этот вопрос будет рассматриваться в разделе 11-5. В-третьих, для масел участок полной гидродинамической и тепловой стабилизации настолько велик,

что на практике в теплообменниках полностью стабилизированного потока и не бывает. Таким образом, на опытах исследуют лишь участки стабилизации.

На участке стабилизации необходимо различать два способа теплообмена. Если труба нагревается по всей длине от входного сечения, гидродинамический и тепловой

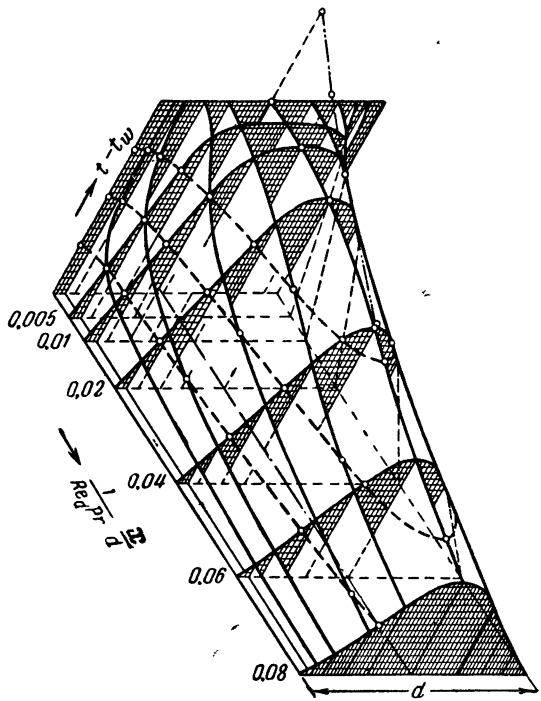


Рис. 7-18. Температурное поле в ламинарном потоке на участке стабилизации в трубе [Л. 345].

пограничные слои развиваются одновременно. Если толщина пограничных слоев мала по сравнению с диаметром трубы, можно применить формулы для плоской плиты. С другой стороны, трубу можно нагревать, начиная с сечения, где скоростное поле уже полностью стабилизировано. Этот случай был исследован в 1889 г. Грэтцем и несколько позже Нуссельтом (1910).

Они предположили, что температура стенки трубы внезапно изменяется в поперечном сечении $x=0$ от темпера-

туры, равной температуре входящей жидкости, до другой температуры, постоянной ниже по течению от $x=0$. Рис. 7-18 и 7-19 воспроизводят результаты вычислений. На рис. 7-19 представлены некоторые результаты, полученные В. Х. Кейсом для случая одновременной тепловой и гидродинамической стабилизации. На рис. 7-18 показана кривая распределения температуры, а на рис. 7-19 — график локального значения критерия Нуссельта. Кривая распределения температуры, имеющая прямоугольную форму

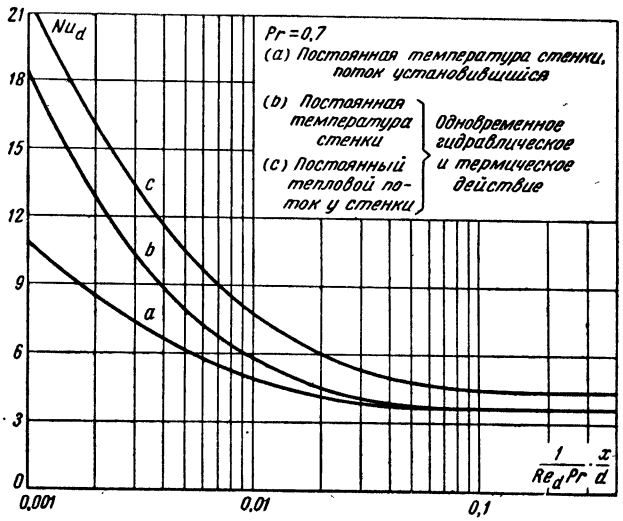


Рис. 7-19. Локальное значение критерия Нуссельта для начального участка трубы. Кривая *a* справедлива для всех значений критерия Прандтля, кривые *b* и *c*—только для Pr = 0,7 [Л. 346].

в том месте, где начинается теплообмен, изменяется в направлении потока пограничными слоями, образующимися вдоль стенок. Кривая распределения температуры полностью стабилизируется, когда пограничные слои сходятся у оси трубы. С этого места кривая распределения температуры не меняет свою форму, лишь высота ее уменьшается в направлении потока.

На графике рис. 7-20 сравниваются значения критерия Нуссельта по расчетам Грэтца и Нуссельта со значениями вычисленными по формулам, выведенным Краусольдом [Л. 90] и Сидером и Тэйтом [Л. 91] на основании их опытов. Несмотря на то, что эти опыты производились главным

образом с маслами, расхождения с результатами вычислений невелики. Точками показаны результаты опытов Нуссельта с газами [Л. 92]. Последние опыты Бема [Л. 93] дали такие же результаты. На графиках рис. 7-19 и 7-20

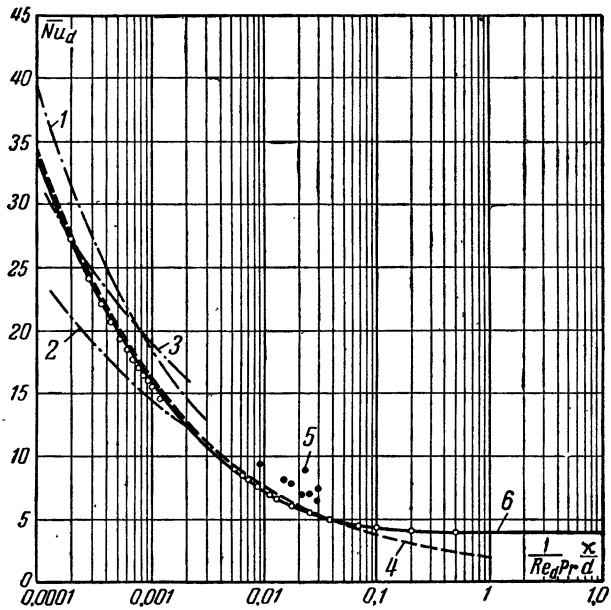


Рис. 7-20. Сравнение измеренных и вычисленных значений среднего коэффициента теплообмена для ламинарного потока на участке стабилизации в трубе [Л. 347].

1—Зидер и Тэйт; *2*—Краусольд, охлаждение; *3*—Краусольд, нагревание; *4*—Левежье; *5*—Нуссельт; *6*—Нуссельт—Грэтц.

средние значения критерия Нуссельта необходимо вычислять по среднелогарифмическому температурному напору. Х. Хаузен [Л. 94] вывел форму для средних значений критерия Нуссельта, которая хорошо аппроксимирует результаты Грэтца и Нуссельта:

$$\overline{Nu}_d = 3{,}65 + \frac{0{,}0668\,(d/x)\,Re_d\,Pr}{1 + 0{,}04\,[(d/x)\,Re_d\,Pr]^{2/3}}. \qquad (7\text{-}34)$$

При более высоких температурных напорах для масел надо учитывать влияние изменения вязкости путем умножения правой части уравнения (7-34) на отношение

$(\mu_B/\mu_w)^{0,14}$, где μ_B — вязкость при объемной или средней интегральной температуре жидкости и μ_w — вязкость при температуре стенки трубы.

Физические параметры берутся при объемной температуре жидкости. Для газов рекомендуется использовать уравнение (7-34) без добавления отношения вязкости, а характеристики следует вводить при относительной температуре, как приводится в уравнении (7-16).

В литературе сведения по теплообмену в ламинарном потоке в трубах в области входа часто представлены как функция безразмерного параметра, который называют числом Грэтца и который является обратной величиной параметра, использованного в качестве абсциссы на рис. 7-19 и 7-20. Статья, в которой подытоживаются рассмотрения различных температурных условий вдоль стенки трубы, была опубликована Норрисом и Стрейдом [Л. 95].

Некоторые характерные черты присущи теплообмену, связанному с ламинарным потоком через каналы с некруглыми поперечными сечениями. Этот случай изучался аналитически [Л. 96] для стабилизованного теплового и гидродинамического потоков через канал, поперечное сечение которого имеет форму сектора круга и для условия, при котором поток тепла от стенки канала в жидкость постоянен в направлении оси канала. Было найдено, что локальный коэффициент теплообмена значительно изменяется по периферии канала, приближаясь к нулевому значению в углах, и что средний коэффициент теплообмена во многом зависит от граничных условий. Были рассмотрены два граничных условия по окружности канала: температура стенки, которая является постоянной по периферии, и локально постоянный тепловой поток. Найдено, что критерий Нуссельта, усредненный по окружности для постоянной температуры стенки, в 7 раз больше его величины для постоянного потока тепла, когда угол вершины сектора был равен 20°. Для угла у вершины в 60° соотношение этих двух чисел Нуссельта равно 2,5. Коэффициент теплообмена в числах Нуссельта определяется как осредненный тепловой поток q_w у стенки, деленный на разность между объемной температурой жидкости и средней температурой стенки (осредненной по периферии канала).

Вышеупомянутый результат указывает, что, используя опубликованные сведения по коэффициентам теплообмена, следует осторожно устанавливать соответствующие граничные условия.

ЗАДАЧИ

7-1. Выведите интегрируемое уравнение энергии пограничного слоя для стационарного осесимметричного потока вокруг цилиндра с осью, параллельной направлению потока. Предположите, что физические свойства изменяются с давлением и температурой. Определить величину конвекции для данных условий.

7-2. Обобщите интегрируемое уравнение энергии пограничного слоя на высокоскоростной поток путем включения члена, описывающего тепло, возникающее при трении.

7-3. Вычислите толщину теплового пограничного слоя для стационарного двухмерного ламинарного потока над круглой пластиной для случая, когда температура поверхности у переднего края пластины равна температуре потока жидкости и когда температура поверхности возрастает линейно в направлении потока. Используйте интегрируемые уравнения пограничного слоя. Не забудьте повторить вычисления в разделе 7-3 и проверить, какие следует провести изменения, чтобы учесть изменяющуюся разность температуры вдоль x.

7-4. Вычислите локальное значение критерия Нуссельта для условия, описанного в предыдущей задаче, но используйте метод из раздела 7-4. Интегралы, которые появляются в вычислениях, могут быть преобразованы в табулированные гамма-функции [1].

7-5. Докажите, что кривая распределения скорости идентична по форме с кривой распределения температуры для ламинарного потока жидкости с числом Pr-1, с постоянной скоростью над плоской пластиной.

7-6. Выведите уравнение (7-25) для теплообмена в потоке с бесконечным клином, вводя переменные f, v' и η в уравнение энергии пограничного слоя.

7-7. Жидкая нефть с характеристиками, указанными в приложении, табл. П-3, протекающая через латунную трубку длиной 3 *м* ($d_i = 12{,}7$ *мм*) со скоростью 13,5 *м/мин*, охлаждается от 93 до 38° С. Температура внутренней поверхности трубы равна 27° С. Найдите коэффициент теплообмена для внутренней поверхности.

7-8. Рассчитайте кривые распределения температур для гидравлических и термических стабилизированного ламинарного потока, протекающего через трубу с круглым поперечным сечением, для случая постоянного потока через стенку трубы и постоянной температуры стенки. При расчете примите, что скорость постоянна в поперечном сечении трубы. Вычислите критерии Нуссельта для обоих пограничных условий. Позже будет показано, что полученные результаты являются хорошим приближением к теплообмену в установившемся турбулентном потоке в трубе для жидкости с очень малыми значениями критерия Прандтля.

7-9. Проведите такое же вычисление, как и в предыдущей задаче, для канала, образованного двумя плоскими параллельными пластинами.

7-10. Вычислите коэффициенты теплообмена и значения критерия Нуссельта для термически и гидравлически стабилизированного ламинарного потока через канал, образованный двумя параллельными пластинами при следующих граничных условиях:

а) Одна система поддерживается при заданной температуре, от-

[1] См., например, [Л. 97].

личной от объемной температуры жидкости, другая стенка изолирована.

б) Обе стенки поддерживаются при двух различных постоянных температурах.

в) Заданный тепловой поток передается от одной стенки в жидкость, причем другая стенка изолирована.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

8-1. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ КОЛИЧЕСТВОМ ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНОМ

В предыдущих главах рассматривался перенос тепла от твердой поверхности в движущийся поток, обусловленный совместным действием кондукции и конвекции. В непосредственной близости от поверхности жидкость фактически находится в состоянии покоя и кондукция является единственным способом передачи тепла от поверхности. Так как скорости потока увеличиваются с увеличением расстояния от стенки, то тепло переносится потоком во все возрастающем количестве (конвекция). В областях, отстоящих дальше от стенки, конвекция становится преобладающим способом переноса тепла. В турбулентном потоке непрерывное перемешивание частичек жидкости связано с колебаниями турбулентной скорости. Это перемешивание вызывает перенос тепла, когда в потоке имеются градиенты температур. Таким образом, в турбулентном потоке наблюдается третий тип теплообмена дополнительно к теплопроводности и конвекции, связанной с объемным движением жидкости. Процесс турбулентного перемешивания настолько мало понятен, что до сих пор еще никто не преуспел в предугадывании на основании одних вычислений картины теплообмена в турбулентном потоке.

С другой стороны, путем, указанным Рейнольдсом, Прандтлем, Тейлором, фон Карманом и другими, можно вывести формулы для теплообмена из гидродинамических измерений и глубоко проникнуть в механизм турбулентного теплообмена.

Основные положения этого раздела будут разработаны на основе аналогии Рейнольдса и представлений Прандтля о ламинарном подслое. В следующем разделе будут обсуждены последние достижения в расчете турбулентного теплообмена.

Только слои жидкости в непосредственной близости от стенки существенно влияют на теплообмен. Векторы скорости этих слоев параллельны стенке, а тепловой поток перпендикулярен к ней. Поэтому мы рассматриваем законы теплообмена в потоке, параллельном поверхности стенки (в направлении оси x). Предположим, что скорость существенно изменяется только в направлении y, в котором также происходит передача тепла. Поэтому существенное изменение температуры имеет место только в направлении y. Согласно Прандтлю мы упрощаем действительные условия, допуская, что ламинарный подслой, в котором не имеется никакого турбулентного перемешивания, существует в непосредственной близости от стенки и что в остальном потоке ламинарная теплопроводность и трение малы по сравнению с турбулентным теплообменом и ими можно пренебречь.

В произвольной плоскости, параллельной поверхности стенки, а следовательно параллельной оси x, в пределах ламинарного подслоя существует напряжение сдвига

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Согласно уравнению (2-2) тепловой поток на единицу площади для плоскости определяется следующим образом:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dy}.$$

Теперь рассмотрим плоскость, параллельную стенке в турбулентном потоке. Благодаря хаотическим движениям частицы жидкости постоянно проходят через эту плоскость. На рис. 8-1 представлена плоскость aa, через единицу площади которой за единицу времени от плоскости *1—1* вверх проходит весовое количество жидкости m', которое обладает скоростью u и температурой t; это количество жидкости переносится к плоскости *2—2*. При стационарном режиме такое же количество жидкости m' должно переноситься от плоскости *2—2*, где скорость равна u' и температура t', к плоскости *1—1*. Частицы жидкости переносят с собой количество тепла, равное $m'c_p t$, а частицы, движущиеся вниз, $m'c_p t'$. Если $t > t'$, то через единицу площади за единицу времени переносится тепла

$$q_t = m'c_p(t - t'), \qquad (8\text{-}1)$$

Но частицы жидкости обладают также кинетической энергией. Если скорость u больше скорости u', частицы жидкости, находящиеся выше плоскости aa, получают ускорение от частиц, движущихся вверх, а частицы находящиеся ниже этой плоскости, замедляются. Благодаря такому турбулентному обмену разность между скоростями u и u' сокращается. Турбулентное перемешивание действует аналогично напряжению трения b плоскости aa. Это является основой для введения понятия «виртуальное турбулентное напряжение сдвига». В соответствии с законом количества движения, сформулированным в разделе 6-2, это виртуальное турбулентное напряжение трения равно увеличению или уменьшению количества движения, обусловленному обменом массы жидкости m' за единицу времени. Поэтому для турбулентного напряжения трения справедливо равенство

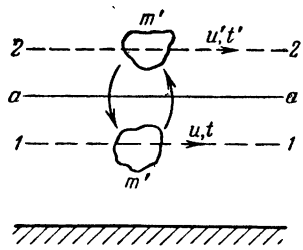


Рис 8-1. Упрощенная картина турбулентного обмена:

$$\tau_t = m'(u - u'). \qquad (8\text{-}2)$$

Если неизвестную величину m' исключить из формулы (8-1) и (8-2), получаем следующее соотношение между тепловым потоком и напряжением сдвига в турбулентном потоке:

$$q_t = \tau_t c_p \frac{t - t'}{u - u'}.$$

Это выражение можно также записать в дифференциальной форме:

$$q_t = -\tau_t c_p \frac{dt}{du}, \qquad (8\text{-}3)$$

поскольку местоположение плоскостей *1—1* и *2—2* произвольное. Это соотношение впервые было получено Рейнольдсом в 1874 г. и поэтому было названо аналогией Рейнольдса. Если соответствующее соотношение вывести для плоскости в ламинарном подслое путем деления второго соотношения, данного в начале этого раздела на первое, то получим:

$$q = -\tau \frac{\lambda}{\mu} \frac{dt}{du}. \qquad (8\text{-}4)$$

Для отношения теплового потока к напряжению трения тот же самый закон справедлив в турбулентном или ламинарном потоке, когда

$$\frac{\lambda}{\mu}=c_p \tag{8-5}$$

или когда

$$\frac{c_p\mu}{\lambda}=\frac{\nu}{a}=\mathrm{Pr}=1. \tag{8-6}$$

В жидкости или газе с критерием Прандтля, равным 1, теплообмен в ламинарном или турбулентном потоке связан с напряжением трения тем же самым уравнением.

Для потока пограничного слоя желательно получить соотношение между величинами (t_w, $u=0$) на поверхности стенки и (t_s, u_s) в потоке на внешнем крае пограничного слоя. Такое соотношение для жидкости с Pr=1 получается интегрированием уравнения (8-3) в пределах пограничного слоя

$$\int_0^{\delta} dt=\frac{1}{c_p}\int_0^{\delta}\frac{q}{\tau}\,du.$$

Поскольку толщина пограничного слоя δ мала, это свидетельствует о том, что отношение q/τ можно рассматривать как постоянное и равное отношению q_w/τ_w этих величин у поверхности. Тогда интегрирование дает:

$$t_s-t_w=\frac{q_w}{\tau_w}\frac{u_s}{c_p}.$$

Для полностью стабилизированного потока в трубе следует применять среднюю скорость u_m и объемную температуру t_B. При этом для трубы получается следующая зависимость:

$$q_w=\tau_w c_p\frac{t_B-t_w}{u_m}.$$

Умножая обе части этого уравнения на площадь поверхности стенки трубы A, получаем:

$$Q_w=R\frac{c_p}{u_m}(t_B-t_w), \tag{8-7}$$

где R — сопротивление ($R=\tau_w A$).

Эта простая зависимость между количеством передаваемого тепла Q_w и сопротивлением R справедлива только для среды с критерием Прандтля, равным единице. Так как для всех газов значение критерия Прандтля лишь незначительно отличается от единицы, то при известном сопротивлении уравнение (8-7) всегда дает правильное представление об интенсивности теплообмена. Сопротивление можно заменить той энергией, которую нужно затратить для того, чтобы прогнать газ через трубу. Сопротивление трубы R при падении давления Δp равняется $\Delta p(\pi d^2/4)$, а объемная скорость газа $V=U_m(\pi d^2/4)$; отсюда искомая энергия, необходимая для потока,

$$W=V\Delta p=Ru_m.$$

Теперь находим величину отношения количества передаваемого тепла к этой энергии

$$\frac{Q}{W}=\frac{c_p}{u_m^2}(t_B-t_w). \qquad (8\text{-}8)$$

Эта важная зависимость показывает, что при уменьшении скорости u_m и энергия, необходимая для обеспечения определенной интенсивности теплообмена, уменьшается. Это обстоятельство используется в охлаждающих устройствах или теплообменниках самолетов. Охлаждающее устройство окружают каналом и, таким образом, поток воздуха, прежде чем поступить в охладитель, замедляется, а затем повышение давления, получившееся в результате замедления движения воздуха, используется опять для ускорения его движения. Такой каналовый охладитель схематически изображен на рис. 8-2. Каналовая конструкция, которая в настоящее время широко применяется в авиастроении, с успехом используется также в скоростных локомотивах и автомобилях, при этом мощность, необходимую для обеспечения движения охладительного устройства через воздух, можно снизить чрезвычайно сильно. Однако этот выигрыш не достигается безвозмездно, так как чем меньше скорость движения воздуха через охлаждающее устройство, тем больше должна быть поверхность для обеспечения отвода данного количества тепла. Такую же зависимость между

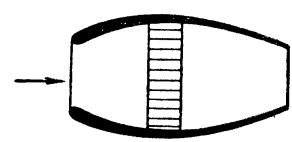


Рис. 8-2. Каналовый охладитель авиационного двигателя.

величиной поверхности и необходимой мощностью следует учитывать при конструировании паровых котлов. Если необходимо уменьшить вес и габариты котла путем ускорения прохождения горячих газов через котел, этого следует достигать использованием дешевых источников энергии. В котле Велокса (Velox) эта задача решается применением газовой турбины, которая приводит в движение воздуходувку, подающую воздух в топку.

Пример 8-1. Через отрезок трубы длиной 1 *м* и диаметром 20 *мм* протекает воздух со скоростью 30 *м/сек*. Температура воздуха у входа в трубу 20° С, давление 1,0 *кГ/см²*. Падение давления в трубе 81,2 *мм вод. ст.*, или 80 *кГ/см²*. Сколько тепла отдается трубой воздуху, если стенки трубы нагреваются до температуры $t_w = 100°$ С.

В качестве первого приближения можно использовать результат вычислений по формуле (8-7), хотя значение критерия Прандтля для воздуха равно 0,72. Сопротивление движению воздуха, оказываемое трубой,

$$R = \Delta p \frac{\pi d^2}{4} = 80 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}0004}{4} = 0{,}025 \text{ кГ}.$$

Количество тепла, передаваемого воздуху, находится из равенства

$$Q_w = 0{,}025 \frac{9{,}81 \cdot 0{,}24}{30} (t_w - t_B) = 0{,}002 (t_w - t_B) \text{ ккал/сек·град} =$$

$$= 0{,}002 \cdot 3\,600 (t_w - t_B) \text{ ккал/ч·град} = 7{,}2 (t_w - t_B) \text{ ккал/ч·град}.$$

Температура стенок трубы $t_w = 100°$ С. Средняя температура воздуха t_B неизвестна. Количество тепла, передаваемого воздуху, можно вычислить тоже по формуле

$$Q_w = \rho c_p u_m (\pi d^2/4)(t_e - t_i),$$

где ρ — удельный вес воздуха ($\rho = 1{,}29$ *кг/м³* при 20° С и 1,0 *кГ/см²*);

t_i — температура воздуха при входе в трубу;

t_e — средняя интегральная температура воздуха при выходе из трубы.

Постановка числовых значений в последнюю формулу дает следующий результат:

$$Q_w = 1{,}29 \cdot 0{,}24 \cdot 30 \frac{0{,}0004\pi}{4} (t_e - t_i) =$$

$$= 0{,}003 (t_e - t_i) \text{ ккал/сек·град}.$$

Средний температурный напор $\Delta t_m = t_w - t_B$ согласно сказанному в разделе 1-4 равняется $\Delta t_m = a (\Delta t_i + \Delta t_e)/2$. Предполагается, что температура стенок постоянна. Отсюда

$$\Delta t_m = t_w - t_B = a [t_w - (t_i + t_e)/2].$$

Приравнивая правые части последних двух уравнений, получаем:

$$0{,}002a \left(t_w - \frac{t_i + t_e}{2} \right) = 0{,}003 (t_e - t_i).$$

Коэффициент a нельзя определить при помощи табл. 1-2, так как отношение $\Delta t_i/\Delta t_e$ неизвестно. Допустим $a = 1$. Тогда из последнего уравнения получаем $t_e = 60°$ С. Для нахождения значения a можно воспользоваться равенством

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_e} = \frac{100 - 20}{100 - 60} = 2.$$

Отсюда из табл. 1-2 находим $a = 0{,}96$. Так как весь расчет дает лишь первое приближение, то нет необходимости повторять его для нахождения нового значения a. Теперь определяем количество передаваемого тепла

$$Q = 0{,}003\,(60 - 20)\cdot 3\,600 = 430 \ \textit{ккал/ч}\cdot °\text{C};$$

Точный расчет по формулам, которые даются в следующем параграфе, дает результат, превышающий найденный на 15%.

Для среды, критерий Прандтля которой значительно отличается от единицы, термическое сопротивление ламинарного подслоя и турбулентного слоя необходимо рассчитывать отдельно. Пусть температура стенки равна t_w (рис. 8-3), температура на границе между ламинарным подслоем и турбулентным пограничным слоем t_b и температура основного ядра потока t_s. Пусть соответствующие скорости суть $u_w = 0$; u_b и u_s. Интегрирование уравнения (8-4) по подслою с допущением, что

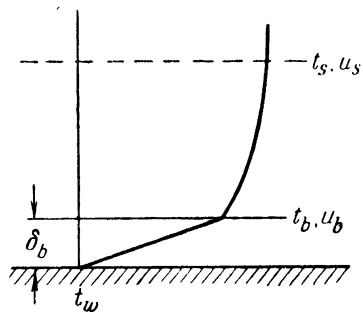


Рис. 8-3. Кривая распределения температуры и скорости в турбулентном потоке с ламинарным подслоем.

$$q/\tau = \text{const} = q_w/\tau_w$$

дает:

$$q_w = \tau_w \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{u_b} (t_w - t_b). \qquad (8\text{-}9)$$

Тепловой поток в турбулентном пограничном слое получается интегрированием уравнения (8-3) между величинами $(t_b,\ u_b)$ и $(t_s,\ u_s)$

$$q_w = \tau_w c_p \frac{t_b - t_s}{u_s - u_b}. \qquad (8\text{-}10)$$

Коэффициент теплообмена α у поверхности стенки определяется из уравнения

$$q_w = \alpha (t_w - t_s), \qquad (8\text{-}11)$$

Если уравнения (8-9) — (8-11) решить относительно температурных напоров, а затем первое и второе вычесть из третьего, получим:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\tau_w c_p}(u_s-u_b)+\frac{\mu u_b}{\tau_w \lambda}=\frac{u_s}{\tau_w c_p}\left(1-\frac{u_b}{u_s}+\frac{\mu c_p}{\lambda}\frac{u_b}{u_s}\right)=$$

$$=\frac{u_s}{\tau_w c_p}\left[1+\frac{u_b}{u_s}(\mathrm{Pr}-1)\right],$$

откуда

$$\alpha=\frac{\tau_w c_p/u_s}{1+(u_b/u_s)(\mathrm{Pr}-1)}. \qquad (8\text{-}12)$$

Эта формула была выведена Л. Прандтлем (1910 и 1928) [Л. 98] и Дж. Тэйлором (1916).

8-2. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

В стабилизированном потоке толщина пограничного слоя равняется радиусу трубы. Поэтому в формулах вместо значений скорости u_s и температуры t_s нужно применять значения скорости и температуры, которые имеют место по оси трубы. Однако коэффициент теплообмена можно определять по средней интегральной температуре t_B и в уравнении (8-12) применять среднее значение скорости u_m. Это не совсем правильно, однако ошибка бывает невелика. Если напряжение трения определить по формуле (6-50) и отношение скоростей по формуле (6-51), то последнее уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{\alpha}{\rho c_p u_m}=\frac{0{,}0396\,(u_m d/\nu)^{-\frac{1}{4}}}{1+A\,(u_m d/\nu)^{-\frac{1}{8}}(\mathrm{Pr}-1)}. \qquad (8\text{-}13)$$

Постоянная A равняется 2,44. Однако сопоставление с результатами опытов над вязкими жидкостями показывает, что это значение чересчур велико и что, кроме того, A является функцией критерия Прандтля. На рис. 8-4 представлен график этой функции по В. Бюну [Л. 99]. Выражение в левой части уравнения (8-13) эквивалентно критериальному выражению $\mathrm{Nu}_d/(\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr})$. Эта величина называется критерием Стантона (Stanton) и обозначается символом St. Таким образом, окончательный вид формы теп-

лообмена в трубе при турбулентном движении жидкости будет следующим:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}} = \frac{0{,}0396\,(\mathrm{Re}_d)^{-1/4}}{1 + A\,(\mathrm{Re}_d)^{-1/8}(\mathrm{Pr} - 1)}. \qquad (8\text{-}14)$$

Значение коэффициента A можно определить из графика рис. 8-4. Гоффман [Л. 100] для определения этого коэффициента дает такую формулу:

$$A = 1{,}5\,\mathrm{Pr}^{-1/6}.$$

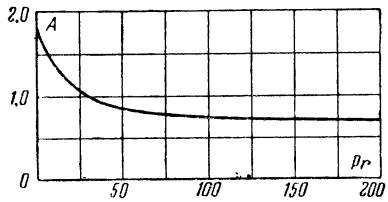


Рис. 8-4. Значение коэффициента A в формулах (8-14) и (8-17) [Л. 348].

Приведенные выше формулы дают возможность устанавливать форму кривой распределения скорости для различных значений критерия Прандтля. Приравнивая правые части равенств (8-9) и (8-10), можно определить отношение падения температуры в ламинарном подслое к падению температуры в турбулентной зоне:

$$\frac{t_b - t_w}{t_s - t_b} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{u_b}{u_s - u_b} = \mathrm{Pr} \frac{u_b}{u_s - u_b}.$$

Для среды с $\mathrm{Pr} = 1$ отношение разностей температуры равно отношению соответственных разностей скоростей. Оба поля подобны. На рис. 8-5 даны кривые распределения температур для двух значений критерия $\mathrm{Pr} > 1$. Для случая больших значений критерия Прандтля падение температуры в ламинарном подслое по существу одно и то же.

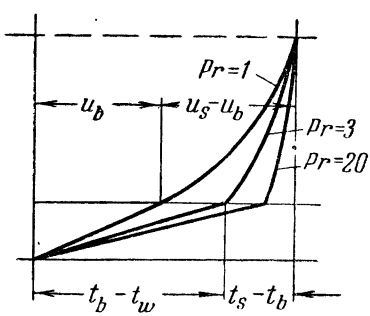


Рис. 8-5. Кривые распределения температуры для турбулентного потока жидкостей с различными значениями критерия Прандтля.

Кривые распределения температуры для низких значений критерия Прандтля при определении их таким же образом, как это сделано при построении графика рис. 8-5, будут иметь S-образную форму, причем в ла-

минарном подслое повышение температуры будет незначительным и наибольшая разность температур будет относиться к турбулентной зоне. Это объясняется очень низким термическим сопротивлением ламинарного подслоя по сравнению с термическим сопротивлением турбулентной зоны.

В действительности, однако, происходит нечто иное. В любом турбулентном потоке теплообмен конвекцией накладывается на теплообмен теплопроводностью. Для сред с критерием Прандтля, равным или большим единицы, теплопроводность невелика по сравнению с конвективным теплообменом и поэтому в приведенных выше расчетах ею пренебрегают. Однако при низких значениях критерия Прандтля она приобретает равную или бо́льшую значимость, и в предельном случае можно пренебрегать уже конвективным теплообменом, тогда как теплообмен теплопроводностью ставится основным фактом.

Расчеты, выполненные в разделе 7-7, обычно дают хорошие сведения по теплообмену в жидкости или газе, если $\mathrm{Pr} \to 0$, проходящем по трубе, когда параболическая кривая распределения скорости, использованная для ламинарного потока в разделе 7-7, заменяется кривой распределения скорости в турбулентном потоке. Достаточно хороший результат получается, когда кривая распределения скорости в турбулентном потоке аппроксимируется кривой постоянной скорости (slug — поток). При установившихся тепловых условиях и постоянном тепловом потоке у стенки эта операция приводит к соотношению $\mathrm{Nu}_d = 8$; при постоянной температуре стенки — к соотношению $\mathrm{Nu}_d = 5{,}8$. Более подробные сведения по теплообмену в жидких металлах будут представлены в разделе 10-4.

Для расчетов теплообмена имеет большое удобство тот факт, что левая часть равенства (8-14) представляет собой сочетание критериальных величин Nu_d, Re_d и Pr. Количество тепла, передаваемое стенке трубы длиной L, равно:

$$Q = \alpha \pi d L (t_B - t_w).$$

Это количество тепла можно также выразить через падение температуры жидкости от температуры входа t_i до температуры выхода t_e:

$$Q = \rho c_p u_m \frac{\pi d^2}{4} (t_i - t_e).$$

Приравнивая правые части этих равенств и произведя некоторые преобразования, получаем:

$$\frac{\alpha}{\rho c_p u_m} = \frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}} = \frac{d}{4L} \frac{t_i - t_e}{t_B - t_w}. \qquad (8\text{-}15)$$

При помощи этого соотношения можно рассчитать температуру жидкости при выходе из трубы t_e, не пользуясь физическими параметрами, если известны размеры трубы, температура жидкости при входе в трубу t_i, температура стенки трубы t_w и значение критериального комплекса $\mathrm{Nu}_d/(\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr})$. Вместо средней интегральной температуры t_B необходимо брать логарифмическую среднюю температуру жидкости у входа в трубу и на выходе из трубы.

При выводе формулы (8-12) предполагалось, что физические параметры неизменны. Э. Гоффман [Л. 101] исследовал вопрос влияния переменности физических параметров на теплообмен. Он нашел, что формула (8-14) справедлива лишь в том случае, когда физические параметры берутся по определяющей температуре:

$$t^* = t_B - \frac{0{,}1\,\mathrm{Pr} + 40}{\mathrm{Pr} + 72}(t_B - t_w). \qquad (8\text{-}16)$$

Для газов ($\mathrm{Pr} = 1$) это уравнение дает для t приблизительно среднее арифметическое между температурой среды и температурой стенки. Чем больше критерий Прандтля, тем ближе значение t^* к значению средней температуры жидкости t_B. То же относится и к температуре t_b между ламинарным подслоем и турбулентной зоной (рис. 8-5). Такая определяющая температура, которая является только функцией Pr, должна рассматриваться как первое приближение, поскольку следует ожидать, что теплообмен в жидкости с переменными характеристиками зависит от того, как эти свойства изменяются в зависимости от температуры и давления.

Вода при сверхкритическом давлении используется как охладитель в ядерных реакторах. Теплообмен вблизи критического давления характеризуется тем фактом, что физические параметры, в особенности удельная теплоемкость, сильно изменяются в зависимости от температуры. Р. Г. Дайсслер [Л. 102] и К. Гольдман [Л. 103] вычислили трение и теплопередачу к воде, протекающей в турбулентном потоке через трубу при давлении в 775 *ат/см*^{2}. Были приняты установленная скорость и распределение температуры. Результаты вычисления Дайсслера будут обсуж-

даться ниже. Рис. 8-6 показывает, как изменяются физические параметры при принятом давлении. Результаты его вычислений могут быть хорошо аппроксимированы при помощи соотношения для постоянных свойств [например, соотношение (8-14)], когда физические параметры вводятся при тщательно выбранной определяющей температуре.

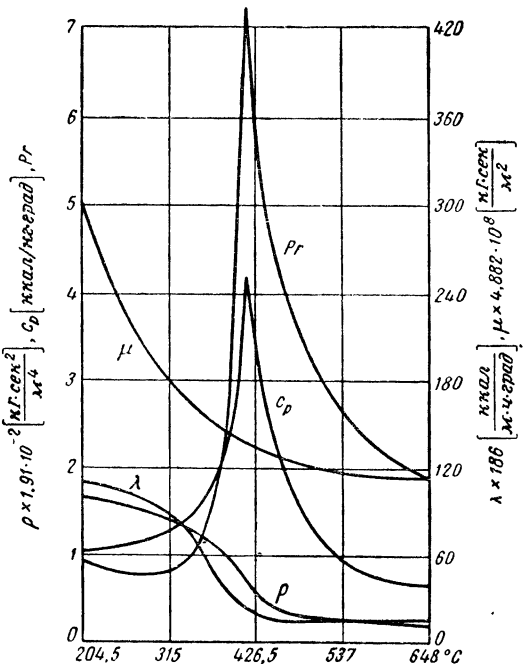


Рис. 8-6. Физические свойства воды при давлении в 775 *ат* как функция температуры [Л. 349].

Эккерт [Л. 104] получил зависимость, представленную на рис. 8-7 для определяющей температуры t^*. Верхние кривые дают определяющую температуру для вычисления коэффициента трения, а нижние кривые — определяющую температуру для теплообмена. Видно, что величина объемной температуры t_B и температуры стенки t_w относительно температуры t_m, при которой теплоемкость проходит через максимум, имеет наибольшее влияние на определяющую температуру. Критерий Прандтля нужно ввести в уравнение для коэффициента теплообмена при температуре стенки. Результаты опытов по теплообмену в жидкостях

вблизи их критического состояния не представляют однородную картину. Измерения на углекислоте [Л. 105] дают хорошее совпадение с вычислениями Дайсслера, тогда как измерения [Л. 106] с паром при сверхкритических параметрах при давлении 316,35 *кГ/см*^{2} приводят к коэффициентам теплообмена, которые обычно были выше вычис-

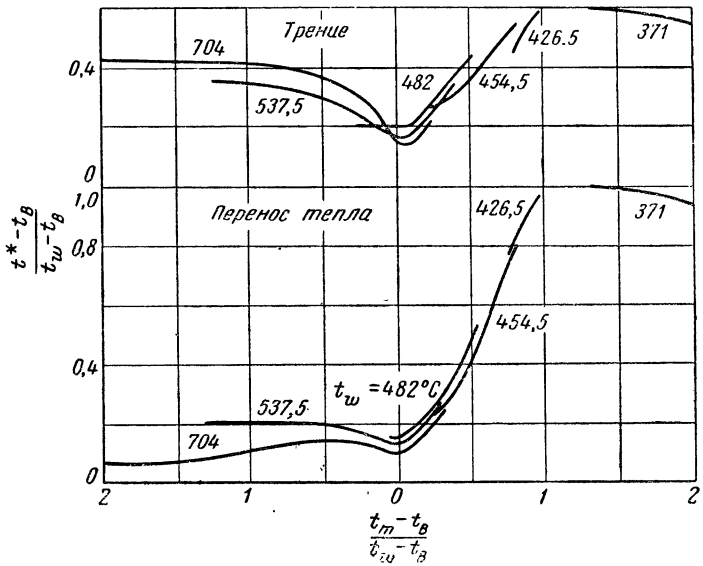


Рис. 8-7. Относительная температура t^* для вычисления теплообмена турбулентного потока воды, протекающей через трубу при давлении в 775 *ат*.

t_w —температура стенки; t_b —средняя объемная температура [Л. 350].

ленных значений на 70%, а вблизи критической температуры на 100%. Отклонения могут быть вызваны незнанием величины физических параметров в высокотемпературном диапазоне, а также в диапазоне высоких давлений или влиянием свободной конвекции, которые очень велики вблизи критического состояния [Л. 107].

Кроме теоретически обоснованной формулы (8-14), часто применяют эмпирические формулы. Хорошо известны, например, формулы Диттуса и Белтера [Л. 108] для теплового потока от стенок к жидкости:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}0243\,(\mathrm{Re}_d)^{0{,}8}\,(\mathrm{Pr})^{0{,}4}$$

и

$$Nu_d = 0{,}0265\,(Re_d)^{0,8}\,(Pr)^{0,3}$$

— для теплового потока от жидкости к стенкам.

Применение двух различных формул для случаев нагревания и охлаждения [Л. 109] нельзя признать совершенно удовлетворительным.

Эти зависимости дают точные результаты при условии полной стабилизации турбулентного потока. Для участка стабилизации значения коэффициента теплообмена могут быть несколько больше расчетных. Х. Хаузен [Л. 110] дает следующее выражение: для среднего значения критерия Нуссельта

$$\overline{Nu}_d = 0{,}116\,[(Re_d)^{2/3} - 125]\,(Pr)^{1/3} \times \times \left[1 + \left(\frac{d}{x}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{\mu_B}{\mu_w}\right)^{0,14},$$

где μ_B — вязкость при средней интегральной температуре жидкости и μ_w — вязкость при температуре стенки трубы. Кроме того, физические параметры надо определять по t_B. Эта формула учитывает условия, существующие на участке стабилизации. Она также дает удовлетворительные результаты для переходной зоны при значениях Re_d от 2 300 до 6 000. Предполагается, что это соотношение применяется к жидкостям, для которых колебание вязкости является доминирующим (масла). Рис. 8-8 изображает переходную область согласно данным результатов эксперимента, проведенного Зигером и Тейтом [Л. 111].

Уравнение Хаузена дает осредненный коэффициент теплообмена на участке между началом нагретой части трубы и точкой x. Локальный коэффициент теплоомена можно получить из этого соотношения дифференцированием. При проведении этого видно, что такое же соотношение описывает локальный критерий Нуссельта, когда член в скобках заменяется на $1 + (1/3)\,(d/x)^{2/3}$.

Эксперименты Дж. Гартнетта [Л. 112] и расчеты Р. Дайсслера [Л. 113] указывают на то, что коэффициенты теплообмена для жидкостей с критериями Прандтля порядка 1 или больше уменьшаются даже быстрее, чем это указывается этим уравнением, с увеличением длины x. При длине, равной 15 диаметрам, локальный коэффициент теплообмена составляет примерно 1% величины, которая асимптотически достигается в длинной трубе. Это утверж-

дение справедливо при полностью установившемся турбулентном потоке в начале нагретой части трубы.

Когда труба нагревается по всей длине, т. е. гидродинамический и тепловой начальный участки совпадают, имеются еще и дополнительные условия. На рис. 8-9 приведены локальные значения критерия Нуссельта в положении x согласно измерениям В. Линке и Х. Кунце [Л. 114].

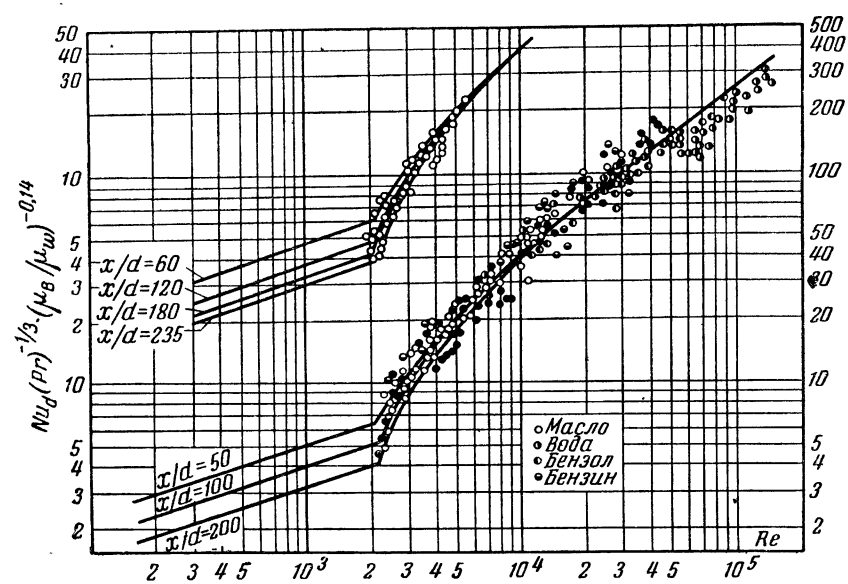


Рис. 8-8. Значение коэффициента теплообмена для переходной зоны от ламинарного к турбулентному потоку в трубе [Л. 351].

Провал в кривых объясняется тем, что течение в пограничном слое вдоль стен трубы сначала имеет ламинарный, а затем, пройдя переходную область, становится турбулентным.

Применяя уравнения этого раздела, можно вычислить теплообмен в трубе с площадью поперечного сечения некруглой формы. Вместо диаметра d в этом случае следует использовать гидравлический диаметр $d_1=4A/C$ (где A — площадь поперечного сечения, а C — смоченный периметр).

Весь периметр следует также использовать и в том случае, когда нагревается или охлаждается только его часть [Л. 115]. Лишь при вычислении теплового потока по урав-

нению (1-13) следует использовать только площадь нагрева.

Теплообмен в потоке воздуха через трубы с шероховатыми поверхностями тщательно исследован в статье В. Нуннера [Л. 116]. Шероховатость была создана коль-

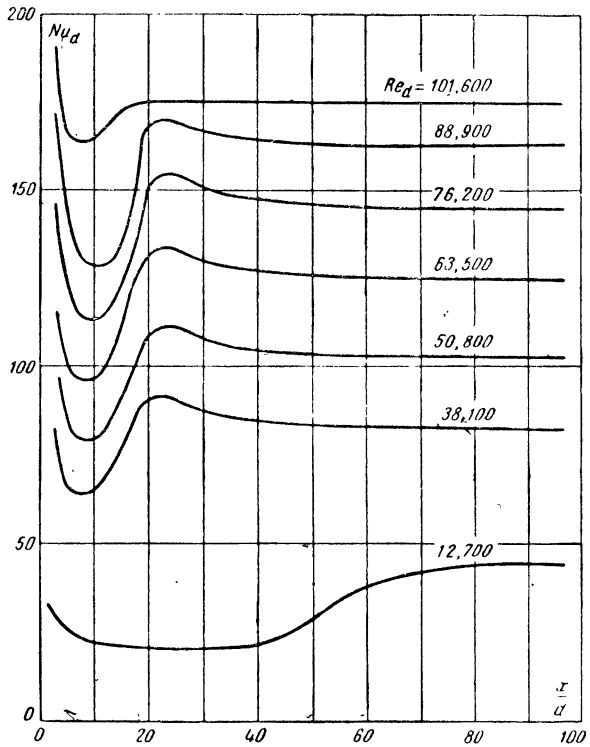


Рис. 8-9. Локальные значения критерия Нуссельта для потока в трубе вблизи начального участка с одновременным установлением потока и поля температуры [Л. 352].

цами различного поперечного сечения, прикрепленными к внутренней поверхности трубы. Одновременно исследовались и трубы с естественной шероховатой внутренней поверхностью.

Было найдено, что независимо от формы элементов шероховатости измеренные значения критерия Нуссельта являются функциями критерия Рейнольдса и отношения коэффициентов трения f/f_0 (f — коэффициент трения трубы

с шероховатой поверхностью; f_0 — коэффициент трения трубы с гладкой поверхностью при тех же значениях критерия Рейнольдса). На рис. 8-10 представлены данные исследования. Нуннер также нашел, что измеренные значения критерия Нуссельта близко совпадают с значениями,

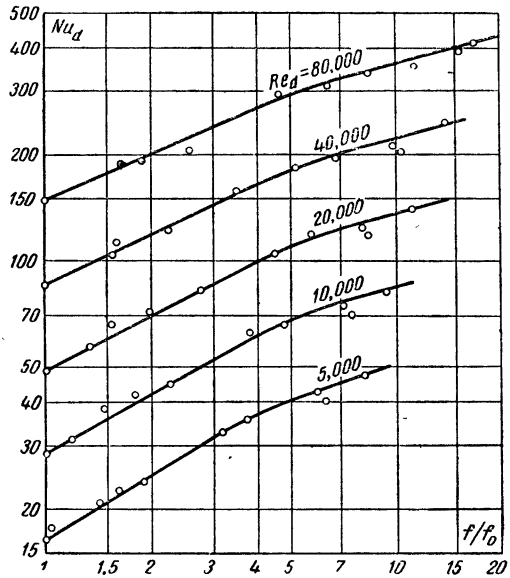


Рис. 8-10. Критерий Нуссельта для турбулентного потока и в трубе с шероховатой поверхностью [Л. 353].

вычисленными по уравнению (8-12) или (8-14), где член Pr—1 в этих уравнениях заменен на Pr f/f_0—1. Величины, полученные таким путем, также хорошо совпадают с предыдущими измерениями.

Пример 8-2. Радиатор автомобиля состоит из ребристых трубок диаметром 6,1 *мм* и длиной 610 *мм*. Охлаждающая вода протекает по ним со скоростью 0,9 *м/сек* при температуре 62° С. Требуется вычислить коэффициент теплообмена стенок трубок. Коэффициент кинематической вязкости воды при 62° С $\nu=0{,}0475^{-5}\cdot 10^{-5}$ *м²/сек* (см. приложение) и критерий Прандтля Pr=3,02. Критерий Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_d=\frac{0{,}9\cdot 0{,}0061}{0{,}0475\cdot 10^{-5}}=11\,600.$$

Следовательно, движение воды происходит при турбулентном режиме. Длина участка стабилизации для турбулентного потока определяется из равенства $L_e/d=15$. В рассматриваемом случае отношение длины трубки к ее диаметру равно 100, поэтому бо́льшая часть потока являет-

ся гидравлически стабилизированной и, следовательно, расчеты можно производить по формуле (8-13). По графику рис. 8-4 находим, что $A=1{,}5$, откуда

$$\frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr}}=\frac{0{,}0396/11\,600^{1/4}}{1+1{,}5\cdot 2{,}02/11\,600^{1/8}}=0{,}00194.$$

Критерий Нуссельта $\mathrm{Nu}_d=0{,}00194\cdot 11\,600\cdot 3{,}02=68$, коэффициент теплопроводности $\lambda=0{,}56$ *ккал/м·ч·°С*. Следовательно,

$$\alpha=\mathrm{Nu}_d\frac{\lambda}{d}=68\frac{0{,}56}{0{,}0061}=6\,240\ \textit{ккал/м}^2\textit{·ч·град}.$$

На расстоянии $^1/_8$ длины трубки коэффициент теплообмена уменьшается от более высоких значений до вычисленного. Зная величину выражения $\mathrm{Nu}_d/(\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr})$, можно легко рассчитать температуру воды:

$$\frac{t_e-t_i}{t_B-t_w}=\frac{4L}{d}\,0{,}00194=\frac{4\cdot 0{,}61}{0{,}0061}\cdot 0{,}00194=0{,}776.$$

8-3. ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛИТЫ

Для расчета теплоотдачи от плиты по формуле (8-12) в качестве величины u_s нужно взять скорость свободного потока, а в качестве t_s — температуру свободного потока. Подстановка значения напряжения сдвига из формулы (6-33) и отношения скоростей из формулы (6-37) дает следующий результат:

$$\mathrm{St}=\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}}=\frac{0{,}0296\,(\mathrm{Re}_x)^{-1/5}}{1+0{,}87A(\mathrm{Re}_x)^{-1/10}(\mathrm{Pr}-1)}. \qquad (8\text{-}17)$$

Значение A можно взять либо из графика рис. 8-4, либо вычислить по формуле $A=1{,}5\mathrm{Pr}^{-1/6}$. Коэффициент 0,87 появляется в результате замены средней скорости, использованной для трубы, скоростью u_s для рассматриваемого случая, которая соответствует скорости движения по оси трубы. Формула (8-17) дает значение локального коэффициента теплообмена. В разд. 6-1 указывалось, что ламинарный пограничный слой существует близ переднего края плиты. Только тогда, когда значение критерия Рейнольдса становится критическим (приблизительно $5\cdot 10^5$), режим движения в пограничном слое становится турбулентным. Формула (8-17) дает значения коэффициента теплообмена для зоны с турбулентным режимом движения среды, тогда как для ламинарного режима движения надо принять формулу (7-13) [Л. 117]. Для газов формулу (8-17) можно несколько упростить, так как в этом случае величина критерия Прандтля близка к единице, а поэтому знаменатель

можно считать постоянным. Интегрируя это упрощенное выражение по длине плиты, получим средний коэффициент теплообмена. Если предположить, что пограничный слой имеет турбулентный характер по всей длине, можно получить значение критерия Нуссельта для среднего коэффициента теплообмена [Л. 118]

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = 0{,}037\,(\mathrm{Re}_x)^{0{,}8}(\mathrm{Pr})^{1/3}. \qquad (8\text{-}18)$$

В действительности определенная часть пограничного слоя близ переднего края плиты всегда ламинарна, поэтому интегрирование необходимо производить двумя этапами, отдельно для ламинарного участка, затем — для турбулентного. Если производить интегрирование, предполагая, что значения коэффициента теплообмена в турбулентной зоне равны значениям для гипотетического случая начала турбулентного пограничного слоя у переднего края плиты, получим:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = 0{,}037\,(\mathrm{Pr})^{1/3}\,[(\mathrm{Re}_x)^{0{,}8} - 23\,100]$$

для $\mathrm{Re}_{кр} = 5 \cdot 10^5$ и

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = 0{,}037\,(\mathrm{Pr})^{1/3}\,[(\mathrm{Re}_x)^{0{,}8} - 4\,200]$$

для $\mathrm{Re}_{кр} = 10^5$

Для потока пограничного слоя критерий Стантона в формуле (8-17) можно рассматривать как отношение двух длин. Чтобы показать это, воспользуемся тем фактом, что все тепло Q, отдаваемое горячей плитой омывающему ее потоку с участка поверхности длиной x (рис. 8-11), должно при стационарном режиме переноситься вместе с потоком через плоскость *1—1*, т. е. выражая это в математической форме:

$$Q = \rho c_p \int_0^\infty u\,(t - t_s)\,dy.$$

Практически интегрирование надо производить лишь в пределах теплового пограничного слоя. С другой стороны, количество тепла Q можно выразить через коэффициент теплообмена, усредненный для участка длиной x:

$$Q = \bar{\alpha} x\,(t_w - t_s).$$

Пользуясь этими двумя равенствами, можно определить среднее значение критерия Стантона:

$$\overline{\mathrm{St}} = \frac{\overline{\alpha}}{\rho c_p u_s} = \frac{1}{x}\int_0^{\delta_t} \frac{u(t-t_s)}{u_s(t_w-t_s)}\,dy.$$

Здесь интеграл имеет линейную размерность и может рассматриваться как своего рода толщина пограничного слоя. Так как он характеризует тепло, передаваемое конвективным путем внутри пограничного слоя, то эту величину можно назвать эквивалентной толщиной конвективного пограничного слоя δ_c. Она точно соответствует величине, называемой в гидродинамике толщиной количества движения пограничного слоя. На нижнем графике рис. 8-11 показан способ определения толщин конвективного пограничного слоя.

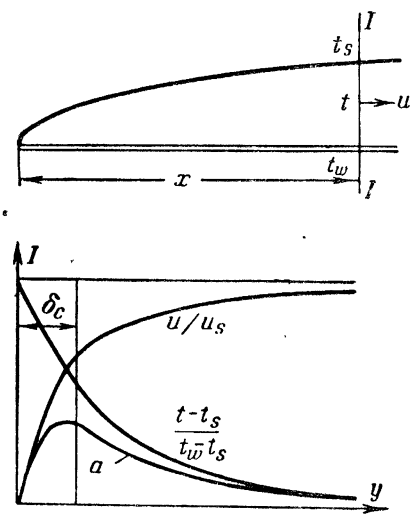


Рис. 8-11. К определению теплового пограничного слоя.

Умножение ординат кривой безразмерного скоростного поля u/u_s на соответствующие ординаты безразмерного температурного поля $(t—t_s)/(t_w—t_s)$ дает кривую a, и площадь заключенная между этой кривой и осью абсцисс, соответствует рассматриваемому интегралу. Фигуру, ограниченную кривой и осью абсцисс, можно превратить в равновеликий прямоугольник с высотой, равной единице, и основанием, равным δ_c.

Понятно, что толщина конвективного пограничного слоя меньше толщины теплового пограничного слоя δ_t (см. стр. 210) и также меньше эквивалентной толщины пограничного слоя, которая была определена на стр. 178. Так как толщина пограничного слоя всегда невелика по сравнению с длиной плиты x, то, очевидно, критерий Стантона всегда имеет небольшую величину.

При выводе уравнения (8-12) предполагалось, что температура изменяется только в направлении, перпендикулярном к поверхности стенки. Поэтому соотношения, приведенные в этом разделе, могут быть применены к пластине с постоянной температурой поверхности. При температуре стенки, которая изменяется вдоль поверхности, теплообмен можно вычислить при помощи метода, описанного в разделе 7-4, при условии, что известно соотношение, описывающее теплообмен при ступенчатом изменении температуры поверхности. Себан, ссылаясь на работы С. Скеса [Л. 119], приводит следующую зависимость для теплообмена в точке x на пластине с ненагретой начальной площадкой длиной ξ:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0{,}0289\,(\mathrm{Pr})^{1/9}\,(\mathrm{Re}_x)^{0,8} \times \left[1 - \left(\frac{\xi}{x}\right)^{9/10}\right]^{-1/9}.$$

Степень $1/9$ критерия Прандтля оказывается низкой и ее следует, вероятно, заменить на $1/8$. В этом случае уравнение будет хорошо согласовываться с существующими экспериментами.

Пример 8-3. Плоская плита, нагреваемая до температуры 80° С, омывается потоком воздуха при температуре 20° С, давлении 1,0 *кГ/см*^{2} и скорости $u_s = 9{,}15$ *м/сек*. Требуется рассчитать локальный коэффициент теплообмена на расстоянии $x = 305$ *мм* от переднего края.

Согласно сказанному на стр. 223 физические параметры газов должны быть взяты при температуре, являющейся средним арифметическим между температурами стенки и газа. Таким образом, получаем: $t^* = 50°$ С. Из таблицы приложения находим: $\nu = 1{,}85 \cdot 10^{-5}$ *м*^{2}*/сек*; $\lambda = 0{,}0237$ *ккал/м · ч · град*, $\mathrm{Pr} = 0{,}701$, откуда

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_s x}{\nu} = \frac{9{,}15 \cdot 0{,}305}{1{,}85 \cdot 10^{-5}} = 151\,000.$$

При таком значении критерия Рейнольдса пограничный слой может быть и ламинарным и турбулентным. Если он турбулентный, то, пользуясь формулой (8-17), находим:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}} = \frac{0{,}0296\,(151\,000)^{-1/5}}{1 - 0{,}87 \cdot 1{,}75\,(151\,000)^{-1/10} \cdot 0{,}299} = 0{,}00312.$$

Пограничный слой носит ламинарный характер близ переднего края плиты. Но, следуя предложению Прандтля (см. стр. 182), мы предполагаем, что турбулентный пограничный слой начинается прямо у переднего края, и в соответствии с этим измеряем значение x также от края плиты. Отсюда находим критерий Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}00312 \cdot 0{,}701 \cdot 151\,000 = 330$$

и коэффициент теплообмена

$$\alpha = 330\frac{0{,}0237}{0{,}305} = 25{,}7 \ \ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Если на расстоянии $x = 305$ *мм* поток ламинарен, применяется формула (7-14):

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 0{,}332 \cdot \sqrt[3]{0{,}701} \cdot \sqrt{151\,000} = 115,$$

откуда коэффициент теплообмена

$$\alpha = 115\frac{0{,}0237}{0{,}305} = 8{,}93 \ \ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Из этого примера видно, что величина коэффициента теплообмена значительно возрастает, когда пограничный слой становится турбулентным.

8-4. ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ

Возможность усовершенствования расчета турбулентного теплообмена основывается на лучшем знании механизма турбулентного потока. Полное описание такого потока с его постоянно изменчивым характером потребовало бы знания параметров потока — скорости и давления — в каждой точке потока и в каждый момент времени. В настоящее время мы не имеем возможности дать такое описание и поэтому должны удовлетвориться знанием осредненных во времени величин. Процесс преобразования уравнений Навье — Стокса был описан в 1883 г. О. Рейнольдсом. Мгновенные параметры потока описываются как сумма осредненной во времени величины (отмеченных черточками над буквами) и мгновенного отклонения от этого значения (флуктуация указывается штрихом):

$$u = \bar{u} + u'; \ \ v = \bar{v} + v'; \ \ p = \bar{p} + p'. \qquad (8\text{-}19)$$

Теперь введем эти выражения в уравнения Навье — Стокса (6-14); среднее значение величины флуктуации за все время согласно определению $\bar{u}' = 0$; $\bar{v}' = 0$; $\bar{p}' = 0$ (но такие произведения, как $\overline{u'v'}$ необязательно должны быть равны нулю) и для установившегося потока имеем:

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} +$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right) - \rho\left(\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right). \qquad (8\text{-}20)$$

Аналогичный вид имеют два соответствующих уравнения для $\overline{v}$ и $\overline{w}$. Найдено также, что уравнение непрерывности не меняется по виду, когда оно записано в величинах, осредненных во времени:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0.$$

Уравнение пограничного слоя в величинах, осредненных во времени, принимает следующий вид в соответствии с упрощениями Прандтля для пограничного слоя:

$$\rho\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}-\rho\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \qquad (8\text{-}21)$$

Последний член уравнения пограничного слоя по существу описывает тот же процесс турбулентного обмена, уже рассмотренный в разделе 8-1.

Мгновенный поток массы, перпендикулярный направлению основного потока, за единицу времени и на единицу площади есть $\rho v'$, а x — перенос количества движения, связанный с этим потоком — $\rho v'u'$. Этот осредненный член является не чем иным, как другим выражением для напряжения трения, которое описывается уравнением (8-2). В полных уравнениях Навье — Стокса имеется несколько таких членов (выражающих перенос количества движения по трем направлениям осей координат). Уравнения (8-20) и (8-21) позволяют лучше понять процесс, который обусловливает турбулентное напряжение трения. Для интегрирования уравнений нужно использовать добавочные выражения, которые связывают члены, содержащие величины флуктуации ($\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$ и т. д. с осредненными во времени величинами. Т. В. Буссинеск был первым, кто предложил такое выражение, представив формулу для напряжения трения при турбулентном режиме:

$$\tau_t=-\rho\overline{(u'v')}=\rho\varepsilon_m\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \qquad (8\text{-}22)$$

Член ε_m называется коэффициентом турбулентной кинематической вязкости. Мы увидим, что приведенное выше уравнение станет очень полезным в связи с расчетами теплообмена. Для вычисления поля потока оно оказалось не столько полезным, так как экспериментально было найдено, что ε_m имеет сложную зависимость от скорости.

Исходя из некоторых понятий теплообмена при турбулентном режиме, Прандтль пришел к соотношению

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{8-23}$$

(вертикальные линии указывают на то, что напряжение трения имеет тот же знак, что и градиент скорости) и обнаружил, что относительно простые выражения для длины смешения l (например, l пропорционально расстоянию от стенки) хорошо совпадают с опытными данными. Уравнение (8-23) используется как основа для многих расчетов потока. Т. Карман пришел к такому же выражению путем аналогичных рассуждений.

Величины, подобные $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$ измерялись термоанемометром для различных видов потока. Учитывалась также статистическая теория турбулентности.

Применение метода О. Рейнольдса к уравнению энергии (7-3) и упрощение теории пограничного слоя, проделанное Л. Прандтлем, приводят при низких скоростях к следующему уравнению энергии пограничного слоя в турбулентном режиме в осредненных во времени величинах:

$$\rho c_p \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{t}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{t}}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 \overline{t}}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial (\overline{v't'})}{\partial y} . \tag{8-24}$$

Это уравнение опять-таки отличается от соответствующего уравнения для установившегося ламинарного потока последним членом в правой части, который выражает теплообмен при турбулентном режиме и эквивалентен уравнению (8-1).

Буссинеск ввел для этого потока тепла при турбулентном режиме выражение

$$q_t = \rho c_p \overline{v't'} = - \rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial \overline{t}}{\partial y} , \tag{8-25}$$

где ε_q называется коэффициентом турбулентной теплопроводности. Это уравнение вместе с уравнением (8-22) имеет большое значение для расчета теплообмена по характеристикам потока, поскольку даже простейшее допущение для отношения $\varepsilon_m/\varepsilon_q$, а именно, что оно постоянно приводит к результатам, удовлетворительно согласующимся с экспериментальными данными. Есть еще более простое допущение $\varepsilon_m/\varepsilon_q = 1$, которое эквивалентно аналогии Рейнольдса, в чем мы сможем вскоре убедиться.

За последние годы опубликовано много статей, в которых приводится расчет теплообмена для различных видов турбулентного потока на основании аналогии Рейнольдса или на основании более общих формулировок для отношения двух коэффициентов турбулентного переноса. В этом разделе будет в общих чертах описана основная идея всех этих расчетов, а затем более подробно будет разобран метод, предложенный Карманом.

Для ламинарного потока, в котором изменения скорости и температуры в направлении, нормальном потоку, значительно больше, чем изменения скорости и температуры в направлении, параллельном потоку, уравнения на странице 253 описывают напряжения трения и тепловой поток. Эти соотношения можно записать в виде:

$$\tau_l = \nu\rho \frac{\partial u}{\partial y}; \tag{8-26}$$

$$q_l = -\lambda \frac{dt}{dy} = -\frac{\nu}{\mathrm{Pr}} \rho c_p \frac{dt}{dy}. \tag{8-27}$$

Напряжение трения и тепловой поток, связанный с турбулентным обменом, можно записать в соответствии с уравнениями (8-22) и (8-25)

$$\tau_t = \varepsilon_m \rho \frac{du}{dy}, \tag{8-28}$$

$$q_t = -\varepsilon_q \rho c_p \frac{dt}{dy}. \tag{8-29}$$

Отсюда u и t можно толковать как осредненные во времени величины. Два параметра ε_m и ε_q имеют такую же размерность, как и кинематическая вязкость ν, и называются коэффициентами турбулентной вязкости и переноса тепла. Следует помнить, что эти параметры являются сложными функциями расстояния от стенки, критерия Рейнольдса и других переменных. Аналогия Рейнольдса требует, чтобы коэффициенты турбулентного переноса количества движения (ε_m) и тепла (ε_q) были равны. Это легко видеть, если разделить уравнение для турбулентного теплового потока на уравнение напряжения трения при турбулентном режиме. Результат будет такой:

$$\frac{q_t}{\tau_t} = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_m} c_p \frac{dt}{du}. \tag{8-30}$$

При $\varepsilon_q = \varepsilon_m$ это уравнение идентично уравнению (8-3). Однако данные последних опытов показали, что нельзя считать эти два коэффициента абсолютно одинаковыми. Оказывается, что отношение $\varepsilon_m/\varepsilon_q$, которое называется критерием турбулентности Прандтля (Pr_t), по причинам, которые вскоре станут ясными, имеет величину приблизительно 0,7 для потока пограничного слоя и приблизительно 0,5 для кильватерного потока за округлыми предметами и для вихревого потока:

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_q}^{*}. \qquad (8\text{-}31)$$

Измерения, проведенные Сейжем [Л. 120] и его сотрудниками и Людвигом [Л. 121], указали даже на то, что критерий турбулентности Прандтля не постоянен; например, в потоке типа потока пограничного слоя он зависит от расстояния от стенки. Тем не менее проводится все еще много вычислений на основе того, что критерий турбулентности Прандтля равен единице, и эти вычисления хорошо соответствуют действительности. Возникают незначительные затруднения при использовании числового значения критерия турбулентности Прандтля, отличного от единицы, поскольку эта величина считается постоянной для определенных условий потока. Если, однако, кто-либо попытается сделать критерий Прандтля величиной переменной, зависящей от расстояния от стенки и других параметров, тогда весь расчет, основанный на аналогии Рейнольдса, во многом потеряет свою эффективность.

В разделе 8-1 мы предположили, что поток либо полностью ламинарный в подслое или полностью турбулентный в ядре потока. В действительности новейшие измерения показали, что в турбулентном потоке имеется определенное количество турбулентности непосредственно у самой поверхности. Поэтому одновременно существует и ламинарное и турбулентное трение, и общее напряжение трения и тепловой поток следует записать в соответствии с уравнениями (8-21) и (8-24) следующим образом:

$$\tau = \tau_l + \tau_t = (\nu + \varepsilon_m)\,\rho\,\frac{du}{dy}; \qquad (8\text{-}32)$$

---

* В немецкой литературе Pr_t иногда определяется следующим образом: $(\varepsilon_q/\varepsilon_m)\mathrm{Pr}$.

$$q = q_l + q_t = -\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\varepsilon_m}{\mathrm{Pr}_t}\right)\rho c_p \frac{dt}{dy}. \qquad (8\text{-}33)$$

Первое из этих уравнений можно использовать для вычисления коэффициента турбулентной вязкости ε_m, как только становится известным поле потока. Затем эту величину можно ввести в уравнение (8-33) и рассчитать температурное поле и тепловой поток.

Уравнения количества движения и энергии (8-21) и (8-24) для турбулентного потока пограничного слоя, например, можно записать в следующем виде:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \varepsilon_m)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (8\text{-}34)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \rho c_p\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\varepsilon_m}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial t}{\partial y}\right]. \qquad (8\text{-}35)$$

Когда поля скорости и давления известны из измерений, то первое из этих уравнений можно решить относительно неизвестного ε_m, которое получаем как функцию координат и, возможно, критерия Рейнольдса. Эту величину затем можно ввести во второе уравнение и решить его относительно температуры, если Pr_t известно. Чтобы получить коэффициент турбулентной вязкости с достаточной точностью, требуется очень точное знание поля скорости, поскольку градиенты компонентов скорости должны быть вычислены и внесены в уравнение количества движения. Поэтому уравнения (8-32) и (8-33) обычно используются вместе с предположением об изменении τ и q вдоль координаты y.

В некоторых случаях напряжение трения известно. Например, для полностью установившегося потока в трубе баланс сил сразу же указывает, что напряжение трения увеличивается линейно с увеличением радиуса r, а уравнение (8-32) можно использовать, чтобы вычислить коэффициент турбулентной вязкости ε_m, если известны напряжение трения на стенке τ_w и кривая распределения скорости. В потоке пограничного слоя основное изменение скорости имеет место вблизи стенки, а это доказывает то, что напряжение трения не может значительно изменяться на этой маленькой величине. В соответствии с этим для пограничных слоев часто допускают, что напряжение трения постоянно по перпендикуляру к поверхности.

В любом случае решение уравнения (8-32) относительно ε_m дает выражение

$$\varepsilon_m = \frac{\tau}{\rho}\frac{1}{du/dy} - \nu, \tag{8-36}$$

которое можно использовать теперь для вычисления коэффициента турбулентной вязкости, поскольку из измерений нам известны напряжение трения и градиент скорости. После этого температурное поле определяется, если справедливо положение, что q — функция расстояния от стенки. В потоке с пограничным слоем предположение, что q — величина постоянная, может дать обоснованное приближение к действительным условиям. В потоке по каналу или трубе q сильно изменяется по всей площади поперечного сечения, тогда как отношение q/τ дает незначительное изменение, пока критерий Прандтля не очень мал (скажем, около 0,1). Чтобы использовать этот факт, разделим уравнение (8-33) на уравнение (8-32)

$$\frac{q}{\tau} = c_p \frac{(\nu/\mathrm{Pr}) + (\varepsilon_m/\mathrm{Pr}_t)}{\nu + \varepsilon_m}\frac{dt}{du}. \tag{8-37}$$

Интегрирование этого уравнения при предположении, что q/τ постоянно и равняется q_w/τ_w, дает следующую зависимость для температурного профиля:

$$t - t_w = \frac{1}{c_p}\frac{q_w}{\tau_w}\int_0^u \frac{\nu + \varepsilon_m}{(\nu/\mathrm{Pr}) + (\varepsilon_m/\mathrm{Pr}_t)}\,du. \tag{8-38}$$

Вычисление коэффициента турбулентной вязкости ε_m и интегрирование уравнения (8-38) проводятся либо численным способом на основе измеренных профилей скорости, либо аналитически, если известно аналитическое выражение для профиля скорости.

Карман подразделил весь профиль скорости на три слоя — ламинарный подслой, буферный слой и область турбулентного ядра — для того, чтобы получить простые выражения для аналитического расчета. Размер этих трех областей, а также уравнения, которыми может быть описано поле скоростей каждой из них, можно видеть на рис. 6-20. Кроме того, Карман предположил, что поток в ламинарном подслое полностью ламинарный, таким образом, член, содержащий коэффициент турбулентной

вязкости, пропадает в уравнениям (8-32) и (8-33). С другой стороны, он предположил, что в турбулентном ядре турбулентная вязкость намного больше, чем ламинарная вязкость или теплопроводность. В соответствии с этим он не учитывал члены уравнений (8-32) и (8-33), выражающие ламинарность в турбулентной зоне. Предполагалось, что в буферном слое поток постепенно менялся от ламинарного к турбулентному и все члены уравнений, описывающих этот поток, учитываются. Кроме того, Карман предположил, что $\varepsilon_m = \varepsilon_q$ или $\mathrm{Pr}_t = 1$.

Принимая во внимание вышесказанное и предполагая, что q и τ — постоянные, уравнения (8-32) и (8-33) для буферного слоя будут иметь вид:

$$\tau_b = (\nu + \varepsilon)\rho\frac{du}{dy};$$

$$q_b = \left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}} + \varepsilon\right)\rho c_p \frac{dt}{dy}. \qquad (8\text{-}39)$$

Теперь при помощи этих уравнений вычислим падение температуры в буферном слое. Второе уравнение дает:

$$\Delta t_b = \frac{q_b}{\rho c_p}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{(\nu/\mathrm{Pr}) + \varepsilon}.$$

Коэффициент турбулентной вязкости определяется из первого уравнения:

$$\varepsilon = \frac{\tau_b}{\rho}\frac{dy}{du} - \nu.$$

Толщина ламинарного подслоя и буферного слоя незначительна по сравнению с радиусом трубы, поэтому в пределах этих слоев напряжение трения и удельный тепловой поток меняются лишь на очень малую величину и принимаются за постоянные. В соответствии с этим заменим τ_b и q_b на τ_w и q_w. Кроме того, введем безразмерные величины y^+ и u^+.

Из уравнений, определяющих эти величины следует, что

$$\frac{\rho}{\tau_w}\frac{du}{dy} = \frac{1}{\nu}\frac{du^+}{dy^+}.$$

Уравнение Кармана для скорости в буферном слое

$$u^+ = 5\left(1 + \ln\frac{y^+}{5}\right)$$

дает:

$$du^+/dy^+ = 5/y^+.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \nu\frac{y^+}{5} - \nu$$

и

$$\Delta t_b = \frac{q_w}{\rho c_p \nu}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{(1/\mathrm{Pr}) + (y^+/5) - 1} =$$

$$= \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\int_5^{30}\frac{dy^+}{(1/\mathrm{Pr}) + (y^+/5) - 1}.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$\Delta t_b = \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\,5\ln(5\,\mathrm{Pr} + 1).$$

Линейное падение температуры в ламинарном подслое определяется из уравнения

$$\Delta t_l = \frac{q_w}{\lambda}y_1 = \frac{q_w}{\rho c_p}\frac{\mathrm{Pr}}{\nu}y_1.$$

Подстановка безразмерной величины y^+ ($y_1^+ = 5$) дает:

$$\Delta t_l = \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\,\mathrm{Pr}\,y_1^+ = \frac{q_w}{\rho c_p}\cdot\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\,5\mathrm{Pr}.$$

В пределах турбулентного слоя из аналогии Рейнольдса [уравнение (8-10)] или из интегрирования уравнения (8-37), предположив, что $q/\tau = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Pr}_t = 1$, получаем:

$$\Delta t_t = \frac{q_w}{\rho c_p}\frac{\rho}{\tau_w}(u_s - u_b).$$

Подстановка безразмерной величины u_b^+ дает:

$$\Delta t_t = \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\left(\frac{u_s}{\sqrt{\tau_w/\rho}} - u_b^+\right).$$

Граница турбулентной зоны, где скорость равняется u_b, фиксируется расстоянием от стенки равным $y_2^+ = 30$. Поэтому, используя уравнение Кармана $u_b^+ = 5(1 + \ln y^+/5)$ и $y^+ = 30$, получим:

$$\Delta t_t = \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\left[\frac{u_s}{\sqrt{\tau_w/\rho}} - 5(1 + \ln 6)\right].$$

Суммируя все перепады температур, находим полную разность температур между стенкой трубы и концом турбулентной зоны (ось трубы):

$$t_w - t_s = \frac{q_w}{\rho c_p}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\left[\frac{u_s}{\sqrt{\tau_w/\rho}} + 5(\mathrm{Pr} - 1) + 5\ln\frac{5\mathrm{Pr} + 1}{6}\right].$$

Безразмерный коэффициент теплообмена равен:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{RePr}} = \frac{q_w}{\rho c_p u_s (t_w - t_s)} =$$

$$= \frac{\tau_w/\rho u_s^2}{1 + \sqrt{\tau_w/\rho u_s^2}\{5(\mathrm{Pr} - 1) + 5\ln[(5\,\mathrm{Pr} + 1)/6]\}}.$$

Это решение заменяет решение (8-12), выведенное Прандтлем и Тэйлором. Оно справедливо как для плоской плиты, так и для трубы.

Для того чтобы это решение можно было применить при расчете теплообмена плоской плиты, необходимо сделать подстановку $\frac{\tau_w}{\rho u_s^2} \frac{f_p}{2}$ (см. стр. 179):

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}} = \frac{f_p/2}{1 + \sqrt{f_p/2}\{5(\mathrm{Pr} - 1) + 5\ln[(5\mathrm{Pr}+1)/6]\}}.$$

Для гладкой поверхности $f_p/2 = 0{,}0296\,(\mathrm{Re}_x)^{0,2}$ при расчете теплообмена в трубе необходимо помнить, что коэффициент теплообмена обычно вычисляют по средней интегральной температуре t_B потока, тогда как в приведенном выше уравнении применяется температура среды по оси трубы t_s. Формулы для определения напряжения трения у стенок трубы также содержат среднюю скорость u_m, а не скорость по оси

трубы u_s, которая используется в рассматриваемой формуле.

Если обозначить $\varphi_m = u_m/u_s$ и $\theta_b' = \dfrac{t_b - t_w}{t_s - t_w}$, а также произвести подстановку $\tau_w/\rho u_m^2 = f/8$ (см. стр. 196), то для трубы получим:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}} = \frac{(\varphi_m/\theta_B')\, f/8}{1 + \varphi_m \sqrt{f/8}\,\{5\,(\mathrm{Pr} - 1) + 5 \ln [(5\,\mathrm{Pr} + 1)/6]\}}.$$

Значение отношения скоростей можно найти из формулы (6-32) для скоростного поля при турбулентном режиме: $\varphi_m = 0{,}82$. В действительности это отношение находится в некоторой зависимости от критерия Рейнольдса. Для определения коэффициента трения f можно применить соотношения (6-55) или (6-56).

Используя специальную систему координат, можно построить кривые распределения температуры, которые лишь незначительно зависят от критерия Рейнольдса и которые поэтому можно назвать универсальными кривыми распределения температуры по аналогии с универсальной кривой распределения скорости. В формулах перепада температуры в различных слоях имеется член $q_w/(\rho c_p \sqrt{\tau_w/\rho})$, который имеет размерность температуры. Деление разности температур между произвольной точкой внутри пограничного слоя и стенкой $(t - t_w)$ на приведенный выше коэффициент дает безразмерную величину Δt^+, которая служит ординатой для универсальной кривой распределения температуры.

Абсцисса будет та же (y^+), как и на графике рис. 6-20. На рис. 8-12 показаны такие кривые распределения температуры для различных значений критерия Прандтля. Кривая для $\mathrm{Pr} = 1$ идентична универсальной кривой распределения скорости, когда коэффициенты турбулентного переноса количества движения и тепла равны. Построение кривых распределения температур по опытным данным описанным методом дает возможность проверки правильности допущений, принятых при изложении теоретических выкладок настоящего раздела.

Многие исследования изменили и дополнили те положения, выдвинутые Карманом, о которых шла речь в начале этого раздела. Особенно обширной и успешной

в этом направлении можно считать работу Р. Г. Дайслера [Л. 122]. Он использует соотношение

$$\varepsilon_m = \lambda^2 \frac{(du/dy)^3}{(d^2u/dy^2)^2}, \qquad (8\text{-}40)$$

чтобы описать турбулентный перенос количества движения внутри турбулентного потока. Это соотношение было выведено Карманом. Для области, близкой к стенке, которая приближенно соответствует ламинарному подслою и буферному слою на рис. 6-20, он вывел соотношение

$$\varepsilon_m = n^2 uy. \qquad (8\text{-}41)$$

Универсальная кривая распределения скорости, рассчитанная при помощи этих соотношений и формулы (8-32),

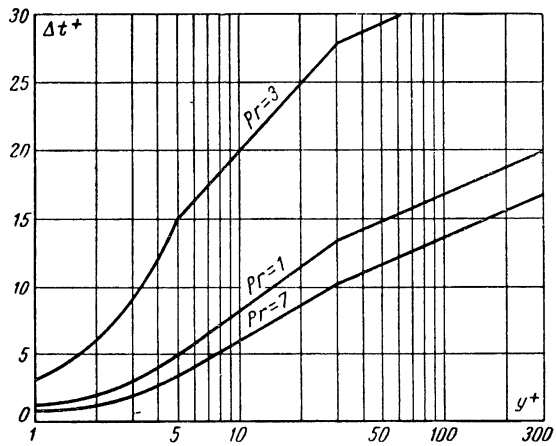


Рис. 8-12. Универсальные кривые распределения температур для случая турбулентного теплообмена в трубе.

очень хорошо совпадает с экспериментальной кривой распределения скорости (рис. 6-20), когда вводятся величины $\lambda=0{,}36$ и $n=0{,}109$. При этом в формулы (8-41) y заключен между $y^+=0$ и $y^+=26$, а в формуле (8-40) y^+ больше чем 26.

Универсальные кривые распределения температур (аналогичные кривым на рис. 8-12) получаются при интегрировании уравнения (8-33) с предположением, что $\mathrm{Pr}_t=1$. Тогда температурный градиент y стенки определяет коэффициент теплообмена.

Идя таким путем, Дайсслер смог определить теплообмен в трубе при турбулентном режиме и поток пограничного слоя воздуха, которые, как оказалось, хорошо совпадают с экспериментальными данными. В этих вычислениях он полагал, что число Прандтля и удельная теплоемкость постоянны, а вязкость и теплопроводность изменяются пропорционально степени 0,68 абсолютной температуры. Теплообмен и поток тогда зависят от дополнительного параметра $\beta = \frac{q_w}{\rho_w c_{pw} \sqrt{\tau_w/\rho_w}\, t_w}$, который можно определить как обратную величину безразмерной температуры, как и сделано на рис. 8-12. Дайсслер распространил свой анализ на эффекты на входе потока в трубу, а также и на другие потоки, включая и те, которые находятся вблизи критического состояния. Аналогичную работу по турбулентному теплообмену, как видно из немецкой литературы, проделал Х. Рейхард [Л. 123].

Выводы этого раздела необходимо распространить на вещества с низкими значениями критерия Прандтля, например на расплавленные металлы. В этих веществах нельзя не учитывать молекулярный обмен количеством движения и тепла в турбулентной зоне, как мы это сделали в предыдущих расчетах. Такое распространение было сделано Р. С. Мартинелли [Л. 124].

ЗАДАЧИ

8-1. Вычислите и сравните мощность, необходимую для того, чтобы преодолеть падение давления воздуха, проходящего через охладитель самолета, летящего со скоростью 800 *км/ч*, когда канал охладителя такой, что (*а*) скорость воздуха относительно самолета уменьшается на одну десятую, прежде чем воздух входит в охладитель, (*б*) скорость уменьшается только на незначительную величину. Температура атмосферного воздуха составляет —45° С, и она увеличивается на 22° С при прохождении через охладитель. Охладитель используется для охлаждения 2,7 *кг/сек* масла от 121 до 65° С в противотоке. Сравните также площади поверхности теплообмена, принимая во внимание, что коэффициент теплообмена увеличивается пропорционально степени 0,8 скорости массы ρu. Используйте приближение $Pr = 1$.

8-2. Рассчитайте температурное поле и длину теплового начального участка для турбулентного потока через трубу, заменяя действительное поле скорости постоянной скоростью по всему поперечному сечению трубы. Считайте, что кривая распределения температуры у стенки аппроксимируется законом седьмой степени и используйте уравнение (11-14), чтобы описать локальный тепловой поток через поверхность трубы.

Сравните результаты этих вычислений со сведениями, приведенными в разделе 8-2, и скажите, в каких точках действительные условия будут отличаться от допущений, сделанных при этом вычислении.

8-3. Рассчитайте тепловой пограничный слой вдоль плоской пластины на основании следующих допущений: поток ламинарен до критических значений критерия Рейнольдса Re_c. Затем он быстро переходит в турбулентный таким образом, что в критической точке конвективная толщина турбулентного пограничного слоя равна конвективной толщине ламинарного слоя. Поток имеет критерий Прандтля, равный 1. Выведите соотношение для среднего значения критерия Нуссельта и сравните с соотношением на стр. 271.

8-4. Вычислите коэффициенты локального теплообмена для турбулентного пограничного слоя вдоль плоской пластины, предполагая, что разность температур между потоком и поверхностью увеличивается линейно с расстоянием от переднего края.

Используйте метод, который описан в § 7-4, и соотношения теплообмена из раздела 8-3 для ступенчатого изменения температуры стенки.

8-5. Выведите уравнение для теплообмена, вызванного турбулентным потоком над плоской пластиной, при условии, что пластина не нагрета на расстоянии x_0, так что в этой части она имеет температуру, равную температуре потока, и что вниз по течению от точки x_0 она нагревается до постоянной температуры. Используйте закон седьмой степени, чтобы описать кривую распределения температуры и уравнение (11-14) для локального потока тепла. Вычисления обосновывайте тем, что тепловой пограничный слой начинает образовываться при $x=x_0$ и что этот пограничный слой перерастает в скоростной пограничный слой. Произведите интегрирование уравнения энергии пограничного слоя. Сравните результат с уравнением на стр. 271.

8-6. Постройте графически изменение турбулентного и ламинарного напряжения сдвига, определенного уравнениями на рис. 6-20 и в разделе 8-4 по нормали к поверхности. Проанализируйте, на сколько действительные условия будут отличаться от тех, которые имеются в виду при построении графика.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ПОТОКЕ ПРИ ОТРЫВНЫХ ОБТЕКАНИЯХ

9-1. АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЙ ТЕПЛООБМЕНА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Сведения о некоторых видах переноса тепла, которые рассматривались выше, могли быть получены аналитическими методами. Однако для других видов наше понимание лежащих в основе процессов еще очень недостаточно, чтобы пытаться делать какие-нибудь расчеты. Особенно справедливым это является тогда, когда мы имеем дело с телами, при обтекании которых поток в каком-нибудь месте поверхности отрывается. Наиболее характерным примером этого является труба с круглым поперечным сечением, помещенная в потоке, перпендикулярном к ее

оси. В предыдущих разделах было показано, что может быть вычислен теплообмен лобовой части цилиндра, у поверхности которой имеется пограничный слой. Кормовая часть поверхности находится в области разделенного потока, которая заполнена беспорядочными вихрями. В настоящий момент представляется невозможным произвести для этой части какие-либо расчеты конвективного переноса тепла. Остается только одна возможность: положиться на эксперимент и обобщать результаты путем анализа размерностей. Этот метод предполагает, что все физические процессы могут быть выражены в виде зависимости между безразмерными параметрами, и дает возможность найти эти параметры. Применение пространственного анализа к теплообмену позволило В. Нуссельту [Л. 125] в фундаментальной работе, опубликованной в 1915 г., впервые обобщить ранее полученные экспериментальные результаты и наметить новые эксперименты. Поэтому этот год можно считать годом рождения науки о теплообмене. В настоящее время есть несколько методов, при помощи которых могут быть определены безразмерные параметры, которые определяют какой-либо физический процесс. Наиболее важной и трудной частью анализа является нахождение не формы параметров, а их числа, которые полностью описывают рассматриваемый процесс. По своему опыту автор считает, что наиболее эффективным и верным путем получения ответа на этот вопрос является метод, который основывается на дифференциальных уравнениях, описывающих процесс и преобразование их в безразмерные дифференциальные уравнения. Этот метод будет здесь применен. Может быть выдвинуто возражение, что в некоторых случаях могут быть неизвестны уравнения, описывающие процесс. Однако позже будет показано, что требуется только приблизительное знание уравнений, так как в противном случае нельзя произвести удовлетворительный анализ также и каким-нибудь другим методом.

Во всех процессах, происходящих в потоке, которые рассматривались в гл. 6, было найдено, что интересующие нас параметры потока (толщина пограничного слоя, коэффициент трения), представленные в безразмерном виде, были функциями критерия Рейнольдса. Подобным же образом такие параметры процесса переноса тепла, как критерии Нуссельта и Стантона, а также толщина теплового пограничного слоя, представленные в безразмерном

виде, оказались функциями безразмерных критериев Рейнольдса и Прандтля. Теперь мы попытаемся получить эти сведения непосредственно из дифференциальных уравнений, не решая их.

Рассмотрим сначала сам процесс. Так как мы хотим, чтобы наши результаты включали области отрывного обтекания, то, чтобы описать этот процесс, необходимо применить уравнения Навье — Стокса. Ограничимся рассмотрением установившегося потока. В разделе 6-3 эти уравнения давались в декартовых координатах для жидкости с постоянными физическими свойствами при отсутствии сил тяжести. Приведем повторно уравнение для оси x и уравнение непрерывности:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Эти уравнения вместе с уравнениями количества движения в направлениях y и z являются четырьмя уравнениями для неизвестных u, v, w, p. В дополнение к дифференциальным уравнениям должны даваться граничные условия, описывающие характерные особенности потока. Чтобы не рассеивать нашего внимания, рассмотрим поток жидкости, перпендикулярный к оси цилиндра круглого поперечного сечения и бесконечной длины. На рис. 9-1 показано расположение цилиндра и даны необходимые граничные условия.

Предполагается, что цилиндр находится в покое и диаметр цилиндра равен d. Соответственно скорость на поверхности цилиндра должна равняться нулю.

Скорость выше по течению по обеим сторонам на достаточном расстоянии от цилиндра равна u_0 и принята постоянной вдоль границ потока. Давление с наружной границы поля потока также постоянно. Его абсолютная величина несущественна, так как в данное выше уравнение входит только дифференциал давления.

Первым шагом анализа размерностей является преобразование дифференциальных уравнений и граничных условий в безразмерные путем деления всех параметров, имеющих размерность длины, на заданную длину d, а всех параметров, имеющих размерность скорости, на заданную скорость u_0. Давление может быть сделано безразмерным при помощи члена ρu^2_0, в который входят постоянная

плотность и заданная скорость u_0 на границе. Обозначая безразмерные величины штрихом, записываем:

$$x'=\frac{x}{d};\quad y'=\frac{y}{d};\quad z'=\frac{z}{d};$$

$$v'=\frac{v}{u_0};\quad u'=\frac{u}{u_0};\quad w'=\frac{w}{u_0};\quad p'=\frac{p}{\rho u_0^2}. \qquad (9\text{-}1)$$

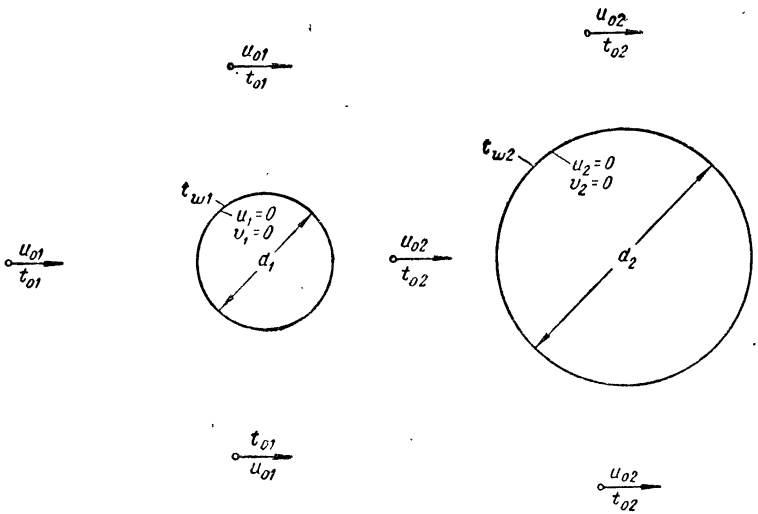


Рис. 9-1. К анализу размерностей для двух круглых цилиндров.

Подстановка безразмерных величин в уравнение количества движения дает:

$$\rho\frac{u_0^2}{d}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right)=-\rho\frac{u_0^2}{d}\frac{\partial p'}{\partial x'}+$$
$$+\mu\frac{u_0}{d^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right).$$

Это уравнение еще не безразмерное, но может быть в него преобразовано путем деления его на $\rho(u_0^2/d)$:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{\mathrm{Re}_d}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right). \qquad (9\text{-}2)$$

Безразмерное уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=0, \tag{9-3}$$

граничные условия следующие:

В свободном потоке вверх по течению от цилиндра

$$u'=\frac{u_0}{u_0}=1; \tag{9-4}$$

на поверхности цилиндра $u'=v'=w'=0$.

Для безразмерного члена $\rho u_0 d/\mu$ было введено обозначение Re_d. Теперь очевидно, что путем решения дифференциальных уравнений безразмерные зависимые переменные u', v', w', p' будут представлены как функции независимых переменных x', y', z' и всех постоянных параметров, входящих в дифференциальные уравнения и в граничные условия. В данном случае единственным постоянным параметром является Re_d. Поэтому решение должно иметь следующий вид:

$$u'=f_u(x',\ y',\ z'\ \mathrm{Re}_d); \tag{9-5}$$

$$v'=f_v(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re}_d); \tag{9-6}$$

$$w'=f_w(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re}_d); \tag{9-7}$$

$$p'=f_p(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re}_d). \tag{9-8}$$

Следует рассмотреть сущность такого результата. Для этого рассмотрим два цилиндра диаметром d_1 и d_2, находящиеся в двух потоках жидкости со скоростями вверх по течению от цилиндров, соответственно равными u_{01} и u_{02} (рис. 9-1). Из вышеприведенных уравнений следует, что безразмерные составляющие скорости и безразмерные давления в обоих случаях являются одними и теми же функциями безразмерных координат и критерия Рейнольдса. Когда критерий Рейнольдса имеет одну и ту же величину в обоих случаях, тогда в одинаково расположенных точках (с одними и теми же безразмерными координатами) безразмерные скорости и давления будут иметь одинаковые величины в области вокруг цилиндров *1* и *2*. Физические величины, которые в безразмерном виде, например безразмерные величины (u', v', w', p'), изображенные графически относительно безразмерных координат (x', y', z'), становятся идентичными, называют «физически подобными». Таким образом, во всех случаях поля скорости и давления для потока, обтекающего цилиндр, подобны

вне зависимости от диаметра цилиндра и скорости потока перед цилиндром, если только критерий Рейнольдса имеет одинаковую величину всех рассматриваемых случаев.

При обобщении результатов для потока вокруг или через тело другой геометрической формы сразу же становится очевидным, что физическое подобие в том смысле, как мы только что рассмотрели, справедливо только для геометрически подобных тел. Кроме того, из скоростей на границах могут возникнуть другие условия, которые необходимо выполнить, чтобы обеспечить физическое подобие.

Когда, например, цилиндр вращается с окружной скоростью v_c на его поверхности, тогда решение дифференциальных уравнений должно удовлетворить условию, заключающемуся в том, что вектор скорости **V**, характеризуемый составляющими u, v, w, идентичен по величине и направлению со скоростью v_c на поверхности цилиндра. В безразмерном виде это граничное условие предписывает, что на поверхности цилиндра $v' = v_c/u_0$, и этот параметр появится в функциональных зависимостях (9-5)—(9-8).

Таким образом, можно утверждать, что поля скорости и давления для установившегося потока жидкости с постоянными свойствами подобны, когда существует геометрическое подобие границ полей, когда скорости вдоль границ подобны и когда критерий Рейнольдса имеет постоянную величину. Иногда условия подобия скоростей на границах включают в себя некоторые ограничения. Они предполагают, например, что происходящие во времени изменения скорости также подобны. Такие изменения происходят в турбулентном потоке, и хорошо известен тот факт, что параметры потока зависят от степени его турбулентности.

Теперь предположим, что цилиндр на рис. 9-1 находится при температуре t_w, в то время как температура потока перед цилиндром t_0. Соответственно с этим в потоке, омывающем цилиндр, установится температурное поле, которое в принципе можно рассчитать из уравнения энергии (7-3). При установившемся режиме и постоянных свойствах это уравнение имеет вид:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) =$$

$$= \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dots \right].$$

Последний член в правой части означает функцию рассеяния. Для анализа размерностей достаточно рассмотреть только первый член в этой функции, так как другие члены по размерности идентичны с первым. Сразу же очевидно, что рассматриваемый случай не зависит от уровня температуры, так как в приведенном выше уравнении появляются только дифференциалы температуры. Мы можем поэтому измерить температуру от произвольной исходной величины, в качестве которой выберем температуру t_0. Подставляя $\vartheta = t - t_0$ безразмерную избыточную температуру $\vartheta' = \vartheta/\vartheta_w = (t - t_0)/(t_w - t_0)$ и другие параметры, которые были определены ранее, в уравнение энергии, получаем:

$$\frac{\rho c_p u_0 \vartheta_w}{d}\left(u'\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} + v'\frac{\partial \vartheta'}{\partial y'} + w'\frac{\partial \vartheta'}{\partial z'}\right) = \frac{\lambda \vartheta_w}{d^2}\left(\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x'^2} + \dots\right) + \\ + \mu \frac{u_0^2}{d^2}\left[2\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \dots\right].$$

Это уравнение превращается в безразмерное путем умножения его на $d/\rho c_p u_0 \vartheta_w$:

$$u'\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} + v'\frac{\partial \vartheta'}{\partial y'} + w'\frac{\partial \vartheta'}{\partial z'} = \frac{1}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x'^2} + \dots\right) + \\ + \frac{E}{\mathrm{Re}_d}\left[2\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \dots\right]. \qquad (9\text{-}9)$$

Безразмерный параметр $\lambda/\rho c_p u_0 d$ в первом члене правой части уравнения можно отождествить с обратной величиной произведения $\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}$, а параметр $\mu u_0/\rho c_p \vartheta_w d$ есть частное параметра $u_0^2/c_p \vartheta_w$, который Х. Шлихтинг [Л. 126] обозначил через E и назвал критерием Эккерта и критерием Рейнольдса. Граничные условия следующие.

В свободном потоке перед цилиндром $\vartheta' = 0$, на поверхности цилиндра $\vartheta' = 1$.

Для того чтобы получить решение, необходимо в уравнение энергии из уравнений (9-5) — (9-7) ввести компоненты скорости. Если бы можно было получить решение, оно имело бы следующий вид:

$$\vartheta' = f\left(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{RePr}, \frac{E}{\mathrm{Re}_d}\right).$$

Функция параметров Re, RePr и E/Re также должна выражаться как функция Re, Pr, и E.

Поэтому

$$\vartheta' = f(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{E}) \qquad (9\text{-}10)$$

В разделе 6-3 говорилось, что для скоростей, которые обычно имеют место на практике, членом рассеяния в уравнении энергии можно пренебречь.

Соответственно последний член в соотношении (9-10) выпадает и безразмерное температурное поле для низкоскоростного потока характеризуется следующим выражением:

$$\vartheta' = f(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}). \qquad (9\text{-}11)$$

Имея в виду обобщения, сделанные ранее, приходим к следующему положению.

Температурные поля вокруг геометрически подобных тел подобны, когда температуры и скорости вокруг границ этих тел подобны и когда критерии Рейнольдса и Прандтля так же, как и параметр E, имеют постоянную величину.

Для инженерных целей теплообмен между жидкостью (газом) и стеной цилиндра имеет очень большое значение. Он может быть вычислен, если известен коэффициент теплообмена, который определяется уравнением

$$\alpha(t_w - t_0) = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w,$$

где n обозначает направление, перпендикулярное к поверхности стенки. Вводя безразмерную температуру ϑ, получим:

$$\alpha\vartheta_w = \frac{\lambda\vartheta_w}{d}\left(\frac{\partial\vartheta'}{\partial n'}\right)_w$$

или

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = \left(\frac{\partial\vartheta'}{\partial n'}\right)_w.$$

Критерий Нуссельта поэтому есть не что иное, как безразмерный температурный градиент по поверхности. Дифференцируя уравнение (9-11) и подставив результат в данное выше выражение, получим для низкоскоростного потока

$$\mathrm{Nu} = f(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}), \qquad (9\text{-}12)$$

где x', y', z' являются в данном случае координатами произвольной точки поверхности и где Nu есть локальный критерий Нуссельта в этой точке. Среднее значение критерия Нуссельта по всей поверхности дается выражением

$$\overline{\mathrm{Nu}} = f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \qquad (9\text{-}13)$$

Суммируя результаты, полученные до сих пор, можно утверждать, что в установившемся потоке с постоянными свойствами, обтекающем геометрически подобные тела или проходящем по геометрически подобным каналам, все безразмерные параметры потока, например коэффициенты трения, являются функциями местоположения и критерия Рейнольдса при условии, что скорости на границах подобны. Безразмерные параметры теплообмена такие как критерий Нуссельта или Стантона, являются функциями критерия Рейнольдса, критерия Прандтля, а при высоких скоростях — функциями параметра E при условии, что скорости и температуры вдоль границ подобны.

Предположим, что плотность потока изменяется с изменением температуры. Как следствие этого, как только появляются разности температур внутри поля, возникают подъемные силы и эти силы вызывают свободную конвекцию, которая влияет на перенос тела.

Подъемная сила на единицу объема элемента потока равна $g(\rho - \rho_u)$, где g означает ускорение силы тяжести, ρ — действительную плотность потока в месте нахождения элемента потока и ρ_u — плотность, которую имел бы поток в этом месте, если бы он не был нагрет в результате процесса теплообмена. Предположим, что разность плотностей $\Delta\rho = \rho - \rho_u$ мала по сравнению с самой плотностью ρ, так что свойства потока все еще практически постоянны. Величина $\Delta\rho$ может быть выражена через разность температур путем подстановки коэффициента термического расширения β, определяющегося уравнением $\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p$. Так как $v = 1/\rho$, $dv = -(1/\rho^2)\,d\rho$, это выражение принимает вид:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p.$$

При небольшой разности плотностей, вызванной изменением температуры, мы можем поэтому записать с большой точностью:

$$\Delta\rho = -\rho\beta\Delta t$$

и подъемная сила на единицу объема станет равной $g\rho\beta\Delta t$.

Когда эта сила действует по оси x, уравнение количества движения для этого направления следующее:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-g\rho\beta\Delta t.$$

В потоке с постоянными свойствами температура изменяется только вблизи поверхностей, имеющих температуры, отличные от температуры потока. В этом случае $\Delta t=\vartheta$. Когда уравнение преобразовано в безразмерное путем введения величины со штрихами, тогда последний член в правой части приобретает вид $(g\beta d\vartheta_w/u_0^2)\vartheta'$. Постоянный член перед ϑ' дает тогда новый параметр, от которого зависит решение безразмерного уравнения. Этот параметр неудобен так как он содержит две величины, заданные на границах: u_0 и ϑ_w. Скорость u_0 может быть заменена критерием Рейнольдса $(g\beta d^3\vartheta_w/\nu^2)$ $(1/\mathrm{Re}^2)$. Параметр $g\beta d^3\vartheta_w/\nu^2$ называется критерием Грасгофа (Gr). Тогда безразмерное уравнение количества движения будет следующим:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right)-\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\vartheta'. \qquad (9\text{-}14)$$

Теперь в этом уравнении появляется безразмерная температура ϑ'. Система уравнений (9-2), (9-3) и (9-14) и два уравнения количества движения в направлениях y и z должны быть решены совместно.

В результате получим:

$$u'=f_u(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}) \qquad (9\text{-}15)$$

и два соответствующих уравнения для v' и w'

$$p'=f_p(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}); \qquad (9\text{-}16)$$

$$\vartheta'=f_\vartheta(x',\ y',\ z',\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}). \qquad (9\text{-}17)$$

Физически это означает, что поля скорости и давления зависят теперь от разности температур между цилиндром и жидкостью, в то время как на них совсем не влияет нагревание или охлаждение цилиндра, когда силы тяжести не учитываются.

Подъемные силы обусловливают возникновение потока в жидкости или газе, даже когда они находятся в состоянии покоя ($u_0=0$). Перемещение тепла, вызванное этим движением, называется свободной или естественной конвекцией. Здесь критерий Рейнольдса равен нулю и поэтому выпадает из решений (9-15)—(9-17) и из уравнений, описывающих безразмерные параметры теплообмена.

Например, среднее значение критерия Нуссельта для теплообмена цилиндра равно:

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f(\mathrm{Gr},\mathrm{Pr}). \tag{9-18}$$

Во многих случаях свободной конвекции скорости так малы, что можно пренебречь силами инерции и силами давления по сравнению с силами вязкости и подъемными силами. Это означает, что члены, находящиеся в левой части уравнения (9-14) и двух других уравнениях количества движения, могут быть приравнены нулю. Скорость u_0 равна нулю, и поэтому нельзя сделать скорости u безразмерными. Однако параметр $\sqrt{g\beta d\vartheta_w}$ имеет размерность скорости и может быть употреблен для этой цели. Повторяя процедуру, которая применялась раньше, мы получим безразмерные уравнения, которые содержат как постоянный параметр только член GrPr. Вследствие этого все безразмерные параметры потока и теплообмена будут функциями GrPr. Зависимость вида

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f(\mathrm{GrPr}) \tag{9-19}$$

дает нам среднее значение критерия Нуссельта.

Теперь произведем анализ размерностей для потока с переменными свойствами. Позже можно будет увидеть, что обычное рассмотрение такого потока невозможно. Поэтому мы начнем с рассмотрения потока газа, свойства которого меняются следующим образом:

$$\rho=\frac{p}{RT};\quad \mu=c_\mu T^\alpha;\quad \lambda=c_\lambda T^\alpha;\quad c_p=\mathrm{const};\quad \mathrm{Pr}=\mathrm{const};$$

здесь R — газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Легко проверить, что показатель степени в выражениях для вязкости и теплопроводности должен быть один и тот же, когда Pr и c_p постоянные величины. Рассматривая снова поток, обтекающий круглый цилиндр, нам придется иметь дело не только с полями скорости, давления и температуры, но также с полями плотности, вязкости и

теплопроводности. Последние могут быть снова выражены условно в безразмерном виде:

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}; \qquad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}; \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

с индексом 0, обозначающим условия на достаточном расстоянии от цилиндра. Эти поля могут легко быть определены из следующих соотношений, когда известны поля температуры и давления:

$$\rho' = \frac{p'}{T'}; \quad \mu' = T'^{\alpha}; \quad \lambda' = T'^{\alpha}. \tag{9-20}$$

Для дальнейшего анализа необходимо иметь уравнения количества движения, неперывности и энергии для потока с переменными свойствами.

Однако достаточно знания пространственной структуры. Эти уравнения ниже записаны в сокращенном виде:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \ldots\right]; \tag{9-21}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \ldots = 0; \tag{9-22}$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \ldots = \left[u \frac{\partial p}{\partial x} + \ldots\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) \ldots\right] + \left[2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{9-23}$$

Можно видеть, что эти уравнения совершенно подобны уравнениям для потока с постоянными свойствами. Дополнительный член $u(\partial p/\partial x)$ появляется в уравнении энергии, свидетельствуя о том, что в сжимаемом потоке температура изменяется, когда сжатие или расширение вызвано изменением давления.

Уравнение может быть сделано безразмерным путем введения величин со штрихами:

$$\frac{p'}{T'}\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \ldots\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(T'^{\alpha} \frac{\partial u'}{\partial x'}\right) + \ldots\right]; \tag{9-24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{p'}{T'} u'\right) + \ldots = 0; \tag{9-25}$$

$$\frac{p'}{T'}\left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + \ldots\right) = E\left(u' \frac{\partial p'}{\partial x'}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re\ Pr}} \times \left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(T'^{\alpha} \frac{\partial T'}{\partial x'}\right) + \ldots\right] + \frac{E}{\mathrm{Re}}\left[2T'^{\alpha}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{9-26}$$

Граничные условия должны задать скорость, давление и температуру на границах. Однако температуры здесь не могут отсчитываться от какой-то произвольной начальной, так как в предыдущих уравнениях появляется абсолютная температура. В безразмерных параметрах граничные условия выражаются следующим образом:

в свободном потоке перед цилиндром

$$u' = 1; \quad T' = 1; \quad p' = 1;$$

на поверхности цилиндра

$$u' = v' = w' = 0; \qquad T' = \frac{T_w}{T_0}$$

(на поверхности цилиндра давление не может быть предварительно задано).

Решение системы уравнений с граничными условиями будет иметь вид:

$$u' = f_u\left(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, E, \alpha, \frac{T_w}{T_0}\right);$$

$$T' = f_T\left(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{E}, \alpha, \frac{T_w}{T_0}\right).$$

В этом случае параметр E пропорционален квадрату критерия Маха в верхней части потока, так как скорость звука для газа с постоянным c_p дается выражением $u_a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{(\gamma - 1) c_p T}$;

$$\mathrm{E} = \frac{u_0^2}{c_p (T_w - T_0)} = (\gamma - 1) \frac{u_0^2}{u_{a0}^2} \frac{T_0}{T_w - T_0} =$$

$$= (\gamma - 1)(\mathrm{M})^2 \frac{1}{(T_w/T_0) - 1}.$$

Тогда среднее значение критерия Нуссельта дается соотношением

$$\overline{\mathrm{Nu}} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{M}, \frac{T_w}{T_0}, \alpha, \gamma\right). \qquad (9\text{-}27)$$

Число параметров в функции f уже достаточно велико и число состояний с физическим подобием соответственно снижено. Фактически уравнения, применявшиеся выше для описания свойств газа, являются только приближениями к действительному состоянию. Чем более точно уравнение описывает фактическое изменение свойств, тем больше оно будет содержать постоянных величин и тем больше

параметров появляется в безразмерных уравнениях, описывающих поток и теплообмен. Это ограничивает подобие до такой степени, что практически оно перестает существовать. Только путем описания свойств класса жидкостей в безразмерном виде одними и теми же уравнениями можно сохранить подобие внутри класса и можно ожидать получения обычных безразмерных уравнений, описывающих поток и перенос тепла.

9-2. ПОПЕРЕЧНОЕ ОМЫВАНИЕ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

Среди тел различных форм, при омывании которых происходит отрыв струй от поверхности, трубы круглого сечения представляют наибольший технический интерес, поэтому было произведено большое количество экспериментальных исследований теплоотдачи от труб. Движение жидкости при поперечном омывании одиночной трубы рассматривалось в § 6-8. На рис. 9-2 показана интерферен-

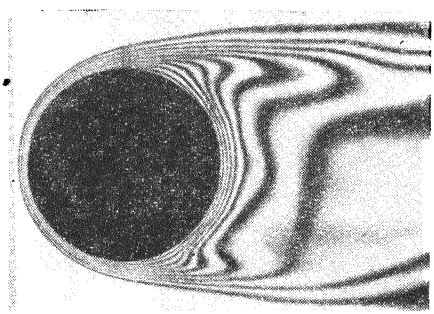


Рис. 9-2. Интерференционная фотография изотерм вокруг цилиндра, охлаждаемого потоком, нормальным к его оси, $Re = 1260$ (по Э. Эккерту и Э. Зойенгену).

ционная фотография температурного поля вокруг нагретого цилиндра.

Темные линии вокруг сечения цилиндра являются линиями постоянной температуры. На фотографии также виден термический пограничный слой на передней половине цилиндра. С кормовой половины цилиндра тоже существует своего рода пограничный слой. Здесь происходит падение температуры от значения на поверхности цилиндра до темепратуры в вихревой зоне. Поток, заснятый

на фотографии, характеризуется небольшим критерием Рейнольдса. При более высоких значениях критерия Рейнольдса пограничный слой бывает тоньше и изотермы в вихревой зоне имеют более переменный и неправильный характер.

Распределение локальных значений коэффициента теплообмена на поверхности цилиндра показано на рис. 9-3 и 9-4.

Теплоотдача с передней стороны труб рассматривалась в разделе 7-5 и представлена графиком на рис. 7-11. Теплоотдача с кормовой стороны происходит в вихревой зоне, а наши познания о ней весьма ограничены. При низких значениях критерия Рейнольдса теплоотдача с передней стороны больше, чем с задней. С возрастанием значений критерия Рейнольдса тепловой поток с кормовой стороны увеличивается и при $Re_d = 50\,000$ достигает такого же значения, как и с передней стороны. Объясняется это тем, что завихрения, отрываясь попеременно то с правой, то с левой стороны цилиндра, омывают поверхности задней половины цилиндра с интенсивностью, возрастающей вместе с увеличением критерия Рейнольдса. Если пограничный слой переходит в турбулентный поток до отрыва его от поверхности, картина распределения локальных значений коэффициента теплообмена по поверхности становится иной. Это происходит, когда значение критерия Рейнольдса превышает $Re_d = 4 \cdot 10^5$.

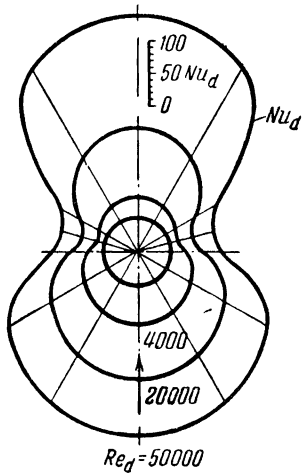


Рис. 9-3. Распределение значений локального коэффициента теплообмена по периметру цилиндра при поперечном омывании последнего [Л. 354].

Из графика рис. 9-4 видно, что при высоких значениях критерия Рейнольдса значения коэффициента теплообмена резко возрастают на угловом расстоянии 100° от лобовой образующей. Это указывает на изменение режима движения среды в пограничном слое. Рассматривая теплообмен при продольном омывании плиты, мы видели, что интенсивность теплообмена значительно повышалась в точке, где ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный.

Отрыв струй от поверхности цилиндра, вероятно, происходит близ второго минимума кривой значений коэффициента теплообмена.

При расчетах теплообменников наибольший интерес представляет общее количество тепла, отдаваемого трубой

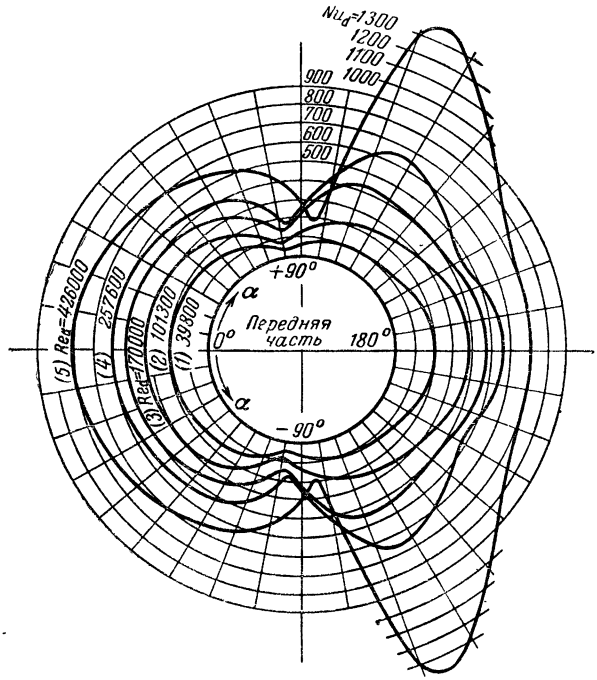


Рис. 9-4. Распределение значений локального коэффициента теплообмена по периметру цилиндра при поперечном омывании последнего [Л. 355].

или трубе, или, что то же самое, среднее значение коэффициента теплообмена для всей окружности трубы.

Р. Хильперт [Л. 127] произвел точные экспериментальные определения среднего значения коэффициента теплообмена для потока воздуха. На рис. 9-5 дан график результатов опытов. Значения критериев Нуссельта и Рейнольдса вычислены по диаметру трубы как определяющему отрезку и скорости потока до встречи с трубой как определяющей скорости. Из графика рис. 9-5 и из результатов других экспериментов, особенно при низких критериях Рейнольдса, видно, что для различных значений кри-

терия Рейнольдса справедливо следующее соотношение [Л. 128]:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}43 + c\,(\mathrm{Re}_d)^m. \qquad (9\text{-}28)$$

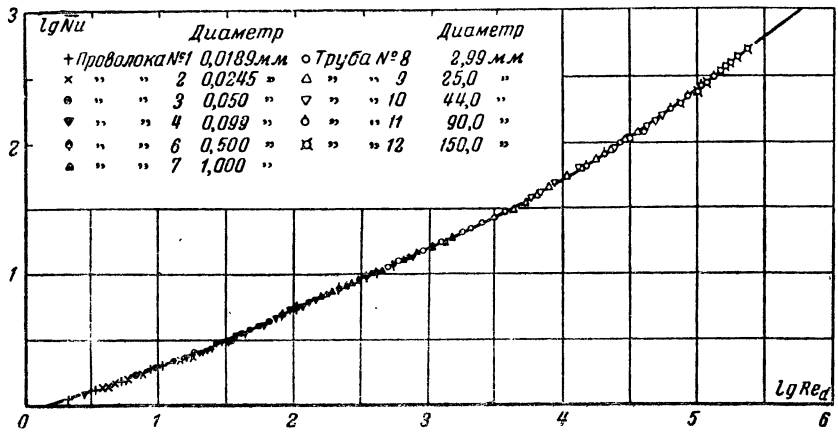


Рис. 9-5. Среднее значение коэффициента теплообмена по периметру цилиндра при поперечном омывании последнего [Л. 356].

Числовые значения коэффициента c и показателя степени m даются в табл. 9-1.

Таблица 9-1

Значения c и m для расчета теплообмена цилиндра кругового сечения при поперечном омывании последнего потоком воздуха [см. уравнение (9-28)] [Л. 356]

Re_d	c	m
1—4 000	0,48	0,5
4 000—40 000	0,174	0,618
40 000—400 000	0,0239	0,805

Х. Я. Дуглас и С. В. Черчилл [Л. 129] в недавно опубликованной работе пришли к выводу, что все имеющиеся достоверные сведения, включая опыты при температурах газа 15,5—982° С и температурах стенки 21—1 046° С, могут быть представлены одной линией, когда при подсчете критерия Нуссельта теплопроводность и при подсчете критерия Рейнольдса вязкость вычисляются при температуре,

равной среднему арифметическому температуры верхней части потока и температуры стенки.

Высокий уровень турбулентности в приближающемся потоке увеличивает не только средний коэффициент переноса тепла, но также и локальный перенос тепла на верхней части цилиндрической поверхности, которую покрывают ламинарный пограничный слой [Л. 130]. Увеличения Nu_d до 25% были получены для уровней турбулентности до 7%.

Теплообмен с передней стороны трубы можно рассчитать при помощи уравнения теплового потока через пограничный слой. На графике рис. 7-11 дано сравнение расчетных и опытных данных; отношение количества передаваемого тепла к потере количества движения (потери, обусловленные трением) в пограничном слое на передней стороне трубы довольно хорошо согласуется с результатами, полученными посредством формулы (8-7), хотя при ускоренном движении среды вдоль поверхности трубы допущения, принятые при выводе этой формулы, выполняются не совсем строго. Для высоких значений критерия Рейнольдса общее сопротивление трубы обусловливается главным образом силами трения.

В этом случае уравнение (8-7) дает приближенно величину отношения общего количества передаваемого тепла Q к общему сопротивлению R. При значениях критерия Рейнольдса, превышающих 1 000, в потоке появляется вихревая зона и сопротивление формы, возникающее благодаря наличию этой зоны, превышает потери трения, как говорилось в § 6-8. Однако теплообмен на кормовой половине трубы лишь приблизительно равен теплообмену на передней половине. Из этого следует, что тела, за которыми в потоке образуется вихревая зона, в смысле отношения количества передаваемого тепла к сопротивлению хуже тех тел, за которыми такая зона не образуется. Для количественных сравнений полезно применять следующий безразмерный комплекс:

$$\Omega = (W/Q)\,[c_p(t_m - t_w)/u_m^2].$$

Для пограничного слоя потока жидкости, характеризуемой критерием Прандтля $Pr = 1$, эта величина согласно уравнению (8-8) равняется единице. Для случая поперечного омывания трубы при числах Рейнольдса 2 000—40 000 значение Ω колеблется от 10 до 40. Если принимать во внимание количество передаваемого тепла на единицу

площади, то поверхность, находящаяся в вихревой зоне, оказывается приблизительно настолько же эффективной, как и поверхность в зоне пограничного слоя (см. графики рис. 9-3 и 9-4). В этом смысле труба с обтекаемым поперечным сечением не имеет преимуществ перед трубой круглого сечения.

Опытами с различными жидкостями (вода, масло) была определена зависимость коэффициента теплообмена от значения критерия Прандтля. Эта зависимость выражается следующей формулой:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}43 + K(\mathrm{Re}_d)^m(\mathrm{Pr})^{0{,}31}. \qquad (9\text{-}29)$$

Пользуясь значениями табл. 9-1, с помощью формулы (9-29) можно рассчитать теплообмен для любой жидкости, используя соотношение $K = 1{,}11C$. В табл. 9-2 даны значения коэффициента C и показателя степени m формулы (9-28) для труб различного сечения согласно данным Р. Хильперта.

Таблица 9-2

Коэффициенты для расчета теплообмена от труб различного поперечного сечения к потоку воздуха, нормального к оси труб, по формуле (9-28) [Л. 357]

Поперечное сечение	Re_d	C	m
→ □	5 000—100 000	0,0921	0,675
→ ◇	5 000—100 000	0,222	0,588
	5 000—100 000	0,138	0,638
→ ⬭	5 000—19 500	0,144	0,638
→ ⬡	19 500—100 000	0,0347	0,782

Критерии Нуссельта и Рейнольдса определяются по диаметру трубы круглого сечения с равновеликой площадью.

Теплообмен при поперечном омывании пучка труб зависит от расположения труб. Э. Д. Гримизон [Л. 131] систематизировал имеющиеся в этой области опытные данные. Существует два возможных расположения труб в пучках: коридорное и шахматное (рис. 9-6). Коэффициент теплообмена может быть снова представлен в форме уравне-

ния (9-28), в котором первым членом можно пренебречь для рассматриваемой области чисел Re. В качестве определяющей скорости берут среднюю скорость движения среды в самом узком сечении между трубами.

Значения коэффициента C и показателя степени m сведены в табл. 9-3. Для значений отношений $a=s_1/d$ и

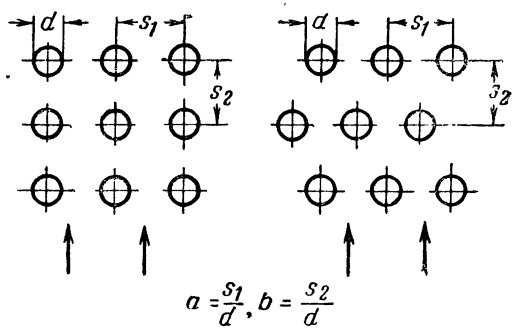


Рис. 9-6. Пучки труб с коридорным и шахматным расположением.

$b=s_2/d$, бо́льших, чем те, которые даны в таблице, можно применять формулу Р. Бенке:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}297\,(\mathrm{Re}_d)^{0{,}602}. \qquad (9\text{-}30)$$

Эта формула и значения табл. 9-3 справедливы для теплообмена в воздухе.

Для других сред постоянные необходимо определять таким же образом, как и для одиночных труб. Рекомендуется, чтобы значения физических параметров определились по температуре, подсчитанной по формуле (8-16).

Формулы справедливы для пучков труб с десятью и более рядами. Для меньшего числа рядов труб средний коэффициент теплообмена пучка имеет меньшее значение; так, например, коэффициент теплообмена для пучка из четырех рядов труб меньше на 12%. Первый ряд труб имеет приблизительно такой же коэффициент теплообмена, как и одиночная труба.

Падение давления Δp в потоке через пучок труб определяется из формулы

$$\Delta p = nf\rho\frac{u^2}{2}, \qquad (9\text{-}31)$$

Таблица 9-3

Значения коэффициентов для расчета теплообмена от пучка труб при поперечном омывании его потоком воздуха при помощи уравнения (9-28) [Л. 358]

$Re_d = 2\,000 \div 40\,000$; $a = s_1/d$; $b = s_2/d$ (рис. 9-6)

a / b	1,25		1,5		2		3	
	C	m	C	m	C	m	C	m
Коридорное расположение								
1,25	0,348	0,592	0,275	0,608	0,100	0,704	0,0633	0,752
1,5	0,367	0,586	0,250	0,620	0,101	0,702	0,0678	0,744
2	0,418	0,570	0,299	0,602	0,229	0,632	0,198	0,648
3	0,290	0,601	0,357	0,584	0,374	0,581	0,286	0,608
Шахматное расположение								
0,6							0,213	0,636
0,9					0,446	0,571	0,401	0,581
1			0,497	0,558				
1,125					0,478	0,565	0,518	0,560
1,25	0,518	0,556	0,505	0,554	0,519	0,556	0,522	0,562
1,5	0,451	0,568	0,460	0,562	0,452	0,568	0,488	0,568
2	0,404	0,572	0,416	0,568	0,482	0,556	0,449	0,570
3	0,310	0,592	0,356	0,580	0,440	0,562	0,421	0,574

где n — количество рядов в направлении потока;
ρ — плотность жидкости (воздуха);
u — средняя скорость между трубами.

Величина коэффициента сопротивления f определяется по графикам рис. 9-7 и 9-8, составленным по Гримизону. Значения физических параметров и в этом случае определяются по температуре, находимой по формуле (8-16). Графики рис. 9-7 и 9-8 справедливы для десяти и более рядов труб. Пучки из меньшего количества рядов обладают более высокими значениями коэффициента сопротивления. Так, например, значение коэффициента сопротивления пучка из четырех рядов больше на 8%. Для шероховатой поверхности значения коэффициентов теплообмена и сопротивления возрастают. Для очень шероховатых поверхностей зарегистрировано возрастание до 20%.

В последнее время собрано много экспериментального материала по компактным теплообменникам, имеющим большие теплообменные площади, приходящиеся на единицу объема. Это достигается путем использования узких щелей, применения оребрения и других развитых поверх-

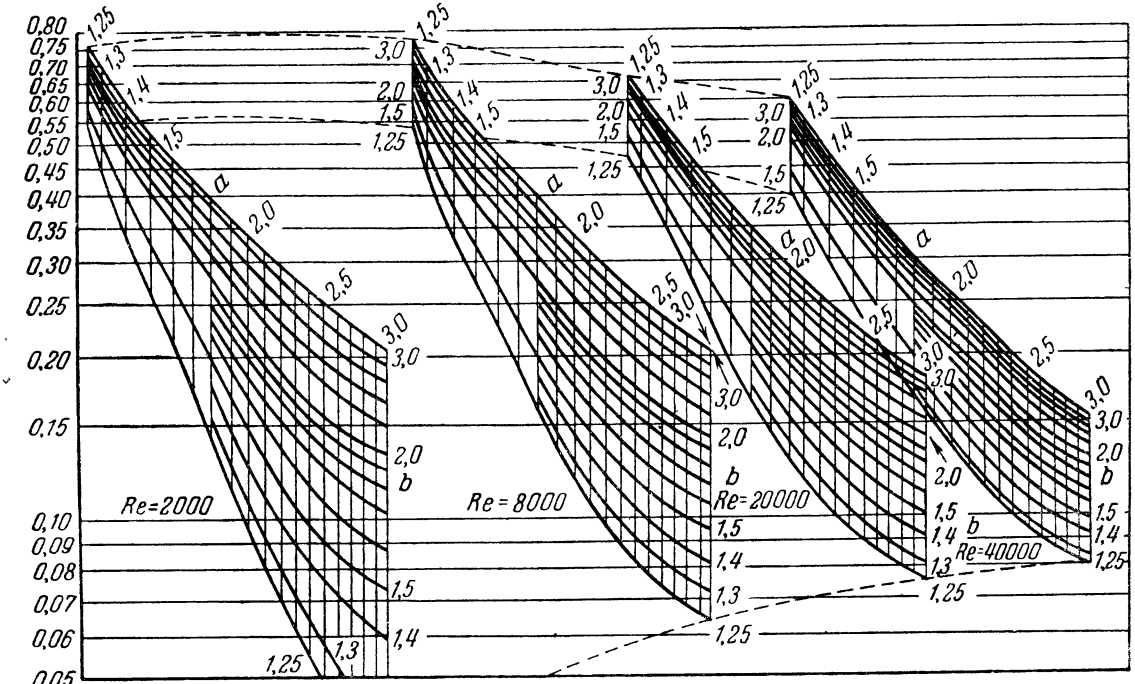


Рис. 9-7. Значения коэффициента сопротивления пучка труб с коридорным расположением [Л. 358].

ностей. Полезные сведения содержатся в книге В. М. Кейза и А. А. Лондона [Л. 132]. Книга также содержит ценные сведения по трению и переносу тепла, связанные с потоком через отдельные трубы.

Еще мало сведений имеется по пучкам труб, омываемым в аксиальном направлении. Практически они могут

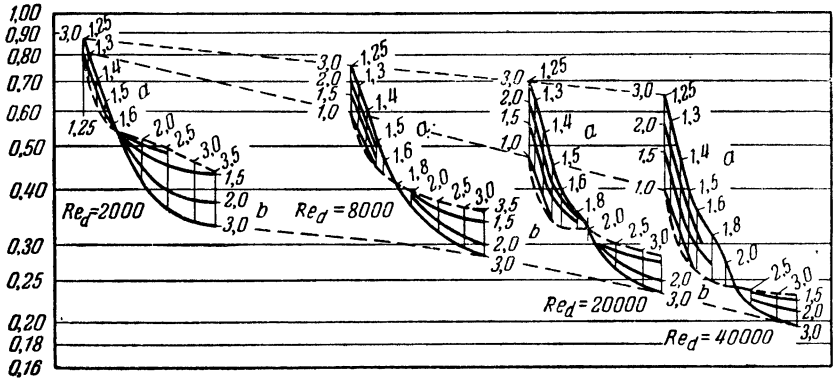


Рис. 9-8. Значения коэффициента сопротивления пучка труб с коридорным расположением [Л. 358].

быть рассчитаны с помощью уравнения (8-14). Значение гидравлического диаметра здесь вычисляется по формуле $d_h = d\left(\frac{4ab}{\pi} - 1\right)$. При сравнении различных расположений труб в пучках по энергии, необходимой для движения воздуха через пучок в системах охлаждения таких машин, как самолеты, автомобили, локомативы и пр., можно применять безразмерную величину Ω. Для систем охлаждения машин указанного типа важно иметь как можно меньшую лобовую поверхность, так как именно последняя определяет любое сопротивление системы охлаждения. Если требуется, чтобы системы охлаждения с различным расположением труб обладали одинаковой лобовой поверхностью, то в формуле $\Omega = (W/Q)[c_p(t_m - t_w)/u_m^2]$ скорость u_m должна иметь определенное значение. Кроме того, при данной разности температур $(t_m - t_w)$ должно передаваться определенное количество тепла Q. Отсюда энергия, необходимая для передачи единицы теплового потока, пропорциональна значению Ω. Для случая поперечного омывания газом

пучка труб круглого сечения значение Ω заключено между 1,5 и 10. Чем теснее расположены трубы, тем меньше значение Ω. Для труб, омываемых газом параллельно расположению их осей, и для случая поперечного омывания труб обтекаемого поперечного сечения $\Omega \approx 1$. Следовательно, именно такие системы выгодны для рассматриваемых случаев.

Для теплообменников стационарных установок наибольшую важность имеет величина поверхности нагрева, так как главным образом от этого зависят и вес и стоимость установки. Отсюда возникает вопрос: какое расположение труб обеспечивает данный теплообмен при данном падении давления и наименьшей поверхности нагрева? Найдено, что для каждого расположения требуется в зависимости от коэффициента теплообмена определенная скорость.

Расчеты [Л. 133] показывают, что лучшие результаты дают трубы при поперечном, а не параллельном омывании. В последнем случае падение давления при одной и той же поверхности нагрева бывает в 3—15 раз больше. При более тесном расположении данного количества труб в рядах, чем достигается уменьшение требуемого количества рядов, можно обеспечить данную теплоотдачу с одновременным снижением общего падения давления при прохождении потока через пучок труб. Поэтому в таких теплообменниках расстояние между трубами выгодно делать настолько малым, насколько позволяют условия производства теплообъемников и ухода за ними. В отношении падения давления между коридорными и шахматными пучками нет почти никакой разницы. Лишь при низких значениях критерия Рейнольдса шахматное расположение оказывается несколько более выгодным.

На рис. 9-9 и 9-10 приводятся фотографии движения газа через два пучка труб; эти фотографии были сделаны согласно предложению Х. Тома [Л. 134]. Пористая поверхность труб была пропитана хлористоводородной кислотой, а к воздуху были примешаны пары аммиака. В местах, где пары аммиака смешивались с парами хлористоводородной кислоты, образовывался белый туман из частиц хлористого аммония. Таким образом, пограничные слои и вихревые зоны стали видимыми; вместе с ними стала видимой зона нагрева или охлаждения потока воздуха от труб.

Пример 9-1. Четыре ряда труб (коридорного расположения) в паровом котле омываются перпендикулярным потоком топочных газов

при температуре 595° С и скорости 7,32 *м/сек*. Давление пара 1 000 000 *кГ/м*^{2}. Диаметр труб 61 *мм;* они расположены по квадрату со стороной 122 *мм*. Требуется определить коэффициент теплообмена и падение давления.

Температура насыщенного водяного пара при давлении 1 000 000 *кГ/м*^{2} равна 309° С.

Вследствие большого значения коэффициента теплообмена со стороны, омываемой водой, и высокой теплопроводности стенок труб температура внешней поверхности труб лишь слегка выше температуры пара. Предположим, что она равняется 315° С. Физические параметры газа определяются по температуре t^*, вычисляемой по формуле (8-16), т. е.

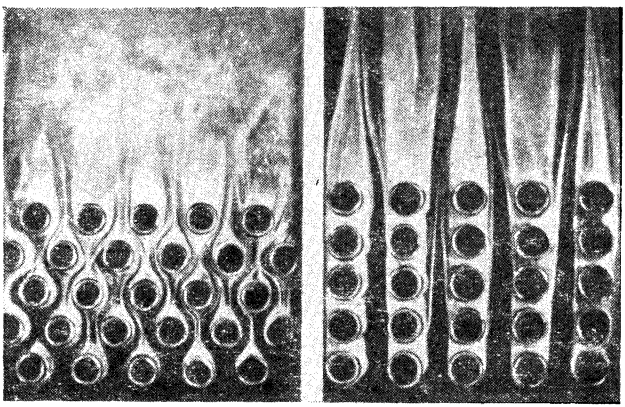


Рис. 9-9. и 9-10. Движение газа через пучки труб [Л. 359].

$$t^* = \frac{315 + 595}{2} = 455° \text{ С},$$

где коэффициент $(0{,}1\text{Pr} + 40)/(\text{Pr} + 72)$ для простоты был взят равным половине. Так как физические параметры топочных газов незначительно отличаются от параметров воздуха, то все расчеты можно производить, применяя физические параметры воздуха. Из таблицы приложения находим:

$$\nu = 7{,}4 \cdot 10^{-5} \ м^2/сек; \quad \lambda = 0{,}0505 \ ккал/м \cdot ч \cdot град.$$

Отсюда

$$\text{Re}_d = \frac{7{,}32 \cdot 0{,}061}{7{,}4 \cdot 10^{-5}} = 6\,030.$$

Так как $a = b = 2$, то из табл. 9-3 $C = 0{,}229$, $m = 0{,}632$ и, пользуясь формулой (9-28), находим:

$$\text{Nu}_d = 0{,}229 \cdot 6\,030^{0{,}632} = 56{,}6.$$

Теперь определим коэффициент теплообмена:

$$\alpha = \frac{\lambda}{d}\,\mathrm{Nu}_d = \frac{0{,}0505}{0{,}061}\,56{,}6 = 46{,}7\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}\cdot\textit{град}.$$

Это значение справедливо для десяти и более рядов труб. Для четырех рядов коэффициент теплообмена меньше на 12%. Следовательно,

$$\alpha = 41{,}7\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}\cdot\textit{град}.$$

Перепад давлений вычисляем по формуле (9-31). Плотность лучше всего брать при температуре газа:

$$\rho = 0{,}4\ \textit{кг/м}^3.$$

Коэффициент сопротивления определяем из уравнения (9-7):

$$f = 0{,}225.$$

Отсюда

$$\Delta p = 4\cdot 0{,}225\cdot 0{,}4\,\frac{(7{,}32)^2}{2\cdot 9{,}8} = 0{,}96\ \textit{кГ/м}^2.$$

9-3. ШАРЫ И НАСАДКИ

Перенос тепла на поверхности шаров определяется условиями потока, которые мы рассматривали в § 6-9. Ламинарный пограничный слой покрывает часть поверхности вверх по потоку, который отрывается от поверхности шара, создавая хаотическое течение потока вдоль его нижней части. На поверхности шара при больших числах Рейнольдса пограничный слой может стать турбулентным. Это повлияет на местоположение отрыва потока. Возле передней критической точки округленного тела скорость потока изменяется с изменением расстояния от точки согласно уравнению

$$u = Cx. \tag{9-32}$$

Для потенциального потока, обтекающего шар радиусом r, постоянная C равна $3u_0/2r$ (u_0 — скорость свободного потока). Коэффициент теплообмена в этой области может быть вычислен из решения уравнений пограничного слоя для осесимметричного потока. Результатом является решение, которое будет справедливым для любого осесимметричного округленного тела:

$$\mathrm{Nu}_x = f(\mathrm{Pr})\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \tag{9-33}$$

где $\mathrm{Nu}_x = \alpha x/\lambda$ и $\mathrm{Re}_x = ux/\nu$ (x — расстояние от критической точки, измеренное вдоль поверхности, и u — локальная скорость) [Л. 135]. Функция $f(\mathrm{Pr})$ может быть аппроксимиро-

вана для $0{,}5<\mathrm{Pr}<5$ величиной $f(\mathrm{Pr})=0{,}700\ \mathrm{Pr}^{0{,}4}$. Вблизи критической точки согласно уравнениям (9-32) и (9-33) перенос тепла не зависит от расстояния x. Для точек, находящихся на больших расстояниях от критической точки, точное решение дифференциальных уравнений, описывающих поток и перенос тепла в пограничном слое, требует сложных вычислений. Приближенные решения уравнений ламинарного пограничного слоя могут быть получены методами, весьма похожими на те, которые давались для двухмерного потока вокруг цилиндрических тел [Л. 136]. Интегрируемые уравнения движения и энергии для двухмерного потока можно применить также к осесимметричному потоку, заменив лишь первый член в левой части уравнения (6-13) на величину

$$\rho \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dx}\left(u_s^2\, r\, \delta_i\right)$$

и первый член в уравнении энергии (7-2) на

$$(1/r)\,(d/dx)\, r \int u\,(t_s - t)\, dy.$$

С помощью этих уравнений можно определить развитие гидродинамического и теплового пограничных слоев для любой поверхности, когда расстояние r поверхности от оси вращения задано в функции от x (x — расстояние от критической точки, измеренное вдоль поверхности).

Сведения по осесимметричному потоку можно получить, применив преобразования Манглера. В предыдущем параграфе было рассмотрено преобразование уравнения движения. Подобное преобразование может быть применено и к уравнению энергии пограничного слоя и означает, что осесимметричный поток может быть найден для каждого двухмерного пограничного слоя и что температурные поля для двух состояний идентичны при условии, если граничные условия на этом поле одинаковы для двух форм потока.

Пример 9-2. Преобразование Манглера применимо также и к вычислению переноса тепла для ламинарного сверхзвукового потока, обтекающего конус. Теория невязкого потока, обтекающего конус, показывает, что для осесимметричного потока со сверхзвуковыми скоростями давление вдоль поверхности конуса постоянно, когда число Маха достаточно велико для образования ударной волны. Поэтому если этот осесимметричный поток сравнивается с двухмерным потоком вдоль плоской пластины, для которого давление вдоль поверхности также посто-

янно, то требование одинакового распределения давления вдоль поверхностей автоматически удовлетворяется. Радиус r для конуса с углом раскрытия β равен:

$$r = x \sin \beta.$$

Введение этой величины в уравнение (6-61) дает:

$$\bar{x} = \frac{1}{C^2} \int_0^x r^2 dx = \frac{\sin^2 \beta}{C^2} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{r^2}{C^2} \cdot \frac{x}{3}; \quad \bar{y} = \frac{r}{C} y.$$

Для потока с постоянными свойствами в ламинарном пограничном слое вдоль плоской пластины коэффициент теплообмена может быть выражен следующим соотношением [см. уравнение (7-14)]:

$$\frac{\mathrm{Nu}_{\bar{x}}}{\sqrt{\mathrm{Re}_{\bar{x}}}} = 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}.$$

В размерном виде это уравнение примет вид:

$$\frac{\alpha \bar{x}}{\lambda} \Big/ \sqrt{\frac{u_s \bar{x}}{\nu}} = 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}.$$

Коэффициент теплообмена связан с температурным полем внутри пограничного слоя следующим уравнением:

$$\alpha = \frac{q}{t_w - t_s} = \frac{\lambda}{t_w - t_s} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_w.$$

Последние два уравнения можно теперь объединить, а результат может быть преобразован путем замены переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$ величинами x и y:

$$\frac{\bar{x}}{t_w - t_s} \left(\frac{\partial t}{\partial \bar{y}} \right)_w \Big/ \sqrt{\frac{u_s \bar{x}}{\nu}} = 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} =$$

$$= \frac{x}{t_w - t_s} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_w \Big/ \sqrt{\frac{u_s x}{\nu}}.$$

Возвращаясь снова к безразмерным параметрам, можно получить следующее решение, описывающее перенос тепла на поверхности конуса в ламинарном осесимметричном потоке:

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \sqrt{3} \cdot 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} = 0{,}576 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}.$$

Средний коэффициент переноса тепла для шара нельзя получить путем расчета, так как мы не можем еще вычислить перенос тепла в области отделившегося потока на части шара вниз по потоку.

У. Григуллем [Л. 137] на основании экспериментов предложено соотношение (для $20<\mathrm{Re}<150\,000$)

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}37\,(\mathrm{Re}_d)^{0.6}\,(\mathrm{Pr})^{1/3}. \tag{9-34}$$

Для меньших чисел Рейнольдса правильно описывать реальные условия должно соотношение

$$\mathrm{Nu}_d = 2 + 0{,}37\,(\mathrm{Re}_d)^{0.6}\,(\mathrm{Pr})^{1/3}. \tag{9-35}$$

Для $\mathrm{Re} \to 0$ это соотношение обращается в $\mathrm{Nu}_d = 2$, что имеет место для переноса тепла только теплопроводностью [см. уравнение (3-10) для $r_0 = \infty$].

Поток жидкости и перенос тепла через насадки часто встречаются в инженерной практике. Так, в химической промышленности применяют такие устройства, как теплообменники типа батарей (резервуар, аккумулятор), воздухоувлажнительное оборудование и аппараты. Сюда же относится поток через агломерационные и пористые материалы.

Одной из основных трудностей для аналитического описания падения давления и переноса тепла в таких насадках является большое разнообразие и недостаточное определение участвующих в процессе геометрий. В этом параграфе будет рассмотрено только одно устройство, а именно насадка, состоящая из сферических частиц одного размера [Л. 138]. Было найдено, что соотношения, описывающие условия в такой насадке, могут быть использованы с достаточной точностью и для насадок неправильной формы, если их форма не очень сильно отличается от шара. В этом случае рекомендуется в уравнениях вместо диаметра частицы применять выражение

$$d_p = \frac{6}{S_p}, \tag{9-36}$$

в котором S_p означает площадь поверхности на единицу объема. Важным параметром при описании уплотненного слоя является пористость ε, определяемая как отношение объема пустот (пор) ко всему объему. Когда поток направлен вверх через уплотненный слой, то при определенной скорости жидкость начинает поднимать частицы так, что они будут двигаться друг относительно друга. Слой находится теперь в «текучем состоянии». В таком состоянии средняя пористость значительно больше, чем в условиях низких скоростей потока. Ожижение часто не дает

однородной плотности. Например, когда частицы небольшие, воздух стремится создать переплетающиеся волокнистые каналы. В слоях, состоящих из частиц неодинаковых размеров, часто возникает разделение частиц: меньшие частицы постепенно сосредоточиваются возле верхней границы слоя. Частицы в ожиженном слое находятся в непрерывном движении и происходит их энергичное смешивание. Зависимости для перепада давлений и переноса тепла в ожиженном слое определяются действительным состоянием, поэтому их весьма трудно описать. В этой области еще предстоит много исследований.

Эрган [Л. 139] сделал современный обзор исследований по перепаду давлений Δp в неподвижном уплотненном слое высотой L, состоящем из шаровых частиц диаметром d_p, и вывел на основании экспериментов следующую зависимость:

$$\frac{\Delta p}{L}\frac{d_p}{\rho V_0^2}\cdot\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}=150\frac{1-\varepsilon}{\mathrm{Re}_p}+1{,}75 \qquad (9\text{-}37)$$

для пористости ε между 0,40 и 0,65. В приведенном уравнении ρ — плотность жидкости и V_0 — скорость, которую имела бы жидкость, если бы не было ни одной частицы (скорость подхода).

Число Рейнольдса находится по скорости подхода и диаметру частицы:

$$\mathrm{Re}_p=\frac{V_0 d_p}{\nu}.$$

Уравнение (9-37) может быть приведено к виду:

$$\Delta p=a\mu V_0+b\rho V_0^2,$$

в котором параметры a и b зависят только от геометрии слоя. Часто это уравнение трактуют как показывающее, что все сопротивление состоит из вязкостной части (первый член) и местного сопротивления (второй член). На рис. 9-11 приведен график зависимости, полученной из этого выражения.

Расположение частиц и пористость слоя обычно различны возле боковых стен с его внутренней стороны. Соответственно вышеприведенное соотношение справедливо только до тех пор, пока диаметр всего слоя по крайней мере в 10 раз больше диаметра частицы. Для меньших слоев найдено, что сопротивление больше из-за трения жидкости на стенке.

В текучем состоянии падение давления должно быть равным весу слоя, поэтому начало состояния текучести может быть вычислено следующим образом:

$$\frac{\Delta p}{L} = g\rho_p.$$

Плотность частицы ρ_p определяется как плотность слоя в уплотненном состоянии, предшествующем состоянию текучести. Уравнение (9-37) для перепада давлений может

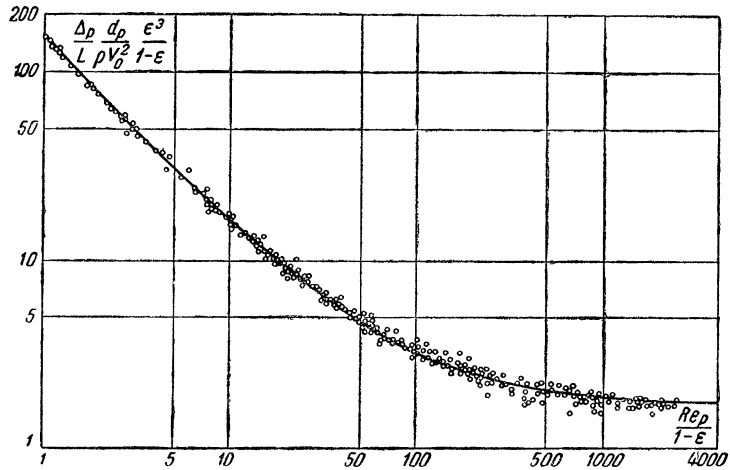


Рис. 9-11. Общая корреляция для падения давления в уплотненном слое [Л. 360].

быть использовано для вычисления скорости подхода V_0 для начального состояния текучести. Расширение слоя от текучести происходит от 20 до 50%.

Перенос тепла в беспорядочно уплотненных слоях, состоящих из шаров, измерить очень трудно, и поэтому он мало изучен. Зависимость, которая описывает довольно хорошо условия переноса тепла, была получена В. Х. Дентоном [Л. 140]:

$$\mathrm{Nu}_p = 0{,}80\,(\mathrm{Re}_p)^{0{,}7}(\mathrm{Pr})^{1/3}.$$

Эта зависимость справедлива для диапазона чисел Рейнольдса приблизительно 500—50 000 и для пористости $\varepsilon = 0{,}370$. Параметры в уравнении базируются на диаметре шара. Значительное распространение данных, полученных различными исследователями, должно быть объяснено

наличием большого числа неизвестных эффектов и особенно сложной геометрией. Ситуация еще более неопределенна в слое в текучем состоянии. В этом состоянии были найдены заниженные значения для коэффициентов переноса тепла.

В практике очень важно уметь определять тепло, переданное от жидкости и слоя к стенкам сосуда, несущего слой. Этот случай, однако, не будет здесь рассматриваться из-за недостатка места.

ЗАДАЧИ

9-1. Проведите анализ размерностей для потока и теплообмена масла через трубу или канал, предположив, что все параметры, за исключением вязкости, могут рассматриваться как постоянные. Было обнаружено, что зависимость вязкости большинства масел от температуры может быть хорошо аппроксимирована выражением $\mu = C/(T - T_0)^4$, где T_0 — характеристическая температура, которую необходимо экспериментально установить. Принимая эту зависимость для вязкости, установите безразмерные параметры, от которых зависит число Нуссельта.

9-2. Коэффициенты теплообмена отдельных труб в пучке часто измеряются следующим образом. Пучок состоит из ненагретых труб, и только одна труба считается нагретой и измеряются поток тепла через ее поверхность, температура поверхности и температура газа. Из этих данных вычисляется средний коэффициент теплообмена на поверхности этой трубы. Выясните, будет ли этот коэффициент теплообмена тем же, что и для случая, когда труба окружена пучком труб, которые нагреты до той же температуры поверхности. Если вы ожидаете несоответствий, объясните, почему и при каких условиях несоответствия должны исчезнуть.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ТЕПЛООБМЕНА

10-1. ТЕПЛООБМЕН ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

В жидкости, движущейся с достаточно высокой скоростью, энергия, преобразованная внутренним трением в тепло, вызывает значительное увеличение температуры. Это возрастание температуры важно, например, в подшипниках, где температура в пленке масла обусловлена внутренним тепловыделением, или в высокоскоростных самолетах, где теплообмен с поверхностью происходит при высоких дозвуковых или сверхзвуковых скоростях. В этом разделе будут рассмотрены две геометрии потока, в которых на перенос тепла влияет внутреннее трение. Первая геометрия выбрана ввиду простоты вычислений и наглядности, вторая — ввиду ее важности для инженерной прак-

тики. Будет принято, что в обоих случаях свойства жидкости можно считать постоянными.

Поток Кетте. Представим себе две параллельные пластины, одна из которых находится в состоянии покоя, в то время как другая движется со скоростью u_1. Система координат выбрана, как показано на рис. 10-1. Пространство между двумя пластинами заполнено жидкостью, и мы рассматриваем поток на достаточном расстоянии от входа, так что его можно считать полностью установившимся. Это означает, что никакой параметр потока не зависит от направления x, параллельного поверхностям пластин. Движущаяся пластина может быть охлаждена до постоянной температуры t_1, в то время как пластину 0 можно считать адиабатной по отношению к потоку тепла. Если жидкость вязкая, то для движения пластины *1* требуется приложение силы и соответственно внутри жидкости установится напряжение сдвига $\tau = \mu du/dy$. Из простого баланса сил следует, что напряжение трения в любой плоскости, параллельной пластине, имеет одинаковую величину. Согласно уравнению $du/dy = \tau/\mu = \text{const}$ можно заключить, что профиль скорости u является линейным, как показано на рисунке.

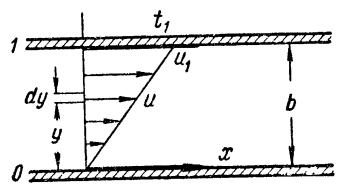


Рис. 10-1. Схема потока Кетте.

Рассматривая теперь энергию внутри жидкости, мы видим, что энергия непрерывно передается вниз через жидкость от пластины *1* к пластине *0*. Количество переданной через пластину работы на расстояние y на единицу площади в единицу времени равно $u\tau = u\mu(du/dy)$. Если мы рассмотрим пространство между двумя пластинами, находящимися друг от друга на расстоянии dy, то энергия, накопленная в этом слое, будет:

$$\frac{d}{dy}\left(u\mu\frac{du}{dy}\right)dy = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy,$$

где выражение справа получено с учетом, что $d^2u/d^2y = 0$. Эта энергия превращается в тепло. С точки зрения баланса тепла внутреннее трение поэтому эквивалентно тепловым источникам, расположенным по всему объему жидкости. В рассматриваемом случае эти тепловые источники

являются локально постоянными и имеют мощность на единицу объема

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu \frac{u_1^2}{b^2}.$$

При стационарных условиях это тепло должно быть удалено из слоя теплопроводностью. Теплообмена путем конвекции не будет происходить потому, что температура принимается постоянной по направлению потока. Поэтому мы имеем такое же положение, как и с плоской стенкой с постоянными внутренними источниками тепла. Соответственно решение для этого случая, рассмотренное в § 3-6, может быть применено и в данном случае и температура по всей жидкости находится из уравнения (3-54):

$$t = -\frac{\mu}{2\lambda}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 y^2 + C_1 y + C_2 = -\frac{\mu u_1^2}{2\lambda b^2} y^2 + C_1 y + C_2. \tag{10-1}$$

Граничные условия для температурного поля при этом следующие:

$$t = t_1 \quad \text{при} \quad y = b;$$

$$\frac{dt}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Учитывая, что температурный профиль может быть выражен следующим образом:

$$t - t_1 = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{u_1^2}{2} \cdot \frac{b^2 - y^2}{b^2} = (\mathrm{Pr}) \frac{u_1^2}{2c} \cdot \frac{b^2 - y^2}{b^2},$$

где c — удельная теплоемкость жидкости, мы видим, что температурный профиль имеет форму параболы с вершиной на плоскости *0*. Следовательно, вследствие внутреннего трения эта плоскость приобретает температуру, более высокую, чем температура охлажденной пластины *1*. Температура, которую принимает поверхность под влиянием внутреннего трения, называется температурой восстановления. Разность между температурой восстановления t_{r0} пластины *0* и температурой пластины *1* оказывается равной

$$t_{r0} - t_1 = (\mathrm{Pr}) \frac{u_1^2}{2c}. \tag{10-2}$$

Часто эта разность температур приводится к безразмерному виду путем деления на параметр $u_1^2/2c$, а результирующая величина называется коэффициентом восстановления температуры r. Таким образом, коэффициент восстановления для потока Кетте равен:

$$r = \mathrm{Pr}. \tag{10-3}$$

Для случая, когда поверхность 0 находится при температуре t_1, обусловленной охлаждением, и движущаяся поверхность *1* адиабатна к потоку тепла, расчет дает разность температур $t_{r0}-t_1$, которая теперь является температурой восстановления поверхности *1* минус t_1 и есть такая же величина, как и полученная в предыдущем расчете. Эта геометрия почти точно напоминает условия в подшипнике, в котором стержень, образующий движущуюся поверхность, не охлаждается, в то время как наружная часть подшипника, соответствующая поверхности 0, поддерживается путем охлаждения при постоянной температуре. Уравнение (10-2) можно применить для вычисления разности температур между стержнем и наружной поверхностью подшипника. В действительности условия в подшипнике более сложны, особенно из-за ограниченной длины подшипника, которая вызывает теплопроводность в аксиальном направлении.

В качестве следующего шага рассмотрим случай, когда обе пластины имеют температуры, заданные внешними условиями. Граничные условия для этого случая следующие:

$$t = t_0 \quad \text{при} \quad y = 0;$$
$$t = t_1 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Вычисление постоянных в уравнении (10-1) из этих граничных условий дает:

$$t - t_0 = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{u_1^2}{2}\cdot\frac{y^2}{b^2} + \frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{u_1^2}{2}\cdot\frac{y}{b} + (t_1 - t_0)\frac{y}{b}.$$

Тепловой поток к поверхности *0* находим из выражения

$$q_0 = \lambda\left(\frac{dt}{dy}\right)_0 = \mu\frac{u_1^2}{2}\cdot\frac{1}{b} + \lambda\frac{t_1 - t_0}{b} =$$

$$= \frac{\lambda}{b}\left[(\mathrm{Pr})\frac{u_1^2}{2c} + t_1 - t_0\right].$$

Это выражение может быть упрощено путем введения температуры восстановления. Комбинируя последнее уравнение с уравнениями (10-2) получаем:

$$q_0 = \lambda \frac{t_{r0} - t_0}{b}. \qquad (10\text{-}4)$$

Это уравнение выражает закон, который мы сможем применять вообще для любого высокоскоростного потока. Тепловой поток на поверхности, ограничивающей высокоскоростной поток, может быть вычислен по формуле, которая является справедливой для низких скоростей, когда разность температур, определяющая поток тепла, введена надлежащим образом, а именно как разность между температурой восстановления поверхности и ее действительной температурой.

Для потока Кетте теплоперенос на любой поверхности находится из обычного уравнения теплопроводности через пластину [см. уравнение (1-6)] с условием, что вместо разности температур между двумя поверхностями t_{w1} и t_{w2} берется упомянутая разность между температурой восстановления и действительной температурой поверхности пластины, которую мы рассматриваем.

Ламинарный и турбулентный слои на плоской пластине. Уравнение энергии, описывающее перенос тепла в ламинарном стационарном пограничном слое, включающее эффект внутреннего трения, согласно уравнению (7-5) имеет вид:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \qquad (10\text{-}5)$$

Сначала снова рассмотрим первоначальный случай, когда поверхность адиабатна. Поэтому граничные условия следующие:

$$\frac{dt}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$t = t_s \quad \text{при} \quad y = \infty.$$

Поле скоростей совпадает с полем для низких скоростей потока до тех пор, пока свойства рассматриваются как постоянные. Решение задачи нахождения температурного поля в пограничном слое было впервые получено Г. Польхаузеном [Л. 141].

Как и раньше в § 6-6, путем введения параметров f, η и отношения

$$\vartheta_r = \frac{t - t_s}{u_s^2/2c},$$

которое выражает температурное поле внутри пограничного слоя в безразмерном виде, оказывается возможным переход к обыкновенному дифференциальному уравнению. Введение этих переменных в вышеприведенное уравнение дает:

$$\frac{d^2\vartheta_r}{d\eta^2} + (\mathrm{Pr})\, f \frac{d\vartheta_r}{d\eta} + \frac{(\mathrm{Pr})}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 = 0. \qquad (10\text{-}5a)$$

Это уравнение второго порядка является неоднородным линейным дифференциальным уравнением относительно температурного параметра ϑ_r. Независимым переменным является η, а параметр f необходимо рассматривать как известную функцию η, определяемую Блазиусовским решением уравнения потока. Решение этого уравнения может быть получено, например, методом вариаций постоянных и имеет вид:

$$\vartheta_r = \frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^{\infty} \varphi\, d\eta - \frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^{\eta} \varphi\, d\eta,$$

$$\text{где } \varphi = \exp\left(-\mathrm{Pr}\int_0^{\eta} f\, d\eta\right)\left[\int_0^{\eta}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 \exp\left(\mathrm{Pr}\int_0^{\eta} f\, d\eta\right) d\eta\right]. \qquad (10\text{-}6)$$

Температура, которую приобретает поверхность пластины, снова является ее температурой восстановления и величина параметра ϑ_r на стенке равна коэффициенту восстановления. Поэтому коэффициент восстановления

$$r = \frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^{\infty} \exp\left(-\mathrm{Pr}\int_0^{\eta} f\, d\eta\right)\left[\int_0^{\eta}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(\mathrm{Pr}\int_0^{\eta} f\, d\eta\right) d\eta\right] d\eta.$$

Численным интегрированием этого уравнения были получены величины для коэффициента восстановления. А. Буземан показал, что эти величины могут быть прибли-

женно выражены для чисел Прандтля 0,5—5 простым соотношением

$$r = \sqrt{\Pr}. \tag{10-7}$$

Далее мы рассмотрим перенос тепла к поверхности пластины, когда ее температура поддерживается равной t_w путем охлаждения или нагревания и эта температура отличается от температуры восстановления. Чтобы найти решение для температурного поля, мы можем использовать следующее. Уравнение энергии, описывающее температурное поле внутри пограничного слоя, как видно из (10-5а), является линейным относительно температурного параметра ϑ_r. Соответственно общее решение этого линейного неоднородного уравнения может быть выражено как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения было найдено [см. уравнение (10-6)]. Решение для однородного уравнения было найдено в § 7-6. Поэтому температурное поле для высокоскоростного пограничного слоя на охлажденной пластине может быть записано как

$$t = \vartheta_r \frac{u_s^2}{2c} + (t_w - t_r)(1 - \theta') + t_s,$$

где ϑ_r дается уравнением (10-6), а θ' — уравнением (7-24) Нетрудно видеть, что это уравнение также удовлетворяет следующим пограничным условиям:

$$t = t_w \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$t = t_s \quad \text{при} \quad y = \infty.$$

Для инженерных расчетов тепловой поток на поверхности пластины играет очень важную роль. Этот тепловой поток на единицу площади и времени находится из выражения

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial \theta'}{\partial y}\right)_w (t_w - t_r),$$

так как

$$\left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial y}\right)_w = 0.$$

Для скоростного потока соответствующий тепловой поток может быть выражен согласно § 7-6 как

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial \theta'}{\partial y} \right)_w (t_w - t_s).$$

Сравнение последних двух уравнений снова указывает на следующее правило: тепловой поток в высокоскоростном пограничном слое находится из того же соотношения, что и тепловой поток в низкоскоростном пограничном слое, за исключением того, что температурный потенциал, определяющий тепловой поток для большой скорости, есть разность между действительной температурой стенки и ее температурой восстановления.

Чтобы сделать этот вывод, необходимо принять во внимание тот факт, что уравнение энергии для пограничного слоя является линейным относительно температуры. Поэтому правило должно быть применимо совершенно одинаково для всех жидкостей с постоянными свойствами. Это справедливо также для турбулентного потока, и как результат все зависимости для теплообмена, найденные для низкоскоростного потока, можно сразу же использовать при теплообмене в условиях большой скорости [Л. 142]. Единственно, что требуется дополнительно, — это знание коэффициента восстановления для частного слоя, откуда можно определить температуру восстановления. Для ламинарного потока пограничного слоя на плоской пластине коэффициент восстановления дается уравнением (10-7). Для турбулентного потока теоретически было выведено и варьировано для чисел Прандтля, близких к 1, следующее соотношение:

$$r = \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \qquad (10\text{-}8)$$

Было установлено, что уравнения теплообмена, найденные для жидкости с постоянными свойствами, описывают очень хорошо условия в высокоскоростном потоке газов до тех пор, пока давление в поле потока постоянно, при условии, что величины, характеризующие свойства, введены при соответственно выбранной исходной температуре. Это будет более детально обсуждаться в следующем разделе. Когда давление меняется, возникают различия между жидкостью с постоянными свойствами и газом. Одно из основных различий вызывается тем, что газы расширяются вследствие падения давления и сжимаются из-за увеличе-

ния давления и что с этими процессами связано изменение температуры.

Влияние этого процесса может быть хорошо проиллюстрировано следующим примером.

Рассмотрим поток в трубе с адиабатными стенками. Термодинамика показывает, что энергия, принесенная с потоком через поперечное сечение трубы, есть сумма внутренней энергии u, энергии давления p/ρ и кинетической энергии $v^2/2$ и что в трубе с адиабатными стенками этот поток энергии должен быть одинаковым через любое поперечное сечение:

$$u+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{const.}$$

Для несжимаемой жидкости, текущей в трубе с постоянным поперечным сечением, скорость должна быть постоянной вдоль трубы и соответственно суммы внутренней энергии и энергии давления должны быть постоянны:

$$u+\frac{p}{\rho}=\text{const.}$$

Внутреннее трение вызывает падение давления в направлении потока. Так как плотность рассматривается как постоянная, величина p/ρ в вышеприведенном уравнении уменьшается в направлении потока и внутренняя энергия u должна соответственно увеличиться. Внутренняя энергия может быть записана как произведение теплоемкости на температуру, и поэтому температура будет возрастать в таком потоке по его направлению, указывая на тот факт, что внутренним трением энергия давления была превращена во внутреннюю энергию. Для потока газа положение иное. Мы можем ввести энтальпию i для суммы внутренней энергии и энергии давления, и данное выше уравнение преобразуется в

$$i+\frac{v^2}{2}=\text{const.} \qquad (10\text{-}9)$$

Хотя поперечное сечение трубы постоянно, скорость будет возрастать по направлению потока, потому что происходит снижение плотности, связанное с падением давления. Поэтому в таком типе потока энтальпия уменьшается по направлению потока и согласно зависимости $i=c_p t$ температура уменьшается.

10-2. ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ГАЗАХ ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ

Перенос тепла при условиях, когда температура увеличивается благодаря внутреннему трению, важен и представляет в настоящее время особый интерес в связи с проблемой аэродинамического нагревания высокоскоростных самолетов и ракет. При высоких сверхзвуковых скоростях выделение тепла в пограничных слоях, которые окружают поверхность движущегося тела, создает чрезвычайно высокие температуры. В этой связи упоминаются величины порядка 5 000° С. Как следствие этого первостепенными задачами в развитии таких самолетов и ракет являются правильный выбор материала и метод охлаждения поверхности. Как основу этого необходимо знать перенос тепла с пограничного слоя на поверхность движущегося тела. Поэтому в последние годы была проделана большая работа с целью получить на основе анализа и экспериментов эти необходимые сведения [Л. 143]. Для ламинарных пограничных слоев современное познание в этой области базируется почти полностью на аналитических результатах, в то время как для турбулентных пограничных слоев приходится полагаться полностью на эксперимент [Л. 144]. Анализ ламинарного переноса тепла при условиях, ожидаемых при аэродинамическом нагреве, затруднен тем фактом, что при больших скоростях полета, которые мы рассматриваем (числа Маха до 10 и больше), по всему пограничному слою проходят очень большие изменения температуры. Соответственно все свойства среды, включая теплоемкость и число Прандтля, должны рассматриваться как переменные. Это не только увеличивает число параметров, включенных в задачу, но также делает решение уравнений пограничного слоя со многими неизвестными чрезвычайно трудным. Вдобавок воздух в пограничном слое будет во многих случаях диссоциирован и даже ионизирован. Возникает вопрос, как быстро такие процессы достигнут условий равновесия. У нас все еще нет удовлетворительного ответа на этот вопрос. Наконец, когда тело летит на большой высоте, плотность воздуха часто так мала, что рассматривать воздух как континуум нельзя и изучение переноса тепла должно производиться на молекулярной основе.

Некоторый материал по затронутым вопросам будет изложен в разделе 9-1 с привлечением анализа размерностей и в разделе 10-3, в котором будет рассмотрен перенос тепла в газах при низких плотностях.

Более детальное обсуждение не входит в задачу этой книги [Л. 145].

В следующих параграфах будут рассмотрены основные вопросы высокоскоростных потоков газа, такие, как различие между статическими и общими состояниями и измерение параметров состояния. Сведения по температуре восстановления, которую принимают ненагретая плоская пластина и цилиндр в высокоскоростном потоке газа, будут представлены, так же как и зависимости, которые позволяют вычислять перенос тепла для плоской пластины в потоке с одинаковой скоростью для ламинарных и турбулентных пограничных слоев с точностью, достаточной для проектных целей.

Состояние газового потока определяется скоростью и двумя параметрами состояния. Легче всего измерить давление и температуру; при этом следует различать два состояния. В первом случае давление и температура измеряются приборами, которые движутся вместе с газом. Такое состояние называется статическим и определяется статическим давлением p_{st} и статической температурой. Важность статического состояния следует из того факта, что, за исключением крайних случаев, для наблюдателя, движущегося вдоль с потоком, газ в небольшой области ведет себя так же, как и газ в состоянии покоя и равновесия. Это означает, что, например, плотность в потоке может быть вычислена из уравнения состояния, используя статическое давление и температуру. Вязкость, теплоемкость и теплопроводность являются также функциями статического давления и температуры. Статическое давление можно измерять через небольшое отверстие в стенке, параллельной направлению потока. Измерение статической температуры — более трудная задача. В настоящее время не имеется еще простого прибора для измерения этой величины [Л. 146].

Другое состояние потока газа возникает при изоэнтропическом падении скорости до нуля. Такое состояние называется заторможенным (total state). Оно определяется полным давлением p_T и полной температурой T_T. Полное давление измеряется при дозвуковых скоростях при помощи трубки Пито.

При сверхзвуковых скоростях трубка Пито показывает заниженное давление, так как перед прибором возникает ударная волна, а переход кинетической энергии в давление ударной волны не является изоэнтропическим. Однако

полное давление легко можно вычислить, если известны статическое давление и давление, измеренное трубкой Пито.

Приборы, которыми может быть измерена средняя температура торможения, существуют и будут скоро рассматриваться. Важность изучения заторможенного состояния отчасти заключается в том, что общее давление и температура торможения могут быть сразу же измерены. Эти измерения вместе с измерением статического давления также косвенно определяют статическую температуру и статическое состояние. Для идеального газа с постоянной теплоемкостью абсолютная статическая температура T_{st} может быть вычислена из соотношения, справедливого для изоэнтропического процесса: $T_{st}/T_T=(p_{st}/p_T)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Для газа с переменной теплоемкостью определение T_{st} может быть сразу же сделано с помощью составленных таблиц для газов [Л. 147].

Измерения p_T, p_{st}, T_T позволяют определить скорость V в точке, где были сделаны измерения. Величины p_T и T_T определяют энтальпию i_T, а величины p_{st} и T_{st} определяют энтальпию i_{st}, которая, например, может быть получена из таблиц для газов. Для адиабатического замедления до нулевой скорости, а следовательно, также и для изоэнтропического может быть записано уравнение (10-9).

$$i_T=i_{st}+\frac{V^2}{2}. \tag{10-10}$$

Из этого уравнения может быть вычислена скорость V. Когда разность T_T и T_{st} достаточно мала, так что изменением теплоемкости можно пренебречь, уравнение (10-10) может быть записано так:

$$T_T-T_{st}=\frac{V^2}{2c_p}. \tag{10-11}$$

Заменяя в этом уравнении статическую температуру статическим давлением и решая его относительно скорости, получаем хорошо известную формулу Барре де Сен-Венана и Вентцеля:

$$V=\sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_T\left[1-\left(\frac{p_{st}}{p_T}\right)\right]^{(\gamma-1)/\gamma}},$$

где γ — отношение изобарной теплоемкости к изохорной теплоемкости, а R — газовая постоянная.

Разность между полным давлением и статическим давлением называется динамическим давлением. Аналогично разность между температурой торможения и статической температурой можно назвать динамической температурой:

$$\vartheta_{dy} = T_T - T_{st}.$$

Для воздуха при средних температурах теплоемкость $c_p = 0{,}24$ *ккал/кг·град* $= 102{,}5$ *кГм/кг·град* и динамическая температура в градусах Цельсия будет равна:

$$\vartheta_{dy} = \frac{V^2}{19\,500}, \qquad (10\text{-}12)$$

если скорость V выражать в метрах в секунду.

Так как уравнение (10-10) выведено на основании первого закона термодинамики, то оно справедливо не только для случая изоэнтропического изменения скорости, но и для тех случаев, когда скорость падает до нуля без притока или оттока тепла и без приложения внешней работы.

В пределах пограничного слоя у поверхности скорость падает благодаря действию трения и кинетическая энергия превращается в тепловую. Этот процесс, однако, связан с обменом тепла и работой между различными слоями газа, даже в том случае, когда твердая поверхность не обменивается теплом с омывающим газом. Поэтому температура газового слоя у поверхности твердого тела, обладающего нулевой скоростью, может быть либо выше, либо ниже температуры торможения потока. Если твердую поверхность не нагревать, например тепловыми лучами, и не охлаждать, например путем отвода тепла от поверхности внутрь твердого тела, то стенка приобретает ту же температуру, что и газ.

Температура, которую приобретает ненагреваемая стенка, омываемая газом, называется температурой восстановления стенки T_r, а разность между этой температурой и статической температурой T_{st} газа обозначается символом ϑ_r.

Температура восстановления, выраженная через безразмерный коэффициент восстановления r, определяется из уравнения

$$T_r - T_{st} = r\frac{V^2}{2c_p}. \qquad (10\text{-}13)$$

Э. Польхаузен вычислил коэффициент r для случая продольного омывания плиты газом, движущимся в продоль-

ном ламинарном режиме с постоянными свойствами. Его результаты для чисел Прандтля 0,5—10 можно выразить формулой

$$r = \sqrt{\mathrm{Pr}}.$$

В большом количестве работ расчеты распространяли на газы с переменными свойствами. Было найдено, что зависимость $r = \sqrt{\mathbf{Pr}}$ описывает результаты этих расчетов с хорошей точностью до тех пор, пока разность температур $T_r - T_{st}$ является такой, что для этого интервала температур изменением теплоемкости можно пренебречь. Для очень больших сверхзвуковых скоростей, где изменение теплоемкости становится существенным, расчеты, приводимые ниже, дают результаты, которые находятся в очень хорошем согласии с решениями уравнений пограничного слоя. Коэффициент восстановления энтальпии определяется уравнением

$$i_r - i_{st} = r_i \frac{V^2}{2}. \qquad (10\text{-}14)$$

Этот коэффициент вычисляется из уравнения $r_i = \sqrt{\mathbf{Pr}}$ Число Прандтля вводится в это соотношение при исходной энтальпии

$$i^* = i_s + 0{,}72\,(i_r - i_s).$$

Не существует различия между температурным и энтальпийным коэффициентами восстановления до тех пор, пока теплоемкость может быть принята постоянной. Коэффициенты восстановления, вычисленные таким образом, находятся также в хорошем согласии с измеренными величинами. Для ламинарного воздушного потока при средних температурах коэффициент восстановления равен 0,84. В турбулентном потоке пограничного слоя воздуха на плоской пластине была измерена величина 0,88. В переходной области между ламинарным и турбулентным пограничными слоями коэффициент восстановления возрастает от величины 0,84 до пика и затем уменьшается до турбулентной величины 0,88 (рис. 10-2).

Интересными являются результаты измерений на цилиндре в дозвуковом потоке воздуха, перпендикулярном его оси [Л. 148]. Цилиндр был сделан из резины, для того чтобы ликвидировать температурное выравнивание путем теплопроводности в твердом материале. Для вычисления

локальных коэффициентов восстановления использовалось уравнение (10-13), в которое подставлялись измеренные температуры поверхности, скорость и статическая температура потока. Результаты вычислений показаны на рис. 10-3.

Как видно из рисунка, величина коэффициента восстановления в точке покоя *1* означает, что температура поверхности равна температуре в потоке. Низкие величины коэффициента восстановления вдоль нижней части потока становятся значительными на поверхности. За некоторым интервалом коэффициент восстановления становится даже

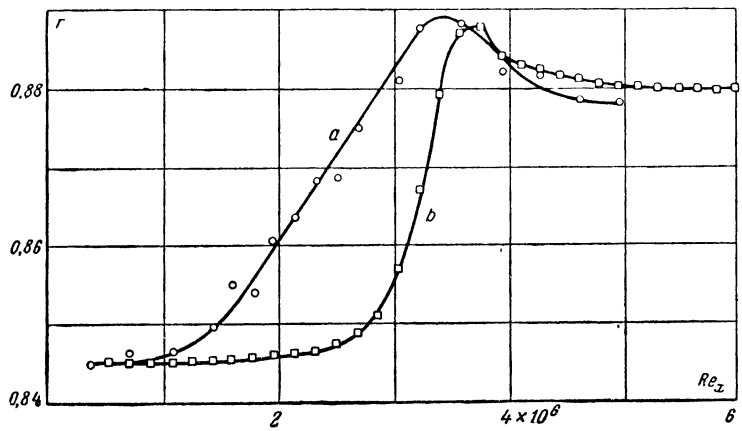


Рис. 10-2. Ламинарный, переходный и турбулентный коэффициенты восстановления температуры r для воздуха (измерение на конусе при $M = 3{,}12$).

a — высокая турбулентность потока; *b* — низкая турбулентность потока (≈1%) [Л. 361].

отрицательным; это означает, что температура поверхности ниже, чем статическая температура в верхней части потока. Райен [Л. 149] подтвердил это наблюдение, а Аккерет показал, что это тесно связано с периодическим распространением вихрей, сопровождающих отрыв потока.

В сверхзвуковых потоках в областях с оторвавшимся потоком низкие температуры не наблюдались.

Другим видом потока, который ведет к областям с низкой температурой торможения, является вихревой поток. Рэнк использовал этот эффект, чтобы разделить поток газа на часть с высоким содержанием энергии (высокая общая температура) и часть с низким содержанием энергии. Рис. 10-4 показывает такую вихревую трубку, сконструи-

рованную Хильшем. Поэтому она иногда называется трубкой Хильша. Она состоит из трубки, в которую тангенциально вдувается воздух (или другой газ) через одно или несколько сопел *a*. Таким образом, в трубке создается сильный вихревой поток.

Часть потока выходит из трубки через отверстие *b*; остальная часть потока выходит из трубки через отдаленный конец ее *c*. Клапан в этом месте служит для того, чтобы регулировать силу двух потоков воздуха. Найдено, что средняя температура воздуха, покидающего трубу через отверстие *b*, значительно ниже (38° С при 2,8 *кГ/см*^{2} давления на входе), чем температура воздуха верхнего потока во входном сопле.

Температура воздуха, выходящего из трубы в *c*, соответственно выше. Спренгер [Л. 150] нашел, что существуют различные виды потока, которые ведут к сильным эффектам разделения энергии потока, и Воннегут [Л. 161] разработал термометр, который измеряет статическую температуру в высокоскоростном потоке газа. В основном он состоит из вихревой трубы с соответствующим отверстием (зазором) и термометра, расположенного в воздухе с низкой энергией на оси трубы.

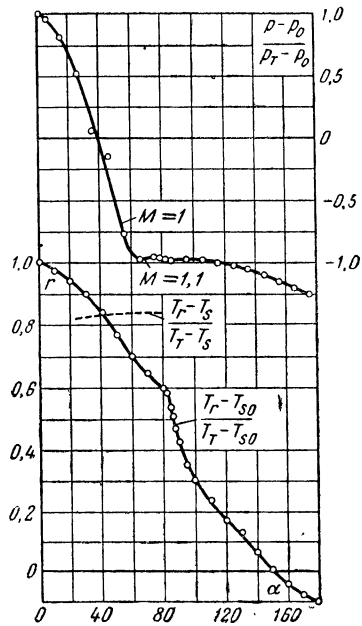


Рис. 10-3. Распределение давления и коэффициент восстановления температуры *r* для высокоскоростного дозвукового потока, нормального к круглому цилиндру.

α — угловое расстояние от линии застоя; T_T, p_T — температура торможения и давление в верхней части потока; T_{s0}, p_0 — статическая температура и давление в верхней части; p, T_s — статическое давление и температура вне пограничного слоя; T_r — температура восстановления [Л. 362].

Для измерения температуры при высоких скоростях движения газа удобно применять два прибора: цилиндрический термометр [Л. 152] (рис. 10-5) и диффузорный термометр [Л. 153] (рис. 10-6). Цилиндрическим термометром

измеряют поверхностную температуру цилиндра при продольном движении газа. Так как толщина пограничного слоя невелика по сравнению с диаметром цилиндра, то можно применять значения r для плоской плиты (см.

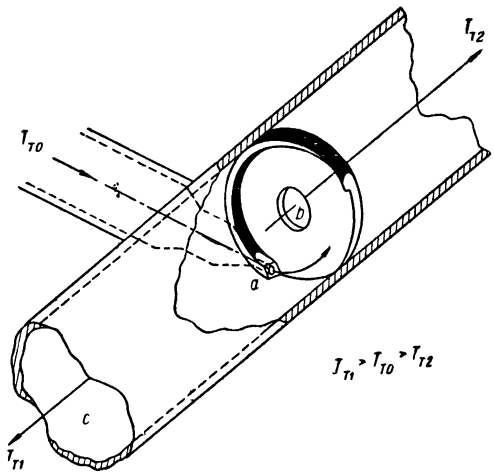


Рис. 10-4. Эскиз вихревой трубки (трубки Хильша).

рис. 10-2), а статическую температуру при известной скорости рассчитать по формуле (10-13). Диффузорным термометром (рис. 10-6) измеряют температуру торможения.

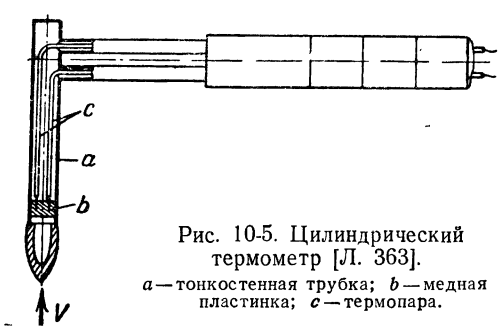


Рис. 10-5. Цилиндрический термометр [Л. 363].
a — тонкостенная трубка; *b* — медная пластинка; *c* — термопара.

Газ входит через отверстие и тормозится в трубе *a*. Температура газа измеряется при помощи термопары *d*. Выходит газ через небольшие отверстия *c*. Если бы этих отверстий не было, газ внутри прибора охлаждался бы и

термопара показала бы неправильную температуру. Каждый из термометров имеет свою область применения. Преимущества диффузорного термометра заключаются в том, что он сразу замеряет температуру торможения. С другой стороны, цилиндрический термометр можно сделать очень небольших размеров, и тогда он будет очень быстро регистрировать изменения температуры газа.

Как только поверхностная температура тела отклоняется от своей адиабатической температуры, между телом и

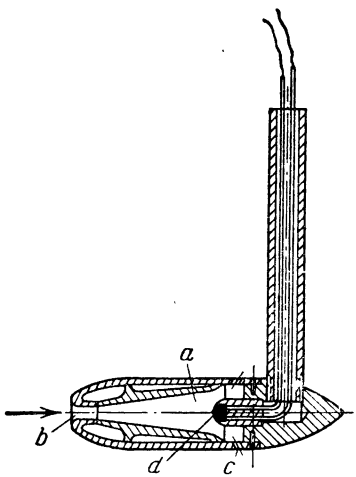


Рис. 10-6. Диффузорный термометр [Л. 364[.

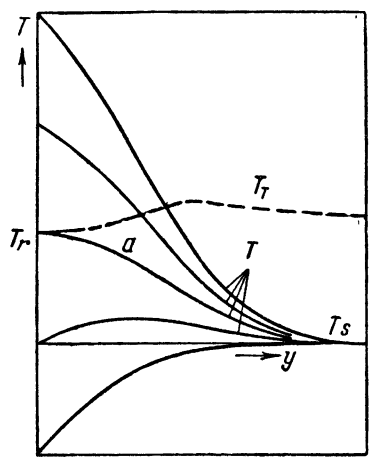


Рис. 10-7. Кривые распределения температуры в ламинарном пограничном слое на нагреваемой или охлаждаемой плите при высоких скоростях движения газа.

T_T — температура торможения; T — статическая температура; y — расстояние от стенки.

потоком газа начинается теплообмен. На рис. 10-7 приводятся кривые распределения температур в пограничном слое для теплоотдачи к стенке и от стенки. Горизонтальная касательная к кривой a показывает, что теплообмена между стенкой и газом не происходит. Статическая температура, которая в потоке вне пограничного слоя имеет значение T_s, поднимается в пределах пограничного слоя и достигает значения температуры восстановления стенки T_r на поверхности тела. Если темпертура стенки ниже, тепловой поток направлен к стенке. Это является справедливым для профилей температур, расположенных ниже кривой a на рис. 10-7.

Если температура поверхности тела выше температуры восстановления, тепловой поток направлен в обратную сторону, т. е. от стенки к газу.

Штриховая кривая обозначает профиль температуры торможения в пограничном слое для случая, в котором тепло не поступает в стенку. Видно, что температура торможения для некоторого расстояния от стенки ниже, чем в потоке вне пограничного слоя, в то время как слой, расположенный дальше от поверхности, имеет температуру выше, чем для свободного потока. Поэтому высокоскоростной пограничный слой разделяет воздух на части с низкой энергией и высокой энергией, так же как и вихревой поток в трубке Хильша. При той же скорости, однако, разности температур значительно больше в вихревом потоке.

Теплоперенос в высокоскоростном потоке газа лучше вычисляется [Л. 154] с помощью коэффициентов теплообмена, которые связаны с энтальпиями согласно уравнению

$$q_w = \alpha_i (i_r - i_w), \tag{10-15}$$

где q_w — тепловой поток в стенку на единицу времени и площади;

i_r — энтальпия восстановления;

i_w — энтальпия газа при температуре стенки.

Энтальпия восстановления вычисляется по формуле (10-14). Однако вводятся величины в формулу (10-7) или (10-8) при исходной энтальпии, которую находим из соотношения

$$i^* = i_s + 0{,}5\,(i_w - i_s) + 0{,}22\,(i_r - i_s). \tag{10-16}$$

Например, для двухмерного ламинарного потока вдоль поверхности с постоянными давлением и температурой локальный коэффициент теплообмена находится по числу Стантона:

$$\mathrm{St}_i = \frac{\alpha_i}{\rho u_s} \tag{10-17}$$

и из формулы (7-14); действительно, для низкоскоростного потока

$$\mathrm{St}_i = \frac{0{,}332}{(\mathrm{Re}_x)^{1/2}\,(\mathrm{Pr})^{2/3}}. \tag{10-18}$$

В формулах (10-17) и (10-18) все свойства введены при исходной энтальпии, найденной из соотношения (10-16). Локаль-

ный коэффициент трения находится для ламинарного потока из соотношения, которое определялось для низкоскоростного потока:

$$f_p = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{10-19}$$

Локальный коэффициент трения для турбулентного потока на плоской пластине находится из решения Блазиуса:

$$f_p = \frac{0{,}0296}{(\mathrm{Re}_x)^{0{,}2}}, \tag{10-20}$$

а для числа Рейнольдса свыше 10^7—из соотношения Шульца — Грунова:

$$f_p = \frac{0{,}370}{(\lg \mathrm{Re}_x)^{2{,}584}}. \tag{10-21}$$

Тогда локальный коэффициент теплообмена может быть получен из соотношения

$$\mathrm{St}_i = \frac{f_p}{2\,(\mathrm{Pr})^{2/3}}. \tag{10-22}$$

Все свойства вводятся в эти формулы при исходной энтальпии, определенной уравнением (10-16).

Было найдено, что вышеизложенное объясняет не только изменение свойств с изменением температуры в широком диапазоне с точностью, превышающей 4%, но также диссоциацию воздуха при высоких температурах, когда она становится ощутимой.

Пока температуры настолько низки, что теплоемкость можно считать постоянной, теплообмен, рассчитанный по температурам, ведет к тем же результатам, что и рассчитанный по энтальпиям.

Было показано [Л. 155], что формулы (10-15) и (10-16) вместе с несокращаемым соотношением (9-33), в котором $h = c_{pi} h_i$, устанавливают теплообмен в критической точке округленного тела в сверхзвуковом потоке, когда постоянная величина G в уравнении (9-32) заменена $0{,}8\ (\mathrm{Ma})^{0{,}232}$ (Ma — число Маха верхней части потока). На рис. 10-8 дается сравнение значений, рассчитанных по предыдущим формулам, и результатов опытов с ракетой «Фау-2», которые были проделаны Фишером и Норрисом [Л. 156]. Измерения производились в различных точках конической головки ракеты. На графике результаты опытов

для этой точки отмечены особым знаком. Нижняя линия дает значения теплопередачи, рассчитанные по формулам для низких скоростей и ламинарного пограничного слоя.

Для конуса эти значения больше в $\sqrt{3}$ раз, чем для плоской плиты, так как при движении от вершины к основанию конуса поверхность увеличивается; поэтому пограничный слой не нарастает так быстро (см. § 9-3). Верхняя линия относится к теплообмену для турбулентного пограничного слоя, рассчитанного по формулам для небольших скоростей.

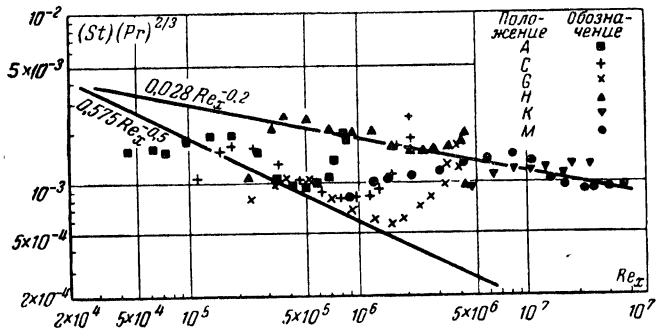


Рис. 10-8. Сравнение расчетных и измеренных значений коэффициента теплообмена для высоких скоростей движения среды [Л. 365].

Как видно из графика, опытные данные для невысоких значений критерия Рейнольдса группируются вокруг линии для ламинарного пограничного слоя и с возрастанием критерия Рейнольдса начинают группироваться вокруг линии для турбулентного пограничного слоя. Этот переход зависит, очевидно, не от критерия Рейнольдса, а от какой-то другой характеристической величины.

Пример 10-1. Пластинка длиной $x=101{,}6$ *мм* подвешена в потоке воздуха, движущегося со скоростью $u_s=178$ *м/сек*; температура пластинки $t_w=91°$ С; температура воздуха $t_s=26{,}1°$ С; давление воздуха 1 *кГ/см*^{2}.

Требуется рассчитать теплоотдачу от пластинки в воздух.

Прежде всего необходимо определить температуру восстановления поверхности пластинки в потоке воздуха. Величины свойств могут быть введены при температуре

$$(t_w + t_s)/2.$$

Критерий Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_s x}{\nu} = \frac{179 \cdot 0{,}1016}{1{,}96 \cdot 10^{-5}} = 9{,}3 \cdot 10^5.$$

Из графика на рис. 10-2 находим: $r = 0{,}845$. Тогда из уравнения (10-13) находим:

$$t_r = 26{,}1 + 0{,}845 \frac{179^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 102{,}5} = 41{,}1^\circ \text{ C}.$$

Такова температура пластинки, если ее не подогревать. Коэффициент теплообмена можно рассчитать по формуле (10-16) с величинами i для воздуха, взятыми из газовых таблиц Кинана и Кейя [Л. 157]:

$$i^* = 128{,}7 + 0{,}5\,(156{,}9 - 128{,}7) + 0{,}22\,(134{,}6 - 128{,}7) =$$
$$= 128{,}7 + 14{,}1 + 13 = 144{,}1,$$

которая соответствует температуре 61,5 °С.

Тогда из формул (10-17) и (10-18) локальный коэффициент теплообмена равен

$$\alpha_i = 350 \ \textit{ккал/м}^2 \cdot \textit{ч} \cdot \textit{град}.$$

Среднее значение коэффициента

$$\overline{\alpha}_i = 1{,}25\alpha_i = 437 \ \textit{ккал/м}^2 \cdot \textit{ч} \cdot \textit{град}.$$

Средний тепловой поток по формуле (10-15) на единицу площади равен:

$$q_w = -22\,300 \ \textit{ккал/м}^2.$$

10-3. ПЕРЕНОС ТЕПЛА В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

При обычном рассмотрении переноса тепла в газах структура газа считается сплошной и поэтому не требуется привлечения представлений о молекулярном строении газа. Поток и явления переноса тепла при таких условиях непрерывности среды могут быть адекватно выражены через критерии Рейнольдса, Маха, Нуссельта и Прандтля. Однако при малых абсолютных давлениях газ частично теряет характерные свойства непрерывности и появляются явления, которые могут быть объяснены, только если принимаются во внимание представления о молекулярном строении газа. Изучение аэродинамики потока и переноса тепла в разреженных газах начато сравнительно недавно, и еще много основных вопросов надо разрешить путем анализа и эксперимента.

Основой рассмотрения этих явлений является кинетическая теория газов, вначале разработанная количественно Даниэлем Бернулли в 1738 г. Эта теория рассматривает газы, как пространство, заполненное молекулами, которые перемещаются по прямым траекториям, отклоняясь только при столкновении с другими молекулами. Средняя кинетическая энергия совокупности молекул определяет темпера-

туру газа. Считают, что столкновения происходят согласно законам упругого удара. Статистическая средняя длина прямолинейных путей между столкновениями молекул называется *средним свободным пробегом молекулы* $\bar{\lambda}$. Скорость каждой молекулы изменяет направление при столкновении; поэтому всегда имеются в наличии молекулы с различными скоростями. Большинство молекул имеет скорость, близкую к средней скорости $\bar{v}$, поэтому имеется мало молекул с очень большой или очень низкой скоростью. Распределение скоростей молекул в газе в равновесном состоянии было вычислено Дж. С. Максвеллом в 1859 г. и называется *распределением скорости по Максвеллу*.

Одним из первых успехов в кинетической теории газов было предсказание того удивительного факта, что динамическая вязкость и теплопроводность идеальных газов независимы от давления. Это означает, например, что определенное количество тепла передается через неподвижный слой газа при данных температурных условиях независимо от давления газа. Применяя упрощенные понятия, мы выведем выражения для вязкости и теплопроводности. Кинетическая теория объясняет напряжения трения в текущем газе тем, что молекулы движутся вперед и назад между слоями газа, текущими с различными скоростями. Таким образом, молекула из низкоскоростного слоя газа может попасть в слой газа, движущийся с большей скоростью, где после нескольких столкновений ее скорость увеличивается, а скорость столкнувшихся с ней молекул уменьшается. Таким образом, между слоями газа происходит обмен количеством движения. Это же движение молекул вызывает обмен энергией, когда в газе имеют место разности температур.

Рассмотрим ламинарный поток газа, параллельный стенке, с градиентом скорости и температуры, перпендикулярным стенке (рис. 10-9). Молекулы движутся вперед и назад через произвольную плоскость aa, параллельную стенке. В течение интервала времени $d\tau$ молекулы с составляющими скоростями $\bar{v}_1$, перпендикулярными плоскости aa, пройдут эту плоскость, когда они находятся на расстоянии $\bar{v}_1 d\tau$ от плоскости. Число молекул в единице объема равно n. Средняя составляющая скорости по направлению плоскости aa всех молекул будет некоторой частью средней молекулярной скорости. Поэтому все молекулы в объеме $i'\bar{v}d\tau$ пройдут через единицу площади

плоскости. Число таких молекул равно $i'n\bar{v}d\tau$, а число молекул, проходящих через единицу площади плоскости aa за единицу времени с одной стороны равно $i'n\bar{v}$. Молекулы характеризуются скоростью потока от их предыдущего до следующего столкновения. Поэтому в среднем они перемещают скорость потока от плоскости *1—1* к плоскости *2—2*,

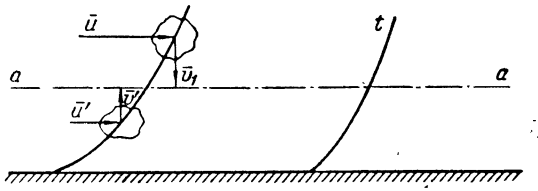


Рис. 10-9. Молекулярный обмен энергией.

которые разделены расстоянием порядка длины $\bar{\lambda}$ среднего свободного пробега молекулы. Мы обозначим это расстояние $j\bar{\lambda}$, где j не может значительно отличаться от единицы. Молекулярный поток одинаковой величины проходит плоскость aa в противоположном направлении и несет скорость потока $\bar{u}'$ с плоскости *2—2* к плоскости *1—1*. Обмен количеством движения, связанный с этим процессом, равен:

$$i'n\bar{v}m(\bar{u}-\bar{u}'),$$

где m есть масса одной молекулы.

Когда градиент скорости на плоскости aa в направлении, перпендикулярном плоскости, равен $d\bar{u}/dy$, $(\bar{u}-\bar{u}')$ может быть выражено как $j\bar{\lambda}(d\bar{u}/dy)$

Поэтому обмен количеством движения на единицу площади или напряжение трения равно:

$$\tau = i'jnm\bar{v}\bar{\lambda}\frac{d\bar{u}}{dy} = inm\bar{v}\bar{\lambda}\frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Произведение $i'j$ можно обозначить через i. Вязкость μ определяется уравнением $\tau = \mu(du/dy)$. Путем сравнения с вышеприведенным выражением для τ находим:

$$\mu = inm\bar{v}\bar{\lambda}.$$

Произведение nm есть масса на единицу объема ρ. Тщательное вычисление для сферических молекул, сделанное С. Чепманом и Д. Энскогом, объясняющее распределение

молекулярной скорости, дало для числового коэффициента i величину 0,499, и поэтому динамическая вязкость

$$\mu = 0{,}499\rho\bar{v}\bar{\lambda}. \tag{10-23}$$

Кинетическая теория показывает, что $\rho\bar{\lambda}$ независимо от давления и дает для средней молекулярной скорости выражение

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}},$$

где R — газовая постоянная для исследуемого газа;
T — абсолютная температура. Поэтому μ, как видно, не зависит от давления[1].

Когда в газе имеет место градиент температуры dt/dy, обмен теплом происходит аналогично обмену количеством движения между молекулами. Если c_m — теплоемкость молекулы, то поток тепла на единицу площади плоскости aa равен:

$$q = in\bar{v}c_m\bar{\lambda}\frac{dt}{dy}.$$

Для теплоемкости при постоянном объеме c_v на единицу массы имеет место соотношение $nc_m = \rho c_v$. Теплопроводность определяется уравнением $\lambda = q/(dt/dy)$. Подставив эти величины в выражение для q, получим:

$$\lambda = i\bar{v}\bar{\lambda}\rho c_v = \mu c_v \tag{10-24}$$

Таким образом, эта простая теория устанавливает связь между механическими и тепловыми свойствами, которые предполагались совершенно не связанными между собой. Уравнение (10-24) дает приемлемые величины, но не согласуется с экспериментальными данными; однако остается возможность для обработок расчета с целью установления числового коэффициента, который дает хорошее согласование. Обработка расчетов теплопроводности более сложна, чем обработка расчетов вязкости, так как теплопроводность является более сложным свойством. Чепман [Л. 158] показал, как надо обрабатывать вычисления, и получил выражение для теплопроводности, которое согла-

[1] Этот результат несправедлив для газов, находящихся при очень высоких давлениях, когда вязкость зависит от давления.

суется с экспериментальными данными для одноатомных, но не более сложных молекул. Это выражение имеет вид:

$$\lambda = {}^{5}/_{2}\mu c_v. \tag{10-25}$$

Эйкен [Л. 159] вывел следующее выражение для теплопроводности сложных молекул:

$$\lambda = {}^{1}/_{4}(9\gamma - 5)\mu c_v, \tag{10-26}$$

которое хорошо согласуется с экспериментальными данными для простых и сложных молекул; γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Из формулы (10-26) можно записать выражение для критерия Прандтля на основе кинетической теории:

$$\mathrm{Pr} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}. \tag{10-27}$$

Соотношение (10-27) очень хорошо согласуется с величинами критерия Прандтля, вычисленными по результатам измерений.

Критерий Рейнольдса также может быть выведен на основе кинетической теории:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{1}{0{,}499} \cdot \frac{V}{\bar{v}} \cdot \frac{l}{\bar{\lambda}}. \tag{10-28}$$

Таким образом, критерий Рейнольдса есть произведение отношений скорости и длины. Отношение скорости представляет собой отношение V-скорости макроскопического потока к средней молекулярной скорости $\bar{v}$; отношение длины представляет собой отношение основного размера тела l к средней длине свободного пробега молекулы $\bar{\lambda}$. Подобным же образом возможно получить значение критерия Маха. Выражение для скорости звука имеет вид:

$$V_s = \sqrt{\gamma RT}.$$

Поэтому из выражения для средней молекулярной скорости получаем:

$$V_s = \bar{v}\sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}}.$$

Таким образом, число Маха

$$\mathrm{M} = \frac{V}{V_s} = \frac{V}{\bar{v}}\sqrt{\frac{8}{\gamma\pi}}, \tag{10-29}$$

т. е. число Маха пропорционально отношению макроскопической скорости V к средней молекулярной скорости $\bar{v}$.

При обычных давлениях расстояния между молекулами, даже в газах, где межмолекулярные расстояния очень велики по сравнению с твердыми телами и жидкостями, являются намного меньшими, чем размеры тела, с которыми мы обычно имеем дело при расчетах теплообмена, и поэтому понятие сплошного газа здесь полностью применимо (газ рассматривается как континуум).

При низких давлениях с соответствующими низкими плокостями длина свободного пробега молекулы $\bar{\lambda}$ становится сравнимой с размерами тела, и тогда влияние молекулярного строения начинает сказываться в механизмах потока и теплопереноса. Относительная важность эффектов, обусловленных разрежением газа, может быть показана путем сравнения величины среднего свободного пробега молекулы газа с каким-нибудь характерным размером тела. Отсюда, если l есть размер тела, являющийся характеристическим размером в поле потока, влияние разрежения на поток и перенос тепла станет заметным, как только отношением $\bar{\lambda}/l$ нельзя будет больше пренебрегать. Это отношение безразмерно и определяется как критерий Кнудсена Kn. Критерий Кнудсена, представляющий, таким образом непосредственный интерес при изучении потока разреженного газа и переноса тепла, можно выразить через критерий Маха и Рейнольдса:

$$\mathrm{Kn} = \frac{\bar{\lambda}}{l} = \sqrt{\frac{\gamma\pi}{2}} \cdot \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}. \qquad (10\text{-}30)$$

Для двухатомного газа при $\gamma = 1{,}4$

$$\mathrm{Kn} \approx 1{,}48 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}.$$

Тзинь [Л. 160] предложил рассматривать механизм явлений в газе в зависимости от соответствующих интервалов значений критерия Кнудсена.

Для потоков с низкой вязкостью (т. е. с большими значениями критерия Рейнольдса) наиболее важным характеристическим размером является толщина пограничного

слоя δ. Так как отношение толщины пограничного слоя для ламинарного потока к характеристическому размеру тела

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}},$$

то соответствующее значение критерия Кнудсена будет равно:

$$\mathrm{Kn} = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} \approx \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \qquad (10\text{-}31)$$

Обычная газовая динамика, следовательно, будет иметь место, когда $\mathrm{Re} \gg 1$, а отношение $\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}}$ пренебрежимо мало. Для медленного потока типа потока Стокса характерным измерением потока является размер тела l. Таким образом, если критерий Кнудсена основан на размере l, получаем:

$$\mathrm{Kn} \approx \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}.$$

Следовательно, поток можно рассматривать как непрерывный поток, когда отношение M/Re пренебрежимо мало. В потоках, для которых значение критерия Рейнольдса в среднем велико, а также велико значение критерия Маха, критерий Кнудсена приобретает такую величину, что им больше нельзя пренебречь, и указывает на наличие эффектов разрежения в потоке. В непрерывном [1] потоке обычное граничное условие на поверхности раздела между газом и твердой поверхностью состоит в том, что газ у поверхности принимает скорость и температуру поверхности. Одним из более интересных эффектов разрежения газа в потоке является то, что газ, прилегающий к твердой поверхности, не принимает скорость и температуру поверхности. Газ на поверхности имеет конечную тангенциальную скорость; он «скользит» вдоль поверхности. Температура газа на поверхности в конечном итоге отлична от температуры поверхности; имеет место «скачок» между температурами поверхности и прилегающего газа. Эти эффекты связаны с величиной среднего свободного пробега молекул и параметрами, называемыми коэффициентами аккомодации и отражения, которые описывают статистическое взаимодействие поверхности и

[1] Здесь слово непрерывный указывает, что поток рассматривается как континуум. (*Прим. ред.*)

молекул. Описанный выше режим потока называется режимом скользящего потока и имеет место при малых, но не пренебрежимо малых значениях критерия Кнудсена.

Для чрезвычайно низких плотностей величина среднего свободного пробега $\bar{\lambda}$ является значительно большей, чем любой характерный размер тела l. В этом случае молекулы, покидающие поверхность тела, не сталкиваются с молекулами свободного потока до тех пор, пока они не будут находиться далеко от поверхности. Как первое приближение в таком случае молекулярное распределение в области, отдаленной от поверхности, может быть принято неискаженным, т. е. Максвелловским, так что поток возле тела можно рассматривать с точки зрения взаимодействия между свободными молекулами и поверхностью. Такой режим потока называется свободным молекулярным потоком или потоком Кнудсена.

Переход от газодинамического режима к режиму свободномолекулярного потока является постепенным, не показывая экспериментально никакой прерывности, но для целей анализа удобно определить режимы потока, хотя это в какой-то мере произвольно. Тзинь ввел несколько таких интервалов значений: газовая динамика $\frac{M}{\sqrt{Re}}<0{,}01$; свободный молекулярный поток $\frac{M}{Re}>10$. Область между ними занимают режимы скользящего потока и переходного потока. Режим переходного потока лежит между скользящим потоком и свободномолекулярным потоком и характеризуется тем, что средний свободный пробег молекул имеет приблизительно ту же величину, что и характеристический размер тела. Столкновения между молекулой и поверхностью, а также между молекулами являются частыми и одинаково важными.

Анализ этой области является трудным. Имеющиеся данные недостаточны и в большинстве — опытные. Эти области потока показаны графически на рис. 10-10 с соответствующей высотой в милях над уровнем моря для тела размером 0,305 метра в качестве параметра высоты. Из рис. 10-10 ясно, что даже при умеренно больших значениях критерия Маха ракета, летящая на высоте 32 *км*, будет испытывать эффекты скользящего потока. Сжимаемые пограничные слои при $M>4$ будут давать эффекты скольжения при значениях критерия Рейнольдса, меньших 10^5.

Несомненно, что сверхзвуковые аэродинамические трубы будут показывать эффекты скольжения до тех пор, пока резервуарное давление не будет очень высоким.

Скользящий поток. Полностью удовлетворительной формулировки уравнения движения потока, а также уравнений энергии, которые могли бы описать поверхностное трение и перенос тепла в слегка разреженном газе в скользящем потоке, нет. Некоторые предпринятые попытки слишком громоздки, чтобы их можно было поместить в текст дан-

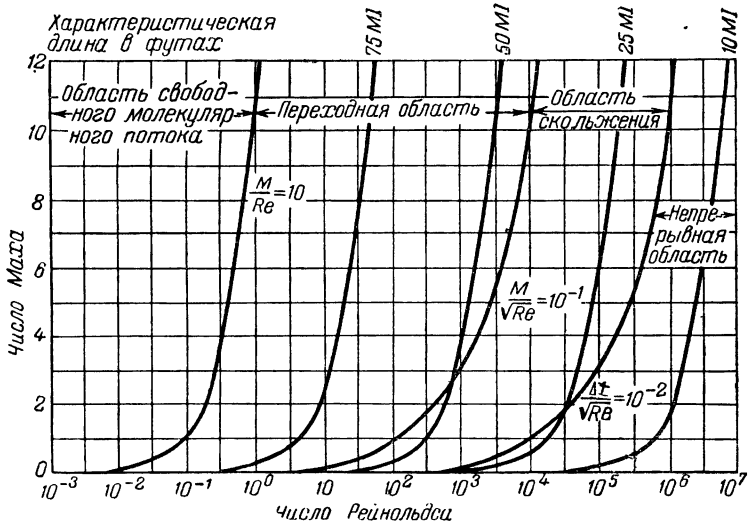


Рис. 10-10. Режимы газовых потоков.

ного объема, но нужно сделать некоторые замечания по существу. Наиболее общая приемлемая формулировка дана Барнеттом [Л. 161], Чепманом и Коулингом [Л. 162] и др., которые развили дальше результаты Хильберта и Энского в получении первых трех членов в решении пертурбационных рядов фундаментального уравнения Максвелла — Больцмана для кинетической теории газов. Эти решения дают более сложные формулировки уравнения Эйлера для несжимаемых инвисцидных потоков, уравнения Навье — Стокса для вязких сжимаемых потоков и в конце концов уравнения Барнетта. Первые две группы уравнений с соответствующим уравнением энергии для второй хорошо известны в практике обычной механики жидкостей. Ясно, что

уравнения Барнетта имеют производные более высокого порядка, чем уравнения Навье — Стокса, так же как и уравнения Навье — Стокса имеют производные более высокого порядка, чем уравнения Эйлера для идеальных потоков. Относительная важность этих членов большего порядка в формулировке Барнетта по сравнению, скажем, с членами в уравнениях Навье — Стокса определяется величиной параметров разрежения, как говорилось ранее при определении режимов потока. Например, в уравнении Барнетта член, выражающий напряжение, следующий:

$$\frac{\mu^2}{p}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Разделив это на член, выражающий напряжение в уравнении Навье — Стокса:

$$2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

получаем:

$$\frac{\mu}{p}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{\mu}{p}\cdot\frac{u}{l}\approx\frac{M^2}{Re}.$$

Следовательно, этот член имеет порядок величины, зависящий от величины критериев Маха и Рейнольдса, и, исходя из рассмотренных ранее соображений, не является пренебрежимо малым в области скользящего потока. Другие члены уравнения Барнетта имеют такой же порядок величины.

Данные выше понятия строго применимы к одноатомному газу, в котором молекулы обладают только тремя поступательными степенями свободы. Для двухатомных и многоатомных газов распределения внутренней энергии по всем степеням свободы не происходит, пока не пройдет время релаксации, которое следует за любым внезапным изменением состояния газа. Внутренняя энергия запасается вначале в поступательных степенях свободы, и только после достаточного числа столкновений она будет запасаться во вращательных и колебательных степенях свободы. Требуемое число столкновений меняется от нескольких в случае воздуха до тысячи или более в случае CO_2. Толщины скачка уплотнения, например, почти полностью определяются уравнениями высшего порядка, что представляет чрезвычайные трудности. Несмотря на большие сложности, возникающие при попытках сформулировать задачу скользя-

щего потока, а во многих случаях именно из-за них существует большое количество работ, освещающих эффекты скользящего потока в газе. Аналогичное положение имеет место для уравнения Навье — Стокса, для которых не существует общего решения, а имеется только несколько частных решений. Однако имеется много работ по приближенным решениям, которые позволяют практически использовать затронутые понятия. Изучение скользящего потока осуществляется приближенно во многих случаях очень грубо в связи с тем, что анализ основывался на уравнениях Навье — Стокса, обычно применяемых для несжимаемого потока. Решения были приближенными, причем предполагалось, что явление скольжения учитывалось введением дополнительных членов в граничные условия для тангенциальной скорости и температуры, т. е. принимались во внимание скольжение и температурный скачок на границе между газом и поверхностью. Несмотря на неточность предположений, используемых при рассмотрении эффекта скольжения, результаты были проверены экспериментально с большой точностью. Другой интересный и в то же время удивительный результат, который почти всегда получали при анализе скользящего потока, заключается в том, что результаты близко соответствуют результатам свободного молекулярного потока, если значения критериев Кнудсена приняты очень большими. Так как скользящий поток по предположению представляет собой явление, относящееся к малым числам Кнудсена, то точное значение этого явления неизвестно, однако этот факт был успешно использован в полуэмпирическом анализе, чтобы согласовать экспериментальные данные по всему режиму потока от газовой динамики до свободного молекулярного потока.

Приближенный анализ скользящего потока. Так как в данный момент нет в наличии прямых решений уравнений потока и энергии для области скользящего потока, то задача рассматривалась путем использования уравнений для обычного потока и энергии с введением эффектов разрежения в граничные условия. Были рассмотрены два основных эффекта в явлении скользящего потока. Во-первых, как было показано теоретически Максвеллом и экспериментально Кундтом и Варбургом, вблизи границы скорость потока не равна нулю и поток скользит вдоль стенки с конечной скоростью. Во-вторых, температурный скачок, как было принято без доказательства Пойсоном, имеет место при переносе тепла от поверхности к разреженному газу,

а экспериментами Смолуховского [Л. 163] было установлено, что этот эффект существует для статических систем. Эти эффекты могут математически быть представлены следующими уравнениями:

$$u_{y=0} - u_w = \frac{2 - f_s}{f_s} \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{10-32}$$

и

$$t_{y=0} - t_w = \frac{2 - a}{a} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \tag{10-33}$$

где f_s — коэффициент зеркального отражения, или доля тангенциального количества движения сталкивающихся со стенкой молекул, которая передается стенке;

a — коэффициент тепловой аккомодации, или величина, показывающая, в какой мере молекулы газа при отражении (или излучении стенкой) воспринимают энергию молекул поверхности стенки.

Таким образом, a может быть выражено следующим образом

$$a = \frac{E_r - E_i}{E_w - E_i}, \tag{10-34}$$

что для одноатомного идеального газа может быть точно записано, а для других газов с хорошим приближением—как

$$a = \frac{t_r - t_i}{t_w - t_i}, \tag{10-35}$$

где в уравнении (10-34) E есть энергия молекул, отраженных (или излученных) от поверхности; E_r — энергия молекул в случае свободного потока на поверхности и E_w — энергия, соответствующая характеристической энергии поверхности. В уравнении (10-35) t_r — температура молекулярного потока, отраженного (или излученного) от поверхности; t_i — температура падающего молекулярного потока и t_w — поверхностная температура или температура стенки. Коэффициент зеркального отражения f_s и коэффициент аккомодации a рассматривались скорее как экспериментально определяемые параметры, чем как переменные. В табл. 10-1 приведено несколько величин коэффициента скольжения, как их дали Милликен [Л. 164] и Бланкен-

Таблица 10-1

Коэффициент зеркального отражения f_s

Газ	Поверхность	f_s
Воздух	Обработанная бронза (латунь, медь)	1,00
CO_2	То же	1,00
Воздух	Старый шеллак	1,00
CO_2	То же	1,00
Воздух	Hg	1,00
»	Масло	0,90
CO_2	»	0,92
H_2	»	0,93
Воздух	Стекло	0,89
He	Масло	0,87
Воздух	Свежий шеллак	0,79
»	Ag_2O	0,98
He	Ag_2O	1,00
H_2	Ag_2O	1,00
O_2	Ag_2O	0,99

штейн [Л. 165]. Из таблицы можно видеть, что в первом приближении f_s может быть принят равным 1. Табл. 10-2 дает некоторые величины коэффициента тепловой аккомодации a согласно Кнудсену [Л. 166], Оливеру [Л. 167], Вайдману и Траумплеру [Л. 168] и Робертсу [Л. 168]. Для

Таблица 10-2

Коэффициент тепловой аккомодации a

Газ	Поверхность	a
H_2	Светлая платина	0,32
H_2	Темная »	0,74
O_2	Светлая »	0,81
O_2	Темная »	0,93
N_2	Платина	0,50
N_2	Вольфрам	0,35
Воздух	Слой лака на бронзе	0,88—0,89
»	Полированная бронза	0,91—0,94
»	Обработанная »	0,89—0,93
»	Травленая бронза	0,93—0,95
»	Полированный чугун	0,87—0,93
»	Обработанный »	0,87—0,88
»	Травленый чугун	0,89—0,96
»	Полированный алюминий	0,87—0,95
»	Обработанный »	0,95—0,97
»	Травленый алюминий	0,89—0,97
He	Вольфрам	0,025—0,057

коэффициента аккомодации предложен очень большой ряд величин, так чтобы на практике можно было определить эти величины для рассматриваемой системы.

Плоская пластина. Ламинарный скользящий поток на плоской пластине при нулевом угле атаки может быть рассмотрен на примере задачи Релея для импульсивно запущенной пластины. В этом случае могут быть упрощены выражения для инерции и вязкости в уравнениях Навье — Стокса. Сначала мы вычислим сопротивление пластины и затем перенос тепла от этой же пластины.

Поток может быть рассмотрен в двух измерениях, но для импульсивно запущенной пластины мы можем пренебречь членами конвективной инерции, такими, как $u(\partial u/\partial x)$, и величинами вязкости ν $(\partial^2 u/\partial x^2)$. Остается

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{10-36}$$

Член слева может быть преобразован в

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

и если равномерная скорость U сообщена пластине только в направлении x, то данное выражение сводится для $\partial y/\partial \tau$ к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = U \frac{\partial u}{\partial x}$$

и уравнение (10-36) приобретает вид:

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{10-37}$$

Соответствующие граничные условия следующие:

$$u = U; \quad x = 0; \quad y > 0;$$

$$u = \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad y = 0; \quad x > 0.$$

Второе граничное условие записано для условия скольжения скорости для коэффициента зеркального отражения, равного единице. Коэффициент лобового сопротивления определен как

$$C_D = \frac{\text{общая сила лобового сопротивления с двух сторон пластины на единицу ширины}}{\rho U^2 l/2}.$$

Решение уравнения (10-37) в зависимости от такого коэффициента лобового сопротивления имеет вид:

$$C_D M = \frac{2,67}{X_1^2}\left(e^{X_1^2}\operatorname{erfc} X_1 - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} X_1\right), \quad (10\text{-}38)$$

где $X_1 = {}^2/_3\sqrt{\mathrm{Re}/M^2}$. Графическое изображение решения (10-38) показано на рис. 10-11 в сравнении с экспериментальными данными по полному лобовому сопротивлению плоских

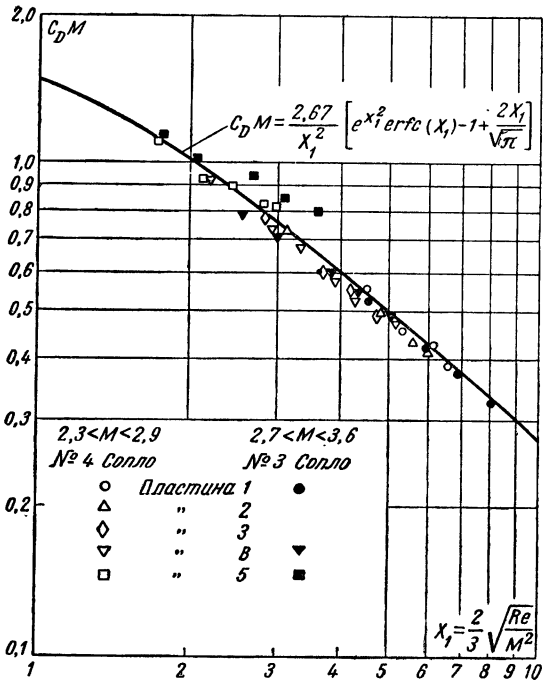


Рис. 10-11. Коэффициент лобового сопротивления плоской пластины.

пластин, полученными в аэродинамической трубе с низкой плотностью и высокой скоростью [Л. 170].

Перенос тепла [Л. 171] от этой пластины может быть рассчитан из уравнения энергии для импульсивно запущенной пластины. В этом случае мы сможем пренебречь членами, содержащими теплопроводность, такими, как $\lambda(\partial^2 t/\partial x^2)$, так как они малы по сравнению с $\lambda(\partial^2 t/\partial y^2)$. Мы можем пре-

небречь членом, выражающим конвекцию по y; таким образом, для движения пластины с постоянной скоростью U в направлении x уравнение энергии приобретает вид:

$$U\frac{\partial t}{\partial x}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \qquad (10\text{-}39)$$

Соответствующие граничные условия даны с учетом условий температурного скачка на стенке и состояния свободного потока:

$$t_{y=0}-t_w=\frac{2-a}{a}\cdot\frac{2\gamma}{\gamma+1}\cdot\frac{\bar{\lambda}}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0};\quad y=0;\quad x>0;$$

$$t=t_f;\quad x=0;\quad y>0.$$

Поэтому для $a=0{,}8$ $\gamma=1{,}4$; решение уравнения (10-39) принимает вид:

$$\mathrm{St}\,M=\frac{0{,}38}{X_2^2}\left(e^{X_2^2}\mathrm{erfc}\,X_2-1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}X_2\right), \qquad (10\text{-}40)$$

где $X_2=\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}/6{,}9\,M^2}$ и St — критерий Стантона:

$$\mathrm{St}=\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}=\frac{\alpha}{U\rho c_p}.$$

Нет экспериментальных данных, с которыми можно сравнить решение (10-40); однако решение (10-40) должно дать такие же хорошие результаты, как и уравнение (10-38).

Ш а р. Перенос тепла от паров привлек к себе внимание, так как сферическая форма хорошо проявляет себя в экспериментах [Л.172]. Однако задача усложняется тем, что в большинстве случаев, если диаметр шара не очень мал, значение критерия Маха должно быть большим для того чтобы критерий Кнудсена был достаточно велик для установления скользящего потока. Обычно это означает, что число Маха такое, что поток сверхзвуковой. В таком случае существует скачок уплотнения впереди шара (рис. 10-12) и условия позади этого скачка уплотнения должны учитываться при расчете переноса тепла. Как одну из моделей мы можем рассмотреть шар в сверхзвуковом, разреженном потоке газа с предшествующим нормальным скачком уплотнения, позади которого мы сможем рассчитать свойства газа для того, чтобы определить перекос тепла. В качестве второй модели мы можем рассмотреть раз-

реженный дозвуковой поток, получаемый при очень низких плотностях, когда отсутствует скачок уплотнения, анализ которого поэтому не представляет особого затруднения [Л. 173]. Каванау вывел выражение для поправки на разрежение к решению для переноса тепла от шаров в случае непрерывной среды, которое подтверждается экспериментальными данными с точностью до 10%. Здесь мы рассмотрим это приближение.

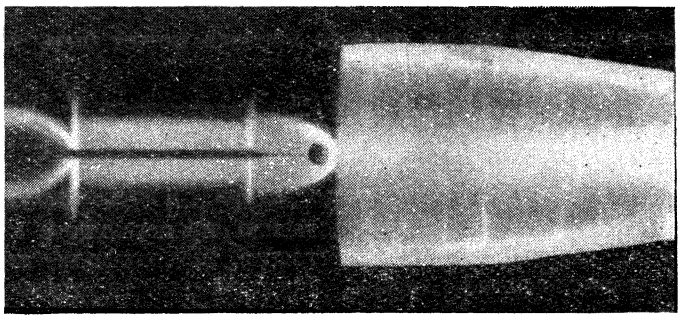


Рис. 10-12. Ударная волна перед шаром (по методу послесвечения азота).

Если рассматривается температурный скачок в области скользящего потока как эффективное тепловое контактное сопротивление в пространстве между газом и поверхностью, сравнимое или большее теплового сопротивления, обусловленного вязким пограничным слоем, то коэффициент теплообмена при низких плотностях может быть определен в первом приближении поправкой в коэффициенте теплообмена для непрерывной среды при том же значении критерия Рейнольдса.

Рассмотрим поверхность в непрерывном потоке, где тепло переносится между поверхностью и потоком. Температура поверхности однородна, постоянна и равна t_w^0; тепловой поток

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha^0 (t_w^0 - t_r^0), \qquad (10\text{-}41)$$

где нулевой верхний символ обозначает состояние непрерывности и t_r есть адиабатическая температура поверхности.

Теперь, если газовый поток разрежен, в то время как критерий Рейнольдса поддерживается постоянным, появляется дополнительное сопротивление переносу тепла из-за температурного скачка, так что мы можем выразить общий коэффициент конвективного теплообмена, включающий сопротивления как теплового пограничного слоя, так и температурного скачка, записав:

$$q = \alpha (t_w - t_r). \tag{10-42}$$

Температурный скачок первого порядка может быть записан как

$$t_{y=0} - t_w = \xi \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{10-43}$$

где $t_{y=0}$ и $(\partial t/\partial y)_{y=0}$ есть температура и температурный градиент в слое газа непосредственно прилегающего к поверхности. Величина ξ есть расстояние, на котором имеет место температурный скачок, определяемое из уравнения (10-33):

$$\xi = 1{,}996 \frac{2-a}{a} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\overline{\lambda}}{\mathrm{Pr}},$$

или

$$\xi = \frac{\theta}{\mathrm{Pr}} \overline{\lambda}. \tag{10-44}$$

Условие температурного скачка в первую очередь требует, чтобы $t_r = t_r^0$. Предполагается, что q, т. е. тепло, переданное между поверхностью и газом, одинаково в случае наличия и отсутствия температурного скачка. Это фактически предполагает, что уравнение (10-43) справедливо, когда $t_{y=0} = t_w^0$.

Группируя формулы (10-43), (10-41) и (10-42), получаем:

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = 1 + \frac{\xi \alpha^0}{\lambda}$$

и, подставляя в это выражение величину ξ, получаем с помощью соотношения (10-30) выражение

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha^0 l}{\lambda} \cdot \frac{M}{\mathrm{Re\,Pr}} \sqrt{\frac{\gamma \pi \theta^2}{2}},$$

которое можно записать как

$$\frac{\mathrm{Nu}^0}{\mathrm{Nu}} = 1 + \sqrt{\frac{\pi\gamma\theta^2}{2}}\,\frac{M}{\mathrm{Re\,Pr}}\,\mathrm{Nu}^0. \qquad (10\text{-}45)$$

Если решение (10-45) вычислено для двухатомного газа с $\gamma = 1{,}4$ и коэффициентом аккомодации $a = 0{,}8$, то приближенно можно написать:

$$\frac{\mathrm{Nu}^0}{\mathrm{Nu}} = 1 + 2{,}59\left(\frac{M}{\mathrm{Re\,Pr}}\right)\mathrm{Nu}^0.$$

Для того чтобы использовать формулу (10-45), необходимо иметь решение для переноса тепла от шаров в непрерывной среде. Такое решение было получено посредством грубых приближений относительно распределения скорости около шара [Л. 174]. Рассмотрим уравнение энергии для сферической системы координат, пренебрегая соотношениями для сжимаемости и рассеяния механической энергии, в обозначениях, показанных на рис. 10-13:

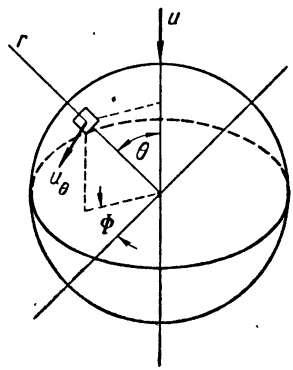


Рис. 10-13. Сферическая система координат.

$$\rho c_p\left(u_r\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\cdot\frac{\partial t}{\partial\theta} + \frac{u_\Phi}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial t}{\partial\Phi}\right) =$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\Phi^2}\right]. \qquad (10\text{-}46)$$

Как приближение к условию скольжения скорости пусть

$$u_r = u_\Phi = 0;\quad u_\theta = U$$

и из симметрии

$$\frac{\partial t}{\partial\Phi} = \frac{\partial^2 t}{\partial\Phi^2} = 0$$

и для небольшой теплопроводности в направлении θ по сравнению с конвективным потоком в том же направлении

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial\theta} = \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial\theta^2} = 0.$$

Таким образом, уравнение (10-46) упрощается:

$$\rho c_p \frac{U}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} = \lambda \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right]. \qquad (10\text{-}47)$$

Уравнение (10-47) может быть решено для граничных условий:

$$t = t_w; \quad r = r_0;$$

$$t = t_f; \quad r \to \infty$$

посредством преобразования Лапласа [Л. 175] и дает для среднего коэффициента теплообмена значения критерия Нуссельта

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\alpha_{av} D}{\lambda} = 2 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 + e^{-\beta^2 \pi})(1 + \beta^4)^{-1} d\beta}{[J_1^2(\alpha_1 \beta) + Y_1^2(\alpha_1 \beta)]\, \beta}, \qquad (10\text{-}48)$$

где D — диаметр шара; $\alpha_1 = \sqrt{2\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$;
$J_1(\alpha_1\beta_1)$ и $Y_1(\alpha_1\beta_1)$ — функции Бесселя.

Решение (10-48) представлено графически на рис. 10-14 и 10-15 в виде графика $\mathrm{M} \approx 0$.

Рассматривая совместно решения (10-45) и (10-48), получим результаты, нанесенные графически на рис. 10-15 в сравнении с экспериментальными данными переноса тепла для малых шаров. Постоянная 2,59 в решении (10-45) была исправлена эмпирически на величину 3,42, для того чтобы представить экспериментальные данные с большей точностью:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}^0}}{1 + 3{,}42\,(\mathrm{M}/\mathrm{RePr})\,\overline{\mathrm{Nu}^0}}. \qquad (10\text{-}45\mathrm{a})$$

Линии на рис. 10-14 и 10-15, изображающие перенос тепла в свободном молекулярном потоке, являются результатами вычисления на основе кинетической теории, сделанного Ф. М. Сауером [Л. 176]. Графические результаты показывают различие, если устремлять значение критерия Рейнольдса до нуля посредством скорости или посредством плотности. Случай нулевой скорости для теплообмена шаров становится в пределе случаем радиальной теплопроводности в неподвижном газе, в то время как случай нулевой плотности ведет к режиму свободного молекулярного потока и намного меньшим коэффициентам теплообмена.

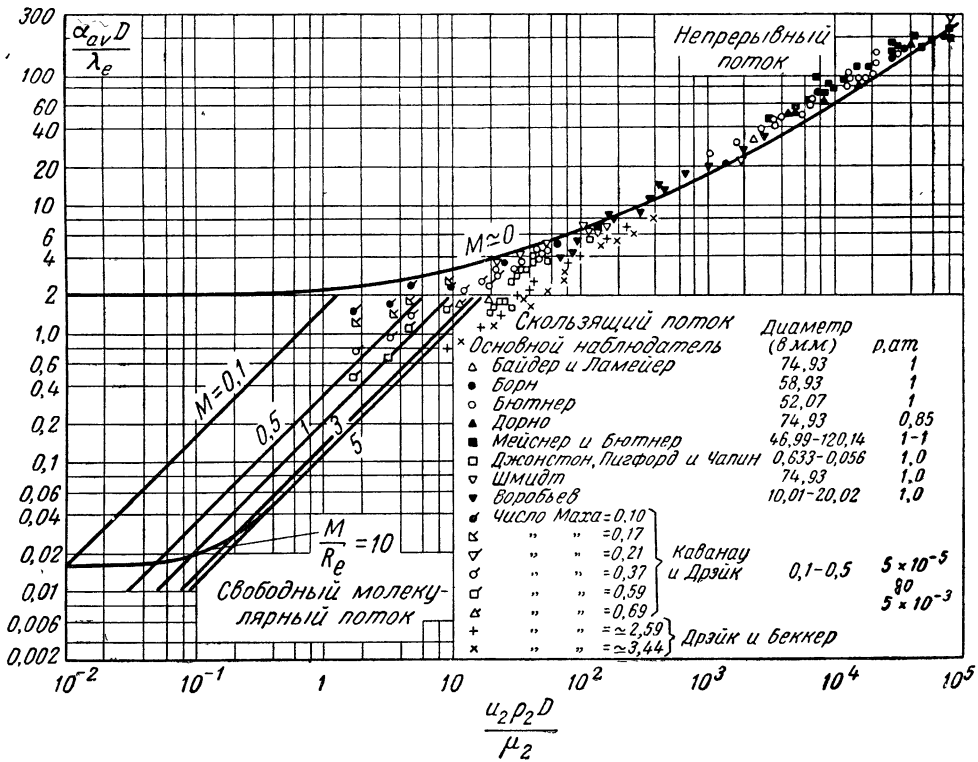


Рис. 10-14. Перенос тепла от шаров (числа Рейнольдса вычислены за предполагаемой ударной волной для $M > 1$); теплопроводность вычислена при равновесной температуре [Л. 366].

Интересная черта явлений теплообмена в разреженном газе показана на рис. 10-16, где коэффициент восстановления нанесен в зависимости от параметров разрежения. Видно, что коэффициенты восстановления увеличиваются при больших значениях критерия Кнудсена в скользящем потоке и приближаются к величине, большей единицы, как и предсказано для области свободного молекулярного потока.

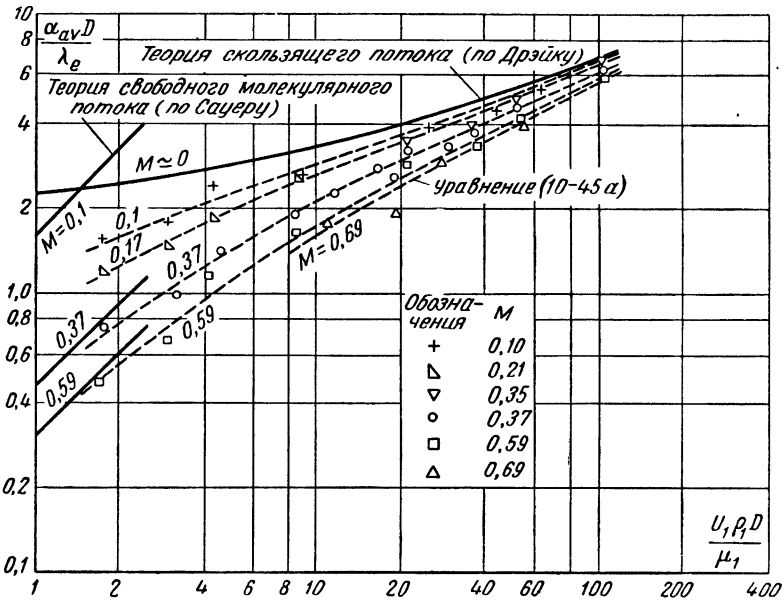


Рис. 10-15. Перенос тепла от шаров при дозвуковых числах Маха в разреженном газе (числа Рейнольдса вычислены при условии свободного потока; теплопроводность вычислена при равновесной температуре) [Л. 367].

На наличие этого явления указывает также распределение коэффициента теплового восстановления по пограничному слою в потоке с низкой плотностью в сверхзвуковых соплах (рис. 10-17). Это распределение энергии типично для потоков в высокоскоростном газе, где значение критерия Прандтля ниже единицы. То, что потоки низкой плотности имеют довольно толстые пограничные слои, делает это явление более доступным для наблюдения.

Теплообмен цилиндров в области скользящего потока дает эффекты, подобные описанным выше для шаров. Сау-

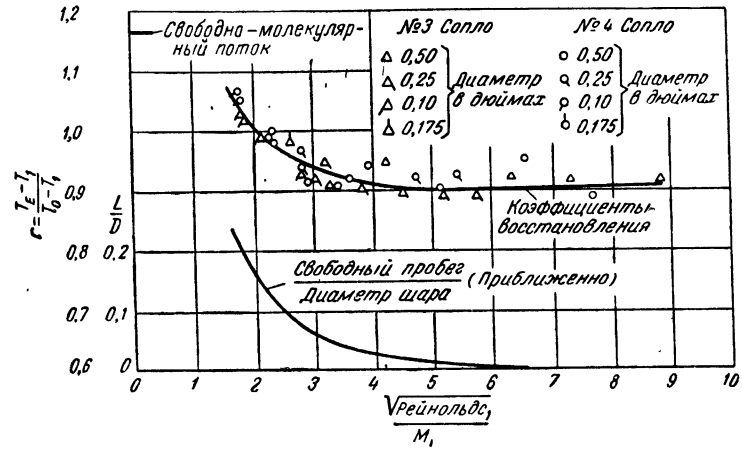


Рис. 10-16. Изменение коэффициента восстановления с параметром разрежения.

T_E — температура равновесия, достигнутая шаром с высокой теплопроводностью; T_0 — температура резервуара; T_1 — температура свободного потока [Л. 366].

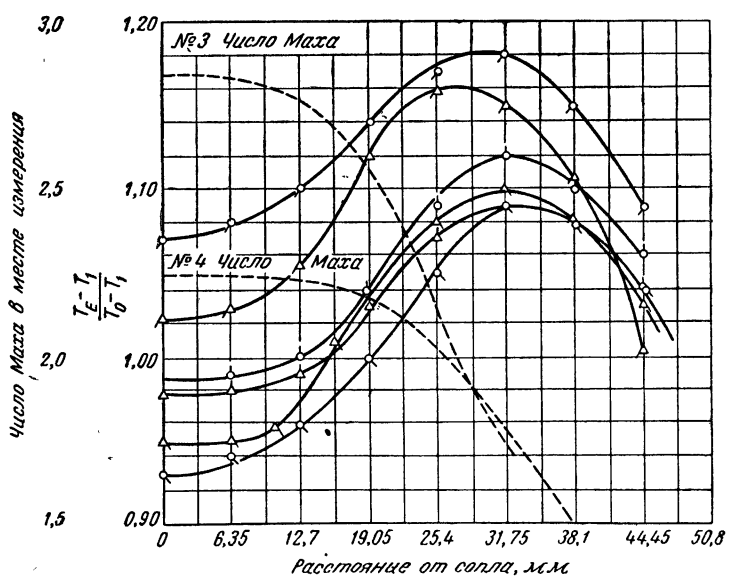


Рис. 10-17. Изменение теплового коэффициента восстановления в ламинарных пограничных слоях в сверхзвуковых соплах при очень низких давлениях.

T_E — температура равновесия, полученная сферическим зондом высокой теплопроводности; T_0 — температура резервуара; T_1 — температура свободного потока [Л. 366].

ер [Л. 177] распространил свой анализ и на цилиндры, а Стэлдер [Л. 178] и др. получили экспериментальные данные для такого же интервала переменных.

Свободный молекулярный поток. Перенос тепла от тела к потоку разреженного газа в состоянии Максвелловского равновесия может быть рассчитан полностью, исходя из фундаментальных понятий кинетической теории газов [Л. 179—180]. Результаты могут быть выражены как функция числа степеней свободы j молекулы или отношения теплоемкостей γ, которые непосредственно относятся к j, так что результаты всегда становятся общими, пока рассматривается молекулярная структура газа.

Более того, как было показано Оппенгеймом, определение соответствующих результатов для нескольких основных форм, таких, как плоские пластины, горизонтальные кольцевые цилиндры и шары, дает возможность получить результаты для более сложных случаев путем синтеза результатов для этих простых форм.

Конвективный теплообмен тела в свободном молекулярном потоке установлен на основе баланса энергии:

$$q = e_r - e_i, \tag{10-49}$$

где $e_r = dE_R/dA$ — интенсивность молекулярного переноса энергии на единицу площади поверхности испускаемыми молекулами;

$e_i = dE_i/dA$ — интенсивность переноса энергии на единицу площади поверхности падающими молекулами;

$q = dQ/dA$ — интенсивность теплообмена на единицу площади поверхности к потоку газа.

Энергия вновь испускаемых молекул зависит от коэффициента аккомодации a (см. уравнение (10-34)]. Из соотношений (10-34) и (10-49) имеем:

$$\frac{q}{a} = e_w - e_i. \tag{10-50}$$

Величины e_w и e_i включают в себя поступательную энергию и часть внутренней энергии, связанную со степенями свободы. Из принципа равного распределения энергии внутрен-

няя энергия молекулы газа с j степенями свободы в равновесном состоянии при температуре T равна:

$$u = \frac{j}{2}\,\mathrm{k}T,$$

где k — постоянная Больцмана $\left(\mathrm{k} = 1{,}36 \cdot 10^{-16}\,\frac{эрг}{град \cdot моль}\right)$.

Энергия поступательного движения молекулы, приходящей от стенки, при температуре T_w, равна:

$$e_{tw} = 2n\mathrm{k}T_w.$$

Внутренняя энергия поступательного движения молекул распределяется среди трех степеней свободы; поэтому

$$e_w = e_{tw} + \frac{j-3}{2}\,n\mathrm{k}T_w = \frac{j+1}{2}\,n\mathrm{k}T_w, \qquad (10\text{-}51)$$

где n, как и ранее, есть число молекул, соударяющихся с единицей площади стенки за единицу времени.

Перенос энергии, обусловленный падающими молекулами, будет тогда равен:

$$e_i = e_t + \frac{j-3}{2}\,n\mathrm{k}T_0, \qquad (10\text{-}52)$$

где e_t есть энергия поступательного движения свободного потока, соударяющегося с единицей площади поверхности стенки за единицу времени, и T_0 есть температура свободного потока. Подставив соотношения (10-51) и (10-52) в формулу (10-50), получим:

$$\frac{q}{a} = \frac{j+1}{2}\,n\mathrm{k}T_w - \left(e_t + \frac{j-3}{2}\,n\mathrm{k}T_0\right). \qquad (10\text{-}53)$$

Так как

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{d(u+\mathrm{k}T)/dt}{du/dt} = 1 + \frac{2}{j},$$

то можно написать уравнение (10-53) в функции γ:

$$\frac{q}{a} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\,n\mathrm{k}T_w - \left[e_t + \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}\,n\mathrm{k}T_0\right], \qquad (10\text{-}54)$$

где $\gamma = {}^5/_3$ соответствует одноатомному газу и $\gamma = {}^7/_5$—двухатомному газу.

Для того чтобы вычислить скорость переноса тепла от тела, должны быть получены выражения для числа n молекул, соударяющихся с единицей площади поверхности в единицу времени, и для энергии e_t поступательного движения. Эти величины, данные Оппенгеймом, следующие:

$$n = \frac{N\bar{v}}{2\sqrt{\pi}}[e^{-\eta^2} + \sqrt{\pi}\,\eta(1 + \operatorname{erf}\eta)]; \tag{10-55}$$

$$e_t = [(s^2 + {}^5/_2)\,n - \Phi]\,\mathrm{k}T_0, \tag{10-56}$$

где N — число молекул в единице объема;

$\bar{v}$ — средняя молекулярная скорость;

$\eta = U_\eta/\bar{v}$, где U_η — составляющая скорости потока массы U перпендикулярная стенке;

$s = U/\bar{v} = \sqrt{\gamma/2}\,\mathrm{M}$ — отношение молекулярной скорости к числу Маха;

$$\Phi = (N\bar{v}/4\sqrt{\pi})\,e^{-\eta^2}$$

Подстановка данных выше величин в формулу (10-54) дает следующее безразмерное выражение для теплового потока:

$$\frac{q}{an\mathrm{k}T_0U} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\cdot\frac{n}{N\bar{v}s}\frac{T_w}{T_0} - \left(s^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{n}{N\bar{v}s} + \frac{\Phi}{N\bar{v}s}. \tag{10-57}$$

Для того чтобы рассчитать теплообмен тела в свободном молекулярном потоке, определены следующие интегралы по поверхности:

$$\bar{G} = \frac{1}{A}\int_A \frac{e^{-\eta^2}}{2\sqrt{\pi}\,s}\,dA;$$

$$\bar{F} = \frac{1}{A}\int_A \frac{\eta(1 + \operatorname{erf}\eta)}{2s}\,dA,$$

где A есть площадь поверхности исследуемого тела.

Уравнение (10-57), проинтегрированное по площади A, может быть записано на основе этих интегралов:

$$\frac{\bar{Q}}{aN\mathrm{k}T_0U} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(\bar{G}+\bar{F})\frac{T_w}{T_0} - \left(s^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)(\bar{G}+\bar{F}) + \frac{1}{2}\bar{G}. \tag{10-58}$$

Теплообмен в свободном молекулярном потоке можно выразить через критерий Стантона и коэффициент теплового восстановления. При $\bar{Q}=0$ уравнение (10-58) дает выражение для температуры восстановления стенки для случая, когда $T_w=\text{const}$. Это требует, чтобы тепловое сопротивление, обусловленное теплопроводностью внутри тела, было малым по сравнению с сопротивлением, обусловленным конвекцией газа на поверхности. В таком случае

$$\frac{T_r}{T_0}=2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}+s^2-\frac{1}{2}\frac{\bar{G}}{\bar{G}+\bar{F}}\right). \qquad (10\text{-}59)$$

Теперь мы можем записать тепловой поток как функцию температуры восстановления стенки:

$$\bar{Q}=a\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(\bar{G}+\bar{F})(T_w-T_r)NkU,$$

откуда определяется критерий Стантона, причем $Nk/\rho=R$ — газовая постоянная:

$$\mathrm{St}=\frac{\alpha}{\rho c_p U}=\frac{\bar{Q}}{(T_w-T_r)\rho c_p U}=\frac{\gamma+1}{2\gamma}a(\bar{G}+\bar{F}). \qquad (10\text{-}60)$$

Используя уравнение (10-27), т. е. выражение Ойкена для критерия Прандтля, получим:

$$\mathrm{St}=\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re\,Pr}}=\frac{9\gamma-5}{4\gamma}\cdot\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}}.$$

Коэффициент теплового восстановления можеть быть выражен на основе уравнения (10-59):

$$r=\frac{T_r-T_0}{T_s-T_0}=\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(2+\frac{1}{s^2}\frac{\bar{F}}{\bar{G}+\bar{F}}\right), \qquad (10\text{-}61)$$

где T_s есть температура застойного потока. Отношение температуры застойного потока к температуре свободного потока можно представить в функции отношения молекулярной скорости s:

$$\frac{T_s}{T_0}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2=1+\frac{\gamma-1}{\gamma}s^2. \qquad (10\text{-}62)$$

Результаты, полученные на основе уравнения (10-59)—(10-61), показаны в виде графиков на рис. 10-18—10-20.

В дополнение к кривым, показанным на рисунках, можно легко получить другие кривые. Например, плоская пла-

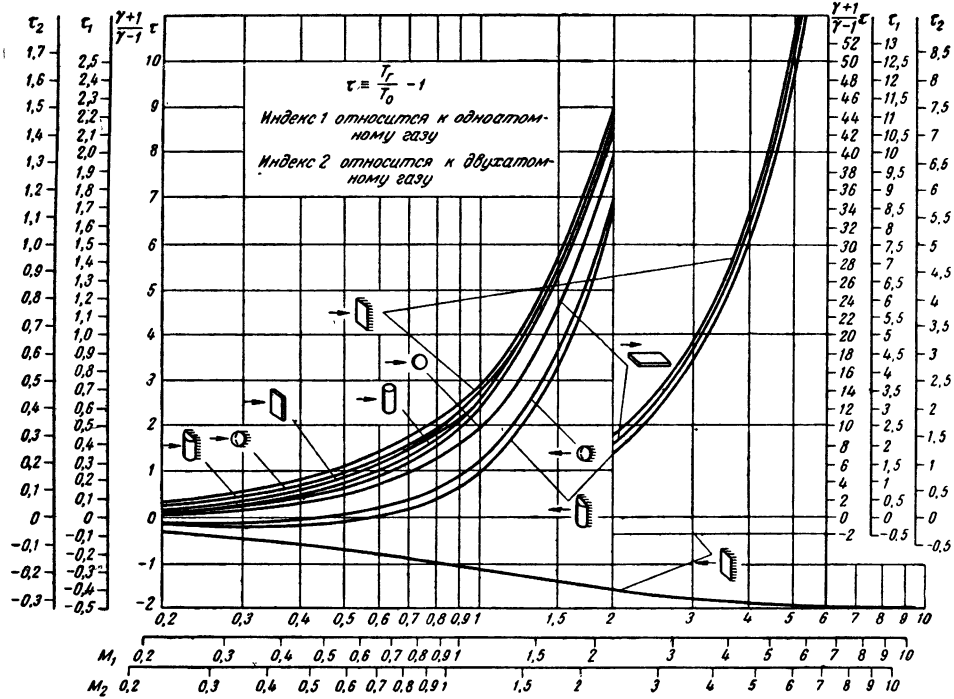


Рис. 10-18. Отношения температуры восстановления стенки к температуре свободного потока для плоской пластины, шара и поперечного цилиндра в свободном молекулярном потоке [Л. 368].

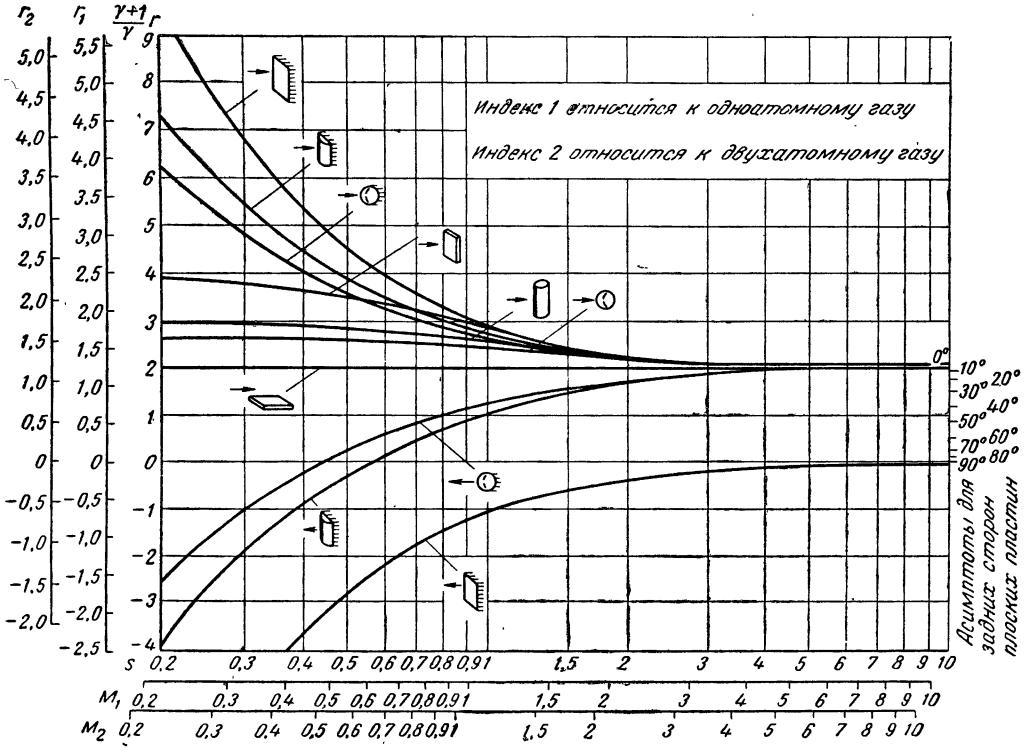


Рис. 10-19. Коэффициенты теплового восстановления для плоской пластины, шара и поперечного кольцевого цилиндра в свободном молекулярном потоке [Л. 368].

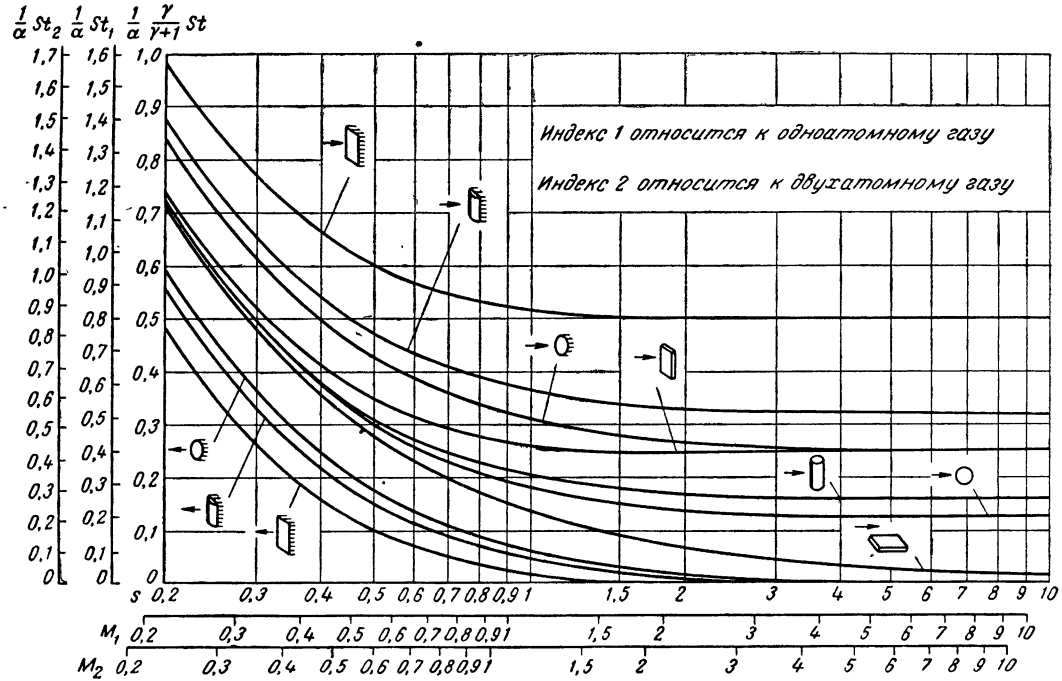


Рис. 10-20. Перенос тепла от плоской пластины, шара и поперечного кольцевого цилиндра в свободном молекулярном потоке [Л. 368].

стина, расположенная под углом θ к направлению потока, может быть рассмотрена на примере плоской пластины, перпендикулярной потоку:

$$\overline{G}_{\theta}(s)=\frac{e^{-\eta^2}}{2\sqrt{\pi s}}=\frac{\eta}{s}\frac{e^{-\eta^2}}{2\sqrt{\pi\eta}}=\overline{G}_{n}(\eta)\sin\theta$$

и

$$\overline{F}_{\theta}(s)=\overline{F}_{n}(\eta)\sin\theta,$$

где $\eta=s\sin\theta$. Символ θ относится к плоской пластине, расположенной под углом к потоку, а символ n — к плоской пластине, перпендикулярной потоку. Таким образом,

$$\mathrm{St}_{\theta}(s)=\mathrm{St}_{n}(\eta)\sin\theta;$$

$$r_{\theta}(s)=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\cos^2\theta+r_{n}(\eta)\sin^2\theta.$$

Следует заметить также, что результаты, справедливые для плоской пластины, применимы к любой поверхности, образующей постоянный угол с потоком. Поэтому эти результаты применимы к клину и конусам, когда угол наклона пластины соответствует половине раствора угла клина или конуса. Плоская пластина с нулевым углом атаки аналогична в этом смысле цилиндру с любой формой поперечного сечения в аксиальном потоке.

10-4. ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ЖИДКИХ МЕТАЛЛАХ

В настоящем разделе рассматривается перенос тепла в жидких металлах, поскольку для этого типа переноса тепла имеются некоторые особенности. Величины теплопроводности для жидких металлов значительно больше, чем для каких-либо других жидкостей, и, естественно, числа Прандтля очень малы: 0,005—0,03. Так как теплопроводность высока, то она является доминирующим фактором в совместном процессе теплопроводности и конвекции.

В случае ламинарных потоков в трубах решения, полученные в § 7-7, применимы для жидкого металла, так же как и для других жидкостей, до тех пор, пока вывод этих уравнений не ограничивает число Прандтля. Числа Нуссельта для изложенных условий потока согласно этим зависимостям постоянны. Причем величины этих постоянных различны для постоянной температуры стенки и для постоянного потока тепла. Однако длина начального участка для потоков жидкого металла весьма мала из-за неболь-

шого числа Прандтля. Это означает, что перераспределение температурного поля занимает небольшую область и, следовательно, осевые градиенты температуры в направлении потока в некоторых случаях будут того же порядка величин, что и радиальные градиенты температур. Это особенно относится к низким числам Рейнольдса, и для таких величин решения в § 7-7 должны быть исправлены, так как при их выводе не учитывался продольный перенос тепла.

Поток с пограничным слоем исследовался в § 7-3. Произведенные там расчеты были сделаны в предположении, что пограничный слой потока толще, чем тепловой пограничный слой, и было найдено, что это условие выполняется для жидкостей с числами Прандтля, бо́льшими 1.

Было найдено, что в этой области отношение толщины пограничного слоя потока к толщине теплового пограничного слоя пропорционально кубическому корню из числа Прандтля. Экстраполяция этого результата количественным путем на низкие числа Прандтля приводит к выводу, что для жидких металлов тепловой пограничный слой будет гораздо толще, чем пограничный слой потока. Вычисление, представленное в § 7-3, может быть выполнено и для данного случая. Однако очень просто получить приближенное решение самого уравнения энергии пограничного слоя на основе следующего соображения, сделанного Р. Дж. Грошем. Большая часть температурного поля в пограничном слое жидкого металла будет в области, где скорость равна скорости потока. Это обусловлено предположением о том, что тепловой пограничный слой значительно толще, чем гидродинамический пограничный слой.

Соответственно следует ожидать, что температурное поле в пограничном слое может быть вычислено с хорошим приближением, если скорость в слое вплоть до поверхности пластины считать равной скорости потока.

Таким способом уравнение энергии пограничного слоя, данное в § 7-6, упрощается и принимает следующий вид:

$$u_s \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Функция тока дается соотношением $\psi = u_s y$ и безразмерная функция тока $f = 2\eta$. При этом выражение для температурного поля упрощается:

$$\frac{t - t_w}{t_s - t_w} = \theta' = 2 \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\mathrm{Pr}\,\eta^2} d\eta.$$

Температурный градиент на поверхности пластины

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{d\theta'}{d\eta}\right)_w \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{u_s}}{\nu x}}(t_s - t_w) =$$

$$= \sqrt{\frac{\overline{\mathrm{Pr}}}{\pi}}\sqrt{\frac{\overline{u_s}}{\nu x}}(t_s - t_w).$$

Коэффициент теплообмена

$$\alpha = \frac{-\lambda}{t_w - t_s}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w = \lambda\sqrt{\frac{\overline{\mathrm{Pr}}}{\pi}}\sqrt{\frac{\overline{u_s}}{\nu x}}$$

и локальное число Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}} = 0{,}565\sqrt{\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}}. \qquad (10\text{-}63)$$

Р. Дж. Грош и Р. Д. Цесс [Л. 181] выполнили численные решения уравнения, описывающего температурное поле в разделе 7-6, и получили величины, на 7—12% меньшие, чем подсчитанные из вышеприведенного уравнения для чисел Прандтля между 0,005 и 0,025. Ими было показано, что для величин $\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr} > 50$ пренебрежение продольным переносом тепла оправдывается, за исключением случая непосредственной близости к переднему краю пластины.

Перенос тепла у периферии цилиндра с осью, перпендикулярной направлению потока, может быть вычислен, если опять-таки пренебречь уменьшением скорости внутри пограничного слоя потока. Буссинеск [Л. 182] в ранее написанной работе показал, что уравнение энергии применительно к теплопередаче в плоском невязком поле потока может быть упрощено, когда оно преобразовано из геометрических координат x, y в независимые координаты-потенциал тока φ и функцию тока ψ. Оно становится:

$$u_s\frac{\partial t}{\partial \varphi} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}\right).$$

Если, как ранее, продольным условием пренебречь, то член $\partial^2 t/\partial\varphi^2$ обращается в нуль и уравнение принимает такую же форму, как и для плоской пластины. Тогда число Нуссельта получаем путем перехода в решении обратно к геометрическим координатам x и y. Таким путем Грош

и Цесс подсчитали, что среднее число Нуссельта для единичного кольцевого цилиндра равно:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_d = 1{,}015\,(\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr})^{1/2}. \qquad (10\text{-}64)$$

При этом предполагается, что перенос тепла, связанный с вихревым движением в кормовой части цилиндра, пренебрежимо мал по сравнению с теплом, переданным теплопроводностью. Сравнение с измерениями показывает, что это предположение оправдывается для значений параметра RePr, меньших 500.

Турбулентный поток жидких металлов в трубе может быть рассчитан простым способом, когда перенос тепла турбулентной смесью можно считать малым по сравнению с переносом теплопроводностью. Профиль турбулентной скорости может быть с достаточной точностью аппроксимирован постоянной скоростью.

Расчеты, рассмотренные в § 7-7, могут быть легко изменены для этого упрощенного профиля. При этом обнаруживается, что число Нуссельта для постоянного потока тепла равно:

$$\mathrm{Nu}_d = 8,$$

а для постоянной температуры стенки

$$\mathrm{Nu}_d = 5{,}8. \qquad (10\text{-}65)$$

В действительности уравнение, описывающее перенос тепла для такого потока, идентично с уравнением для нестационарного переноса тепла в твердом теле. Поэтому можно легко определить перенос тепла на входе в трубу из решения для нестационарного переноса тепла в стержне с кольцевым поперечным сечением [Л. 183].

Теплообмен между жидким металлом и твердой поверхностью через турбулентный пограничный слой может быть рассмотрен точно таким же путем, как и для ламинарного пограничного слоя, когда влияние турбулентности на теплообмен пренебрежимо мало. Это означает, что зависимости, выведенные для ламинарного потока, должны быть справедливы также для турбулентного потока.

Измерения на жидких металлах показали, что для турбулентного потока через кольцевые трубы теплообмен, вызванный турбулентным смешением, становится заметным и его следует учитывать, когда параметр $\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr}$ превы-

шает приблизительно величину 50. Часто используется следующей формулой:

$$Nu_d = 7 + 0{,}025\,(Re_d Pr)^{0,8}, \qquad (10\text{-}66)$$

полученное Лайонсом на основе расчетов Мартинелли.

Формула описывает теплообмен для термически развитых условий турбулентного потока через трубу и постоянного потока тепла на стенку Результаты экспериментов для того же условия дают значительный разброс и в среднем на 50% ниже, чем данные, полученные из вышеприведенного соотношения. Сравнение с измерениями на пучках труб показывают, что расчеты, которые учитывают только теплопередачу, согласуются с экспериментальными величинами в пределах 16% для $Re_d Pr$, меньших 500.

Для ламинарного потока через круглые трубы в ряде экспериментальных исследований были получены коэффициенты теплообмена, меньшие, чем вычисленные из уравнений, указанных в § 7-7 для условий развитого потока. Этот факт не находит удовлетворительного объяснения. Было предположено, что причиной малых значений коэффициентов теплообмена является несмачивание стенок трубы жидким металлом и что это несмачивание может быть связано с уносом газов потоком жидкого металла [Л. 184].

10-5. ТРАНСПИРАЦИЯ (ПРОСАЧИВАНИЕ ЧЕРЕЗ ПОРЫ)[1] И ПЛЕНОЧНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ

Для защиты отдельных элементов конструкций турбореактивных и реактивных двигателей, таких, как стенки камер сгорания, выхлопные сопла и лопатки газовых турбин, были разработаны специальные методы охлаждения. Сущность этих методов излагается в этом разделе.

На рис. 10-21 показаны схемы этих методов охлаждения. Верхний левый рисунок показывает обычное охлаждение конвекцией. Верхнее правое устройство показывает процесс пленочного охлаждения, при котором струя охладителя продувается через ряд разрезов в направлении, касательном к поверхности. В этом случае образуется слой, который изолирует стенку от горячих газов. Охлаждающая пленка постепенно разрушается путем смешения с горячими газами, так что ее эффективность уменьшается по направлению потока. Этого недостатка можно избежать при

[1] В литературе иногда охлаждение транспирацией называют пористым охлаждением. (*Прим. ред.*)

помощи процесса, называемого транспирацией (просачиванием через поры), «охлаждение испарением», схема которого приведена на рисунке внизу слева. В этом случае стенка сделана из пористого материала и охладитель продувается сквозь поры. Охладительная пленка со стороны горячего газа, следовательно, непрерывно возобновляется и эффективность охлаждения может быть сделана одинаковой вдоль всей поверхности. До сих пор принималось, что и охладитель и горячая среда являются или газами, или жидкостями. Если горячей средой является газ, эффектив-

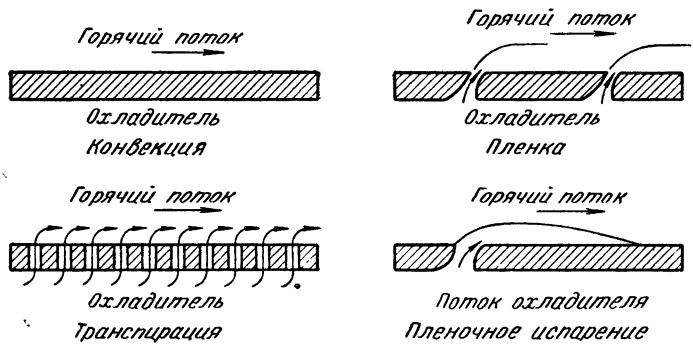


Рис. 10-21. Схемы процессов конвекции, транспирации и пленочного охлаждения.

ность охлаждения может быть намного увеличена путем использования жидкого охладителя. Этот метод изображен в нижней правой стороне рисунка. В этом случае пленка жидкости создается со стороны горячего газа у стенки, жидкость испаряется на ее поверхности и тепло поглощается в процессе испарения, увеличивая тем самым эффективность этого метода охлаждения. Эти методы будем в дальнейшем называть охлаждением путем пленочного испарения или охлаждением транспирацией в зависимости от того, продувается ли охладитель через щели или через пористую стенку [1].

[1] Очень серьезной проблемой в создании спутников, ракет и межпланетных кораблей является чрезмерное нагревание поверхности этих аппаратов трением в высокоскоростном потоке воздуха. Самым эффективным методом в настоящее время является абляционный метод. Поверхность делается из такого материала, что он сублимируется, когда температура увеличивается аэродинамическим нагреванием. Таким образом, создается поток массы с поверхности, что уменьшает перенос тепла, как и в случае охлаждения транспирацией.

Рассмотрим охлаждение транспирацией. В этом методе создается противоток между охладителем, выходящим из стенки, и тепловым потоком, который движется от горячего газа к более холодной поверхности. Это уменьшает коэффициент теплообмена по сранению с условиями на твердой поверхности. Мы постараемся получить выражение, которое приблизительно описывает это снижение интенсивности теплообмена. Для этой цели реальный случай может быть удовлетворительно заменен сильно упрощенной моделью. В качестве последней используем поток Кётте, который имеет место между двумя параллельными стенками, одна из которых закреплена неподвижно, в то время как вторая движется с постоянной скоростью в своей плоскости. Точные решения уравнений ламинарного пограничного слоя с жидкостным продуванием через поверхность стенки будут даны позже в § 16-2.

Поток Кётте с охлаждением при помощи транспирации. На рис. 10-22 схематически изображен поток Кётте между закрепленной стенкой *1* и движущейся стенкой *2*.

Рассмотрим поток в системе координат с осями x и y, как показано на рисунке. Благодаря движению пластины *2* жидкость будет протекать в направлении оси x между двумя стенками. Хорошо известно, что скорость потока u в направлении оси x увеличивается по линейному закону от нулевой величины на стенке *1* до величины u_b, с которой стенка *2* движется, когда рассматриваемое сечение находится на достаточно далеком расстоянии от входа и когда давление постоянно в направлении оси x. Если газ дополнительно вдувается в поле потока через пористую стенку *1* со скоростью v и соответственно удаляется через стенку *2*, то поле скорости будет отличным. При постоянном давлении в направлениях x и y, постоянной скорости v вдоль стенок скорости u и v изменяются только в направлении оси y. Непрерывность требует дополнительно, чтобы скорость v также была постоянной в направлении оси y, поскольку свойства потока приняты постоянными. Баланс количества движения в направлении оси x для элементарного объема *1—2—3—4* должен учитывать следующие силы: усилия трения в плоскости *1—2* и в плоскости *3—4*. Кроме того, в направлении x через эти плоскости переносится количество движения. Одинаковые силы давления существуют лишь в плоскостях *1—4* и *2—3*, и энергия, входящая через плоскость *1—4*, равна энергии, покидающей

элемент через плоскость *2—3*. Это дает следующее уравнение:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} - \rho v \frac{du}{dy} = 0.$$

Граничные условия следующие:

при $y = 0 \quad u = 0$;

при $y = b \quad u = u_b$.

Простое интегрирование дает следующее выражение для составляющей скорости u:

$$\frac{u}{u_b} = \frac{e^{vy/\nu} - 1}{e^{vb/\nu} - 1}.$$

Путем введения числа Рейнольдса Re_{eb}, в которое входят скорость вдувания и длина b ($\mathrm{Re}_{eb} = bv/\nu$), это уравнение может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{u}{u_b} = \frac{e^{(y/b)\,\mathrm{Re}_{eb}} - 1}{e^{\mathrm{Re}_{eb}} - 1}.$$

Формы профилей скорости, описываемой этим уравнением для некоторых значений чисел Рейнольдса для вдувания, показаны на рис. 10-22.

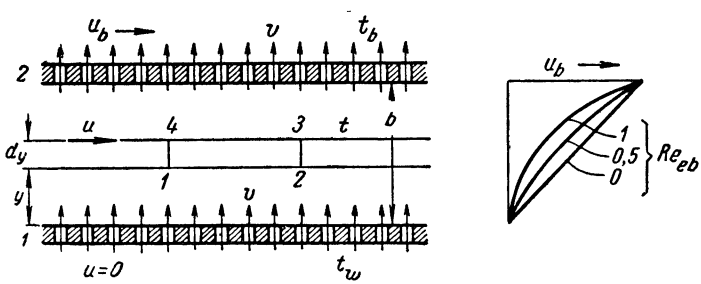


Рис. 10-22. Поток Кетте с выдуванием и всасыванием через пористые стенки.
t_b —принято бо́льшим, чем t_w.

Допустим, что стенки находятся при двух разных температурах t_w и t_b, как показано на рисунке. Подсчитаем тепловой поток от поверхности *2* через текущий газ к поверхности *1*. Температура в поле потока будет функцией только y, если температуры обеих поверхностей постоянны

и если поток находится на достаточном расстоянии от входа. Тепловой баланс элемента объема *1—2—3—4* должен учитывать тепловые потоки путем теплопроводности и конвекции через пластины *1—2* и *3—4*. Через поверхности плоскостей *1—4* и *2—3* тепловой поток, обусловленный теплопроводностью, будет отсутствовать, а через поверхности плоскостей *1—4* и *2—3* и входящий и уходящий конвективные потоки будут равны. Внутри элемента объема также может выделяться тепло. Тепло, выделенное в единице объема за единицу времени, обозначим через Ф. Это тепло может возникнуть, например, за счет внутреннего трения:

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2.$$

Тепловой баланс выражается следующим уравнением:

$$\lambda \frac{d^2t}{dy^2} - \rho v c \frac{dt}{dy} + \Phi = 0.$$

Внутреннее тепловыделение может быть исключено из нашего рассмотрения путем определения коэффициента теплообмена, вводя температуру восстановления таким же путем, как это показано в §10-1. Дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле в потоке без тепловыделения (для низких скоростей):

$$\lambda \frac{d^2t}{dy^2} - \rho v c \frac{dt}{dy} = 0$$

с граничными условиями при $y = 0$ $t = t_w$; при $y = b$ $t = t_в$ полностью аналогично вышеприведенному уравнению, описывающему поле потока. Его решение следующее:

$$\frac{t - t_w}{t_b - t_w} = \frac{e^{\rho v c y/\lambda} - 1}{e^{\rho v c b/\lambda} - 1} = \frac{e^{(y/b)\,\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}} - 1}{e^{\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}} - 1}.$$

Тепловой поток, подведенный к неподвижной стенке, определяется дифференцированием уравнения

$$q_w = -\lambda \left(\frac{dt}{dy}\right)_{y=0} = \frac{-\lambda (t_b - t_w)\,\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}}{b\,(e^{\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}} - 1)}.$$

Если теперь определить коэффициент теплообмена α из соотношения

$$q_w = \alpha (t_w - t_b)$$

и сравнить его с коэффициентом теплообмена α_0 в потоке Кётте без вдувания ($v = 0$):

$$q_w = \frac{\lambda}{b}(t_w - t_b) = \alpha_0 (t_w - t_b),$$

то получится:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}}{e^{\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}} - 1}. \qquad (10\text{-}67)$$

Последнее уравнение дает уменьшение коэффициента теплообмена, связанное с процессом вдувания. Выделение тепла за счет внутреннего трения, важное при высоких скоростях потока, может учитываться путем замены температуры стенки t_b температурой восстановления, связанной с этими особенностями потока.

Х. С. Миклей [Л. 185] и сотрудники показали, что вышеприведенное уравнение представляет точно уменьшение переноса тепла в ламинарном пограничном слое на плоской пластине с вдуванием, когда поток имеет число Прандтля, равное 1, при условии, что произведение $\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr}$ дается в следующем виде:

$$\mathrm{Re}_{eb}\mathrm{Pr} = \frac{\rho v c b}{\lambda} = \frac{\rho v c}{\alpha_0} = \frac{v}{u_s}\frac{1}{\mathrm{St}_0}, \qquad (10\text{-}68)$$

где v — скорость вдувания на поверхности пластины;

u_s — скорость потока;

St_0 — число Стантона на твердой плоской пластине.

Миклей также показал, что для газа с числом Прандтля, бо́льшим, чем 1, действительное уменьшение переноса тепла больше, чем даваемое уравнением для потока Кётте, так что это уравнение дает скромную оценку для потока ламинарного пограничного слоя.

В. Д. Ранье [Л. 186] использовал модель потока Кётте для описания в ламинарном подслое турбулентного пограничного слоя. Это означает, что в приведенном выше вычислении расстояние между поверхностями заменено толщиной ламинарного подслоя, скорость u_b движущейся пластины заменена скоростью на границе между подслоем и турбулентным пограничным слоем и температура t_b —

температурой на границе. Ранее также принял, что процесс турбулентного смешения в пограничном слое и толщины пограничного слоя и подслоя не изменяются вдуванием. Окончательное соотношение становится несколько сложным и здесь приведено не будет. Миклей показал, что более простое соотношение для уравнения потока Кётте очень хорошо согласуется с его экспериментами для турбулентного потока пограничного слоя воздуха на плоской

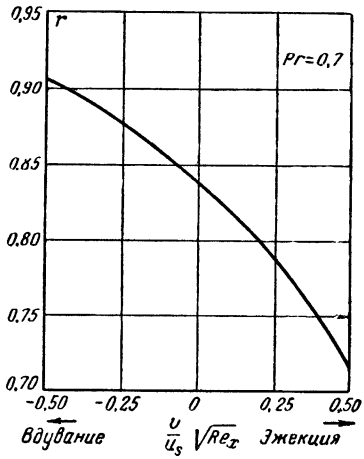


Рис. 10-23. Коэффициент восстановления температуры для ламинарного потока пограничного слоя на плоской пластине с выдуванием и и всасыванием.

Re_x — основывается на скорости потока и расстоянии x от ведущего края (согласно Э. Эккерту и И. Левингуду).

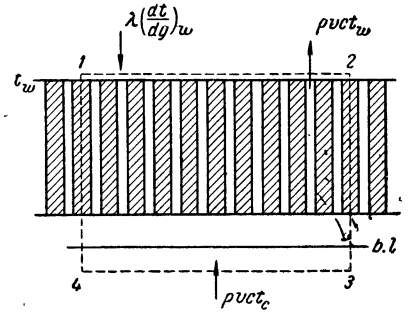


Рис. 10-24. Баланс энергии для охлаждения транспирацией.

пластине с воздушным вдуванием.

Соотношение для коэффициента восстановления температуры в потоке Кётте не может быть применено для описания условий в пограничном слое. Рис. 10-23 дает результаты вычислений для ламинарного пограничного слоя [Л. 187]. Это было подсчитано для воздуха в основном потоке, а также для охладителя. Измерение коэффициента восстановления с изменением скорости вдувания меньше в турбулентном пограничом слое.

Температура, которую принимает неподвижная стенка со стороны потока газа, может быть получена при помощи теплового баланса на контрольном объеме, как показано на рис. 10-24. Примем следующее: стационарное состояние, отсутствие внутреннего тепловыделения и отсутствие переноса тепла к поверхности стенок путем излучения. Поверхность *1—2* объема находится снаружи поверхности стенки.

Поверхность *3—4* смещена с поверхности стенки на стороне входа охладителя на такую величину, что она находится снаружи пограничного слоя, который лежит с этой стороны стенки. Предположим, что тепло не поступает через поверхности *1—4* и *2—3*. Тепло переносится теплопроводностью и конвекцией через плоскость *1—2* и конвекцией через плоскость *3—4*. Тепловые потоки на единицу площади показаны на рисунке.

Принято, что охлаждающий воздух покидает пористую стенку с температурой, равной температуре поверхности стенки t_w.

Такое положение будет соответствовать действительному, когда поры достаточно малы.

Тепловой баланс на контрольном объеме дает следующее уравнение:

$$\alpha(t_s - t_w) = \rho v c (t_w - t_c). \qquad (10\text{-}69)$$

Поток, обусловленный теплопроводностью $\lambda(dt/dy)_w$, был заменен на $\alpha(t_s - t_w)$. Из этого уравнения температура поверхности стенки t_w может быть вычислена, если известны температура входящего охладителя t_c, температура t_s в потоке снаружи пограничного слоя и коэффициент теплообмена α. Температура охладителя на пути через пористую стенку и температура в самом пористом материале могут быть определены путем расчета, аналогичного проделанному ранее для потока Кётте. Такой расчет был опубликован Л. Грином [Л. 188], который учел также тепловые источники, чтобы соблюсти условия, которые могут возникнуть в ядерных реакторах. Были также опубликованы вычисления, описывающие поток и процесс переноса тепла в трубах с пористыми стенками. Результаты были обобщены Эккертом и Доноге [Л. 189].

Теперь постараемся получить аналитические выражения, которые описывают перенос тепла при пленочном охлаждении. Для этой цели необходимо выделить основные физические процессы, влияющие на этот способ охлаждения. Развитие теплового пограничного слоя определяется тем, что холодная жидкость добавляется в месте зазоров. Кроме того, тепло может добавляться или удаляться с пограничного слоя вдоль всей поверхности стенки. Эти эффекты имеют место также на модели, которая имеет сосредоточенные стоки тепла по линии в местах расположения щелей и, кроме того, распределенные источники тепла или стоки вдоль поверхности стенки.

Тепловые эффекты в пограничном слое должны быть хорошо описаны этой моделью, если не рассматривается непосредственное окружение щелей. С другой стороны, это отрицает тот факт, что в данном устройстве на гидродинамический пограничный слой будет также влиять продувание жидкости через щели. Было показано, однако, в предыдущих разделах, что локальные изменения в поле потока оказывают только вторичный эффект на процесс переноса тепла. Математически выбор нашей модели означает, что уравнение для скоростного пограничного слоя при постоянных свойствах является таким же, как и на твердой стенке, и что распределение стоков и источников тепла задано дополнительно к уравнению энергии пограничного слоя. Последнее уравнение является линейным для случая постоянных свойств газа. Это означает, что решение уравнения энергии может быть получено путем наложения двух решений, одно из которых учитывает сосредоточенные стоки тепла только как пограничное условие, в то время как другое решение получено для распределенных источников или стоков. Это последнее решение будет идентично с теми, которые были получены прежде на твердых поверхностях для соответствующего распределения теплового потока. Поэтому перенос тепла будет описан коэффициентами теплообмена α_0 на твердой поверхности, а тепловой поток от стенки найдем из следующего соотношения:

$$q_w = \alpha_0 (t_w - t_r), \tag{10-70}$$

где температура восстановления на стенке t_r является той температурой, которую принимает поверхность стенки, когда она охлаждена стоками тепла. Эта температура t_r получается из решения уравнения энергии, которое рассматривает сосредоточенные источники тепла как граничные условия.

Описанный выше метод был предложен автором [Л. 190] на симпозиуме, проходившем в Мичиганском университете в 1952 г., а анализ был выполнен М. Трибусом и Г. Клайном [Л. 191]. Они получили следующее соотношение для плоской пластины с турбулентным пограничным слоем и с линейным тепловым падением на ее переднем крае, приняв, что свойства одинаковы для основного потока и для охладителя:

$$\frac{t_r - t_s}{t_c - t_s} = 5{,}77\,(\mathrm{Pr})^{2/3}(\mathrm{Re}_s)^{0,2}\left(\frac{u_s x}{u_c s}\right)^{-0,8}. \tag{10-71}$$

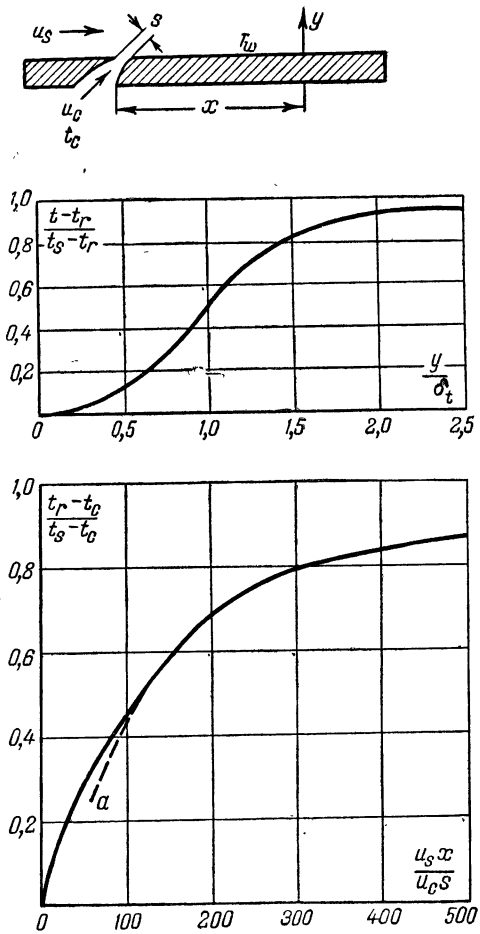


Рис. 10-25. Профиль температуры в пограничном слое и температура стенки для пленочного охлаждения.

δ_t — расстояние, где отношение температур принимает величину 0,5 (согласно К. Вигхардту).

Обозначения, принятые в этом уравнении, ясны из рис. 10-25.

Re_s — число Рейнольдса, базирующееся на скорости u_c на выходе из щели и на ширине щели s. К. Вейгхардт [Л. 192] выполнил эксперименты на телах, геометрически подобных модели, использованной Трибусом, с воздухом в основном потоке и с воздухом в качестве охладителя. Температура адиабатной стенки и профили температур в пограничном слое показаны на рис. 10-25. Вейгхард выразил свои результаты следующим уравнением:

$$\frac{t_r - t_s}{t_c - t_s} = 21{,}8 \left(\frac{u_s x}{u_c s} \right)^{-0{,}8}, \qquad (10\text{-}72)$$

справедливым для $u_c/u_s \leqslant 1$; $Re_x = 10^6 \div 10^7$, $x/s > 100$; $Re_s = 3\,700 \div 12\,000$. Легко видеть, что это соотношение весьма подобно выведенному Трибусом. Введение значений чисел Рейнольдса для щели в уравнение (10-71) обусловливает наличие числовой постоянной, изменяющейся в интервале 24—30. Разность между этой величиной и величиной, полученной Вейгхардтом, может быть сразу же объяснена тем фактом, что Вейгхардт не поместил щели для охлаждающего воздуха на переднем крае пластины, так что пограничный слой уже достиг определенной толщины в месте щели. Это может учесть тот факт, что на пограничный слой скорости влияет продувание охладителя. Ряд экспериментальных исследований был проведен в разных лабораториях. Различные результаты показывают значительное расхождение, так что требуется дополнительная работа, чтобы выяснить процесс переноса тепла при пленочном охлаждении.

Эксперименты по испарительному пленочному охлаждению показывают, что температура поверхности стенки остается ниже температуры испарения во всех точках, которые покрыты жидкой пленкой. Распространение этой пленки может быть подсчитано в результате составления теплового баланса, когда известен перенос тепла от горячего газа к испаряющейся поверхности. Из того факта, что испарение создает поток массы от поверхности раздела в основной поток, можно заключить, что эти коэффициенты теплообмена должны быть ниже, чем для сравнимых условий на твердой поверхности. Однако эксперименты, проведенные в Национальном комитете по аэронавтике [Л. 193], дают значения коэффициентов теплообмена, зна-

чительно более высоких, чем для твердой стенки. Причиной этого факта могут быть неровность поверхности и увеличенная турбулентность.

ЗАДАЧИ

10-1. Рассчитайте распределение статической и полной температур в газе через канал, создаваемый двумя параллельными стенками. Примите, что поток постоянный, ламинарный и полностью развит, а стенки изолированы.

10-2. Произведите тот же расчет, что и в предыдущей задаче, но для потока через трубку с кольцевым поперечным сечением.

10-3. Рассчитайте и начертите графики статических и полных температур для ламинарного потока пограничного слоя на адиабатной плоской пластине для жидкостей с числом Прандтля 0,7 и 10.

10-4. Подсчитайте температуру, которую принимает поверхность ракеты, когда она находится в тепловом равновесии, получающей тепло конвекцией от атмосферы и теряющей тепло радиацией в космос. Ракета летит с числом Маха 6 на высоте 33 и 16,5 *км*. Поверхность ракеты можно принять плоской и произвести расчет для точки на расстоянии 30 *см* от переднего края. Принять, что для испускаемой радиации поверхность является черной.

10-5. Выведите уравнение для коэффициента теплообмена при испарительном охлаждении, используя подход Ранье, как описано на стр. 378. Используйте зависимости, приведенные в § 8-1, для описания условий в турбулентной части поля потока и модель потока Кётте для описания условий в ламинарном подслое. Получите уравнение для турбулентного потока в трубе и для турбулентного пограничного слоя.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ

Поток свободной или естественной конвекции возникает различными путями, например, когда нагретый объект помещен в газ, плотность которого изменяется с температурой. Тепло переносится от поверхности объекта к слоям окружающего его газа. Уменьшение плотности, которое в обычном газе связано с увеличением температуры, заставляет эти слои подниматься и таким образом создает поток свободной конвекции, переносящий тепло от объекта. Физически такой поток можно описать на основании учета тех объемных сил, которые его вызывают.

В характерном примере, описанном выше, эти объемные силы являются гравитационными силами. Потоки свободной конвекции под влиянием гравитационных сил были исследованы более подробно, поскольку они встречаются часто в природе и в инженерных применениях. Потоки

могут вызываться также и другими объемными силами. В ротационной системе, например, этими силами являются центробежные и Кориолисовы силы. Примером может служить поток охлаждающего воздуха через проходы во вращающихся лопастях газовых турбин. В пограничных слоях, окружающих ракеты, летящие с высокой сверхзвуковой скоростью, температуры могут быть такими высокими, что воздух ионизируется, в результате чего и атомы и молекулы станут электрически заряженными. В этом случае могут возникнуть электрические и магнитные объемные силы, которые также будут влиять на поток. Свободная конвекция под влиянием других сил, кроме гравитационных, изучена мало.

В качестве первой оценки для получения сведений о потоке под влиянием других сил могут быть использованы соотношения, описывающие гравитационную свободную конвекцию. Тогда гравитационное ускорение должно быть заменено в числе Грасгофа (безразмерная величина, определяющая поток свободной конвекции) ускорением, соответствующим вызывающей силе, например центробежным ускорением V^2/r. Полученный таким путем ответ можно рассматривать только как приближенный, так как поле для ускорений, соответствующих различным силам, часто отлично от поля гравитационного ускорения.

В этой части будет рассмотрена только гравитационная свободная конвекция на ряде типичных геометрий: вертикальная плоская пластина, горизонтальный кольцевой цилиндр с постоянной температурой поверхности и жидкость, заключенная между двумя стенками плоскостей или двумя концентрическими цилиндрами с различными температурами.

Наконец, коротко будет рассмотрен случай, когда конвекция вынужденного потока находится под влиянием объемных сил (смешанная свободная и вынужденная конвекция).

11-1. ЛАМИНАРНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ И ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ

При свободной конвекции в газе или жидкости, вызываемой лишь разностью температур, на поверхности твердых тел также образуется пограничный слой. Вследствие низких скоростей движения толщина пограничного слоя бывает больше той, с которой мы встречались в рассматривавшихся до сих пор примерах. Для расчета теплообме-

на при свободной конвекции можно опять применять уравнения количества движения и теплового потока в пограничном слое.

В настоящем разделе будет решена простейшая задача, относящаяся к вертикальной плите [1]. Если такую плиту разогреть, то температура газа или жидкости близ ее поверхности будет повышаться и газ или жидкость начнут двигаться вверх.

Благодаря этому на поверхности образуется пограничный слой, толщина которого начинается от нуля у нижнего края плиты и возрастает в направлении движения потока.

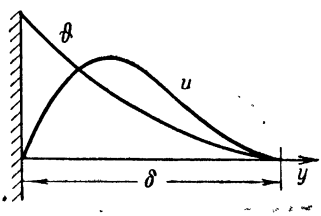


Рис. 11-1. Кривые распределения температур и скоростей при свободной конвекции вдоль вертикальной стенки.

Обозначим расстояние от нижнего края плиты через x и расстояние от поверхности плиты через y. В пределах пограничного слоя температура падает от значения, относящегося к поверхности плиты, до температуры газа или жидкости вне прогреваемой зоны.

Пусть температура плиты одинакова и постоянна для всей поверхности. Обозначим разность между этой величиной и температурой среды вне пограничного слоя через ϑ_w. Разность между температурой в любой точке пограничного слоя и температурой среды вне пограничного слоя обозначены через v. Температурное поле близ поверхности плиты должно иметь форму, изображенную на рис. 11-1. На этом графике δ — толщина пограничного слоя. Скорость движения среды u должна равняться нулю на поверхности плиты и за пределами пограничного слоя. Поэтому скоростное поле должно иметь форму, изображенную на рис. 11-1. Чтобы решить уравнение пограничного слоя, принимаем, что кривая распределения температур имеет форму параболы:

$$\vartheta = \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \qquad (11\text{-}1)$$

Это уравнение удовлетворяет граничным условиям

$$\vartheta = \vartheta_w \quad \text{для } y = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta = 0 \quad \text{для } y = \delta.$$

[1] Аналогичное вычисление для газов было сделано Сквайером в книге С. Гольдштайна «Современные достижения в динамике жидкостей» (Оксфорд, Нью-Йорк, 1938) [Л. 149].

Кривая распределения скорости на рис. 11-1 описывается уравнением

$$u = u_1 \frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{11-2}$$

с u_1, обозначающим произвольную функцию с размерностью скорости. Максимальная величина скорости и согласно этому уравнению на расстоянии $y = \delta/3$ от стенки. Ее величина $u_{\text{макс}} = \frac{4}{27} u_1$. Принимается, что гидродинамический и тепловой пограничные слои имеют одинаковую толщину. Справедливость этого допущения доказывается тем, что результаты расчетов, произведенных на основании такого допущения, хорошо согласуются с данными опытов [Л. 195]. Недавно был сделан анализ, в котором для поля скорости и температуры были приняты различные толщины пограничного слоя [Л. 196]. Результаты лишь незначительно отклоняются от представленных здесь.

В уравнение количества движения (6-8) необходимо ввести член, выражающий подъемную силу. Эта сила равна $g\rho\beta\vartheta$ на единицу объема. На элемент объема высотой dx и длиной l (больше толщины пограничного слоя, см. рис. 7-2) действует сила $dx g\rho\beta \int_0^l \vartheta dy$. Если включить этот член в уравнение (6-8), предполагая, что при небольших скоростях, характерных для свободной конвекции, давление можно считать постоянным и что скорость u за пределами пограничного слоя равна нулю, то получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l u^2 dy = g\beta \int_0^l \vartheta dy - \nu\left(\frac{du}{dy}\right)_w. \tag{11-3}$$

Уравнение теплового потока (7-2) остается неизменным:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l u\vartheta dy = -a\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_w. \tag{11-4}$$

Здесь температура заменена разностью температур ϑ. Интегралы уравнений (11-3) и (11-4) можно решить, исполь-

зовав уравнения температурного и скоростного полей (11-1) и (11-2):

$$\int_0^l u^2 dy = \frac{u_1^2 \delta}{105}, \quad \int_0^l \vartheta dy = \frac{\vartheta_w \delta}{3}, \quad \int_0^l \vartheta u dy = \frac{1}{30} u_1 \vartheta_w \delta.$$

Теперь уравнение пограничного слоя можно записать в форме:

$$\frac{1}{105} \cdot \frac{d}{dx}(u_1^2 \delta) = \frac{1}{3} g\beta\vartheta_w \delta - \nu \frac{u_1}{\delta};$$

$$\frac{1}{30} \vartheta_w \frac{d}{dx}(u_1 \delta) = 2a \frac{\vartheta_w}{\delta}.$$

Чтобы решить эти уравнения, попробуем выразить u_1 и δ как показательные функции x:

$$u_1 = C_1 x^m; \quad \delta = C_2 x^n.$$

Подстановка этих выражений дает:

$$\frac{2m+n}{105} C_1^2 C_2 x^{2m+n-1} = g\beta\vartheta_w \frac{C_2}{3} x^n - \frac{C_1}{C_2} \nu x^{m-n};$$

$$\frac{m+n}{30} C_1 C_2 x^{m+n-1} = \frac{2a}{C_2} x^{-n}.$$

Так как эти уравнения должны быть справедливыми для любых значений x, то показатели степеней должны иметь одинаковое значение в каждом члене:

$$2m + n - 1 = n = m - n;$$

$$m + n - 1 = -n.$$

Отсюда

$$m = 1/2 \quad \text{и} \quad n = 1/4.$$

Подставив эти значения в уравнения, получим:

$$\frac{C_1^2 C_2}{84} = g\beta\vartheta_w \frac{C_2}{3} - \frac{C_1}{C_2} \nu; \quad \frac{C_1 C_2}{40} = \frac{2a}{C_2},$$

или

$$C_1 = 5{,}17\nu \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{g\beta\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$C_2 = 3{,}93 \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{g\beta\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\nu}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь определяем максимальную скорость в пределах пограничного слоя:

$$u_{\text{макс}} = \frac{4}{27} u_1 = 0{,}766\nu \left(0{,}952 + \frac{\nu}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{g\beta\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \quad (11\text{-}5)$$

и толщину пограничного слоя:

$$\delta = 3{,}93\left(\frac{\nu}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(0{,}952 + \frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{g\beta\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}. \quad (11\text{-}6)$$

И в этом случае толщину пограничного слоя полезно разделить на расстояние x от нижнего края плиты, придав этой величине безразмерный характер.

Тогда в этом уравнении появляется критерий Грасгофа $\mathrm{Gr}_x = g\beta\vartheta_w x^3/\nu^2$, выраженный через разность температур плиты и газа или жидкости и расстояние x [см. уравнение (9-19)], и критерий Прандтля $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$:

$$\frac{\delta}{x} = 3{,}93\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}} (0{,}952 + \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}} (\mathrm{Gr}_x)^{-\frac{1}{4}}. \quad (11\text{-}7)$$

Тепловой поток от поверхности плиты определяется соотношением

$$q = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_w;$$

из уравнения (11-1) получаем:

$$q = \frac{2\lambda\vartheta_w}{\delta}.$$

С другой стороны, для нахождения теплового потока имеется формула, при помощи которой можно определить коэффициент теплообмена:

$$q = \alpha\vartheta_w.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta} \quad (11\text{-}8)$$

и в безразмерной форме

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = \mathrm{Nu}_x = 2\frac{x}{\delta}.$$

Подстановка значения толщины пограничного слоя дает:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}508\mathrm{Pr}^{\frac{1}{2}}\,(0{,}952+\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{4}}(\mathrm{Gr}_x)^{\frac{1}{4}}. \qquad (11\text{-}9)$$

Согласно формулам (11-6) и (11-8) локальное значение коэффициента теплообмена обратно пропорционально корню четвертой степени из x.

Произведя интегрирование в пределах 0—x, находим усредненное значение коэффициента теплообмена:

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3}\alpha.$$

Это означает, что среднее значение коэффициента теплообмена для вертикальной плиты высотой x равняется $^4/_3$ локального значения коэффициента в точке x. Для идеальных газов справедливо соотношение $\beta = 1/T$.

Для небольших разностей температур можно написать: $\beta = 1/T_0$, где T_0 — абсолютная температура газа за пределами пограничного слоя. Для воздуха с критерием Прандтля $\mathrm{Pr} = 0{,}714$

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}378\,(\mathrm{Gr}_x)^{1/4}. \qquad (11\text{-}10)$$

Для этой среды перенос тепла был точно рассчитан Е. Польхаузеном в сотрудничестве с Э. Шмидтом и В. Бекманом [Л. 197]. В результате этой работы обнаружилось, что в формуле (11-10) вместо коэффициента 0,378 необходимо подставить число 0,360. Отсюда видно, что приблизительные расчеты довольно хорошо согласуются с результатами трудоемких точных вычислений. Сравнение значений, рассчитанных по приведенным здесь формулам, со значениями, полученными Э. Шмидтом и В. Бекманом в результате проведенных опытов и расчетов, дается на графиках рис. 11-2 и 11-3. При расчетах значения физических параметров определялись по температуре плиты. С. Острах [Л. 198] недавно решил уравнение ламинарного свободноконвективного пограничного слоя для вертикальной пластинки на электронной счетной машине для нескольких чисел Прандтля.

Результирующие профили скорости и температуры показаны на рис. 11-4 и 11-5. Числа Нуссельта, полученные из этого анализа, согласуются с вычисленными по уравнению (11-9) с ошибкой около 10% в диапазоне чисел

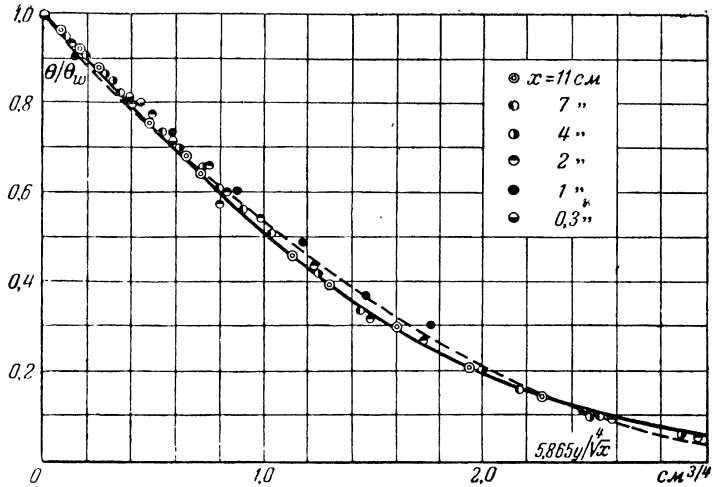


Рис. 11-2. Сопоставление расчетной и экспериментальной кривых распределения температуры при свободной конвекции вдоль вертикальной стенки (опытные данные по Э. Шмидту и В. Бекману, сплошная кривая — точное решение Э. Шмидта и Польхаузена, пунктирная кривая—приближенное решение по Сквайру).

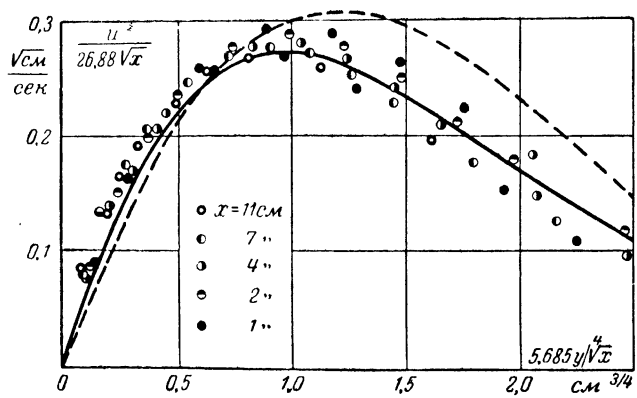


Рис. 11-3 Сопоставление расчетной и экспериментальной кривых распределения скорости при свободной конвекции вдоль вертикальной стенки (опытные данные по Э. Шмидту и В. Бекману, сплошная кривая—точное решение Э. Шмидта и Польхаузена, пунктирная кривая — приближенное решение по Сквайру).

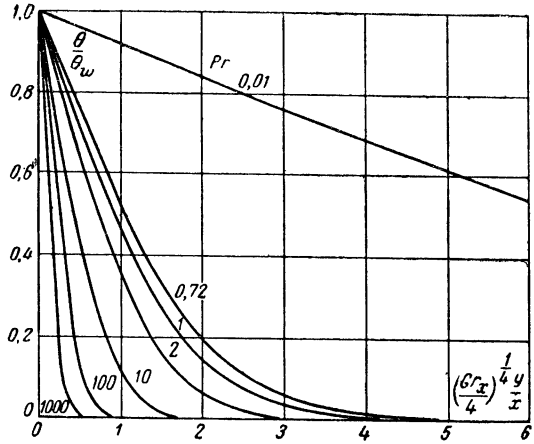


Рис. 11-4. Безразмерные температурные профили для ламинарной свободной конвекции на вертикальной пластине [Л. 369]

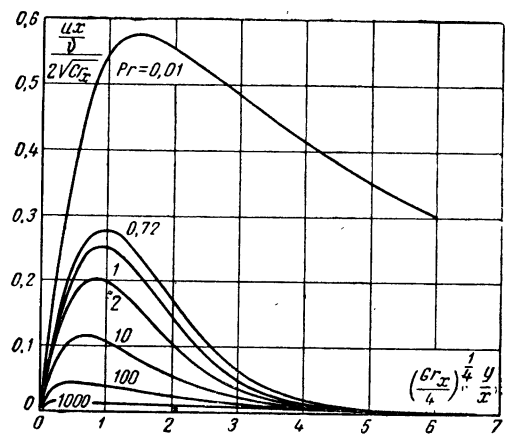


Рис. 11-5. Безразмерные профили скорости для ламинарной свободной конвекции на вертикальной пластине [Л. 369].

Прандтля 0,01—1 000. Это решение дает результаты, гораздо лучшие, чем формула $Nu_x = C(Gr_x Pr)^{\frac{1}{4}}$, которую часто используют и которая была выведена путем обобщения экспериментальных данных для воздуха в предположении пренебрежения силами инерции [см уравнение (9-19)]. Опыты, проведенные Э. Шмидтом и В. Бекманом, Е. Дж. Эккертом и Е. Соенгеном [Л. 199] на воздухе и Х. Х. Лоренцом [Л. 200] и О. А. Сундерсом [Л. 201] на масле и ртути, также хорошо согласуются с теоретическими результатами.

Кроме вертикальной стенки, важное практическое значение имеет также задача с горизонтальной трубой [Л. 202]. Для этого случая уравнения пограничного слоя были решены Р. Германом [Л. 203]. Результаты расчетов Германа хорошо согласуются с опытными данными Йодльбауэра [Л. 204]. На основании этих работ можно сделать следующее обобщение: среднее значение коэффициента теплообмена для круглой трубы с диаметром сечения d равняется среднему значению коэффициента теплообмена для вертикальной стенки высотой $2{,}5d$ (рис. 11-6). Для тонких проволок предположение, что толщина пограничного слоя мала сравнительно с диаметром, несправедливо. Однако расчеты пограничного слоя, выполненные Германом, основаны именно на таком допущении. Для учета этого фактора воспользуемся идеей, высказанной впервые Лэнгмюром [Л. 205] и развитой Райсом [Л. 206]. Мы принимаем за пограничный слой неподвижный воздушный цилиндрический слой вокруг проволоки, через который перенос тепла от проволоки происходит только в силу теплопроводности.

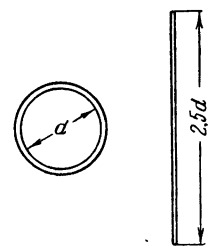


Рис. 11-6. Горизонтальная труба и вертикальная пластина с одинаковым средним коэффициентом теплообмена при свободной конвекции

Уравнения (3-6) и (3-7) поэтому определяют этот тепловой поток, причем r_i равняется радиусу проволоки (принимается, что диаметр $d = 2r_i$); t_i — температура проволоки и t_0 — температура воздуха за пределами пограничного слоя. С другой стороны, справедливо равенство, основанное на условиях задачи:

$$Q = \alpha 2\pi r_i l (t_i - t_0).$$

Приравнивая правую часть этого равенства к правой части формулы (3-7), получаем:

$$\bar{\alpha} = \lambda \frac{1}{r_i \ln (r_0/r_i)}$$

и

$$\overline{\mathrm{Nu}}_d = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = \frac{2}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{2}{\ln\left(1 + 2\frac{b}{d}\right)},$$

где $b = r_a - r_i$ — толщина принятого нами пограничного слоя. Эта толщина определена таким образом, что для пограничного слоя с толщиной, незначительной по сравнению с диаметром проволоки, последнее уравнение превращается в выражение, получаемое из формулы (11-10). Переходя к среднему значению коэффициента теплообмена и внося значение диаметра $d = 2{,}5x$, находим:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_d = 0{,}400\,(\mathrm{Gr}_d)^{1/4}.$$

При небольших значениях отношения b/d знаменатель дроби $\ln(1 + 2b/d)$ становится равным $2b/d$ и, следовательно, $\overline{\mathrm{Nu}}_d$ будет равен d/b. Отсюда $d/b = 0{,}400\,(\mathrm{Gr}_d)^{1/4}$, и поэтому

$$\overline{\mathrm{Nu}}_d = \frac{2}{\ln\{1 + [2/0{,}400\,(\mathrm{Gr}_d)^{1/4}]\}}. \qquad (11\text{-}11)$$

Это решение превосходно согласуется с результатами опытов [Л. 207].

Пограничный слой и температурное поле можно легко наблюдать на фотографиях, сделанных с использованием оптической неоднородности среды и явлений интерференции. Метод с использованием оптической неравномерности среды довольно прост и описан Шмидтом [Л. 208].

Пример фотографии, выполненной этим методом, приведен на рис. 11-7, где показана свободная конвекция вокруг горизонтального цилиндра; источник света, расположенный на большом расстоянии от нагретого цилиндра, так что лучи идут параллельно оси цилиндра, дает на экране без помощи каких-либо средств изображения картину, показанную на рис. 11-7. Луч света, проходя через поле с градиентом плотности, нормальным к его направлению, отклоняется в сторону на некоторый угол. Поэтому лучи, проходящие через нагретый пограничный слой, отклоняют-

ся от цилиндра, в результате чего вокруг пунктирной линии (рис. 11-7) образуется темная зона, соответствующая пограничному слою.

Э. Шмидт доказал, что расстояние от контура цилиндра до яркой сердцеобразной линии пропорционально величи-

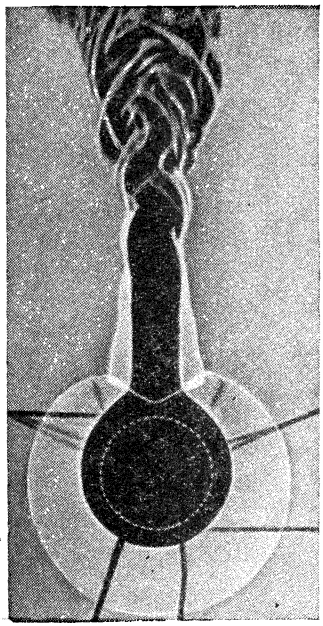


Рис. 11-7. К определению толщины пограничного слоя и коэффициента теплообмена вокруг горизонтальной трубы при свободной конвекции по фотографии, выполненной с использованием неоднородности оптической среды [Л. 370].

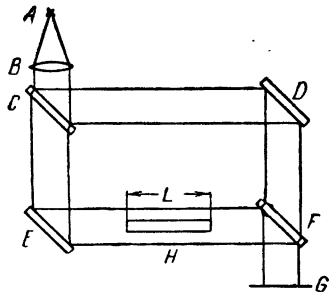


Рис. 11-8. Принципиальная схема интерферометра Цендера-Маха.

не коэффициента теплообмена. Принцип устройства интерферометра Маха — Цендера [Л. 209] показан на рис. 11-8. Проходя через линзу конденсатора *B*, лучи света от монохроматического источника A идут параллельным пучком. Затем они падают на плоскую стеклянную пластинку *C*, поверхность которой покрыта некоторым составом. Таким образом, половина света отражается, а другая половина проходит через пластинку. Отраженная часть света падает на зеркало *D* и направляется последним на стеклянную пластину *F*, которая обладает теми же свойствами, что и пластинка *C*. Та часть света, которая прошла через эту пластинку, соединяется с пучком лучей, прошедших через пластинку *C*, отраженных от зеркала *E* и пластинки *F*.

Если все четыре пластинки *C, D, E, F* точно параллельны друг другу, то лучи света в обоих пучках должны проходить совершенно одинаковые пути. Тогда на экране *G* можно наблюдать темное или светлое поле. Темное поле

получается тогда, когда пути двух пучков отличаются друг от друга на половину длины волны света или на нечетное число, кратное этой величине, в результате чего волны света гасят друг друга. Светлое поле получается в том случае, если пути двух пучков лучей отличаются друг от друга на полную длину волны или в целое число раз, кратное

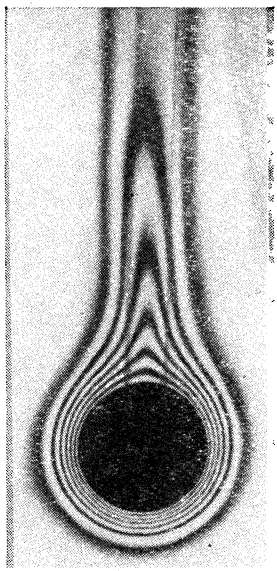


Рис. 11-9. Изотермы вокруг горизонтальной трубы при свободной конвекции (интерференционная фотография Э. Эккерта и Э. Зойенгена).

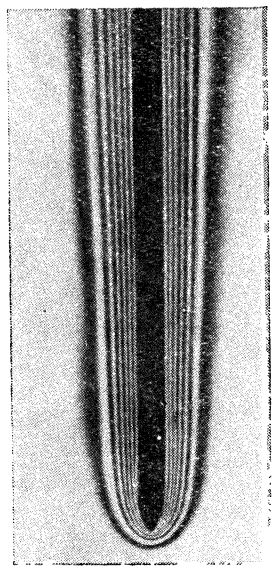


Рис. 11-10. Интерференционная фотография изотерм вокруг вертикальной пластины в свободно-конвективном потоке (фотография Э. Эккерта и Э. Зойенгена).

этой величине, в результате чего волны света усиливают друг друга.

Если нагретое тело, например цилиндр *H*, поместить в один из пучков световых лучей, то температура воздуха, а следовательно, и его плотность вблизи цилиндра изменятся. Так как длина световой волны зависит от плотности среды, то в пучках появятся лучи, которые будут отличаться друг от друга на одну или несколько световых волн или на нечетное количество полуволн. В результате

этого на экране G вокруг тени цилиндра H появятся темные и светлые полосы. Резкость этих полос можно повысить, если между пластинкой F и экраном поместить линзу, которая создаст в плоскости экрана изображение центральной плоскости цилиндра.

На рис. 11-9 и 11-10 даны фотографии, снятые описанным методом.

На рис. 11-9 показана картина свободной конвекции вокруг горизонтальной трубы, а на рис. 11-10—картина свободной конвекции вдоль вертикальной плиты. Темные интерференционные полосы представляют собой линии постоянной плотности воздуха, а так как давление можно считать постоянным, то эти полосы являются одновременно и изотермами. Температурный напор между любыми двумя рядом расположенными полосами можно легко рассчитать по длине цилиндра или плиты в направлении луча света и по данным интерферометра.

По фотографии можно определить температурный градиент в воздухе у поверхности тела, а следовательно, и коэффициент теплообмена. Так как наглядна также и толщина пограничного слоя, то этот метод можно с пользой применять при исследовании проблем теплообмена. Такой интерферометр был впервые описан Цендером и Махом. Он был применен Т. Цобелем [Л. 210] при исследованиях в области аэродинамики, а также Р. Б. Кеннардом [Л. 211], Э. Эккертом и Э. Зенгеном [Л. 212] при исследованиях в области теплообмена.

В рассмотренных примерах пограничный слой был всегда ламинарным. Пограничный слой, образующийся при свободной конвекции, тоже приобретает турбулентный характер, когда его толщина достигает определенной величины. В воздухе этот переход совершается при определенном критическом значении критерия Грасгофа порядка $Gr_x = 10^9$.

Это соответствует критерию Рейнольдса $\mathrm{Re}_{c_x} = u_{\text{макс}}\,\delta/\gamma = 550$. Следовательно, в условиях свободной конвекции переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при более низких значениях критерия Рейнольдса, чем в условиях вынужденной конвекции. На рис. 11-11 приводятся интерференционные фотографии нагретой вертикальной плиты такой длины (0,915 *м*), при которой пограничный слой становится турбулентным. Интерференционные линии представляют собой изотермы. Числа указывают на расстояние от нижнего края

плиты в дюймах. Как видно из фотографии, близ нижнего края плиты движение носит ровный ламинарный характер. На некотором расстоянии от нижнего края появляются волны большой длины, так как при определенной толщине пограничного слоя поток пограничного слоя становится неустойчивым по отношению к поперечным колебаниям. Амплитуда волн возрастает в направлении потока; сами волны становятся неправильными, вырождаются в завихрения и, наконец, поток приобретает ярко

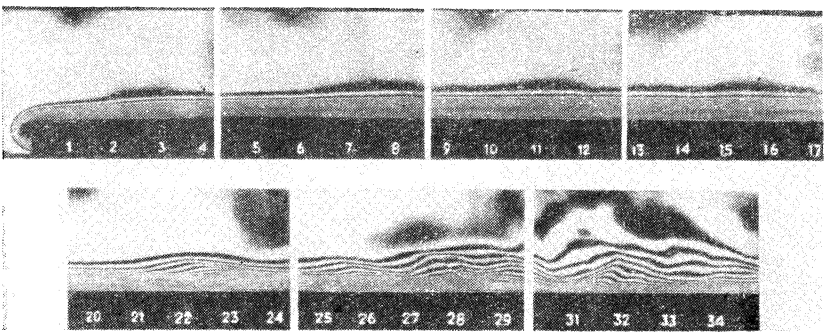


Рис. 11-11. Ламинарный и турбулентный свободно-конвективные потоки на вертикальной пластине (интерференционная фотография Э. Эккерта и Э. Зойенгена). Цифры показывают расстояние от края нижней пластины в дюймах.

выраженный турбулентный характер. На фотографии показана только первая часть зоны перехода к турбулентному потоку. Она дает очень ясное представление о начале турбулентности. Опытным путем можно показать, что даже значительные возмущения не нарушают его характера движения близ нижнего края плиты, а отражаются в появлении волн на некотором расстоянии.

Флуктуации ощущаются по всей толщине пограничного слоя до самой поверхности плиты и являются причиной периодического изменения интенсивности теплообмена [Л. 213].

11-2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Интегральные уравнения энергии (11-3) и (11-4) могут быть использованы также и для вычисления теплообмена путем свободной конвекции в той части поверхно-

сти вертикальной пластины, которая покрыта турбулентным пограничным слоем [Л. 214]. Измеренные профили скорости и температуры в таком пограничном слое могут быть хорошо выражены следующими приближенными уравнениями:

$$\vartheta = \vartheta_w \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]; \qquad (11\text{-}12)$$

$$u = u_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4. \qquad (11\text{-}13)$$

В случае вынужденного потока из этих уравнений нельзя получить напряжения трения и теплового потока за счет градиента указанного напряжения на поверхности. Соответственно поэтому последние члены в уравнениях (11-3) и (11-4) должны быть заменены τ_w/ρ и $q_w/\rho c_p$, и тогда должны быть найдены экспериментальным путем величины для этих параметров. Следует ожидать, что вблизи стенки соотношения, связывающие напряжения трения стенки и тепловой поток с температурами и скоростями в этой области, являются одинаковыми для вынужденного и для свободно-конвективного потоков.

Уравнение (11-13) было специально выбрано так, чтобы для области у поверхности оно имело тот же вид $u = u_1 (y/\delta)^{1/7}$ что и уравнение (6-32) для турбулентного вынужденного потока; соответственно будет принято, что уравнение (6-33) описывает напряжение трения на стенке.

Соответствующее решение для потока тепла на стенке будет:

$$q_w = 0{,}0228 \rho c_p u_1 \vartheta_w \left(\frac{\nu}{u_1 \delta}\right)^{1/4} (\mathrm{Pr})^{-2/3}. \qquad (11\text{-}14)$$

Эта зависимость получена из аналогии Рейнольдса с поправочным членом $(\mathrm{Pr})^{-2/3}$ для учета отклонения от аналогии Рейнольдса при числах Прандтля, отличных от 1.

С учетом этих выражений решение интегральных уравнений энергии производится точно таким же путем, как и для ламинарного пограничного слоя. Подробно с этим вычислением можно ознакомиться в работе [Л. 213]. В результате получаем следующее решение:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}0295 (\mathrm{Gr}_x)^{2/5} (\mathrm{Pr})^{7/5} [1 + 0{,}494 (\mathrm{Pr})^{2/3}]^{-2/5}. \qquad (11\text{-}15)$$

Часто используют эмпирическую зависимость

$$\mathrm{Nu}_x = C\,(\mathrm{Pr}\,\mathrm{Gr}_x)^{1/3}. \qquad (11\text{-}16)$$

Постоянная C имеет значение 0,10 для воздуха и 0,17 для воды. Диапазон Gr и Pr в опытах недостаточен для того, чтобы определить, которое из двух предыдущих уравнений дает лучшее согласие с экспериментами.

Эксперименты по свободно-конвективному теплообмену поверхности шара и жидкости, заполняющей его, были проделаны Е. Шмидтом [Л. 215]. Поглощая тепло, средняя температура жидкости будет повышаться со временем, так что весь процесс является нестационарным. Однако он может рассматриваться как квазистационарный до тех пор, пока речь идет о пограничном слое на поверхности и коэффициенте теплообмена. В качестве жидкостей применялись спирт, гликоль и вода. Был охвачен диапазон значений произведения $\mathrm{Gr}_d\mathrm{Pr}$ от $3 \cdot 10^8$ до $5 \cdot 10^{11}$. Результаты были сведены к следующему соотношению:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}098\,(\mathrm{Gr}_d\mathrm{Pr})^{0{,}345}$$

Видно, что коэффициенты теплообмена весьма близки к коэффициентам для турбулентной свободной конвекции на вертикальной пластине [см. уравнения (11-15) и (11-16)]. Методы расчета, подобные данным в § 11-1 и 11-2, использовались также для того, чтобы получить сведения по локальному теплообмену на поверхностях вращающихся дисков [Л. 216].

Влияние изменений свойств газа на свободно-конвективный перенос тепла в газах учитывалось путем введения характеристик в предыдущие соотношения при исходной температуре

$$t^* = t_w - 0{,}38\,(t_w - t_0)$$

согласно Е. М. Спэрроу (t_0 — температура снаружи пограничного слоя) [Л. 217].

Пример 11-1. Вертикальная стенка нагревается с одной стороны паром до температуры 93,5° С. С другой стороны находится воздух при давлении 1,02 *кг/см*^{2} и температуре 20° С. Требуется рассчитать локальное значение коэффициента теплообмена для условий свободной конвекции на расстоянии 203 *мм* от нижнего края стенки.

Из таблиц приложения находим:

$$\nu = 2{,}25 \cdot 10^{-5}\ м^2/сек;$$

$$\lambda = 0{,}027\ ккал/м \cdot ч \cdot град;$$

$$\mathrm{Pr} = 0{,}694.$$

Коэффициент объемного расширения

$$\beta = 1/T_0 = 1/293.$$

Отсюда

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\vartheta_w x^3}{\nu^2} = \frac{9{,}81 \cdot 73{,}5\,(0{,}203)^3}{293\,(2{,}25) \cdot 10^{-10}} = 39 \cdot 10^6.$$

Следовательно, пограничный слой—ламинарный. Из уравнения (11-7) находим:

$$\frac{\delta}{x} = 3 \cdot 93\ \frac{1}{0{,}694^{1/2}}\,(0{,}952 + 0{,}694)^{1/4}\,(39)^{-1/4} \cdot 10^{-6/4} = 0{,}0680.$$

Толщина пограничного слоя равна

$$\delta = 13{,}8\ мм.$$

Формула (11-8) дает значение коэффициента теплообмена

$$\alpha = 2\,\frac{\lambda}{\delta} = 2\,\frac{0{,}027}{0{,}0138} = 4{,}0\ ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Среднее значение коэффициента теплообмена для стенки длиной 0,203 *м*.

$$\bar{\alpha} = 4\alpha/3 = 5{,}3\ ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Средний коэффициент теплообмена для горизонтальной трубы диаметром $d = 81{,}3$ *мм* имеет то же значение.

Максимальную скорость движения воздуха в пределах пограничного слоя на расстоянии 0,203 *м* от нижнего края стенки можно определить из уравнения (11-5). Введя в правую часть критерий Грасгофа, получим:

$$u_{макс} = 0{,}766\ \frac{\nu}{x}\,(0{,}952 + \mathrm{Pr})^{-1/2}\,(\mathrm{Gr})^{1/2} = 0{,}4\ м/сек.$$

Вследствие низкой скорости даже небольшое повышение скорости движения воздуха сильно сказывается на увеличении коэффициента теплообмена. Это необходимо иметь в виду при решении практических задач.

11-3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В § 6-3 и 7-2 уравнения пограничного слоя были выведены для вынужденного потока. Это означает, что там пренебрегли влиянием объемных сил внутри жидкости. Однако в условиях естественной конвекции движение жидкости

вызывается исключительно действием объемных сил. Рассмотрим объемную силу, вызванную гравитационным ускорением. Если составляющую гравитационного ускорения в направлении x обозначить через g_x, то дифференциальное уравнение пограничного слоя (6-16), включая член гравитационного ускорения для стационарного потока, будет иметь вид:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+g_x\rho. \quad (11\text{-}17)$$

Уравнение Навье-Стокса для направления, перпендикулярного поверхности, в результате анализа порядка величин упрощается:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho g_y,$$

указывая на то, что в этом случае давление на нормалях к поверхности непостоянно.

Преобразуем уравнение (11-17) путем добавления и вычитания в правой части члена $\rho_s g_x$:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\rho_s g_x+(\rho-\rho_s)\,g_x.$$

В свободно-конвективном потоке пограничного слоя скорость u снаружи пограничного слоя равна нулю. Применение данного выше уравнения для наружного края пограничного слоя дает поэтому выражение

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_s g_x=0.$$

Это уравнение выражает тот хорошо известный факт, что в стоячей жидкости в гравитационном поле давление уменьшается в вертикальном направлении. Поэтому в предыдущем уравнении два члена: $-\partial p/\partial x$ и $\rho_s g_x$ взаимно уничтожаются и дифференциальное уравнение для свободно-конвективного пограничного слоя имеет вид:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+(\rho-\rho_s)\,g_x. \quad (11\text{-}18)$$

К этому уравнению снова следует добавить уравнение непрерывности и уравнение энергии, которые имеют тот

же вид, что и для вынужденного потока. Решения этой системы дифференциальных уравнений были получены для ряда геометрий. В этих решениях характеристики, включая плотность, рассматривались как постоянные во всех членах, за исключением последнего в уравнении движения, где имеется разность между локальной плотностью в пограничном слое и плотностью снаружи пограничного слоя при одном и том же x. В случае, когда плотность зависит только от температуры, или пока давление увеличивается по всему пограничному слою мало, последний член в уравнении (11-18) может быть преобразован к виду:

$$(\rho - \rho_s) g_x = -\beta \rho_s (t - t_s) g_x.$$

Е. Польхаузен [Л. 218] получил решение для ламинарного потока пограничного слоя воздуха вдоль нагретой вертикальной пластины, найдя преобразование, которое переводит уравнения в частных производных в обыкновенные. Новые параметры, которые делают преобразование возможным, следующие:

$$\eta = C \frac{y}{\sqrt[4]{x}}; \quad \vartheta' = \frac{t - t_s}{t_w - t_s}; \quad f = \frac{\psi}{4\nu C x^{3/4}},$$

где ψ является снова функцией тока ($u = \partial\psi/\partial y$; $v = -\partial\psi/\partial x$);

$$C = \sqrt[4]{\frac{\beta g_x (t_w - t_s)}{4\nu^2}};$$

коэффициент расширения β принимается равным $1/T_s$, а переменные ϑ' и f приняты зависимыми только от η. Результаты такого расчета хорошо согласуются с результатами измерений профиля скорости и температуры. Рис. 11-2 и 11-3 показывают вычисленные таким образом профили и согласие с измерениями. Ламинарный свободно-конвективный поток вдоль вертикальной пластины был также рассчитан для большого интервала чисел Прандтля Х. Шухо [Л. 219] и С. Острахом [Л. 220]. Шух показал, что переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям возможен не только для плоской пластины, но и для ряда других геометрий поверхности. Одной из них является поток возле критической точки горизонтального цилиндра.

11-4. СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Горизонтальные стенки. Свободно-конвективные потоки в жидкости, заключенные между двумя параллельными горизонтальными пластинами, не имеют места в случае, если температура верхней пластины выше температуры нижней. Тепло течет в этом случае от верхней к нижней пластине, и температура в жидкости постоянна в горизонтальных слоях, возрастая в вертикальном направлении. В обычной жидкости, для которой плотность уменьшается с ростом температуры, указанное температурное поле обусловлено тем, что слои меньшей плотности расположены над более плотными: состояние вполне стационарное и конвективных течений не вызывает. Тепло будет переноситься только теплопроводностью (не считая радиации), и температурный профиль будет линейным. Это положение может быть нарушено только вблизи края пластин.

Положение будет отличным, когда жидкость заключена между двумя горизонтальными поверхностями, из которых верхняя поверхность имеет температуру, более низкую, чем нижняя. Теперь возникает поток тепла через жидкость в направлении от нижней к верхней поверхности и как следствие жидкость между двумя пластинами принимает такие температуры, что более холодные частицы жидкости располагаются над более теплыми. Для жидкостей, плотность которых уменьшается с увеличением температуры, это ведет к неустойчивому состоянию. Это состояние не порождает конвективных потоков до тех пор, пока произведение числа Грасгофа и числа Прандтля мало. Однако когда этот параметр достигает величины около 1700, возникает своеобразный случай свободно-конвективного потока, который можно наблюдать на рис. 11-12. (Рисунок был получен Х. Зидентопфом; поток сделан видимым с помощью крохотных алюминиевых частиц в жидости.) Поле потока имеет ячеистую структуру с более или менее правильными шестигранными ячейками. Внутри этих ячеек поток движется вверх, а по периферии ячеек он возвращается вниз. Такое состояние потока поддерживается, пока величина произведения числа Грасгофа на число Прандтля не превысит 47 000. Выше этой величины поток изменяется беспорядочно и носит турбулентный характер. Более низкое критическое число Рейнольдса, при котором устанавливает этот вид потока, был теоретически вычислен Ре-

леем (1916 г.) после того, как Х. Бенард впервые наблюдал его в 1900 г. Соответственно параметр Gr Pr, употребляемый в связи с этим типом потока, часто трактуется как число Релея.

Вертикальные стенки. Когда жидкость заключена между двумя вертикальными стенками, естественно ожидать, что высота стенок является важным геометрическим параметром, как и расстояние между ними. В безразмерном представлении соответственно в дополнение к числу Грасгофа появляется отношение высоты к расстоянию. Если $Gr_b < 124\ (\mathrm{Pr})^{-2}(20/21+\mathrm{Pr})\,(L/b)$, где L — высота слоя и b — его толщина, то температура в большей части

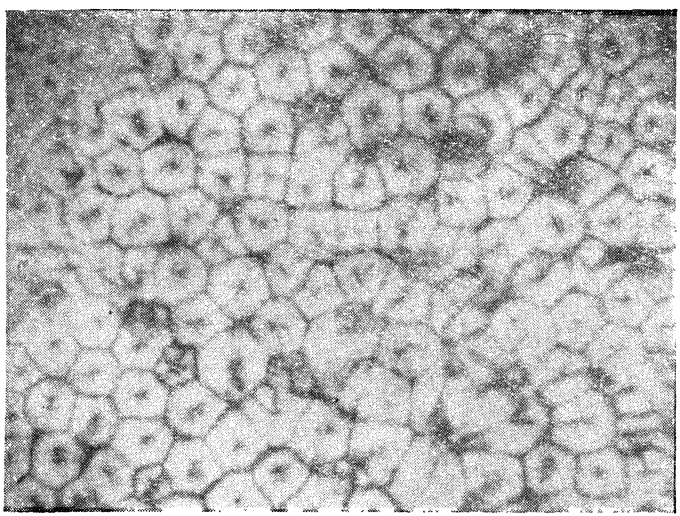


Рис. 11-12. Образец ячеистого потока, вызванного свободной конвекцией в горизонтальных воздушных слоях (согласно С. Зидентопфу и Прандтлю) [Л. 371].

слоя потока уменьшается линейно в направлении, перпендикулярном двум стенкам [Л. 221]. Возле нижних и верхних краев воздушного пространства происходят отклонения от линейного падения температуры. Отклонения распространяются на высоту, равную приблизительно расстоянию b между стенками. За исключением области возле края, перенос тепла равен тому, который может быть вычислен для чистой теплопроводности.

Отчетливые пограничные слои можно наблюдать при больших значениях произведения Gr_bPr. Наблюдение температурного поля при помощи интерферометра Маха—Цендера раскрывает конфигурацию, как показано на рис. 11-13. Пограничный слой растет вверх на более горячей стенке, в то время как пограничный слой вдоль стенки с низшей температурой растет в нижнем направлении. В центральном ядре найдено, что температура постоянна в направлении, перпендикулярном двум стенкам.

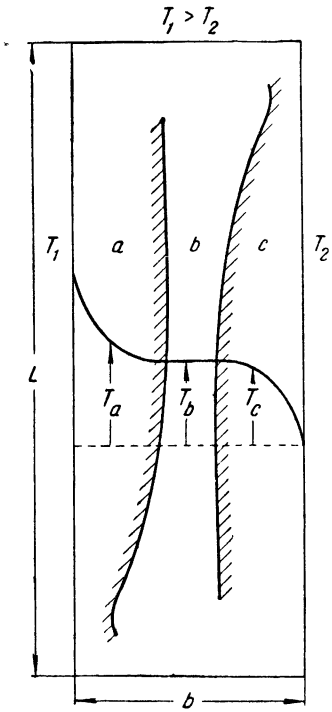


Рис. 11-13. Схема развития пограничного слоя и профиля температуры для свободной конвекции через вертикальный слой жидкости между горячей и холодной стенками.

В области двух пограничных слоев характер изменения температуры подобен обнаруженному в свободном конвективном пограничном слое на отдельной вертикальной поверхности. Было также обнаружено, что две толщины пограничных слоев и коэффициенты теплообмена отличаются не более чем на 20% от вычисленных для отдельной пластины с такой же температурой поверхности и с температурой с наружного края пограничного слоя, равной температуре в ядре потока b на рассматриваемой высоте. Это состояние сохраняется при уменьшении значений Gr_bPr до тех пор, пока два пограничных слоя почти касаются друг друга. Однако в противоположность условию на отдельной нагретой или охлажденной пластине в бесконечном потоке найдено, что температура не постоянна в ядре b в пространстве между двумя вертикальными стенками, а увеличивается по направлению вверх.

Э. Шмидтом [Л. 222] было сообщено об интересном наблюдении. Было найдено, что перенос тепла от горячей к холодной поверхности через вертикальный слой жидкости иногда возрастает, когда пространство между двумя

вертикальными стенками разделено на меньшие области тонкими горизонтальными стенками. Вышеупомянутый факт о том, что пограничные слои развиваются при достаточно больших величинах Gr_bPr, объясняет это наблюдение.

Теплые и холодные пограничные слои по существу начинаются у каждой из горизонтальных перегородок, и пограничные слои на обеих стенках остаются тоньше, чем в условиях, когда они движутся вдоль всей высоты стенок.

При расчетах инженерных конструкций интерес в основном сосредоточивается на определении суммарного теплового потока через слои жидкости различных геометрий от горячей к холодной поверхности. Зависимости для этого потока тепла будут рассматриваться для слоев жидкости, заключенных между двумя концентрическими цилиндрами. Краусольд [Л. 223] показал, что средний тепловой поток на единицу площади можно в качестве первого приближения выразить одним соотношением для цилиндрических слоев, так же как и для плоских горизонтальных или вертикальных слоев.

Средний тепловой поток q_m на единицу времени и площади для таких слоев условно характеризуется как «эквивалентная теплопроводность λ_e» и определяется выражением

$$q_m = \frac{\lambda_e}{b}(t_h - t_c),$$

где b — толщина слоя;

t_h — температура горячей поверхности;

t_c — температура холодной поверхности.

Для цилиндрического слоя тепловой поток q_m определяется средним поперечным сечением слоя (при радиусе r_m).

На рис. 11-14 показан график зависимости отношения λ_e/λ от произведения Gr_bPr, в котором Gr_b взят при толщине слоя b и разности температур $t_h - t_c$. Результаты обработки опытов, произведенных Бекманом и Селшоппом на цилиндрических слоях и другими авторами на плоских слоях, хорошо совпадают со сплошной линией. Для области где $\lambda_e/\lambda = 1$, перенос тепла через слой происходит только путем теплопроводности. Отклонение от $\lambda_e/\lambda = 1$ означает наличие конвекции в суммарном потоке тепла. Кор-

реляционная связь, изображенная линией, может быть использована в качестве первого приближения и для других геометрий.

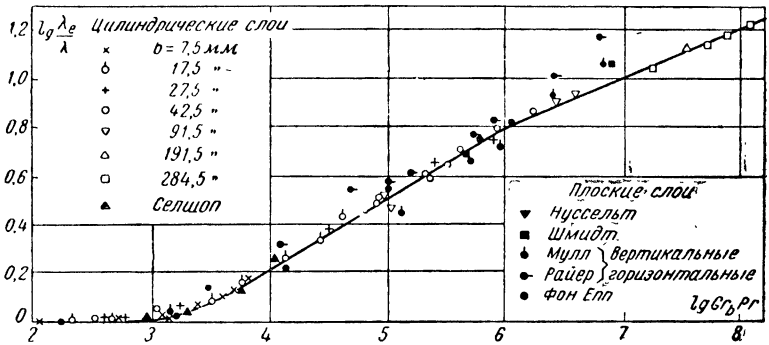


Рис. 11-14. Эквивалентная теплопроводность свободной конвекции через слои жидкости [Л. 372].

11-5. СМЕШАННАЯ СВОБОДНАЯ И ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ

В гл. 7—10 по свободной конвекции влияние объемных сил на поток и на перенос тепла не принималось во внимание. В действительности же в обычном потоке имеют место выталкивающие силы, если плотность изменяется с температурой, и интересно знать, когда ими можно пренебречь и когда они должны приниматься во внимание. Такое рассмотрение осложняется большим числом влияющих параметров. В дополнение к числам Рейнольдса и Прандтля существенными являются число Грасгофа, а также параметры, описывающие геометрию границ и ориентировку потока относительно гравитационного поля. По-видимому, наиболее полно был исследован вынужденный поток через круглую трубу с осью, параллельной направлению ускорения силы тяжести, при среднем потоке, направленном вниз или вверх [Л. 224].

Следовало ожидать, что для больших чисел Рейнольдса (и соответственно для больших скоростей потока) и малых чисел Грасгофа влияние свободной конвекции на перенос тепла может не приниматься во внимание. С другой стороны, для больших чисел Грасгофа и малых чисел Рейнольдса свободная конвекция должна быть домини-

рующим фактором. Это графически представлено на рис. 11-15, где объединены теоретические и экспериментальные исследования для вертикальных труб с различными отношениями длины к диаметру (L/d) и для жидкостей с различными числами Прандтля [Л. 225]. Вынужденный поток через трубу имеет то же направление, что и выталкивающие силы в потоке у стенки трубы. Можно видеть, что область смешанного потока, определяемая как область, в которой теплообмен отличается больше чем на 10% от

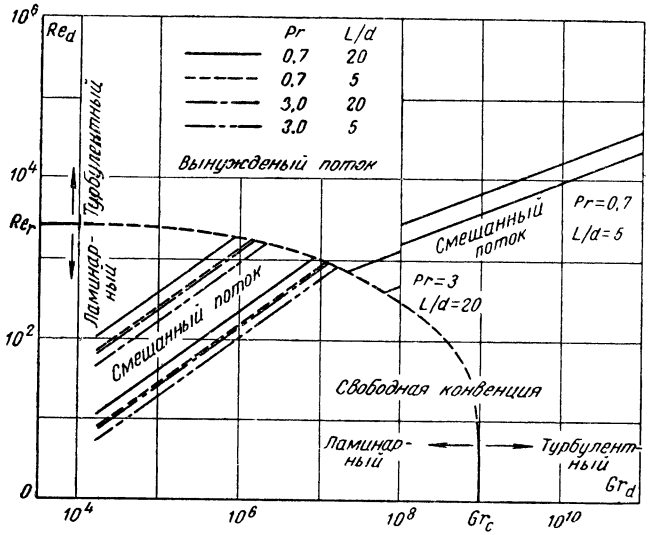


Рис 11-15. Режимы для вынужденной смешанной и свободной конвекции [Л. 373].

теплообмена, полученного из зависимостей для вынужденного потока или свободной конвекции, соответственно в действительности очень мала.

Макс Адамс предложил правило, при помощи которого может быть определен теплообмен в области смешанного потока. При этом вычисляется коэффициент теплообмена для вынужденной и свободной конвекции и используется бо́льшая величина. Измеренные величины, полученные для потока через вертикальные трубы, не отклоняются более чем на 25% от величины, вычисленной по правилу Мак Адамса.

ЗАДАЧИ

11-1. Вычислите ламинарный свободно-конвективный перенос тепла вдоль плоской пластины, расположенной под углом к вертикальному направлению, используя интегральные уравнения пограничного слоя и те же профили скорости, что и в § 11-1.

11-2. Вычислите коэффициенты ламинарного свободно-конвективного переноса тепла по периферии горизонтального цилиндра с кольцевым поперечным сечением, используя интегральные уравнения пограничного слоя и профили скорости, используемые в § 11-1. Предположите, что толщина пограничного слоя мала по сравнению с диаметром цилиндра.

11-3. Вычислите коэффициенты локального переноса тепла на поверхности прохода охлаждающего воздуха в пустотелой лопасти газовой турбины путем эффекта свободной конвекции, вызванной центробежными силами. Предположите, что вынужденный поток воздуха при атмосферном давлении и температуре 260° С через проход так мал, что его влиянием на конвективный перенос тепла можно пренебречь. Температура поверхности прохода может быть принята 538° С. Охлаждающий проход устроен с осью, перпендикулярной оси вращения, длиной 5,08 *см* и расстоянием от оси 38,1 *см*. Колесо турбины, к которому прикреплена лопасть, вращается со скоростью 10 000 *об/мин*. Предположите для этого вычисления, что поверхность прохода может рассматриваться как плоская поверхность, на которую действует центробежная сила. Не принимайте во внимание силы Кориолиса.

11-4. Выведите уравнение (11-16) для турбулентного свободно-конвективного переноса тепла на вертикальной плоской пластине, используя расчеты, которые кратко изложены в § 11-2.

11-5. Теплопроводность газов часто измеряется методом Сутерленда, где платиновая проволока встроена вдоль оси капиллярной трубки, заполненной газом, который надо исследовать. Проволока нагревается электрически, труба охлаждается снаружи, и измеряются тепловой поток, температуры проволоки и трубы.

Теплопроводность вычисляется в предположении, что тепло вследствие теплопроводности распространяется радиально от проволоки к трубке. Определите, какой диаметр должна иметь капиллярная трубка для того, чтобы избежать ошибок, вызванных свободной конвекцией, когда желательно измерить теплопроводность водяного пара до давления 150 *ат*. (Используйте данные приложения для определения характеристик.) Для этого вычисления используйте рис. 11-14. Поддерживается разность температур 5,6° С между трубкой и проволокой.

11-6. Плоская стенка сосуда находится при температуре 93° С и изолирована тремя слоями алюминиевой фольги: один—сверху стенки и другие на расстоянии 1,25 *см* каждый, образуя два воздушных пространства. Наружная сторона изоляции охлаждается до 37,5° С окружающим воздухом. Какую температуру принимает средняя пластина фольги? Каков тепловой поток в час на квадратный метр через изоляцию? Теплообмен радиацией не принимайте во внимание.

11-7. При какой скорости для условий задачи 11-3 охлаждающего воздуха влиянием свободной конвекции на перенос тепла можно пренебречь? (Предположите, что гидравлический диаметр воздушного прохода 1 *см*.)

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

КОНДЕНСАЦИЯ И ИСПАРЕНИЕ

12-1. КОНДЕНСАЦИЯ

Если пар заключен в сосуд, стенки которого имеют температуру ниже температуры насыщения, на стенках начинается конденсация пара. Тепло, выделенное в результате этого процесса, необходимо отводить через стенки. В 1916 г. В. Нуссельт [Л. 226], применив свою теорию пленочной конденсации, рассчитал теплоотдачу, связанную с этим процессом.

Нуссельт исходил из того, что конденсат образует на поверхности стенки тонкую непрерывную пленку и что интенсивность теплового потока определяется термическим сопротивлением этой пленки. Мы снова рассмотрим простейший случай, а именно конденсацию на вертикальной стенке при постоянной температуре t_w.

Конденсат образует пленку, которая под действием сил тяжести постепенно стекает вниз и возобновляется за счет постоянной конденсации пара. У верхнего края стенки толщина пленки конденсата равняется нулю, но по направлению вниз толщина пленки возрастает, как показано на рис. 12-1.

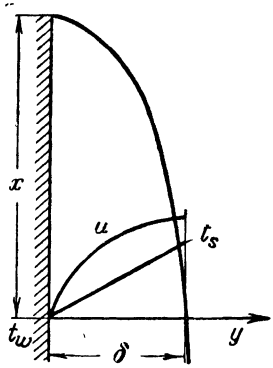


Рис. 12-1. Толщина пленки конденсата и кривые распределения температуры и скорости для вертикальной стенки.

Пусть на расстоянии x от верхнего края толщина пленки равна δ и скоростное поле в пленке подчиняется закону параболы:

$$u = U\left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right). \qquad (12\text{-}1)$$

В этом уравнении y — расстояние от поверхности стенки; U — скорость движения конденсата вниз на границе с паром.

Так как вектор потока тепла конденсации перпендикулярен направлению движения конденсата в пленке, то температурное поле должно быть в основном линейным, причем температура стенки равна t_s и температура паров на границе с пленкой конденсата равна температуре насыще-

ния. Может быть, удивительно то, что температурное поле в этом случае имеет другую форму, чем в пограничном слое жидкости или газа (см. § 6-4). Это объясняется тем, что в исследованных до этого проблемах все количество тепла, переносимое к стенке, возникает в пределах пограничного слоя, в то время как в настоящем случае благодаря конденсации пара все тепло образуется на внешней поверхности жидкой пленки.

Исходя из сказанного выше, количество тепла, переносимое через элемент пленки конденсата высотой dx и единичном измерении в горизонтальном направлении вдоль стенки определяется уравнением

$$dQ = \frac{\lambda}{\delta} dx (t_s - t_w). \tag{12-2}$$

Коэффициент теплообмена α опять можно определять из равенства

$$dQ = \alpha dx (t_s - t_w).$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}. \tag{12-3}$$

Скорость, с которой конденсат стекает по плите, можно рассчитать по уравнению равновесия рассматриваемого элемента.

Вес элемента должен уравновешиваться напряжением трения τ_w на поверхности плиты:

$$g\rho\delta dx = \tau_w dx.$$

Силами ускорения и давления пренебрегаем как незначительными. Воспользовавшись формулой Ньютона (6-2), выразим напряжение трения и, решив полученное уравнение относительно градиента скорости y поверхности стенки, получим:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_w = \frac{2U}{\delta} = \frac{g\rho\delta}{\mu},$$

откуда

$$U = \frac{g\rho}{2\mu}\delta^2.$$

Поэтому уравнение (12-1) изменяется к виду:

$$u = \frac{g\rho}{2\mu}\delta^2\left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right).$$

Средняя скорость u_m в сечении x составляет $^2/_3$ макси-

мального значения, так как кривая распределения скоростей — парабола:

$$u_m = \frac{g\rho}{3\mu}\delta^2. \tag{12-4}$$

Через сечение x проходит следующее весовое количество конденсата:

$$G = \rho u_m \delta = \frac{g\rho^2}{3\mu}\delta^3,$$

Через поперечное сечение на расстоянии dx в направлении движения конденсата проходит жидкости больше на

$$dG = \frac{g\rho^2}{\mu}\delta^2 d\delta. \tag{12-5}$$

Это приращение происходит за счет конденсации пара. Подставляя в уравнение (12-2) значение $dQ = i_{fg}dG$, где i_{fg} есть скрытая теплота испарения на единицу веса жидкости, получаем:

$$dG = \frac{\lambda}{i_{fg}\delta}dx(t_s - t_w) \tag{12-6}$$

и, приравнивая правые части уравнений (12-5) и (12-6), получаем уравнение

$$\delta^3\frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu\lambda}{i_{fg}g\rho^2}(t_s - t_w),$$

интегрирование которого дает:

$$\frac{\delta^4}{4} = \frac{\mu\lambda}{i_{fg}g\rho^2}(t_s - t_w)\,x.$$

Если коэффициент вязкости μ заменить коэффициентом кинематической вязкости ν, то для толщины пленки конденсата получим следующее выражение:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\nu\lambda(t_s - t_w)\,x}{g\rho i_{fg}}}, \tag{12-7}$$

а для коэффициента теплообмена — следующее:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g\rho i_{fg}}{4\nu(t_s - t_w)\,x}}, \tag{12-8}$$

которое в критериальной форме имеет вид:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{x}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{g\rho i_{fg}x^3}{4\nu\lambda(t_s - t_w)}}. \tag{12-9}$$

Решение (12-8) дает локальное значение коэффици-

ента теплообмена на расстоянии x от верхнего края плиты. Среднее значение коэффициента для всего расстояния находится по формуле

$$\bar{\alpha} = {}^4/_3\alpha. \qquad (12\text{-}10)$$

Согласно формуле (12-9) значение критерия Нуссельта зависит от безразмерной величины в правой части равенства. Иногда это число называют критерием Шервуда. Физические параметры в формуле относятся к конденсату. Когда толщина пленки конденсата достигает определенной величины, режим движения становится турбулентным. Перенос тепла через турбулентную пленку конденсата можно рассчитывать методами, относящимися к турбулентному потоку жидкостей или газов вдоль плиты. Такой расчет был выполнен У. Григулем [Л. 227]. Результаты расчетов показывают, что для турбулентной пленки конденсата критерий Нуссельта является функцией безразмерной величины уравнения (12-9) и критерия Прандтля для конденсата.

Уравнение теплообмена в турбулентной пленке конденсата весьма сложно. Поэтому удобнее пользоваться значениями коэффициента теплообмена, которые даются на рис. 12-2. На этом рисунке значения критерия Рейнольдса пленки конденсата нанесены как функция значений безразмерной величины

$$\lambda g^{1/3}\rho^{2/3}(t_s - t_w)\, x/1{,}082 i_{fg}\mu^{5/3};$$

критерий Прандтля рассматривается как параметр. Значения критерия Рейнольдса определяются по толщине пленки конденсата δ и средней скорости движения конденсата u_m:

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{u_m \delta}{\nu}. \qquad (12\text{-}11)$$

Среднее значение коэффициента теплообмена рассчитывают, исходя из того, что тепло, поступающее к стенке по всей длине x, образуется за счет выделения скрытой теплоты конденсации конденсата, проходящего через поперечное сечение пленки в точке x:

$$\bar{\alpha} x (t_s - t_w) = \rho u_m i_{fg} \delta.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{u_m \delta}{\nu} = \frac{\bar{\alpha} x (t_s - t_w)}{i_{fg} \mu} . \qquad (12\text{-}12)$$

Значение критерия Рейнольдса, рассчитанное по уравнению (12-9) для ламинарного режима движения, таково:

$$\mathrm{Re}_\delta = \left[\frac{\lambda g^{1/3} \rho^{2/3} x (t_s - t_w)}{1{,}082 i_{fg} \mu^{5/3}} \right]^{3/4} . \qquad (12\text{-}13)$$

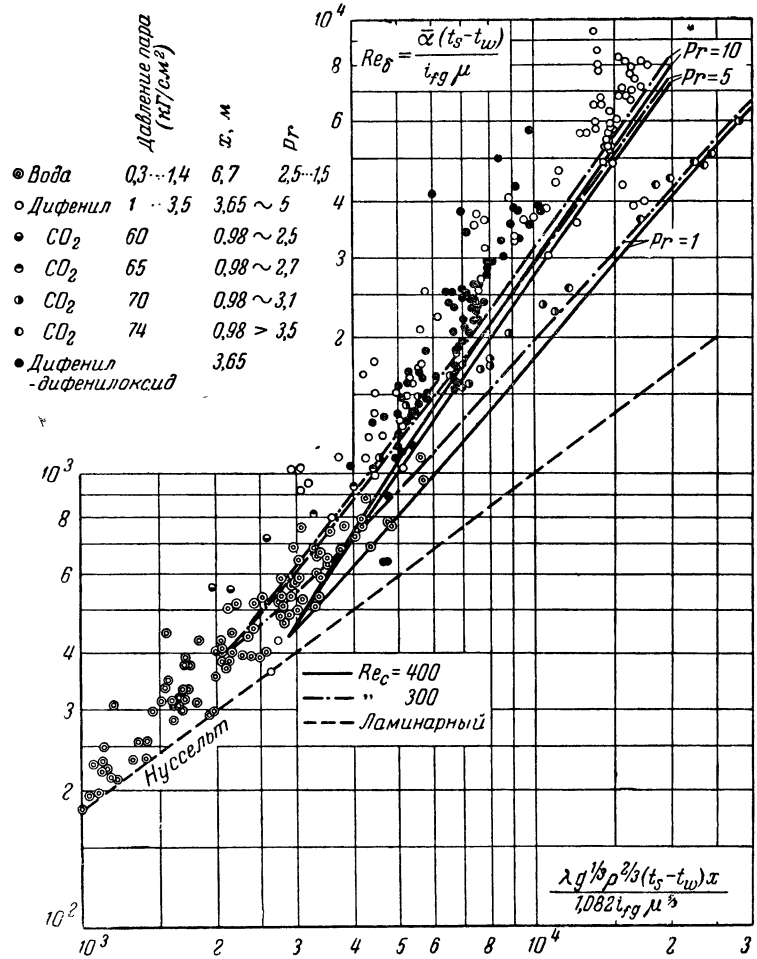


Рис. 12-2. Пленочная конденсация с ламинарным и турбулентным режимами стекания [Л. 374].

Эта зависимость представлена на рис. 12-2 пунктирной линией. Турбулентный режим характеризуется двумя пучками линий на рис. 12-2. Один из них относится к критическому значению критерия Рейнольдса для перехода к турбулентности $Re_c = 400$, а другой — к $Re_c = 300$.

Сопоставляя взаимное расположение линий и точек, можно сделать вывод, что расчетные данные для $Re_c = 300$ лучше согласуются с действительностью. В области ламинарного движения теория Нуссельта подтверждается опытом.

Нуссельт рассчитал также теплообмен при конденсации на горизонтальных трубах круглого сечения. Результаты этих расчетов можно свести к следующему: среднее значение коэффициента теплообмена для горизонтальной трубы диаметром d равняется среднему значению коэффициента теплообмена для вертикальной стенки высотой $x = 2{,}5\,d$. Если несколько горизонтальных труб расположены друг над другом, то конденсат стекает с верхних труб на нижние. Вследствие этого теплообмен (рис. 12-3) для каждой последующей трубы уменьшается. Расчеты Нуссельта показывают, что тепловой поток для второй трубы составляет лишь 60% теплового потока для первой трубы. Такое падение теплообмена можно значительно уменьшить, применяя расположение труб по схеме Жинабо (рис. 12-4).

Справедливость теории пленочной конденсации Нуссельта подтверждается многими опытами. Однако иногда получают более высокие опытные данные. Э. Шмидт, В. Шуриг и В. Зельшопп [Л. 228] показали, что это происходит вследствие того, что конденсат не всегда образует сплошную пленку, что иногда пары конденсируются в виде небольших капелек, которые постепенно увеличиваются и затем стекают вниз, собирая на своем пути все капельки конденсата. На этих местах немедленно появляются новые маленькие капельки. На рис. 12-5 показан такой тип капельной конденсации. Понятно, что теплообмен при капельной конденсации выше, чем при пленочной.

В Соединенных Штатах проделано много опытов по выявлению условий, характерных для пленочной и капельной конденсации. Чистые пары на чистых поверхностях всегда образуют пленку конденсата.

Примеси в парах и загрязнения поверхности способствуют образованию капель при конденсации; особенно это относится к жирным кислотам. Образование капелек чаще происходит на шероховатой поверхности, чем на

гладкой. На стальных и алюминиевых трубках при обычных условиях всегда происходит пленочная конденсация.

Так как трудно с уверенностью предсказать, когда будет происходить капельная конденсация, то рекомендуется расчеты всегда производить по формулам для пленочной конденсации.

Перегретый пар характеризуется практически таким же коэффициентом теплообмена, как и насыщенный. Если



Рис 12-3. Пленочная конденсация на трех трубах при коридорном расположении.

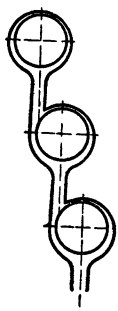


Рис. 12-4. Пленочная конденсация на трубах при расположении по схеме Жинабо.

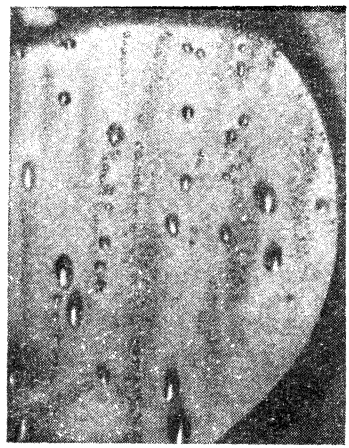


Рис. 12-5. Капельная конденсация [Л. 375].

в смеси с паром находится конденсирующий газ, последний конденсируется близ поверхности конденсата, повышая тем самым общее термическое сопротивление тепловому потоку. Тем самым перенос тепла значительно снижается.

Подробнее этот вопрос разбирается в части «Д», относящейся к массообмену.

Пример 12-1. Насыщенный водяной пар образует на вертикальной стенке пленку конденсата. Требуется рассчитать коэффициент теплообмена на расстоянии 76,2 *мм* от верхнего края стенки. Давление пара 0,1 *кг/см*^{2}; соответствующая температура насыщения $t_s = 45{,}6°$ С. Температура стенки $t_w = 40{,}6°$ С. Из таблиц для водяного пара находим: $r = 572$ *ккал/кг*; плотность $\rho = 995$ *кг/м*^{3}. Из таблиц приложения имеем:

$$\nu = 0{,}0605 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек};$$

$$\lambda = 0{,}545 \text{ ккал/ч} \cdot \text{м} \cdot \text{град}.$$

Теперь определяем безразмерную величину в уравнении (12-9):

$$\frac{g\rho x^3 i_{fg}}{4\nu\lambda(t_s - t_w)} = \frac{9{,}81 \cdot 955 \cdot 572\,(0{,}0762)^3 \cdot 3\,600}{4 \cdot 0{,}0605 \cdot 0{,}545 \cdot 10^{-5} \cdot 5} = 1{,}34 \cdot 10^{12}$$

и критерий Нуссельта:

$$\mathrm{Nu} = \sqrt[4]{1{,}34 \cdot 10^{12}} = 1{,}08 \cdot 10^{3}.$$

Отсюда определяем локальное значение коэффициента теплообмена

$$\alpha = \frac{0{,}545}{0{,}0762} \cdot 1{,}08 \cdot 10^{3} = 7\,740 \ \textit{ккал/м}^2 \cdot \textit{ч} \cdot \textit{град}$$

и среднее значение для высоты 76,2 *мм*:

$$\bar{\alpha} = 4/3 \cdot 7\,740 = 10\,300 \ \textit{ккал/м}^2 \cdot \textit{ч} \cdot \textit{град}.$$

Такое же значение среднего коэффициента теплообмена будет иметь и горизонтальная труба диаметром $d = 30{,}4$ *мм*. Отсюда видно, что значение коэффициента теплообмена при конденсации очень велико.

12-2. ИСПАРЕНИЕ

Испарение жидкости может происходить таким образом, что пар образуется в пространстве между жидкостью и паром. Это происходит, например, в том случае, когда тепло испарения подводится к жидкости непосредственно на ее поверхность, как, например, радиацией, направленной к поверхности и поглощенной на поверхности жидкости. Этот процесс испарения подобен процессу таяния, рассмотренному в главе о теплопроводности, и может быть вычислен в основном теми же методами.

В практике в большинстве случаев тепло передается жидкости от твердой поверхности, с которой соприкасается жидкость, и пар образуется в виде пузырей, которые возникают и растут на греющей поверхности, затем, достигнув определенного размера, отделяются и поднимаются через жидкость. Этот вид испарения называется кипением. Оно и будет рассмотрено в этом разделе. Сложная природа процесса кипения долгое время ограничивала наши знания только сбором опытных данных. Однако недавно в этой области был сделан значительный прогресс путем тщательного экспериментального изучения и путем развития моделей, которые значительно упрощают действительный процесс, благодаря чему можно применить анализ размерностей и аналитические методы. Можно ожидать, что в недалеком будущем теплообмен при кипении часто можно будет предсказывать путем анализа точно так же, как другие виды теплообмена, обсуждавшиеся в предыдущих разделах.

Для выяснения существенных черт процесса кипения рассмотрим испарение жидкости с погруженной греющей поверхности. Предположим, что жидкость вначале находится при температуре ниже температуры испарения. Тогда можно наблюдать, что спустя некоторое время пос-

ле того, как тепло прошло через греющую поверхность, на этой поверхности появляются пузырьки пара. Достигнув определенного размера, они отделяются от поверхности и движутся в жидкость. Однако, пройдя некоторое расстояние, они снова исчезают. Очевидно, они конденсируются в жидкости, которая во всем объеме еще не достигла температуры испарения. Только после того, как жидкость будет достаточно нагрета, пузырьки пара пройдут весь путь до поверхности жидкости и таким образом образуют поток пара в пространство над поверхностью. Оба эти процесса нашли применение в технике. Процесс, в котором пар реконденсируется возле греющей поверхности, называется локальным кипением или переохлажденным кипением. Процесс, при котором пузырьки пара проникают через поверхность жидкости, называется кипением с чистым испарением.

Было установлено, что на процесс кипения также влияет движение жидкости возле греющей поверхности. Если эта поверхность погружена в большой сосуд, то движение жидкости образуется только свободной конвекцией или движением пузырей. Этот вид кипения классифицируется как кипение в бассейне. Если, с другой стороны, кипение происходит на стенках трубы, через которую течет жидкость со значительной скоростью, то эта скорость влияет на рост пузырей и их отделение. Такое кипение называется кипением при вынужденной конвекции.

Наиболее полно исследованным является бассейновое кипение с чистым испарением. Поэтому этот процесс будет рассмотрен детально в следующих параграфах. Рассмотрение будет затем перенесено на локальное кипение с вынужденной конвекцией, наконец, несколько замечаний будет сделано о кипении при вынужденной конвекции с чистым испарением.

На рис. 12-6 графически представлено температурное поле в кипящей воде, измеренное для бассейнового кипения с чистым испарением над горизонтальной греющей поверхностью. Пространство над поверхностью воды было заполнено паром при атмосферном давлении (соответствовало температуре пара 100° С). Из рисунка видно, что весь объем воды находится при равномерной температуре, но слегка перегрет (на 0,4° С). Однако возле греющей поверхности температура воды возрастает в тонком слое с очень большим градиентом до температуры поверхности 109° С. Температурное поле зависит от величины теплового

потока, давления, геометрии и кипящей жидкости. Однако качественные особенности, рассматриваемые здесь, проявляются одинаково во всех процессах кипения.

Для понимания температурных условий и теплообмена, связанного с кипением, необходимо рассмотреть детально процесс образования пузырьков в жидкости [Л. 229]. Для этой цели рассмотрим сначала пузырек пара, находящийся в термическом равновесии с жидкостью с постоянной температурой. При этом условии пузырек с определенным радиусом может сохраняться, прежде чем произойдет либо его исчезновение путем конденсации, либо же его рост путем дальнейшего испарения жидкости в области пузырька. Для того чтобы изучить динамическое равновесие пузырька, показанное на рис. 12-7, представим себе пузырек радиусом r разрезанным на две половины и рассмотрим равновесие одной половины. Силы, действующие на поверхность плоскости *1—1*, есть давление пара p_v, действующее изнутри пузырька, давление жидкости p_l снаружи пузырька и поверхностное натяжение самой поверхности пузырька. Если мы обозначим эту силу на единицу длины поверхности через σ, то сила, вызванная поверхностным натяжением, есть $2\pi r\sigma$. Давление пара и давление жидкости образуют силу в направлении, перпендикулярном плоскости *1—1*, и равную разности давлений на площадь поперечного сечения пузырька. Получаем следующее уравнение:

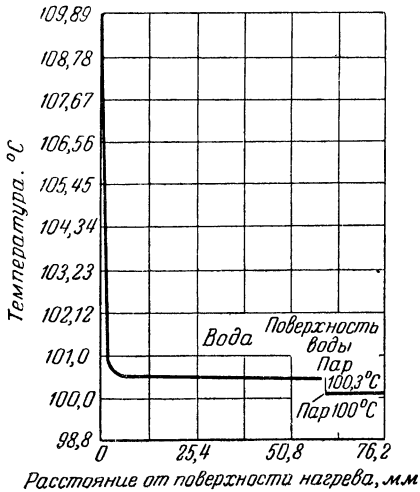


Рис. 12-6. Профиль температуры в кипящей жидкости над горизонтальной поверхностью нагрева [Л. 354].

$$\pi r^2 (p_v - p_l) = 2\pi r\sigma,$$

откуда разность давлений равна:

$$p_v - p_l = \frac{2\sigma}{r}. \qquad (12\text{-}14)$$

Термическое равновесие требует, чтобы не существовало температурной разности между паром в пузырьке и жидкостью, окружающей его. Температура пара внутри пузырька должна также быть равной температуре насыщения при давлении p_v. Давление в жидкости меньше, и поэтому жидкость должна быть перегрета, для того чтобы пузырек пара мог быть в равновесии с ней. Количество добавочного тепла тем больше, чем меньше радиус пузырька.

Термодинамика показывает, что давление насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью при определенной температуре, разделенных плоской поверхностью больше, чем давление насыщения на кривой вогнутой поверхности. Эта разность, однако, мала по сравнению с разностью давлений, определенной уравнением (12-14), до тех пор, пока давление испарения не приближается близко к критическому давлению кипящей жидкости.

Если бы уравнение было справедливо для нулевого радиуса, то это бы означало, что требуется бесконечно большое добавочное тепло, чтобы образовать пузырек в жидкости. В действительности для очень маленьких размеров пузырька рассмотрение следует вести, не исходя из непрерывности жидкости, на чем основано указанное уравнение, а исходя из ее молекулярной структуры. Однако из этого уравнения видно, что требуется большое добавочное тепло, чтобы началось образование новых пузырьков. Образование новых пузырьков идет легче, когда газы находятся в форме малых газовых пузырьков внутри жидкости. Такие газы служат ячейками для образования пузырьков. Процесс образования новых пузырьков называют процессом сгущения. Пузырек пара растет, когда температура жидкости больше, чем температура насыщения, соответствующая давлению p_v. В этом случае тепло проводится в жидкость к поверхности пузырька, находящейся при температуре насыщения. Рассматривая такой процесс теплопроводности, Х. К. Форстер и Н. Цубер [Л. 230] смогли вычислить рост пузырька, хорошо согласующийся с результатами измерений. Сгущение и рост пузырька в жидкости происходят в гомогенных атомных реакторах, где теплота испарения выделяется в процессе деления ядер атомов, размещенных в жидкости. Рождение новых пузырьков в жидкости является той частью процесса кипения, которая до сих пор не была описана аналитически.

Если кипение происходит на твердой поверхности, через которую подводится тепло в жидкость, то требуемое большое количество добавочного тепла для роста маленьких пузырьков обеспечивается внутри тонкого слоя вблизи греющей поверхности (см. рис. 12-6). Области особенно большого перегрева находятся в желобках на поверхности, и очень вероятно, что образование новых пузырьков происходит именно в этих местах. В действительности усло-

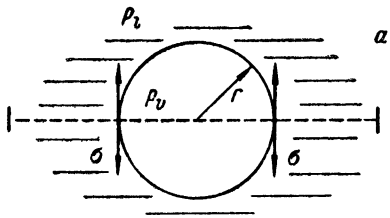


Рис. 12-7. Эскиз пузырька пара в жидкости.

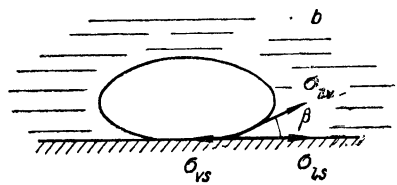


Рис. 12-8. Эскиз пузырька пара на поверхности.

вия для динамического равновесия возле твердой поверхности более сложны, чем для пузырька в середине жидкости. Рис. 12-8 показывает эскиз пузырька у поверхности. При этом условии следует рассмотреть три поверхностных натяжения. Первое, σ_{lv}, определяется характеристиками пара и жидкости и действует в промежутке между паром и жидкостью. Второе, σ_{ls}, определяется характеристиками твердой поверхности и жидкости и действует вдоль твердой поверхности со стороны жидкости и третье, σ_{vs}, определяется характеристиками пара и твердой поверхности и действует вдоль твердой поверхности со стороны пара. Для равновесия в горизонтальном направлении необходима следующая зависимость между этими натяжениями:

$$\sigma_{vs} - \sigma_{ls} = \sigma_{lv} \cos \beta. \qquad (12\text{-}15)$$

Угол β зависит от относительной величины различных поверхностных натяжений. Он может быть меньше или больше 90°. Считают, что в первом случае жидкость смачивает поверхность. Когда угол β больше, чем 90°, поверхность считается несмачиваемой. Часто принимают, что существует тонкая пленка пара между жидкостью и твердой несмачиваемой поверхностью, даже когда не происходит кипение. Ясно, что условие смачиваемости поверхности сильно влияет на образование пузырей.

Было установлено, что вначале требуется меньшая тем-

пературная разность, чтобы передать определенное количество тепла с поверхности в кипящую жидкость, и что эта разность постепенно растет со временем. Принято, что газы, которые сначала адсорбировались на поверхности, облегчают образование пузырьков до тех пор, пока они постепенно удаляются с пузырьками. Рассмотренное выше дает возможность понять, что микроструктура поверхности и условия на ней оказывают большое влияние на кипение, когда имеет место загрязнение или образование пленки адсорбированного газа. С другой стороны, форма поверхности должна иметь меньшее значение, так как толщина теплового пограничного слоя на поверхности в большинстве случаев определяется движением пузырьков. Рост и отделение пузырька от поверхности также являются более сложными процессами, чем происходящие внутри жидкости, так как пузырек растет в пограничном слое с большим температурным градиентом. Вероятно, что на отделение пузырька влияют также силы инерции, особенно при больших тепловых потоках, которые вызывают быструю скорость роста, и при больших давлениях. Это иллюстрируется наблюдениями Эллиона [Л. 231], показывающими, что пузырьки продвигаются в жидкость со значительной скоростью с нижней горизонтальной, электрически нагретой полосы. Сложность явления до настоящего времени мешала выполнить удовлетворительную аналитическую формулировку задачи.

Теперь рассмотрим процесс теплообмена, связанный с кипением. Рис. 12-6 показывает, что термическое сопротивление в процессе испарения в основном сосредоточено в тонком тепловом пограничном слое на нагретой поверхности. Поэтому при анализе теплообмена при кипении внимание должно быть сконцентрировано именно а этой области.

В литературе имеются два определения для коэффициента пленочного теплообмена при кипении. В одном из них тепловой поток q на греющей поверхности разделен на разность Δt между температурой поверхности и температурой насыщения, относящейся к давлению жидкости. Другое определение использует разность между температурой поверхности и температурой массы жидкости. Это последнее определение лучше согласуется с определением, обычно употребляемым при изучении конвекции без фазовых превращений. Первое определение имеет преимущество в том, что температура насыщения может быть полу-

чена более легко и точно из измерения давления. Поэтому это определение употребляется чаще. Между прочим, разница между обоими коэффициентами теплообмена мала. Это становится очевидным из рис. 12-6. Рис. 12-9 дает коэффициенты теплообмена (согласно второму определению), измеренные при бассейновом кипении с чистым испарением воды при атмосферном давлении. Легко видеть, что коэффициент теплообмена увеличивается сначала

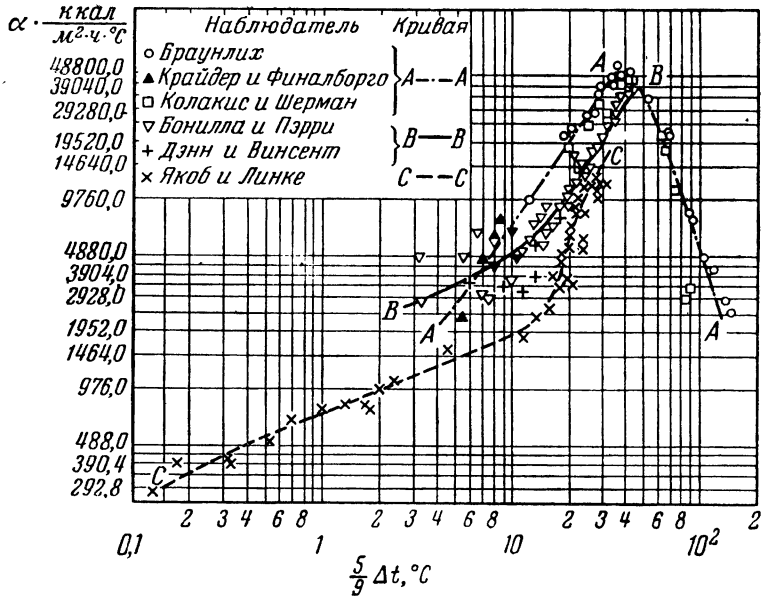


Рис. 12-9. Коэффициенты теплообмена для кипения воды на горизонтальных трубах (*A*) и горизонтальных пластинах (*B* и *C*) при 1 *ата* [Л. 376].

с постоянной скоростью с ростом разности температур Δt. Приблизительно при $\Delta t = 5{,}5°$ С скорость роста становится значительно большей, затем примерно при $\Delta t = 22{,}2°$ достигается максимум.

При дальнейшем увеличении Δt коэффициент теплообмена падает. Измерения при разности температур свыше представленной на рис. 12-9 показывают, что коэффициент теплообмена достигает минимума при Δt, приблизительно равном 111° С, и затем начинает снова возрастать. Визуальные наблюдения объясняют это своеобразное поведение. Можно видеть, что в области $0 < \Delta t < 5{,}5°$ С пузырьки возникают только в нескольких выбранных местах

греющей поверхности и поднимаются далеко отстоящими друг от друга колонками. Объяснение этому явлению дал М. Якоб. Он указал, что малое количество пузырьков может лишь слабо влиять на теплообмен и коэффициент теплообмена в основном следует определять свободной конвекцией, возникающей в жидкости из-за температурных перепадов. Поэтому испарение в этой области называется свободно-конвективным кипением. Число мест, на которых возникают пузырьки, увеличивается с ростом Δt и при перепаде свыше $\Delta t = 5{,}5°$ С греющая поверхность так плотно усеяна пузырьками, что их отделение должно вызывать затруднительное движение в жидкости, что увеличивает теплообмен. Это считают причиной резкого увеличения коэффициента теплообмена в области $5{,}5° \text{ С} < \Delta t < 22{,}2°$ С, называемое пузырчатым кипением. Для температурного диапазона свыше 111° С, в котором коэффициент теплообмена снова повышается с увеличением разности температур, скорость испарения настолько увеличивается, что непрерывный слой пара покрывает всю поверхность и пузырьки пара выходят из этого слоя. Кипение в этой области называется пленочным кипением. Низкая теплопроводность пленки пара, через которую должно проходить тепло, объясняет меньшие величины коэффициента теплообмена для этой области. При очень высоких разностях температур перенос энергии увеличивается за счет радиации. Тот факт, что пленка пара покрывает греющую поверхность при больших тепловых потоках, был известен давно. Общеизвестно, например, что когда капля воды попадает на накаленную поверхность, она, не касаясь поверхности, распыляется на пленке пара и проходит значительное время, прежде чем капля испаряется. Такое явление называется эффектом Лейденфроста в связи с тем, что оно было доложено и объяснено Лейденфростом в 1756 г. Область $22{,}2° \text{ С} < \Delta t < 111°$ С, в которой коэффициент теплообмена уменьшается с увеличением разности температур, является переходной областью, в которой часть поверхности покрыта позырьками и часть — пленкой. Испарение в этой области называется переходным кипением или частичным пленочным кипением.

Тепловой поток q через единицу площади поверхности и в единицу времени может быть определен по данным рис. 12-9 путем умножения коэффициента теплообмена на разность температур Δt. В результате оказывается, что

в температурной области 22,2° C$<\Delta t<$111° C тепловой поток q также уменьшается с увеличением Δt. Как показано на рис. 12-10, это имеет важное последствие в технических применениях. Во многих случаях тепловой поток q является контролируемой величиной.

Пусть тепловой поток доведен до значения q_A на рис. 12-10. Разность между температурой греющей поверхности и температурой жидкости равна Δt_A. Теперь, если тепловой поток постепенно увеличивается, то разность температур Δt будет монотонно возрастать до тех пор, пока поток достигнет величины q_B, а разность температур, Δt_B. Небольшое увеличение теплового потока сверх этой величины, однако, заставляет подниматься температуру до тех пор, пока устанавливается новое условие равновесия немного выше точки C. Соответствующая температурная разность Δt_C обычно так велика, что температура греющей поверхности находится выше точки плавления большинства металлов; в таком случае поверхность разрушается. Поэтому точку B называют точкой выгорания. Тенденция использовать высокие тепловые потоки заставляет инженера конструировать оборудование так, что оно работает у точки выгорания; поэтому точное знание этой точки имеет техническое значение.

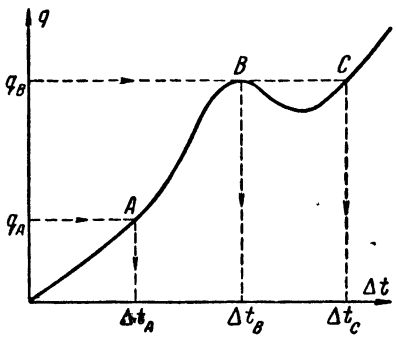


Рис. 12-10. Тепловой поток q для кипения как функция разности температур Δt.

Если правильно предположение, что перенос тепла в области свободно-конвективного кипения определяется течениями свободной конвекции в жидкости, то коэффициент теплообмена для этой области можно определять, используя зависимость

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}), \qquad (12\text{-}16)$$

описывающую свободно-конвективный теплообмен. Вид функции f зависит от геометрии греющей поверхности. М. Якоб [Л. 232] показал, что известные зависимости для свободной конвекции удовлетворительно соответствуют из-

меренным коэффициентам теплообмена для свободно-конвективного кипения.

В области пузырчатого кипения было принято, что движение пузырьков является доминирующим фактором для процесса теплообмена. Это предположение было подтверждено экспериментально Ф. К. Гюнтером и Ф. Крейтом [Л. 233], которые обнаружили, что пузырьки отрываются от поверхности со скоростями до 4,5 *м/сек*. Кроме того, было, установлено, что большая часть тепловых потоков в этой области приходит от греющей поверхности в жидкость, а из жидкости в пузырьки пара. Это означает, что характер переноса тепла на греющей поверхности может рассматриваться как следствие вынужденной конвекции в жидкости, где конвекция поддерживается движением пузырьков, и что коэффициент теплообмена должен описываться выражением вида $\mathrm{Nu}=f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$. Последние попытки теоретически объяснить теплообмен в пузырчатом кипении направлены на установление связи движения пузырьков с их ростом. Однако конвекция будет также зависеть и от количества пузырьков, образовавшихся в единицу времени на единице площади поверхности; связь же этой величины с микроструктурой поверхности делает теоретическое рассмотрение трудным. Розеновым [Л. 234], Фостером и Цубером [Л. 235] были предложены полуэмпирические соотношения. Они исходили из предположения, что теплообмен греющей поверхности с кипящей жидкостью может быть описан соотношением вида $\mathrm{Nu}=f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$. В качестве определяющих параметров в этих критериях берутся диаметр пузырька, его скорость и количество пара, образовавшееся в пузырьках, как мера количества пузырьков. В результате Розенов получил следующее соотношение:

$$\frac{c_l \Delta t}{i_{fg}} = a \left[\frac{q}{\mu_l i_{fg}} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}} \right]^{1/3} (\mathrm{Pr}_l)^{1,7}, \qquad (12\text{-}17)$$

где Δt — разность между температурой поверхности и температурой насыщения; i_{fg} — теплота испарения; q — тепловой поток у греющей поверхности; c_l, μ_l, ρ_l, Pr_l — удельная теплоемкость, вязкость, плотность, число Прандтля жидкости при температуре насыщения; ρ_v — плотность пара; σ — поверхностное натяжение на границе жидкость—пар при температуре насыщения. Постоянная a зависит от всех факторов, которые влияют на образование пузырей. В результате обработки экспериментальных результатов Розенов для величины a нашел значение между 0,0027 и

0,013, а Пирет и Избин [Л. 236] в результате собственных опытов по теплообмену при охлаждении вынужденной конвекцией с чистым испарением определили значения между 0,0022 и 0,015. Широкий диапазон этих параметров говорит о том, что еще требуется немало исследований, прежде чем будет получено вполне удовлетворительное соотношение для пузырчатого кипения. Соответствие между постоянными a, измеренными при бассейновом кипении и кипении при вынужденной конвекции, также показывает, что в области пузырчатого кипения движение пузырьков настолько велико, что влияние вынужденной конвекции обычно мало.

Опыты с кипением жидких металлов указывают на сильное влияние смачиваемости поверхности. Оказалось, что в несмачивающей жидкости пузырчатого кипения вовсе не происходит.

Для теплообмена, связанного с пленочным кипением, Л. А. Бромлей [Л. 237] получил соотношение на основе модели, которая в основном идентична с пленочной теорией Нуссельта для конденсации. Принято, что пленка пара, прилегающая к греющей поверхности, увеличивается под влиянием выталкивающих сил и через эту пленку тепло переносится путем теплопроводности. Результирующее соотношение для вертикальной стенки идентично с уравнением (12-9), с единственным отличием: плотность ρ в этом уравнении должна быть заменена разностью $(\rho_l - \rho_v)$ плотностей жидкости и пара. Иными словами, в уравнение должны быть введены характеристики пара. Было найдено, что соотношение для горизонтальной трубы, аналогичное уравнению (12-9), находится в согласии с экспериментальными результатами, когда вводилась поправка, учитывающая, что перенос тепла радиацией через пленку пара увеличивает толщину пленки пара и что жидкость оказывает трение на движущуюся пленку пара.

Очень важно получить соотношение, которое позволяет определить пиковый поток тепла, имеющий место при пузырчатом кипении в точке выгорания. Основываясь на предыдущих работах Кутателадзе [Л. 238], Розенова и Гриффита [Л. 239], Цубер [Л. 240] смог получить такое уравнение аналитически путем рассмотрения устойчивого состояния пленки пара и жидкости при условии, что они движутся относительно друг друга. Считая две жидкости невязкими и движущимися под влиянием сил тяжести и поверхностного натяжения, он получил следующее уравне-

ние для максимального теплового потока q_B в точке выгорания:

$$q_B = \frac{\pi}{24} i_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \left(\frac{\rho_l + \rho_v}{\rho_l} \right)^{1/2}, \qquad (12\text{-}18)$$

где i_{lv} — теплота испарения;

ρ_v — плотность пара;

ρ_l — плотность жидкости;

σ — поверхностное натяжение на поверхности пар—жидкость.

На рис. 12-11 приведено сравнение этого уравнения, представленного в безразмерном виде, с эксперименталь-

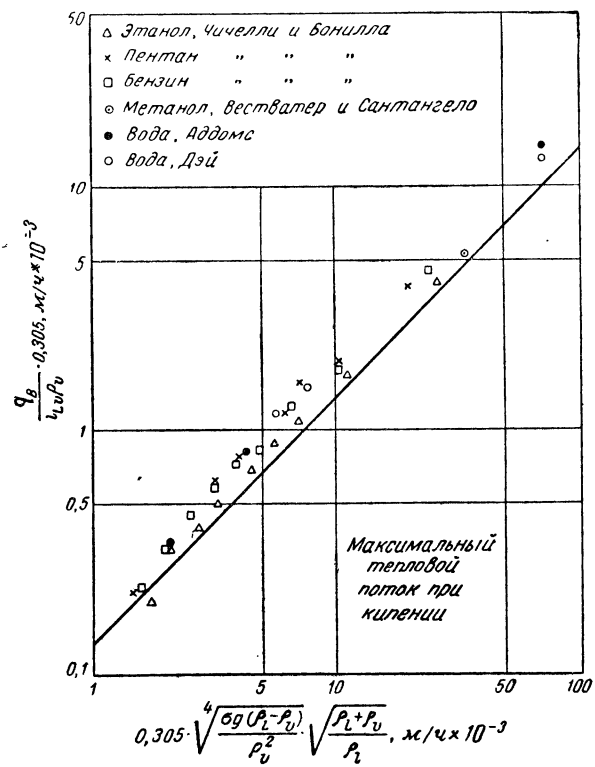


Рис. 12-11 Соотношение для теплового потока в точке выгорания и сравнение с экспериментальными результатами [Л. 377].

ными результатами, полученными при различных исследованиях и с различными жидкостями. Оказывается, что согласие, которое можно считать очень удовлетворительным, означает, что поверхностное условие не влияет на перенос тепла в точке выгорания. Соотношение Цубера справедливо для бассейнового кипения с чистым испарением. Экспериментально установлено, что при локальном кипении максимальный тепловой поток значительно выше (в 4 раза больше). Вынужденная конвекция также увеличивает максимальный тепловой поток.

Тот факт, что коэффициенты теплообмена от поверхности в кипящую жидкость очень велики, делает этот процесс очень эффективным для охлаждения. Например, этот процесс используется при регенеративном охлаждении стенок камер сгорания ракет. При этом применении одно из топлив продувается вдоль стенки камеры сгорания. Обычно тепловой поток настолько велик, что локально температура насыщения жидкости превышена и образование пузырьков происходит рядом со стенкой. Однако внутри охладителя температура ниже, чем температура испарения, и пузырьки разрушаются, как только они отделяются от поверхности и проникают внутрь жидкости. Этот процесс переноса тепла должен быть охарактеризован как вынужденно-конвективное локальное кипение. Он интенсивно изучался в последние годы. Если, например, вода продувается через трубку и если трубка нагревается снаружи, то тепловой поток на единицу площади стенки трубы подчиняется закону, показанному на рис. 12-12, который представляет результаты экспериментов Розенова и Кларка [Л. 241]. Сначала тепловой поток возрастает с увеличением разности между температурой стенки и всей температурой с той же скоростью, что и для вынужденного потока с испарением (линия Колбэрна). Однако как только происходит образование пузырьков на поверхности, увеличение теплового потока становится очень быстрым и требуемая температурная разность почти не зависит от величины теплового потока. В то же время найдено, что различные кривые, показанные на рисунке, зависят от величины температуры насыщения. Розенов и Кларк показали, что эти кривые можно свести в одну линию путем нанесения на график теплового потока на единицу площади, выраженного через разность между температурой стенки и температурой насыщения вместо температуры стенки минус объемная температура.

Это показывает, что основное сопротивление тепловому потоку сосредоточено возле поверхности и на него оказывает большее влияние температура насыщения, чем объемная температура. Тот факт, что в области пузырчатого кипения вынужденный поток имеет небольшое влияние на перенос тепла, был указан раньше.

Возникают особые условия, когда кипение происходит

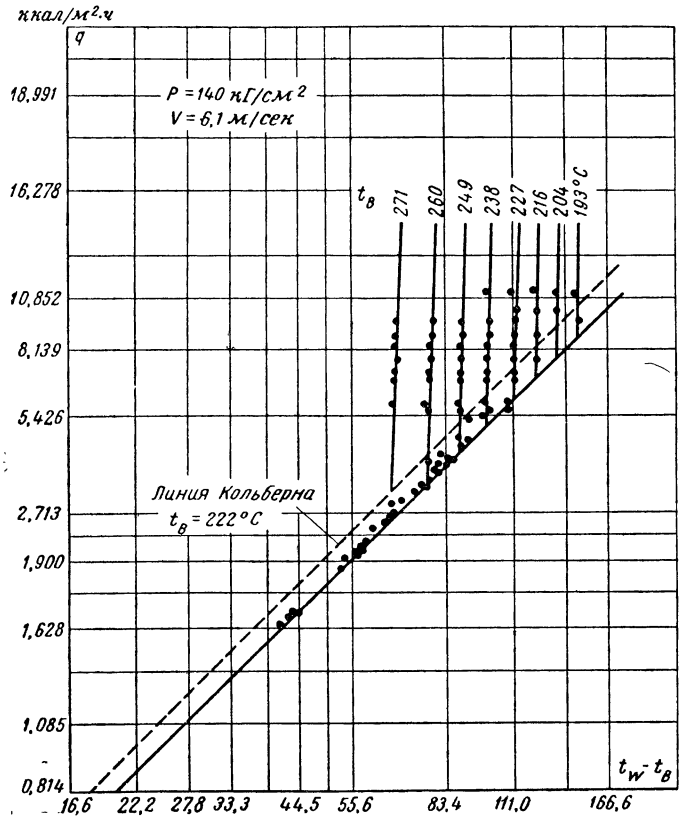


Рис. 12-12. Перенос тепла при локальном кипении для турбулентного вынужденного потока через трубу ($d = 0{,}18$ дюйма; $Re = 3 \cdot 10^5$) [Л. 378].

внутри длинных трубок, как в паровых котлах или в испарителях. Смесь жидкости и пара продувается через трубки в виде вынужденного или же свободно-конвективного потока. Это обусловливает падение давления и перенос тепла.

Для более тщательного обсуждения и для эмпирических соотношений, описывающих этот двухфазный поток, и других случаев теплообмена при испарении сделаны ссылки на литературу [Л. 242].

ЗАДАЧИ

12-1. В конденсаторе надо конденсировать 9 060 *кг/ч* водяного пара при давлении 0,1 *кг/см*^{2}. Греющая поверхность состоит из горизонтальных медных трубок диаметром 30 *мм* с толщиной стенок 1 *мм*. Длина труб 2,73 *м*; количество охлаждающей воды 362 400 *кг/ч*; ее температура на входе 44,5° С и ее скорость в трубках 1,8 *м/сек*. Сколько трубок должно быть в конденсаторе?

12-2. Вычислите толщину конденсатной пленки на горизонтальной трубе, предположив, что толщина пленки мала по сравнению с диаметром трубы, путем использования метода, применяемого в § 12-1.

ЧАСТЬ С

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Основные положения. Все вещества — твердые тела, а также жидкости и газы — при нормальных и особенно при повышенных температурах выделяют энергию в виде излучения и обладают способностью поглощать такую энергию.

Поэтому все процессы теплообмена в большей или меньшей степени сопровождаются лучистым теплообменом.

В некоторых случаях лучистый теплообмен так мал, что им можно пренебречь, или его природа такова, что он просто включается в кондуктивный теплообмен. Это обычно случается с твердыми и жидкими телами. В газах, однако, лучистый теплообмен настолько отличается по своей природе от кондуктивного и конвективного теплообмена, что его надо рассматривать отдельно. Часть *С* посвящена лучистому теплообмену.

Расчеты кондуктивного или конвективного теплообмена в частях «А» и «В» начинались всегда с баланса энергии в элементе объема, и для составления такого баланса было достаточно знать состояние среды, окружающей элемент. Эти состояния можно выразить градиентами параметров состояния, особенно температуры, и в результате записать баланс энергии в виде дифференциального уравнения. При лучистом теплообмене положение обычно является более сложным. Допустим, например, что мы хотим изучить лучистый теплообмен в камере сгорания реактивного двигателя или ракеты. Для этой цели должен быть составлен баланс энергии в малом произвольно расположенном элементе объема. При рассмотрении прироста энергии газа, содержащегося в этом элементе объема, оказывается, что газ поглощает лучистую энергию, испускаемую другими его элементами или элементами твердых стенок, даже в том случае, когда они расположены на значительном расстоянии. Поэтому баланс энергии зависит не только от состоя-

ния, и уравнение, описывающее этот баланс, является интегро-дифференциальным. Такое уравнение трудно решить, и практически все технические расчеты базируются на упрощающих допущениях. Второй фактор, который делает лучистый теплообмен более сложным, чем кондуктивный или даже конвективный, связан с тем фактом, что излучательные свойства различных веществ, встречающихся в технике, описать гораздо труднее, чем, например, теплопроводность, знание которой необходимо для описания процесса теплопроводности. Поэтому гл. 13 будет посвящена рассмотрению излучательных свойств твердых, жидких и газообразных тел.

Лучистый теплообмен будет рассматриваться в гл. 14.

Лучистая энергия, испускаемая веществом, значительно возрастает с температурой. Вследствие этого при высоких температурах лучистый теплообмен становится преобладающим. Многие процессы в новых областях техники происходят при высоких температурах, и знание лучистого теплообмена становится очень важным для проектирования соответствующего оборудования. Сюда относятся атомные электростанции, газовые турбины и различные реактивные устройства для летательных аппаратов, снарядов, спутников и межпланетных кораблей. Особенно серьезные проблемы охлаждения, вызванные лучистым теплообменом, будут связаны с термоядерными установками с температурой порядка миллиона градусов.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

СВОЙСТВА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Тепловые лучи во время прохождения через пространство обнаруживают все характерные черты волн. Так, когда пучки лучей, исходящие из одного и того же источника и проходящие различными путями, соединяются вновь, наблюдается явление «интерференции». Их также можно поляризовать, т. е. заставить колебаться только в определенном направлении, пропуская через соответствующие фильтры. Это показывает, что эти лучи представляют собой поперечные волны, колеблющиеся в направлении, перпендикулярном их распространению, т. е. представляют собой колеблющееся электромагнитное поле.

Их природа тождественна природе других электромагнитных волн, таких, как рентгеновские лучи, лучи видимо-

го света и волн, используемых для беспроволочной связи. Все эти лучи распространяются приблизительно с одинаковой скоростью. В вакууме скорость всех электромагнитных волн следующая:

$$c_v = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

В другой среде скорость несколько меньше, и ее можно вычислить по показателю преломления:

$$n = \frac{c_v}{c},$$

где c означает скорость в рассматриваемой среде. Разные электромагнитные волны различаются только длиной волны λ. Шкала, изображенная на рис. 13-1, показывает, как классифицируются волны по их длинам. Длина волны на этом рисунке измеряется в различных масштабах. Для теплового излучения удобным является масштаб 1 *мк* = $= 10^{-4}$ *см*.

Молекулярные измерения (диаметр молекулы, расстояние между молекулами) имеют величину порядка 1, когда они выражены в ангстремах.

Глаз человека чувствителен к лучам в интервале 0,40—0,70 *мк*. Излучение нагретых тел охватывает длины волн 0,3—10 *мк* и более.

Можно заметить, что большая часть теплового излучения имеет длины волн за пределами видимой части. Этот участок с длинами волн, бо́льшими, чем длины волн света, называется инфракрасным.

В вакууме в однородной среде излучение распространяется по прямым линиям. Однако когда луч попадает на поверхность раздела между двумя различными средами, он распадается на две части. Одна часть отражается от поверхности раздела, а другая проникает внутрь второй среды.

Отражение происходит таким образом, что угол β_r между отраженным лучом и нормалью к поверхности равен углу β_i, образованному падающим лучом и той же нормалью, и что падающий луч, отраженный луч и нормаль к поверхности раздела лежат в одной плоскости (рис. 13-2). Луч, проходящий во вторую среду, преломляется так, что отношение синуса угла β_i к синусу угла β_b между проникающим лучом и нормалью к поверхности равно отношению показателей преломления второй среды к первой, через которую луч проходит до того, как попадает на поверх-

ность раздела. Законы отражения и преломления справедливы также для пучков, состоящих из большого количества лучей, когда они отражаются от абсолютно плоской поверхности. Такое отражение называется зеркальным или обычным. От шероховатых поверхностей падающий пучок лучей отражается по всем направлениям. Такой вид отражения называется рассеянным отражением. При расчетах теплообмена интересуются определением количества энергии, которое передается излучением.



Рис. 13-1. Длины волн различных электромагнитных колебаний.

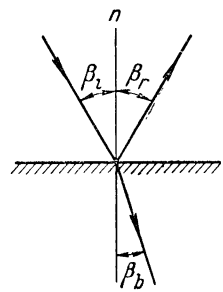


Рис. 13-2. Отражение и преломление луча на поверхности.

Количество энергии, переносимой излучением, не изменяется при прохождении лучей через вакуум. Когда же радиация распространяется в другой среде, энергия обычно уменьшается в направлении распространения, так как она частично поглощается или рассеивается. Поток энергии может также увеличиваться в направлении лучей, когда молекулы, из которых состоит данная среда, сами излучают. Для воздуха и многих других газов поглощение и излучение инфракрасной радиации очень слабы, так что такие газы в большинстве случаев можно считать с достаточным приближением непоглощающей и неизлучающей средой.

Рассмотрим, что происходит с лучистой энергией, попадающей на поверхность раздела между двумя средами. Излучение распространяется через среду *1* по направлению к поверхности раздела. Поток энергии, падающий в единицу времени на единицу площади поверхности раздела, называется падающим излучением или иррадиацией и может быть обозначен через H. Часть радиации отразится обратно в среду *1*. Энергию, покидающую поверх-

ность раздела с отраженным излучением в единицу времени с единицы поверхности, обозначим через RH. R показывает отношение отраженного излучения к падающему и называется отражательной способностью. Остальная часть излучения проникает через поверхность раздела в среду *2*. Если среда *2* поглощает излучение, то часть его будет ею поглощена и величину поглощенной части можно обозначить через AH, где A — отношение поглощенного излучения к падающему — называется поглощательной способностью. Оставшаяся часть энергии излучения покинет среду *2* через ее поверхности. Эту величину можно обозначить через DH, где D — отношение прошедшего излучения к падающему — называется пропускательной способностью. Из закона сохранения энергии следует, что

$$R + A + D = 1. \tag{13-1}$$

Параметры R, A и D зависят от свойств данных двух сред *1*, *2* и от структуры поверхности раздела. В дальнейшем рассмотрении средой *1* будет считаться воздух. Замена воздуха другим газом меняет величины этих параметров очень незначительно. Твердые и жидкие тела поглощают практически все инфракрасное излучение, проникающее через их поверхность, в пределах очень тонкого слоя. Для проводников этот слой имеет величину порядка 1 *мк*. Непроводники, за редким исключением, поглощают практически все излучение в слоях толщиной порядка 1,27 *мм* [Л. 243].

Толщина материалов, применяемых в технике, почти всегда больше этих величин, и уравнение (13-1) в этом случае может быть упрощено:

$$R + A = 1. \tag{13-2}$$

Последнее уравнение справедливо почти для всех твердых и жидких тел в инфракрасной области.

Упрощенно часто говорят о поглощающей поверхности, хотя в действительности поглощение происходит в слоях малой, но конечной толщины.

С другой стороны, обнаружено, что газы отражают очень мало излучения, попадающего на поверхность раздела их с воздухом или другим газом. Однако они обычно пропускают заметное количество излучения даже в слоях довольно большой толщины. Поэтому для газов величи-

ной R можно обычно пренебречь вследствие её малости и уравнение

$$\mathbf{A}+D=1. \qquad (13\text{-}2а)$$

будет выражать их поведение по отношению к внешнему излучению.

При определенной абсолютной температуре большинство сред становится источником теплового излучения. Если считать среду *2* излучающей, то поток энергии излучения будет проходить через поверхность раздела в среду *1* в направлении, противоположном падающему излучению. Поток энергии, проходящий через единицу площади поверхности раздела сред в единицу времени, генерируемый излучением, испускаемым средой *2*, называется *излучательной способностью* и обозначается буквой e.

Законы, описывающие излучение тела, особенно просты, если никакое излучение не отражается от его поверхности ($R=0$; $\mathbf{A}=1$).

Такое тело называется абсолютно *черным телом*.

Это название обязано своим происхождением тому, что поверхность, поглощающая все световые лучи, воспринимается глазом, как черная. Однако поверхность может поглотить практически все тепловое излучение, не поглощая всех световых лучей, и поэтому на взгляд не покажется черной. Например, побеленная стена является почти черной для инфракрасного излучения. Абсолютно черных поверхностей не существует в природе, так как определенный процент падающего излучения всегда отражается, но существуют такие поверхности, которые отражают лишь очень малую часть падающего излучения. Поверхностью почти абсолютно черной для инфракрасного излучения является снег, поглощательная способность которого равна 0,985 для теплового излучения тела, температура которого не слишком высока. Хотя в природе нет абсолютно черных поверхностей, понятие о черном теле очень полезно, так как законы, управляющие его излучением, сравнительно просты и, кроме того, это понятие дает возможность доказать, что в природе не существует таких поверхностей, которые излучают больше тепла, чем черная. Это и есть содержание закона Кирхгофа.

Для того чтобы доказать закон Кирхгофа, рассмотрим пустое пространство (рис. 13-3), стенки которого имеют одинаковую температуру.

Пространство, закрытое стенками, может быть вакуумом. Стенки этой замкнутой поверхности будут излу-

чать. Это излучение будет частично отражаться и, таким образом, многократно перемещаться в указанном пространстве. Поместим маленькое тело *1* в форме диска внутри этого объема. Если диск достаточно мал, мы считаем, что излучение в замкнутой поверхности изменяется только на бесконечно малую величину благодаря присутствию диска. Допустим, что диск имеет черные поверхности и его температура равна температуре стенок замкнутой поверхности. Количество тепла, излучаемого в единицу времени единицей поверхности черного тела *1*, обозначим e_b.

Из сказанного сразу следует, что количество тепла, попадающего на поверхность тела *1* в единицу времени на единицу площади, также равно e_b. Действительно, в вакууме или системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, тело *1* может обмениваться теплом с окружающей средой только путем излучения. Если бы количество тепла, падающего на поверхность тела *1* и поглощенного им ($\mathbf{A}=1$), отличалось от количества тепла, которое им излучается, то тело охлаждалось бы или нагревалось.

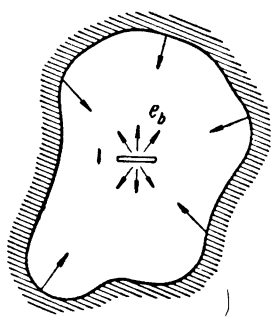


Рис. 13-3. К выводу закона Кирхгофа.

Однако изменение температуры в ту или иную сторону невозможно согласно второму закону термодинамики, по которому никакие температурные различия не могут возникнуть самопроизвольно в замкнутой системе, когда она находится в состоянии теплового равновесия.

Изменяя положение и ориентацию черного диска *1*, легко доказать, что в черной замкнутой поверхности с одинаковой температурой радиация, попадающая на единицу поверхности, не зависит от положения и ориентации этой поверхности. Такое излучение можно назвать изотропным.

Теперь уберем тело *1* и заменим его телом *2*, которое также имеет форму маленького диска, но состоит из материала с коэффициентом поглощения **A**. Энергия излучения, падающая на поверхность этого тела, опять равна e_b. Тело поглощает количество энергии $\mathbf{A}e_b$. Энергия излучения e тела *2* должна иметь такое же значение в соответствии со вторым законом термодинамики:

$$e = Ae_b. \qquad (13\text{-}3)$$

Это и есть математическое выражение закона Кирхгофа. Другими словами, отношение излучательной способности e любого тела к излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре равно поглощательной способности первого тела. Отношение излучательной способности любого тела к излучательной способности абсолютного черного тела с той же температурой называется относительной излучательной способностью или степенью черноты тела ε.

Закон Кирхгофа может быть также записан в виде:

$$\varepsilon = \mathbf{A}, \tag{13-4}$$

где **A** всегда меньше 1. Поэтому излучательная способность всех тел ε всегда меньше, чем излучательная способность абсолютно черного тела при равной температуре.

В § 13-2 будут рассматриваться ограничения, налагаемые на закон, выраженный уравнением (13-4).

Источники излучения, встречающиеся в природе, одновременно излучают различные длины волн. Поэтому при расчетах мы обычно имеем дело с излучением, содержащим широкий интервал длин волн. Однако часто бывает необходимо рассмотреть сначала излучение, состоящее из волн одинаковой длины. Такое излучение называется монохроматическим. Экспериментально излучение, очень близкое к монохроматическому, можно получить при помощи соответствующих фильтров. Предположим, что стенки, окружающие пространство, изображенное на рис. 13-3, дают черное излучение только определенной длины волны. Таким образом, уравнение (13-4) справедливо для монохроматического излучения.

Уравнение (13-4) справедливо также для излучения, состоящего из нескольких длин волн, но в этом случае, однако, оно приемлемо только с определенными ограничениями, о которых будет сказано ниже.

Закон Кирхгофа можно продемонстрировать на следующем простом опыте.

Чернилами или черной краской наносится крест на листе металла, покрытого хромом или никелем. На фоне металла крест кажется темным, так как поглощаемость падающего излучения краской выше, чем поглощаемость металла. Если, однако, лист нагревать в горелке Бунзена до тех пор, пока он начнет светиться, то крест будет казаться ярче, чем фон, указывая на то, что излучательная

способность краски также выше, чем излучательная способность металла. Этим подтверждается закон Кирхгофа.

Обширные сведения об особенностях излучения различных материалов (отражательная способность, поглощательная способность, излучательная способность) можно получить из микроскопических представлений, основанных на теории электромагнитного поля Максвелла. Для более глубокого ознакомления, однако, необходимо изучить взаимодействие между излучением и материалом в масштабе молекул. Было обнаружено, что излучение ведет себя так, как будто оно состоит из отдельных частиц (фотонов). На основе своей электромагнитной теории Максвелл сделал вывод еще в 1865 г., что излучение, падающее на поверхность, оказывает на нее давление. Он рассчитал величину этого давления p_r, оказываемого на идеальное зеркало (поверхность с $R=1$):

$$p_r = \frac{u}{3}, \tag{13-5}$$

где u — плотность излучения (количество энергии излучения, содержащейся в единице объема пространства над поверхностью).

Существует интересная аналогия между давлением излучения и тем давлением, которое оказывает идеальный газ на стенки сосуда.

Кинетическая теория газа показывает, что давление газа p есть

$$p = \frac{1}{3}\rho v^2,$$

где ρ выражает плотность газа, а v — среднюю скорость молекул. Если допустить, что фотоны (кванты света), содержащиеся в единице объема, обладают массой ρ_r и двигаются со скоростью света c, то, записав аналогично тому, как это было сделано для газа

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$$

в результате сравнения двух уравнений, для давления излучения получим:

$$u = \rho_r c^2,$$

т. е. уравнение Эйнштейна, выражающее эквивалентность энергии и массы.

Благодаря этой эквивалентности о поле излучения иногда говорят, как о «фотонном газе».

Давление излучения обычно очень мало. Солнечное излучение, например, оказывает на землю давление, равное 0,4 *мг/м*^{2}. Тем не менее в 1901 г. Лебедев смог продемонстрировать это давление экспериментально.

13-1. АБСОЛЮТНО ЧЕРНОЕ ТЕЛО

Элемент поверхности абсолютно черного тела испускает лучи во всех направлениях. Количество тепла, излучаемого единицей поверхности за единицу времени, называется излучательной способностью e_b. Количество тепла, излучаемого единицей поверхности в определенном направлении, можно найти, вычислив количество тепла dq, излучаемого единицей поверхности тела и проходящего через элемент шаровой поверхности радиусом $r=1$ с центром, находящимся на излучающем элементе поверхности (рис. 13-4). Площадь элемента поверхности на шаре такого радиуса численно равна телесному углу $d\omega$. Лучеиспускание в рассматриваемом направлении определяется выражением

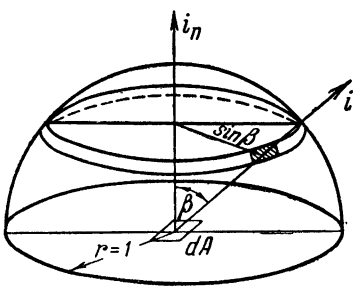


Рис. 13-4. К определению излучения в различных направлениях.

$$i=\frac{de}{d\omega} \tag{13-6}$$

и называется интенсивностью лучеиспускания.

В предыдущем разделе было показано, что излучение абсолютно черного тела, помещенного в изотермический объем, является изотропным, т. е. независимым от направления. На основе этого факта можно легко показать, что интенсивность излучения i_b абсолютно черного тела выражается законом косинуса Ламберта

$$i_b=i_{bn}\cos\beta, \tag{13-7}$$

где i_{bn} — излучение в направлении, перпендикулярном элементу поверхности, и β — угол между направлением излучения i_b и этим перпендикуляром. Общее количество энергии, излучаемой элементом поверхности абсолютно черного тела,

т. е. его излучательную способность, можно определить интегрированием:

$$e_b = \int i_b d\omega = 2\pi i_{bn} \int_0^{\pi/2} \cos\beta \cdot \sin\beta \cdot d\beta = \pi i_{bn}. \qquad (13\text{-}8)$$

Так как интенсивность лучеиспускания i_b одинакова во всех направлениях, не выходящих за пределы конической поверхности с углом β у вершины (рис. 13-4), то при интегрировании можно использовать телесный угол, соответствующий кольцевой поверхности на поверхности сферы $2\pi \sin\beta \cdot d\beta$. Таким образом, общее количество тепла, излучаемого с единицы поверхности абсолютно черного тела, в π раз больше того количества тепла, которое излучается в направлении нормали.

Тепловое излучение тела всегда содержит лучи с различной длиной волн. Количество тепла di, излучаемого в бесконечно малом интервале длин волн, также представляет собой бесконечно малую величину, но отношение

$$i_\lambda = \frac{di}{d\lambda} \qquad (13\text{-}9)$$

является конечной величиной и называется интенсивностью монохроматического лучеиспускания. Чтобы подсчитать тепло, излучаемое абсолютно черным телом, как функцию длины волны, Макс Планк сформулировал понятия своей знаменитой квантовой теории, которая положила начало современной физике.

Закон Планка для интенсивности монохроматического теплового излучения абсолютно черного тела в направлении нормали имеет следующее математическое выражение:

$$i_{\lambda bn} = \frac{2C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)}, \qquad (13\text{-}10)$$

где T — абсолютная температура.

Без множителя 2 уравнение выражает интенсивность поляризованного излучения абсолютно черного тела.

Постоянные C_1 и C_2 вместе с другими постоянными излучения приведены в табл. 13-1.

Таблица 13-1

Постоянные излучения в уравнениях Планка, Вина и Стефана—Больцмана (согласно Н. В. Снайдеру [Л. 379])

C_1	$0{,}5925 \cdot 10^{-12}$ *вт·см²*
C_2	1,4387 *см·град*
C_3	0,28976 *см·град*
σ	$4{,}876 \cdot 10^{-8}$ *ккал/м²·ч·град⁴*

Следует отметить, что эти постоянные известны с очень большой точностью.

На рис. 13-5 уравнение (13-10) представлено графиче-

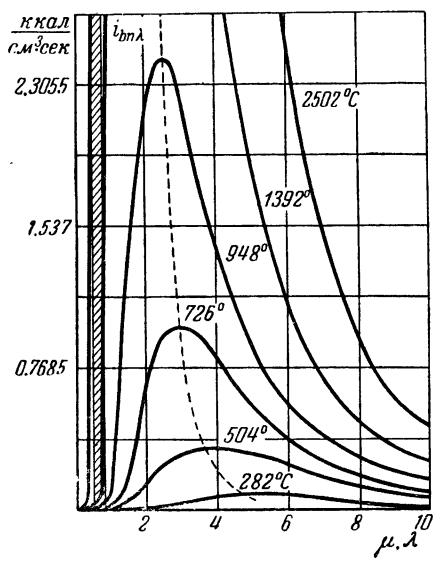


Рис. 13-5. Излучение абсолютно черного тела как функция длин волны при различных температурах.

ски в виде функции длины волны λ, а абсолютная температура T является параметром.

Как видно из графика, абсолютно черное тело излучает при любой температуре в широком диапазоне длин волн. С возрастанием температуры максимум излучения сме-

щается в сторону более коротких волн. Это явление описывается законом Вина:

$$\lambda_{\text{макс}} T = C_3, \tag{13-11}$$

где $\lambda_{\text{макс}}$ — длина волны, соответствующая максимуму излучения.

Область видимых лучей показана на рис. 13-5 заштрихованной полосой. Можно заметить, что с повышением температуры все бóльшая часть общего теплового излучения падает на длины волн видимой части спектра. Человеческий глаз воспринимает очень малые энергии, и та небольшая часть теплового излучения, которая относится к видимой части спектра при температуре 725° С, воспринимается в виде темно-красного свечения. С повышением температуры видимая часть теплового излучения становится больше, и поэтому яркость свечения возрастает.

Но даже при температуре 2 800° К эта видимая часть сравнительно мала и лучистая энергия почти полностью содержится в инфракрасных лучах.

Температура 2 800° К соответствует температуре вольфрамового волоска электрической лампочки; вот почему к. п. д. таких лампочек весьма низок. Только при температуре Солнца (приблизительно 5 500° К) максимум монохроматического излучения лежит в видимой части спектра.

Уравнению (13-10) можно придать следующую форму:

$$\frac{i_{\lambda bn}}{T^5} = \frac{2C_1}{(\lambda T)^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)}. \tag{13-12}$$

Из этого уравнения видно, что $i_{\lambda bn}/T^5$ является функцией только произведения λT и постоянных. Эту функцию можно найти в таблицах различных справочников [Л. 244]. В табл. 13-2 табулируется уравнение (13-12) с постоянными, взятыми из табл. 13-1.

Интенсивность лучеиспускания, отнесенную ко всему спектру, чем и интересуются в большинстве случаев на практике, можно определить из закона Планка путем интегрирования:

$$i_{bn} = \int_0^\infty i_{b\lambda n} d\lambda.$$

Таблица 13-2

Интенсивность монохроматического излучения $i_{в\lambda}$ абсолютно черного тела в нормальном направлении как функция абсолютной температуры T и длины волны λ [Л. 380]

λT, *мк* °К	$\frac{i_{в\lambda}}{T^5}\cdot 10^{15}$ *ккал/м²·ч·мк·°* К^5	λT, *мк*, °К	$\frac{i_{в\lambda}}{T^5}\cdot 10^{15}$ *ккал/м²·ч·мк·°* К
555	0,01019	5 772	1330,27
666	0,3061	5 883	1273,08
777	3,087	5 994	1218,47
888	16,02	6 105	1166,44
999	53,53	6 216	1116,98
1 110	133,18	6 327	1069,98
1 221	268,42	6 438	1024,24
1 332	463,02	6 549	980,96
1 443	711,51	6 660	940,26
1 554	1001,05	6 771	901,10
1 665	1313,27	6 882	863,49
1 776	1631,67	6 993	827,94
1 887	1940,28	7 104	793,94
1 998	2226,74	7 215	762,00
2 109	2481,77	7 326	730,57
2 220	2701,25	7 437	701,72
2 331	2882,60	7 548	673,38
2 442	3025,83	7 659	646,59
2 553	3131,45	7 770	624,43
2 664	3203,58	7 881	597,13
2 775	3245,82	7 992	573,43
2 997	3249,94	8 214	530,67
3 108	3220,58	8 325	509,54
3 219	3175,24	8 880	422,16
3 330	3115,99	9 435	351,58
3 441	3045,92	9 990	294,70
3 552	2967,61	10 545	248,69
3 663	2883,12	11 100	211,18
3 774	2793,98	11 655	181,46
3 885	2701,76	12 210	154,87
3 996	2607,99	12 765	133,39
4 107	2513,71	13 320	115,82
4 218	3418,91	13 875	100,83
4 329	2325,66	14 430	88,15
4 440	2233,95	14 985	77,54
4 551	2143,79	15 540	68,52
4 662	2056,20	16 095	60,49
4 773	1970,68	16 650	53,77
4 884	1888,24	22 200	19,16
4 995	1808,39	27 750	8,429
5 106	1731,11	33 300	4,265
5 217	1657,43	38 850	2,376
5 328	1586,33	44 400	1,421
5 439	1517,81	49 950	0,9047
5 550	1452,38	55 500	0,5946
5 661	1390,04		0

Интегрирование выполняется при помощи подстановки $x = 1/\lambda$:

$$i_{bn} = 2C_1 \int_0^\infty x^3 [e^{(C_2/T)x} - 1]^{-1} dx =$$

$$= 2C_1 \int_0^\infty x^3 [e^{-(C_2/T)x} + e^{-(C_2/T)2x} + e^{-(C_2/T)3x} + \ldots] dx.$$

Каждый интеграл $\int_0^\infty x^3 e^{-(C_2/T)ix} dx$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ можно взять методом интегрирования по частям, в результате чего получается $6T^4/C_2^4 i^4$. Отсюда

$$i_{bn} = \frac{12C_1}{C_2^4} T^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{12C_1}{C_2^4} \cdot \frac{\pi^4}{90} T^4 = K_n T^4. \qquad (13\text{-}13)$$

Это есть математическое выражение закона Стефана — Больцмана, который был опытным путем установлен Стефаном и теоретически доказан Больцманом. Согласно этому закону энергия излучения абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Излучательная способность абсолютно черного тела в π раз больше энергии излучения, определяемой по формуле (13-13). Поэтому

$$e_{b\lambda} = \sigma T^4, \qquad (13\text{-}14)$$

где σ — постоянная Больцмана.

Очень точными измерениями было определено численное значение постоянной Больцмана. Полученная величина

$$\sigma = 4{,}96 \cdot 10^{-8} \ ккал/м^2 \cdot ч \cdot {}^\circ K^4$$

несколько больше той, которая определяется по формуле (13-13).

В природе не существует абсолютно черных тел, однако их свойства довольно точно можно воспроизвести искусственным путем. Закон Кирхгофа гласит, что тело, которое поглощает все падающее излучение, само излучает, как абсолютно черное тело. Поэтому мы можем создать подобие абсолютно черного тела в виде полости с небольшим отверстием (рис. 13-6). Стенки полости должны иметь повсюду одинаковую температуру. Луч, попадающий в полость через отверстие, отразится от стенок полости не-

сколько раз, прежде чем он снова выйдет через отверстие. Если поверхность полости обладает большой поглощательной способностью, то при каждом отражении большая часть энергии луча окажется поглощенной и поэтому после нескольких отражений вся энергия луча будет поглощена стенками. Таким образом, отверстие в полом теле ведет себя подобно абсолютно черной поверхности. Уменьшая отверстие, можно воспроизвести свойства абсолютно черного тела с желаемой точностью. Если стенки полости разогреть, то согласно закону Кирхгофа отверстие будет испускать излучение абсолютно черного тела.

Последующая часть этой главы посвящена выведению законов излучения абсолютно черного тела. Рассмотрим этот вопрос исторически. В 1844 г. Больцман вывел закон четвертой степени на основе классической термодинамики. Затем в 1896 г. аналогично Вин вывел свой закон смещения (13-11).

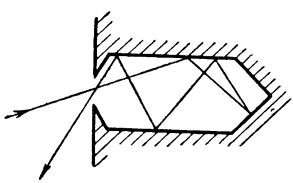


Рис. 13-6. Излучение полости.

Для вывода закона, описывающего интенсивность монохроматического излучения, необходимо было отказаться от основ классической физики.

В 1900 г. М. Планку удалось вывести этот закон благодаря своей квантовой теории.

Сначала выведем закон Стефана — Больцмана. Для этого предварительно необходимо установить связь между плотностью излучения u_b и интенсивностью излучения i_b полости с небольшим отверстием, стенки которой находятся при постоянной температуре. Пустое пространство может по нашему усмотрению иметь форму сферы, и мы подсчитаем плотность излучения в центре этой сферы (рис. 13-7). Плотность излучения в такой полости с небольшим отверстием не должна зависеть от расположения, ибо в противном случае давление излучения стало бы меняться с изменением положения и, следовательно, оказалось бы возможным получать механическую работу при помощи устройства, подвергаемого давлению излучения в различных положениях. Это противоречило бы второму закону термодинамики.

Рассмотрим излучение элемента dA_s сферической поверхности, проходящее через элемент площади dA, распо-

ложенный в центре сферы. Это излучение, проходя через площадь dA за время $d\tau$, может быть выражено так:

$$i_{bn} \frac{dA_s \cdot dA}{r^2} d\tau,$$

где i_{bn} — интенсивность излучения замкнутого объема в нормальном направлении.

Так как излучение распространяется со скоростью света c, то излучение, проходящее через площадь dA за промежуток времени $d\tau$, займет за площадкой dA объем длиной dL, определяемой уравнением

$$dL = cd\tau.$$

Введя это выражение в написанное выше, получим следующее выражение для излучения элемента dA_s, содержащегося в объеме $dV = dAdL$:

$$i_{bn} \frac{dA_s}{r^2 c} dV.$$

Общее количество излучения, содержащегося в объеме dV, будет найдено после подсчета количества излучения всей поверхности полости. Это достигается интегрированием вышеупомянутого выражения по сферической поверхности:

$$i_{bn} \frac{dV}{c} \int \frac{dA_s}{r^2}.$$

$\int dA_s/r^2$ есть ни что иное, как телесный угол, под которым площадь dA_s видна из центра сферы. Поэтому интеграл $\int dA_s/r^2$ должен быть равен 4π.

Общее излучение, содержащееся в единице объема, т. е. плотность излучения, равно:

$$u_b = \frac{4\pi}{c} i_{bn} = \frac{4}{c} e_b, \qquad (13\text{-}15)$$

где u_b является функцией только температуры.

Теперь можно перейти к выводу закона Стефана — Больцмана. Для этого рассмотрим пространство с одинаковой температурой, имеющее форму цилиндра, закрытого

поршнем (рис. 13-8), причем предполагается, что его поверхность является идеальным зеркалом ($R=1$). Можно допустить, что пространство является абсолютным вакуумом, а температура его поверхностей поддерживается равной T.

Поверхности будут излучать тепло, и плотность излуче-

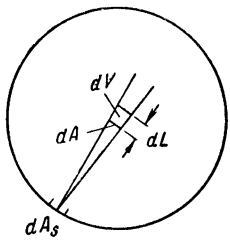


Рис. 13-7. Излучение в замкнутой поверхности с одинаковой температурой.

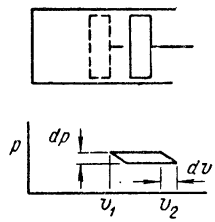


Рис. 13-8. Тепловой двигатель, приводимый в движение давлением излучения.

ния внутри цилиндра будет равна u_b. Эта плотность является функцией температуры стенок цилиндра. Излучение будет оказывать давление $p_r=u_b/3$ [см. формулу (13-5)] на стенку поршня.

Теперь представим себе, что цилиндр совершает следующий цикл. Поршень сдвигается вправо так, что объем цилиндра изменяется от V_1 до V_2. При этом температура сохраняется постоянной. Это значит, что плотность излучения постоянна. Но так как объем увеличивается, общее количество энергии, находящейся внутри цилиндра, будет в течение этого периода увеличиваться и должно пополняться добавлением тепла Q от окружающей среды к стенкам цилиндра.

Давление излучения также остается постоянным в течение этого периода, и величина произведенной при этом работы будет равна:

$$W = p_r (V_2 - V_1) = \frac{u_b}{3}(V_2 - V_1).$$

Внутренняя энергия, находящаяся в объеме цилиндра, возрастет на величину

$$\Delta U_b = u_b (V_2 - V_1).$$

Согласно первому закону термодинамики количество тепла, добавляемого во время этого процесса, должно быть

$$Q = \Delta U_b + W = 4/3 u_b (V_2 - V_1).$$

После того как объем достигнет величины V_2, цилиндр еще продвинется на бесконечно малую величину dV, но теперь уже без добавления тепла. Соответственно интенсивность излучения внутри цилиндра будет уменьшаться, а температура и давление излучения будут падать. Это видно из нижней половины диаграммы. По достижении температуры $T—dT$ движение цилиндра начинается в обратном направлении. Цилиндр движется влево, сначала таким образом, что температура остается постоянной, а затем меняется адибатически до тех пор, пока не будет достигнуто первоначальное положение.

Вся работа, проделанная над цилиндром в течение этого цикла, выражается следующим образом:

$$dW = dp_r (V_2 - V_1) = \frac{du_b}{3} (V_2 - V_1).$$

Рассматриваемый нами процесс является обратимым, если он происходит достаточно медленно, так что добавление и возврат тепла происходят без падения температуры.

Этот цикл совершается между двумя значениями температуры: T и $T—dT$. Согласно второму закону термодинамики все обратимые циклы, совершающиеся между двумя постоянными температурными уровнями, имеют один и тот же тепловой к. п. д. (dT/T), а именно к. п. д. цикла Карно.

Соответственно тепловой к. п. д. рассматриваемого здесь процесса есть

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{dW}{Q} = \frac{du_b}{4u_b};$$

отсюда

$$\frac{du_b}{u_b} = 4 \frac{dT}{T}.$$

Это дифференциальное уравнение можно проинтегрировать:

$$\ln u_b = 4 \ln T + \ln C,$$

или

$$u_b = CT^4. \qquad (13\text{-}16)$$

Если учесть уравнение (13-15) для излучения абсолютно черного тела, то из последней формулы можно получить закон излучения Стефана — Больцмана. Подобным образом был выведен и закон Вина.

К концу XIX в. было много попыток также предсказать теоретически монохроматическую излучательную способность. Но все они были неудачны в том смысле, что подсчеты приводили к выводам, не соответствующим экспериментальным данным. Тем не менее следует дать описание одной попытки, поскольку она приближает к пути, избранному Планком для вывода его закона.

Эта попытка была сделана Релеем и Джинсом в 1900 г. Она базируется на представлении, что в объеме с постоянной температурой, в котором имеет место черное излучение, распространяются волны с различными длинами. Этот объем находится в состоянии равновесия с окружающими стенками благодаря непрерывному излучению и поглощению энергии молекулами, из которых состоит вещество стенок.

Простейшим устройством, при помощи которого можно создать электромагнитные волны определенной длины, являются два атома, имеющие положительный и отрицательный электрические заряды, связанные упругими силами так, что они могут совершать колебания. Такой гармонический осциллятор сможет испускать и поглощать излучение. Для того чтобы имело место излучение абсолютно черного тела, нужно вдоль стенки, ограничивающей объем, поместить большое количество таких осцилляторов с различными частотами. Согласно закону равного распределения энергии, который был получен в статистической механике, следует ожидать, что осцилляторы для каждой длины волны имеют в среднем при определенной температуре одинаковое количество энергии, а именно $kT/2$ на каждую степень свободы.

Осциллятор обладает как кинетической, так и потенциальной энергией, поэтому его энергия может быть выражена как $E=kT$, где k — постоянная Больцмана. Если бы к тому же было известно количество осцилляторов для каждой длины волны, было бы возможно определить энергию, содержащуюся в устройстве осцилляторов, и это количество, опять таки согласно закону равного распределения, должно быть равным энергии излучения абсолютно черного тела, которое находится в состоянии равновесия с этими осцилляторами.

В 1900 г. Релей и Джинс подсчитали число dZ волн в интервале частот между ν и $\nu+d\nu$, которые содержатся в определенном объеме V, исходя из представления, что волны должны быть стоячими с целым числом длин волн в пределах границ объема.

Их уравнение имеет вид [1]:

$$dZ=\frac{8\pi\nu^2}{C^3}Vd\nu.$$

Плотность излучения $u_\nu d\nu$ поля радиации в объеме V можно получить путем умножения средней энергии некоторого характерного осциллятора, которая соответствует средней энергии волн, на количество таких волн.

В результате получим:

$$Vu_\nu d\nu=EdZ=\frac{8\pi\nu^2}{C^3}VkTd\nu.$$

В экспериментальной физике энергия выражается чаще как функция длины волны, а не частоты. Длина волны и частота связаны соотношением $\nu\lambda=c$, где c — скорость света.

Поэтому количество энергии можно выразить таким образом:

$$u_\lambda d\lambda=u_\nu d\nu,$$

если дифференциал частоты выражается как

$$d\nu=\frac{c}{\lambda^2}d\lambda.$$

Подставляя эти выражения в вышеуказанное уравнение и деля на объем V, получаем для интенсивности монохрономического излучения:

$$u_\lambda=\frac{8\pi}{\lambda^4}kT.$$

Это соотношение и выражает закон Релея — Джинса для монохроматического черного излучения. Согласно этому закону излучение увеличивается неограниченно, когда длина волны стремится к нулю, что противоречит экспериментам. Однако было обнаружено, что для больших длин волн оно вполне правильно описывает действительное излучение черного тела.

Исходя из этого, Макс Планк выдвигает свою смелую идею, что молекулы могут обмениваться энергией не в произвольном количестве, а только в количестве, кратном определенной порции энергии ε. Поэтому количество $n\varepsilon$,

[1] Вывод уравнения см., например, [Л. 245].

где n — целое число, выражает обмен энергией на основе молекулярного представления.

Планк показал, что средняя энергия, которую осциллятор поглощает в состоянии равновесия при температуре T, в этом случае уже не будет описываться законом равного распределения, как утверждалось в предыдущем уравнении, а будет выражаться следующим соотношением:

$$E = \frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon/kT)} - 1}.$$

Для малых величин ε показатель степени в знаменателе становится малым. В этом случае функцию e можно разложить в ряд и учесть в нем только два первых члена. В результате получим следующее уравнение:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{kT} - 1} = kT.$$

Поэтому для малых величин ε закон для энергии осциллятора превращается в закон равного распределения. Однако при возрастании величины ε значение энергии E быстро падает и стремиться к нулю.

Планк предполагает, что квант энергии пропорционален частоте осциллятора согласно следующему соотношению:

$$\varepsilon = h\nu. \qquad (13\text{-}17)$$

Таким образом, согласно теории энергия уменьшается при больших частотах или малых длинах волн, что соответствует экспериментальным данным. Было найдено, что множитель h, или так называемое число Планка, является универсальной постоянной. Если подставить новое уравнение для средней энергии, накопленной в линейном осцилляторе, в предыдущее уравнение вместо kT, то получим следующее выражение для плотности энергии при определенной длине волны:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}.$$

Если мы от плотности энергии перейдем к интенсивности излучения, то в конечном счете получим знаменитый закон Планка для интенсивности излучения абсолютно черного тела:

$$i_{bn\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}.$$

Это выражение содержит только одну неизвестную постоянную, а именно величину h, которую можно было бы определить из измерения интенсивности излучения абсолютно черного тела. Это уравнение находится в полном соответствии с результатами экспериментальных определений интенсивности излучения абсолютно черного тела. Его решение привело к представлению, что энергия состоит из определенных частиц, или квантов, подобно материи, которую можно дробить на частицы определенного размера: молекулы, атомы, электроны и т. п.

Этот вывод лег в основу развития современной физики.

13-2. ТВЕРДЫЕ И ЖИДКИЕ ТЕЛА

Излучательные свойства твердых тел и жидкостей в области инфракрасных длин волн характеризуются тем, что почти все они поглощают практически всю падающую энергию в очень тонких слоях, расположенных непосредственно у поверхности, и что испускается излучение также очень тонким слоем.

Вследствие этого уравнение

$$R + \mathbf{A} = 1 \qquad (13\text{-}2)$$

выражает связь между отражательной R и поглощательной А способностями.

Все твердые и жидкие тела отражают часть падающего теплового излучения, а поэтому согласно закону Кирхгофа они излучают меньше тепловой энергии, чем абсолютно черное тело. В отношении свойств теплового излучения между электрическими проводниками и непроводниками в области инфракрасных длин волн существует принципиальная разница.

Проводники отражают большую часть падающего излучения и поэтому излучают сравнительно мало тепловой энергии. Непроводники поглощают большую часть падающего излучения и поэтому излучают сравнительно много тепла.

Это правило неприменимо к излучению в области видимых или более коротких волн. Однако для обеих групп отражательная способность, поглощательная способность и степень черноты меняются с изменением длины волн. На графике рис. 13-9,*а* показана отражательная способность R_λ алюминия для монохроматического излучения; на графике рис. 13-9,*в* дано то же самое для некоторых характерных непроводников. Эти графики заимствованы

у В. Зибера [Л. 246]. На графике рис. 13-9,*с* дается значение поглощательной способности A_λ воды согласно данным Ашкинасса [Л. 247]. Вообще отражательная и поглощательная способности зависят от температуры поверхности.

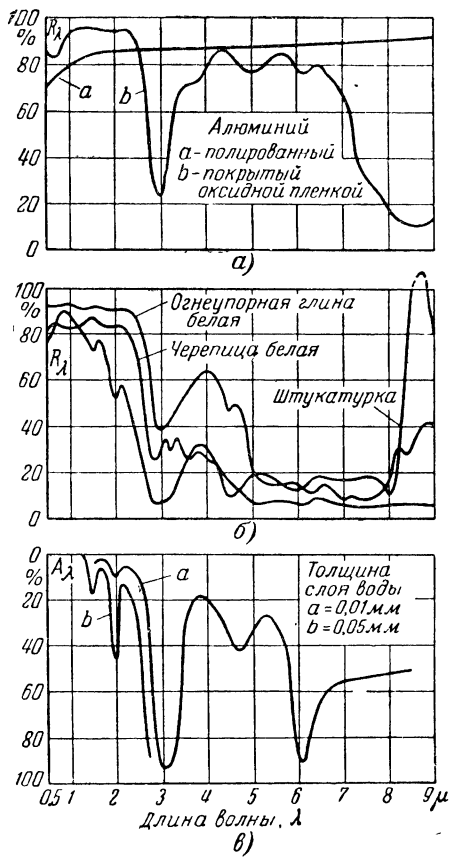


Рис. 13-9. Отражательная и поглощательная способности как функции длин волны для различных материалов [Л. 381].

Все кривые на рисунке вычерчены для поверхности при температуре окружающей среды.

Отшлифованная поверхность алюминия обладает большей отражательной способностью для лучей с более короткой длиной волн. Все металлы ведут себя в этом отношении подобно алюминию. С другой стороны, уравнение (13-2) по-

казывает, что поглощательная способность металлов выше для более коротких волн. Зависимость отражательной способности непроводников от длины волн носит более неправильный характер. Поверхность алюминия, покрытая оксидной пленкой (рис. 13-9,*а*), ведет себя подобно поверхности непроводников. Для непроводников характерно то, что отражательная способность обычно понижается с увеличением длины волн. Высокой отражательной способностью в области коротких волн обладают в особенности поверхности с ярким цветом. На рис. 13-9,*с* изображена поглощательная способность тонких слоев воды. Разница между кривыми *а* и *b* показывает, что слой толщиной 0,01 *мм* еще пропускает измеряемую часть падающего излучения. Поэтому в этом случае уравнением (13-2) нельзя пользоваться для вычисления отражательной способности.

Поверхность, поглощательная способность которой одинакова для волн всех длин, называется серой. На рис. 13-9 приведены графики для поверхностей, которые лишь приблизительно можно назвать серыми. Примером хорошего приближения к свойствам серой поверхности могут служить такие материалы, как шифер, темный линолеум. Эти материалы поглощают 85—92% падающего излучения с длиной волн в интервале 0,5—9 *мк*.

Закон Кирхгофа

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda \qquad (13\text{-}18)$$

можно использовать для вычисления монохроматической излучательной способности по измерениям поглощательной способности.

При технических расчетах наиболее важными являются данные относительно полного излучения, полученного интегрированием по всем длинам волн.

Поэтому в технических справочниках обычно перечисляются общие изучательные свойства поверхностей. Использование этих величин может, однако, привести к значительным ошибкам, если не обеспечить тщательного определения всех свойств. Общая излучательная способность поверхности при температуре T_s определяется как отношение энергии излучения e поверхности к энергии излучения e_b абсолютно черной поверхности при той же температуре:

$$\varepsilon = \frac{e(T_s)}{e_b(T_s)}.$$

Такое же определение приемлемо и для монохроматических величин:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{e_\lambda(T_s)}{e_{b\lambda}(T_s)}.$$

Подставив значения e и e_b

$$e = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda \quad \text{и} \quad e_b = \int_0^\infty e_{b\lambda} d\lambda$$

в это уравнение, получим:

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(T_s)\, e_{b\lambda}(T_s)\, d\lambda}{\int_0^\infty e_{b\lambda}(T_s)\, d\lambda} = f(T_s). \qquad (13\text{-}19)$$

Из этого уравнения видно, какие величины являются функциями температуры поверхности. Излучательная способность ε_λ зависит к тому же от природы поверхности. Полная поглощательная способность поверхности — это отношение поглощенного излучения AH к падающему H. Последнее можно выразить так:

$$H = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda.$$

Если монохроматическую поглощательную способность A_λ определить как отношение монохроматического поглощенного излучения к падающему (монохроматическому) излучению, то вся поглощательная способность может быть выражена так:

$$A = \frac{\int_0^\infty A_\lambda(T_s)\, H_\lambda\, d\lambda}{\int_0^\infty H_\lambda d\lambda}. \qquad (13\text{-}20)$$

Общая поглощательная способность поэтому зависит не только от природы и температуры поглощающей поверхности, но также и от распределения падающего излучения по длинам волн. Точно так же обстоит дело и с полной отражательной способностью.

Такие величины нельзя вносить в таблицу, пока не определена четко природа падающего излучения. Если падающее излучение испускает черное тело при температуре T_i, излучательная способность которого равна $e_b(T_i)$, то

полная поглощательная способность будет выражаться следующим образом:

$$\mathbf{A} = \frac{\int_0^\infty A_\lambda(T_s)\, e_{b\lambda}(T_i)\, d\lambda}{e_b(T_i)} = f(T_s,\ T_i). \qquad (13\text{-}21)$$

Эта поглощательная способность зависит от природы и температуры поглощающей поверхности, а также от температуры падающего излучения черного тела.

Эту величину можно вычислить, если будут известны монохроматическая поглощательная способность и температура T_i. Для нечерного излучения величины могут значительно отличаться друг от друга. Из сравнения уравнений (13-19) и (13-20) видно, что закон Кирхгофа [см. уравнение (13-4)] неверен для полных поглощательной и излучательной способностей поверхности. Только в том случае, когда падающее излучение испускается черным телом и когда его температура равна температуре поглощающей поверхности, уравнение (13-19) становится идентичным уравнениям (13-20) и (13-21). Интегралы в вышеуказанных уравнениях обычно определяются численно или графически. Для получения поглощательной способности падающего излучения черного тела, например, надо каждую ординату кривой на рис. 13-5, взятой для данной температуры, умножить на соответствующую поглощательную способность A_λ (полученную, например, из рис. 13-9). Площадь, ограниченную получившейся кривой, необходимо затем разделить на площадь, ограниченную соответствующей кривой графика (рис. 13-5). Определенные таким образом В. Зибером значения поглощательной и отражательной способностей различных материалов представлены графически на рис. 13-10. Эти кривые наглядно показывают различие в поведении проводников (представленных алюминием) и непроводников. Поглощательная способность непроводников падает с повышением температуры; для проводников картина обратная. Технические излучатели обладают температурой 280—2 780° К. При таком лучеиспускании поглощательная способность непроводников намного превышает поглощательную способность проводников. Солнце обладает температурой 5 500° К. При такой температуре непроводники с белой поверхностью поглощают меньше лучистой энергии, чем металлические поверхности. Лишь немногие металлы, например серебро, обладают

очень небольшой поглощательной способностью излучения видимой части спектра. Для излучения в этой области отражательная способность серебра $R=0{,}96$.

Соотношение, подобное закону Кирхгофа, существует между поглощательной и излучательной способностями только для определенных типов поверхностей. Для серой поверхности A_λ не зависит от длины волны и уравнение (13-20) упрощается, принимая следующий вид:

$$A = A_\lambda(T_s) = \varepsilon_\lambda(T_s) = \varepsilon(T_s). \qquad (13\text{-}22)$$

Поглощательная способность равна излучательной способности поверхности при температуре T_s. К сожалению,

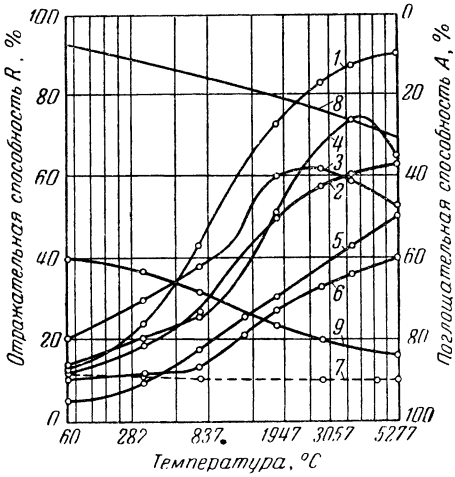


Рис. 13-10. Зависимость отражательной и поглощательной способностей различных материалов от температуры [Л. 381].

в природе существует не слишком много поверхностей, которые можно считать серыми. Для поверхности, монохроматическая поглощаемость которой не зависит от температуры, и для падающего излучения черного тела, учитывая, что $A_\lambda = \varepsilon_\lambda$, уравнение (13-21) принимает вид:

$$A = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda e_{b\lambda}(T_i)\, d\lambda}{e_b(T_i)} = \varepsilon(T_i). \qquad (13\text{-}23)$$

Но при температуре падающего излучения черного тела поглощательная способность равна излучательной способности

поверхности. На основании электромагнитной теории можно показать, что для поверхности металла при температуре T_s и падающего излучения черного тела при температуре T_i справедливо следующее соотношение [Л. 248]:

$$A = \varepsilon(T_m), \tag{13-24}$$

где

$$T_m = \sqrt{T_s T_i}. \tag{13-25}$$

Формулы (13-22)—(13-25) могут быть использованы для подсчета полных поглощательных способностей по табличным значениям излучательных способностей.

Однако для точного подсчета необходимо знать монохроматические величины.

Излучательная способность до сих пор определялась как отношение энергий излучения. Ее также можно определять через интенсивности излучения. Для того чтобы различать эти две величины, первую называют полусферической излучательной способностью

$$\varepsilon = \frac{e}{e_b}, \tag{13-26}$$

а вторую — направленной излучательной способностью

$$\varepsilon_\beta = \frac{i}{i_b}. \tag{13-27}$$

В последнее уравнение нужно подставить значения обеих интенсивностей излучения для рассматриваемого угла β. Если интенсивность излучения поверхности подчиняется закону косинуса, как и излучение абсолютно черного тела, то направленная излучательная способность не зависит от угла β в направлении нормали к поверхности и идентична полусферической излучательной способности.

В действительности же все материалы в некоторой степени проявляют зависимость излучательной способности от угла β. На рис. 13-11 и 13-12 приводятся графики зависимости излучательной способности в различных направлениях для некоторых проводников и непроводников электричества.

В случае справедливости закона косинуса для этих материалов все кривые распределения энергии представляли бы собой окружности. Как видно из рисунков, непроводники обладают меньшими излучательными способностями

для углов излучения в окрестности 90°, чем этого можно было ожидать согласно закону косинуса. Для проводников же излучательная способность сначала увеличивается, а затем уменьшается по мере приближения угла излучения к 90°.

Это уменьшение происходит при очень малых углах и поэтому на рис. 13-11 оно не видно. В табл. П-10 приведены значения полусферической излучательной способности

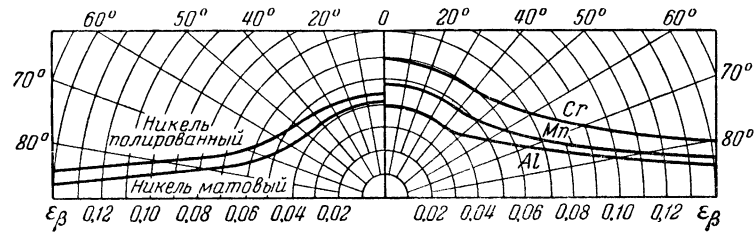


Рис. 13-11. Относительная излучательная способность материалов в различных направлениях [Л. 382].

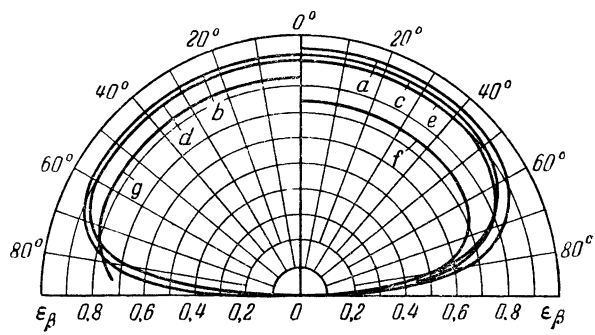


Рис. 13-12. Относительная излучательная способность материалов в различных направлениях [Л. 382].

и величины ε_n в направлении нормали к поверхности. Некоторые теоретические данные относительно соотношения этих двух излучательных способностей будут приведены ниже. Кривые распределения энергии на рис. 13-11 и 13-12 могут быть истолкованы по-другому. Яркость, при которой излучающая поверхность воспринимается глазом, зависит от потока излучения, испускаемого единицей поверхности излучающего тела. Соответственно видимая яркость b определяется как количество излучения, испускаемого в единицу времени с поверхности, деленное на площадь ее

проекции на плоскость, перпендикулярную направлению, с которого эта поверхность рассматривается.

Если рассматривать элемент поверхности dA, расположенный в центре полусферы (см. рис. 13-4), то поток излучения можно обозначить как idA. Проекция dA на поверхность, нормальную к лучу, обозначенному на рисунке i, есть $dA \cos \beta$. Поэтому видимая яркость, при которой обнаруживается поверхность, когда на нее смотрят под углом β, есть

$$b = \frac{i}{\cos \beta}. \tag{13-28}$$

Если мы помножим числитель и знаменатель этого уравнения на i_{bn}, то получим

$$b = \frac{i}{i_b} i_{bn} = \varepsilon_\beta i_{bn}.$$

Поэтому видимая яркость пропорциональна направленной излучательной способности. Оказывается, излучающая абсолютно черная поверхность имеет одинаковую яркость независимо от того, под каким углом на нее смотреть.

Излучающая поверхность металла кажется ярче, если на нее смотреть под большим углом (за исключением углов, близких к 90°), для непроводников же имеет место обратное явление.

Излучающая сфера кажется диском с одинаковой яркостью, когда ее поверхность черная; если она имеет металлическую поверхность, то края ее кажутся ярче, а если ее поверхность — непроводник, то ярче ее центр.

Табл. П-10, в которой приведены значения излучательных способностей ε_n и ε для различных состояний поверхности, указывает на трудность, которая возникает при составлении таких таблиц. Излучательная способность зависит иногда в значительной степени от состояния поверхности, которое часто трудно описать достаточно точно.

Величины излучательной способности зависят также от температуры. Значения излучательной способности различных материалов как функцию температуры можно найти в справочниках, периодической печати и научных докладах. Зная значение полусферической излучательной способности, можно вычислить тепло, излучаемое единицей поверхности при абсолютной температуре T, и энергию излучения e:

$$e = \sigma \varepsilon T^4, \tag{13-29}$$

Отражательная способность R также зависит от направления падающего излучения и для полусферического направленного излучения должна различаться таким же образом, как и поглощательная способность. Согласно уравнению (13-1) отражательная способность выражает всю отраженную энергию независимо от ее распределения в пространстве.

В отношении распределения энергии отраженного излучения различают зеркальное и диффузное отражения, которые осуществляются в действительности лишь приближенно. На графиках рис. 13-13 и 13-14 приводятся опытные данные относительно излучения абсолютно черного тела при температуре 260° С, падающего нормально на различные поверхности. Пучок падающих лучей расходится под углом 6°. Из графика рис. 13-13

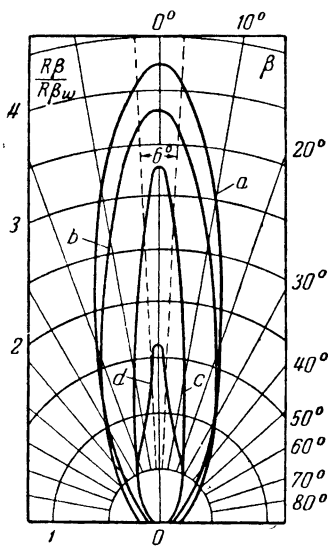


Рис. 13-13. Отражательная способность материалов относительно излучения абсолютно черного тела [Л. 383].

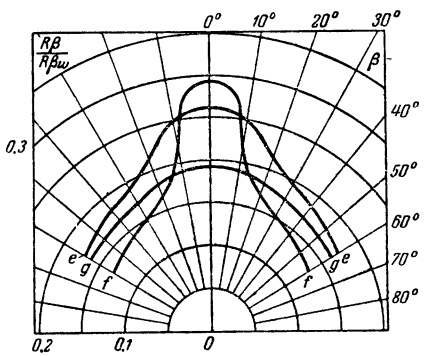


Рис. 13-14. Отражательная способность материалов относительно излучения абсолютно черного тела [Л. 383].

видно, что поверхности, кажущиеся для глаза зеркальными, отражают гораздо больше тепловых лучей в направлении отраженных видимых лучей света, чем в каких-либо других направлениях.

С другой стороны, можно утверждать, что зеркальное и полное диффузное отражения возможны только в идеальных случаях, к которым существующие в природе поверхности лишь приближаются.

Теперь коротко рассмотрим данные об излучательных

свойствах твердых тел и жидкостей, которые можно получить на основе электромагнитной теории. По этой теории радиация представляет собой комбинацию электрических и магнитных волн, а величины поглощательной и отражательной способностей вычисляются путем применения законов отражения таких волн на поверхности раздела веществ, которые различаются по своим электрическим свойствам.

Оказалось, что предсказания, основанные на этой теории, соответствуют экспериментальным данным, так что их можно использовать для суждения об излучательных свойствах тех материалов, для которых невозможно получить данные путем измерения, если рассматриваемое излучение находится главным образом в инфракрасной области.

Последнее условие выполнимо практически во всех технических применениях, касающихся излучения на земле. Самые высокие температуры, получаемые при воспламенении (в ракетах), — это температуры порядка 2 800° С. Но даже для этой температуры излучение черного тела имеет место главным образом в пределах инфракрасного излучения согласно рис. 13-5. Солнечное излучение в значительной степени находится в видимой части, и последующие соотношения нельзя применять к поглощению или отражению этого излучения.

Электромагнитная теория различает два типа материалов: проводники и непроводники электричества. Для проводников она устанавливает соотношение между свойствами излучения и удельным сопротивлением ρ_e. Для излучательной способности в направлении, перпендикулярном поверхности, выведено следующее уравнение:

$$\varepsilon_n = 0{,}576\sqrt{\rho_e T} - 0{,}124\rho_e T. \qquad (13\text{-}30)$$

Электрическое удельное сопротивление следует выражать в этой формуле в ом-сантиметрах, а температуру — в градусах Кельвина. Это соотношение согласуется с измерениями в пределах 20%.

Полезное соотношение было получено также Э. Шмидтом и Э. Эккертом [Л. 249] для коэффициента $\varepsilon/\varepsilon_n$. Кривые на рис. 13-15 построены по данным теории для проводников и непроводников. Точки показывают результаты измерений. Как видно из графика, теоретические и экспериментальные данные находятся в хорошем согласии. Вычисления также показывают, что для больших углов β излучение, испускаемое или поглощаемое поверхностью металла,

очень сильно поляризуется. Значительно преобладает колебание волн в направлении, параллельном плоскости падения (плоскости, проходящей через падающий луч и перпендикуляр к поверхности). Это можно легко понять на основании качественных соображений.

Проводник электричества характеризуется тем, что его электроны очень подвижны. Если электрическая волна ударится о поверхность в перпендикулярном направлении, то электроны без труда могут последовать за колеблю-

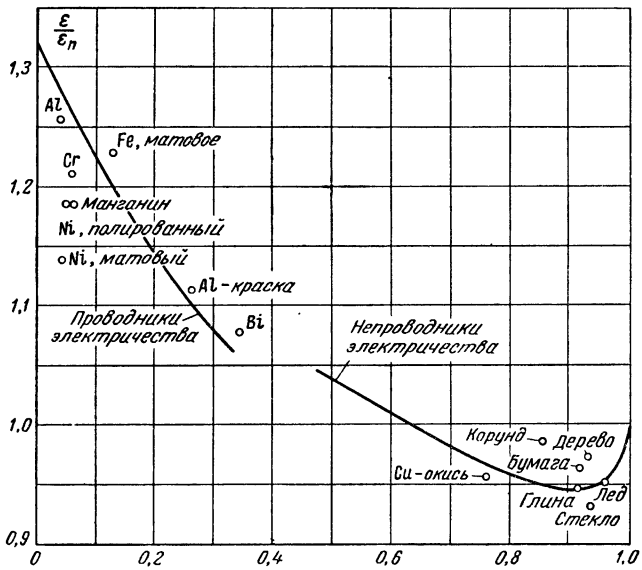


Рис. 13-15. Теоретические и экспериментальные значения отношения полусферической излучательной способности к нормальной [Л. 382].

щимся электрическим полем, благодаря чему поле внутри проводника не возникает. Это означает, что волна отразится от поверхности.

Такое же положение будет, когда волна падает (отражается) под углом β, пока плоскость, в которой она колеблется, перпендикулярна плоскости падения. Если бы колебания происходили в плоскости падения, то электронам вблизи поверхности пришлось бы проникнуть через поверхность, чтобы последовать за колеблющимся электрическим полем. Так как они не могут этого сделать, то бо́льшая часть падающей волны проникает внутрь проводника,

Для непроводников эта теория связывает излучательные свойства с показателем преломления. Это соотношение не всегда может быть использовано, так как для промышленных материалов показатели преломления обычно неизвестны. Однако теория позволяет также вычислить пространственное распределение испускаемого излучения, причем результаты вычисления хорошо согласуются с экспериментальными данными и, таким образом, приводят к соотношениям, указанным на рис. 13-15.

В основе метода определения поглощательной способности поверхности металла для падающего черного излучения по ее излучательной способности, которая выражается уравнениями (13-24) и (13-15), также лежит электромагнитная теория.

13-3. ГАЗЫ

Газы обычно испускают и поглощают излучение, теряя или приобретая энергию, содержащуюся внутри молекул. Такие колебания энергии могут быть вызваны изменениями вращательного движения молекул или вибрации атомов внутри молекулы, изменением орбит электронов и, наконец, изменением положения ядер. Они происходят квантами, определенными порциями; величина энергии одной порции будет наименьшей для изменений вращения и наибольшей для изменений расположения ядра. Согласно уравнению Планка (13-17) излучение, связанное с меньшим квантом, имеет меньшую частоту или бóльшую длину волны. Чем больше порция энергии, тем меньше длина волны соответствующего излучения. Излучение называется тепловым излучением, когда газ, по крайней мере в отдельных местах, близко приближается к состоянию теплового равновесия. Изменение энергии молекул вызывается столкновениями, которые обладают значительной кинетической энергией. Чем выше температура, тем больше энергия кванта, которая может быть освобождена при столкновениях молекул, и, следовательно, тем короче длина волны испускаемого излучения.

При температурах в интервале до 2 760° С, которые встречаются в нормальных промышленных условиях, величина излучения связана с изменениями энергии вращения и вибрации молекул.

Соответствующее излучение имеет длины волн в интервале 1—30 *мк* (см. рис. 13-5). Благодаря изменениям орбит электронов излучение перемещается в видимую часть. Это излучение вносит существенный вклад в общую энергию

только при очень высоких температурах, близких к температуре Солнца. Изменения в ядрах в конечном итоге приводят к тому, что волны излучения становятся чрезвычайно короткими (см. рис. 13-1).

В этом разделе будет рассматриваться только инфракрасное излучение. Атомы при своем вращательном и колебательном движении ведут себя, как маленькие передатчики электромагнитных волн, так как с ними обычно связаны электрические заряды.

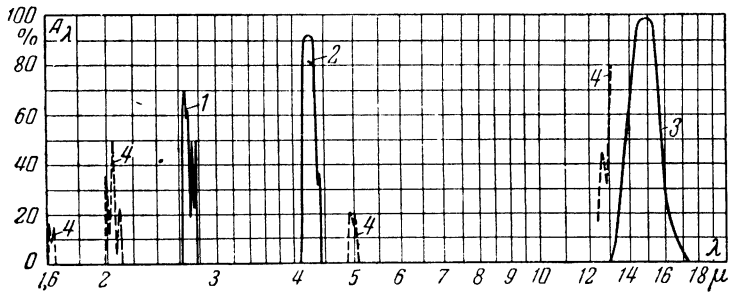


Рис. 13-16. Полосы поглощения углекислоты.
1—5 *см*; *2*—3 *см*; *3*—6,3 *см*; *4*—100 *см*.

Газы, которые состоят из атомов одного и того же рода, характеризуются тем, что атомы не обладают зарядами свободного электричества. Такие газы, как водород, кислород и азот, не излучают тепловой энергии и совершенно прозрачны для тепловых лучей, излучаемых каким-нибудь посторонним телом. Для технических расчетов большое значение имеет тепловое излучение углекислого газа и водяных паров, так как оба эти газа являются хорошими излучателями и присутствуют в больших количествах в газообразных продуктах горения. Окись углерода, сернистый ангидрид и метан также хорошо излучают тепловую энергию, но присутствуют обычно в небольших концентрациях. На рис. 13-16 и 13-17 показаны спектры поглощения углекислоты и водяного пара. Из этих рисунков видно, что газы ведут себя не так, как твердые и жидкие тела, поскольку они излучают и поглощают лучистую энергию лишь определенных узких областей спектра. Для водяного пара эти области лежат сравнительно близко друг к другу. Излучение происходит главным образом в области с длиной волн более 1 *мк*, поэтому оно невидимо для глаза. Из ри-

сунков также видно, что в отличие от твердых и жидких тел для поглощения большей части падающего излучения необходим очень толстый слой газа.

Если монохроматический пучок обладает интенсивностью B_λ после прохождения расстояния s в абсорбирующем газе, то величина dB_λ, на которую уменьшается

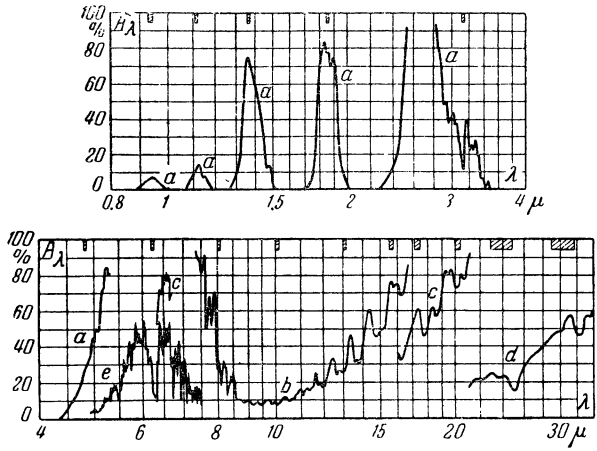


Рис. 13-17. Полосы поглощения водяного пара [Л. 384].

интенсивность благодаря поглощению на следующем отрезке пути ds, выражается уравнением

$$\frac{dB_\lambda}{B_\lambda} = -a_\lambda ds. \qquad (13\text{-}31)$$

Показатель степени a_λ называется коэффициентом поглощения.

Можно предположить, что a_λ в первом приближении пропорционально количеству молекул на единицу объема и увеличивается с температурой. Из рис. 13-16 и 13-17 видно, что a_λ также сильно зависит от длины волны. Количество молекул при постоянной температуре пропорционально давлению. В действительности было обнаружено, что коэффициент поглощения увеличивается с давлением сравнительно быстрее, чем линейно. Можно было бы предполагать, что в смеси абсорбирующего газа с неабсорбирующим коэффициент абсорбции окажется пропорциональным парциальному давлению абсорбирующего газа.

Уравнение (13-31) можно проинтегрировать, когда температура и концентрация абсорбирующего газа в газовой смеси постоянны. В результате $B_\lambda = B_{\lambda 0} e^{-a_\lambda s}$, где $B_{\lambda 0}$ — интенсивность, с которой пучок излучения попадает в газ (при $s=0$).

Согласно определению коэффициент пропускания слоя единичной толщины, пропускательная способность газового слоя толщиной s, есть

$$D_\lambda = e^{-a_\lambda s} \tag{13-32}$$

и поглощательная способность

$$A_\lambda = 1 - e^{-a_\lambda s}. \tag{13-33}$$

Такое же уравнение в соответствии с законом Кирхгофа выражает излучательную способность ε_λ.

Следует отметить, что излучательные свойства D_λ, A_λ и ε_λ определялись для газа несколько отлично от того, как они определялись для твердых тел и жидкостей, для которых за исходную величину принималась энергия излучения H, падающая на поверхность.

В уравнениях же (13-32) и (13-33) исходной величиной является лучистая энергия B, проникающая из поверхности раздела в газ. Разница, однако, очень мала, так как отражательная способность поверхности раздела «газ — вакуум» или «газ — газ» очень мала.

На основе рассуждений, касающихся параметров, от которых зависит коэффициент поглощения, можно предположить, что монохроматический коэффициент пропускания, поглощательная способность и излучательная способность зависят при данной температуре главным образом от произведения толщины слоя s на давление p или парциальное давление p_p абсорбирующего и излучающего газов. Эту зависимость иногда называют законом Бэра. Ниже будет показано, что этот закон можно рассматривать только как приближенный.

При практических расчетах теплообмена важно знать общее количество тепла, испускаемого в виде лучистой энергии всего спектра. После того как А. Шак [Л. 250] подчеркнул важность излучательной способности газов для процессов теплообмена в топках и паровых котлах, в этой области было проделано много экспериментальных исследований [Л. 251 и 252].

На рис. 13-18 изображен график зависимости степени черноты углекислоты от произведения из парциального давления на толщину слоя для различных температур. Графиком можно пользоваться, если полное давление смеси 1 *ата*. Степень черноты определяется так же, как и для твердых тел, а именно путем сопоставления лучеиспускания газа с лучеиспусканием черного тела при одной и той же температуре [формула (13-29)]. Э. Эккерт производил

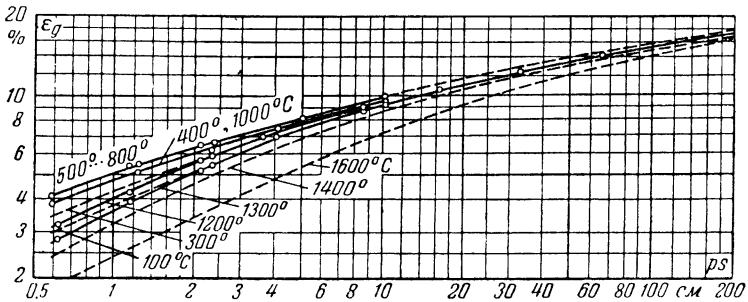


Рис. 13-18. Степень черноты углекислоты в смеси с азотом или воздухом.

s — толщина газового слоя; p_p — парциальное давление CO_2; общее давление 1 *ат* [Л. 385].

опыты со смесями углекислого газа и азота при различных парциальных давлениях и различной толщине слоя газовой смеси и доказал справедливость закона Бэра для углекислоты. Хоттел и Мангельсдорф производили опыты со смесями углекислоты с воздухом. Результаты обеих серий опытов хорошо согласуются друг с другом. Лишь значения, экстраполированные для более высоких температур, показывают более значительные расхождения. Значения, найденные Хоттелом, более низки. Так как и теоретические изыскания Швидэссена показывают, что степень черноты понижается при более высоких температурах, то на графике рис. 13-18 дается также взятая у Хоттела кривая для 1 600° С.

Первые измерения при проведении опытов с водяным паром были выполнены Э. Шмидтом [Л. 253]. Он производил эксперименты со слоями чистого водяного пара различной толщины. Данные опытов Хоттела и Мангельсдорфа со смесями водяного пара и воздуха при толщине слоя 550 *мм* хорошо согласуются с результатами Шмидта для

высоких парциальных давлений водяного пара, но оказываются гораздо более низкими для небольших парциальных давлений. Объяснение этому явлению было найдено Э. Шмидтом и Э. Эккертом [Л. 254]. Они показали, что закон Бэра несправедлив для водяного пара, что степень черноты этого газа при постоянном значении произведения парциального давления на толщину слоя меньше для небольших парциальных давлений. Это можно учитывать путем введения поправочного коэффициента, меньшего единицы, на который надо умножить степень черноты, если парциальное давление меньше 1 *ат*. На графике рис. 13-19 дается степень черноты водяного пара по Шмидту для различных температур (°С) при атмосферном давлении. В нижнем углу изображен вспомогательный график значений поправочного коэффициента f, на который надо умножить величины, взятые из основного графика, когда парциальное давление паров воды меньше 1. Этот коэффициент является средней величиной, взятой из работы Швидэссена [Л. 255], который сравнил все существующие данные и экстраполировал их для более высоких температур. В них также учитываются результаты новых измерений [Л. 256]. Измерения, произведенные Шмидтом и Эккертом, указывают на малую зависимость поправочного коэффициента от температуры газа. Это не учитывается вспомогательным графиком рис. 13-19.

Все измерения производились при общем давлении смеси, равном 1 *ат*. При более высоких давлениях интенсивность излучения повышается, так как при данной толщине слоя газа количество лучеиспускающих молекул возрастает. Однако вероятно, что при повышении давления усиливается излучение любой отдельно взятой молекулы. В книге Мак Адамса [Л. 257] в разделе, написанном Хоттелем, посвященном излучению, содержатся диаграммы, по которым можно определить влияние полного давления.

В технических подсчетах часто приходится рассматривать смеси водяного пара и двуокиси углерода с неизлучающими газами. Вообще монохроматическая поглощательная способность смеси двух газов 1 и 2 с коэффициентами поглощения $a_{\lambda 1}$ и $a_{\lambda 2}$ выражается следующим образом:

$$A_\lambda = 1 - e^{-(a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2})s}. \qquad (13\text{-}34)$$

При этом предполагается, что данные два газа не влияют друг на друга при поглощении.

Полученная в результате поглощательная способность A_λ меньше суммы поглощательных способностей каждого из данных двух газов в отдельности.

Такое же утверждение справедливо для излучательной способности.

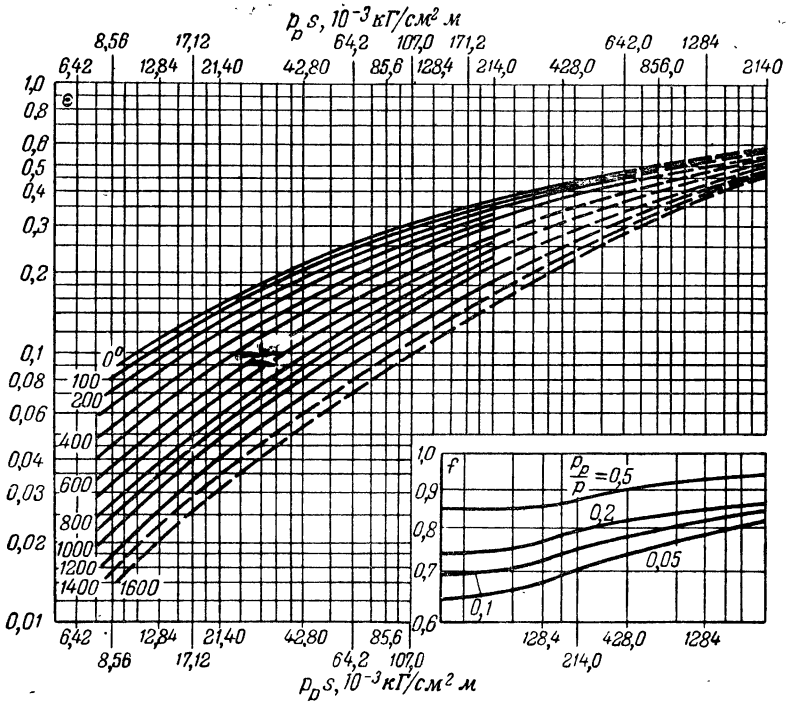


Рис. 13-19. Степень черноты водяного пара в смеси с азотом или воздухом.

s — толщина газового слоя; p_p — парциальное давление водяного пара; общее давление 1 *ат*. Когда парциальное давление p_p не равно единице, излучательные способности, взятые на большом графике, следует умножить на f малого графика.

В табл. 13-3 внесены соответствующие поправки $\Delta\varepsilon$, которые нужно вычесть из суммы отдельных излучательных способностей водяного пара и двуокиси углерода для того, чтобы получить излучение смеси обоих газов.

При определении поглощательных способностей по полным излучательным способностям для газов имеют место такие же трудности, как и для твердых веществ.

Таблица 13-3

Поправка $\Delta\varepsilon$ для одновременного излучения H_2O и CO_2 (по данным Э. Эккерта [Л. 385])

$$H_2O + CO_2 = H_2O + CO_2 - \Delta\varepsilon$$

CO_2, *см·ата*	H_2O, *см·ата*			Температура смеси, °С
	5	30	100	
5	0,000	0,014	0,034	400
	0,003	0,012	0,018	800
	0,007	0,020	0,035	1 200
30	0,000	0,017	0,043	400
	0,008	0,024	0,032	800
	0,018	0,047	0,052	1 200
100	0,000	0,017	0,043	400
	0,013	0,025	0,033	800
	0,030	0,049	0,054	1 200

По закону Кирхгофа полную поглощательную способность газа можно точно определить только для падающего излучения, испускаемого абсолютно черным телом, обладающим температурой, равной температуре газа. Выше было показано, что поглощательные способности, вычисленные при помощи уравнения (13-4), справедливы с хорошим приближением для обмена излучением газа с абсолютно черной поверхностью, пока температура газа выше температуры поверхности излучающего тела.

Некоторые соображения относительно обратного положения, приведены в разделе Хоттела в книге Мак Адамса [Л. 258]. Для более точного определения поглощательных способностей и коэффициентов пропускания слоя единичной толщины понадобилось бы знание монохроматических излучательных способностей.

Уравнение (13-33) касается излучения, проходящего через газ в определенном направлении. Если поглощательная способность равна излучательной, то уравнение (13-33) надо рассматривать как отношение интенсивностей:

$$\varepsilon_{\lambda,\beta} = \frac{i_\lambda}{i_{b\lambda}} = 1 - e^{-a_\lambda s}. \qquad (13\text{-}35)$$

При расчете теплообмена излучением главным образом интересуются потоком энергии, который падает со всех сторон на некоторый участок dA на границе газообразного тела. Подсчет будет проводиться для монохроматического излучения. Поток излучения, падающий на единицу по-

верхности в единицу времени (энергия излучения) выражается уравнением

$$e_\lambda = \int i_\lambda d\omega,$$

где $d\omega$ — бесконечно малый пространственный угол.

Для сферической системы координат с началом отсчета на dA пространственный угол $d\omega$ можно выразить двумя углами: β и φ. Учитывая дополнительно уравнение (13-35), для энергии излучения можно написать следующее соотношение:

$$e_\lambda = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} (1 - e^{-a_\lambda s}) i_{b\lambda} \sin\beta \cdot d\beta \cdot d\varphi.$$

Монохроматическую излучательную способность полусферы можно определить как отношение энергии излучения e_λ к энергии излучения абсолютно черной поверхности при той же температуре:

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = \frac{e_\lambda}{e_{b\lambda}} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} (1 - e^{-a_\lambda s}) \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot d\beta \cdot d\varphi. \quad (13\text{-}36)$$

Это уравнение можно проинтегрировать для конкретной формы излучающего газообразного тела. Интегрирование уравнения (13-36) произведено Нуссельтом, Якобом, Шмидтом и Эккертом. В качестве примера интегрирование можно осуществить для объема газа (цилиндрической формы, показанной на рис. 13-20; решение примера было получено Шмидтом [Л. 259].

Пример 13-1. Необходимо вычислить излучение объема газа цилиндрической формы с одинаковыми температурой и концентрацией на элемент площади dA, расположенный в центре его основания (рис. 13-20). Благодаря вращательной осевой симметрии конфигурации интегрировать уравнение (13-36) по углу φ можно сразу же. В результате получим:

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-a_\lambda s}) \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot d\beta.$$

Интегрирование по углу β следует проводить последовательно: от $\beta = 0$ до $\beta = \beta_0$ и от β_0 до $\beta = \pi/2$. Для первой части излучательная способность

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = -2 \int_0^{\beta_0} [1 - e^{-a_\lambda (h/\cos\beta)}] \cos\beta \cdot d(\cos\beta).$$

Введя новую переменную

$$\xi = \frac{a_\lambda h}{\cos\beta},$$

получим следующее выражение:

$$\overline{\varepsilon}_\lambda = 2(a_\lambda h)^2 \int_{ah}^{ah/\cos\beta_0} (1 - e^{-\xi}) \frac{d\xi}{\xi^3}.$$

Теперь интеграл может быть взят интегрированием по частям:

$$\overline{\varepsilon}_\lambda = (a_\lambda h)^2 \left| -\frac{1}{\xi^2} + \frac{R-\xi}{\xi^2} - \frac{e^{-\xi}}{\xi} - Ei(-\xi) \right|_{a_\lambda h}^{a_\lambda h/\cos\beta_0}.$$

Функция $Ei(-\xi) = \int_0^z \frac{e^{-x}}{x} dx$ называется интегральным логарифмом и приводится в виде таблиц [Л. 260].

Аналогично интегрируется другая часть. Сумма обеих излучательных способностей, полученная таким образом, представляет собой излучательную способность для цилиндрической формы газа.

Эту величину можно использовать для подсчета излучательной способности газообразного тела в форме параллелепипеда в любое место его поверхности. Последнее иллюстрируется рис. 13-21. Предположим, что надо определить излучательную способность газообразного вещества в элемент площади 1. В этом случае газообразное тело можно разбить на клиновидные части, как показано на рисунке. Излучательную способность для любого клина получим по излучательной способности для цилиндра, изображенного на рис. 13-20, умножением последней на отношение $\Delta\varphi/2\pi$. В результате суммирования или интегрирования по всем клиньям, из которых состоит газообразное тело, изобра-

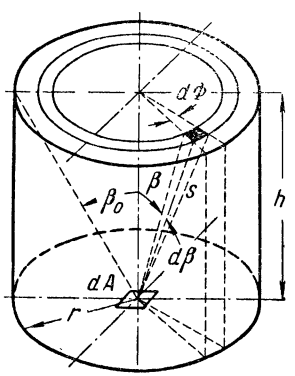


Рис. 13-20. К вычислению излучения цилиндрического газового объема.

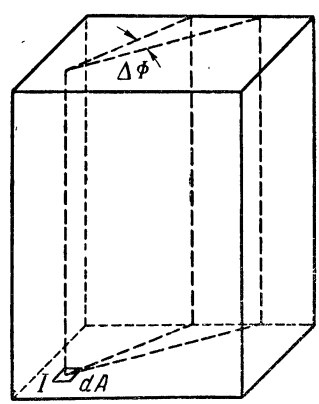


Рис. 13-21. К вычислению излучения газа.

женное на рис. 13-21, получим локальную излучательную способность на элемент dA для параллелепипеда.

Чтобы получить среднюю излучательную способность, которая выражает обмен излучением между газообразным телом и определенной площадью его поверхности, следует произвести еще одно интегрирование. Такая средняя излучательная способность характеризует, например, обмен излучением между газообразным телом, изображенным на рис. 13-21, и любым из прямоугольников, из которых состоит поверхность.

Очень простое выражение можно получить для средней излучательной способности, газообразного тела произвольной формы и окружающей его поверхности при условии, что самопоглощение газа ничтожно мало. Для этого необходимо, чтобы коэффициент поглощения a_λ или размеры газообразного тела были малы. В этом случае экспонента в выражении

$$\varepsilon_\lambda = 1 - e^{-a_\lambda s}$$

может быть разложена в ряд и этот ряд можно ограничить двумя членами. В результате этого получим уравнение, выражающее излучательную способность газа с ничтожно малым самопоглощением:

$$\varepsilon_\lambda = a_\lambda s. \qquad (13\text{-}37)$$

На рис. 13-22 изображено такое газообразное тело, имеющее объем V с площадью поверхности A. Сначала выведем выражение для части излучения с длиной волны λ, испускаемого элементом объема dV, которое попадает на элемент поверхности dA. Если элемент объема виден с площадки dA под пространственным углом $d\omega$, то тепло, излучаемое на элемент dA в единицу времени, можно выразить таким образом:

$$d^2q_\lambda = di_\lambda d\omega dA.$$

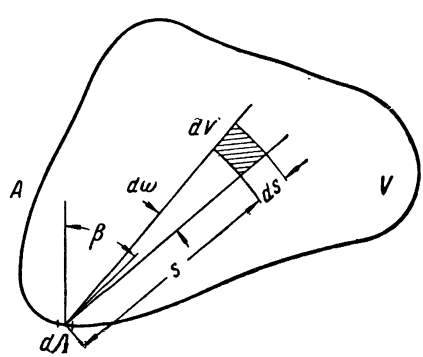


Рис. 13-22. Вычисление средней полусферической излучательной способности газа с ничтожно малым самопоглощением.

Член di_λ указывает на то, что энергия излучается элементом объема dV на единицу пространственного угла в направ-

лении $d\omega$. Если элемент объема толщиной ds обладает излучательной способностью $d\varepsilon_\lambda = a_\lambda ds$, то это уравнение примет вид:

$$d^2q_\lambda = i_{b\lambda} d\varepsilon_\lambda d\omega dA = \frac{e_{b\lambda}}{\pi} \cos\beta \cdot a_\lambda \cdot ds d\omega dA.$$

Сам элемент объема можно выразить следующим образом:

$$dV = s^2 d\omega ds.$$

Поэтому выражение для лучистого потока тепла, попадающего на элемент поверхности, примет вид:

$$d^2q_\lambda = \frac{e_{b\lambda}}{\pi} a_\lambda dV \frac{\cos\beta \cdot dA}{s^2}.$$

Член $\cos\beta \cdot dA/s^2$ в этом уравнении можно рассматривать как пространственный угол $d\Omega$, под которым площадь dA видна из элемента объема dV.

Таким образом,

$$d^2q_\lambda = \frac{e_{b\lambda}}{\pi} a_\lambda dV d\Omega.$$

Полный обмен энергией между элементом объема dV и всей площадью поверхности A газообразного тела определяется в результате интегрирования вышеприведенного уравнения по всей поверхности, окружающей dV:

$$dq_\lambda = \frac{e_{b\lambda}}{\pi} a_\lambda dV 4\pi = 4a_\lambda e_{b\lambda} dV.$$

Проинтегрировав еще раз, получим выражение для монохроматического излучения, испускаемого всем объемом V, падающего на его поверхность A:

$$q_\lambda = 4a_\lambda e_{b\lambda} V. \qquad (13\text{-}38)$$

Поскольку средняя полусферическая излучательная способность газообразного тела на его поверхность A равна $\bar{\varepsilon}_\lambda$, то поток лучистого тепла может быть выражен так:

$$q_\lambda = \bar{\varepsilon}_\lambda e_{b\lambda} A.$$

В результате для средней полусферической излучательной способности газообразного тела с ничтожно малым самопоглощением на его поверхность получим следующее выражение:

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = \frac{4V}{A} a_\lambda. \qquad (13\text{-}39)$$

Локальную полусферическую излучательную способность газообразного тела полусферической формы в центр его основания можно определить сразу путем интегрирования уравне-

ния (13-36). Длина пути в этом случае равна радиусу полусферы r и поэтому не зависит от угла. В результате для монохроматической излучательной способности полусферы получим:

$$\varepsilon_{\lambda H} = 2\int_0^{\pi/2} (1 - e^{-a_\lambda r}) \cos\beta \, d(\cos\beta) = 1 - e^{-a_\lambda r}. \qquad (13\text{-}40)$$

Для других форм интегрирование уравнения (13-36) обычно очень громоздко. Х. Хоттел для технических расчетов предложил простой способ получения приближенных значений излучательной способности газообразных тел. Он показал, что для каждой конкретной формы газообразного тела может быть найдена полусфера эквивалентного радиуса L_e таким образом, чтобы отношение $\bar{\varepsilon}_\lambda/\varepsilon_{\lambda H}$ было равно 1 с точностью до $\pm 10\%$ для всех значений $a_\lambda s$, наиболее часто встречающихся в технике (между 0,05 и бесконечностью).

В табл. 13-4 приведены значения эквивалентного радиуса для газовых объемов различных форм, а график на рис. 13-23

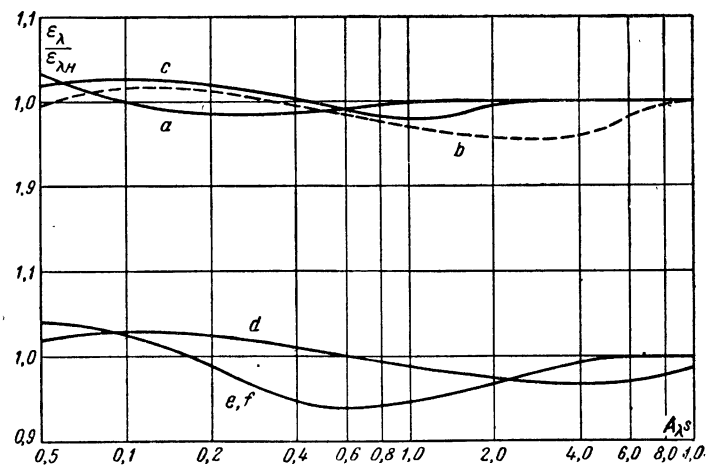


Рис. 13-23. Отношения средней полусферической излучательной способности ε_λ различных геометрических форм газа к излучательной способности $\varepsilon_{\lambda H}$ полусферы в центр ее основания.

Кривые a—f относятся к первым шести геометрическим формам, приведенным в табл. 13-4 в алфавитном порядке. Длина s — размер d, r или e, а $\varepsilon_{\lambda H}$ — излучательная способность полусферы с радиусом L_e, как указано в таблице [Л. 385].

представляет отношение $\bar{\varepsilon}_\lambda/\varepsilon_{\lambda H}$ как функцию $a_\lambda s$ для некоторых форм и для значений L_e из табл. 13-4.

Таблица 13-4

Эквивалентный радиус L_e газовых объемов различной формы (по данным Х. Хоттела и Э. Эккерта)

Форма газового объема	
Круглый цилиндр: высота = диаметру = d	
Излучение в центр основания	$0{,}77d$
Круглый цилиндр: высота = ∞, диаметр = d	
Излучение на выпуклую поверхность	$0{,}95d$
Цилиндр: высота=∞, основание—полукруг с радиусом r	
Излучение в центр плоской прямоугольной поверхности	$1{,}26r$
Сфера: диаметр = d	
Излучение на поверхность	$0{,}65d$
Объем между двумя бесконечными плоскостями, находящимися на расстоянии l друг от друга	
Излучение на плоскости	$1{,}8l$
Круглый цилиндр: высота = ∞, диаметр = d	
Излучение в центр основания	$0{,}9d$
Пучок труб[1]	
В треугольном расположении:	
$s = 2d$	$3{,}0\,(s-d)$
$s = 3d$	$3{,}8\,(s-d)$
В квадратном расположении	
$s = 2d$	$3{,}5\,(s-d)$
Куб: длина = a	
Излучение на каждую плоскость поверхности	$0{,}66a$

[1] s — расстоянию между центрами труб;
d — диаметр трубы.

Эквивалентный радиус для газового объема с ничтожно малой самопоглощаемостью может быть определен из уравнения (13-39). Локальная излучательная способность газообразного тела полусферической формы с радиусом L_e и ничтожно малым самопоглощением в центр его основания выражается следующим образом:

$$\varepsilon_{\lambda H} = a_\lambda L_e.$$

Замечая, что излучательная способность равна излучательной способности, выраженной уравнением (13-39), имеем:

$$L_e = \frac{4V}{A}. \qquad (13\text{-}41)$$

Х. Хаузен и Ф. Порт [Л. 261] нашли, что последнее уравнение можно использовать для получения величины, очень

близкой к эквивалентному радиусу газообразного тела с параметром $a_\lambda s$ в интервале, обычно встречающемся в технических расчетах, если правую его часть умножить на 0,9.

Легко проверить, что уравнение (13-41), помноженное на этот множитель, очень хорошо согласуется со значениями эквивалентного радиуса, содержащимися в табл. 13-4. Следует отметить, что формула (13-41) очень похожа на выражение для гидравлического диаметра трубы.

Если требуется определить полное излучение газового тела, то необходимо провести интегрирование по всем длинам волн, используя уравнение (13-36).

При использовании аппроксимации, основанной на эквивалентном радиусе, такое интегрирование производить нет надобности, так как эквивалентный радиус годен для любого значения параметра $a_\lambda s$. Поэтому эквивалентный радиус можно использовать непосредственно в связи с рис. 13-18 и 13-19 для того, чтобы получить полусферическую излучательную способность $\bar{\varepsilon}$. Поток энергии от газового тела с температурой T_g на единицу поверхности dA можно затем определить из уравнения

$$e = \bar{\varepsilon}\sigma T_g^4 . \qquad (13\text{-}42)$$

ЗАДАЧИ

13-1. Определите общую излучательную способность (проинтегрированную по всем длинам волн) поверхности алюминия, покрытой оксидной пленкой, предположив, что температура поверхности равна 150° С и что поглощательная способность, взятая из графика на рис. 13-9,*а* представляет собой монохроматическую излучательную способность такой поверхности (излучательную способность для длин волн короче 9 *мк* примите равной значению при 9 *мк*).

13-2. Определите общую поглощательную способность поверхности, рассматриваемой в задаче 13-1 для черного излучения с температурой 1 000° С, если температура поверхности 150° С.

Предполагается, что для данного случая приемлема монохроматическая излучательная способность, взятая из графика на рис. 13-9,*а*.

13-3. Определите общую поглощательную способность поверхности, рассматриваемой в задаче 13-1 для падающего излучения, испускаемого поверхностью из огнеупорной глины при температуре 1 000° С. Полагается, что поглощательная способность, определенная по соответствующей кривой на рис. 13-9,*в*, представляет собой излучательную способность огнеупорной глины при той же температуре.

13-4. Подсчитайте общую полусферическую излучательную способность стекла по кривой распределения, изображенной на рис. 13-12.

13-5. Определите монохроматическую излучательную способность газового слоя между двумя параллельными плоскостями, используя уравнение (13-36), и проверьте значение $L_e = 1{,}8\,l$, приведенное в табл. 13-4.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН

14-1. АБСОЛЮТНО ЧЕРНЫЕ ТЕЛА

Теплообмен между двумя элементами поверхности. Когда различно нагретые тела с абсолютно черной поверхностью расположены так, что лучи беспрепятственно проходят от одного тела к другому, каждое тело излучает тепло в сторону других тел и поглощает тепло, излучаемое другими телами. Более сильно нагретые тела теряют излучением больше энергии, чем поглощают. Для более холодных тел справедливо обратное. Таким образом, между горячими и холодными телами возникает лучистый теплообмен, который и будет рассмотрен в последующем изложении. В этой главе предполагается, что поверхность излучающих тел абсолютно черная. На рис. 14-1 dA_1 и dA_2 представляет собой элементы поверхности двух излучающих тел. Расстояние между ними s. Углы, образуемые нормалями к поверхностям с линией, соединяющей оба тела s, соответственно равны β_1 и β_2. Тогда согласно формулам (13-6) и (13-7) энергия d^2Q_{b1}, излучаемая за единицу времени поверхностью dA в пределах телесного угла, под которым видна поверхность dA_2, будет равна:

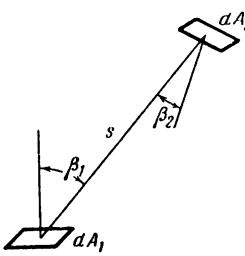


Рис. 14-1. Лучистый теплообмен между двумя элементами поверхности.

$$d^2Q_{b1} = i_{bn1} \cos\beta_1 d\omega_1 dA_1, \qquad (14\text{-}1)$$

где i_{bn1} — интенсивность излучения элемента dA_1 в нормальном направлении и $d\omega_1$ — телесный угол, под которым элемент dA_2 виден с элемента dA_1. Отсюда

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos\beta_2}{s^2}. \qquad (14\text{-}2)$$

Подставив это выражение в уравнение (14-1), получим:

$$d^2Q_{b1} = i_{bn1} \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{s^2} dA_1 dA_2.$$

Это тепло поглощается абсолютно черной поверхностью dA_2.

Таким же образом находим выражение для энергии, излучаемой элементом dA_2 к элементу dA_1:

$$d^2Q_{b2} = i_{bn2} \cos\beta_2 \cdot d\omega_2 dA_2 = i_{bn2} \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{s^2} dA_1 dA_2. \quad (14\text{-}3)$$

Все это количество тепла поглощается абсолютно черной поверхностью dA_1. В результате лучистого теплообмена от элемента dA_1 к dA_2 передается следующее количество тепла:

$$d^2Q_b = d^2Q_{b1} - d^2Q_{b2} = (i_{bn1} - i_{bn2}) \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{s^2} dA_1 dA_2.$$

Интенсивность излучения i_{bn1} абсолютно черного тела в направлении, нормальном к поверхности, определяется из формулы

$$i_{bn1} = \frac{\sigma}{\pi} T_1^4. \quad (14\text{-}4)$$

Интенсивность излучения i_{bn2} находим из аналогичной формулы. Отсюда

$$d^2Q_b = \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{s^2} dA_1 dA_2 \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4). \quad (14\text{-}5)$$

Это уравнение дает возможность рассчитать лучистый теплообмен между двумя произвольно ориентированными элементами поверхностей. Для поверхностей, величина которых не совсем мала по сравнению с расстоянием между ними, количество передаваемого тепла определяется путем интегрирования. Для упрощения расчетов полезно ввести новое понятие, а именно *угловой коэффициент* F. Угловой коэффициент dF_{1-2} элемента dA_1 относительно элемента dA_2 равен количеству тепла dQ_{b1}/dA_1, излучаемого единицей поверхности элемента dA_1 к элементу dA_2, деленному на излучательную способность e_{b1} элемента dA_1. Но $e_{b1} = \pi i_{bn1}$. Из уравнений (14-1) и (14-2) получим:

$$dF_{1-2} = \frac{1}{\pi} \cos\beta_1 \cdot d\omega_1 = \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{\pi s^2} dA_2. \quad (14\text{-}6)$$

Следовательно, угловой коэффициент определяется чисто геометрическим соотношением. Теперь количество тепла, излучаемое элементом dA_1 и поглощаемое элементом dA_2, можно выразить следующим образом:

$$d^2Q_{b1} = e_{b1} dF_{1-2} dA_1.$$

Применяя уравнения (14-2) и (14-3), можно аналогично на-

писать выражение для количества тепла, излучаемого элементом dA_2 и поглощаемого элементом dA_1:

$$d^2Q_{b2} = i_{bn2} \cos\beta_1 \cdot d\omega_1 dA_1 = e_{b2} dF_{1-2} dA_1$$

и для количества передаваемого тепла:

$$d^2Q_b = (e_{b1} - e_{b2})\, dF_{1-2} dA_1 = \sigma dF_{1-2} dA_1 (T_1^4 - T_2^4). \quad (14\text{-}7)$$

Эти расчеты можно произвести и по элементу dA_2; тогда получим:

$$d^2Q_b = (e_{b1} - e_{b2})\, dF_{2-1} dA_2 = \sigma dF_{2-1} dA_2 (T_1^4 - T_2^4). \quad (14\text{-}8)$$

Угловой коэффициент dF_{2-1} элемента dA_2 относительно элемента dA_1 выражается следующим образом:

$$dF_{2-1} = \frac{1}{\pi} \cos\beta_2 \cdot d\omega_2 = \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{\pi S^2} dA_1.$$

Теплообмен между элементом поверхности и конечной площадкой. Лучистый теплообмен между двумя поверхностями, размер которых не мал по сравнению с расстоянием между ними, можно определить путем двойного интегрирования уравнений (14-5) и (14-7). В результате получим уравнение

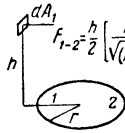
$$dQ_b = \sigma F_{1-2} dA_1 (T_1^4 - T_2^4).$$

в котором угловой коэффициент

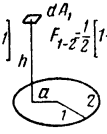
$$F_{1-2} = \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{\pi S^2} dA_2.$$

Результаты интегрирования этого уравнения для различных конфигураций можно найти в литературе по теплообмену [Л. 262]. В табл. 14-1 приведены аналитические выражения для подсчета угловых коэффициентов F.

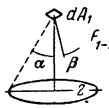
В качестве примера вычислим угловой коэффициент, который характеризует лучистый обмен между элементом площади dA_1 и кольцеобразной площадью A_2 при взаимном расположении, указанном на рис. 14-2. Так как угловой коэффициент зависит только от соотношения углов, то всегда можно изменить масштаб конфигурации так, чтобы одно из соответствующих измерений имело



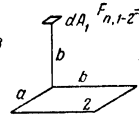
$$F_{1-2}=\frac{h}{2}\left[\frac{h^2+r^2+1}{\sqrt{(h^2+r^2+1)^2-4r^2}}-1\right]$$



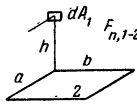
$$F_{1-2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{h^2+a^2+1}{\sqrt{(h^2+a^2+1)^2-4a^2}}\right]$$



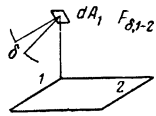
$$F_{1-2}=\sin^2\alpha\cos\beta$$



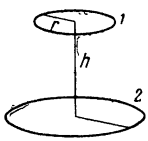
$$F_{n,1-2}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}tg^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}tg^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}}\right]$$



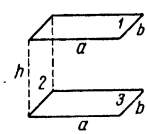
$$F_{n,1-2}=\frac{1}{2\pi}\left[tg^{-1}\frac{b}{h}-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}tg^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]$$



$$F_{\delta,1-2}=F_{p,1-2}\cos\delta+F_{n,1-2}\sin\delta$$



$$\bar{F}_{1-2}=\frac{1}{2}\left[\frac{h^2+1}{r^2}+1-\sqrt{\left(\frac{h^2+1}{r^2}+1\right)^2-\frac{4}{r^2}}\right]$$



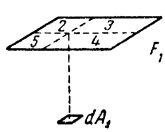
$$\bar{F}_{1-3}=\frac{2}{ab\pi}\left[b\sqrt{h^2+a^2}\,tg^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}+a\sqrt{b^2+h^2}\,tg^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}}\right.$$

$$\left.-bh\,tg^{-1}\frac{b}{h}-ah\,tg^{-1}\frac{a}{h}-\frac{h^2}{2}\ln\frac{(h^2+a^2+b^2)h^2}{(a^2+h^2)(b^2+h^2)}\right]$$

$$\bar{F}_{2-3}=\frac{1}{\pi}\left[tg^{-1}\frac{b}{h}+\frac{a}{h}tg^{-1}\frac{b}{a}-\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}tg^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}\right.$$

$$+\frac{h}{4b}\ln\frac{(a^2+b^2+h^2)h^2}{(a^2+b^2)(b^2+h^2)}+\frac{a^2}{4bh}\ln\frac{(a^2+b^2+h^2)a^2}{(a^2+b^2)(a^2+h^2)}$$

$$\left.-\frac{b}{4h}\ln\frac{(a^2+b^2+h^2)b^2}{(a^2+b^2)(h^2+b^2)}\right]$$



$$F_{1-(2+3+4+5)}=F_{1-2}+F_{1-3}+F_{1-4}+F_{1-5}$$

длину, равную 1. Это и было проделано на рисунке. Из рис. 14-2 можно увидеть, что

$$s^2 = h^2 + 1 + \rho^2 + 2\rho\cos\alpha; \qquad \cos\beta_1 = \frac{1+\rho\cos\alpha}{s};$$

$$dA_2 = \rho d\rho d\alpha; \qquad \cos\beta_2 = \frac{h}{s}.$$

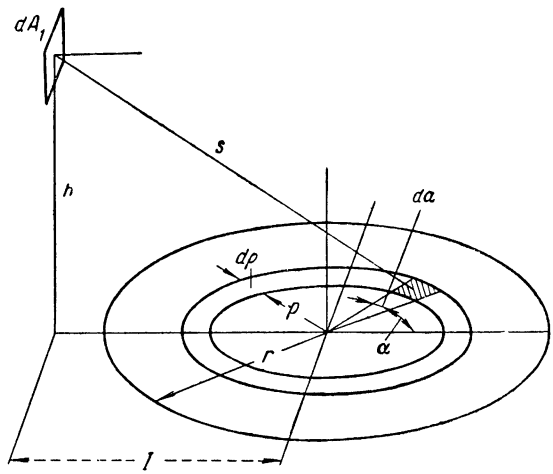


Рис. 14-2. Угловой коэффициент для лучистого теплообмена между элементом поверхности и круглым диском.

Подставив эти выражения в уравнение (14-6), получим:

$$dF_{1-2} = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1+\rho\cos\alpha}{(h^2+1+\rho^2+2\rho\cos\alpha)^2}\rho d\rho d\alpha$$

и

$$F_{1-2} = \frac{2h}{\pi}\int_0^r \rho d\rho \int_0^\pi \frac{1+\rho\cos\alpha}{(h^2+1+2\rho\cos\alpha)^2} d\alpha.$$

Двойное интегрирование приведет к следующему выражению:

$$F_{1-2} = \frac{h}{2}\left[\frac{h^2+r^2+1}{\sqrt{(h^2+r^2+1)^2-4r^2}} - 1\right].$$

Точно так же можно вычислить другие угловые коэффициенты, приведенные в табл. 14-1.

Численное интегрирование можно заменить графическими операциями, которые впервые были описаны Р. Германом (1900 г.). Согласно уравнению (14-6) угловой коэффициент элемента поверхности dA_1 по отношению

к участку поверхности A_2 с конечными размерами будет иметь следующее выражение:

$$F_{1-2}=\frac{1}{\pi}\int \cos\beta_1 \cdot d\omega_1. \qquad (14\text{-}9)$$

Интегрируемое выражение $\cos\beta_1 \cdot d\omega_1$ представляет собой проекцию телесного угла $d\omega_1$ на плоскость излучающей поверхности dA_1. Интеграл равняется сумме проекций всех элементарных телесных углов $d\omega_1$, или проекции телесного угла, соответствующего всей поверхности A_2 на плоскость, в которой лежит dA_1. Отсюда можно предложить следующее построение: методом центральной проекции проектируем участок A_2 (отмечен цифрой *1* на рис. 14-3) на полусферу радиусом R. Получившуюся проекцию *1′* еще раз строим методом ортогональной проекции на плоскости, в которой лежит излучающий участок поверхности dA_1. Площадь второй проекции *1″*, деленная на площадь круга πR^2, и дает величину углового коэффициента F_{1-2}, определяемого уравнением (14-9). Можно также прибегнуть к механическому интегратору [Л. 263] или оптической проекции [Л. 264]. Для этой цели в центре полусферы (рис. 14-3) помещают точечную лампу. Участок *1*, угловой коэффициент которого необходимо определить, выполняется из картона и устанавливается в требуемом положении. Он проектируется в виде тени на полусфере из молочного стекла. Если полусферу сфотографировать с большого расстояния, установив оптическую ось объектива по стрелке на рис. 14-3, то отношение площади тени картона к площади круга, в виде которого изобразится стеклянная полусфера, и будет численным выражением искомого углового коэффициента. На рис. 14-4 и 14-5 даются две такие фотографии. На рис. 14-4 изображена фотография, сделанная для определения углового коэффициента поверхностей, поглощающих лучистое тепло в паровом котле (рис. 14-5), по отно-

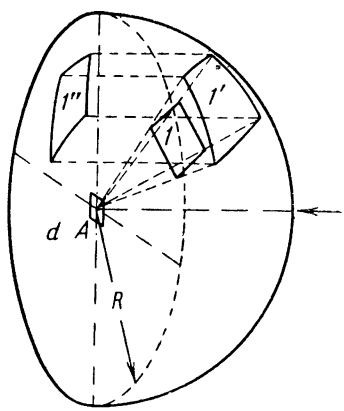


Рис. 14-3. К определению углового коэффициента.

шению к точечному источнику в центре топки. Фотография, рис. 14-5, сделана для определения углового коэффициента вольфрамовой нити электрической лампы. Модель нити была помещена на небольшом расстоянии от точечной лампы.

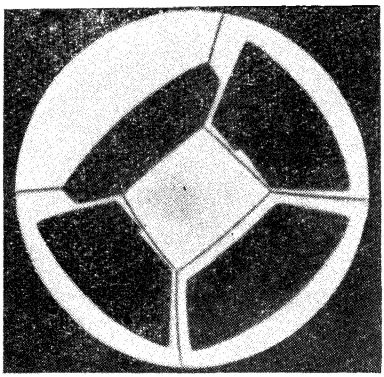


Рис. 14-4. К определению углового коэффициента поверхностей охлаждения в топке парового котла фотографическим способом [Л. 386].

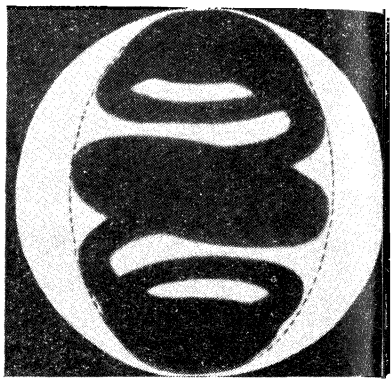


Рис. 14-5. К определению углового коэффициента вольфрамовой нити электрической лампочки фотоспособом [Л. 386].

В результате анализа графического построения, показанного на рис. 14-3, можно вывести аналитические выражения для углового коэффициента многих геометрических форм без всякого интегрирования. Это подтверждается следующим примером. Угловой коэффициент, с которым элемент площади dA излучает на прямоугольник A, можно определить, когда dA расположен параллельно прямоугольнику A и ниже его угла. Это показано на рис. 14-6, где площадь A разделена на два треугольника линией AC. Там же показано геометрическое построение треугольника ABC. Фигура $OB''C''$, которая определяет угловой коэффициент, является проекцией сектора OB′C′ большого круга. Площадь сектора $OB'C'$ равна величине $\beta_1/2\pi$, умноженной на площадь круга, или $\beta_1/2$ (радиус сферы выбран равным 1). Отсюда площадь сектора $OB''C''$ равна $(\beta_1/2\pi)\sin\alpha_1$. Таким же способом находим, что угловой коэффициент треугольника ACD равен $(\beta_2/2\pi)\sin\alpha_2$. Угловой коэффициент прямоугольника равен сумме угловых коэффициентов двух треугольников, или

$$F_{1-2} = \frac{\beta_1 \sin \alpha_1 + \beta_2 \sin \alpha_2}{2\pi}.$$

В результате замены углов длинами a, b и h получим соотношение, приведенное в табл. 14-1 для этой конфигурации.

Уравнения, приведенные в табл. 14-1, можно использовать для определения углового коэффициента многих

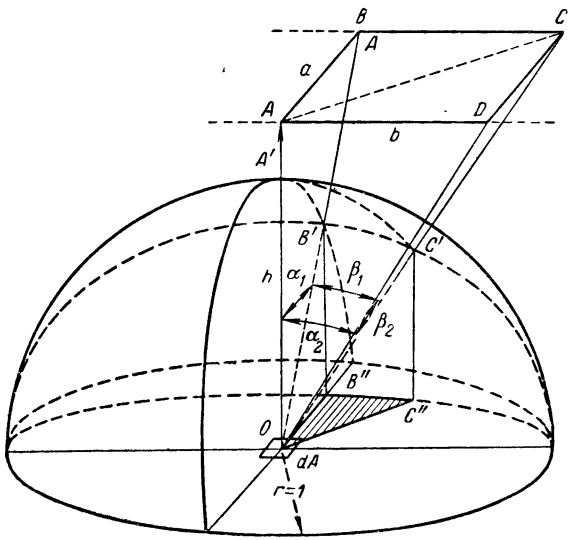


Рис. 14-6. Угловой коэффициент для лучистого теплообмена между треугольником и элементом площади.

других конфигураций. Рис. 14-7 иллюстрирует это на двух примерах. Правильность формул, содержащихся на рисун-

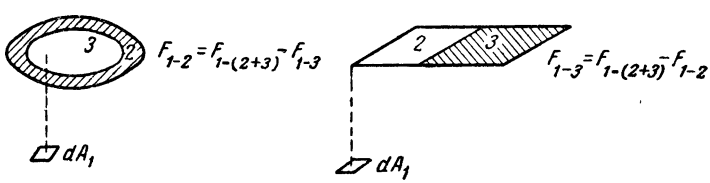


Рис. 14-7. Угловой коэффициент для лучистого теплообмена между элементом поверхности (площади) и ограниченной поверхностью.

ке, очевидна из геометрической интерпретации углового коэффициента.

Теплообмен между двумя конечными поверхностями. Угловой коэффициент также используется для вычисления лучистого обмена между ограниченной поверхностью A_1 и ограниченной поверхностью A_2 по уравнению

$$Q_b = \overline{F}_{1-2} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4). \qquad (14\text{-}10)$$

Угловой коэффициент можно определить из уравнения

$$\overline{F}_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} F_{1-2} dA_1 = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi s^2} dA_2 dA_1,$$

где F_{1-2} — угловой коэффициент элемента dA_1 площади A_1. $\overline{F}_{1-2}$ является поэтому средней величиной всех локальных угловых коэффициентов, с которыми любое место на поверхности A_1 облучает поверхность A_2. Уравнение (14-10) может быть записано также в следующем виде:

$$Q_b = \overline{F}_{2-1} A_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4), \qquad (14\text{-}11)$$

где

$$\overline{F}_{2-1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} F_{2-1} dA_2 = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi s^2} dA_1 dA_2$$

является средним угловым коэффициентом площади A_2 относительно площади A_1. Эти два угловых коэффициента связывает следующее уравнение:

$$\overline{F}_{1-2} A_1 = \overline{F}_{2-1} A_2.$$

Эта формула удобна, так как иногда один угловой коэффициент вычислить легче, чем другой. Когда, например, поверхность A_1 полностью окружена поверхностью A_2, можно сразу сказать, что $F_{1-2}=1$, так как все лучи, испускаемые поверхностью A_1, попадут на A_2.

В табл. 14-1 приведены аналитические выражения для ряда угловых коэффициентов.

Для графического определения угловых коэффициентов ограниченной поверхности A_1 и ограниченной поверхности A_2 поверхность A_1 надо разделить на малые площади равной величины и провести построение, указанное на рис. 14-3, для центров каждой из этих площадей. Средняя величина всех угловых коэффициентов, определенная таким образом, и есть угловой коэффициент F_{1-2}.

14-2. ТВЕРДЫЕ, ЖИДКИЕ И ГАЗООБРАЗНЫЕ ТЕЛА

Если тела, обменивающиеся лучистым теплом, не абсолютно черные, задача усложняется, так как часть лучей отражается от поверхностей. Некоторая часть лучистого тепла много раз отражается от одной поверхности к другой, пока не поглощается полностью. Влияние этого явления на теплообмен лучше всего изучать на двух параллельных поверхностях, расстояние между которыми мало по сравнению с их размерами, так что практически все тепловые лучи одной поверхности падают на другую. Таким образом, угловой коэффициент каждой из поверхностей равен единице. Сначала рассмотрим монохроматическое излучение. На рис. 14-8 показан путь теплового

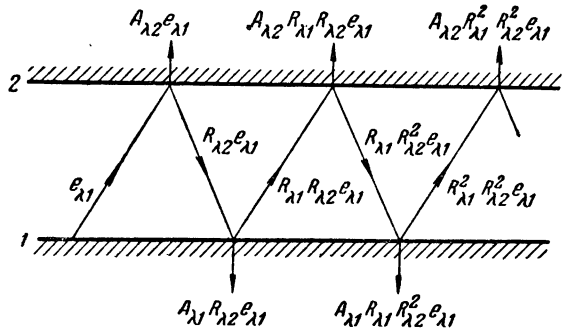


Рис. 14-8. Лучистый теплообмен между двумя параллельными поверхностями.

луча, испускаемого поверхностью *1*. Пусть монохроматическая излучательная способность этой поверхности на единицу времени и площади равна $e_{\lambda 1}$. Часть тепла, равная $A_{\lambda 2}e_{\lambda 1}$, поглощается поверхностью 2, а другая часть $R_{\lambda 2}e_{\lambda 1}$ отражается обратно на поверхность *1*. Поверхность *1* поглощает часть отраженных лучей $A_{\lambda 1}R_{\lambda 2}e_{\lambda 1}$, а другую часть $R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}e_{\lambda 1}$ отражает и т. д. Таким образом, за единицу времени единица площади поверхности *1* излучает следующее количество тепла:

$$q_{\lambda 1} = (1 - A_{\lambda 1}R_{\lambda 2} - A_{\lambda 1}R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}^2 - A_{\lambda 1}R_{\lambda 1}^2R_{\lambda 2}^3 - \ldots)e_{\lambda 1} =$$

$$= [1 - A_{\lambda 1}R_{\lambda 2}(1 + R_{\lambda 1}R_{\lambda 2} + R_{\lambda 1}^2R_{\lambda 2}^2 + \ldots]e_{\lambda 1}.$$

Сумма членов, заключенных в скобки, равна $1/(1-R_{\lambda 1}R_{\lambda 2})$, так как $R_{\lambda 1}$ и $R_{\lambda 2}$ меньше единицы. Отсюда

$$q_{\lambda 1}=\left(1-\frac{A_{\lambda 1}R_{\lambda 2}}{1-R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}}\right)e_{\lambda 1}.$$

В отношении тел, непрозрачных для тепловых лучей, справедливо равенство (13-2), а для теплового излучения вообще справедлив закон Кирхгофа $\varepsilon=A$. Выразив в последнем уравнении R_λ через поглощательную способность A_λ, получим:

$$q_{\lambda 1}=\left[1-\frac{A_{\lambda 1}(1-A_{\lambda 2})}{A_{\lambda 1}+A_{\lambda 2}-A_{\lambda 1}A_{\lambda 2}}\right]e_{\lambda 1}=\frac{A_{\lambda 2}}{A_{\lambda 1}+A_{\lambda 2}-A_{\lambda 1}A_{\lambda 2}}e_{\lambda 1}.$$

С другой стороны, поверхность *2*, обладающая излучательной способностью $e_{\lambda 2}$, испускает тепловые лучи на поверхность *1*. Последняя поглощает $A_{\lambda 1}e_{\lambda 2}$ и остальную часть лучей отражает на поверхность *2*, которая в свою очередь часть лучистой энергии поглощает и часть отражает на поверхность *1*. Поверхностью *1* поглощается часть лучей $A_{\lambda 1}R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}e_{\lambda 2}$, остальная часть отражается и т. д. Суммируя всю лучистую энергию, поглощенную поверхностью *1*, получаем:

$$q_{\lambda 2}=A_{\lambda 1}(1+R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}+R_{\lambda 1}^2R_{\lambda 2}^2+\ldots)e_{\lambda 2},$$

в результате чего, как и прежде, получим:

$$q_{\lambda 2}=\frac{A_{\lambda 1}}{1-R_{\lambda 1}R_{\lambda 2}}e_{\lambda 2}=\frac{A_{\lambda 1}}{A_{\lambda 1}+A_{\lambda 2}-A_{\lambda 1}A_{\lambda 2}}e_{\lambda 2}.$$

Теперь определим тепловой поток от поверхности *1* к поверхности *2*:

$$q_\lambda=q_{\lambda 1}-q_{\lambda 2}=$$

$$=\frac{A_{\lambda 2}e_{\lambda 1}-A_{\lambda 1}e_{\lambda 2}}{A_{\lambda 1}+A_{\lambda 2}-A_{\lambda 1}A_{\lambda 2}}=\frac{A_{\lambda 2}\varepsilon_{\lambda 1}e_{b\lambda 1}-A_{\lambda 1}\varepsilon_{\lambda 2}e_{b\lambda 2}}{A_{\lambda 1}+A_{\lambda 2}-A_{\lambda 1}A_{\lambda 2}}.$$

Это уравнение фактически представляет собой другой вывод закона Кирхгофа. Если две поверхности обладают одинаковыми температурами, то $e_{b\lambda 1}=e_{b\lambda 2}$ и, согласно второму закону термодинамики, поток тепла q должен быть равен нулю.

Из вышеприведенного уравнения следует, что

$$A_{\lambda 2}\varepsilon_{\lambda 1}=A_{\lambda 1}\varepsilon_{\lambda 2},\quad\text{или}\quad\frac{A_{\lambda 1}}{\varepsilon_{\lambda 1}}=\frac{A_{\lambda 2}}{\varepsilon_{\lambda 2}}=1.$$

Полученное отношение всегда должно быть равно 1, так как это выражение должно быть также справедливо и для абсолютно черной поверхности, для которой A_λ и ε_λ равны 1.

Используя формулы Кирхгофа, можно написать:

$$q_\lambda = \frac{1}{(1/\varepsilon_{\lambda 1}) + (1/\varepsilon_{\lambda 2}) - 1} (e_{b\lambda 1} - e_{b\lambda 2}). \qquad (14\text{-}12)$$

Полный лучистый теплообмен, определенный путем интегрирования по всем длинам волн, может быть выражен следующим образом:

$$q = \int_0^\infty \frac{1}{(1/\varepsilon_{\lambda 1}) + (1/\varepsilon_{\lambda 2}) - 1} (e_{b\lambda 1} - e_{b\lambda 2})\, d\lambda. \qquad (14\text{-}13)$$

Для серых поверхностей, излучательная способность которых не зависит от длины волны, уравнение (14-13) примет вид:

$$q = \frac{1}{(1/\varepsilon_1) + (1/\varepsilon_2) - 1} (e_{b1} - e_{b2}) =$$

$$= \frac{\sigma}{(1/\varepsilon_1) + (1/\varepsilon_2) - 1} (T_1^4 - T_2^4). \qquad (14\text{-}14)$$

Иногда используют коэффициент ε_{1-2}, определяемый согласно уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon_{1-2}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1, \qquad (14\text{-}15)$$

который называется приведенной степенью черноты системы. Тогда решение (14-14) может быть записано в следующем виде:

$$q = \varepsilon_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4). \qquad (14\text{-}16)$$

Для других геометрических форм подсчет лучистого теплообмена бывает очень сложным, если на излучательные свойства не наложить определенных ограничений. При последующих подсчетах будут сделаны допущения, что испускаемое излучение подчиняется закону косинуса Ламберта и что свойства излучения не зависят от длины волны (серые поверхности).

Для двух концентрических сфер или цилиндров, поверхности которых испускают диффузное излучение, подсчет, аналогичный тому, который приведен в начале этого раздела, приводит к решению

$$q = \frac{\sigma}{(1/\varepsilon_1) + (A_1/A_2)[(1/\varepsilon_2) - 1]}(T_1^4 - T_2^4), \qquad (14\text{-}17)$$

где q — поток тепла на единицу площади меньшей поверхности A_1.

Решение (14-17) можно получить быстрее следующим образом[1]. Обозначим общий поток излучения (состоящий из испускаемого и отраженного излучений) от единицы площади поверхности *1* в единицу времени буквой B_1, а общий поток излучения с единицы площади поверхности *2* — буквой B_2. Буква B выбрана в связи с применением такого обозначения в технике освещения, где общий поток света, исходящий от поверхности, определяет ее яркость. Весь поток излучения от поверхности *1* в этом случае равен A_1B_1, а весь поток излучения от поверхности *2* равен A_2B_2. На поверхность *1* попадает только часть последнего потока, а именно $\bar{F}_{2-1}A_2B_2$. Угловой коэффициент $\bar{F}_{2-1}$, с которым с поверхности *2* видна поверхность *1*, может быть легко вычислен, так как $A_1\bar{F}_{1-2} = A_2\bar{F}_{2-1}$. $\bar{F}_{1-2} = 1$, поскольку поверхность *1* полностью окружена поверхностью *2*. Чистый поток тепла от поверхности *1*, вызванный лучистым обменом, должен представлять собой разность между общим излучением, испускаемым этой поверхностью, и излучением, падающим на нее, т. е.

$$qA_1 = A_1(B_1 - B_2).$$

Весь поток излучения, испускаемый поверхностью *1*, состоит из испускаемого и отраженного излучений:

$$B_1 = e_1 + (1 - A_1)B_2.$$

Полное излучение, испускаемое поверхностью *2*, состоит из излучений испускаемого и отраженного, исходящих от A_1, и отраженного, исходящего от A_2:

$$B_2 = e_2 + (1 - A_2)F_{2-1}B_1 + (1 - A_2)(1 - F_{2-1})B_2.$$

Из последних трех уравнений, учитывая, что $F_{2-1} = A_1/A_2$, получаем следующее выражение:

$$q = \frac{A_2e_1 - A_1e_2}{A_2 + (A_1/A_2)(A_1 - A_1A_2)}. \qquad (14\text{-}18)$$

Подставив $e_1 = \varepsilon_1 e_{b1}$, $e_2 = \varepsilon_2 e_{b2}$, $A_1 = \varepsilon_1$ и $A_2 = \varepsilon_2$ получим уравнение (14-17).

[1] Этот метод, применяемый в следующем разделе, очевидно, был впервые использован Г. Поляком в СССР [Л. 265].

Подсчет для не серых поверхностей следует начинать с рассмотрения монохроматического излучения. Общий лучистый теплообмен определяется в конечном счете интегрированием по всем длинам волн:

$$q = \int_0^\infty \frac{e_{b\lambda 1} - e_{b\lambda 2}}{(1/\varepsilon_{\lambda 1}) + (A_1/A_2)\,[(1/\varepsilon_{\lambda 2}) - 1]}\, d\lambda. \qquad (14\text{-}19)$$

Уравнения (14-12)—(14-16), как это можно легко увидеть, описывают теплообмен между концентрическими цилиндрами или сферами, когда поверхности отражают зеркально, так как любой луч, испускаемый внутренней поверхностью A_1, снова отражается к этой поверхности A_2. Лучи, испускаемые поверхностью A_2, можно разделить на две группы: первая группа — это лучи, перемещающиеся между A_2 и A_1; вторая группа — это лучи, которые никогда не попадут на поверхность A_1.

Для двух поверхностей, размер которых мал по сравнению с расстоянием между ними (см. рис. 14-1), та часть отраженного излучения, которая падает снова на излучающую поверхность, становится такой незначительной, что ею можно пренебречь.

Коэффициент ε_{1-2} в этом случае для элемента серой поверхности становится равным

$$\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2. \qquad (14\text{-}20)$$

Это уравнение выражает низший предел для значения приведенной степени черноты системы. Высшим пределом является 1.

Как и в случае лучистого обмена между двумя стенками, можно определить обмен между газом и окружающими его стенками, если предположить, что поверхности стен серые [Л. 266]. В этом случае приведенная степень черноты системы «газ — стенки» ε_{g-w} определяется из уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon_{g-w}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_g} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{g\infty}\varepsilon_w} - \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{g\infty}}, \qquad (14\text{-}21)$$

где $\bar{\varepsilon}_g$ — степень черноты газа (см. рис. 13-18 и 13-19);

$\bar{\varepsilon}_{g\infty}$ — степень черноты бесконечно тонкого слоя того же газа, которую можно также определить приближенно из рис. 13-18 и 13-19 путем экстраполяции;

ε_w — степень черноты стенок.

Поток тепла на единицу поверхности стенки равен:

$$q = \varepsilon_{g-w}\sigma T_g^4 - \varepsilon_{g-w}\sigma T_w^4 . \qquad (14\text{-}22)$$

Для первого слагаемого $\bar{\varepsilon}_g$ и $\bar{\varepsilon}_w$ определяются по температуре газа, а для второго слагаемого — по температуре стенок.

В случае, если излучательная способность стенок велика (около 1), коэффициент ε_{g-w} можно вычислить с помощью более простого уравнения:

$$\varepsilon_{g-w} = \bar{\varepsilon}_g \varepsilon_w . \qquad (14\text{-}23)$$

Уравнения (14-21) и (14-23) точно определяют приведенную степень черноты стенок сферического или длинного цилиндрического сосуда с одинаковой температурой T_w и газа при температуре T_g внутри сосуда, а также газового слоя с температурой T_g, заключенного между двумя плоскими стенками с температурой T_w.

Пример 14-1. Требуется определить лучистый теплообмен между стенками сосуда Дьюара. Стенки со сторон, обращенных друг к другу, посеребрены. Температура жидкости в сосуде $t_1 = 100°$ С, температура окружающей среды $t_2 = 20°$ С. Внутренние и внешние стенки сосуда обладают практически такими же температурами. Степень черноты серебра $\varepsilon = 0{,}02$ (см. табл. П-10, допуская, что $\varepsilon_n = \varepsilon$).

Так как от поверхностей сосуда происходит зеркальное отражение, то приведенную степень черноты системы можно определить из уравнения (14-15):

$$\frac{1}{\varepsilon_{1-2}} = \frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}02} - 1 = \frac{1}{0{,}01} .$$

Тепловой поток на единицу площади внутренней стенки

$$q = 0{,}01 \cdot 4{,}96 \cdot 10^{-8} [(100 + 273)^4 - (20 + 273)^4] = 5{,}95 \ ккал/м^2 \cdot ч.$$

Для достижения такого же теплоизоляционного эффекта необходим пробковый слой толщиной

$$b = \frac{\lambda}{q}(t_1 - t_2).$$

Так как коэффициент теплопроводности пробки

$$\lambda = 0{,}037 \ ккал/м \cdot ч \cdot град,$$

то

$$b = \frac{0{,}037\,(100 - 20)}{5{,}95} = 0{,}5 \ м.$$

Отсюда видно, что теплоизоляционные качества сосуда Дьюара превосходны, даже если учесть те потери, которые обусловливаются теплопроводностью стеклянных стенок. Теплопотери путем излучения можно еще больше сократить, если между внутренней и внешней стен-

ками поместить еще стенку, посеребренную с обеих сторон. Если поместить n таких стенок, то сокращение теплопотерь будет определяться коэффициентом $\frac{1}{n+1}$.

Низкий лучистый теплообмен между металлическими поверхностями используется в альфолевой изоляции. Эта изоляция состоит из листов алюминиевой фольги, которые располагаются на расстоянии 12,5 *мм* друг от друга вокруг изолируемого тела. Тепло уходит через изоляцию благодаря излучению, теплопроводности слоев воздуха между листами фольги и конвекции. Теплопотери, вызываемые конвекцией, невелики, если расстояние между листами фольги достаточно мало, а теплопотери, обусловливаемые теплопроводностью, также незначительны, так как воздух — хороший изолятор.

14-3. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН ВНУТРИ ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Излагаемая ниже задача часто встречается в технических расчетах: сосуд с неодинаковой температурой стенок наполнен неизлучающим или излучающим газом. Требуется вычислить лучистый теплообмен между различными поверхностями и газом в сосуде.

Обычно температуры некоторых поверхностей поддерживаются при определенной температуре, что достигается подогревом или охлаждением, в то время как температуры других поверхностей предполагаются изменяющимися адиабатически по отношению к потоку тепла. Топка парового котла, изображенного на рис. 14-15, является примером такого сосуда.

Механическая топка обычно покрыта накаленным добела слоем угля, температура которого считается при подобных расчетах известной. Температура трубчатых поверхностей котла практически равна температуре пара воды внутри трубок. Температура огнеупорных стенок определяется балансом тепла, поступающего и отдаваемого излучением и конвекцией. Обычно преобладающим является лучистый теплообмен, так что расчет, при котором пренебрегают теплообменом конвекцией, является хорошим приближением.

Внутренний объем камеры наполнен газом, который участвует в лучистом обмене. Вычисление теплообмена и температур стенок и газа внутри сосуда — задача очень трудная и для ее решения требуются значительные упрощения. В действительности температура огнеупорных стенок меняется от точки к точке. Для целей расчета эти стенки обычно делят на ограниченное число площадей, в пределах которых температура считается постоянной.

Температура и состав внутри пламени или горящих газов, наполняющих камеру, также меняются от точки к точке.

В таких расчетах предполагают, что пространство внутри камеры должно быть наполнено однородным газом с одинаковой температурой или его делят на конечное число объемов, а температуру и состав в пределах каждого обема предполагают постоянными.

Неизлучающий газ, черные поверхности. Предположим, что в данном участке объем наполнен газом, который не излучает и не поглощает тепло. Сосуд состоит из n стенок с поверхностями, отражающими диффузно. Допустим, что излучение подчиняется закону косинуса, температура постоянна на каждой поверхности, а передача тепла конвекцией во внимание не принимается. Для некоторых поверхностей температура задана, а температура остальных считается изменяющейся адиабатически. Требуется вычислить лучистый теплообмен между различными поверхностями и неизвестные температуры адиабатической поверхности. Предполагается, что угловые коэффициенты между любыми поверхностями известны.

Сначала предположим, что все поверхности черные. Тогда решение становится простым.

Теплообмен между двумя произвольными поверхностями i и k выражается так:

$$Q_{i-k} = A_i F_{i-k} (e_{bi} - e_{bk}).$$

Теплообмен между i-поверхностью и остальной частью сосуда получим путем суммирования:

$$Q_i = \sum_k A_i F_{i-k} (e_{bi} - e_{bk}). \qquad (14\text{-}24)$$

Все поверхности, число которых равно n, можно разделить на две группы. В первой группе известна температура T_i, а следовательно, и e_{bi}; требуется определить поток тепла Q_i. Во второй группе поток тепла $Q_i = 0$, требуется вычислить температуру. В задачу входят n неизвестных, которые определяются при решении n линейных уравнений.

В. Пашкис и совсем недавно А. К. Оппенгейм [Л. 267] указали, что для процесса такого лучистого обмена можно создать электрические аналогии. На рис. 14-9,*б* приводится схема для сосуда, изображенного на рис. 14-9,*а*; сосуд состоит из пяти поверхностей, причем температура поверхностей *2, 3* и *5* может поддерживаться заданной заранее. Узел в аналогии соответствует поверхности в сосуде.

Все узлы соединены сопротивлениями, пропорциональными $1/A_iF_{i-k}$. Узлам, соответствующим поверхностям с известной температурой, сообщены электрические потен-

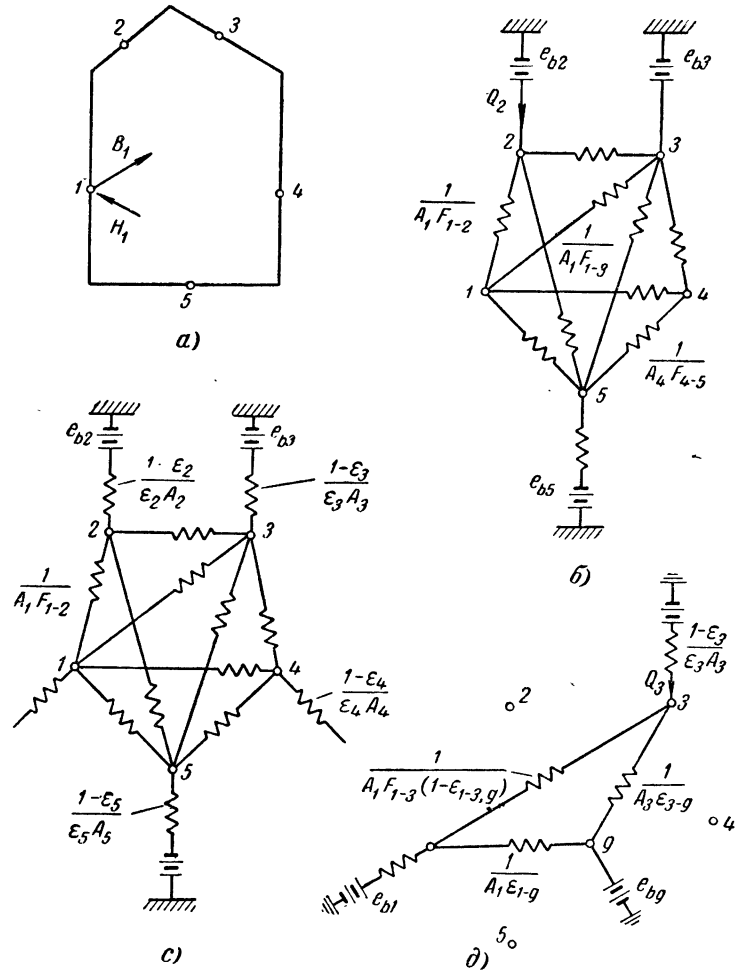


Рис. 14-9. Лучистый теплообмен в замкнутой поверхности и электрическая аналогия (согласно А. К. Оппенгейму).

циалы, пропорциональные e_{bi}. Узлы, которые соответствуют адиабатическим поверхностям *1* и *4*, не имеют внешнего соединения. Токи от внешних соединений к узлам соответствуют Q_i, а электрическое напряжение любого узла

без внешнего соединения соответствует излучательной способности соответствующей адиабатической поверхности. Таким образом, при применении метода электрических аналогий сосуд надо представить как конфигурацию в пространстве и все его поверхности необходимо включить в расчет.

На рис. 14-9 поверхности, находящиеся вне плоскости чертежа, не были включены для того, чтобы не осложнять схему.

Неизлучающий газ, серые стенки. Если поверхности сосуда не являются черными, то внутри него происходит бесчетное количество отражений и на первый взгляд вычисление кажется невозможным. Однако благодаря обобщению процесса, который описан на стр. 494, эти трудности становятся преодолимыми. Сначала рассмотрим серые поверхности ($\mathbf{A}=\varepsilon$). Буквой B обозначим весь лучистый поток, исходящий из единиц площади любой поверхности, а через H — весь поток, падающий на единицу площади. Выведем формулу для теплообмена Q_i между поверхностью i и всей остальной частью замкнутого сосуда. Поток тепла, покидающий поверхность, есть A_iB_i. Он также может быть выражен как $\sum\limits_k A_iF_{i-k}B_i$. Поток тепла, направленный со всех поверхностей на поверхность i, есть $A_iH_i = \sum\limits_k A_iF_{i-k}B_k$. Поэтому теплообмен площади i выражается как

$$Q_i = \sum_k A_iF_{i-k}(B_i - B_k). \tag{14-25}$$

С другой стороны,

$$Q_i = A_i(B_i - H_i). \tag{14-26}$$

Тепловой поток, покидающий поверхность i, состоит из излученного и отраженного излучений:

$$B_i = \varepsilon_i e_{bi} + (1 - \varepsilon_i)H_i. \tag{14-27}$$

Исключив из двух последних уравнений H_i, получим:

$$Q_i = A_i \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i}(e_{bi} - B_i). \tag{14-28}$$

Для каждой поверхности можно написать два уравнения в виде (14-25) и (14-28) аналогично одному уравнению для черных поверхностей. С другой стороны, B_i является дополнительным неизвестным, так что для $2n$ неизвестных будем иметь $2n$ уравнений. Остается, таким

образом, решить совместно систему из $2n$ линейных уравнений.

Электрическая аналогия для закрытого сосуда, подобного изображенному на рис. 14-9,*а*, предложенная Оппенгеймом для серых поверхностей, показана на рис. 14-9,*с*. Уравнение (14-28) показывает, что сопротивление, пропорциональное $(1-\varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i$, должно быть включено в каждую ветвь, соединяющую узел с внешним источником напряжения.

Рассматривая аналогию, можно сделать интересный вывод: включение сопротивления за пределами узла без внешнего соединения (например, узел *4*) не оказывает влияния на потенциал этого узла. Это значит, что температура адиабатической стенки не зависит от поглощательной способности поверхности этой стенки.

Следует указать, что первоначальный вывод основывается на допущении, что все поверхности подвержены равномерному облучению по всей их площади. Поэтому разбиение замкнутого пространства на n поверхностей надо осуществить таким образом, чтобы имело место хорошее приближение к указанному условию.

В случае, если стенки, между которыми происходит лучистый теплообмен, не являются серыми поверхностями, нужно при помощи уравнений (14-25) и (14-28) выразить монохроматическое излучение. Полное количество тепла, которое теряет поверхность i благодаря лучистому обмену, определится путем интегрирования по всем длинам волн:

$$Q_i = \int_0^\infty Q_{\lambda_i} d_\lambda.$$

Вычисление становится очень громоздким, так как для адиабатической стенки условие $Q_i = 0$ справедливо лишь для общего, а не для монохроматического излучения.

Излучающий газ. Расчет, описанный в предыдущем разделе, можно распространить на случай, когда внутри замкнутого пространства находятся излучающий и поглощающий газы. Опять допустим, что стенки сосуда излучают по закону косинуса и что они отражают диффузным образом и являются серыми поверхностями. Газ, который наполняет сосуд, сначала также будем считать серым газом ($A = \varepsilon$). Позже это условие будет снято. Предполагается также, что газ имеет одинаковые температуры и концентрации по всему объему в замкнутом пространстве. Для данных условий также справедливы уравнения

(14-26) и (14-27). Комбинируя эти уравнения, получим следующее выражение:

$$Q_i = A_i \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (e_{bi} - B_i). \qquad (14\text{-}29)$$

Уравнение (14-25), однако, изменится, так как часть излучения, испускаемого поверхностью k, поглощается газом до того, как оно достигнет поверхности i, и, с другой стороны, газ излучает энергию по направлению к последней поверхности. Выведем уравнение, описывающее эти физические процессы. Поток излучения, покидающий поверхность k и направленный к поверхности i, есть

$$A_i F_{i-k} B_k.$$

Поток излучения, идущий от поверхности k и попадающий на поверхность i, можно выразить так:

$$A_i F_{i-k} (1 - \varepsilon_{i-k,g}) B_k.$$

В этом уравнении $\varepsilon_{i-k,g}$ — излучательная способность, которая для серой поверхности по закону Кирхгофа равна поглощательной способности. Эта величина должна быть определена для всех лучей, проходящих между поверхностями i и k. Она может быть получена из уравнения (13-36), в котором интегрирование производится не по всему полушарию, а только по пространственному углу, определяемому угловым коэффициентом F_{i-k}.

Поток излучения, испускаемый газом и попадающий на поверхность i, есть

$$A_i \varepsilon_{i-g} \cdot e_{bg},$$

где ε_{i-g} — излучательная способность газового тела на площадь i. Окончательно поток излучения, покидающий поверхность i, будет равен:

$$A_i B_i.$$

Из этих составляющих может быть определена чистая потеря лучистого тепла поверхностью i:

$$Q_i = A_i [B_i - \Sigma F_{i-k} (1 - \varepsilon_{i-k,g}) B_k - \varepsilon_{i-g} e_{bg}] =$$
$$= A_i \varepsilon_{i-g} (B_i - e_{bg}) + \Sigma F_{i-k} (1 - \varepsilon_{i-k,g}) (B_i - B_k). \qquad (14\text{-}30)$$

Чистая потеря тепла газом, вызванная лучистым обменом, есть

$$Q_g = \sum_i A_i \varepsilon_{i-g} (e_{bg} - B_i). \qquad (14\text{-}31)$$

По уравнениям (14-29)—(14-31) можно вычислить неизвестные параметры в этой задаче: потерю тепла для поверхностей с известной температурой, температуру адиабатических поверхностей и потерю тепла или температуру газа в сосуде. Электрическая аналогия замкнутой поверхности, изображенной на рис. 14-9,*а*, показана на рис. 14-9,*d*. Включены лишь связи между узлами *1*, *3* и *g*. Узел *g* соответствует газу, помещенному в замкнутое пространство. Аналогичные связи надо осуществить между другими узлами. Узел *g* или соединен с батареей, дающей напряжение e_{bg}, когда температура газа задана, или в случае отсутствия в газе источников тепла или стоков к батарее не подключается. В первом случае ток, идущий от батареи к узлу *g*, пропорционален потере тепла газом. Во втором случае напряжение узла *g* пропорционально энергии излучения черного тела при температуре газа. Из раздела, посвященного излучению газа, известно, что реальные газы сильно отличаются от серого тела.

Для вычисления лучистого теплообмена в замкнутом объеме, наполненном несерым газом, уравнения (14-29)—(14-31) следует применять для монохроматического излучения. Общая потеря тепла в таком случае определяется путем интегрирования монохроматического потока тепла по всем длинам волн. Такой подсчет становится очень сложным, поэтому является желательным допустить некоторое приближение. Для этой цели полезно понятие селективно серого газа [Л. 268].

Для приближения к реальному газу с помощью селективно серого весь интервал длин волн делится на две части. Первая охватывает интервалы длин волн, в которых газ поглощает, а другая — все остальные. Тогда вычисление для первого интервала осуществляется точно таким же образом, как для серого газа — считается, что в этом интервале поглощательная способность не зависит от длины волны.

Для второй части применяется процесс вычисления, рассмотренный в предыдущем параграфе, для неизлучающего газа. Допущение, что температура газового тела в замкнутом пространстве повсюду одинакова, во многих случаях является нереальным.

Упрощение процесса вычисления может быть достигнуто в том случае, когда газовое тело разделено на много частей, температура и концентрация которых могут ме-

няться от одной части к другой В качестве примера рассмотрим геометрию, изображенную на рис. 14-10,*а* *.

Поглощающий и излучающий серый газ однородного

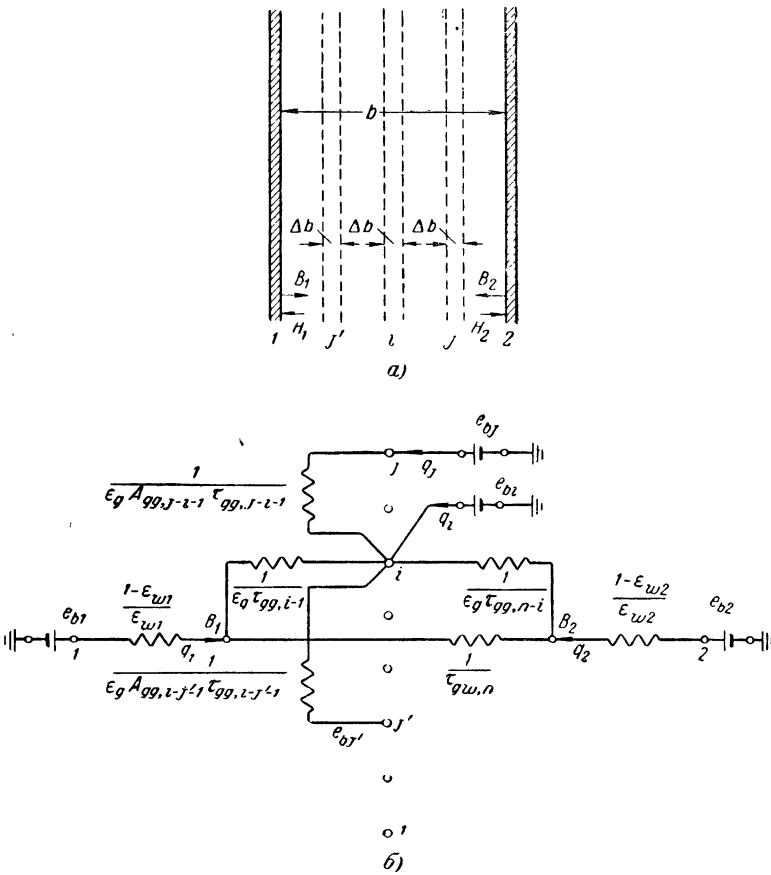


Рис. 14-10. Лучистый обмен между газовым слоем и двумя плоскими стенками.

состава заключен между двумя параллельными бесконечно большими стенками *1* и *2*. Расстояние между этими двумя стенками равно *b*. Разделим газовое тело на *n* слоев равной толщины Δb. Для вычисления лучистого теплооб-

* Этот расчет приводился Эккертом в лекции по излучению в лаборатории Люиса Национального совещательного комитета по аэронавтике в мае 1957 г.

мена необходимо определить параметры излучения газового слоя и стенок, т. е. следующие величины:

ε_w — полусферическая излучательная способность стенки;

ε_g — полусферическая излучательная способность газового слоя толщиной Δb;

$D_{gw,k}$ — полусферическая пропускательная способность газового тела (состоящего из k слоев) для излучения стенки;

$D_{gg,k}$ — пропускательная способность газового тела (состоящего из k слоев) для излучения одного слоя газа;

$A_{gw,k}$ — поглощательная способность газового слоя толщиной Δb для излучения стенки с количеством газовых слоев между ними, равным k;

$A_{gg,k}$ — поглощательная способность газового слоя для излучения другого газового слоя (толщина обоих Δb) с количеством газовых слоев между ними, равным k.

Эти параметры излучения должны быть определены путем интегрирования, аналогичного тому, который описан в § 13-3. Расчет рассматриваться здесь не будет.

Поток излучения, попадающий на стенку *1*, может быть обозначен буквой H_1, а поток излучения, покидающий эту стенку,— буквой B_1. В данном случае можно снова применить уравнение (14-29). Остается определить чистую потерю тепла q_1 с единицы поверхности стенки *1* через пришедший и покидающий ее потоки и падающий поток от различных частей, из которых она состоит.

Обозначим буквой i произвольный слой. Получим следующее уравнение:

$$q_1 = B_1 - (D_{gw,n} B_2 + \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_g D_{gg,i-1} e_{bi}).$$

Это уравнение можно теперь написать для того случая, когда две стенки и заключенный между ними газ имеют одинаковую температуру. Из закона Кирхгофа известно, что в замкнутом пространстве с одинаковой температурой поток излучения через любую произвольную плоскость равен потоку излучения, исходящему от черной поверхности, и что чистая потеря тепла благодаря излучению стенки *1* равна нулю.

Приведенное выше уравнение для данного случая дает:

$$1 - D_{gw,n} - \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_g D_{gg,i-1} = 0.$$

Учитывая это соотношение, предыдущее уравнение может быть преобразовано в следующее:

$$q_1 = D_{gw,n}(B_1 - B_2) + \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_g D_{gg,i-1}(B_1 - e_{bi}). \quad (14\text{-}32)$$

Соответствующее уравнение справедливо и для стенки 2. Следующим шагом будет подсчет потери тепла излучением газового слоя i. Это количество определяется излучением, испускаемым газом через обе его поверхности, потоком излучения, который исходит от двух стенок и поглощается газовым слоем, и излучением, возникающим в двух газовых слоях на обеих сторонах данного слоя и поглощаемым в нем.

Этот баланс энергии можно выразить при помощи следующего уравнения:

$$q_i = 2\varepsilon_g e_{bi} - A_{gw,i-1} D_{gw,i-1} B_1 - A_{gw,n-i} B_2 - \sum_{\substack{j=n \\ j'=i-1}}^{j=n+1} \varepsilon_g A_{gg,j-i-1} D_{gg,j-i-1} e_{bj} - \sum_{j'=1}^{j'=i-1} \varepsilon_g A_{gg,i-j'-1} D_{gg,i-j'-1} e_{bj'}.$$

Применяя это уравнение для случая одинаковой температуры, согласно приведенным выше соображениям получим соотношение

$$2\varepsilon_g = A_{gw} D_{gw,i-1} + A_{gw,n-i} D_{gw,n-i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j'=i-1}}^{j=n+1} \varepsilon_g A_{gg,j-i-1} D_{gg,j-i-1} + \sum_{j'=1}^{j'=i-1} \varepsilon_g A_{gg,i-j'-1} D_{i-j'-1}.$$

Кроме того, совершенно очевидно, что для каждого луча направленная излучательная способность должна быть равна направленной поглощательной способности. Поэтому

$$\varepsilon_g D_{gg,k} = A_{gw} D_{gw,k}.$$

Два последних уравнения можно подставить в выражение для q_i и, таким образом, получить следующее уравнение:

$$q_i = \varepsilon_g D_{gg,i-1}(e_{bi} - B_1) + \varepsilon_g D_{gg,n-i}(e_{bi} - B_2) + \sum_{\substack{j=n \\ j=i+1 \\ j'=i-1}} \varepsilon_g A_{gg,j-i-1} D_{gg,j-i-1}(e_{bi} - e_{bj}) + \sum_{j'=1} \varepsilon_g A_{gg,i-j'-1} D_{gg,i-j'-1}(e_{bi} - e_{bj}). \qquad (14\text{-}33)$$

Эту задачу полностью описывают уравнения (14-29) и (14-32) совместно с двумя соответствующими уравнениями для стенки *2*. Легко проверить, что количество уравнений равно количеству неизвестных.

Электрическая аналогия, которая соответствует этим уравнениям, изображена на рис. 14-10,*в*. Вертикальный ряд узлов от *1* до *n* соответствует количеству газовых слоев *n*. Необходимые связи указаны между узлом *i* и узлами *1*, *2*, *j* и *j'* соответственно. Полная схема может быть составлена путем аналогичного установления всех других связей. Температуру различных газовых слоев можно определить по внутренним источникам или стокам тепла. В этом случае температура слоев должна считаться заданной. Соответственно напряжение узлов *1*—*n* устанавливается батареями. Температура части или всех газовых слоев также может быть определена при помощи лучистого теплообмена. В этом случае соответствующие узлы не подключаются к батареям и потенциалы узлов показывают их излучательную энергию черного тела и, таким образом, их температуру.

Для несерого газа сначала надо произвести расчет для монохроматического излучения с последующим интегрированием по всем длинам волн. Этот процесс опять можно упростить благодаря понятию о «селективно сером газе».

Кажущаяся излучательная способность цилиндрической щели. В предыдущих разделах температура и свойства излучения рассматривались как постоянные по всем ограниченным площадям и объемам. В действительности же большинство параметров обычно непрерывно изменяется по рассматриваемым нами поверхностям и объемам. Математическое рассмотрение задачи лучистого обмена при этих условиях приводит к интегральным уравнениям.

В качестве примера в данном разделе будет рассмотрен следующий случай.

В материале с постоянной температурой просверлена цилиндрическая щель (рис. 14-11). Стенки щели можно считать серыми, а излучательную способность материала стенки обозначить буквой ε. Это свойство вместе с посто-

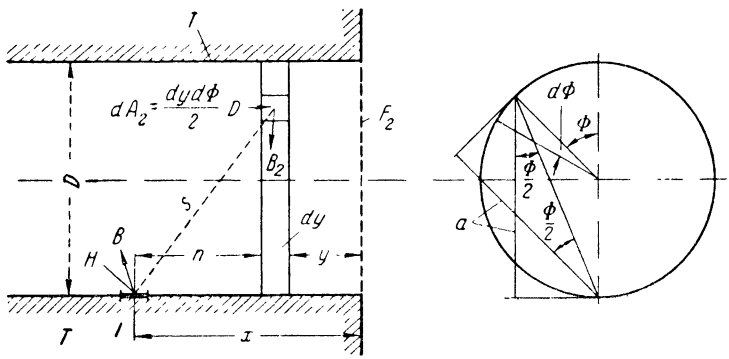


Рис. 14-11. Излучение из цилиндрической щели.

янной температурой стенки определяет лучистый поток, испускаемый любым местом на поверхности щели. Общий поток B, исходящий из любого места в щели, будет больше, так как к испускаемому излучению добавляется излучение, отраженное поверхностью. Локальную кажущуюся излучательную способность стенки можно определить при помощи следующего выражения:

$$\varepsilon_a(x) = \frac{B(x)}{e_b}.$$

Поток излучения B, а также видимую излучательную способность надо рассматривать как функции расстояния x от конца щели. Поток излучения, попадающий на единицу площади поверхности на расстоянии x, обозначим буквой H. Связь между падающим и покидающим такую поверхность потоками выражает следующее уравнение:

$$B = \varepsilon e_b + (1 - \varepsilon)H. \qquad (14\text{-}34)$$

Для того чтобы получить выражение для потока H, надо сначала выразить поток излучения dH, идущий от элемента площади dA_2 и падающего на стенку 1. Коорди-

наты, определяющие положение dA_2, — это y и φ. Следовательно,

$$dH = B_2 dF_{1-2} = \varepsilon_a(y)\, e_b \frac{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{\pi s^2} dA_2 =$$

$$= \varepsilon_a(y)\, e_b \frac{a^2 dy D d\varphi}{2\pi s^4}.$$

Из рис. 14-11 очевидны следующие соотношения:

$$a = D\cos^2(\varphi/2); \quad s^2 = (x-y)^2 + D^2\cos^2(\varphi/2).$$

После подстановки этих выражений в вышеупомянутое уравнение оно примет вид:

$$dH = \varepsilon_a(y)\, e_b \frac{D^3\cos^4(\varphi/2)}{\pi\,[(x-y)^2 + D^2\cos^2(\varphi/2)]^2} d(\varphi/2)\, dy.$$

Общий поток, падающий на участок, определим путем интегрирования по всей периферии и по всей длине щели:

$$H = \frac{2D^3}{\pi} e_b \int_{y=0}^{\infty} \varepsilon_a(y) \int_{\varphi/2=0}^{\pi/2} \frac{D^3\cos^4(\varphi/2)}{[(x-y)^2 + D^2\cos^2(\varphi/2)]^2} d(\varphi/2)\, dy.$$

Выполняя интегрирование по углу φ и заменив x/D через ξ и y/D через η, получим:

$$H = e_b \int_0^{\infty} \varepsilon_a(\eta) \left\{1 - |\xi - \eta| \frac{2(\xi-\eta)^2 + 3}{2[(\xi-\eta)^2 + 1]^{3/2}}\right\} d\eta. \qquad (14\text{-}35)$$

Интегрировать надо по участкам:

от $y = 0$ до $y = x$ и от $y = x$ до $y = \infty$;

$|\xi - \eta|$ показывает, что это выражение должно вводиться как положительное. Комбинируя уравнения (14-34) и (14-35), получаем:

$$\varepsilon_a(\xi) =$$

$$= \varepsilon + (1-\varepsilon) \int_0^{\infty} \varepsilon_a(\eta) \left\{1 - |\xi - \eta| \frac{2(\varepsilon-\eta)^2 + 3}{2[(\xi-\eta)^2 + 1]^{3/2}}\right\} d\eta. \qquad (14\text{-}36)$$

Неизвестный параметр ε_a появляется в этом уравнении не только в левой части, где его надо брать при фиксированном ξ, но также и в правой части в интеграле, где его надо вводить при фиксированном η. Уравнение (14-36) по-

этому является интегральным уравнением и, в частности, однородным линейным интегральным уравнением; решение этого уравнения было получено Эккертом [Л. 269]. Оно графически изображено на рис. 14-12. Из графика видно, как видимая излучательная способность в щели увеличивается с увеличением расстояния x. По рисунку

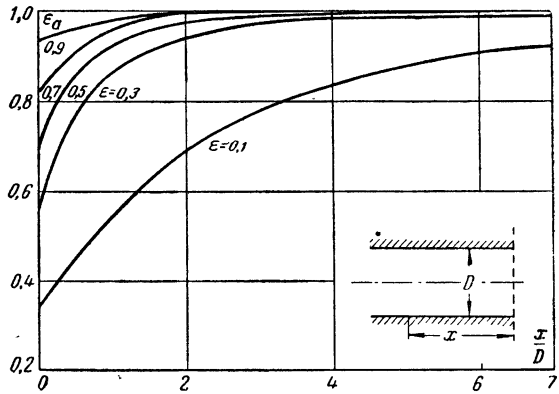


Рис. 14-12. Кажущаяся излучательная способность стенок в цилиндрической щели.

можно определить, какое требуется расстояние от входа в щель для того, чтобы видимую излучательную способность сделать сколь угодно близкой к единице, что соответствует абсолютно черному телу.

14-4. ЛУЧЕИСПУСКАНИЕ ФАКЕЛА

Используя табличные данные о степени черноты углекислого газа и водяного пара, можно рассчитывать тепловое излучение газообразных продуктов горения при условии полного сгорания топлива; так, например, можно рассчитывать теплообмен поверхностей нагрева водотрубных паровых котлов. Обычно лучеиспускание факела бывает на практике гораздо интенсивнее, чем дают расчеты, основанные на определении количеств углекислоты и водяного пара в пламени.

Большинство видов топлива горит светящимся пламенем. Желтый цвет пламени обусловливается наличием углеводородов, которые испаряются из топлива и постепенно расщепляются в пламени, причем образуются моле-

Кулы с более высоким содержанием углерода и частицы чистого углерода, которые светятся в пламени и придают ему желтоватый оттенок. Эти частицы испускают также значительное количество лучистой тепловой энергии. Все битуминозные топлива, такие как дрова, бурый уголь и все молодые угли, а также бензин, керосин и пр. горят желтым пламенем. Только антрацит, кокс и некоторые газы (генераторный газ, водород, доменный газ) горят бесцветным пламенем. Голубоватый оттенок пламени таких топлив, называемый хемилюминесценцией, обусловливается некоторыми химическими реакциями газообразных компонентов. Однако это не связано с тепловым излучением, как это было доказано исследованиями. Лучеиспускание светящегося пламени зависит от количества частиц углерода, которое весьма непостоянно и зависит от условий горения. Так, например, это количество частиц зависит от перемешивания воздуха с горючими газами и от температур обоих компонентов. Если эти условия нельзя определить для данной топки, то возможность точного расчета лучеиспускания факела отпадает.

На рис. 14-13 [Л. 270] приведен пример результатов измерений поглощательной способности бензино-воздушного факела с температурой, равной приблизительно 1 760° С. Пламя находилось в трубчатой камере сгорания с диаметром 2 дюйма. Измерение проводилось вдоль луча в направлении диаметра трубки на расстоянии 12,7 *см* от топливного сопла. Соотношение топливо — воздух было равно примерно 0,01. Уровни давления поддерживались следующими: 101,6; 381 и 1 143 *см рт. ст.*

Из рисунка видно, что с увеличением давления пламя постепенно становится светящимся и это светящееся излучение все больше заполняет пустые пространства между полосами поглощения, появившимися благодаря газовому излучению. Интервал длин волн, показанный на рисунке, является важным для данной температуры пламени. Излучение абсолютно черного тела при этой температуре имеет свой максимум при длине волны 2 *мк* и падает до 10% от максимума при 1 и 5 *мк*.

В качестве первого приближения факел можно рассматривать как абсолютно черное тело, а то обстоятельство, что это не совсем соответствует действительности, можно учитывать эмпирическим коэффициентом p, меньшим единицы. Таким образом, для количества лучистого

тепла, передаваемого стенкам топки (предполагается, что пламя заполняет всю внутреннюю часть стенки), получим следующее уравнение:

$$Q = p\varepsilon_w \sigma A (T_f^4 - T_w^4), \qquad (14\text{-}37)$$

где ε_w — степень черноты стенок топки (численно равная поглощательной способности);

T_f — абсолютная температура факела;

T_w — абсолютная температура стенок;

A — площадь поверхности стенок.

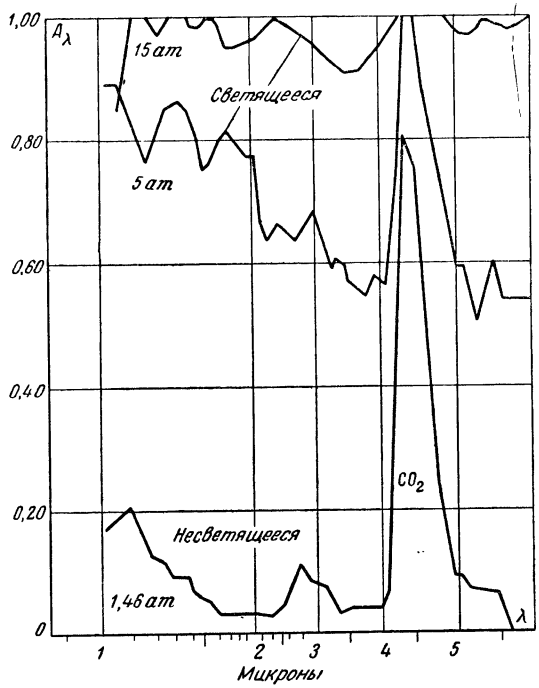


Рис. 14-13. Монохроматическая поглощательная способность светящегося и несветящегося пламени бензин — воздух (по Е. С. Миллеру, А. Е. Блейку, Р. М. Шермеру, Г. Д. Китреджу и Е. Х. Фрому).

Значение эмпирического коэффициента p зависит главным образом от характера топлива и размеров топки. Для больших топок p равняется почти единице. В топках паровых котлов с водяным охлаждением лучеиспускание

факела к поверхности охлаждения усиливается лучеиспусканием огнеупорной футеровки и слоя топлива на колосниковой решетке. Поэтому значение коэффициента p больше для топок с частичным водяным охлаждением, чем для топок, у которых все стенки охлаждаются. Для топок обычных размеров значение p заключено между 0,6 и 1. Если необходимо рассчитать по формуле (14-37) лучеиспускание поверхности охлаждения, которая состоит из ряда труб, расположенных перед огнеупорной стенкой, то возникает вопрос: площадь какой поверхности подставлять вместо A? Исследование этого вопроса было выполнено Хоттелом [Л. 271] и Эккертом [Л. 272], которые пришли к выводу, что значение A определяется путем умножения площади поверхности стенок топки, перед которыми расположены трубы, на коэффициент ψ. Значение этого коэффициента можно определить по графику на рис. 14-14. Величины ψ были определены методом, описанным в § 14-1 и 14-3.

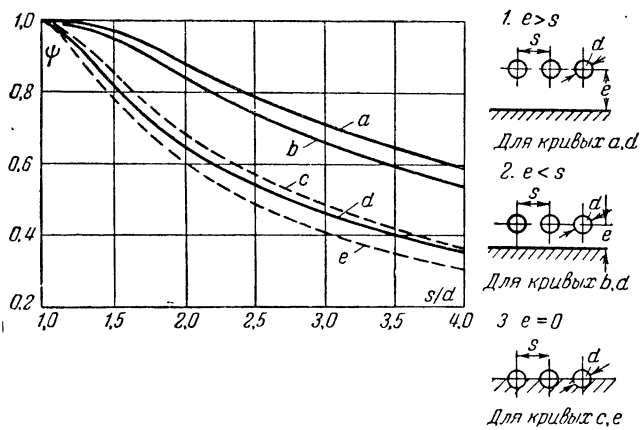


Рис. 14-14. Значения коэффициента ψ для ряда труб перед огнеупорной кладкой [Л. 387].

Пример 14-2. Требуется определить поглощение тепла поверхностями охлаждения топки парового котла. На рис. 14-15 показано, что эта поверхность состоит из ряда стальных труб, расположенных перед огнеупорными стенками. Пусть давление пара в котле 70 *кГ/см*^{2}. Температура насыщения, соответствующая этому давлению, равна 284° С. Внешняя температура стенок труб несколько выше; предположим, что она равняется 315° С. Температура факела 1 370° С. Трубы на поверхности охлаждения расположены с интервалами $2d$ (d — диаметр трубы).

Прежде всего необходимо определить значение члена A в формуле (14-37). На кривой *а* рис. 14-14 находим: $\psi=0{,}88$ (предполагая, что

расстояние труб от стенки больше s). Поверхность стенки с трубами охлаждения равна:

$$1{,}6 \cdot 4{,}5 + 1{,}6 \cdot 5{,}3 = 15{,}7 \ м^2$$

Отсюда $A = 15{,}7 \cdot 0{,}88 = 13{,}8 \ м^2$. Пусть коэффициент $p = 0{,}87$. Степень черноты труб определяем из табл. П-10: $\varepsilon_\omega = 0{,}8$, так как поверхность труб покрыта окалиной, а зачастую и шлаком. Теперь по уравнению (14-37) получаем:

$$Q = 0{,}87 \cdot 0{,}8 \cdot 4{,}96 \cdot 10^{-8} \cdot 13{,}8 \ [(1\,370 + 273)^4 - (315 + 273)^4] =$$
$$= 3\,420\,000 \ ккал/ч.$$

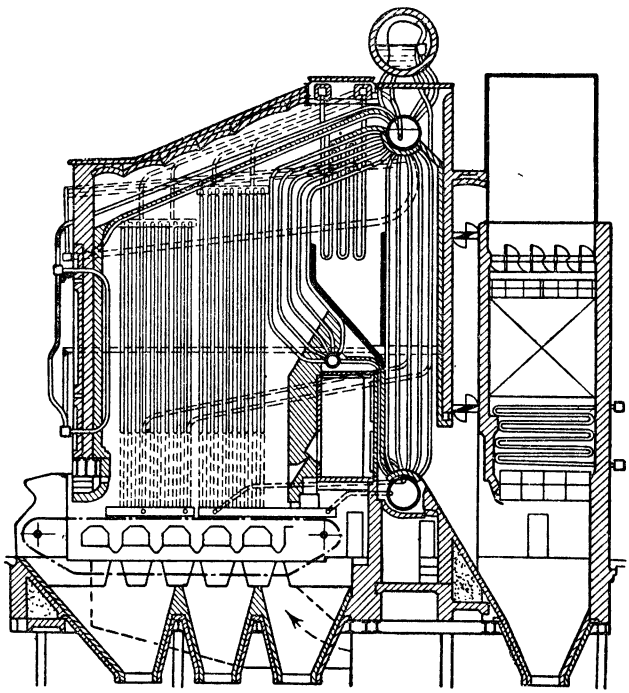


Рис. 14-15. Паровой котел с поверхностью лучистого нагрева.

Удельная теплота испарения при давлении 70 $кГ/см^2$ равняется 361,8 $ккал/кг$. Отсюда производительность поверхности охлаждения равна:

$$\frac{3\,420\,000}{361{,}8} = 9\,480 \ кг/ч \text{ пара.}$$

Поверхность труб больше поверхности стенки, на которой они расположены, в $\pi d/s$ раз. Следовательно, поверхность труб равна $\pi/2 \cdot 15{,}7 =$

$= 24{,}65\ м^2$ и паропроизводительность 1 $м^2$ поверхности труб равна $\frac{9\,480}{24{,}65} = 34{,}8\ кг/ч \cdot м^2$. Квадратный метр поверхности труб поглощает

$$\frac{3\,420\,000}{24{,}65} = 138\,800\ ккал/м^2 \cdot ч$$ лучистого тепла.

14-5. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕПЛОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Часто теплообмен осуществляется одновременно конвекцией и излучением. Если лучистый теплообмен происходит между твердыми телами, то ни один из этих способов теплообмена не препятствует другому. Если теплообмен происходит между газом и твердой стенкой, то лучистый и конвективный способы теплообмена влияют друг на друга, но рассчитать это влияние очень трудно. Обычно количество тепла, передаваемого конвекцией и лучеиспусканием, определяют отдельно, а затем суммируют. Так как конвективный теплообмен выражают через коэффициент теплообмена, то во многих случаях удобно вводить коэффициент теплообмена для лучистого тепла α_r, определяя его как частное от деления теплового потока q на температурный напор:

$$\alpha_r = \frac{q}{t_1 - t_2} =$$

$$= \varepsilon_{1-2} \sigma F_{1-2} \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} = \varepsilon_{1-2} \sigma F_{1-2} f(T_1, T_2). \quad (14\text{-}38)$$

В отличие от коэффициента конвективного теплообмена α_r весьма сильно зависит от температур T_1 и T_2. Значения температурной функции

$$f(T_1, T_2) = \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} = T_1^3 + T_1^2 T_2 + T_1 T_2^2 + T_2^3$$

сведены в табл. 14-2. В тех случаях, когда T_1 не сильно отличается от T_2 температурная функция $f(T_1, T_2) \approx 4\bar{T}^3$, где $\bar{T} = (T_1 + T_2)/2$. Чтобы получить значение коэффициента лучистого теплообмена, эту функцию надо умножить на приведенную степень черноты системы ε_{1-2}, постоянную Стефана — Больцмана σ и угловой коэффициент F_{1-2}. Значение рассматриваемого коэффициента сильно возрастает с повышением температуры.

Значения $\frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} \cdot 10^{-8}$ **для**

° C	—273	—200	—100	0	100	200	300
—273	0						
—200	0,003890	0,01556					
—100	0,05178	0,08674	0,2071				
0	0,2032	0,2763	0,4659	0,814			
100	0,5190	0,6442	0,9230	1,380	2,076		
200	1,058	1,251	1,639	2,225	3,070	4,233	
300	1,881	2,155	2,673	3,408	4,422	5,77	7,53
400	3,048	3,419	4,085	4,99	6,19	7,75	9,73
500	4,619	5,100	5,936	7,03	8,44	10,23	12,46
600	6,653	7,260	8,285	9,59	11,30	13,27	15,77
700	9,212	9,959	11,19	12,72	14,62	16,92	19,71
800	12,35	13,26	14,72	16,50	18,66	21,26	24,36
900	16,14	17,20	18,91	20,97	23,42	23,33	29,76
1 000	20,63	21,88	23,87	26,21	28,96	32,20	35,98
1 200	31,77	33,49	31,06	39,18	42,60	46,58	51,2
1 400	46,57	48,79	52,04	56,0	60,9	64,9	70,3
1 600	65,39	68,15	72,16	76,9	81,9	87,5	93,8
1 800	88,70	92,07	96,91	102,5	108,6	115,1	122,4

Пример 14-3. Стенки топок современных паровых котлов экранируются трубами охлаждения, которые поглощают тепло, излучаемое пламенем, и понижают его температуру. В этих трубах циркулирует кипящая вода парового котла. Возникает интересный вопрос: как разделить общую поверхность нагрева на часть, поглощающую лучистое тепло, и часть, поглощающую конвективное тепло, с тем, чтобы производительность пара на единицу площади поверхности нагрева была максимальной? Для решения этой задачи необходимо определить значение коэффициентов теплообмена для поверхности, поглощающей лучистое тепло, и поверхности, поглощающей конвективное тепло. Допустим, что диаметр труб котла 50 *мм*. Пусть трубы, поглощающие конвективное тепло, расположены по треугольнику со стороной 100 *мм* (см. рис. 14-16). Скорость движения топочных газов при встрече с пучком этих труб 4,5 *м/сек*. В газах содержится 14% углекислоты и 7% водяного пара. Температура поверхности труб 315° С.

Поглощение тепла трубой радиационной поверхности определяется по формуле (14-37). Площадь A поверхности для одного метрового отрезка трубы равняется ψs (s — расстояние между трубами). Коэффициент лучистого теплообмена определяется путем деления количества тепла Q на площадь поверхности трубы и разность между температурой пламени T_f и температурой поверхности трубы T_w:

$$\alpha_r = \frac{p\varepsilon_W \Psi s \sigma}{\pi d} \cdot \frac{T_f^4 - T_W^4}{T_f - T_W}.$$

Предположим, что топка большая, а поэтому $p = 1$ и $\varepsilon_W = 0{,}94$. Короче говоря, используем те же числовые значения, что и в предыдущем примере:

$$\alpha_r = \frac{0{,}94 \cdot 0{,}88 \cdot 2 \cdot 4{,}96 \cdot 10^{-8}}{\pi} \times \frac{(1\,370 + 273)^4 - (315 + 273)^4}{1\,370 - 315} =$$

$$= 178 \ ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Таблица 14-2

коэффициента лучистого теплообмена

400	500	600	700	800	900	1 000	1 200	1 400	1 600	1 800
12,19										
15,19	18,48									
18,79	22,38	26,61								
23,04	26,96	31,55	38,84							
28,01	32,29	37,29	42,93	49,5						
33,76	38,41	43,75	49,85	56,8	64,6					
40,35	45,38	51,10	57,6	65,0	73,3	82,6				
56,3	62,2	68,8	76,3	84,6	93,3	104,1	127,8			
76,3	83,1	90,7	99,1	108,5	119,0	130,2	156,3	187,2		
100,9	108.6	117,3	126,8	137,3	148,9	161,2	190,0	223,6	213	
130,4	139,4	149,0	159,7	171,4	184	198,0	229,0	266,0	308	356,0

Беря другие значения для отношения s/d — расстояния между трубами к диаметру трубы и температуры пламени T_f, можно найти соответствующие значения коэффициента α_r, пользуясь графиком рис. 14-16,

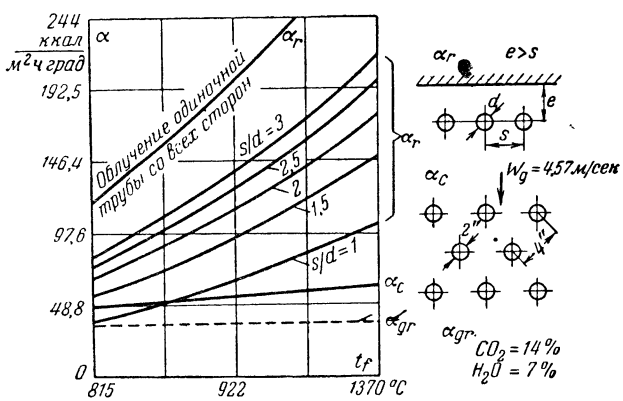


Рис. 14-16. Сравнение зависимостей коэффициента лучистого теплообмена и коэффициента конвективного теплообмена как функций температуры.

Теперь определим значение коэффициента теплообмена α_b для труб, омываемых топочными газами. Значение этого коэффициента складывается из теплообмена, обусловливаемого излучением и конвекцией газов. Для определения теплового излучения углекислоты и воды в топочных газах необходимо знать эквивалентный радиус L_e слоя газа. Из табл. 13-4 для данного расположения труб находим:

$$L_e = 3(s - d) = 3(0{,}1 - 0{,}05) = 0{,}15 \text{ м}.$$

При общем давлении 1 *ат* парциальное давление углекислоты $p=0{,}14$ *ат*; отсюда $pL_e=0{,}021$ *м·ат*. Пусть температура газов 980° С. Из графика рис. 13-18 находим, что степень черноты углекислоты при 980° С равна $\varepsilon_{CO_2}=0{,}06$ и при 315° С $\varepsilon_{CO_2}=0{,}55$. Степень черноты стенок труб $\varepsilon_w=0{,}8$; отсюда по уравнению (14-23) приведенная степень черноты системы при 980° С равна $0{,}8\cdot 0{,}06=0{,}048$ и при 315° С равна $0{,}8\cdot 0{,}055=0{,}044$. Теперь по формуле (14-22) определяем тепловой поток, обусловленный излучением углекислоты:

$$q_{CO_2}=4{,}96\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}048\,(980+273)^4-4{,}96\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}044\,(315+273)^4=$$
$$=5\,600\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}.$$

Для водяного пара парциальное давление $p=0{,}07$ *ат*; следовательно, $pL_e=0{,}0105$ *м·ат*. Из рис. 13-19 получаем на малой диаграмме коэффициент редукции $f=0{,}67$ для $p_p=0{,}07$ *ат* и $p_pL_e=$ $=0{,}0105$ *м·ат*.

В результате находим, что степень черноты водяного пара при 980° С $\varepsilon_{H_2O}=0{,}0176$ и при 315° С $\varepsilon_{H_2O}=0{,}0481$. Теперь определяем значения приведенной степени черноты системы: $0{,}8\cdot 0{,}0176=0{,}0140$ и $0{,}8\cdot 0{,}0481=0{,}0385$. Отсюда тепловой поток, обусловленный излучением водяного пара,

$$q_{H_2O}=4{,}96\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}0140\,(980+273)^4-4{,}96\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}0385\,(315+273)^4=$$
$$=1486{,}7\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}.$$

Таким образом, общий тепловой поток, обусловленный излучением газа, будет следующий:

$$5\,600+1486{,}7=7086{,}7\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}$$

и коэффициент лучистого теплообмена газов

$$\alpha_{r,g}=\frac{7086{,}7}{980-315}=10{,}6\ \textit{ккал/ч}\cdot\textit{м}^2\cdot\textit{град}.$$

Коэффициент конвективного теплообмена рассчитывается при помощи формулы (9-28) и данных табл. 9-3:

$$\alpha=39{,}7\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}\cdot\textit{град}.$$

Таким образом, общий коэффициент теплообмена для поверхности, омываемой газами при температуре 980° С, равен:

$$\alpha_b=10{,}6+39{,}7=50{,}3\ \textit{ккал/м}^2\cdot\textit{ч}\cdot\textit{град}.$$

Значения для других температур определяются при помощи графика, изображенного на рис. 14-16.

Сравнение значений α_r со значениями α_b по данным графика, изображенного на рис. 14-16, показывает, что только при очень малой величине отношения *s/d* (расстояния между трубами к диаметру труб) и температуре газа меньше 980° С поверхность, омываемая газами, обладает более высокими значениями коэффициента теплообмена, чем облучаемая поверхность. Поэтому, если позволяют другие условия (например, трудность разжигания и др.), всю внутреннюю поверхность топки выгодно выкладывать трубами охлаждения, находящимися на небольшом расстоянии друг от друга.

14-6. ПОГРЕШНОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ

Измерения температуры в твердых телах или жидкостях при помощи вводимого зонда (термометра, термопары и т. п.) подвержены систематическим погрешностям, и в каждом случае нужно определить величину этих погрешностей. Соответствующие расчеты, определяющие погрешности вследствие теплопроводности, описаны в § 3-4. Теплоемкость термометра вызывает ошибку, когда температура изменяется со временем (см. § 4-1). Когда измеряется температура газа, может появиться дополнительная ошибка благодаря тому, что термометр обменивается лучистым теплом с окружающими твердыми поверхностями, температура которых отличается от температуры газа. Такая погрешность, вызванная излучением, и будет рассмотрена в данном разделе.

Представим себе, что термометр помещен в неизлучающий газ с температурой t_g в замкнутом пространстве, стенки которого имеют температуру t_w. Баланс между теплом, перемещенным на единицу площади поверхности от газа к термометру конвекцией и от термометра к стенкам излучением, дает:

$$\alpha_c (t_g - t_t) = \alpha_r (t_t - t_w),$$

где t_t — температура термометра;

α_c — коэффициент конвективного теплообмена;

α_r — коэффициент лучистого теплообмена.

Второй коэффициент получаем из уравнения (14-38), которое упрощается:

$$\alpha_r = \varepsilon_t \sigma f (T_t, T_w),$$

где ε_t — излучательная способность поверхности термометра, так как поверхность термометра мала по сравнению с поверхностью стенок и угловой коэффициент термометра по отношению к стенке равен 1.

Относительная погрешность E определяется следующим образом:

$$E = \frac{t_g - t_t}{t_g - t_w} = \frac{1}{1 + \alpha_c/\alpha_r}. \qquad (14\text{-}39)$$

Если, например, температура воздуха измеряется ртутным термометром в нагретой комнате со стенками, более холодными, чем воздух, то теплообмен между воздухом и

термометром осуществляется свободной конвекцией. Коэффициенты конвективного теплообмена в этом случае бывают порядка 10 *ккал/м²·ч·град*. Обнаружено, что коэффициенты лучистого теплообмена при температурах, равных приблизительно температуре атмосферы, бывают порядка 2 *ккал/м²·ч·град*. Относительная ошибка благодаря излучению тогда становится равной примерно 20%. Это значит, что в таких условиях невозможно никакое точное измерение обычным термометром.

Ошибка благодаря излучению может быть значительно уменьшена при помощи экрана. На рис. 14-17 изображен термометр, приспособленный для измерения температуры газа t_g в замкнутой полости с температурой стенок t_w. Экран s должен быть устроен так, чтобы он защищал температурочувствительный элемент термометра от излучения, испускаемого стенками, но не препятствовал конвективному теплообмену на поверхности термометра. Например, короткий пустотелый, открытый на обоих концах цилиндр, показанный на рис. 14-17, представляет собой желаемую конструкцию. Для вычисления ошибки в результате излучения примем, что величины, относящиеся к термометру, имеют индекс t, а величины, относящиеся к экрану, — индекс s.

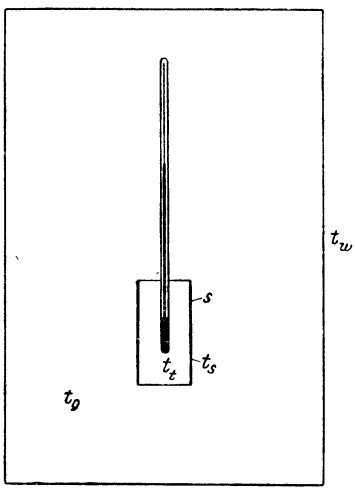


Рис. 14-17. К вычислению ошибки в показании термометра.

A_s представляет собой площадь поверхности одной стороны экрана, а A_t — площадь поверхности термометра. Тепловой баланс для термометра и экрана можно записать следующим образом:

$$\alpha_{r,t}(t_t - t_s) = \alpha_{c,t}(t_g - t_t);$$

$$2A_s\alpha_{c,s}(t_g - t_s) + A_t\alpha_{r,t}(t_t - t_s) = A_s\alpha_{rs}(t_s - t_w).$$

Исключив t_s и вычислив относительную погрешность,

получим:

$$E=\frac{t_g-t_t}{t_g-t_w}=$$

$$=\frac{\alpha_{r,t}}{\alpha_{r,t}+\alpha_{c,t}+2\frac{\alpha_{r,t}+\alpha_{c,s}}{\alpha_{r,s}}+2\frac{\alpha_{c,s}\alpha_{c,t}}{\alpha_{r,s}}+\frac{A_t}{A_s}\cdot\frac{\alpha_{r,t}+\alpha_{c,t}}{\alpha_{r,s}}}.$$

Последним членом знаменателя можно обычно пренебречь, так как $A_t/A_s \ll 1$. Выражение для относительной погрешности тогда упростится и примет вид:

$$E=\frac{t_g-t_t}{t_g-t_w}=\frac{1}{[1+(\alpha_{c,t}/\alpha_{r,t})]\,[1+2(\alpha_{c,s}/\alpha_{r,s})]}. \qquad (14\text{-}40)$$

В приведенных выражениях обозначения те же, что и для незащищенного термометра. Уравнение (14-40) показывает, что для уменьшения ошибки надо, чтобы все члены уравнения, относящиеся к излучению, были малы. Этого можно достигнуть, применяя для внешней стороны экрана материал с низкой излучательной способностью. Внутреннюю часть экрана надо окрасить в черный цвет, чтобы избежать отражения излучения стенки на термометр. Если возможно, поверхность термометра следует покрыть слоем, обладающим низкой излучательной способностью.

В особых условиях (например, при измерении температуры газа в печах) для уменьшения погрешностей экранировки недостаточно. В таком случае надо попытаться увеличить теплообмен конвекцией, уменьшив диаметр термометра (очень тонкие проволочные термопары) или искусственно увеличив скорость газа, обтекающего термометр. Это можно сделать путем отсасывания газа через экран излучения. Такой термометр называется отсасывающим термометром. Он показан на рис. 14-18.

Особым случаем является измерение общей температуры в газовом потоке большой скорости с высокой температурой. Для этой цели применяется наиболее распространенный диффузорный термометр (см. рис. 10-6). При установившемся режиме следует рассматривать три погрешности, обусловленные теплопроводностью, неполным восстановлением температуры и излучением, и, кроме того, благодаря неустановившимся температурам дополнительно может появиться погрешность, обусловленная тепло-

емкостью. Хорошие измерительные приборы могут быть сконструированы при применении многократной экранизации и создании оптимальных условий для уменьшения всех погрешностей [Л. 273].

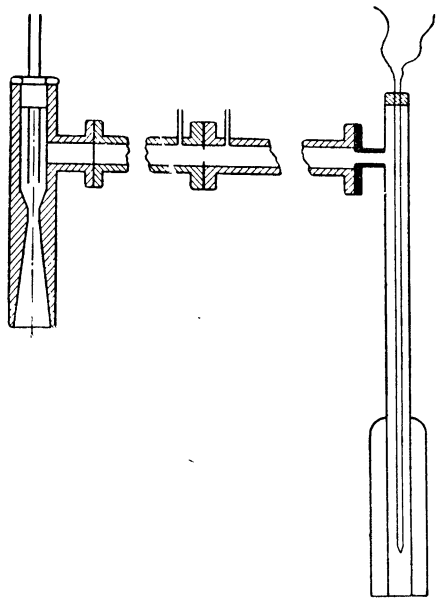


Рис. 14-18.

14-7. ПИРОМЕТРИЯ

У всех термометров есть верхний предел измерений температуры. Термопарой, изготовленной из платины-платинородия, например, можно измерять температуры до 1 500° С. Известны другие сплавы, которые могут быть использованы для измерения температур вплоть до 2 500° С. Однако с ними очень трудно обращаться. За этими пределами температуру измеряют по интенсивности испускаемого излучения. Такой метод называется пирометрическим. Международная шкала температур простирается выше температуры плавления золота (1 060° С) благодаря измерению интенсивности излучения черной поверхностью при помощи пирометров. Пирометры имеют дополнительное преимущество, заключающееся в том, что измерение можно осуществлять на расстоянии. В связи с этим они применяются даже для более низких темпера-

тур и при совершенной конструкции и правильном применении являются приборами высокой точности.

В следующих параграфах будут рассмотрены наиболее часто используемые методы измерения температур поверхностей твердых тел и жидкостей. Существует два класса приборов. Приборы, относящиеся к первому классу, измеряют калориметрически общее (интегральное) излучение, испускаемое поверхностью. Приборы второго класса сравнивают на глаз интенсивность монохроматического излучения предмета в видимом интервале длин волн с известной интенсивностью монохроматического излучения.

Каждый пирометр должен быть калиброван путем наблюдения при помощи него предметов с известной интенсивностью излучения. Последние могут быть, например, получены путем погружения абсолютно черных тел (керамических деталей с пустыми полостями) в ванны с расплавленным металлом с известной температурой. При применении пирометр имеет один основной недостаток, связанный с тем, что интенсивность излучения поверхности твердого тела или жидкости зависит не только от ее температуры, но также и от ее излучательной способности. Когда надо по показанию пирометра определить истинную температуру, необходимо либо знать излучательную способность поверхности, либо увеличить ее искусственно до значения, равного 1. В противном случае регистрируется кажущаяся температура, которая не совпадает с истинной температурой. В пирометрии используется ряд по-разному определяемых кажущихся температур.

Интегральная температура излучения T_t — это температура абсолютно черного тела с такой же общей интенсивностью излучения, как и поверхность, на которую направлен пирометр. Из определения следует соотношение между T_t и действительной температурой поверхности T:

$$\sigma T_t^4 = \varepsilon \sigma T^4, \text{ или } T = T_t/\sqrt[4]{\varepsilon}, \qquad (14\text{-}41)$$

где ε — излучательная способность поверхности. Для металла с излучательной способностью $\varepsilon = 0{,}05$ кажущаяся температура общего излучения равна только примерно половине действительной температуры.

Кажущаяся монохроматическая температура T_λ — это температура абсолютно черного тела, которая при определенной длине волны в видимом интер-

вале (обычно при $\lambda_r = 0{,}665$ *мк*) имеет такую же интенсивность излучения, как и рассматриваемая поверхность. Согласно этому определению

$$\frac{\lambda_r^{-5}}{e^{C_2/\lambda_r T_\lambda} - 1} = \varepsilon_{\lambda_r} \frac{\lambda_r^{-5}}{e^{C_2/\lambda_r T} - 1}$$

При температурах, встречающихся в технических измерениях, первый член в знаменателе данного уравнения велик по сравнению с 1, поэтому единицей можно пренебречь, не вызвав ошибки, которая превысила бы допустимую точность. Это уравнение может быть преобразовано в следующее:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda_r}{C_2} \ln \varepsilon_{\lambda_r}, \qquad (14\text{-}42)$$

где ε_λ означает монохроматическую излучательную способность поверхности. Из уравнения видно, что кажущаяся монохроматическая температура всегда ниже действительной температуры. То же самое справедливо для интегральной температуры излучения. Для металлов, которые имеют особенно низкую излучательную способность, $\varepsilon_{\lambda r}$ обычно больше ε. Монохроматическая температура в этом случае (для металлов) ближе к истинной, чем интегральная температура излучения.

Цветовая температура T_c определяется как температура, при которой черное тело имеет такое же отношение интенсивностей излучения при двух определенных длинах волн в видимом интервале, как и рассматриваемая поверхность. Обычно используются длины волн красного ($\lambda_r = 0{,}665$ *мк*) и зеленого ($\lambda_g = 0{,}544$ *мк*) цветов. Вообще говоря, цветовая температура — это температура, при которой кажется на глаз, что излучающее черное тело имеет тот же цвет, что и рассматриваемая поверхность.

Из этого определения следует, что

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_c} + \frac{\lambda_r \lambda_g}{(\lambda_r - \lambda_g) C_2} \ln \left(\frac{\varepsilon_{\lambda_g}}{\varepsilon_{\lambda_r}} \right). \qquad (14\text{-}43)$$

Цветовая температура для серой поверхности, для которой излучательная способность не изменяется с длиной волны ($\varepsilon_{\lambda g} = \varepsilon_{\lambda r}$), равна истинной температуре. Для большинства поверхностей цветовая температура ближе к истинной температуре, чем другие кажущиеся температуры.

На рис. 14-19 и 14-20 изображены наиболее распространенные пирометры. Пирометр интегрального излучения (рис. 14-19) при помощи фронтального покрытого золотом зеркала *a* фокусирует излучение, идущее от поверхности *s* на термоэлектрической батарее *b*, и измеряет электрический потенциал, генерируемый в батарее при помощи милливольтметра *c*. Диафрагма *d* не позволяет случайному

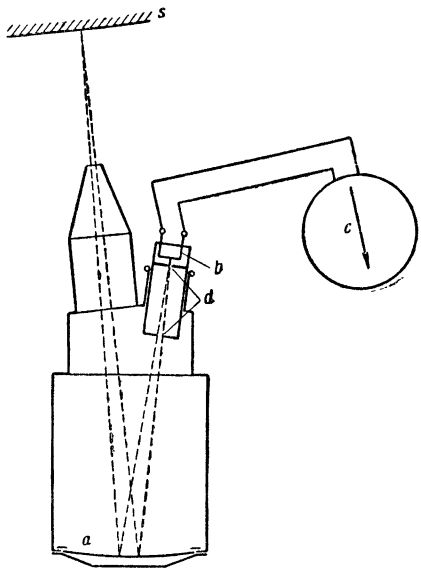


Рис. 14-19. Пирометр для измерения общего излучения (по Э. Шмидту).

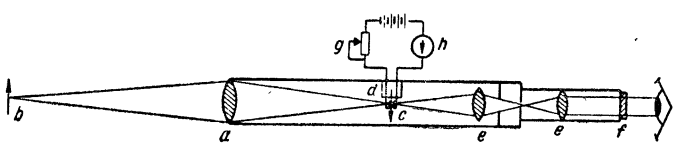


Рис. 14-20. Оптический пирометр.

излучению попадать на термоэлектрическую батарею. Этот пирометр измеряет кажущуюся температуру интегрального излучения. Оптический пирометр с тонкой металлической нитью по существу является телескопом (рис. 14-20). Его объектив *a*, будучи направленным на излучающий предмет *b*, создает изображение *c* в плоскости, где расположена нить накала маленькой лампы *d*. Через окуляр *e* и цветной фильтр *f* глаз одновременно наблюдает изображение предмета *c* и нить накала лампы. Тем-

пература нити изменяется путем включения сопротивления g в цепь, которая нагревает лампу. Оно вводится до тех пор, пока интенсивность излучения (яркость) нити станет равным кажущейся интенсивности излучения (яркости) изображения.

Ток накала нити, регистрируемый измерительным прибором h, соответственно калиброванным, является показателем интенсивности излучения предмета. При помощи дымчатого стекла кажущейся интенсивности можно придать такую величину, к которой человеческий глаз наиболее чувствителен. Обычно цветной фильтр является красным ($\lambda_r = 0{,}665$ *мк*) и прибор регистрирует кажущуюся монохроматическую температуру. Цветовая температура может быть измерена, когда пирометр дополнительно снабжен зеленым фильтром λ_g. Цветовую температуру T_c с температурой $T_{\lambda r}$, регистрируемую с помощью красного фильтра, и величину $T_{\lambda g}$, регистрируемую с помощью зеленого фильтра, связывает следующее соотношение:

$$\frac{1}{T_c} = \frac{(1/\lambda_r T_{\lambda_r}) - (1/\lambda_g T_{\lambda_g})}{(1/\lambda_r) - (1/\lambda_g)}. \qquad (14\text{-}44)$$

Для определения истинной температуры пирометрическим методом требуется знать величины излучательной способности поверхности или приблизить излучательную способность к единице. Это часто можно сделать, наблюдая дно отверстия, просверленное в поверхности, при помощи пирометра.

Температуру пламени или излучающих газов чаще всего измеряют методом обращенных спектральных линий. Этот метод основан на законе Кирхгофа. Путем добавления очень малого количества натрия газ делают светящимся в желаемом месте. Если на газ смотреть при помощи спектроскопа, можно наблюдать ярко-желтые линии натрия. Поместив с одной стороны окрашенного натрием пламени абсолютно черное тело и наблюдая с помощью спектроскопа, установленного с другой стороны пламени, черное тело, будем видеть непрерывный спектр излучения. На фоне этого спектра в случае, когда температура пламени выше температуры черного тела, линия натрия в спектре будет более светлой, чем фон и, наоборот, более темной, чем фон, если температура черного тела выше. Когда температура газа и черного тела одинакова, линии исчезают, так как в этом случае

пламя поглощает как раз столько излучения фона, сколько оно излучает (закон Кирхгофа). Измерение температуры абсолютно черного тела в этом случае показывает температуру газа в месте, содержащем натрий, который виден при помощи пирометра.

14-8. СОЛНЕЧНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

В нашем распоряжении находится огромный источник энергии в виде солнечного излучения, и сейчас делаются попытки найти способы эффективного его использования. Например, в настоящее время в различных исследовательских центрах изучается возможность использовать эту энергию для обогрева домов. Данный раздел книги посвящен краткому рассмотрению вопросов, касающихся солнечного излучения. Излучение Солнца подобно излучению «абсолютно черного» круглого диска с температурой, равной 6 000° С. Лучи, идущие от какой-либо точки на Земле к двум противоположным точкам на окружности Солнца, образуют угол, равный 32 *мин*, или 0,00931 *рад*. Вследствие высокой температуры максимальная интенсивность излучения обнаружена при длине волны 0,5 *мк*. Приблизительно половина излучения имеет место в видимом интервале, а остальная часть — в инфракрасном интервале приблизительно вплоть до 3 *мк*. Часть солнечного излучения, направленного к Земле, поглощается, отражается или преломляется атмосферой, а остальная часть достигает поверхности Земли. В среднем ежегодно Землей поглощается приблизительно 43% излучения, идущего от Солнца (27% непосредственно и 16% в виде рассеянного солнечного излучения); 42% отражается или преломляется обратно в пространство от облаков воздуха и отражается от поверхности Земли; 15% поглощается атмосферой.

Количество солнечного излучения, которое падает на единицу площади поверхности, нормальной к излучению Солнца и расположенную за пределами атмосферы, не зависит от положения на Земле или от времени дня и поэтому часто называется солнечной постоянной. Оно, однако, изменяется до некоторой степени в течение года, так как зависит от расстояния до Солнца. Количество этого излучения составляет 1101,5 *ккал/м²·ч* в январе и 1174,7 *ккал/м²·ч* в июле. Поглотители солнечного излучения часто имеют положение, которое определяется относительно поверхности Земли. Солнечное излучение падает на

такую поверхность под углом, который изменяется в течение дня и года. Если поглощением излучения в атмосфере пренебречь, то количество излучения, попадающего на единицу такой поверхности, можно подсчитать по углу между нормалью к поверхности и направлением солнечных лучей. На рис. 14-21 представлены результаты такого подсчета для горизонтальной и вертикальной поверхностей, обращенных к югу, как функция географической широты и времени года [Л. 274]. Интересно отметить два факта.

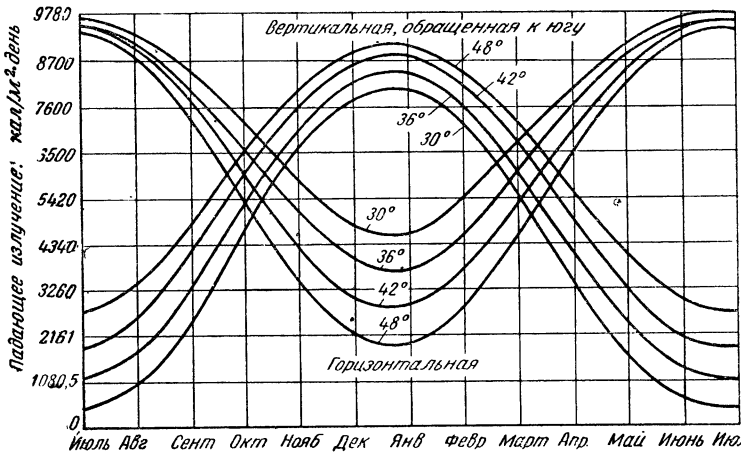


Рис. 14-21. Суточное солнечное излучение на горизонтальную и обращенную к югу вертикальную поверхность при различной северной долготе за пределами атмосферы [Л. 388].

В течение зимних месяцев, когда необходима солнечная энергия для обогрева, вертикальная поверхность в интервале широт, в которые входят США, получает значительно больший поток энергии, чем горизонтальная. Этот поток энергии не меняется сколько-нибудь заметно с географической широтой.

В действительности это количество энергии не может быть использовано, так как часть солнечного излучения поглощается в атмосфере или отражается и преломляется назад в пространство. Поглощение происходит в чистом воздухе, главным образом благодаря озону и водяным парам. Дополнительное поглощение вызывается частичками пыли. Последнее, конечно, в большой степени зависит от положения. Величина, на которую солнечное излучение уменьшается благодаря поглощению, также зависит от

длины пути солнечных лучей через атмосферу или от угла между солнечными лучами и поверхностью Земли (солнечной высоты).

На рис. 14-22 согласно исследованиям П. Муна [Л. 275] приводятся величины, характеризующие солнечное излучение, падающее на поверхность, нормальную к солнечным лучам и расположенную на уровне земли, для характерных условий поглощения в атмосфере в безоблачный зимний день.

Часть излучения попадает на Землю как рассеянное небесное излучение. Количество этого излучения сильно меняется. В безоблачный день приблизительно 40,7—81,4 *ккал/м²·ч* небесного излучения падает на горизонтальную поверхность.

В облачные дни солнечное излучение падает до очень низких значений (1% и менее излучения в ясные дни).

Количество солнечного излучения, которое поглощает поверхность, зависит от ее поглощательной способности. Следует помнить, что солнечное излучение имеет короткие длины волн и что поглощательная способность для такого излучения может сильно отличаться от поглощательной способности для длинноволнового излучения, которая может, например, быть получена с помощью табл. П-10. Рис. 13-10, например, показывает, что белая поверхность *1* для солнечного излучения обладает значительно меньшими поглощательными способностями, чем поверхность алюминия. Поверхности, которые должны быть защищены от солнечного излучения, нужно покрывать белым неметаллическим слоем (например, крыши автомобилей). Для поглотителей солнечного излучения важно иметь поверхность с высокой поглощательной способностью для солнечного излучения, но низкой излучательной способностью для длинноволнового излучения, для того чтобы уменьшить потери тепла излучением с поверхности. Большинство поверхностей с высокой поглощательной способностью обладает противоположной тенденцией (см. рис. 13-9). Национальная физическая лаборатория в Израиле успешно создала поверхность, обладающую требуемыми качествами, покрыв металлическую поверхность тонким черным слоем специального материала. Коротковолновое излучение поглощается этим слоем, тогда как длинноволновое излучение проходит и отражается от металлической поверхности. Солнечная энергия имеет то преимущество, что она вполне доступна; с другой стороны, плотность ее потока для многих целей слишком мала. В таких случаях необходимо при-

менить коллекторы, концентрирующие энергию в одной точке. Для этой цели обычно применяются параболические зеркала. В данном параграфе мы установим, какая плотность потока может быть получена при использовании такого зеркала, изображенного на рис. 14-23 [Л. 276]. Солнечное излучение падает на зеркало под углом $\alpha = 32$ *мин.*

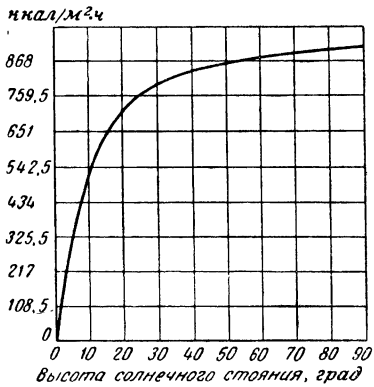


Рис. 14-22. Прямое солнечное излучение на поверхность, перпендикулярную солнечным лучам, у поверхности земли в безоблачный зимний день [Л. 388].

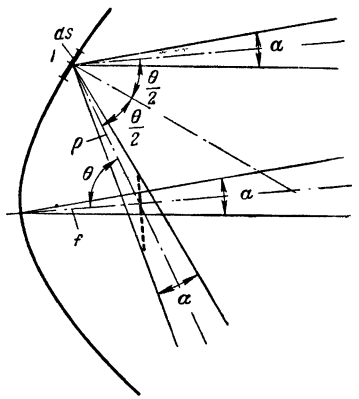


Рис. 14-23. Параболическое зеркало для солнечной печи.

Пучок лучей, падающий на зеркало вдоль его оси, отражается в том же направлении. На расстоянии f от вершины, которое равно длине фокусного расстояния зеркала, он создает изображение Солнца с диаметром $d = f\alpha$ и площадью $\pi f\alpha^2/4$. На эту площадь также собирается излучение, которое падает на другие части поверхности зеркала. Имеются, однако, определенные потери, связанные с этим процессом, так как не все падающие лучи концентрируются на изображении Солнца. Пучок, падающий в точку поверхности *1*, отражается в виде конуса с углом раствора α, ось которого проходит через фокус. Плоскость изображения Солнца отсекает от этого конуса эллиптическую площадь

$$\frac{\alpha^2\rho^2}{\cos\vartheta}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Отношение площади изображения Солнца к этой площади выражает отношение излучения, падающего на сол-

нечное изображение после отражения в точке *1*, к излучению, падающему в точку *1*:

$$\frac{f^2}{\rho^2}\cos\vartheta. \qquad (14\text{-}45)$$

Энергия, отраженная при идеальных условиях от зеркальной площади в форме кольца dA длиной ds в меридиональной плоскости, есть

$$dq = CdA\cos\frac{\vartheta}{2},$$

где C — солнечная постоянная. Учитывая, что

$$ds = \frac{\rho d\vartheta}{\cos(\vartheta/2)}$$

и

$$dA = 2\pi\rho\sin\vartheta ds = 2\pi\rho^2\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{\cos(\vartheta/2)},$$

что очевидно из рисунка, получим следующее выражение для отраженного излучения:

$$dq = C2\pi\rho^2\sin\vartheta d\vartheta.$$

Количество этого излучения, сконцентрированное в изображении Солнца, определяется путем умножения этого выражения на величину (14-45). Полная энергия, собранная на изображении Солнца зеркалом, находится путем интегрирования:

$$Q = 2\pi Cf^2\int_0^{\vartheta}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot d\vartheta = \pi Cf^2\sin^2\vartheta.$$

До этого момента допускалось, что энергия, идущая от Солнца, не терялась в процессе ее концентрирования. В действительности же уменьшение этой энергии будет вызвано поглощением в атмосфере и тем фактом, что отражательная способность поверхности зеркала меньше единицы. Кроме того, потери энергии будут обусловлены несовершенством геометрии зеркала. Эти три фактора учитываются соответственно двумя коэффициентами эффективности η_a и η_r. Поток тепла, собранный в изображении Солнца.

$$Q = \pi C\eta_a\eta_r f^2\sin^2\vartheta. \qquad (14\text{-}46)$$

Плотность потока — энергия, падающая на единицу площади, — определяется путем деления уравнения (14-46) на площадь изображения Солнца:

$$q = \frac{4}{\alpha^2} C\eta_a\eta_r \sin^2\vartheta.$$

Это уравнение можно записать другим, более понятным способом. Солнечная постоянная может быть представлена в следующем виде:

$$C = \frac{\alpha^2}{4}\sigma T_s^4, \qquad (14\text{-}47)$$

где T_s выражает температуру Солнца как абсолютно черного тела (6 000° С). Член $\alpha^2/4$ — угловой коэффициент Солнца относительно положения зеркала. При помощи этого уравнения плотность теплового потока можно выразить так:

$$q = \sigma T_s^4 \eta_a\eta_r \sin^2\vartheta.$$

Когда зеркало сделано с углом раствора, равным 60°, и когда взяты $\eta_a = 0{,}7$ и $\eta_r = 0{,}8$ — величины, которые можно встретить в реальных устройствах, тогда плотность теплового потока равна 42% величины σT_s^4, или 42% плотности теплового потока от абсолютно черной поверхности при температуре Солнца (1 844 840 *ккал/м²·ч*). Таким образом, при помощи солнечного коллектора можно получить высокие плотности потока.

Интересно также вычислить, до какой температуры можно нагреть точку, расположенную в положении изображения Солнца, с помощью солнечного коллектора при оптимальных условиях. Очевидно, наивысшая температура точки будет в том случае, когда будут предотвращены потери тепла с обратных сторон зеркала и когда на поверхности, подверженной солнечному излучению, отсутствует теплопроводность или конвекция. При этих условиях потеря тепла будет иметь место только за счет излучения. Приравнивая эту потерю тепла к тепловому потоку, идущему от Солнца, получим следующее соотношение:

$$\varepsilon\sigma T_m^4 = A\sigma T_s^4 \eta_a\eta_r \sin^2\vartheta.$$

Для серой поверхности поглощательная способность A равна излучательной способности ε и температура предмета становится равной:

$$T_m = T_s \sqrt[4]{\eta_a \eta_r} \sin^{1/2}\vartheta. \qquad (14\text{-}48)$$

Если предположить, как и прежде, $\vartheta = 60°$; $\eta_a = 0{,}7$; $\eta_r = 0{,}8$, находим, что максимальная температура предмета равна 80% температуры Солнца, или 4 800° K.

ЗАДАЧИ

14-1. Подсчитайте угловой коэффициент для элемента поверхности, обменивающегося излучением с площадью, имеющей форму круглого диска, находящегося в положении, указанном на рис. 14-2, при условии, что обе площади параллельны и $r > 1$.

14-2. Выведите уравнения, определяющие угловой коэффициент между элементом поверхности и круглым диском для любого взаимного положения. Используйте для этой цели операцию, описанную в тексте для примера, показанного на рис. 14-6.

14-3. Покажите, что коэффициент ψ, взятый из кривой d на рис. 14-14 для значения $s/d = 3$, справедлив. Коэффициент ψ на этой кривой тождествен угловому коэффициенту стенки печи относительно ряда трубок.

14-4. Определите локальный угловой коэффициент между элементом поверхности стенки печи и трубками в устройстве, характеризующемся кривой e на рис. 14-14, и докажите путем приближения, что величина ψ, определяемая из этого рисунка для $s/d = 3$, является правильной.

14-5. Определите угловой коэффициент для теплообмена между элементом площади и круглым диском, расположенным под углом 45° к элементу, когда диаметр диска равен расстоянию его от элемента. Допускается, что круглый диск излучает подобно абсолютно черному телу, а элемент площади представляет собой алюминиевую поверхность с пространственной кривой распределения, как показано на рис. 13-11. Сравните полученный результат с угловым коэффициентом для двух черных поверхностей одинаковой формы.

14-6. Докажите, что уравнение (14-21), определяющее приведенную степень черноты системы «газ — серые стенки», справедливо.

14-7. Вычислите теплообмен между различными поверхностями, окружающими камеру сгорания парового котла, изображенного на рис. 14-15. Определите размеры различных охлажденных и неохлажденных поверхностей на этом рисунке; допустите, что ширина камеры сгорания, нормальная к плоскости рисунка, равна половине длины топки. Используйте данные, содержащиеся в примерах и § 14-4 и 14-5, и допустите, что газы и пламя в камере сгорания не излучают и не поглощают тепла и что слой угля в топке имеет температуру 1 650° C. Считайте, что поверхность слоя угля является черной, и допустите, что излучательная способность огнеупорной футеровки равна 0,7. Для расчета используйте метод, описанный в § 14-3.

14-8. Подсчитайте погрешность, обусловленную излучением, допущенную при измерении температуры воздуха при 540° С и атмосферном давлении отсасывающим термометром, изображенным на рис. 14-18. Толщина проволок термопары (железо—константан) равна 0,05 *см*. Трубка, окружающая термопару, имеет диаметр 1,25 *см*; диаметр внешнего экрана излучения 2 *см*. Трубка и экран изготовлены из нержавеющей стали. Воздух через термометр подсасывается со скоростью 45 *м/сек*.

14-9. Показать аналитически, как применяется метод обращения спектральных линий путем прослеживания интенсивности пучка, идущего от абсолютно черного тела и проходящего через пламя по направлению к спектроскопу.

ЧАСТЬ D

ПЕРЕНОС МАССЫ

Во многих случаях в технике, особенно в химической промышленности, применяются процессы, которые классифицируются как процессы переноса массы. Это определение относится к такому состоянию, когда в смеси неоднородной концентрации одна из компонент переносится с одного места на другое диффузией или конвекцией. С точки зрения техники перенос массы через поверхность раздела между различными средами или фазами той же среды имеет большое значение.

Дифференциальные уравнения, описывающие такие процессы переноса массы, можно получить в очень общей форме при помощи операций, разработанных термодинамикой необратимых процессов. Здесь не будут выводиться или обсуждаться эти уравнения, а только будут рассмотрены более простые формулы, которые описывают диффузию и конвекцию в смесях идеальных газов или разбавленных жидких растворах. Иногда химические реакции сочетаются с процессом переноса массы. В этой книге такие реакции также не будут рассматриваться.

Предполагается, что поверхность, на которой изучается перенос массы, представляет собой поверхность раздела между газом и твердым телом или жидкостью или поверхность раздела между жидким и твердым веществами. Типичными процессами, к которым можно применить зависимости, выведенные в части *D*, являются, например, испарение и конденсация одной из компонент газовой смеси на твердой поверхности. Предполагается, что поверхность, на которой происходит перенос массы, известна и геометрия ее хорошо определена. Обычно сюда не относится случай, например, испарения жидкости в виде капель или случай, когда газ движется в виде пузырей через жидкость. Для выявления протекания таких процессов требуется провести тщательное исследование, и здесь они рассматриваться не

будут. В книге не рассматривается и такой процесс, как движение массы через пористые материалы, что имеет место в процессах сушки.

В качестве введения в рассмотрение собственно процессов переноса будут выведены основные уравнения, связывающие важные физические параметры газовой смеси в состоянии равновесия. Затем будут рассмотрены необходимые соотношения смеси газ—пар для случая влажного воздуха.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

15-1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СМЕСЕЙ ДВУХ КОМПОНЕНТОВ

Уравнения, описывающие перенос массы, приводимые в литературе, содержат большое количество различных параметров, и часто возникает задача преобразования одной формы записи уравнений в другую. По этой причине параметры и их определения будут рассматриваться для смеси двух компонентов, которые будут обозначены индексами 1 и 2. Предполагается, что смесь находится в состоянии равновесия, т. е. при постоянных температуре и давлении, а также, что состав смеси повсеместно однороден. Массы m_1 и m_2 заключены в объем V. Общая масса смеси $m=m_1+m_2$ и общая плотность $\rho=m/V$. Можно также определить парциальные плотности $\rho_1=m_1/V$, $\rho_2=m_2/V$. Эти величины также часто называют концентрацией. Смесь может также характеризоваться массовыми долями $w_1=m_1/m$, $w_2=m_2/m$. Вместо массы можно в качестве единицы использовать грамм-молекулу. Если M_1 и M_2 обозначают молекулярные веса, то количества молей для данных двух компонентов будут:

$$N_1=m_1/M_1;\quad N_2=m_2/M_2.$$

Действительное количество молекул определяется путем умножения N на число Лошмидта ($6{,}03\cdot10^{23}$ молекул на грамм-моль). Аналогично можно определить общую молярную плотность N/V ($N=N_1+N_2$) и парциальные молярные плотности, или концентрации, N_1/V, N_2/V, а также молярные доли N_1/N, N_2/N.

В смеси идеальных газов состав часто выражается при помощи парциальных давлений. Для смеси двух идеальных газов, не вступающих между собой в химическую реакцию, справедлив закон Дальтона: если в одном и том же объеме заключены два различных газа, то каждый газ заполняет весь объем, как если бы другого газа и не было. Согласно закону идеального газа давление любого из этих газов является его парциальным давлением. Общее давление смеси газов равняется сумме всех парциальных давлений. С молекулярной точки зрения это значит, что среди молекул нет никаких сил притяжения. Если в двухкомпонентной газовой смеси парциальные давления обозначить буквами p_1 и p_2, общее давление — буквой p, газовые постоянные — буквами R_1 и R_2, а общую температуру — буквой T, то закон Дальтона выразится следующим уравнением:

$$p_1V = m_1R_1T = \frac{m_1}{M_1}\mathfrak{R}T = N_1\mathfrak{R}T;$$

$$p_2V = m_2R_2T = \frac{m_2}{M_2}\mathfrak{R}T = N_2\mathfrak{R}T;$$

$$p = p_1 + p_2,$$

где $\mathfrak{R}$ — универсальная газовая постоянная;
$R_1 = \mathfrak{R}/M_1$; $R_2 = \mathfrak{R}/M_2$.

Численная величина универсальной газовой постоянной

$$\mathfrak{R} = 848 \ кГ \cdot м/моль \cdot град.$$

После сложения записанных выше уравнений получим газовый закон для смеси:

$$pV = mRT = N\mathfrak{R}T,$$

где газовая постоянная смеси

$$R = (m_1R_1 + m_2R_2)/m = w_1R_1 + w_2R_2 = w_1R_1 + (1 - w_1)R_2.$$

Различные свойства, определенные в предыдущих параграфах, можно выразить через парциальные давления:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{p_1}{R_1T}; \quad w_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{p_1R}{pR_1} = \frac{R_2p_1}{R_1p - p_1(1 - R_2)};$$

$$\frac{N_1}{V} = \frac{p_1}{RT} \cdot \frac{N_1}{N} = \frac{p_1}{p}.$$

Разнообразие выражений для переноса массы обусловлено тем, что потенциал переноса может быть выражен как градиент любого параметра: парциальной плотности массы или грамм-молекулы, массовой или молярной доли и, наконец, парциального давления. Расчеты для влажного воздуха часто базируются на другом параметре, о котором будет сказано в следующем параграфе.

15-2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ и i—d ДИАГРАММА ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА

При расчетах, относящихся к влажному воздуху, удобно все уравнения относить к килограмму сухого воздуха, так как содержание водяного пара изменяется. Масса водяного пара на килограмм сухого воздуха называется удельным влагосодержанием и обозначается буквой d.

Из предыдущего уравнения следует:

$$d = \frac{m_v}{m_a} = \frac{M_v}{M_a} \cdot \frac{p_v}{p_a}. \qquad (15\text{-}1)$$

Молекулярный вес водяного пара равен 18 ($M_v = 18$), а молекулярный вес воздуха 29 ($M_a = 29$). Отсюда получим:

$$d = 0{,}622 \frac{p_v}{p_a} = 0{,}622 \frac{p_v}{p - p_v}. \qquad (15\text{-}2)$$

При различных температурах воздух может содержать различное максимальное количество водяного пара. Воздух с максимальным содержанием водяного пара называется насыщенным. Точка насыщения определяется тем условием, что парциальное давление водяного пара не может превышать давление насыщения водяного пара, соответствующего температуре воздуха. Давление насыщения, соответствующее различным температурам, можно определить по номограмме на рис. 15-5. Удельное влагосодержание насыщенного воздуха определяется по формуле

$$d_s = 0{,}622 \frac{p_s}{p - p_s}, \qquad (15\text{-}3)$$

где p_s — давление насыщения.

Влажность воздуха часто выражают в виде отношений действительного парциального давления паров p_v к давлению насыщения p_s при температуре воздуха. Это отношение на-

зывается относительной влажностью и обозначается буквой φ:

$$\varphi = \frac{p_v}{p_s}. \tag{15-4}$$

Иногда вместо отношения парциальных давлений берут отношение удельных влагосодержаний. Отношение

$$\psi = \frac{d}{d_s} \tag{15-5}$$

можно выразить через парциальные давления водяного пара. При низких температурах парциальное давление водяного пара невелико по сравнению с общим барометрическим давлением. В таком случае вместо уравнения (15-2) можно написать:

$$d \approx 0{,}622 \frac{p_v}{p}$$

и для насыщенного воздуха

$$d_s \approx 0{,}622 \frac{p_s}{p}.$$

Отсюда

$$\psi = \frac{d}{d_s} \approx \frac{p_v}{p_s} = \varphi.$$

Следовательно, при низких температурах разницы между φ и ψ нет.

Избыток воды над удельным влагосодержанием при насыщении может содержаться в воздухе только в виде жидкости в форме небольших капелек (туман) либо в твердой форме — в виде снега. Содержание воды в 1 *кг* воздуха равно $(d - d_s)$.

Для последующих вычислений необходимо знать энтальпию влажного воздуха. Если удельное влагосодержание не превышает предела насыщения, энтальпия влажного воздуха слагается из энтальпии сухого воздуха и энтальпии водяного пара. Обозначим удельную теплоемкость воздуха при постоянном давлении через c_{pa}; тогда энтальпия сухого воздуха будет равна $i_a = c_{pa}t$. Энтальпию водяного пара i_v при низкой температуре можно выразить следующим образом:

$$i_v = c_{pv}t + i_{v,0},$$

где c_{pv} — удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении и $i_{v,0}$ — удельная теплота испарения при 0° С. Энтальпия влажного воздуха

$$i = i_a + di_v = c_{pa}t + d(c_{pv}t + i_{v,0}), \qquad (15\text{-}6)$$

где $c_{pa} = 0{,}24$ *ккал/кг·град*; $c_{pv} = 0{,}47$ *ккал/кг·град* и $i_{v,0} = 595$ *ккал/кг*.

Если воздух пересыщен водяным паром, необходимо добавить энтальпию воды в жидкой фазе $i_f = c_f t$, где c_f — удельная теплоемкость воды ($c_f = 1$ *ккал/кг·град*). Отсюда

$$i = c_{pa}t + d(c_{pv}t + i_{v,0}) + (d - d_s)c_f t. \qquad (15\text{-}7)$$

Энтальпия льда $i_i = -i_{s,0} + c_i t$, причем теплота плавления льда $i_{s,0}$ равна 80 *ккал/кг* и удельная теплоемкость льда c_i равна 0,5 *ккал/кг·град*. Энтальпия льда — отрицательная величина, так как энтальпия воды в жидкой фазе при 0° С считается равной нулю. Энтальпия воздуха с туманом из кристалликов льда

$$i = c_{pa}t + d_s(c_{pv}t + i_{v,0}) - (d - d_s)(i_{s,0} - c_i t). \qquad (15\text{-}8)$$

Если $d < d_s$, надо применять формулу (15-6); если $d > d_s$ и $t > 0°$ С, то справедлива формула (15-8).

В ненасыщенном воздухе водяные пары находятся как бы в перегретом состоянии, так как упругость пара меньше давления насыщения, соответствующего температуре воздуха. При особых условиях в воздухе может содержаться большее количество водяного пара, чем то, которое соответствует состоянию насыщения. Это возможно, например, при резком охлаждении воздуха (при адиабатическом расширении) или в очень чистом воздухе, не содержащем твердых взвешенных частиц (пыль, сажа), на которых могли бы образоваться капельки. Такое состояние называется перенасыщением. С практической точки зрения такое состояние не представляет большой важности. Поэтому в последующем изложении мы будем предполагать, что перенасыщения не происходит.

Процессы сушки и увлажнения изучают обычно при помощи психрометрических графиков влажного воздуха.

На таком графике температура (по сухому термометру) откладывается по оси абсцисс, а удельное влагосодержание — по оси ординат. Р. Молье [Л. 277] предложил другой график, при построении которого вместо температур берется энтальпия [1]. Такой график имеет то преимущество, что процессы смешения двух или нескольких потоков воздуха или процессы подмешивания к воздуху воды в жидкой или газообразной фазе можно с точностью решать простыми геометрическими построениями, которые на психрометрических графиках дают лишь приближенные результаты. Кроме того, графики Молье можно применять не только для

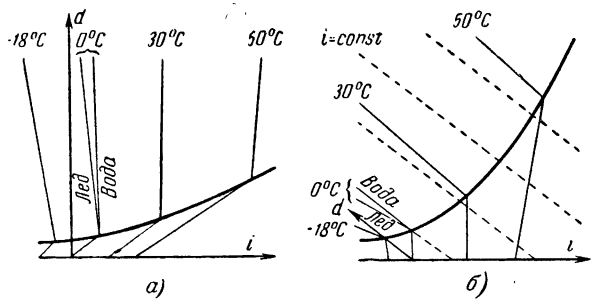


Рис. 15-1. График зависимости удельного влагосодержания от энтальпии для влажного воздуха (по Молье).

смеси воздуха и водяного пара. В первых графиках Молье по оси абсцисс откладывали удельное влагосодержание, а по оси ординат — энтальпию. В таком виде график очень похож на психрометрический; различие заключалось лишь в том, что вертикальные прямые постоянных температур на графике Молье изображались прямыми, наклоненными под различным углом к оси абсцисс. Последующее изложение посвящено графику Молье для влажного воздуха.

Если в качестве оси ординат взять удельное влагосодержание d, а в качестве оси абсцисс — энтальпию i, то получится график, изображенный на рис. 15-1,*а*. На графике показаны некоторые изотермы, которые изображаются прямыми. Так, например, изотерма $t=0°$ С в области нена-

[1] Впервые диаграмма влажного воздуха (зависимость между теплосодержанием и влагосодержанием воздуха) была предложена проф. Л. К. Рамзиным в 1918 г. В 1923 г. аналогичная диаграмма была опубликована Р. Молье в журнале VDI. Диаграмма влажного воздуха ($i-d$-диаграмма) Л. К. Рамзина более удобна для расчетов по сравнению с диаграммой Молье. (Прим. ред.)

сыщенного парами воздуха имеет относительно оси ординат наклон, соответствующий 600 *ккал/кг*. Для более высоких влажностей изотерма согласно уравнению (15-7) будет изображаться вертикальной прямой. Если в воздухе содержится вода в твердой фазе, то изотерма за пределом насыщения будет определяться по формуле (15-8). Поэтому она имеет отрицательный наклон по отношению к ординате, соответствующий 79,5 *ккал/кг*. Изотермы для положительных температур наклонены вправо; изотерма для тумана в воздухе при 0° С ($d>d_s$) изображается вертикальной прямой. Изотермы для отрицательных температур наклонены влево. Соединим все точки, соответствующие пределу насыщения, получим кривую насыщения. Так как согласно уравнению (15-3) предел насыщения зависит от общего давления, то найденная кривая и, следовательно, весь график справедливы только для данного давления.

Кривая насыщения разделяет области, соответствующие состояниям ненасыщения и насыщения. В точке пересечения с изотермой $t=0°$ С кривая насыщения имеет небольшой разрыв, так как для температур выше 0° С она определяется состоянием равновесия между водой и водяными парами, а для температур ниже 0° С — состоянием равновесия между льдом и водяным паром. График, показанный на рис. 15-1,*а*, обладает тем недостатком, что область насыщенного паром воздуха сравнительно мала. Этого можно избежать, применив систему косоугольных координат. Молье предложил придать оси d такой наклон, чтобы изотерма $t=0°$ С в области ненасыщенного паром воздуха изображалась вертикальной прямой. Такой график и показан на рис. 15-1,*в*. Линии $i=\text{const}$ изображаются на этом графике прямыми, наклоненными к оси абсцисс. Один такой график в более крупном масштабе приведен на рис. 15-5.

Теперь рассмотрим несколько примеров применения такого графика. Состояние влажного воздуха при определенном давлении определяется температурой t_1 и удельным влагосодержанием d_1. На рис. 15-2 это состояние определяется точкой *1*. Значение ψ можно легко определить следующим образом: продолжаем изотерму t_1 до точки пересечения с кривой насыщения и определяем влагосодержание насыщения d_{s1}, а затем определением ψ по формуле $\psi_1=d_1/d_{s1}$. Для не слишком высоких температур влажность φ обладает тем же значением. Для более высоких темпе-

ратур φ определяется по парциальным давлениям. На графике зависимости удельного влагосодержания от энтальпии (см. рис. 15-5) изображены кривые постоянной влажности. Если воздух в состоянии *1* охлаждать, его влагосодержание не изменится, пока он не насытится водяными парами. Это означает, что при охлаждении точка, изображающая состояние влажного воздуха, будет перемещаться по горизонтальной прямой. Влажность воздуха возрастает при понижении температуры, и в точке *2* наступает насыщение. Эта точка называется точкой росы, а соответствующая температура — температурой конденсации. Если воздух охлаждать дальше, часть водяных паров сконденсируется в мельчайшие капельки (туман). В точке *3* достигается температура t_3. Часть d_{s3} общего влагосодержания d_1 находится в виде паров, а остальная часть — в виде жидкости. Значение d_{s3} определяется точкой пересечения изотермы t_3 с кривой насыщения. Воду в жидкой фазе можно из воздуха удалить, подождав, например, пока капельки осядут. Таким образом, влагосодержание воздуха снизится от d_1 до d_{s3}. Точка, соответствующая этому состоянию, обозначена на рис. 15-2 цифрой *4*. Следовательно, воздух можно осушить. Так, например, если воздух в состоянии *1* требуется осушить до удельного влагосодержания d_{s3} его необходимо охладить до температуры t_3. При этом сперва достигается точка росы, а затем, после отделения жидкой воды, достигается состояние, определяемое точкой *4*. Теперь воздух можно снова нагреть до исходной температуры, и мы приходим к состоянию *5*, которое характеризуется более низким влагосодержанием по сравнению с состоянием *1*. Этот метод часто применяют при кондиционировании воздуха.

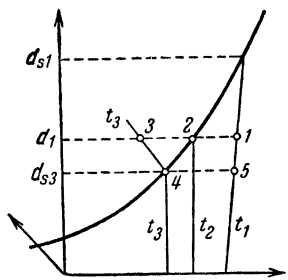


Рис. 15-2. К определению состояния влажного воздуха по графику Молье.

В качестве второго примера определим состояние, возникающее в результате смешения двух количеств воздуха, обладающих различными температурой и влагосодержанием. Пусть в одном объеме содержится воздух при температуре t_1 с удельным влагосодержанием d_1 и массой m_1; во втором объеме содержится воздух при температуре t_2 с удельным влагосодержанием d_2 и массой m_2.

При смешении получаем массу воздуха весом m с температурой t и удельным влагосодержанием d, причем справедливы следующие равенства:

$$m_1 + m_2 = m \quad \text{(материальный баланс воздуха)} \qquad (15\text{-}9)$$

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 = md \quad \text{(материальный баланс воды);} \qquad (15\text{-}10)$$

$$m_1 i_1 + m_2 i_2 = mi \quad \text{(тепловой баланс),} \qquad (15\text{-}11)$$

где i — энтальпия влажного воздуха, значения которой можно определить из диаграммы $i - d$.

Исключив m с помощью первого равенства, получим следующие уравнения:

$$m_1 (d - d_1) = m_2 (d_2 - d);$$

$$m_1 (i - i_1) = m_2 (i_2 - i).$$

Почленное деление дает:

$$\frac{d - d_1}{i - i_1} = \frac{d_2 - d}{i_2 - i}. \qquad (15\text{-}12)$$

Из этой пропорции следует, что на графике зависимости удельного влагосодержания от энтальпии точка M, характеризующая состояние смеси, должна находиться на прямой *1—2*, соединяющей две исходные точки (рис. 15-3). Положение точки M определяется уравнением

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2 - d}{d - d_1}. \qquad (15\text{-}13)$$

Следовательно, отношение отрезка *M-2* (рис. 15-3) к отрезку *M-1* должно равняться отношению масс m_1/m_2. Если воздух, характеризуемый состоянием *3*, смешать с воздухом, характеризуемым состоянием *4*, то в результате получится смесь, состояние которой будет определяться точкой, лежащей на прямой *3—4* (рис. 15-3). Как видно из графика, состояние смеси может характеризоваться точкой, лежащей в области тумана. Примером этого может послужить видимость выдыхаемого воздуха в холодную погоду. Теплый влажный воздух, выходящий из легких, смешивается с холодным наружным воздухом и получается перенасыщенная смесь, жидкая фракция влагосодержания которой видима в форме тумана.

Другим примером является увлажнение воздуха водой или паром. Пусть исходное состояние воздуха характеризуется массой m_1, температурой t_1 и влагосодержанием d_1. Пусть масса воды в воздухе m_w и ее энтальпия i_w. Тогда

$$m_1(d_2 - d_1) = m_w \text{ (материальный баланс);} \qquad (15\text{-}14)$$

$$m_1(i_2 - i_1) = m_w i_w \text{ (тепловой баланс).} \qquad (15\text{-}15)$$

Индекс 2 указывает на конечное состояние смеси. Почленное деление дает:

$$\frac{i_2 - i_1}{d_2 - d_1} = i_w. \qquad (15\text{-}16)$$

Это уравнение определяет направление изменения состояния воздуха на графике зависимости удельного влагосодержания от энтальпии в процессе увлажнения. Отношение изменения энтальпии $(i—i_1)$ к изменению удельного влагосодержания $(d—d_1)$ равняется энтальпии воды i_w. Это отношение определяет значение угла α (рис. 15-4). Для

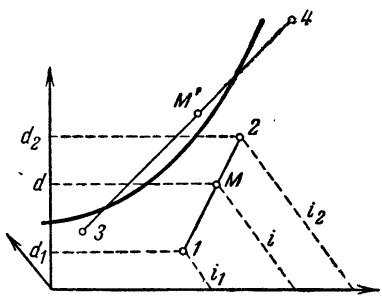


Рис. 15-3. К определению состояния при смешении двух объемов воздуха с различным влагосодержанием по графику Молье.

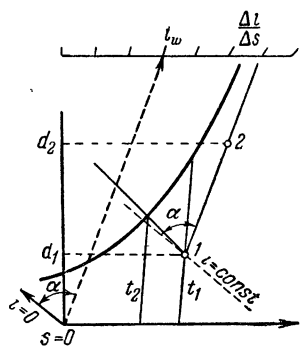


Рис. 15-4. К определению состояния воздуха при увлажнении его паром или водой при помощи графика Молье.

облегчения определения этого угла на диаграмме Молье дается особая шкала, которая представляет собой лучи, исходящие из начальной точки ($i=0$ и $d=0$) и обозначаемые соответствующей энтальпией i_w (см. рис. 15-5). Эта шкала показана в верхней части рис. 15-4. Пунктирная линия, соединяющая начало координат со значением i_w на шкале, определяет направление изменения состояния воз-

духа. Если через точку *1* (рис. 15-4), характеризующую состояние воздуха до увлажнения, провести прямую, параллельную пунктирной, то состояние воздуха *2* после увлажнения должно также лежать на этой линии. Окончательное состояние d_2 на этой прямой определяется количеством примешиваемых водяных паров. Из уравнения (15-14) следует:

$$d_2 - d_1 = \frac{m_w}{m_1}, \qquad (15\text{-}17)$$

что и определяет положение точки, характеризующей окончательное состояние. Энталыпия пара характеризуется величиной порядка 555 *ккал/кг*. Из диаграммы i—d видно, что направление изменения состояния совпадает приблизительно с вертикалью. Поэтому если насыщенный воздух увлажнять паром, то его температура лишь слегка изменится. Воздух с туманом нагревается, когда смешивается с паром. Энталыпия воды равняется ее температуре. При впрыскивании воды в воздух линия направления изменения состояния имеет сильный наклон влево. Следовательно, ненасыщенный воздух при разбрызгивании воды охлаждается. Может оказаться странным, что воздух охлаждается даже при разбрызгивании более теплой, чем воздух, воды. Объясняется это тем, что при испарении вода отнимает тепло у воздуха. Другие примеры применения рассматриваемого графика приводятся в последующем изложении. Подобные же графики оказались весьма полезными при рассмотрении поведения смесей других газов [1].

ЗАДАЧИ

15-1. Насыщенный воздух при атмосферном давлении и температуре 10° С смешан с воздухом, удельная влажность которого $d=0{,}04$. Какова должна быть минимальная температура второго воздуха, чтобы исключить любое локальное образование тумана в процессе смешения? Для получения ответа используйте диаграмму на рис. 15-5.

15-2. Удельная влажность d воздуха при атмосферном давлении и температуре 60° С должна быть уменьшена с 0,05 до 0,02. При какой последовательности процессов охлаждения и нагрева можно получить такие результаты? С какой максимальной температурой может быть использована вода как охлаждающая среда для осуществления такого процесса? Какое количество тепла следует отнять и добавить при этой последовательности на 1 *кг* сухого воздуха (используйте рис. 15-5)?

[1] Описание построения и применения таких графиков можно найти в книге F. Bošnjakovic, Technische Thermodinamik, т. 2, 1937 (имеется русский перевод).

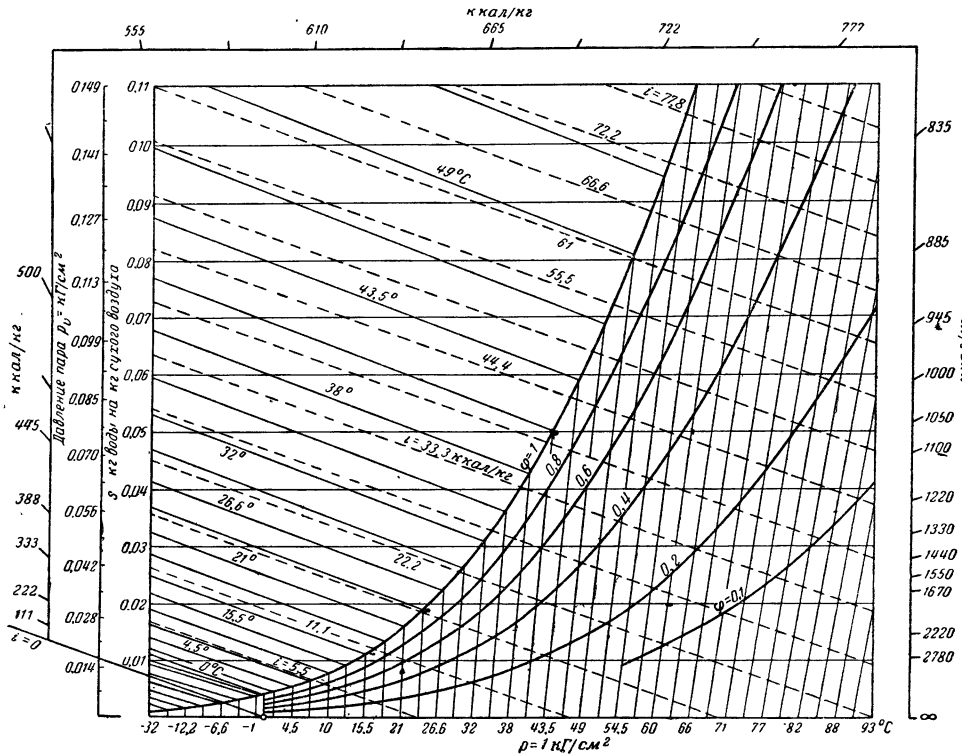


Рис. 15-5. Диаграмма зависимости удельного влагосодержания от энтальпии для общего давления $p = 1$ кГ/см².

15-3. Воздух при атмосферном давлении с температурой 71° С и относительной влажностью $\varphi=0{,}1$ надо насытить брызгами воды с температурой 30° С или насыщенным паром при атмосферном давлении.

Какова температура насыщенного воздуха в обоих случаях и какое количество воды или пара необходимо на килограмм сухого воздуха (используйте рис. 15-5)?

15-4. График зависимости удельного влагосодержания от энтальпии для смесей топлива с паром — воздухом полезен для изучения физических процессов, происходящих в карбюраторе двигателя внутреннего сгорания. Начертите такой график для смесей бензин — воздух, используя физические свойства, содержащиеся в различных справочниках.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

МАССООБМЕН

16-1. ДИФФУЗИЯ

Теплопроводность в газе обусловлена беспорядочным движением молекул, которые, смешиваясь, стремятся выравнять существующую разницу в их энергии. Благодаря этому же движению постепенно уменьшаются местные различия в концентрации газовой смеси, даже если не происходит макроскопического смешивания.

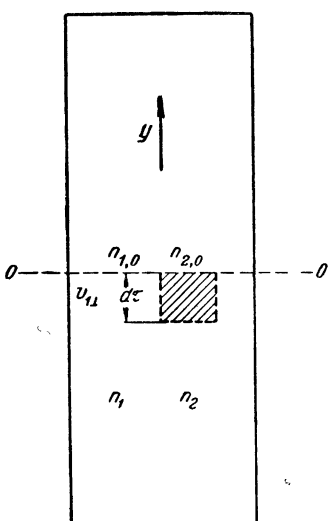


Рис. 16-1. Диффузия в двухкомпонентной смеси.

Этот процесс называется диффузией. Мы выведем основные законы для процесса диффузии с газо-кинетической точки зрения подобно тому, как описано в разделе 10-3. Для этой цели рассмотрим смесь двух компонентов, заключенных в сосуд и имеющих одинаковые температуру и давление (рис. 16-1). Общее число молекул в единице объема равно n (количество молекул данных двух компонентов соответственно равно n_1 и n_2; $n=n_1+n_2$). Кинетика газа показывает, что при одинаковых температурах и давлениях число n в разных местах сосуда должно быть одним и тем же. Допустим, что числа n_1 и n_2 изменяются

в направлении y, причем n_1 больше в нижней части, а n_2 — в верхней части сосуда.

Рассмотрим плоскость *0—0*, где количества двух компонентов соответственно равны $n_{1,0}$ и $n_{2,0}$. Молекулы в своем беспорядочном движении будут непрерывно пересекать эту плоскость. Все молекулы *1*, содержащиеся в малом элементе объема с единичной площадью основания на плоскости *0—0* и высотой $v_{1\perp}\,d\tau$, со средней скоростью $v_{1\perp}$ в направлении y вверх, будут пересекать эту единицу площади *0—0* за время $d\tau$.

Количество молекул в единице объема в данном элементе объема больше, чем количество $n_{1,0}$ около плоскости *0—0*, если эта плоскость совпадает с верхним основанием. Это количество может быть выражено таким образом:

$$n_{1,0} - j\bar{\lambda}(dn_1/dy),$$

так как молекулы подходят в среднем от плоскости, находящейся на расстоянии $j\bar{\lambda}$ от плоскости *0—0*, где $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега, а j — число порядка 1. Кроме того, можно записать следующее соотношение: $v_{1\perp} = i'v_1$, где v_1 выражает среднюю скорость молекул вида *1* и i' — число порядка 1. Поэтому количество молекул *1*, пересекающих единицу поверхности плоскости *0—0* в единицу времени в вертикальном направлении вверх, будет:

$$i'v_1[n_{1,0} - j\bar{\lambda}(dn_1/dy)].$$

Число молекул *1*, проходящих в направлении вниз через плоскость *0—0* равно:

$$i'v_1[n_{1,0} + j\bar{\lambda}(dn_1/dy)]$$

и, таким образом, результирующий поток молекул *1* через плоскость *0—0* равен:

$$\dot{n}_1 = -i_1 v_1 \bar{\lambda}\frac{dn_1}{dy}, \qquad (16\text{-}1)$$

где $i_1 = 2i'j$ — число порядка 1.

Аналогично результирующий поток молекул *2* через плоскость *0—0* есть

$$\dot{n}_2 = -i_2 v_2 \bar{\lambda}\frac{dn_2}{dy} \qquad (16\text{-}2)$$

Средняя длина свободного пробега будет зависеть от размера как молекул *1*, так и молекул *2*. Поэтому коэффициент диффузии D_{12} для диффузии компонента *1* в смесь *1* и *2* определяем по уравнению

$$\dot{n}_1 = -D_{12}\frac{dn_1}{dy}, \tag{16-3}$$

а коэффициент диффузии D_{21} газа *2* в смесь *1* и *2*

$$\dot{n}_2 = -D_{21}\frac{dn_2}{dy}. \tag{16-4}$$

Из выражений $n = n_1 + n_2$ и $n = \text{const}$ следует, что

$$dn_1/dy = -dn_2/dy.$$

Для того чтобы поддерживать в течение процесса $n = \text{const}$, надо, чтобы общее количество молекул, пересекающих плоскость *0—0*, было равно нулю ($\dot{n}_1 + \dot{n}_2 = 0$).

Поэтому $D_{12} = D_{21}$.

Коэффициент диффузии для диффузии газа *1* равен коэффициенту диффузии для диффузии газа *2*.

В дальнейшем мы будем обозначать их просто буквой *D*. Более строгие газокинетические подсчеты, в которые входит определение цифровых коэффициентов *i* [Л. 278], показывают, что коэффициент *D* очень мало зависит от концентрации компонентов в смеси, что он обратно пропорционален давлению и что с температурой он увеличивается пропорционально T^{1+b}, где *b* имеет значение между 0,5 и 1. В приложении в табл. П-9 помещены значения коэффициентов диффузии для различных смесей. Обозначения *n* и $\dot{n}$ в уравнениях (16-3) и (16-4) можно также толковать как грамм-молекулы на единицу объема или единицу площади и времени соответственно. Для твердых тел и жидкостей коэффициенты диффузии также определяются по уравнениям (16-3) и (16-4). Данных о таких коэффициентах и их зависимости от различных параметров гораздо меньше, чем для газов.

Уравнение диффузии тоже можно выразить в терминах градиентов концентрации. После умножения обеих частей уравнения (16-3) на молекулярный вес M_1 получим:

$$\dot{m}_1 = -D\frac{d\rho_1}{dy}, \tag{16-5}$$

где $\dot{m}$ — поток массы в единицу времени через единицу площади;

ρ_1 — концентрация массы компонента *1*.

Это уравнение часто называют законом Фика.

В градиентах парциального давления он имеет вид:

$$\dot{m}_1 = -\frac{D}{R_1 T} \cdot \frac{dp_1}{dy}.$$

Процесс диффузии, изображенный на рис. 16-1, называется эквимолярной противодиффузией. В действительности имеется незначительное конвективное движение внутри сосуда, изображенного на рис. 16-1. Это можно установить следующим образом: результирующий поток грамм-молекул n_1 через плоскость *0—0* вверх равен суммарному потоку грамм-молекул n_2 вниз. Оба потока масс, однако, не будут сбалансированы, если молекулярные веса M_1 и M_2 различны. Поток массы имеет место, пока имеет место диффузия. Для того чтобы вывести уравнения совместного действия диффузии и конвекции в процессе переноса массы, надо знать диффузионный поток молекул через плоскость, через которую отсутствует конвективный поток (которая ориентирована вдоль потока). Чэпман и Колинг вывели следующее уравнение для количества грамм-молекул n_1, проходящих через единицу площади такой плоскости в единицу времени в смеси, состоящей из двух компонентов, при условии, что давление постоянно и отсутствуют массовые силы, а температура локально меняется:

$$\dot{n}_1 = -\frac{M_1}{M_2} \rho D \left[\frac{d(n_1/n)}{dy} + k_T \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dy} \right]. \qquad (16\text{-}6)$$

В этом уравнении M — молекулярный вес смеси; ρ—плотность смеси.

k_T называется коэффициентом термодиффузии.[1]

Уравнение показывает, что диффузия происходит в смеси в присутствии температурных градиентов, хотя нет различия в концентрациях.

Этот процесс называется термодиффузией. Величины коэффициента термодиффузии таковы, что заметный

[1] Обычно коэффициентом термодиффузии называют величину Dk_T, а коэффициент k_T — термодиффузионным отношением. (Прим. ред.).

поток массы имеет место только в случае больших перепадов температур.

В обычных процессах переноса массы в технике термодиффузией можно пренебречь, что и будет сделано в дальнейших рассуждениях. Диффузионный поток массы можно выразить очень просто через массосодержание. Помножив уравнение (16-6) на M_1 и заменив молярное отношение n_1/n через массосодержание w_1, получим:

$$\dot{m}_1 = -\rho D \left(\frac{dw_1}{dy}\right), \qquad (16\text{-}7)$$

где пренебрегают членом, описывающим термодиффузию. Это уравнение можно также получить, добавив конвективный поток массы к диффузионному потоку через плоскость *0—0* (см. рис. 16-1).

Сочетание диффузионного и конвективного переносов массы, которое часто имеет место в промышленных процессах, будет рассмотрено на следующем простом примере.

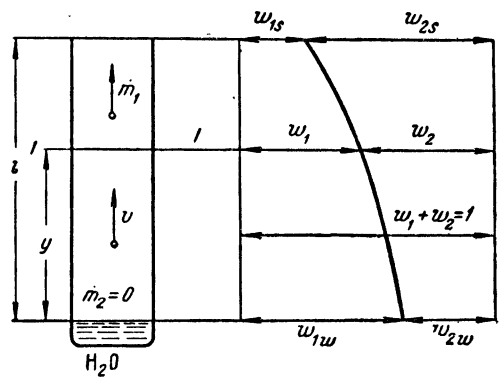


Рис. 16-2. К расчету диффузии водяного пара в воздухе.

На дно стеклянной пробирки налита вода (рис. 16-2). Над открытым концом пробирки движется воздух с определенным массосодержанием w_{1s} водяного пара. Следовательно, давление в пробирке постоянно и равно внешнему давлению. Предполагается, что температура в пробирке постоянна, массосодержание w_{1s} водяных паров вне пробирки обычно отличается от массы над поверхностью воды. Парциальное давление водяных паров вне пробирки, вообще говоря, отличается от такового над поверхностью воды,

так как парциальное давление пара над поверхностью воды равно давлению насыщения, соответствующему температуре на поверхности[1]. Таким образом, массосодержание w_{1s} предопределено.

Согласно уравнению (16-7) в трубке будут существовать градиенты массосодержания w_1 и диффузионный поток водяных паров.

Так как массосодержание водяного пара w_1 и воздуха составляют в сумме единицу, градиент массосодержания пара соответствует градиенту массосодержания воздуха. Поскольку уравнение (16-7) должно быть справедливо также и для воздуха, то одновременно с потоком частиц пара должен существовать и поток частиц воздуха, но в обратном направлении. Однако в нижней части пробирки отверстий нет; следовательно, для компенсации диффузионного притока воздуха в пробирке должны быть конвективные восходящие токи. Пусть скорость такого конвективного потока v. Количество пара, уносимого этим потоком через единицу площади сечения пробирки *1—1* за единицу времени, равно $\rho_1 v$. Следовательно, общая весовая скорость движения водяного пара через сечение *1—1* определяется следующим выражением:

$$\dot{m}_1 = -\rho D \frac{dw_1}{dy} + \rho_1 v. \qquad (16\text{-}8)$$

Аналогичное выражение справедливо и для потока воздуха. Так как этот поток равен нулю, то имеем следующее результирующее уравнение:

$$\dot{m}_2 = -\rho D \frac{dw_2}{dy} + \rho_2 v = 0. \qquad (16\text{-}9)$$

Отсюда находим значение скорости:

$$v = \frac{D}{w_2} \cdot \frac{dw_2}{dy}. \qquad (16\text{-}10)$$

Массосодержание воздуха может быть выражено так:

$$w_2 = 1 - w_1; \quad \frac{dw_2}{dy} = -\frac{dw_1}{dy}.$$

---

[1] Теоретически упругость паров над поверхностью несколько меньше давления насыщения при наличии потока частиц с поверхности, но разность очень невелика и при практических расчетах ею можно пренебрегать. С другой стороны, в процессе испарения поглощается тепло, которое во многих случаях должно поступать из нижних слоев жидкости к поверхности. В результате этого в верхнем слое у поверхности жидкости наблюдается некоторый температурный градиент и температура на поверхности бывает ниже, чем средняя температура жидкости.

В результате получим:

$$v = -\frac{D}{1-w_1}\frac{dw_1}{dy}. \qquad (16\text{-}11)$$

Поток массы водяного пара через трубку согласно уравнению (16-8) будет следующий:

$$\dot{m}_1 = -\rho D\frac{dw_1}{dy} - \frac{\rho_1}{1-w_1}D\frac{dw_1}{dy} = -\frac{\rho^2}{\rho_2}D\frac{dw_1}{dy}.$$

Для интегрирования этого уравнения удобно ввести парциальные давления. При помощи уравнений

$$w_1 = \frac{p_1 R}{R_1 p};\quad R = w_1(R_1 - R_2) + R_2$$

получим:

$$\frac{dw_1}{dy} = \frac{R^2}{R_1 R_2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{dp_1}{dy}$$

и

$$\dot{m}_1 = \frac{\rho R}{\rho_2 R_2}\cdot\frac{D}{R_1 T}\cdot\frac{dp_1}{dy}; \qquad (16\text{-}12)$$

$$\dot{m}_1 = -\frac{D}{R_1 T}\cdot\frac{p}{p-p_1}\cdot\frac{dp_1}{dy}. \qquad (16\text{-}13)$$

Это уравнение называется законом Стефана [Л. 279].

Если поперечное сечение пробирки над y постоянно, то уравнение (16-3) можно проинтегрировать, так как в этом случае $\dot{m}_1$ не зависит от y. Разделив переменные, найдем:

$$\frac{dp_1}{p-p_1} = -\frac{\dot{m}_1}{D}\cdot\frac{R_1 T}{p}\,dy$$

и, проинтегрировав в интервале $y=0$ и $y=l$, получим:

$$\ln\frac{p-p_{1s}}{p-p_{1w}} = \dot{m}_1\frac{l}{D}\cdot\frac{R_1 T}{p},$$

а отсюда

$$\dot{m}_1 = \frac{D}{l}\cdot\frac{p}{R_1 T}\ln\frac{p-p_{1s}}{p-p_{1w}}. \qquad (16\text{-}14)$$

При помощи этой формулы при известном коэффициенте диффузии по парциальным давлениям у поверхности воды и у отверстия пробирки можно вычислить удельный поток водяного пара. И, обратно, можно определять зна-

чения коэффициента диффузии по измеренным парциальным давлениям и массе воды, испарившейся за час. Если разность между парциальными давлениями невелика по сравнению с общим давлением, то вместо формулы (16-14) можно применять более простое выражение:

$$\dot{m}_1 = \frac{D}{l} \cdot \frac{1}{R_1 T} (p_{1w} - p_{1s}). \qquad (16\text{-}15)$$

Эта формула совершенно аналогична формуле (1-7) для определения теплового потока через плоскую стенку, обусловливаемого теплопроводностью. Закон Стефана, выражаемый уравнением (16-13), превращается при малых разностях парциальных давлений в закон Фика, который описывается уравнением (16-5). Последнее по форме аналогично общему уравнению теплопроводности (2-2).

При более значительных различиях в парциальных давлениях формуле (16-14) можно придать вид, подобный формуле (16-15), следующим образом:

$$\dot{m}_1 = \frac{D}{l} \cdot \frac{p}{R_1 T} \frac{p_{1s} - p_{1w}}{p_{2w} - p_{2s}} \ln \frac{p_{2w}}{p_{2s}} = \frac{D}{l} \cdot \frac{1}{R_1 T} \cdot \frac{p}{p_{2m}} (p_{1s} - p_{1w}), \qquad (16\text{-}16)$$

где p_{2m} — среднелогарифмическое давление, которое может быть определено при помощи табл. 1-2;

p/p_{2m} — коэффициент, на который поток массы $\dot{m}_1$ больше в процессе диффузии, иллюстрируемом на рис. 16-2, чем в случае, когда он вычислен по уравнению (16-15).

Предыдущие расчеты были произведены для случая испарения воды в воздух для того, чтобы связать их с конкретным примером. Однако их можно применить к случаю взаимной диффузии любых двух газов. Уравнение (16-8) и соответствующее уравнение для второго газа обычно справедливы вообще, тогда как уравнение (16-13) справедливо только для поверхности, через которую не проникает один из данных двух газов, и для изотермических условий, а применение решения (16-14) ограничено случаем одномерного потока.

Все процессы испарения, конденсации и сублимации от поверхности в газ соответствуют условиям полупроницаемой поверхности.

Бывают случаи, когда существует поток массы обоих компонентов. Например, при горении поверхности твердого углерода кислород диффундирует к поверхности, а окись или двуокись углерода, образующиеся при горении, диф-

фундируют от нее. В этом случае уравнение (16-10) надо заменить уравнением, учитывающим тот факт, что отношение скоростей двух масс на поверхности задано стехиометрическим соотношением, описывающим процесс горения.

Интересно отметить, что перенос энтальпии связан с процессом диффузии даже в изотермическом поле. Для примера, приведенного на рис. 16-2, диффузия водяного пара вызывает поток энтальпии в единицу времени сквозь единицу поверхности, равный $\dot{m}_1 c_{p1} T$.*

Даже сквозь поверхность, помещенную в газе таким образом, что через нее нет чистого потока массы ($m_1 = m_2$),* поток энтальпии все же есть и он равен $m_1 (c_{p1} - c_{p2}) T$.** Если к тому же существуют разности температур, то поток тепла на единицу площади в единицу времени сквозь плоскость, движущуюся с потоком, равен:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} + \dot{m}_1 (c_{p1} - c_{p2}) T. \qquad (16\text{-}17)$$

Предполагается, что направление y нормально к плоскости. Тепловой поток в единицу времени на единицу поверхности через плоскость *1—1*, показанную на рис. 16-2, есть

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} + \dot{m}_1 c_{p1} T,$$

когда температура в трубке неодинакова.

Из уравнений (16-8) и (16-11) следуют соотношения

$$\dot{m}_1 = -\rho D \frac{dw_1}{dy} + \rho_1 v = \rho (1 - w_1) v + \rho_1 v = \rho v$$

и

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} + \rho v c_{p1} T.$$

Пример 16-1. На дне вертикальной трубки с площадью поперечного сечения 5 $см^2$ имеется вода. Расстояние от поверхности воды до открытого конца трубки 6,37 *см*. Над открытым концом трубки движется совершенно сухой воздух; температура трубки постоянна и равняется 30,8° С. Взвешиванием определено, что вода испаряется со скоростью $2{,}542 \cdot 10^{-5}$ *кг/ч*. Требуется определить коэффициент диффузии водяных паров.

Массовая скорость

$$\dot{m}_1 = \frac{2{,}542 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}51 \cdot 10^{-1} \ кг/м^2 \cdot ч.$$

---

* Перенос энергии при помощи диффузии помимо эффекта Дюфо имеет место только для молекул с внутренними степенями свободы (поправка Эйкена). Прим. ред.

Давление насыщения водяного пара при 30,8° С согласно табличным данным равно $p_{1w} = 452$ *кГ/м²*. Газовая постоянная водяного пара определяется по его молекулярному весу $M_1 = 18{,}016$ и универсальной газовой постоянной $\mathfrak{R} = 0{,}848$ *кГм/град·моль*:

$$R_1 = \frac{\mathfrak{R}}{M_1} = \frac{0{,}848}{18{,}02} = 47{,}1 \text{ кГм/град·кг}.$$

Решая уравнение (16-14) относительно D, находим:

$$D = \frac{\dot{m}_1 l R_1 T}{p \ln [p/(p - p_{1w})]} =$$

$$= \frac{0{,}51 \cdot 10^{-1} \cdot 47{,}1 \cdot 0{,}064 (273 + 30{,}8)}{1\,000 \cdot 2{,}3 \lg \frac{10\,000}{10\,000 - 452}} = 0{,}102 \text{ м²/ч}.$$

Для получения надежных результатов необходимо применять трубку небольшого диаметра, так как в противном случае температура на поверхности воды может быть заметно ниже температуры окружающей среды и, кроме того, может возникнуть свободная конвекция за счет того, что сухой воздух тяжелее влажного, а поэтому воздух у поверхности воды легче воздуха у открытого конца трубки.

16-2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛИТЕ ПРИ ПЕРЕНОСЕ МАССЫ И ТЕПЛА

Перенос массы в неподвижной или почти неподвижной газовой смеси рассматривался в предыдущем разделе. Перенос массы в промышленном применении обычно более сложен, так как имеет место вынужденная или свободная конвекция, которая также способствует массообмену. Когда масса переносится с твердой поверхности в поток жидкости, процесс переноса по существу концентрируется в пограничном слое. Этот процесс будет изучаться на плоской плите, помещенной в потоке с одинаковой скоростью такой величины, что вдоль поверхности существует ламинарный пограничный слой. В большинстве случаев процесс переноса тепла связан с переносом массы. Так, например, при испарении пара с влажной поверхности или при конденсации на поверхности тепло поглощается или выделяется на поверхности благодаря изменению фазы. Этот процесс обычно вызывает разность температур в жидкости и, следовательно, перенос тепла.

Практически во многих случаях оказывается, что поток в пограничном слое является турбулентным. Однако лами-

нарный поток легче рассчитать и он является хорошей моделью, на которой можно изучить основные явления[1].

Система уравнений пограничного слоя, которые в совокупности описывают перенос момента, массы и энергии в двухмерном установившемся ламинарном пограничном слое двухкомпонентной смеси, имеет вид[2]:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0;$$

уравнение количества движения

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x};$$

уравнение диффузии

$$\rho u\frac{\partial w_1}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial w_1}{\partial y}\right);$$

уравнение переноса энергии

$$\rho u c_p\frac{\partial t}{\partial x}+\rho v c_p\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho D(c_{p2}-c_{p1})\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Уравнение диффузии записано в терминах массосодержания w_1 компоненты, которая удаляется от поверхности. В уравнении энергии появляется новый член — последний член справа. Он описывает то, о чем уже говорилось в предыдущем разделе, а именно: что перенос энергии связан с диффузией даже тогда, когда не имеют места температурные градиенты.

Фактически диффузия также имеет место при наличии разностей температур и без градиентов концентрации. Этот процесс называется термодиффузией. Соответственно в этом случае в уравнении переноса массы и энергии должны быть введены добавочные члены. Однако термическая диффузия оказывает заметное влияние на процесс только тогда, когда температурные градиенты очень велики, и поэтому ею можно пренебречь в обычных процессах переноса массы, происходящих в промышленных условиях.

Написанные выше уравнения решить очень трудно. Их можно упростить, допустив, что свойства жидкости посто-

[1] Турбулентный перенос массы изучался Р. Г. Дейслером [Л. 280].

[2] Вывод этих уравнений см. у Чэпмана и Коулинга.

янны. В данном случае это означает не только то, что свойства каждого компонента не зависят от температуры и давления, но также то, что свойства обоих компонентов в жидкости очень мало отличаются друг от друга. Кроме того, скорости потока могут быть очень малы (меньше, чем половина единицы скорости звука), так что нагревом от трения можно пренебречь. Постоянной также считается скорость вне пограничного слоя. В таком случае вышеуказанная система уравнений упрощается и принимает следующий вид:

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{16-18}$$

Уравнение количества движения:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{16-19}$$

Уравнение диффузии:

$$u\frac{\partial w_1}{\partial x}+v\frac{\partial w_1}{\partial y}=D\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}. \tag{16-20}$$

Уравнение энергии:

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \tag{16-21}$$

К этим уравнениям относится ряд граничных условий:

при $y=0: u=0;\ v=v_w;\ w_1=w_{1w};\ t=t_w;$ (16-22)

при $y\to\infty: u=u_s;\ w_1=w_{1s};\ t=t_s.$ (16-23)

Массосодержание w_{1w} и температура t_w у стенки считаются постоянными (не зависящими от x). Условие $v=v_w$ объясняет тот факт, что конвективный поток обычно связан с переносом массы от поверхности. В предыдущем параграфе было указано, что такой конвективный поток всегда имеет место, когда поверхность является непроницаемой для одного из компонентов (испарение, конденсация). Он также появляется, когда оба компонента проходят через поверхность, если два противоположных потока массы не являются совершенно одинаковыми.

В этом случае в вышеуказанной системе дифференциальных уравнений в качестве добавочного параметра по-

является конвективная скорость v_w. Позже будет рассмотрено, как она связана со всем процессом переноса. Кроме того, между данными тремя уравнениями существует явное сходство, что поможет решению.

Введем переменные величины $\eta = (y/2) \cdot \sqrt{u_s/\nu x}$ и f, используемые в разделе 6-6, и следующие ниже безразмерные параметры, описывающие массосодержание и температуру. Запишем дифференциальные уравнения в следующем общем виде:

$$\varphi' = \frac{w_1 - w_{1w}}{w_{1s} - w_{1w}}; \quad \theta' = \frac{t - t_w}{t_s - t_w}.$$

В результате получим:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0; \quad \frac{d^2\varphi'}{d\eta^2} + (\mathrm{Sc}) f \frac{d\varphi'}{d\eta} = 0;$$

$$\frac{d^2\theta'}{d\eta^2} + (\mathrm{Pr}) f \frac{d\theta'}{d\eta} = 0.$$

В третье уравнение входит безразмерный коэффициент

$$\mathrm{Pr} = \nu/a.$$

Аналогично в процессе преобразования во втором уравнении появляется безразмерный коэффициент ν/D. Он называется числом Шмидта: $\mathrm{Sc} = \nu/D$.

Граничные условия при этом примут вид:

при $y = 0$: $\frac{df}{d\eta} = 0$; $\varphi' = 0$; $\theta' = 0$; $f = f_w = \frac{v_w}{u_s}\sqrt{\mathrm{Re}_x} = \mathrm{const}$;

при $y \to \infty$: $\frac{df}{d\eta} = 1$; $\varphi' = 1$; $\theta' = 1$.

Граничное условие $f_w = \mathrm{const}$, которое является необходимым условием при преобразовании, означает, что отношение

$$v_w/u_s = \mathrm{const}/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

или что v_w/u_s обратно пропорционально $\sqrt{x}$. К счастью это ограничение не является слишком жестким, так как обнаружено, что в большинстве случаев оно находится в согласии с условием постоянства температуры и массосодержания доли на поверхности. Граничные условия для $df/d\eta$, φ' и θ' являются идентичными.

Три дифференциальных уравнения также являются идентичными соотношениями между этими тремя параметрами, когда Sc=1 и Pr=1. Для такой двухкомпонентной жидкости в этом случае решения данных трех уравнений: $df(\eta)/d\eta = u/u_s$; $\varphi'(\eta)$; (η) должны быть идентичными функциями.

Эти функции для различных величин параметра конвективного потока $f_w = v_w/u_s \sqrt{Re_x}$ через поверхность согласно вычислениям ряда исследователей изображены на рис. 16-3

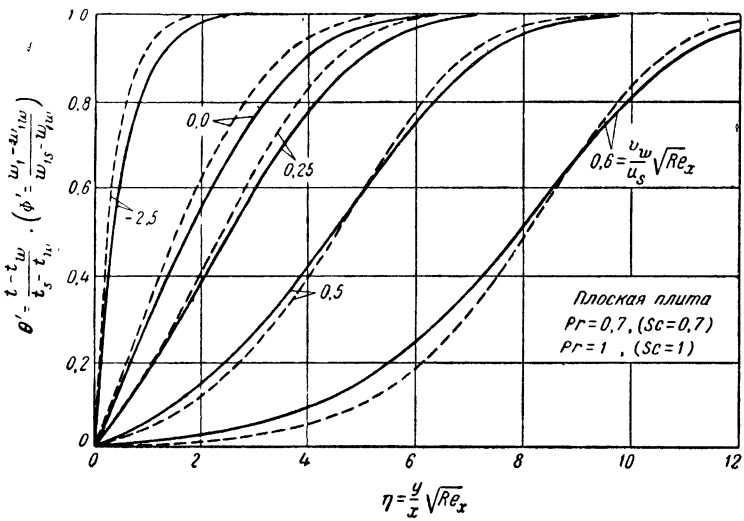


Рис. 16-3. Профили температуры и массосодержания в ламинарном пограничном слое на плоской плите. Величина критерия Pr относится к профилю температуры, а величина критерия Sc—к профилю массосодержания [Л. 389].

пунктирными линиями [Л. 281]. Этот рисунок, таким образом, в виде пунктирных линий дает профильное изображение скорости, массосодержания и температуры через пограничный слой. Сплошные линии представляют собой профили температур для жидкости с числом Прандтля, равным 0,7.

Внимательное рассмотрение дифференциальных уравнений, показывает, что сплошные кривые представляют такие профили массосодержания двухкомпонентного газа с числом Шмидта, равным 0,7. При сравнении сплошных и пунктирных линий можно определить влияние числа Прандтля или числа Шмидта соответственно на поля температуры или

поля концентрации. Очевидно, что профили для массосодержания и температуры подобны, когда $\mathrm{Pr}=\mathrm{Sc}$ или когда отношение $\mathrm{Sc}/\mathrm{Pr}=a/D$, называемое числом Льюиса, равно 1. Такое положение, часто встречающееся в газовых смесях, значительно упрощает вычисления переноса массы.

С инженерной точки зрения наиболее важным является знание трения, переноса тепла и переноса массы у поверхности. Эти параметры определяются при помощи градиентов скорости, температуры и массовой доли у поверхности. Из рис. 16-3 видно, что другие параметры являются постоянными; трение, перенос тепла и массы уменьшаются благодаря конвективному потоку от поверхности и увеличиваются благодаря конвективному потоку по направлению к поверхности. Скорость переноса тепла у поверхности стенки характеризуется коэффициентом переноса тепла, определяемым уравнением

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w = \alpha(t_w - t_s). \qquad (16\text{-}23а)$$

Соответствующий коэффициент переноса массы может быть определен из уравнения

$$\dot{m}_{1w} = -\rho D\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_w = h_D(w_{1w} - w_{1s}), \qquad (16\text{-}23б)$$

когда $\dot{m}_{1w}$ выражает поток массы компонента *1* у поверхности. Влияние конвективного потока у поверхности на оба коэффициента можно проследить на рис. 16-4, на котором нанесена зависимость отношения действительных коэффициентов переноса тепла и массы к коэффициентам α_0 и h_{D0} для очень малого (в пределах нуля) конвективного потока сквозь поверхность, но при прочих равных условиях от параметра конвективного потока $v_w/u_s\sqrt{Re_x}$.

Кривые на рисунке были построены по соответствующим градиентам при $\eta=0$ на рис. 16-3. Пунктирная линия относится к жидкости с $\mathrm{Pr}=1$ и $\mathrm{Sc}=1$. Сплошная линия представляет собой отношение $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ для жидкости с $\mathrm{Pr}=0{,}7$ и отношение h_D/h_{D_0} для жидкости с $\mathrm{Sc}=0{,}7$. Пунктирная линия на рис. 16-4 пропорциональна градиенту скорости у поверхности. Поэтому она также представляет собой отношение коэффициентов трения f_p/f_{p0}.

Остается рассмотреть связь конвективного потока у поверхности со всем процессом переноса. Эта связь будет показана на некоторых примерах, иллюстрируемых на

рис. 16-5. На верхнем рисунке изображена пористая стенка, через которую продувается углекислый газ, в то время как вдоль стены движется воздух. Для того чтобы к данному случаю применить предыдущие вычисления, надо начать продувание у переднего края стенки. Пористость стенки должна быть такой, чтобы скорость v_w, с которой CO_2 покидает поверхность, изменялась как $1/\sqrt{x}$ вдоль поверхности. В таком случае скорость v_w будет известна и профили скорости, концентрации и температуры

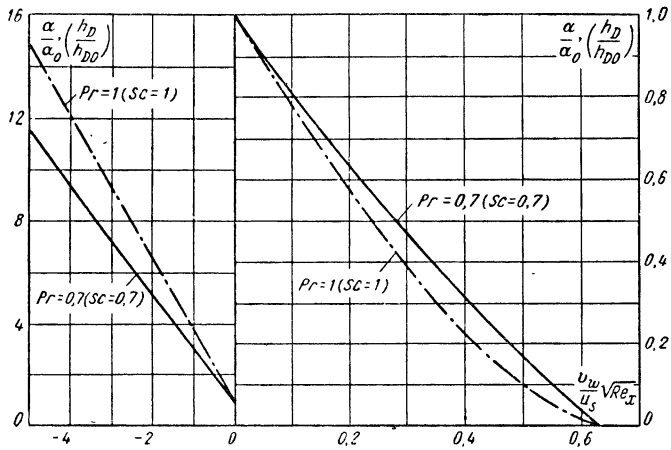


Рис. 16-4. Относительные коэффициенты тепло- и массообмена для ламинарного потока на плоской плите. Коэффициенты тепло- и массообмена с очень малыми градиентами концентрации помечены индексом 0 [Л. 389].

можно определить по рис. 16-3. Температура поверхности стенки также будет известна или должна быть определена из теплового баланса различных тепловых потоков, попадающих на поверхность и покидающих ее. Массосодержание w_{1w} у поверхности стенки, однако, обычно неизвестно и ее надо вычислить. Если предусмотрено, чтобы воздух не проходил через стенку, то уравнение (16-11) описывает связь между скоростью продувания v_w и массосодержанием двуокиси углерода. Уравнение, записанное в массосодержании двуокиси углерода, имеет вид:

$$v_w = -\frac{D}{1-w_{1w}}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_w, \qquad (16\text{-}24)$$

или, введя безразмерные параметры и сделав перестановку, получим:

$$\frac{w_{1w} - w_{1s}}{1 - w_{1w}} = \frac{(\mathrm{Sc})\, f_w}{(d\varphi'/d\eta)_w}.$$

На рис. 16-6 графически изображено это уравнение с параметрами в правой части, определенными из рис. 16-3. Для заранее определенных v_w и w_{1s} и при известных характеристиках потока воздуха по этому рисунку можно определить массосодержание w_{1w} у поверхности пористой стенки. Устройство, подобное изображенному на рис. 16-5, где стенка является пористой и через нее продувается холодный газ, оказывается, представляет собой эффектное средство защиты стенки от потока горячего газа. Умень-

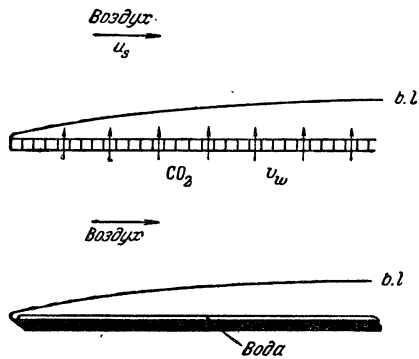


Рис. 16-5. Перенос массы на плоской плите.

шение коэффициента теплообмена, очевидное из рис. 16-4, означает, что можно получить значительное снижение температуры поверхности стенки при малом количестве охлаждающего газа. В литературе такой процесс охлаждения называется *охлаждение испарением*.

Воздух часто используется в качестве охлаждающей среды. При этом часть процесса — перенос массы, рассмотренный ранее, — теряет смысл. Рис. 16-3 и 16-4 являются справедливыми для охлаждения испарением [1].

На нижнем рисунке 16-5 изображен перенос пара от поверхности воды в поток воздуха путем испарения или

[1] Для случая воздух — воздух этот процесс рассматривался в разделе 10-5.

от потока влажного воздуха на поверхность воды благодаря конденсации. Расчет, приведенный в данном параграфе, будет давать правильные результаты, если предотвратить движение воды, вызванное трением потока воздуха, так чтобы скорость воздуха у поверхности была равна нулю. Кроме того, пограничный слой воздуха должен начинаться у переднего края поверхности воды. Конвективная скорость у поверхности воды неизвестна, однако поверхность воды для воздуха непроницаема и поэтому урав-

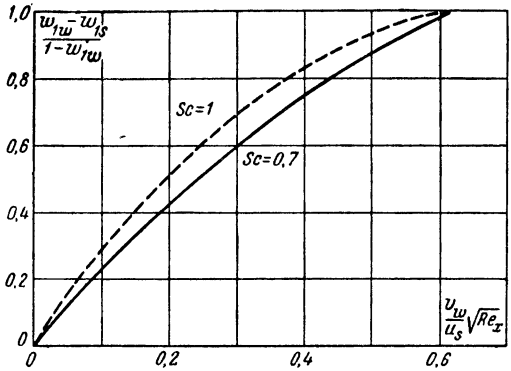


Рис. 16-6. Пристеночная концентрация при переносе массы через ламинарный пограничный слой на плоской плите как функция потока массы у поверхности [Л. 389].

нение (16-11) справедливо, так же как и рис. 16-6. Температура поверхности воды определяет парциальное давление и массосодержание w_w у поверхности воды. Зная массосодержание пара w_s в потоке воздуха, можно определить этот параметр по ординате на рис. 16-6. Эта величина и кривая на рисунке определяют величину абсциссы $v_w/u_s\sqrt{Re_x}$ и таким образом конвективную скорость v_w. Зная эту величину, можно определить по данным на рис. 16-3 и 16-4 кривые распределения и коэффициенты переноса.

16-3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Приближенные преобразования, основанные на интегральных уравнениях пограничного слоя, во многих случаях приводят к результату скорее, чем точное решение

уравнений пограничного слоя. В этом разделе будут выведены интегральные уравнения момента, потока массы и потока тепла для двухкомпонентной смеси с различными свойствами и для плоского вынужденного потока.

Рассмотрим элементарный параллелепипед с размерами dx и l у поверхности, с которой отделяются материальные частицы (рис. 16-7). Ребро параллелепипеда в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, равно единице. Пусть размер ребра l превышает толщину любого из пограничных слоев. Индекс *1* будет относиться к жидкости, перемещаемой от поверхности в поток. Члены без индексов относятся к смеси.

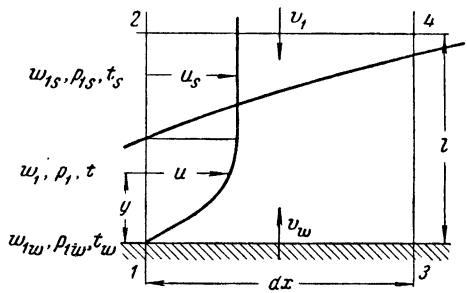


Рис. 16-7. К выводу уравнения переноса массы в пограничном слое.

Состояние жидкости вне пограничного слоя определяется скоростью движения u_s (в направлении координаты x), температурой t_s, парциальным давлением водяных паров p_{1s} или массосодержанием w_{1s}. На поверхности скорость равна нулю ($u=0$), температура равна t_w, жидкая фракция массы w_{1w}. На расстоянии y от поверхности в пределах пограничного слоя соответственные значения будут u, t и w_1. Положим, что общее давление постоянно во всей зоне пограничного слоя, так как толщина последнего сравнительно невелика.

Составим сначала для элементарного параллелепипеда уравнение сплошности. Поток массы через плоскость *1—2* равен $\int_0^l \rho u dy$. В интервале dx он изменится на величину $\frac{d}{dx}\left(\int_0^l \rho u dy\right) dx$.

При стационарном режиме такое же количество должно поступить в параллелепипед через плоскости *1—3* и *2—4*. В плоскости *1—3* (на поверхности) наблюдается нормальная скорость v_w, величина которой была определена в предыдущем параграфе. Пусть скорость движения частиц через плоскость *2—4* равна v_1; тогда условие сплошности требует, чтобы

$$\rho_s v_1 = \frac{d}{dx}\int_0^l \rho u dy - \rho_w v_w. \qquad (16\text{-}25)$$

Отсюда получаем уравнение количества движения (см. § 6-2):

$$\frac{d}{dx}\int_0^l \rho u^2 dy - \rho v_1 u_s = -\tau_w - l\frac{dp}{dx}.$$

Используя уравнение сплошности и те же преобразования, что и в § 6-2, получим интегральное уравнение количества движения:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (u_s - u)\rho u dy + \\ + \frac{du_s}{dx}\int_0^l (\rho_s u_s - \rho u)dy - \rho_w v_w u_s = \mu_w \left(\frac{du}{dy}\right)_w. \qquad (16\text{-}26)$$

Напряжение трения на поверхности выражено через градиент скорости в соответствии с формулой $\tau_w = \mu_w (du/dy)_w$. Выведенное уравнение количества движения отличается от уравнения (6-10) лишь членом $\rho_w v_w u_s$.

Чтобы составить уравнение потока массы жидкости *1*, необходимо учесть тот факт, что при стационарном режиме разность между массой жидкости, приносимой в рассматриваемый параллелепипед через плоскость *1—2* и уносимой через плоскость *3—4*, должна покрываться притоком массы через плоскости *1—3* и *2—4*. Пусть поток массы жидкости на твердой поверхности равен $\dot{m}_{1w}$.

Тогда

$$\dot{m}_{1w} = \frac{d}{dx}\int_0^l \rho_1 u dy - v_1 \rho_{1s}.$$

Если подставить значение v_1, определенное из уравнения сплошности (16-25), и вместо парциальных плотностей написать доли массы, получим:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (w_{1s} - w_1)\,\rho u dy - \rho_w v_w w_{1s} = \dot{m}_{1w}.$$

Заменив скорость массы $\dot{m}_{1w}$ пара выражением, определенным из уравнения (16-8), будем иметь

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (w_{1s} - w_1)\,\rho u dy = \rho_w D_w \left(\frac{dw_1}{dy}\right)_w + \rho_w v_w (w_{1s} - w_{1w}). \tag{16-27}$$

Уравнение теплового потока выводится таким же образом, а именно на основании теплового баланса элементарного объема. Если тепловой поток на единицу твердой поверхности равен q_w, то

$$\frac{d}{dx}\int_0^l \rho c_p t u dy - \rho_s c_{ps} t_s v_1 = q_w.$$

Тепло передается от твердой поверхности не только теплопроводностью, но также и конвекцией вместе с компонентом *1*. Следовательно,

$$q_w = -\lambda\left(\frac{dt}{dy}\right)_w + \rho_w c_{pw} t_w v_w.$$

Если вместо v_1 подставить значение, определенное из уравнения сплошности, то получим уравнение следующего вида:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (c_{ps} t_s - c_p t)\,\rho u dy = \lambda_w \left(\frac{dt}{dy}\right)_w + (c_{ps} t_s - c_{pw} t_w)\rho_w v_w. \tag{16-28}$$

Таким образом, уравнения диффузионного пограничного слоя (16-26) и (16-28) отличаются от соответствующего уравнения для теплообмена лишь дополнительным членом со скоростью v_w. Эти уравнения можно решить, как это делалось в разделе 6-4, подстановкой соответствующих вы-

ражений для кривых распределения скоростей, температур и долей массы с последующим нахождением толщины пограничного слоя. Для улучшения точности этого приблизительного решения полезно в качестве граничных условий принятых нами кривых распределения применять такие значения, которые справедливы для действительных условий. В § 7-3 постоянство значения второй производной от температуры по расстоянию от твердой поверхности было установлено на основании того, что q_w считается постоянным в непосредственной близости от стенки. Для теплового потока при массообмене справедливо уравнение (16-28). Но и в этом случае тепловой поток q_w в непосредственной близости от стенки должен иметь постоянное значение. Следовательно,

$$\left(\frac{dq}{dy}\right)_w = \rho_w v_w \left(\frac{dc_p t}{dy}\right)_w - \frac{d}{dy}\left(\lambda \frac{dt}{dy}\right)_w = 0. \qquad (16\text{-}29)$$

Скорость массы $\rho_w v_w$ должна быть постоянной около стенки. Для потока массы пара справедливо уравнение (16-8). После дифференцирования уравнения (16-8) получим:

$$\left(\frac{dm}{dy}\right)_w = \rho_w v_w \frac{dw_1}{dy} - \frac{d}{dy}\left(\rho D \frac{dw_1}{dy}\right)_w = 0. \qquad (16\text{-}30)$$

Уравнение (6-2) справедливо для напряжения трения τ_w без диффузии. Если же с поверхности происходит отток массы, это уравнение изменяется. Вообразим себе плоскость, расположенную вблизи и параллельно твердой поверхности. Тогда в этой плоскости вследствие вязкости жидкости, движущейся вдоль поверхности, возникает напряжение трения. Кроме того, в этой плоскости существует виртуальное напряжение трения, вызываемое переносом количества движения вместе с массой, проходящей через плоскость. Такое напряжение трения уже рассматривалось в разделе 8-1. Поэтому полное напряжение трения равно:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \rho v u. \qquad (16\text{-}31)$$

При этом напряжение трения должно быть постоянным близ поверхности стенки. Поэтому его производная по y близ стенки должна равняться нулю:

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_w = \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{du}{dy}\right)_w - \rho_w v_w \left(\frac{du}{dy}\right)_w = 0. \qquad (16\text{-}32)$$

Расчеты значительно упрощаются, если разности парциальных давлений в пределах пограничного слоя малы по сравнению со средним давлением жидкости. В этом случае скорость v_w, нормальная к поверхности стенки, невелика и в уравнениях (16-26)—(16-28) ею можно пренебречь. Тогда уравнения количества движения (16-26) и теплового потока (16-28) приобретут такой же вид, как и в случае чистого теплообмена (см. разделы 6-1 и 7-1). Свойства, проявляющиеся в уравнении, являются практически свойствами жидкости *2*. Последнее означает, что массообмен не оказывает влияния на движение среды и теплообмен. Уравнение (16-27) описывает процесс массообмена, однако оно не нуждается в решении, поскольку результат можно непосредственно определить из условий подобия [1].

Расчет массообмена без теплообмена при движении среды вдоль плоской поверхности в области ламинарного пограничного слоя путем решения приведенных выше дифференциальных уравнений был произведен Э. Эккертом и В. Либлейном [Л. 283], а для свободной конвекции у вертикальной пластины перед критической точкой на сфере — Сполдингом [Л. 284]. Расчеты проводятся в терминах парциальных давлений быстрее, чем в терминах массосодержания при допущении, что оба компонента газообразны.

Расчеты показывают, что массообмен является функцией двух безразмерных величин. Первая: $A=(D/\nu)\times\times(M_1/M)$, где D—коэффициент диффузии; ν—коэффициент кинематической вязкости; M — молекулярный вес смеси паров и газа, омывающих поверхность испарения, и M_1 — молекулярный вес жидкости, испаряющейся с плоской поверхности или поглощаемой последней. Так как при выводе приведенных выше уравнений предполагалось, что молекулярные веса обоих компонентов отличаются друг от друга незначительно, значение A не должно сильно отличаться от числа Шмидта D/ν. Вторая безразмерная величина

$$B=\frac{p_{1s}-p_{1w}}{p-p_{1w}}$$

представляет собой отношение разности парциальных давлений пара компонента *1* вне пограничного слоя в свобод-

[1] Соображения о подобии были высказаны Шмидтом и Нуссельтом. Аккерман предложил приближенные значения коррекций для высоких парциальных давлений [Л. 282].

ном потоке и на поверхности стенки к разности между общим давлением и парциальным давлением пара p_w на поверхности. Численные расчеты были выполнены для случаев испарения или поглощения водяных паров с поверхности током воздуха при температуре 20° С и давлении 1 *кГ/см*². Безразмерная величина A равна 1,04. На графиках на рис. 16-8 и 16-9 представлены некоторые результа-

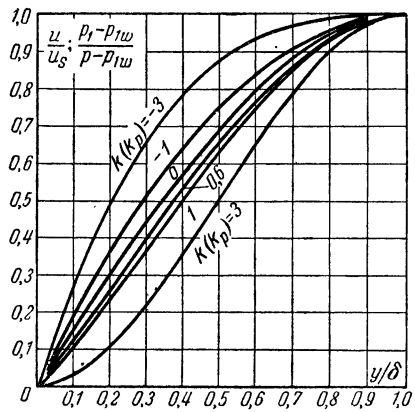


Рис. 16-8. Кривые распределения скоростей и парциальных давлений в ламинарном пограничном слое на плоской поверхности при поглощении пара или испарении воды в потоке воздуха [Л. 390].

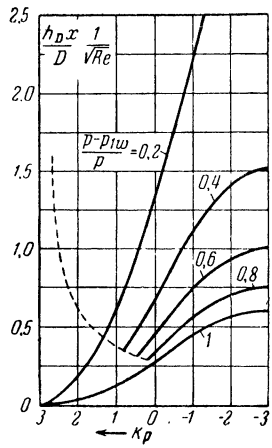


Рис. 16-9. Значение безразмерного коэффициента массообмена для плоской поверхности, поглощающей водяной пар, в ламинарном потоке воздуха [Л. 390].

ты исследований в этой области. На рис. 16-8 показаны кривые распределения скоростей и парциальных давлений для водяного пара в пограничном слое. Символом δ обозначаются толщина гидродинамического пограничного слоя для кривых распределения скоростей и толщина диффузионного пограничного слоя для кривых распределения парциальных давлений. Характеристические величины K для кривых распределения скоростей и K_p для кривых распределения парциальных давлений являются функциями безразмерных величин A и B, а именно:

$$K_p = 3 - \frac{4 - 2\sqrt{4 - 6B}}{B};$$

$$K=\frac{3A(2-\sqrt{4-6B})\delta/\delta_p}{A(2-\sqrt{4-6B})\delta/\delta_p-4},$$

где δ — толщина гидродинамического пограничного слоя;

δ_p — толщина диффузионного пограничного слоя.

Отношение δ/δ_p равно 1 для случая испарения воды с плоской поверхности и возрастает до 2 для случая абсорбции пара плоской стенкой при значительной разности парциальных давлений. Для массообмена с плоской поверхности (испарение) K имеет положительное значение, а для случая сорбции — отрицательное. Кривая $K=0$ отражает распределение скоростей для потока вдоль плоской поверхности без массообмена, а также распределение скоростей и парциальных давлений для очень малых разностей парциальных давлений. Из графика видно, что кривые распределения скоростей и парциальных давлений значительно изменяются с изменением разности парциальных давлений. Кривая $K=K_p=3$ справедлива для случая, когда парциальное давление воздуха у поверхности равно нулю, что бывает у поверхности кипящей воды. Поток массы от поверхности или к поверхности можно определить по графику рис. 16-9. Величина h_D является коэффициентом массообмена.

В местах, где имеет место поток массы у поверхности, при определении коэффициентов переноса существует неясность.

Уравнения (16-23а) и (16-23б) описывают соответственно поток тепла, обусловленный теплопроводностью, и диффузионный поток массы. Чтобы получить выражение для общего потока тепла и массы, следует учесть конвективные потоки. С другой стороны, определение, использованное в уравнении (16-23), имеет то преимущество, что определяемые таким образом коэффициенты переноса зависят от меньшего числа параметров. Коэффициент переноса массы на рис. 16-9 описывает весь поток массы у поверхности плиты, как это выражено уравнением (16-8). Надо отметить, что этот коэффициент h_D является функцией отношения давлений $(p-p_{1w})/p$ в добавление к параметру K_p, который выражает конвективную скорость v_w. Реально физическое значение имеют только те кривые, которые находятся выше пунктирной кривой. Значения коэффициента массообмена при незначительных разностях парциальных давлений лежат на вертикальной прямой

$K_p=0$. Положительное значение K_p относится к испарению с плоской поверхности, а отрицательное — к сорбции пара [1].

16-4. ПОДОБИЕ ПРОЦЕССОВ МАССООБМЕНА И ТЕПЛООБМЕНА

Если массосодержание компонента *1* мало по сравнению с единицей, то в уравнениях (16-27) и (16-28) членом v_w можно пренебречь. Тогда оба эти уравнения приобретают вид, аналогичный соответствующему уравнению теплообмена (7-2). Для большей ясности сопоставим эти уравнения.

Уравнение потока тепла:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (t_s - t)\, u dy = a\left(\frac{dt}{dy}\right)_w.$$

Уравнение потока массы:

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (w_{1s} - w_1)\, u dy = D\left(\frac{dw_1}{dy}\right)_w.$$

Вследствие подобия этих уравнений и решение их должно быть подобным. Таким образом, решение дифференциального уравнения теплового потока может послужить решением уравнения массообмена; для этого необходимо лишь вместо температуры t подставить массосодержание и вместо коэффициента температуропроводности a — коэффициент диффузии D. Существует также аналогия между общим уравнением теплопроводности (без диссипативного члена) и уравнением переноса массы с постоянными свойствами:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + u\frac{\partial w_1}{\partial x} + \ldots = D\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2} + \ldots$$

В разделе 9-1 было показано, что температурные поля близ геометрически подобных тел, отдающих тепло в резуль-

[1] Эксперименты Хейзера [Л. 285], проделанные над конденсацией пара в смеси пар — воздух, полностью подтверждают вышеуказанное отношение.

тате процесса вынужденной конвекции с малыми скоростями, можно описать следующим математическим выражением:

$$\vartheta' = f\left(x', y', z', \mathrm{Re}, \frac{\nu}{a}\right) = f(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}), \quad (16\text{-}33)$$

где ϑ' — безразмерная величина, равная разности между температурой t в точке с безразмерным расстоянием y' от поверхности тела и температурой в условной определяющей точке, деленной на условную определяющую разность температур, например на разность между температурой t_s среды на большом расстоянии от тела и температурой t_w самого тела; Re — критерий Рейнольдса и ν/a — критерий Прандтля. Если для такого же тела разность температур заменить разностью парциальных давлений или массосодержаний:

$$w_1' = (w_1 - w_{1w})/(w_{1s} - w_{1w}); \quad p_1' = (p_1 - p_{1w})/(p_{1s} - p_{1w})$$

и коэффициент температуропроводности a — коэффициентом диффузии D, то получим выражение, описывающее поле парциальных давлений или массосодержания;

$$w_1' = f\left(x', y', z', \mathrm{Re}, \frac{\nu}{D}\right) = f(x', y', z', \mathrm{Re}, \mathrm{Sc}). \quad (16\text{-}34)$$

Безразмерная величина ν/D называется критерием Шмидта. Функция f имеет один и тот же вид как в уравнении (16-33), так и в уравнении (16-34). Величины числа Шмидта приведены в табл. П-9. Для газов число Шмидта не зависит от давления. Оно меняется с температурой и иногда с концентрацией.

В области теплообмена интересуются главным образом тепловым потоком q_w, приходящимся на единицу площади поверхности тела. Его можно вычислить при помощи коэффициента теплообмена α по формуле

$$q_w = \alpha(t_w - t_s).$$

С другой стороны существует формула

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w.$$

Отсюда

$$\alpha(t_s - t_w) = \lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w. \quad (16\text{-}35)$$

Аналогично можно определить коэффициент переноса массы h_D с характеристикой потенциала процесса массообмена. К сожалению, нет общей точки зрения на то, какой параметр следует использовать для выражения потенциала переноса. Мы используем массосодержание и определим коэффициенты переноса массы из уравнения

$$\dot{m}_{1w} = \rho h_D (w_{1w} - w_{1s}). \tag{16-36}$$

Для жидкости с почти постоянными свойствами ($\rho \approx \text{const}$) массосодержание может быть заменено удельными плотностями, и уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{m}_{1w} = h_D (\rho_{1w} - \rho_{1s}),$$

или в грамм-молекулярных плотностях, разделив последнее уравнение на молекулярный вес M_1, получим:

$$\dot{n}_{1w} = h_D (n_{1w} - n_{1s}).$$

Кроме предположения $\rho \approx \text{const}$, допустим, что разности температур в поле малы по сравнению с абсолютной температурой; в результате получим следующее уравнение:

$$\dot{m}_{1w} = \frac{h_D}{R_1 T} (p_{1w} - p_{1s}).$$

Это уравнение было впервые выведено Э. Дальтоном (1788 г.). Последние три уравнения наиболее часто встречаются в литературе. При вышеуказанных условиях коэффициент переноса массы одинаков во всех уравнениях. Однако для больших значений температуры, давления и колебаний свойств коэффициенты переноса массы в этих уравнениях различны.

Для малой конвективной скорости v поток массы у твердой поверхности или поверхности раздела может быть выражен уравнением (16-7):

$$\dot{m}_{1w} = -\rho D \left(\frac{dw_1}{dy}\right)_w.$$

После сложения этого выражения с уравнением (16-36) получим:

$$h_D (w_{1s} - w_{1w}) = D \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_w. \tag{16-36a}$$

Взяв безразмерную разность температур ϑ' и безразмерное расстояние от поверхности твердого тела $y' = y/l$, мы можем преобразовать уравнение (16-35) и получить выражение для безразмерного коэффициента теплообмена:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \left(\frac{\partial \vartheta'}{\partial y'}\right)_w,$$

или согласно уравнению (16-33) для особого положения вдоль поверхности тела последнее уравнение приобретает вид:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}). \qquad (16\text{-}37)$$

Аналогичным путем можно получить выражение для безразмерного коэффициента массообмена делением массосодержания [см. уравнение (16-36а)] на разность $w_{1s} - w_{1w}$ и координаты y на определяющий отрезок l:

$$\frac{h_D l}{D} = \left(\frac{\partial w_1'}{\partial y'}\right)_w. \qquad (16\text{-}38)$$

Дифференцируя уравнение (16-34) по y' и принимая $y=0$, получаем:

$$\frac{h_D l}{D} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\nu}{D}\right) = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}). \qquad (16\text{-}39)$$

Функции f в уравнениях (16-37) и (16-39) аналогичны. Таким образом, любое из уравнений части B, относящееся к теплообмену в ламинарном потоке, дает соответствующее решение задач массообмена, если критерий Нуссельта $\alpha l/\lambda$ заменить безразмерным коэффициентом массообмена $h_D l/D$, а критерий Прандтля ν/a — безразмерной величиной ν/D.

Этот закон был также подтвержден для турбулентного потока значительным количеством экспериментов по переносу массы для потока в трубе и потока на плоской плите, а также для потоков вокруг цилиндров, сфер и через уплотненные слои. На рис. 16-10 приведены в качестве примера результаты экспериментов по испарению различных жидкостей с плоских поверхностей в поток воздуха [Л. 286].

Результаты опытов нанесены на график в виде безразмерных групп, состоящих из параметра переноса массы

$$(\bar{h}_D/u_s)(\mu/\rho D)^{-2/3},$$

аналогичного числу Стантона в переносе тепла, и из числа Шмидта.

Линия на рисунке иллюстрирует параметр теплопередачи $\bar{St}Pr^{-2/3}$, полученный из уравнения (8-18). Видно, что экспериментальные данные находятся в хорошем согласии с теоретическими.

Коэффициенты массообмена, определенные из соотношений теплопередачи на твердых поверхностях путем

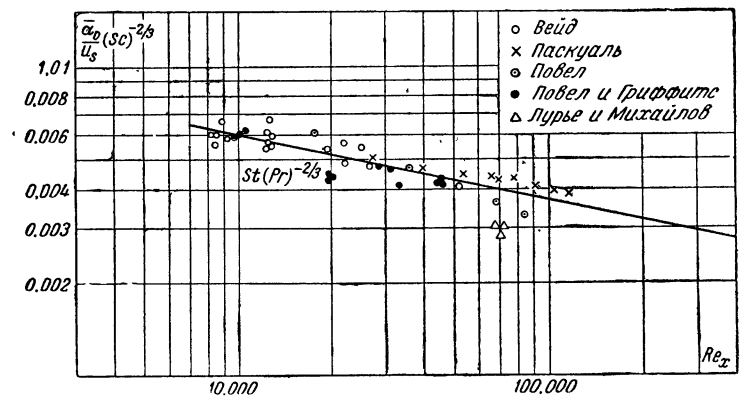


Рис. 16-10. Экспериментальная проверка аналогии между переносом тепла и массы [Л. 391].

вышеуказанной аналогии, являются правильными, когда разности массосодержания или парциальных давлений, вызывающих перенос массы, весьма малы, так что влиянием конвективного потока у поверхности можно пренебречь. Приближенная поправка коэффициентов массообмена, учитывающая конвективное влияние, может быть получена путем умножения коэффициента массообмена, полученного из аналогии, на коэффициент p/p_{2m} (p — общее давление; p_{2m} — среднее логарифмическое значение парциального давления компонента 2 у стены и в свободном потоке). Поправка основана на том предположении, что влияние конвекции одинаково в рассматриваемом случае и в процессе диффузии, иллюстрированном рис. 16-2 [см. уравнение (16-16)].

Опыты Миклея [Л. 287] и сотрудников, а также Хейзера показывают, что эта поправка удовлетворительна для ламинарного и турбулентного потоков по плоским плитам, если число Шмидта очень близко к 1.

Если для газовой смеси коэффициент диффузии D равняется коэффициенту температуропроводности a, то оба указанных выше безразмерных коэффициента будут для данного значения критерия Рейнольдса равны. Если подставить вместо коэффициента диффузии D коэффициент температуропроводности $a=\lambda/\rho c_p=\lambda/C_p$ (где C_p — теплоемкость единицы объема при постоянном давлении), то получим:

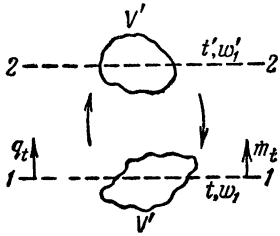


Рис. 16-11. Упрощенная схема турбулентного массообмена.

$$h_D=\alpha\frac{D}{\lambda}=\alpha\frac{a}{\lambda}=\frac{\alpha}{C_p}. \qquad (16\text{-}40)$$

Эта формула была выведена Льюисом и называется соотношением Льюиса [Л. 288]. При турбулентном обмене существуют следующие условия (рис. 16-11). Обозначим через V' тот объем газа, который переносится между плоскостями *1* и *2* в единицу времени через единицу площади, а через t и t' и w_1 и w_1' — температуры и массосодержание в рассматриваемых плоскостях. Тогда тепловой поток от плоскости *1* к плоскости *2*, обусловленный турбулентным обменом, будет выражаться следующим образом:

$$q_t=V'C_p(t-t'). \qquad (16\text{-}41)$$

Если этот тепловой поток выразить при помощи коэффициента теплообмена α, то будем иметь:

$$\alpha_t(t-t')=V'C_p(t-t'). \qquad (16\text{-}42)$$

Поток массы на единицу площади, обусловленный этим же турбулентным обменом, будет иметь следующее значение:

$$\dot{m}_t=\rho V'(w_1-w_1'), \qquad (16\text{-}43)$$

а если выразить его через коэффициент турбулентного массообмена h_{Dt}, то

$$\rho h_{Dt}(w_1-w_1')=\rho V'(w_1-w_1'). \qquad (16\text{-}44)$$

Почленное деление уравнения (16-44) на уравнение (16-42) дает:

$$h_{Dt} = \frac{\alpha_t}{C_p}. \qquad (16\text{-}45)$$

Отсюда видно, что соотношение Льюиса справедливо для турбулентного потока независимо от того, равняется ли отношение a/D единице или нет. Для ламинарного подслоя, который всегда имеется при турбулентном потоке у поверхности твердого тела, соотношение Льюиса справедливо только при $a/D = 1$.

В разделе 8-4 турбулентный тепловой поток был выражен таким образом:

$$q_t = -\varepsilon_q \rho c_p \frac{dt}{dy},$$

где турбулентная диффузия тепла ε_q заменяет коэффициент температуропроводности в выражении для ламинарного теплового потока. Аналогичное выражение для турбулентного переноса массы можно получить путем замены коэффициента диффузии D в уравнении (16-7) коэффициентом турбулентной диффузии ε_D для массы:

$$\dot{m}_1 = -\varepsilon_D \rho \frac{dw_1}{dy}.$$

Очевидно, что уравнение (16-45) имеет место, когда $\varepsilon_D = \varepsilon_q$. Следует ожидать из теоретических соображений, что это и есть данный случай. В результате проведенных экспериментов было получено отношение, несколько большее единицы.

Согласно сказанному в § 9-1, теплообмен в условиях свободной конвекции определяется следующим уравнением:

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}), \qquad (16\text{-}46)$$

где Nu — безразмерный коэффициент теплообмена $\frac{\alpha l}{\lambda}$;

Gr — критерий Грасгофа $[g\beta(t_w - t_s) l^3]/\nu^2$;

Pr — критерий Прандтля ν/a.

В выражении критерия Грасгофа произведение коэффициента объемного расширения β на определяющую разность температур $t_w - t_s$ заменяет собой отношение плотностей

$$(\rho_s - \rho_w)/\rho_w.$$

Для процессов переноса массы, где подъемные силы возникают вследствие разности плотностей различных смесей, критерий Грасгофа удобнее записывать в форме:

$$\mathrm{Gr}_D = \frac{gl^3}{\nu^2}\left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1\right),$$

где ρ_w — плотность газовой смеси у стенки;

ρ_s — плотность газовой смеси вне пограничного слоя.

Рассуждения, аналогичные тем, которые применялись к условиям вынужденной конвекции, приводят к следующему выражению для коэффициента массообмена:

$$\frac{h_D l}{D} = f\left(\mathrm{Gr}_D, \frac{\nu}{D}\right) = f(\mathrm{Gr}_D, \mathrm{Sc}). \qquad (16\text{-}47)$$

И в этом случае функция f аналогична соответствующей функции в области теплообмена. Если одновременно происходят процессы тепло- и массообмена, то коэффициент массообмена можно определить путем решения соответствующей задачи из области теплообмена, но при условии, что $D \neq a$.

Пример 16-2. Над горизонтальной поверхностью воды движется поток воздуха со скоростью $u_s = 3{,}1$ *м/сек*. Требуется определить количество воды, испаряющейся за час с 1 $м^2$ поверхности. Температура воды на поверхности 15° С; температура воздуха 20° С; парциальное давление водяных паров в воздухе $p_{1s} = 0{,}00792$ *кГ/см*^{2}, что соответствует влажности $\varphi = 33{,}3\%$. Поверхность воды в направлении движения воздуха имеет длину $x = 100$ *мм* $= 0{,}1$ *м*.

Критерий Рейнольдса для потока воздуха

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_s x}{\nu} = \frac{3{,}1 \cdot 0{,}1}{1{,}56 \cdot 10^{-5}}$$

(значение $\nu = 1{,}56 \cdot 10^{-5}$ *м*^{2}*/сек* взято из таблиц приложения). Следовательно, поток—ламинарный и средний коэффициент теплообмена определяется по формулам (7-14) и (7-15):

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = 0{,}664 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_x}.$$

Коэффициент массообмена определяется из аналогичной формулы

$$\overline{h_D} x/D = 0{,}664 \sqrt[3]{\nu/D} \sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_x}.$$

Коэффициент диффузии $D = 0{,}09504$ *м*^{2}*/ч* (см. приложение). Отсюда

$$\frac{\nu}{D} = \frac{15{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 3\,600}{0{,}09504} = 0{,}591.$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{h}_D x}{D} = 0{,}664\sqrt[3]{0{,}591}\sqrt{19830} = 78{,}4.$$

и

$$\overline{h}_D = \frac{78{,}4 \cdot 0{,}09504}{0{,}1} = 74{,}5 \ м/сек.$$

Если желательно использовать соотношение Льюиса, то сперва необходимо определить коэффициент теплообмена; так как для воздуха $Pr = 0{,}710$, то

$$Nu_x = 0{,}624\sqrt{19\,830}\sqrt[3]{0{,}710} = 83{,}3;$$

$$\alpha = \overline{Nu}_x (\lambda/x) = \frac{83{,}3 \cdot 0{,}022}{0{,}1} = 18{,}35 \ ккал/м^2 \cdot ч \cdot град.$$

Для воздуха при 20° С и 1 $кг/см^2$ удельная теплоемкость единицы объема равна 0,28 $ккал/м^3 \cdot град$. Отсюда $\overline{h}_D = \frac{18{,}35}{0{,}28} = 65{,}5$ $м/ч$. Это значение на 13,8% меньше предыдущего вследствие того, что допущение о равенстве отношения a/D единице, при котором справедливо соотношение Льюиса, в рассматриваемом случае выполняется неточно. Однако для приблизительных расчетов испарения воды в воздух соотношение Льюиса вполне пригодно.

Парциальное давление водяного пара над поверхностью воды равно давлению насыщения при температуре на поверхности воды:

$$p_{1w} = 0{,}01735 \ кГ/см^2.$$

Отсюда находим количество воды, испаряющейся за час с 1 $м^2$ поверхности [см. уравнение (16-36)]:

$$m_{1w} = \frac{h_D}{R_1 T}(p_{1w} - p_{1s}) = \frac{74{,}5}{47 \cdot 268}(0{,}01735 - 0{,}00792) =$$

$$= 0{,}5155 \ кг/м^2 \cdot ч.$$

16-5. ИСПАРЕНИЕ ВОДЫ В ВОЗДУХ

Для приблизительных расчетов процессов испарения воды в воздух и конденсации воды из влажного воздуха можно применять соотношение Льюиса, так как отношение коэффициента температуропроводности к коэффициенту диффузии при 20° С равно 0,835, что не сильно отличается от единицы. В разделе 15-2 процессы, происходящие во влажном воздухе, изучались при помощи графика зависимости удельного влагосодержания от энтальпии. Поэтому полезно было бы преобразовать уравнение (16-36) таким образом, чтобы в его правой части вместо парциальных

давлений стояли значения удельного влагосодержания. Согласно § 15-2

$$d = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Для невысоких парциальных давлений водяного пара справедливо приблизительное равенство

$$d \approx \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{p_1}{p}.$$

Прилагаемый график зависимости удельного влагосодержания от энтальпии (рис. 15-5) охватывает состояния для давлений водяного пара меньше 0,154 *кг/см*^{2}. Для этой области приведенное выше приблизительное равенство дает ошибку менее 6%. Если мы сочтем такую ошибку допустимой, то уравнение (16—36) можно написать в следующем виде:

$$\dot{m}_{1w} = \frac{h_D}{R_1} \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{M_2}{M_1} (d_w - d_s).$$

Газовую постоянную для водяных паров R_1 можно выразить через универсальную газовую постоянную $\mathfrak{R}$ и молекулярный вес водяного пара M_1:

$$R_1 = \frac{\mathfrak{R}}{M_1}.$$

Отсюда

$$\dot{m}_{1w} = h_D \frac{p}{R_2 T} (d_w - d_s) = h_D \rho_2 (d_w - d_s),$$

где ρ_2 — плотность сухого воздуха.

Произведение $h_D \rho_2$ называется коэффициентом испарения и обозначается буквой σ. Размерность коэффициента испарения *кг/ч·м*^{2}. Таким образом, имеем:

$$\dot{m}_{1w} = \sigma (d_w - d_s). \qquad (16\text{-}48)$$

Пользуясь соотношением Льюиса, приходим к выводу, что

$$\sigma = h_D \rho_2 = \frac{\alpha \rho_2}{C_p} = \frac{\alpha}{c_p}. \qquad (16\text{-}49)$$

Численное значение удельной теплоемкости 1 *кг* воздуха равно 0,24 *ккал/час·град*. Экспериментальные работы

различных ученых подтверждают справедливость последнего соотношения Льюиса для турбулентного потока [Л. 289], однако для ламинарного режима оно не дает таких хороших результатов (см. последний пример).

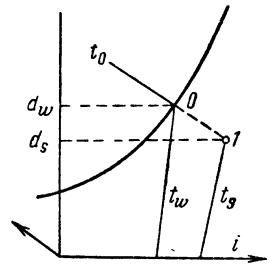


Рис. 6-12. К определению влажности воздуха по показаниям сухого и мокрого термометров.

Для процессов испарения особую важность имеет температура, которую приобретает влажное тело в потоке воздуха, когда теплообмен происходит только в результате конвекции. Температура такого тела бывает ниже температуры воздуха, так как то тепло, которое передается телу от воздуха, поглощается в процессе испарения. Эту температуру, которую называют температурой мокрого термометра, так как она соответствует показанию термометра, обернутого влажной тканью, можно определить из соотношения Льюиса. Поток массы на единицу поверхности и тепловой поток определяются выражениями:

$$\dot{m}_{1w} = \sigma (d_w - d_s)$$

и

$$q_w = \alpha (t_w - t_s).$$

Если тело получает все тепло, необходимое для процесса испарения из воздуха путем конвекции, то $q_w = \dot{m}_{1w} i_{fg}$, где i_{fg} — удельная теплота испарения 1 *кг* воды.

Отсюда

$$\frac{t_s - t_w}{d_s - d_w} = i_{fg} \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{i_{fg}}{c_p}. \qquad (16\text{-}50)$$

При помощи этого уравнения устанавливается направление линии, которая соединяет на графике зависимости удельного влагосодержания от энтальпии точку O (d_w, t_w), характеризующую состояние воздуха у поверхности, с точкой 1 (d_s, t_s), которая характеризует состояние воздуха на большом расстоянии от тела (рис. 16-12). Р. Молье [Л. 290] показал, что температуру мокрого термометра можно определять при помощи графика путем нахождения

в области перенасыщения той изотермы, продолжение которой проходит через точку *1* *.

Содержание влаги в воздухе удобно определять психрометрическим методом. Психрометр состоит из сухого термометра и мокрого; шарик последнего обернут мокрой тканью. Для того чтобы лучистый теплообмен был пренебрежимо мал по сравнению с конвективным теплообменом, воздух, влажность которого требуется измерить, необходимо продувать через термометры с достаточной скоростью. Точка пересечения изотермы сухого термометра с продолжением изотермы мокрого термометра на графике зависимости удельной влажности от энтальпии и будет характеризовать состояние воздуха и его влажность.

Пример 16-3. Показание сухого термометра психрометра 20° С, мокрого 10° С, давление воздуха 1,033 *кГ/см*^{2}. Определить удельное влагосодержание воздуха.

На графике «удельное влагосодержание — энтальпия» находим точку пересечения изотермы 10° С в области перенасыщения с изотермой 20° С. Эта точка характеризует состояние влажного воздуха. Удельное влагосодержание находим по ординате $d=0{,}0037$ *кг* воды на 1 *кг* сухого воздуха. Если на графике «удельное влагосодержание — энтальпия» имеются кривые постоянной влажности, эта величина определяется сразу. В противном случае необходимо определять парциальное давление пара в исследуемом воздухе и парциальное давление насыщенного пара при температуре 20° С; эти величины можно найти по удельному влагосодержанию при помощи уравнения (15-3) или же в специальных таблицах. Отношение этих двух парциальных давлений дает значение влажности $\varphi=0{,}256$.

ЗАДАЧИ

16-1. Вывести уравнения, описывающие поля концентрации и температуры, а также уравнение переноса массы и тепла для ламинарного потока между неподвижной и движущейся поверхностями (поток Couette). Имеется в виду двухкомпонентная газовая смесь, причем один компонент течет только параллельно плитам, в то время как другой компонент выделяется на неподвижной поверхности и поглощается на движущейся поверхности. Доли массы и температуры на обеих поверхностях могут быть заданы. В другом случае рассмотрите условия, параллельные тем, которые описаны в разделе 16-2.

16-2. Выведите уравнение массообмена в граничном слое для плоского установившегося ламинарного потока.

16-3. Рассчитайте одну из кривых распределения температур, изображенных на рис. 16-3 для Pr-1, путем интегрирования уравнения энергии (например, методом, рассмотренным в разделе 6-6 и 7-6).

---

* Этот метод не совсем точен, но дает результаты, которые хорошо согласуются с данными опытов.

16-4. Вычислите одну из кривых распределения доли массы на рис. 16-3 для Sc=0,7 путем интегрирования уравнений пограничного слоя (например, методом, рассматриваемым в разделе 6-6 и 7-6).

16-5. Определите количество водяного пара, испаряемого с поверхности плоской чаши, наполненной водой при температуре 37,5° С (65,5° С), в поток сухого воздуха, движущегося со скоростью 15 *м/сек* при температуре 65,5° С параллельно поверхности воды. Длина чаши в направлении потока 15 *см*. При расчетах используйте данные раздела 16-2, а также уравнения подобия (см. раздел 16-4) и сравните результаты. Вычислите также поток тепла через поверхность воды, обусловленный этим процессом испарения.

ЧАСТЬ Е

ТЕПЛООБМЕННИКИ

Теплообменники — это устройства, в которых тепло переходит от одной среды к другой. Они могут быть подразделены на два класса. В теплообменниках первого класса обе среды проходят через устройство одновременно и тепло проходит через разделяющие стенки. Такой тип называется теплообменником рекуперативного типа. Ко второму классу относятся такие теплообменники, через которые две среды протекают поочередно. Такие аппараты содержат твердый материал (насадку) со значительной теплоемкостью, так что он может накапливать тепло, воспринимаемое от горячей среды, и передавать его холодной, когда она проходит через обменник. Такой тип называется теплообменником регенеративного типа. Иногда насадка в таком теплообменнике делается так, что она вращается между двумя каналами, расположенными рядом друг с другом, по которым проходит теплообменивающаяся среда, и таким образом передает тепло от горячей среды к холодной. Основные уравнения для проектных расчетов теплообменников рекуперативного типа с простыми устройствами для потока рассматривались в разделе 1-4. В этих уравнениях используется средняя логарифмическая разность температур. В этом разделе будет рассматриваться другой метод, основанный на термической эффективности. Будут приведены уравнения для теплообменников с другими устройствами каналов и описаны методы расчета теплообменников регенеративного типа.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

РАСЧЕТЫ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

17-1. ТЕПЛООБМЕННИКИ РЕКУПЕРАТИВНОГО ТИПА

При расчетах теплообменника наиболее часто встречаются две задачи:

1. Заданы количество тепла, которое необходимо передать, условия на входе и выходе обеих сред. Требуется определить необходимую площадь теплообменника.

2. Заданы площадь теплообменника и условия на выходе и входе. Требуется подсчитать количество тепла, которое может быть передано.

В последующих расчетах обе среды будут обозначаться индексами 1 и 2, входные условия — значком i, а выходные — значком e; m будет обозначать поток массы, а c — удельную теплоемкость. Если известны входные условия для обеих сред (m_1, c_1, t_{1i}, m_2, c_2, t_{2i}) и тепло Q, которое надо передать, или одна из температур на выходе (t_{1e} или t_{2e}), то можно составить тепловой баланс:

$$Q = m_1 c_1 (t_{1i} - t_{1e}); \tag{17-1}$$

$$Q = m_2 c_2 (t_{2e} - t_{2i}). \tag{17-2}$$

Допустим, что температура среды *1* более высокая, а потери тепла в теплообменнике ничтожно малы. Тогда с помощью этих уравнений можно определить две температуры среды на выходе теплообменника: t_{1e} и t_{2e} или поток тепла Q и потерю температуры на выходе. Это дает возможность определить среднюю логарифмическую разность температур при помощи уравнения (1-31) и площадь, необходимую для передачи тепла, по уравнению (1-30).

Во втором случае для определения количества тепла, которое передается теплообменником через определенную площадь A, будут заданы следующие параметры:

$$m_1, m_2, c_1, c_2, t_{1i}, t_{2i} \text{ и } A.$$

Этот подсчет нельзя осуществить прямым путем при помощи средней логарифмической разности температур, так как уравнение (1-31) требует значения температур на входе обеих сред. Вычисление можно проделать только методом последовательного приближения. Если, например, считать известной температуру на выходе среды *1*, то уравне-

ние (17-1) определяет количество передаваемого тепла. По уравнению (17-2) определим температуру на выходе второй среды. Теперь уравнение (1-31) можно решить для средней логарифмической разности температур, а уравнение (1-30) — для количества передаваемого тепла в теплообменнике. Если этот поток тепла не является идентичным тому, который получен по уравнению (17-1), то вычисление надо повторить с другим предположением относительно температуры на выходе.

Процесс вычисления, основанный на параметре, называемом эффективностью теплообменника, позволяет избежать этой трудности и допускает прямое решение этих двух задач. Поэтому он чаще применяется в проектных расчетах.

Эффективность теплообменника определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{(t_i - t_e)_l}{t_{1i} - t_{2i}}. \qquad (17\text{-}3)$$

В этом уравнении в числителе содержится разность между входной и выходной температурами для одной из двух сред, для которых эта разность является большей. Знаменатель представляет собой разность двух входных температур. Надо добавить, что ε всегда считается величиной положительной. Согласно уравнению (17-1) больший прирост температуры во время прохождения через теплообменник будет у той среды, для которой произведение mc имеет меньшую величину (обозначенную индексом s). Количество тепла, переносимое в единицу времени в теплообменнике, может быть выражено следующим образом:

$$Q = (mc)_s \varepsilon (t_{1i} - t_{2i}). \qquad (17\text{-}4)$$

Если известны входные условия и эффективность теплообменника с заданной площадью поверхности, то для определения теплового потока, передаваемого в теплообменнике, достаточно использовать уравнение (17-1) совместно с (17-2). Сначала по уравнению (17-4) определяется тепловой поток, а затем по уравнениям (17-1) и (17-2) вычисляются температуры на выходе двух данных сред.

Были разработаны диаграммы и выведены аналитические уравнения, по которым можно определить эффективность теплообменника для различных форм потока (таких, как параллельный или встречный поток, поток под пря-

мым углом и т. п.). В качестве примера рассчитаем эффективность для случая параллельного потока.

Предположим, что m_1c_1 — произведение, имеющее меньшее значение. Поэтому:

$$m_1c_1=(mc)_s;\quad (t_i-t_e)_l=t_{1i}-t_{1e}. \tag{17-5}$$

Соответственно тепловая эффективность в этом случае определяется как

$$\varepsilon=\frac{t_{1i}-t_{1e}}{t_{1i}-t_{2i}}.$$

Уравнение (1-28) можно записать следующим образом:

$$t_{1e}-t_{2e}=(t_{1i}-t_{2i})\,e^{-\mu UA}.$$

Из уравнений (17-1) и (17-2) определяем температуру t_{2e}:

$$t_{2e}=\frac{m_1c_1}{m_2c_2}(t_{1i}-t_{1e})+t_{2i}.$$

Заменив в этом уравнении разность температур $t_{1i}-t_{1e}$ выражением $\varepsilon\,(t_{1e}-t_{2e})$, получим:

$$\varepsilon=\frac{1-\exp\left[-\dfrac{UA}{m_1c_1}\left(1+\dfrac{m_1c_1}{m_2c_2}\right)\right]}{1+(m_1c_1/m_2c_2)}.$$

Это уравнение выражает эффективность теплообменника через известные параметры. Этот расчет можно повторить для случая, когда m_2c_2 меньше, чем m_1c_1.

Таким образом, было обнаружено, что в общем эффективность теплообменника для условий параллельного потока выражается следующим уравнением:

$$\varepsilon=\frac{1-\exp\left\{-\dfrac{UA}{(mc)_s}\left[1+\dfrac{(mc)_s}{(mc)_l}\right]\right\}}{1+[(mc)_s/(mc)_l]}. \tag{17-6}$$

Аналогично определяется эффективность для встречного потока:

$$\varepsilon=\frac{1-\exp\left\{-\dfrac{UA}{(mc)_s}\left[1-\dfrac{(mc)_s}{(mc)_l}\right]\right\}}{1-\dfrac{(mc)_s}{(mc)_l}\exp\left\{-\dfrac{UA}{(mc)_s}\left[1-\dfrac{(mc)_s}{(mc)_l}\right]\right\}}. \tag{17-7}$$

Таблица 17-1

Тепловая эффективность теплообменников с различными видами потоков

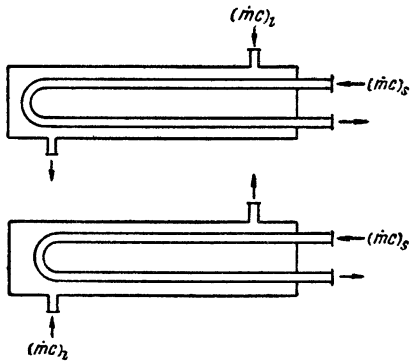
1. Параллельный ток	$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-[UA/(mc)_s][1 + (mc)_s/(mc)_l]}}{1 + \frac{(mc)_s}{(mc)_l}}$$
2. Противоток	$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-[UA/(mc)_s][1 - (mc)_s/(mc)_l]}}{1 - \frac{(mc)_s}{(mc)_l} e^{-[UA/(mc)_s][-(mc)_s/(mc)_l]}}$$
3. Перекрестный ток (оба потока не смешанные, аналитическое приближение)	$$\varepsilon = 1 - e^{\left\{\left[\exp\left(-\frac{UA}{(mc)_s} \cdot \frac{(mc)_s}{(mc)_1} \eta\right) - 1\right] \frac{(mc)_1}{(mc)_s} \frac{1}{\eta}\right\}^*}$$ $$\eta = \left[\frac{(mc)_s}{UA}\right]^{0,22}$$
4. Перекрестный ток (оба потока смешанные)[1]	$$\varepsilon = \frac{\frac{UA}{(mc)_s}}{\frac{\frac{UA}{(mc)_s}}{1 - \exp\left[-\frac{UA}{(mc)_s}\right]} + \frac{\frac{UA}{(mc)_l}}{1 - \exp\left[-\frac{UA}{(mc)_l}\right]} - 1}$$
5. Перекрестный ток (поток не смешанный)	$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-[(mc)_s/(mc)_l]\{1 - \exp[-UA/(mc)_s]\}}}{\frac{(mc)_s}{(mc)_l}}$$

6. Перекрестный ток (поток не смешанный)

$$\varepsilon = 1 - e^{-[(mc)_l/(mc)_s]\left\{1-\exp\left[-UA/(mc)_l\right]\right\}}$$

7. Теплообменник с реверсивным током

$$\varepsilon = \frac{2}{1+\frac{(mc)_s}{(mc)_l}+\frac{1+\exp\left[-\frac{UA}{(mc)_s}\sqrt{1+\frac{(mc)_s^2}{(mc)_l^2}}\right]}{1+\exp\left[-\frac{UA}{(mc)_s}\sqrt{1+\frac{(mc)_s^2}{(mc)_l^2}}\right]}\sqrt{1+\frac{(mc)_s^2}{(mc)_l^2}}}$$



* Согласно данным Р. М. Дрейка.

[1] Поток считается смешанным, если отсутствует разность температур в любой плоскости, нормальной к потоку в теплообменнике.

Результаты вычислений для других конфигураций потоков были обобщены Босняковичем [Л. 291], а также Кейсом и Лондоном [Л. 292].

В таблице 17-1 содержатся уравнения для тепловых эффективностей теплообменников с различными видами потоков. Параметр $UA/(mc)_s$ иногда называют числом единиц передачи и обозначают NTU. Диаграммы тепловых эффективностей различных теплообменников были недавно опубликованы [Л. 293].

17-2. ТЕПЛООБМЕННИКИ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ТИПА

Неустановившиеся процессы теплопроводности имеют место в теплообменниках регенеративного типа. Через такой теплообменник теплая и холодная жидкости текут попеременно, обычно в противоположных направлениях. Насадка, обладающая высокой теплоемкостью, периодически поглощает и отдает переносимое тепло. Теплообменники регенеративного типа с кирпичными стенками часто используются в металлургической промышленности как аккумуляторы тепла, например в качестве воздухоподогревателей для доменных печей. Теплообменники, изготовленные из металла, используются также в установках с паровыми котлами и широко применяются в технике низких температур, связанной с разделением газов путем дефлегмации.

Процесс точного расчета для таких теплообменников исключительно труден [1]. Расчеты, используемые для проектных целей, обычно упрощаются благодаря определенным допущениям. Их можно разделить на два основных класса. В первом случае пренебрегают разностями температур в направлении, перпендикулярном поверхности твердого материала, в котором накапливается тепло.

Этот расчет приемлем для теплообменника, насадка которого сделана из тонкостенного материала с высокой теплопроводностью. К этому классу относятся, например, теплообменники с насадками, сделанными из металла. Для теплообменников с насадками с более толстыми стенками и с меньшей теплопроводностью пренебрежение разностью температур в аккумулирующих стенках приведет к большим ошибкам, поэтому для этого случая необходимо раз-

[1] Для более подробного ознакомления с теплообменниками обоих типов следует прочесть книгу И. Хаузена [Л. 294].

работать метод расчета, в котором учитывается указанный перепад температур.

Рассмотрим сначала расчет теплообменника регенеративного типа, предположив, что разницей температур во всем твердом материале насадки можно пренебречь. Такой теплообменник изображен на рис. 17-1. Поток в этом теплообменнике может быть параллельным или встречным. Обычно применяется встречный поток. Именно такой поток изображен на рис. 17-1.

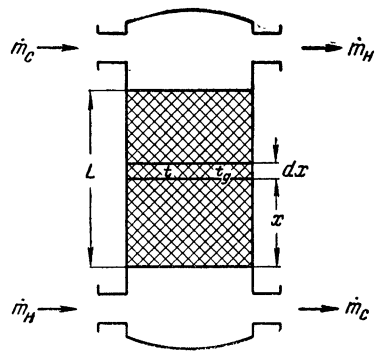


Рис. 17-1. Теплообменник регенеративного типа.

Вычисление начнем с составления теплового баланса на дифференциальной длине dx теплообменника. Используем следующую терминологию: обозначим через A_L поверхность, переносящую тепло на единицу длины L теплообменника, через V_L — свободный объем, доступный для газового потока через теплообменник на единицу длины, и через M_L — твердую массу насадки теплообменника на единицу длины.

Кроме того, введем следующие обозначения:

c_s — удельная теплоемкость твердой насадки;

$\dot{m}$ — поток массы жидкости, проходящий через теплообменник;

c — удельная теплоемкость;

ρ — плотность.

Индексы H или c будут использованы для указания на то, какой поток, проходящий через теплообменник, рассматривается — более горячий или более холодный. Через t обозначим температуру твердого тела в точке x, а через t_g — температуру среды в том же месте. Тепловой баланс для твердого материала на участке высотой dx теплообменника для промежутка времени $d\tau$ будет следующий:

$$\alpha A_L (t_g - t)\, dx d\tau = c_s M_L dx \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau, \qquad (17\text{-}8)$$

где α — коэффициент теплообмена от жидкости к поверхности насадки. Аналогичный тепловой баланс, вы-

полненный для жидкости, движущейся через элемент теплообменника высотой dx, дает:

$$\alpha A_L (t - t_g)\, dx\, d\tau = \\ = \rho c V_L dx \frac{\partial t_g}{\partial \tau} d\tau + c\dot{m} d\tau \frac{\partial t_g}{\partial x} dx. \qquad (17\text{-}9)$$

Первый член правой части последнего уравнения представляет собой тепло, накопленное в жидкости, содержащейся в теплообменнике на отрезке высоты dx. Второй член показывает разность внутренней энергии, поступающей в теплообменник и выходящей из него вместе с жидкостью.

Эти два уравнения можно упростить:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\alpha A_L}{c_s M_L} (t_g - t); \qquad (17\text{-}10)$$

$$\frac{\partial t_g}{\partial x} + \frac{\rho V_L}{\dot{m}} \cdot \frac{\partial t_g}{\partial \tau} = \frac{\alpha A_L}{c\dot{m}} (t - t_g). \qquad (17\text{-}11)$$

Почти во всех случаях член $\rho V_L/\dot{m}$ очень мал, поэтому вторым членом левой части уравнения (17-11) обычно пренебрегают. Полученные таким образом два уравнения являются уравнениями в частных производных с двумя неизвестными температурами (жидкости, протекающей через теплообменник, и твердой насадки) как функции времени и положения x.

Для решения этих дифференциальных уравнений необходимо задать граничные условия.

Теплообменники регенеративного типа могут работать в двух режимах: непрерывно или единичной операцией, так что теплообменник, насадка которого была нагрета до определенной температуры, используется для нагрева жидкости на определенный период. Теплообменники такого типа применяются очень часто, например, в современных воздухопроводах (аэродинамических трубах), которые работают в течение короткого времени. Для нагрева воздуха в такой трубе до необходимой температуры во время ее действия требуется большой тепловой поток. При помощи электрического нагревателя создать такой поток очень трудно. Целесообразнее накопить это тепло в регенеративном теплообменнике до действия трубы. Граничные условия, описывающие эту единичную операцию регенератора, следующие:

при $x=0$

$$t_g = t_{g0} = \text{const};$$

при $\tau = 0$

$$t = t_0 = \text{const}.$$

В применениях, о которых упоминалось в начале этого параграфа, теплообменники обычно используются для непрерывного действия в том смысле, что через теплообменник попеременно пропускается холодный и горячий газ. При этом колебания температуры в нем почти постоянны. Граничные условия, описывающие этот процесс для регенератора со встречным потоком во время периода нагрева, равного τ_H, следующие:

$$\text{при } x=0 \qquad t_g = t_{gH}.$$

В течение периода охлаждения, равного τ_c, при $x=L$ граничные условия таковы: $t_g = t_{gc}$. Кроме того, температура материала насадки в начале периода нагрева должна быть равна температуре в конце периода охлаждения, и наоборот:

t (начало нагрева) $= t$ (конец охлаждения);

t (начало охлаждения) $= t$ (конец нагрева).

Дифференциальные уравнения, описывающие температурное поле и температурные изменения в теплообменнике, можно упростить введением следующих новых переменных:

$$\xi = \frac{\alpha A_L}{cm} x; \quad \eta = \frac{\alpha A_L}{c_s M_L} \tau. \tag{17-12}$$

С этими переменными уравнения (17-10) и (17-11) принимают вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = t_g - t; \tag{17-13}$$

$$\frac{\partial t_g}{\partial \xi} = t - t_g. \tag{17-14}$$

В уравнении (17-11) вторым членом левой части уравнения пренебрегли. Эта система двух дифференциальных уравнений в частных производных вместе с вышеописанными граничными условиями решена только для особых случаев. А. Анцелиус [Л. 295] получил решение для единичной операции теплообменника регенеративного типа, а ряд других ученых решили задачу графически и численно для непрерывного действия. На рис. 17-2 представлены

результаты по Анцелиусу. По этой диаграмме можно определить температуру газа и насадки во всем теплообменнике в любой момент времени. Особенно важно знать температуру, при которой газ выходит из теплообменника. Эту температуру можно определить по верхней диаграмме на рисунке. Можно заметить, что температура газа на выходе

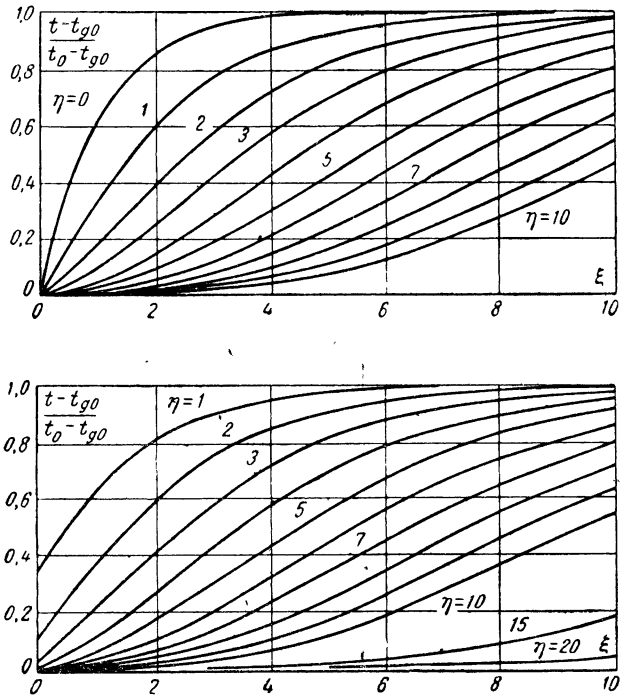


Рис. 17-2. Изменения температуры t матрицы и температуры t_g жидкости в теплообменнике регенеративного типа, находящемся сначала при температуре t_0, а затем подвергнувшемся действию среды с другой температурой [Л. 392].

почти постоянна для значительного отрезка времени протекания процесса. Численные расчеты теплообменника для непрерывного действия были проведены Коппейдтем и Лондоном в терминах эффективности теплообменника ε. В качестве примера на рис. 17-3 представлен результат численного расчета теплообменника регенеративного типа со встречным потоком для условия $m_H c_H = m_c c_c$. Самая

верхняя кривая этой диаграммы идентична с эффективностью теплообменника непрерывного действия, определяемой уравнением (17-7). Можно заметить, что эффективность теплообменника регенеративного типа одна и та же, когда теплоемкость твердого материала очень велика по сравнению с теплоемкостью жидкостей. Для определенного отношения $c_s M/cm$ эффективность становится меньше, чем для теплообменника, и может быть определена из

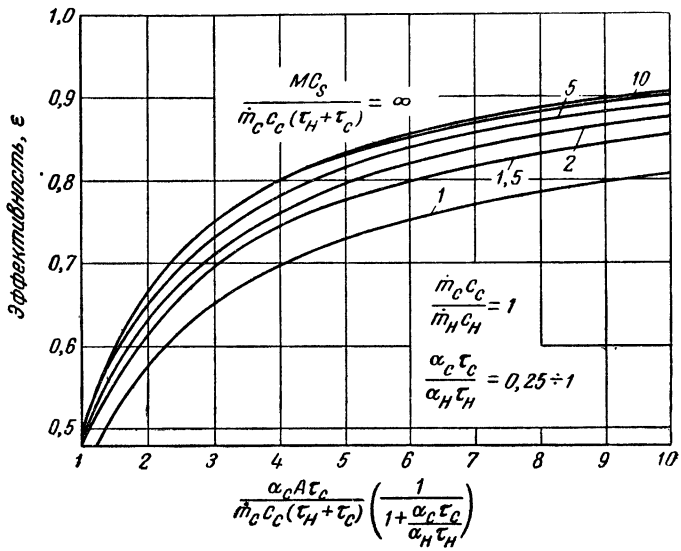


Рис. 17-3. Тепловая эффективность теплообменников регенеративного типа при квазистационарном режиме.

τ_c — период охлаждения; τ_H — период нагрева; M — масса; A — площадь переноса тепла; c_S — коэффициент удельной теплоемкости насадки [Л. 393].

диаграммы, изображенной на рисунке. Следует помнить, что все расчеты вплоть до настоящего времени базируются на предположении, что разностями температур в определенном месте x внутри твердого материала насадки можно пренебречь. Х. Хаузен разработал превосходный метод, при помощи которого можно определить влияние температурных изменений в твердом материале на работу теплообменника [Л. 296].

Рассмотрим этот метод. В теплообменнике регенеративного типа, через который попеременно протекают горячий и холодный газы в противоположных направлениях,

температуры газов, а также стенок, аккумулирующих тепло, изменяются не только в зависимости от положения, но и со временем. Изменение температуры со временем в поперечном сечении внутри теплообменника представлено на рис. 17-4. На рис. 17-5 показано распределение температуры в стенке для различных промежутков времени после переключения от нагрева к периоду охлаждения ($\tau_1<\tau_2<\tau_3<\tau_4<\tau_5$). За исключением концов теплообменника,

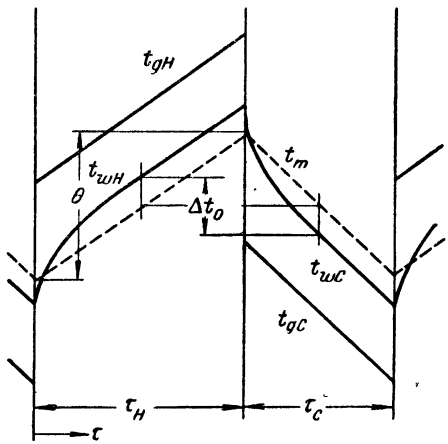


Рис. 17-4. Флуктуации температуры стенок и газов в теплообменнике во времени.

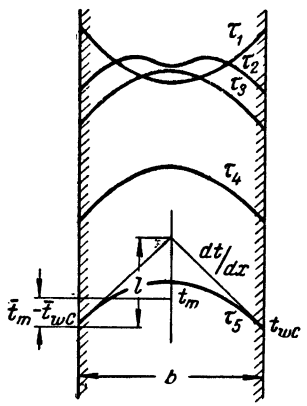


Рис. 17-5. Профили температуры в стенке теплообменника для различных моментов времени [Л. 394].

температура t_{gH} горячего газа повышается почти линейно со временем, а температура t_{gc} уменьшается практически линейно со временем. Средняя температура стенки t_m изменяется линейно со временем. Температура поверхности t_w стенки быстро изменяется сразу после переключения и вскоре после этого достигает линейного изменения. Для количества тепла Q_p*, которое переносится к стенке теплообменника горячим газом в течение времени τ_H периода нагрева, можно записать следующее уравнение:

$$Q_p = \alpha_H A (\bar{t}_{gH} - \bar{t}_{wH}) \tau_H,$$

где α_H — коэффициент теплообмена от тонкого слоя газа к стенке;

* Не следует забывать, что Q_p не является потоком тепла в единицу времени, а есть тепло, переносимое в период нагрева (и в период охлаждения).

τ_H — продолжительность периода нагрева;

t_{gH} и t_{wH} — средние по времени величины температур.

Эти средние значения температур практически равны мгновенным значениям в середине периода нагревания. То же самое количество тепла переносится от стенки к холодному газу во время периода охлаждения продолжительностью τ_c. Если коэффициент теплообмена пленки α_c, период охлаждения τ_c и соответствующие средние температуры $\bar{t}_{wc}$—$\bar{t}_{gc}$, то

$$Q_p = \alpha_c A (\bar{t}_{wc} - \bar{t}_{gc}) \tau_c.$$

В этих уравнениях A — поверхность стенок, аккумулирующих тепло, которые находятся в контакте с газом. Теперь надо исключить из уравнений температуру поверхности точно таким же образом, как в § 1-3 для переноса тепла при установившемся режиме. Для этого необходимо определить разность температур $\Delta\bar{t}_w = \bar{t}_{wH} - \bar{t}_{wc}$, которая согласно рис. 17-4 состоит из двух компонентов: $\bar{t}_{wH} - t_m$ и $\bar{t}_m - \bar{t}_{wc}$. Последняя величина изображена графически на рис. 17-5. Если допустить, что стенки, аккумулирующие тепло, плоские, то распределение температур в них можно определить по уравнению (4-10). Если температура меняется линейно со временем, как это показано на рис. 17-4, то $\partial t/\partial\tau = \text{const}$. Таким образом, $a(\partial^2 t/\partial x^2) = \text{const}$ и в результате двойного интегрирования получим параболы, изображенные на рис. 17-5. Иное распределение температур имеет место только сразу же после переключения, так как в этот момент изменение температуры со временем также носит другой характер. Наклон параболического профиля температуры у поверхности стенки можно определить из тех соображений, что количество тепла, проходящее от поверхности к газу в единицу времени, должно равняться теплу, поступающему за счет теплопроводности с внутренней части стенки к поверхности, т. е.

$$\frac{Q_p}{\tau_c} = -\lambda A \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_w.$$

Параметр l на рис. 17-5 есть

$$l = (b/2)(\partial t/\partial x)_w = (Q_p/A)(b/2\lambda\tau_c).$$

Высота параболы равна половине этой величины, а разность $\bar{t}_m - \bar{t}_{wc}$ составляет $^2/_3$ высоты параболы. Поэтому

$$\bar{t}_m - \bar{t}_{wc} = \frac{Q_p}{A} \cdot \frac{b}{6\lambda\tau_c}.$$

Таким же образом для периода нагрева

$$\bar{t}_{wH} - \bar{t}_m = \frac{Q_p}{A} \cdot \frac{b}{6\lambda\tau_H};$$

и, следовательно, для разности температур

$$\bar{t}_{wH} - \bar{t}_{wc} = \frac{Q_p}{A}\left(\frac{1}{\tau_H} + \frac{1}{\tau_c}\right)\frac{b}{6\lambda}.$$

Если два первых уравнения настоящего параграфа решить относительно температуры:

$$t_{gH} - t_{wH} = \frac{Q_p}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_H\tau_H};$$

$$t_{wc} - t_{gc} = \frac{Q_p}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_c\tau_c}$$

и затем сложить три последних уравнения:

$$t_{gH} - t_{gc} = \frac{Q_p}{A}\left[\frac{1}{\alpha_H\tau_H} + \frac{1}{\alpha_c\tau_c} + \left(\frac{1}{\tau_H} + \frac{1}{\tau_c}\right)\frac{b}{6\lambda}\right],$$

то в результате получим:

$$Q_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_H\tau_H} + \frac{1}{\alpha_c\tau_c} + \left(\frac{1}{\tau_H} + \frac{1}{\tau_c}\right)\frac{b}{6\lambda}} A(\bar{t}_{gH} - \bar{t}_{gc}). \qquad (17\text{-}15)$$

Если известны средние величины температур газа в зависимости от времени $\bar{t}_{gH}$ и $\bar{t}_{gc}$, то при помощи этого уравнения можно определить количество тепла Q_p, поступающее от горячего газа к холодному в течение всего периода продолжительностью $\tau_H + \tau_c$. Это уравнение было выведено только для поперечного сечения теплообменника. Если требуется вычислить отдачу тепла всем регенератором, то надо ввести для разности температур $\bar{t}_{gH} - \bar{t}_{gc}$ среднюю логарифмическую разность температур согласно

уравнению (1-31), которая может быть получена по температурам на входе и выходе газов. Уравнение (17-15) очень похоже на уравнение (1-16) для установившегося теплового потока через плоскую стенку. Дробное выражение в уравнении (17-15) соответствует общему коэффициенту переноса тепла в уравнении (1-17).

Если период нагрева равен периоду охлаждения: $\tau_H = \tau_c = \tau$, то Q, т. е. тепло, переданное в единицу времени, определяется выражением

$$Q = \frac{Q_p}{2\tau} = \frac{1}{(1/\alpha_H) + (1/\alpha_c) + (b/3\lambda)} \cdot \frac{A}{2} (\bar{t}_{gH} - \bar{t}_{gc}).$$

Если сравнивать это уравнение с уравнением (1-17), то следует иметь в виду, что в теплообменнике рекуперативного типа буквой A обозначается только одна поверхность стенки, в то время как здесь участвуют обе поверхности. Тепловая производительность этих двух теплообменников одинакова, когда толщина стенки теплообменника рекуперативного типа равна $^1/_3$ толщины стенки теплообменника регенеративного типа. Различие объясняется тем фактом, что в теплообменнике рекуперативного типа все количество тепла проходит через стенку, в то время как в теплообменнике регенеративного типа тепло поступает в стенку через обе поверхности в течение периода нагрева, а в течение периода охлаждения выходит из стенки таким же образом, как и поступает в нее. Следовательно в случае теплообменника регенеративного типа нет необходимости, чтобы тепло проходило через всю толщину стенки. Интенсивность теплообмена можно снизить слоем порошка. Если слой порошка толщиной b_d теплопроводностью λ_d покрывает каждую поверхность стенки, то уравнение (17-15) примет следующий вид:

$$Q_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_H \tau_H} + \frac{1}{\alpha_c \tau_c} + \left(\frac{1}{\tau_H} + \frac{1}{\tau_c}\right)\left(\frac{b}{b\lambda} + \frac{b_d}{\lambda}\right)} A (\bar{t}_{gH} - \bar{t}_{gc}).$$

Максимальное изменение ϑ средней температуры стенки во время периода нагрева или охлаждения можно определить из уравнения

$$Q_p = c\rho b \frac{A}{2} \vartheta,$$

где c — теплоемкость;

ρ — плотность стенки.

В предыдущих расчетах для процессов, происходящих сразу же после переключения, а также условий на выходе и входе потока были сделаны упрощающие допущения.

Значительные неточности в результатах за счет этого имеют место только в редких случаях.

Н. Наузен [Л. 297] в результате изучения этих процессов составил и опубликовал диаграммы, по которым можно установить влияние краевых условий. Согласно диаграмме Хаузена член $b/6\lambda(1/\tau_H+1/\tau_c)$ в уравнении (17-15) следует уменьшить на 10%, если $(b^2/2a)(1/\tau_H+1/\tau_c)=3$ (a — коэффициент температуропроводности материала стенки). Для значений, меньших 3, поправка меньше.

Влияние условий, имеющих место на входе и выходе теплообменника, определяется двумя характерными величинами:

$$\lambda/c\rho s \text{ и } \lambda A/(\dot{m}_H c_H \tau_H+\dot{m}_c c_c \tau_c),$$

где λ — величина, соответствующая общему коэффициенту теплообмена;

$\dot{m}_H$, $\dot{m}_c$ — потоки массы горячего и холодного газов;

c_H, c_c — их удельные теплоемкости.

Теплообмен согласно уравнению (17-15) определяется с точностью до $10^0/_0$, когда $\lambda/c\rho s<0{,}3$ при $\lambda A/(\dot{m}_H c_H \tau_H+\dot{m}_c c_c \tau_c)\approx 0$ или $\lambda/c\rho s<7$ при $\lambda A/(\dot{m}_H c_H \tau_H+\dot{m}_c c_c \tau_c)\approx 50$. Действительное значение Q немного меньше вычисленного. Наиболее распространенные теплообменники отвечают вышеуказанным требованиям.

ЗАДАЧИ

17-1. Выведите уравнение для эффективности теплообменника со встречным потоком, как показано в табл. 17-1.

17-2. Теплообменник регенеративного типа с поперечным сечением 0,09 *м*² изготовлен из стальных шаров диаметром 1,25 *см*. Эта насадка нагревается до одинаковой температуры 260° С, а затем через нее пропускается поток воздуха с нормальными температурой и давлением. Скорость воздуха 15 *м/сек*. Длина части теплообменника, содержащая насадку, 0,3 *м*. Сколько времени надо продувать воздух через обменник, чтобы его температура на выходе отличалась на 10° С от первоначальной температуры насадки?

ПРИЛОЖЕНИЕ

КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Настоящее приложение является вспомогательным материалом к основному содержанию. В то же время к нему не предъявлены такие требования, которые принято предъявлять к справочнику; поэтому основное внимание уделяется краткости и простоте. В случае необходимости получить более подробные сведения надо обратиться к перечисляемым здесь работам.

Табл. П-1 и П-3 были взяты из книги Б. Коха «Основы теплообмена» [Л. 298] с доброго согласия автора. В табл. П-1 были добавлены дополнительные сведения с некоторыми исправлениями значений теплопроводности с учетом более новых данных. В табл. П-2 представлены данные по теплопроводности металлов и сплавов при низких температурах, взятые из статьи Лиса С. Х. [Л. 299]. В табл. П-3 сведены данные о свойствах некоторых жидкостей в состоянии насыщения.

Исключая область в непосредственной близости от критического состояния, изменение перечисленных свойств с давлением мало, так что таблица имеет универсальное значение. Вязкость представлена в виде кинематической вязкости.

В табл. П-4 приводятся данные о свойствах некоторых газов при атмосферном давлении. Табл. П-4 была составлена главным образом на основании данных Национального бюро стандартов, параграф 564, за исключением данных о гелии, аммиаке и дополнительных данных для воздуха и водорода. Добавочные данные для воздуха были взяты из работы Стопса [Л. 300] и Глассмана и Бонила [Л. 301]. Считается, что эти данные о воздухе являются в настоящее время наиболее точными. Данные о гелии были взяты у Дж. Б. Убинка и В. Дж. де Хаса («Теплопроводность газов» [Л. 302], В. Х. Кисома («Гелий» [Л. 303]), С. В. Эйкина («Термодинамические свойства гелия» [Л. 304]) и К. К. Келлея [Л. 305].

Данные об аммиаке были взяты у Б. Коха (см. выше), за исключением теплопроводности, которая была заимствована из работы Дж. М. Ленуара [Л. 306]. Дополнительные данные для водорода были получены у Кинана и Кэйя (газовые таблицы) и у Дж. М. Ленуара [Л. 307]. Опять, за исключением области критического состояния, данные о свойствах при других давлениях можно получить следующим образом. Плотность можно определить по уравнению состояния газа $\rho = p/RT$. Из этого следует, что при любой температуре плотность $\rho = \rho_0 \ (p/p_0)$, где $p_0 = 1{,}0$ *ат* и ρ_0 — плотность, приведенная в табл. П-4 для рассматриваемой температуры. Кроме того, удельная теплоемкость c_p изменяется очень мало с изменением давления в широких пределах. Такая независимость от давления справедлива также для теплопроводности λ, динамической вязкости μ и, следовательно, для критерия Прандтля Pr. Кинематическая вязкость ν и коэффициент температуропроводности a обратно пропорциональны плотности;

Металлы	При 20° С			
	ρ_1, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	λ, ккал/м·ч·град	$a \cdot 10^2$, м²/ч
Алюминий чистый	2700,0	0,214	196,0	34,0
Al—Cu (дюралюминий) 94—96% Al, 3—5% Cu	2800,0	0,211	141,4	24,0
Следы MgAl—Mg 91—95% Al, 9—5% Mg	2600,0	0,216	96,72	17,3
Al—Si 87% Al, 13% Si	2660,0	0,208	141,0	25,8
Al—Si 86,5% Al, 12,5% Si, 1% Cu	2660,0	0,207	117,6	21,5
Al—Si 78—80% Al, 22—20% Si	2630,0	0,204	138,4	25,7
Al—Mg—Si 97% Al, 1% Mg, 1 % Si 1% Mn	2700,0	0,213	152,0	26,6
Свинец	11400,0	0,031	29,8	8,6
Железо чистое	7900,0	0,108	62,5	7,3
Сварочное железо C<0,50%	7850,0	0,11	50,6	5,9
Чугун, C≈4%	7270,0	0,10	44,60	6,19
Сталь, $C_{макс}$≈1,5%				
Углеродистая сталь:				
C≈0,5%	7830,0	0,111	46,10	5,3
1,0%	7800,0	0,113	37,20	4,2
1,5%	7750,0	0,116	31,50	3,49
Никелевая сталь, Ni≈0%	7890,0	0,108	62,50	7,29
10%	7960,0	0,11	22,30	2,59
20%	7990,0	0,11	16,37	1,90
30%	8069,0	0,11	10,42	1,10
40%	8170,0	0,11	8,9	1,00
50%	8261,0	0,11	11,90	1,30
60%	8370,0	0,11	16,37	1,69
70%	8500,0	0,11	22,32	2,40
80%	8610,0	0,11	29,80	3,20
90%	8760,0	0,11	40,20	4,20
100%	8900,0	0,106	77,40	3,29
Инвар, Ni=36%	8130,0	0,11	9,23	1,00
Хромовая сталь, Cr=0%	7890,0	0,108	62,50	7,29
1%	7860,0	0,11	52,10	6,00
2%	7860,0	0,11	44,60	5,20
5%	7830,0	0,11	34,20	4,00
10%	7780,0	0,11	26,80	3,20
20%	7690,0	0,11	19,34	2,40
30%	7620,0	0,11	16,40	1,90

МЕТРЫ МЕТАЛЛОВ

Коэффициент теплопроводности, *ккал/м·ч·град*									
—100° С	0° С	100° С	200° С	300° С	400° С	600° С	800° С	1 000° С	1 200° С
199,4	196,4	196,4	196,4	196,4					
108,6	136,9	156,2	166,7						
80,35	93,7	108,6	122,0						
128,0	140,0	150,0	159,0						
102,7	118,0	124,0	131,0	138,4					
123,5	135,4	144,0	150,3	153,0					
	150,3	162,2	176,0						
31,7	30,2	28,7	27,1	25,6					
74,4	62,5	58,0	53,6	47,6	41,7	34,2	31,25	29,8	31,35
	50,6	49,1	44,6	41,7	38,7	31,25	28,3	28,3	28,3
	47,62	44,64	41,70	38,70	35,70	29,76	26,80	25,30	26,80
	37,20	37,20	35,70	34,20	31,30	28,30	25,30	23,80	25,30
	31,25	31,25	31,25	30,00	28,30	26,80	23,80	23,80	25,30
74,40	62,50	58,03	53,60	47,60	41,70	34,20	31,30	29,80	31,30
	53,60	47,60	44,60	40,20	35,70	31,30	28,30	28,30	
	46,10	41,70	38,70	35,70	35,70	28,30	26,80	26,80	
	34,22	32,74	31,30	31,30	28,30	25,30	25,30	25,30	25,30
	26,80	26,80	26,80	25,30	25,30	23,80	23,80	25,30	
	19,30	19,30	19,30	19,30	20,80	20,80	22,30	25,30	

Металлы	При 20° С			
	ρ_1, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	λ, ккал/м·ч·град	$a \cdot 10^2$, м²/ч
Cr—Ni хромоникелевая сталь				
15% Cr, 10% Ni	7860,0	0,11	16,40	1,90
18% Cr, 8% Ni (V2A)	7810,0	0,11	14,00	1,60
20% Cr, 15% Ni	7830,0	0,11	13,00	1,50
25% Cr, 20% Ni	7860,0	0,11	11,00	1,30
Ni—Cr никель-хромовая сталь				
80% Ni, 15% Cr	8500,0	0,11	14,90	1,60
60% Ni, 15% Cr	8300,0	0,11	11,00	1,20
40% Ni, 15% Cr	8070,0	0,11	10,00	1,10
20% Ni, 15% Cr	7860,0	0,11	12,10	1,40
6% Cr, 1,5% Al, 0,5% Si (сихромаль 8)	7720,0	0,117	19,30	2,20
24% Cr, 2,5% Al, 0,5% Si (сихромаль 12)	7670,0	0,118	16,40	1,80
Марганцовая сталь:				
Mn=0%	7890,0	0,118	62,50	7,30
1%	7860,0	0,11	43,20	5,00
2%	7860,0	0,11	32,70	3,50
5%	7850,0	0,11	19,30	2,30
10%	7800,0	0,11	14,90	1,80
Вольфрамовая сталь				
W=0%	7890,0	0,108	62,50	7,30
1%	7910,0	0,107	50,50	6,69
2%	7960,0	0,106	53,60	6,29
5%	8070,0	0,104	46,20	5,49
10%	8310,0	0,100	41,70	4,99
20%	8800,0	0,093	37,20	4,50
Кремнистая сталь Si=0%	7890,0	0,108	62,50	7,29
0%	7760,0	0,11	35,70	4,19
1%	7670,0	0,11	26,80	3,20
2%	7400,0	0,11	16,40	2,00
5%	8950,0	0,092	332,00	40,40
Медь чистая				
Алюминиевая бронза 95% Cu; 5% Al	8660,0	0,098	71,40	8,39
Бронза, 75% Cu; 25% Sn	8660,0	0,082	22,30	3,10
Красная латунь 85% Cu; 9% Sn; 6% Zn	8710,0	0,092	52,00	6,49
Латунь, 70% Cu; 30% Zn	8520,0	0,092	95,20	12,30
Нейзильбер 62% Cu; 15% Ni; 22% Zn	8613,0	0,094	21,43	2,69
Константан, 60% Cu, 40% Ni	8820,0	0,098	19,49	2,20
Магний чистый	1745,0	0,242	147,0	35,00
Mg—Al (электролит)				

Коэффициент теплопроводности, *ккал/м·ч·град*									
—100° С	0° С	100° С	200° С	300° С	400° С	600° С	800° С	1 000° С	1 200° С
	13,99	14,90	14,90	16,40	16,40	19,30	22,30	26,80	
	12,10	20,00	20,00	14,00	14,90	16,40	19,30		
	32,70	31,30	31,30	31,30	30,00	28,30	28,30		
	53,60	50,60	46,10	41,70	38,70	31,30			
350,00	332,00	326,00	321,00		313,00	304,00			
	50,60	61,00							
75,90		111,00	123,50	126,50	126,50				
16,30		26,80	38,70	38,70	41,70				
17,70		19,10	22,30						
153,00	147,00	144,00	140,00	135,00					

Металлы	При 20° С			
	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	λ, ккал/м·ч·град	$a \cdot 10^2$, м²/ч
6—8% Al; 1—2% Zn	1810,0	0,24	56,50	13,00
Mg—Mn; 2% Mn	1809,0	0,24	98,20	23,00
Молибден	10214,0	0,06	118,0	19,3
Никель:				
чистый (99,9%)	8900,0	0,11	77,4	8,20
нечистый (99,2%)	8900,0	0,11	59,5	6,29
Ni—Cr, 90% Ni; 10% Cr	8660,0	0,11	14,9	1,60
80% Ni; 20% Cr	8310,0	0,11	10,9	1,20
Серебро:				
высокоочищенное	10520,0	0,06	360,0	61,30
чистое (99,9%)	10520,0	0,06	350,0	59,6
Вольфрам	19300,0	0,03	140,0	22,6
Цинк чистый	7140,0	0,092	96,4	14,8
Олово чистое	7300,0	0,054	55,1	14,0

поэтому для данной температуры они обратно пропорциональны давлению. Таким образом, данные о свойствах для других условий в области идеального газа можно получить из данных, приведенных в таблице.

Тепловые свойства и свойства переноса для газовых смесей требуют специального рассмотрения. К свойствам, представляющим собой первостепенный интерес, относятся плотность, удельная теплоемкость, вязкость и теплопроводность бинарных газовых смесей. Плотность смеси и удельную теплоемкость для нереактивных смесей можно легко определить по свойствам компонентов. Например, удельная теплоемкость такой смеси выражается таким образом:

$$c_{pm} = wc_{p_1} + (1 - w)\, c_{p_2},$$

где w — массовая доля компонента *1*. Большую трудность представляет вычисление теплопроводности и вязкости. В процессе вычисления этих значений в виде простого отношения или в виде средних молярных величин компонентов могут получиться совершенно неудовлетворительные результаты по сравнению с экспериментальными данными. К счастью, существуют достаточно простые методы вычисления, зависящие от знания свойств чистых компонентов, позволяющие получить довольно точные результаты.

Вилке [Л.308] предлагает следующее выражение для вязкости бинарной смеси газов:

$$\mu_m = \frac{\mu_1}{1 + (x_2/x_1)\,\Phi_{12}} + \frac{\mu_2}{1 + (x_1/x_2)\,\Phi_{21}},$$

где

$$\Phi_{ij} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_j)^{1/2}\,(M_j/M_i)^{1/4}]^2}{(4\sqrt{2})\,[1 + (M_i/M_j)]^{1/2}}.$$

Коэффициент теплопроводности, *ккал/м·ч·град*									
—100° С	0° С	100° С	200° С	300° С	400° С	600° С	800° С	1 000° С	1 200° С
	44,60	53,60	64,00	74,40					
80,40	95,20	107,10	112,0						
119,0	118,0	118,0							
89,3	80,40	71,40	62,50	55,10	50,50				
	59,5	55,1	50,6	47,6	44,6	47,6	53,6	58,0	59,5
	14,7	16,2	18,0	19,6	21,1				
	10,6	11,9	13,4	14,70	16,2	19,3			
360,0	359,0	357,0	354,0						
360,0	353,0	357,0	321,0	310,0	310,0				
	143,0	129,0	122,0	115,0	109,0	97,0	65,5		
98,2	96,7	93,7	90,8	86,3	80,3				
64,00	56,7	50,6	49,1						

Здесь M_i и M_j — молекулярные веса компонентов чистых газов;
x_1 и x_2 — молярные доли;
μ_i и μ_j — вязкости чистых компонентов.

Линдсей и Бромлей [Л. 309] предлагают метод, основанный на методе вычисления Васильевой [Л.310] для теплопроводностей, который является вполне удовлетворительным:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1}{1 + A_1 (x_2/x_1)} + \frac{\lambda_2}{1 + A_2 (x_1/x_2)},$$

где постоянные Васильевой A_1 и A_2 равны:

$$A_1 = \frac{1}{4}\left\{1 + \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{3/4}\frac{1 + (s_1/T)}{1 + (s_2/T)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \frac{1 + (s_{12}/T)}{1 + (s_1/T)};$$

$$A_2 = \frac{1}{4}\left\{1 + \left[\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{3/4}\frac{1 + (s_2/T)}{1 + (s_1/T)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \frac{1 + (s_{12}/T)}{1 + (s_2/T)},$$

где μ — вязкость чистого компонента;
M — молекулярный вес;
T — абсолютная температура, ° К;
s — константа Сатерлэнда;
$s_{12} = \sqrt{s_1 s_2}$, за исключением газов, содержащих водяной пар или аммиак; в этом случае $s_{12} = 0{,}733\sqrt{s_1 s_2}$.

Там, где, например, неприемлемы константы Сатерлэнда, рекомендуется $s = 1{,}5\ T_B$ *. В результате смешения двух газов с различными

* T_B — нормальная температура кипения рассматриваемого компонента.

ТАБЛИЦА П-2

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ
(коэффициент теплопроводности λ, *ккал/м·ч·град* [Л. 395])

Материал	Состояние или состав	—170° С	—160° С	—150° С	—125° С	—100° С	—75° С	—50° С	—25° С	0° С	18° С
Медь	Чистая, мягкая, очищенная	402	390	379	360	351	345	339	336	333	330
Серебро	Чистое 0,999	359	360	360	381	363	362	360	360	354	351
Цинк	Высокоочищенный	101	100	99,5	97,3	97,6	96,9	96,9	96,9	96,9	96,9
Кадмий	„	86,5	86,2	85,7	84,2	83,2	81,8	81,1	80,1	78,9	78,1
Алюминий	0,99Al	189	185	183	177	177	177	179	180	180	182
Олово	Чистое, литье	70,2	69,2	68,1	65,6	63,4	61,9	60,4	59,1	57,7	56,5
Свинец	Чистый	33,5	33,2	32,7	32,1	31;4	30,7	30,7	30,2	30,2	29,9
Железо	0,994Fe; 0,0015Mn; 0,0013Ni; 0,003C	54,5	54,8	55,1	55,5	54,8	54,0	53,3	53,0	53,0	53,0
Никель	0,99Ni	46,1	46,4	46,7	47,5	48,2	49,0	49,4	50,0	50,4	50,4
Сталь	Приблизительно 0,01C	40,8	40,8	40,8	40,8	41,1	41,4	41,8	41,8	41,8	41,4
Латунь	0,7Cu; 0,3Zn	63,1	65,2	67,0	72,0	76,8	80,9	84,7	87,9	91,5	93,6
Мельхиор	0,62Cu; 0,15Ni; 0,22 Zn	15,2	15,5	15,9	16,2	17,0	17,7	18,5	19,5	20,2	21,3
Манганин	0,87Cu; 0,04Ni; 0,12Mn	12,3	12,6	12,6	13,3	14,1	14,8	15,5	16,5	18,0	18,7
Сплав Линовица	0,50Bi; 0,25Pb; 0,14Sn; 0,11Cd	15,3	15,3	15,3	15,3	15,3	15,5	15,5	15,9	15,9	15,9

ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ НА ЛИНИИ НАСЫЩЕНИЯ

t, °C	ρ_1, кг/м³	C_p, ккал/кг·град	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr	β, $\frac{1}{°K}$
			Вода (H_2O)				
0	101,7	1,0074	$1{,}788 \cdot 10^{-6}$	0,475	$4{,}71 \cdot 10$	13,6	0,18
20	999,98	0,9988	1,006	0,514	5,15	7,02	$0{,}18 \cdot 10$
40	994,06	0,9980	0,658	0,540	5,44	4,34	
60	984,94	0,9994	0,478	0,560	5,59	3,02	
80	973,57	1,0023	0,364	0,574	5,89	2,22	
100	960,12	1,0070	0,294	0,585	6,05	1,74	
120	944,75	1,015	0,247	0,589	6,15	1,446	
140	927,78	1,023	0,214	0,588	6,21	1,241	
160	909,21	1,037	0,190	0,585	6,22	1,099	
180	888,56	1,055	0,173	0,580	6,21	1,004	
200	866,30	1,076	0,160	0,571	6,14	0,937	
220	841,97	1,101	0,150	0,561	6,05	0,891	
240	815,23	1,136	0,143	0,546	5,90	0,871	
260	785,45	1,182	0,138	0,525	5,68	0,874	
280	752,15	1,244	0,135	0,499	5,33	0,910	
300	713,89	1,368	0,135	0,464	4,77	1,019	
			Аммиак (NH_3)				
—47,5	703,3	1,066	$0{,}435 \cdot 10^{-6}$	0,470	$6{,}27 \cdot 10^{-4}$	2,60	
—40	691,3	1,067	0,406	0,470	6,39	2,28	
—30	679,0	1,069	0,387	0,472	6,48	2,15	
—20	666,3	1,077	0,381	0,470	6,55	2,09	
—10	653,2	1,090	0,378	0,467	6,57	2,07	
0	639,8	1,107	0,374	0,464	6,55	2,05	

Продолжение табл. П-3

t, °C	ρ_1, *кг/м³*	c_p, *ккал/кг·град*	ν, *м²/сек*	λ, *ккал/м·ч·град*	a, *м²/ч*	Pr	β, $\frac{1}{°K}$
10	625,8	1,126	0,368	0,457	6,48	2,04	
20	611,4	1,146	0,359	0,448	6,39	2,02	$2{,}44 \cdot 10^{-3}$
30	596,1	1 168	0,349	0,436	6,27	2,01	
40	508,7	1,194	0,340	0,424	6,12	2,00	
50	564,0	1,222	0,330	0,409	5,96	1,99	
			Углекислота (CO_2)				
—47,5	1155,8	0,44	$0{,}119 \cdot 10^{-6}$	0,0735	$1{,}45 \cdot 10^{-4}$	2,96	
—40	1117,2	0,45	0,118	0,0869	1,73	2,46	
—30	1076,2	0,47	0,117	0,0960	1,90	2,22	
—20	1031,8	0,49	0,115	0,0990	1,96	2,12	
—10	982,9	0,52	0,113	0,0945	1,85	2,30	
0	926,5	0,59	0,109	0,0899	1,65	2,28	
10	859,6	0,75	0,101	0,0835	1,30	2,80	
20	772,2	1,2	0,099	0,0750	0,80	4,10	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$
30	597,5	8,7	0,080	0,0604	0,10	28,7	
			Сернистый ангидрид (SO_2)				
—47,5	1560,0	0,3247	$0{,}484 \cdot 10^{-6}$	0,208	$4{,}11 \cdot 10^{-4}$	4,24	
—40	1536,0	0,3250	0,424	0,202	4,07	3,76	
—30	1511,8	0,3252	0,371	0,198	4,02	3,31	
—20	1487,8	0,3254	0,324	0,193	3,99	2,93	
—10	1462,8	0,3255	0,288	0,188	3,95	2,62	
0	1437,7	0,3257	$0{,}257 \cdot 10^{-6}$	0,182	$3{,}89 \cdot 10^{-4}$	2,38	
10	1411,8	0,3259	0,232	0,176	3,84	2,18	
20	1385,7	0,3261	0,21	0,171	3,78	2,00	$1{,}93 \cdot 10^{-3}$
30	1358,0	0,3263	0,190	0,165	3,73	1,83	
40	1328,5	0,3266	0,171	0,159	3,67	1,70	
50	1298,4	0,3268	0,161	0,152	3,60	1,61	

Продолжение табл. П-3

t, °C	ρ_1, кг/м³	C_p, ккал/кг·град	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr	β, $\frac{1}{°K}$
Хлорметан (CH_3Cl)							
	1052,0	0,3525	$0{,}320\cdot10^{-6}$	0,185	$4{,}97\cdot10^{-4}$	2,31	
	1032,8	0,3541	0,318	0,180	4,92	2,32	
	1016,0	0,3574	0,314	0,174	4,81	2,35	
—20	9	0,3593	0,309	0,168	4,68	2,38	
—10	9	0,3629	0,306	0,161	4,52	2,43	
0	961,9	0,3673	0,302	0,153	4,37	2,49	
10	941,9	0,3726	0,297	0,147	4,20	2,55	
20	922,8	0,3788	0,293	0,140	4,00	2,63	
30	902,6	0,3860	0,288	0,132	3,81	2,72	
40	882,6	0,3942	0,282	0,124	3,59	2,83	
50	860,7	0,4034	0,274	0,115	3,32	2,97	
Фреон-12							
—47,5	1545,9	0,2090	$0{,}310\cdot10^{-6}$	0,0580	$1{,}80\cdot10^{-4}$	6,2	
—40	1517,9	0,2113	0,279	0,0595	1,85	5,4	
—30	1488,8	0,2139	0,253	0,0595	1,90	4,8	
—20	1459,8	0,2167	0,235	0,0610	1,94	4,4	
—10	1428,7	0,2198	0,221	0,0625	1,98	4,0	
0	1396,7	0,2232	0,214	0,0625	2,01	3,8	
10	1363,6	0,2268	0,204	0,0625	2,02	3,6	
20	1329,5	0,2307	0,198	0,0625	2,02	3,5	
30	1294,4	0,2349	0,194	0,0610	2,02	3,5	
40	1256,5	0,2393	0,192	0,0595	2,00	3,5	
50	1215,3	0,2440	0,190	0,0580	1,96	3,5	

Продолжение табл. П-3

t, °C	ρ_1, кг/м³	c_1, ккал/кг·град	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr	β, $\frac{1}{°K}$
Эвтектический раствор хлористого кальция (29,9% $CaCl_2$)							
		,623	$36{,}35\cdot10^{-6}$	0,345	$4{,}20\cdot10^{-4}$	312	
—47,5	1313,1	,630	25,97	0,357	4,32	208	
—40	1314,3	,636	18,18	0,369	4,44	139	
—30	1309,5	,642	12,25	0,382	4,56	87,1	
—20	1304,8	,648	6,96	0,394	4,68	53,6	
—10	1300,0	,654	4,39	0,406	4,79	33,0	
0	1295,4	,660	3,36	0,417	4,91	24,6	
10	1290,7	0,666	2,74	0,429	5,02	19,6	
20	1285,9	0,672	2,31	0,439	5,11	16,0	
30	1281,3	0,678	1,98	0,449	5,20	13,3	
40	1276,5	0,685	1,71	0,460	5,29	11,3	
50	127						
Глицерин $[C_3H_5(OH)_3]$							
0	1275,4	0,540	$0{,}0831\cdot10^{-6}$	0,243	$3{,}54\cdot10^{-4}$	84,7	
10	1269,4	0,554	0,0300	0,244	3,47	31,0	$0{,}504\cdot10^{-3}$
20	1263,3	0,570	0,0128	0,246	3,41	12,5	
30	1257,4	0,584	0,0050	0,246	3,35	5,38	
40	1251,3	0,600	0,0022	0,246	3,29	2,45	
50	1244,3	0,617	0,0015	0,247	3,22	1,63	

Продолжение табл. П-3

t, °C	ρ_1, *кг/м³*	c_p, *ккал/кг·град*	ν, *м²/сек*	λ, *ккал/м·ч·град*	a, *м²/ч*	Pr	β, $\frac{1}{°K}$
			Этиленгликоль $[C_2H_4(OH)_2]$				
0	1130,1	0,548	$57{,}52\cdot10^{-6}$	0,208	$3{,}36\cdot10^{-4}$	615	
20	116,1	0,569	19,17	0,214	3,38	204	$0{,}63\cdot10^{-3}$
40	1100,8	0,591	8,69	0,220	3,38	93	
60	1087,1	0,612	4,75	0,224	3,35	51	
80	1077,0	0,633	2,98	0,225	3,32	32,4	
100	1057,9	0,655	2,03	0,226	3,27	22,4	
			Машинное масло (неиспользованное)				
0	898,6	0,429	$0{,}0428\cdot10^{-6}$	0,126	$3{,}28\cdot10^{-4}$	47 100	
20	887,6	0,449	0,0090	0,125	3,14	10 400	$0{,}70\cdot10^{-3}$
40	875,6	0,469	0,0024	0,124	3,00	2 870	
60	863,6	0,489	$0{,}839\cdot10^{-4}$	0,121	2,88	1 050	
80	851,6	0,509	0,375	0,119	2,77	490	
100	839,6	0,530	0,203	0,118	2,66	276	
120	828,5	0,551	0,124	0,116	2,55	175	
140	816,5	0,572	0,080	0,115	2,7	116	
160	805,5	0,593	0,056	0,113	2,39	84	
			Ртуть				
0	13621	0,0335	$0{,}124\cdot10^{-6}$	7,05	$154{,}8\cdot10^{-4}$	0,0288	
20	13572	0,0333	0,114	7,47	165,8	0,0249	$1{,}82\cdot10^{-3}$
50	13515	0,0331	0,104	8,08	180,9	0,0207	
100	13477	0,0328	0,093	9,03	205,8	0,0162	
150	13257	0,0326	0,085	9,88	228,7	0,0134	
200	13118	0,0375	0,080	10,61	248,7	0,0116	
250	13019	0,0324	0,076	11,23	266,6	0,0103	

ТАБЛИЦА П-4

ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ГАЗОВ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

t, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг·сек/м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
			Воздух				
—173	3,601	0,2452	$0,6924 \cdot 10^{-5}$	$0,1923 \cdot 10^{-5}$	0,007949	0,009003	0,770
—123	2,368	0,2412	1,028	0,4343	0,01181	0,02068	0,753
— 73	1,769	0,2403	1,329	0,7490	0,01555	0,03659	0,739
— 23	1,413	0,2401	1,598	0,9494	0,01915	0,04738	0,722
— 27	1,177	0,2402	1,847	1,568	0,02256	0,07977	0,708
77	0,9980	0,2410	2,074	2,079	0,02582	0,1074	0,697
127	0,8827	0,2422	2,286	2,590	0,02893	0,1354	0,689
177	0,7834	0,2438	2,483	2,885	0,03187	0,1520	0,683
227	0,7049	0,2459	2,671	3,790	0,3471	0,2003	0,680
277	0,6724	0,2482	2,848	4,434	0,03748	0,2351	0,680
327	0,5879	0,2520	3,018	5,134	0,04006	0,2704	0,680
377	0,5431	0,2540	3,177	5,851	0,4259	0,3088	0,682
427	0,5030	0,2568	3,332	6,625	0,4497	0,3482	0,684
477	0,4710	0,2593	3,480	7,391	0,04736	0,3878	0,686
577	0,4405	0,2622	3,625	8,229	0,4968	0,4302	0,689
627	0,4149	0,2650	3,765	9,074	0,05183	0,4715	0,692
677	0,3925	0,2678	3,899	9,931	0,05398	0,5137	0,696
727	0,3717	0,2704	4,022	10,82	0,05610	0,5583	0,699
827	0,3524	0,2727	4,152	11,78	0,05805	0,6040	0,702
927	0,3204	0,2772	4,397	13,73	0,06217	0,7001	0,706
1 027	0,2948	0,2815	4,626	15,70	0,06562	0,7909	0,714
1 127	0,2707	0,2860	4,848	17,91	0,06906	0,8920	0,722
1 227	0,2515	0,2900	5,056	20,10	0,07261	0,9958	0,726
1 327	0,2355	0,2939	5,257	22,32	0,07586	1,096	0,734
1 427	0,2211	0,2982	5,458	24,69	0,07958	1,196	0,741

Продолжение табл. П-4

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг/сек·м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
—173	0,2083	0,3028	5,642	27,10	0,8258	1,300	0,749
—123	0,1970	0,3075	5,826	29,57	0,08556	1,402	0,759
— 73	0,1858	0,3128	5,995	32,25	0,08794	1,523	0,767
— 7	0,1762	0,3196	6,202	35,19	0,09107	1,617	0,783
7	0,1682	0,3278	6,400	38,08	0,09404	1,706	0,803
27	0,1602	0,3390	6,544	40,86	0,09612	1,770	0,831
127	0,1538	0,3541	6,715	43,67	0,09865	1,822	0,863
227	0,1458	0,3759	6,861	47,09	0,1013	1,850	0,916
293	0,1394	0,4031	7,068	50,72	0,1055	1,877	0,972

Гелий

—271		1,242	$8,422 \cdot 10^{-7}$		0,009077		
—240	1,466	1,242	50,14	$0,3419 \cdot 10^{-5}$	0,03036	0,01665	0,74
—129		1,242	125,4	3,711	0,07976	0,1899	0,70
— 73	0,2435	1,242	156,5	6,438	0,1012	0,3343	0,69
— 18	0,1906	1,242	181,7	9,550	0,1167	0,4923	0,70
93	0,1328	1,242	230,5	17,36	0,1454	0,8816	0,71
204	0,1020	1,242	275,0	26,93	0,1696	1,338	0,72
316	0,8282	1,242	311,3	37,58	0,1934	1,877	0,72
427	0,07033	1,242	347,4	49,41	0,2158	2,398	0,72
538	0,06024	1,242	381,7	63,40	0,2366	3,158	0,72
649	0,05287	1,242	413,5	78,13	0,2559	3,900	0,72

Продолжение табл. П-4

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг/сек·м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
			Водород				
—243	0,8473	2,589	$1{,}606 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1895 \cdot 10^{-5}$	0,01964	0,008973	0,759
—223	0,5096	2,508	2,516	0,4880	0,03110	0,02433	0,721
—173	0,2457	2,682	4,211	1,714	0,05714	0,08666	0,712
—123	0,1637	3,010	5,595	3,418	0,08437	0,1708	0,718
— 73	0,1227	3,234	6,812	5,553	0,1103	0,2777	0,719
— 23	0,09820	3,358	7,918	8,064	0,1342	0,4068	0,713
27	0,08186	3,419	8,962	10,95	0,1562	0,5684	0,706
77	0,07017	3,448	9,953	14,19	0,1771	0,7310	0,697
127	0,06136	3,461	10,86	17,71	0,1964	0,9242	0,690
177	0,05463	3,463	11,78	21,56	0,2158	1,139	0,682
227	0,04918	3,465	12,63	25,70	0,2336	1,374	0,675
277	0,04470	3,471	13,47	30,16	0,2515	1,626	0,668
327	0,04085	3,472	14,28	34,97	0,2708	1,910	0,664
427	0,03492	3,481	15,89	45,51	0,3021	2,485	0,659
627	0,03060	3,505	17,39	56,85	0,3303	3,082	0,664
677							
727	0,02723	3,540	18,78	69,02	0,3541	3,678	0,676
827	0,02451	3,575	20,16	82,22	0,3780	4,319	0,686
927	0,02227	3,622	21,46	96,52	0,3988	4,941	0,703
1 027	0,02051	3,670	22,75	110,7	0,4196	5,574	0,715
1 127	0,01890	3,720	24,08	127,3	0,4404	6,261	0,733
1 227	0,01842	3,735	24,43	132,8	0,4464	6,484	0,736
1 327							

Продолжение табл. 11.1

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг/сек·м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
			Кислород				
—173	3,992	0,2264	$7{,}767 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1946 \cdot 10^{-5}$	0,007767	0,008595	0,815
—123	2,619	0,2192	11,49	0,4387	0,01176	0,02048	0,773
— 73	1,956	0,2181	14,85	0,7593	0,01568	0,03677	0,745
— 23	1,562	0,2187	17,87	1,145	0,01942	0,05685	0,725
27	1,301	0,2198	20,62	1,568	0,22300	0,08047	0,709
77	1,113	0,2219	23,15	2,080	0,02640	0,1068	0,702
127	0,9756	0,2250	25,53	2,618	0,02976	0,1356	0,695
177	0,8683	0,2285	27,77	3,199	0,03291	0,1659	0,694
227	0,7802	0,2322	29,91	3,834	0,03588	0,1981	0,697
277	0,7097	0,2360	31,96	4,505	0,03884	0,2319	0,700
327	0,6504	0,2399	33,91	5,214	0,04154	0,2663	0,704
			Азот				
—173	3,481	0,2561	$6{,}861 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1971 \cdot 10^{-5}$	0,008124	0,009114	0,786
— 73	1,711	0,2491	12,95	0,7568	0,01568	0,03681	0,747
27	1,142	0,2486	17,84	1,563	0,02253	0,07936	0,713
127	0,8539	0,2498	21,98	2,574	0,02867	0,1344	0,691
227	0,6825	0,2521	25,70	3,766	0,03425	0,1991	0,684
327	0,5687	0,2569	29,11	5,119	0,03937	0,2695	0,686
427	0,4934	0,2620	32,13	6,512	0,04404	0,3408	0,691
527	0,4277	0,2681	34,83	8,145	0,04823	0,4207	0,700
627	0,3797	0,2738	37,48	9,106	0,05218	0,5020	0,711
727	0,3412	0,2789	40,00	11,72	0,05567	0,5850	0,724
827	0,3108	0,2832	42,27	13,60	0,05890	0,6693	0,736
927	0,2852	0,2875	44,49	15,61	0,06177	0,7535	0,748

Продолжение табл. П-4

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг/сек·м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
			Углекислый газ				
—53	2,473	0,187	$11,10 \cdot 10^{-6}$	$0,4490 \cdot 10^{-5}$	0,009290	0,02131	0,818
—23	2,116	0,192	12,59	0,5813	0,01108	0,02664	0,793
27	1,797	0,208	14,96	0,8321	0,01425	0,03812	0,770
77	1,536	0,215	17,20	1,119	0,01760	0,05331	0,755
127	1,342	0,225	19,32	1,439	0,02116	0,07007	0,738
177	1,192	0,234	21,34	1,790	0,02491	0,08932	0,721
227	1,073	0,242	23,26	2,167	0,02882	0,1110	0,702
277	0,9740	0,250	25,07	2,574	0,03286	0,1350	0,685
327	0,8939	0,257	26,83	3,002	0,03707	0,1614	0,668
			Окись углерода				
—53	1,554	0,2491	$13,83 \cdot 10^{-6}$	$0,8903 \cdot 10^{-5}$	0,01638	0,04233	0,750
27	1,139	0,2489	17,85	1,567	0,02171	0,07661	0,737
77	0,9743	0,2492	20,10	2,062	0,02479	0,1021	0,728
127	0,8537	0,2504	22,20	2,599	0,02774	0,1298	0,722
177	0,7585	0,2520	24,19	3,188	0,03750	0,1598	0,718
227	0,6823	0,2540	26,07	3,819	0,03321	0,1917	0,718
277	0,6203	0,2569	27,90	4,496	0,03579	0,2246	0,721
327	0,5685	0,2598	29,61	5,206	0,03823	0,2588	0,724

Продолжение табл. П-4

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	μ, кг/сек·м	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
			Аммиак				
—50	0,3829	0,525	$7{,}255 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1895 \cdot 10^{-4}$	0,01473	0,07395	0,93
0	0,7930	0,520	9,353	0,1180	0,01890	0,04710	0,90
50	0,6488	0,520	11,03	0,1700	0,02321	0,06912	0,88
100	0,5591	0,534	12,89	0,2304	0,02812	0,09429	0,87
150	0,4934	0,553	14,67	0,2973	0,03363	0,1236	0,87
200	0,4405	0,572	16,50	0,3744	0,04018	0,1591	0,84
			Пар (H_2O)				
107	0,5863	0,492	$12{,}73 \cdot 10^{-6}$	$0{,}2165 \cdot 10^{-4}$	0,02113	0,07330	1,060
127	0,5543	0,481	13,45	0,2425	0,02247	0,08417	1,040
177	0,4903	0,473	15,26	0,3112	0,02574	0,1106	1,010
227	0,4405	0,474	17,05	0,3865	0,02916	0,1393	0,996
277	0,4005	0,477	18,85	0,4701	0,03259	0,1709	0,991
327	0,3653	0,484	20,68	0,5658	0,03631	0,2062	0,986
377	0,3380	0,491	22,48	0,6642	0,03988	0,2397	0,995
427	0,3140	0,498	24,27	0,7720	0,04345	0,2778	1,000
477	0,2932	0,506	26,05	0,8881	0,04717	0,3177	1,005
527	0,2739	0,514	27,87	1,020	0,05089	0,3605	1,010
577	0,2579	0,522	29,70	1,152	0,05476	0,4069	1,019

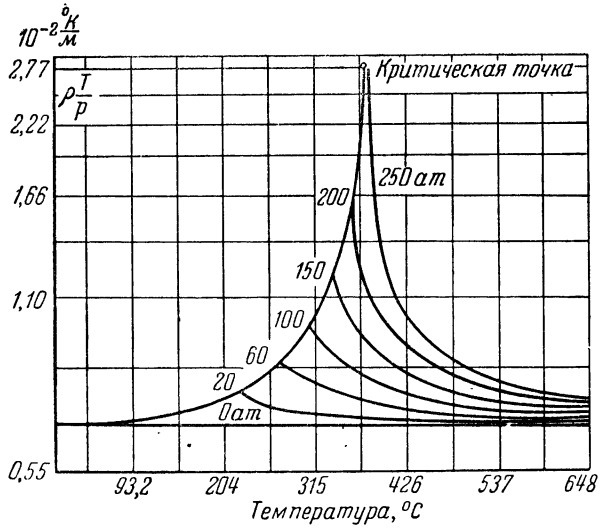


Рис. П-1. Зависимость плотности водяного пара от давления и температуры.

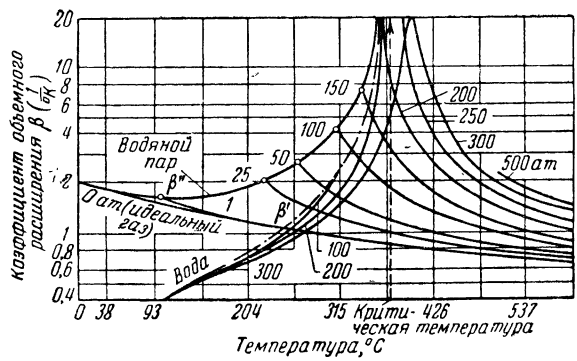


Рис. П-2. Коэффициент объемного расширения $\beta = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{dT}\right)_p$ воды и водяного пара.

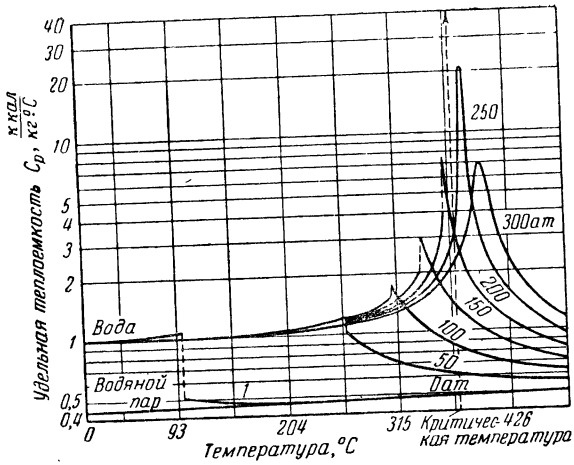


Рис. П-3. Удельная теплоемкость c_p воды и водяного пара при постоянном давлении.

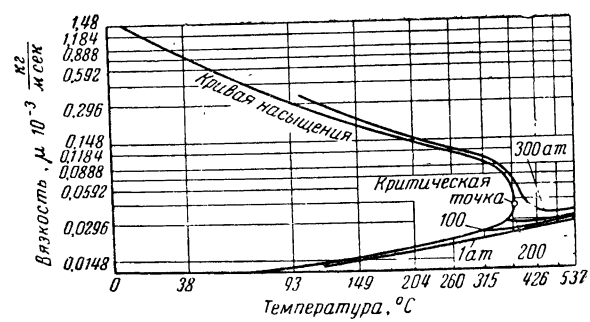


Рис. П-4. Динамическая вязкость μ воды и водяного пара.

молекулярными весами теплопроводность оказывается ниже вычисленной при помощи средних молярных. Ленуар [Л. 311] распространил вычисления, приведенные здесь, на многокомпонентные смеси и вычислил постоянные Васильевой по вышеуказанным уравнениям. Он также предлагает значения теплопроводности для многих применяемых в технике газов при атмосферном давлении.

Зависимость качественных показателей от давления и температуры в области, прилегающей к критическому состоянию, показана для воды на рис. П-1—П-8. Подобная зависимость существует для других материалов, и поэтому отклонение от значений, вычисленных для состояния идеального газа, можно, по крайней мере приближенно, определить по тому факту, что процентное изменение любой величины

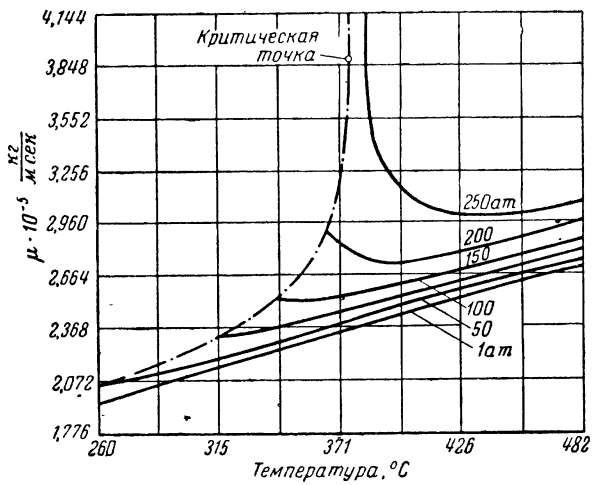


Рис. П-5. Коэффициент динамической вязкости μ водяного пара.

в области критического состояния является величиной одного и того же порядка для всех материалов при соответствующих расположениях по отношению к их критическому состоянию, т. е. равных значениях p/p_c и T/T_c, где p_c и T_c представляют собой соответственно критическое давление и критическую температуру. Рис. П-1—П-3 были сделаны по таблицам для пара, а рис. П-4 и П-5 — по замерам Сигварта [Л. 312] с некоторыми изменениями в области перегрева, для того чтобы привести эти величины в соответствие с другими измерениями. Рис. П-6 и П-7 заимствованы у Национального бюро стандартов (§ 564) и у Гранета и Гоулда [Л. 313]. Кривые, изображенные на рис. П-8, построены по данным других кривых.

В табл. П-5 сведены типичные данные о неметаллических веществах, взятые из различных источников, главным образом у Маркса («Справочник для инженера-механика») и Мак Адамса («Передача тепла»). В помощь табл. П-5 была составлена табл. П-6, в которой приводятся теплопроводности изоляционных материалов за пределами

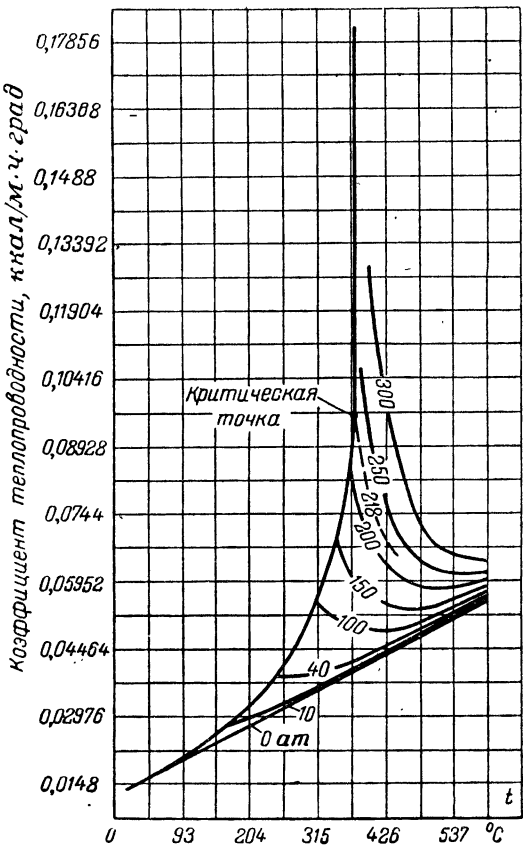


Рис. П-6. Зависимость теплопроводности λ водяного пара от давления и температуры (по данным Национального бюро стандартов [Л. 400].

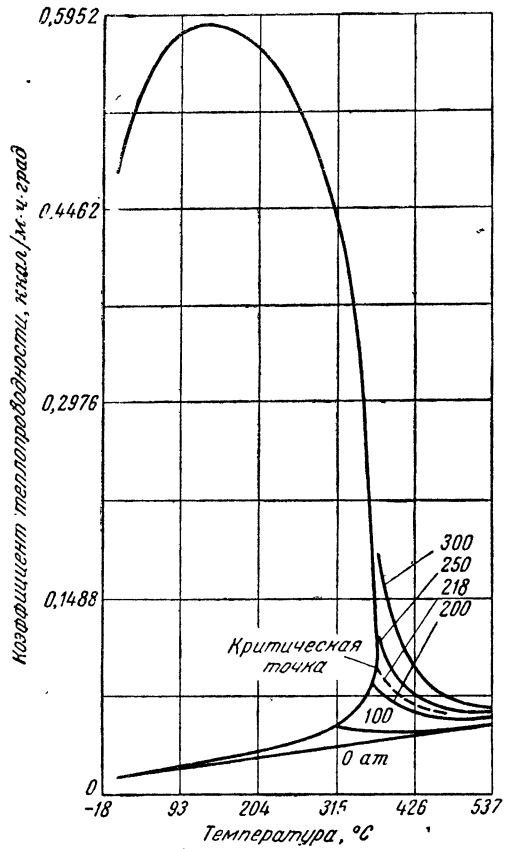


Рис. П-7. Теплопроводность λ воды и водяного пара в перегретом и насыщенном состояниях (по данным Тимрота и Варгафтика и Национального бюро стандартов) [Л. 400].

их обычной температуры. Эти данные также были взяты у Л. С. Маркса («Справочник для инженеров-механиков» [Л. 314]).

Табл. П-7, содержащая данные о свойствах некоторых расплавленных металлов, была составлена в связи с тем, что в современных системах, генерирующих энергию, расплавленные металлы находят большое применение. Данные, на основании которых составлена эта таблица, были взяты из справочника «Жидкие металлы» [Л. 315].

В табл. П-8 сведены данные о критических состояниях некоторых элементов и составов, имеющих важное значение с технической точки

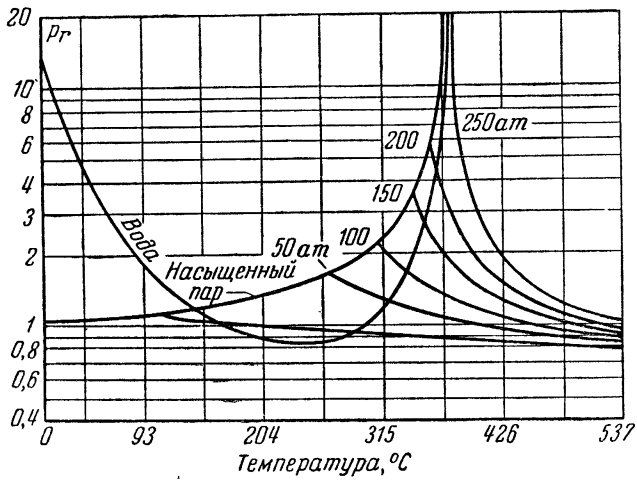


Рис. П-8. Зависимость числа Pr для воды и водяного пара от давления и температуры.

зрения. Эти данные заимствованы из «Справочника по химии и физике» [Л. 316].

В табл. П-9 помещены некоторые коэффициенты диффузии и соответствующие числа Шмидта. Добавочные данные, приведенные в ней, были взяты главным образом из «Справочника по химии и физике».

В табл. П-10 и П-11 сведены излучательные способности для теплового излучения источников, указанных в таблице. Обычно имеется расхождение между величинами излучательных способностей, полученными различными авторами, но приводимые здесь являются вполне надежными.

В табл. П-12 и П-13 помещены данные о поверхностном натяжении различных жидкостей, взятые из «Справочника по химии и физике».

ТАБЛИЦА П-5

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ НЕМЕТАЛЛОВ [Л. 396]

Материал	t, °С	ρ, *кг/м³*	c_p, *ккал/кг·град*	λ, *ккал/м·ч·град*	$a \cdot 10^4$, *м²/ч*
Асбест	120	136		0,019	
»	—200	469		0,064	
»	0	469		0,134	
»	0	576		0,130	
»	100	576		0,165	
»	200	576		0,179	
»	400	576		0,192	
»	—200	696		0,134	
»	0	696		0,200	
Кирпич сухой	20	176—208	0,20	0,33—0,49	10,2—12,0
Бакелит	20	1273,0	0,38	0,199	5,0
Картон волнистый	—	—	—	0,055	—
Глина	20	1457,0	0,21	1,000	36,0
Бетон	20	1905—2310	0,21	0,693—1,205	17,7—25,1
Уголь антрацит	20	1200—1505	0,30	0,223	4,6—5,6
Уголь порошкообразный	30	737,0	0,31	0,100	4,7
Хлопок	20	80,0	0,31	0,051	69,7
Пробка	30	1600,0	—	0,037	5,6—15,8

Продолжение табл. П-5

Материал	t, °С	ρ, *кг/м³*	c_p, *ккал/кг·град*	λ, *ккал/м·ч·град*	$a \cdot 10^4$, *м²/ч*
Пробка	20	44,8—118,5	0,45	0,031	
Пробковая крошка	30	150,0	—	0,037	
Диатомитовая земля	38	320,0	—	0,054	
Диатомитовая земля	870	320,0	—	0,122	5,0
Земля хрящеватая	20	2050,0	0,44	0,464	
Войлок шерстяной	30	330,0	—	0,046	
Фибровый картон изоляционный	21	237,0	—	0,042	
Фибра красная	20	1200,0	—	0,400	12,1
Стекло	20	2710,0	0,2	0,655	
Стеклянная вата	20	200,0	0,16	0,034	
Стекло боросиликатное	30	2230,0	—	0,937	10,2
Гранит	—	—	—	1,49—3,42	44,6
Лед	0	913,0	0,46	1,91	50,2
Мрамор	20	2500,0—2710,0	0,193	2,38	
Резина твердая	0	1200,0	0,17	0,130	38,1—45,5
Песчаник	20	2160,0—2310,0	0,33	1,40—1,79	15,8
Шелк	20	57,6	0,57	0,031	4,0—4,4
Дуб в радиальном направлении	20	60,8—80,1	—	0,15—0,18	
Сосна в радиальном направлении (20% влажности)	20	41,6—42,1	0,65	0,120	4,5

ТАБЛИЦА П-6

ИЗМЕНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ТЕМПЕРАТУРОЙ, *ккал/м·ч·град* [Л. 397]

Материал	Средняя температура, °С										Предельная температура, °С
	38	93	149	204	260	315	426	537	815	1 092	
Асбест слоистый картон	0,144	0,164	0,174	0,180	0,183	0,186	0,193				
40 слоев/дюйм	0,049	0,055	0,060	0,065	0,071						371
20 слоев/дюйм	0,067	0,074	0,082	0,089	0,097						260
Волнистый асбест	0,074	0,086	0,103								149
Магнезия 85%	0,051	0,054	0,057	0,060							315
Инфузорная земля, асбестовый камень	0,067	0,070	0,073	0,074	0,079	0,082	0,089	0,097			870
Кирпич из инфузорной земли	0,080	0,083	0,086	0,089	0,094	0,097	0,103	0,109			870
То же	0,189	0,193	0,198	0,204	0,208	0,213	0,223	0,235	0,262		1 092
» »	0,190	0,195	0,201	0,207	0,213	0,220	0,231	0,243	0,272	0,302	1 070
Порошок из инфузорной земли	0,058	0,062	0,065	0,071	0,076	0,080	0,091	0,101			
Воск	0,045	0,051	0,058	0,065	0,074	0,085					

ТАБЛИЦА П-7

СВОЙСТВА ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ [Л. 398]

Металлы, состав и точка плавления	t, °С	ρ, кг/м³	c_p, ккал/кг·град	ν, м²/сек	λ, ккал/м·ч·град	a, м²/ч	Pr
1	2	3	4	5	6	7	8
Висмут (271° С)	315	10 012	0,0345	$0{,}162\cdot10^{-6}$	14,1	$4{,}10\cdot10^{-2}$	0,0142
	537	9 740	0,0369	0,113	13,4	3,73	0,0110
	759	9 468	0,0393	0,0834	13,4	3,60	0,0083
Свинец (327° С)	371	10 541	0,038	$0{,}228\cdot10^{-6}$	13,8	3,9	0,024
	482	10 413	0,037	0,185	13,4	4,40	0,017
	704	10 141	0,135	12,8			
Ртуть (см. табл. П-3, — 39° С)							
Калий (63,8° С)	149	807	0,19	$0{,}461\cdot10^{-6}$	38,7	$25{,}2\cdot10^{-2}$	0,0066
	426	742	0,18	0,240	33,9	25,5	0,0034
	704	674	0,18	0,190	28,4	23,6	0,0029
Натрий (97,7° С)	93	931	0,33	$0{,}752\cdot10^{-6}$	74,1	24,2	0,011
	371	860	0,31	0,328	62,2	23,3	0,0051
	704	779	0,30	0,230	51,3	22,0	0,0037
NaK (56/44, 19° С)	93	887	0,270	$0{,}653\cdot10^{-6}$	22,0	$9{,}19\cdot10^{-2}$	0,026
	371	822	0,252	0,288	23,7	11,4	0,0091
	704	740	0,249	0,218	24,8	13,5	0,0058
NaK (22/78, 11,1° С)	93	849	0,226	$0{,}581\cdot10^{-6}$	21,0	11,0	0,019
	398	775	0,210	0,268	22,9	14,1	0,0068
	759	690	0,211	0,213			
Pb Bi (44,5/55,5; 125° С)	149	10 525	0,035		7,78	2,11	
	371	10 237	0,035	$0{,}151\cdot10^{-6}$	10,2	2,84	0,189
	648	9 836		0,118			

ТАБЛИЦА П-8

ПАРАМЕТРЫ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ [Л. 399]

Материал	T_k, °С	p_c, кГ/см²	V_c, м³/кг
Воздух	—140	38,454	$2{,}875 \cdot 10^{-3}$
Метиловый спирт	239	0,083	3,687
Этиловый „	243	65,168	3,625
Аммиак	132	0,115	4,250
Аргон	—122	49,562	1,875
Бутан	152,6	37,189	4,437
Углекислота	31	0,0754	2,187
Окись углерода	—138,7	36,134	3,187
Четыреххлористый углерод	282,5	46,468	1,812
Хлор	143,7	0,0786	1,750
Этан	32,2	50,405	4,750
Этилен	9,4	59,614	4,562
Гелий	—267,5	2,320	14,437
	237,8	30,510	4,250
Водород	—239,8	18,216	32,250
Метан	—82,1	47,312	6,187
Метил-хлорид	143,2	67,980	2,687
Неон	—228,7	27,487	2,062
Окись азота	—93,8	67,136	1,937
Азот	—147,1	37,588	3,250
Октан	295,8	25,449	4,250
Кислород	—118,8	51,319	2,312
Пропан	95,5	45,430	4,437
Двуокись серы	157,1	0,0803	1,937
Вода	373,5	0,2254	3,125

КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ [Л. 399]

Воды в воздухе

$$D = 0{,}0829 \left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1{,}81} \quad м^2/ч$$

(NH_3) в воздухе

$$D = 0{,}0709 \left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1{,}81} \quad м^2/ч$$

$p_0 = 1$ *am*; $t_0 = -32°$ C (0° F)

Классификация	Диффундирующее вещество	Среда, где протекает процесс диффузии	Температура t, °C	Коэффициент диффузии D, $м^2/сек$	Критерий Шмидта $Sc = \frac{\nu}{D}$
Твердые тела	Cu	Al	460	$8{,}5 \cdot 10^{-10}$ $м^2/сутки$	
	Hg	Pb	180	$1{,}95 \cdot 10^{-10}$ „	
			197	$5{,}0 \cdot 10^{-19}$ „	
Жидкости	HCl	H_2O	0	$2{,}23 \cdot 10^{-6}$ $м^2/сек$	0,81
	NH_3	H_2O	4	$1{,}21 \cdot 10^{-6}$ „	1,5
Газы (при давлении 760 *мм рт. ст.*)	NH_3	Воздух	0	$2{,}17 \cdot 10^{-5}$ „	0,634
	CO_2	H_2	18	$6{,}05 \cdot 10^{-5}$ „	0,158
	Hg	N_2	19	$3{,}25 \cdot 10^{-3}$ „	0,00424
	O_2	N_2	12	$2{,}03 \cdot 10^{-5}$ „	0,681
	H_2O	Воздух	16	$2{,}82 \cdot 10^{-5}$ „	0,488
	H_2	O_2	14	$7{,}75 \cdot 10^{-5}$ „	0,182
	H_2	N_2	12,5	$7{,}38 \cdot 10^{-5}$ „	0,187
	C_6H_6	Воздух	0	$7{,}50 \cdot 10^{-6}$ „	1,83
	C_6H_6	CO_2	0	$5{,}27 \cdot 10^{-6}$ „	1,37
	C_6H_6	H_2	0	$2{,}94 \cdot 10^{-5}$ „	3,26
	Этиловый спирт	Воздух	0	$1{,}01 \cdot 10^{-5}$ „	1,36

ТАБЛИЦА П-10

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ В НОРМАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ К ПОВЕРХНОСТИ И ОБЩАЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ t

(по результатам измерений Е. Шмидта и Э. Эккерта)

В случае металлов излучательная способность возрастает с повышением температуры, но в случае неметаллов (окислы металлов, органические вещества) это правило не всегда справедливо. В случаях, когда не приводятся результаты точного измерения, для блестящих металлических поверхностей следует брать $\varepsilon/\varepsilon_n = 1, 2$, а для других веществ с ровной поверхностью $\varepsilon/\varepsilon_n = 0,95$. В случае же шероховатой поверхности $\varepsilon/\varepsilon_n = 0,98$

Поверхность	t, °С	ε_n	ε
Золото полированное	130	0,018	
То же	400	0,022	
Серебро	20	0,020	
Медь полированная	20	0,030	
„ слегка окисленная	20	0,037	
„ шабренная	20	0,070	
„ черная окисленная	20	0,78	
„ окисленная	131	0,76	0,725
Алюминий блестящий прокатный	170	0,039	0,049
Алюминий блестящий прокатный	500	0,050	
Алюминиевая краска	100	0,2—0,40	
Силумин литой полированный	150	0,186	
Никель шлифованный тусклый	100	0,041	0,046
Никель полированный	100	0,045	0,053
Манганин блестящий прокатный	118	0,048	0,057
Хром полированный	150	0,058	0,071
Железо блестящее травленое	150	0,128	0,158
Железо свеже обработанное наждаком	20	0,24	
Железо, покрытое красной ржавчиной	20	0,61	
Железо горячекатаное	20	0,77	
То же	130	0,60	
Чугун литой	100	0,80	
Железо сильно ржавленое	20	0,85	
Железо жароупорное окисленное	80	0,613	
Железо жароупорное окисленное	200	0,639	
Цинк серый, окисленный	20	0,23—0,28	
Свинец серый, окисленный	20	0,28	
Висмут блестящий	80	0,340	0,366
Корунд крупнозернистый	80	0,855	0,84
Глина обожженная	70	0,91	0,86
Лак белый	100	0,925	

Продолжение табл. П-10

Поверхность	t, °С	ε_n	ε	
Свинцовый сурик	100	0,93		
Эмалевая краска	20	0,85	0,95	
Лак черный матовый	80	0,970		
Бакелитовый лак	80	0,935		
Кирпич строительный	20	0,93		
Раствор, штукатурка	20	0,93		
Фарфор	20	0,920	0,940	
Стекло	90	0,940		0,876
Лед гладкий обыкновенный	0	0,966		0,918
Лед шероховатый	0	0,985		
Матовое стекло	20	0,96		
Бумага	95	0,92		0,89
Дерево	70	0,935		0,91
Руберойд	20	0,93		

ТАБЛИЦА П-11

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАК ФУНКЦИЯ ДЛИНЫ ВОЛНЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Длина волны, *мк*	0,50	0,60	0,95	1,8	2,1	3,6	4,4	5,4	8,8	9,3	Авторы
Температура, °С	Температура солнца		2 760	1 380	1 093	537	400	260	50	38	
Алюминий полированный			0,26		0,17	0,08		0,05		0,04	Кобленц
„ окисленный						0,18		0,12		0,11	Рандольф и Оверхользер
Дюралюминий		0,53									Кобленц
Хром		0,49	0,43		0,36	0,26		0,17		0,08	Кобленц и Гульберт
Медь полированная . . .			0,26		0,17	0,18		0,05		0,04	Колбенц и Е. Шмидт
„ оисленная . . .						0,77		0,83		0,87	Кобленц
Золото полированное . .					0,03	0,03		0,02		0,02	Бургес и Фут
Сталь полированная . .		0,45	0,37		0,23	0,14		0,10		0,07	Рандольф и Оверхользер
Железо полированное		0,45	0,35		0,22	0,13		0,08		0,06	Кобленц
„ литое окисленное						0,76		0,66		0,63	Оверхользер
Железо оцинкованное новое	0,66	0,66	0,67	0,42						0,23	Беккет
Железо оцинкованное грязное	0,89	0,89	0,89	0,90						0,28	Беккет
Железо оцинкованное побеленное	0,24	0,21	0,22	0,37							Беккет

Продолжение табл. П-11

Длина волны, *мк*	0,50	0,60	0,95	1,8	2,1	3,6	4,4	5,4	8,8	9,3	Авторы
Температура, °С	Температура солнца		2 760	1 380	1 093	537	400	260	50	38	
Магний		0,30	0,26		0,23	0,18		0,13		0,07	Кобленц и Гульберт
Монель		0,43	0,29		0,16	0,10					Кобленц
Молибден	0,55		0,43		0,18	0,11		0,08		0,06	Кобленц и Гульберт
Латунь полированная										0,05	Е. Шмидт
» окисленная										0,61	Рандольф и Оверхользер
Краски											
Черная сажа		0,97	0,97				0,97		0,96		Кобленц
Красная		0,74	0,59				0,70		0,96		Кобленц
Желтая	0,39	0,30					0,59		0,95		Кобленц
Белая	0,18	0,14	0,16				0,77		0,95		Кобленц и Е. Шмидт
Алюминий		0,45									Кобленц
Серебро полированное	0,11		0,04		0,03	0,03		0,02		0,01	Кобленц
Платина черная	0,97		0,97		0,97	0,97	0,96	0,96	0,93	0,93	Кобленц
Белая бумага		0,28	0,25			0,82				0,95	Кобленц
Белый мрамор		0,47				0,93				0,95	Кобленц
Графит	0,78		0,73		0,64	0,54		0,49		0,41	Кобленц и Гульберт

ТАБЛИЦА П-12

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В СОПРИКОСНОВЕНИИ С ИХ ПАРАМИ [Л. 399]

Вещество	Температура, °С	Поверхностное натяжение, *кГ/см*
Уксусная кислота	10	$2{,}95\times10^{-5}$
	20	2,84
	50	2,54
Ацетон	0	2,68
	20	2,43
	40	2,16
Аммиак	11	2,39
	34	1,86
Бром	20	4,23
Углекислоты	—10,5	0,932
Четыреххлористый углерод	20	2,75
	100	1,76
	200	0,668
Этиловый спирт	10	2,41
	20	2,32
	30	2,23
Серный эфир	20	1,74
	50	1,37
	25	9,36
Перекись водорода	18	7,79
Метиловый спирт	50	2,05
Диметиловый эфир	—10	1,67
	—40	2,14
Нафталин	126,9	2,96
Четыреххлористый этилен	20	3,23
Толуол	10	2,82
	20	2,91
	30	2,80

ТАБЛИЦА П-13

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ВОДЫ В СОПРИКОСНОВЕНИИ С ВОЗДУХОМ [Л. 399]

Температура, °С	Поверхностное натяжение, *кГ/см*	Температура, °С	Поверхностное натяжение, *кГ/см*
0	$7{,}91 \cdot 10^{-5}$	50	6,93
10	7,57	60	6,75
20	7,43	70	6,57
30	7,25	80	6,39
40	7,11	100	6,00

ЛИТЕРАТУРА

1. **W. Nusselt,** Z. Ver. deut. Ingr., 55: 2091 (1911), Forsch. Gebiete Ingenieurw., 1:417 (1930).

2. **J. Nikuradse,** Proc. Intern. Congr. Appl. Mech., 3rd Congr., 1:239 (Stockholm, 1950).

3. **A. P. Colburn,** Ind. Eng. Chem., 25:873—877 (1933).

4. **R. A. Bowman, A. C. Mueller, W. M. Nagle,** Trans. ASME, 62:283—294 (1940).

5. **H. S. Carslaw, J. C. Jaeger,** Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, London, 1947.

6. **I. S. Sokolnikoff, E. S. Sokolnikoff,** Higher Mathematics for Engineers and Physicists, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1941.

7. **N. W. MacLachlan,** Bessel's Equation for Engineers, Oxford University Press, London, 1934.

8. **L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson, R. C. Martinelli,** Heat. Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.

9. **E. Schmidt,** Z. Ver. deut. Ingr., 70:885 (1926). Forsch. Gebiete Ingenieurw., 13:34—42 (1942).

10. **R. H. Norris, W. A. Spofford,** Trans. ASME, 64:489—496 (1942).

11. **K. A. Gardner,** Trans. ASME, November 1945, pp. 621—631.

12. **P. J. Schneider,** Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1955.

13. **A. L. London, W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

14. **I. S., E. S. Sokolnikoff,** Higher Mathematics for Engineers and Physicists, p. 448, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1941.

15. **P. J. Schneider,** Conduction Heat Transfer, chap. 13, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1955.

16. **R. V. Southwell,** Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford University Press, New York, 1940; Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford University Press, New York, 1946.

17. **H. W. Emmons,** The Numerical Solution of Heat — conduction Problems, Trans. ASME, 65 (6):607—612 (1943).

18. **G. M. Dusinberre,** Numerical Analysis of Heat Flow, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949.

19. **F. Lieneweg,** Wiss. Veröffentl, Siemens-Werken, 16: 112—126 (1937); 17: 19—32 (1937); 19:73—87 (1940).

20. **Jean Baptiste Fourier,** Theorie analytique de la chaleur oeuvres de Fourier, Gauthier-Villars, Paris, 1822, English translation by Freeman, Cambridge, 1878.

21. **H. Gröber, S. Erk,** Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Springer-Verlag, Berlin (1933).

22. **H. P. Gurney, J. Lurie,** Ind. Eng. Chem., 15:1170—1172 (1923).
23. **M. P. Heisler,** Trans. ASME, 69:227—236 (1947).
24. **A. B. Newman,** Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., 24:44 (1930).
25. **H. Gröber, S. Erk,** указано выше (21).
26. **H. S. Carslaw, J. C. Jaeger,** Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, New York, 1947.
27. **P. J. Schneider,** Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1955.
28. **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
29. **L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson, R. C. Martinelli,** Heat Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.
30. **E. Schmidt,** Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik (Föppl-Festschrift), Springer-Verlag, Berlin, 1924; **E. Schmidt,** Einführung in die technische Thermodynamik, p. 262, Springer—Verlag, Berlin, 1936 (English translation by J. Kestin, Oxford University Press, New York).
31. **A. Nessi, L. Nissolle,** Méthodes graphiques pour l'étude des installations de chauffrage et de réfrigeration en régime discontinu, Dunod, Paris, 1929; **M. Jakob,** Heat Transfer, pp. 380—398, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
32. **R. V. Churchill,** Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1941.
33. **L. R. Ford,** Differential Equations, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
34. **B. O. Pierce,** A Short Table of Integrals, 3rd ed., Ginn & Company, Boston, 1929.
35. **L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson, R. C. Martinelli,** Heat Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.
36. **A. Meier,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 10:41—54 (1939).
37. **H. S. Carslaw, J. C. Jaeger,** Conduction of Heat in Solids, pp. 71—74, Oxford University Press, London, 1947.
38. **H. Gröber, S. Erk,** Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 2d ed., pp. 118—121, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
39. **Ingersoll, Zobel,** Mathematical Theory of Heat Conduction.
40. **J. H. Weiner,** Brit. J. Appl. Phys., 6:361—363 (October, 1955).
41. **Carslaw, Jaeger,** указано выше (37).
42. **Rothman** (неофициальное сообщение).
43. **D. Rosenthal,** Trans. ASME, 68:849 (1946).
44. **Carslaw,** Jaeger, указано выше (37).
45. **H. Pfriem,** Unsteady Heat Transfer in Gases, Especially in Piston Engines, VDI-Forschungsheft 413, 1942.
46. **K. Stewartson,** Quart. J. Mech. Appl. Math., 4(2):182—198 (1951); **E. M. Sparrow,** Jet Propulsion, 28:403 (1958); **E. M. Sparrow, J. L. Gregg,** Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Note 4311 (1958); **R. Siegel,** Trans. ASME, 80:347 (1958).
47. **T. von Kármán,** Z. angew. Math. Mech., 1:235 (1921).
48. **F. Schultz-Grunow,** A New Resistance Law for Smooth Plates, Luftfahrt-Forsch., 17:239—246 (1940).
49. **L. Prandtl,** Ergeb. aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen, 3:4 (1927).

50. **W. Tollmien,** Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. physik. Kl., 1929, p. 21.
51. **H. Schlichting,** Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. physik. Kl., 1933, p. 181; 1935, p. 48.
52. **B. G. van der Hegge-Zijnen,** Measurements of the Velocity Distribution in the Boundary Layer along a Plane Surface, I. Waltmann, Delft, 1924.
53. **K. Pohlhausen,** Z. angew. Math. Mech., 1:252 (1921).
54. **N. A. V. Piercy, G. H. Preston,** Phil. Mag., 21:995 (1936).
55. **V. M. Falkner, S. W. Skan,** Phil. Mag., 12:865 (1931).
56. **L. Schiller,** Strömung in Rohren in Wien-Harms, Handbuch Experimental Physik, vol. IV/4, p. 48, Akademie-Verlag G.m.b.H., Berlin, 1931.
57. **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
58. **E. N. Sieder, G. E. Tate,** Ind. Eng. Chem., 28:1429—1435 (1936).
59. **G. Rohonczy,** Schweiz. Arch. angew. Wiss. Tech., 5:121—140, 167—175, 239—275, 349—366 (1939).
60. **L. Prandtl,** Führer durch die Strömungslehre, Vieweg-Verlag, Brunswick, Germany, 1942.
61. **R. C. Martinelli,** Heat Transfer to Molten Metals, Trans. ASME, 69:947—959 (1947).
62. **T. von Kármán,** Trans. ASME, 61:705—710 (1939).
63. **H. Schlichting,** Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
64. **L. F. Moody,** Trans. ASME, 66:671 (1944).
65. **Schlichting,** указано выше (63).
66. **E. R. G. Eckert, T. F. Irvine, Jr.,** J. Aeronaut. Sci., 22:65—66 (1955).
67. **W. Mangler,** Z. angew. Math. Mech., 28:97 (1948).
68. **G. Kroujiline,** Tech. Phys. U.S.S.R., 3:183, 311 (1936).
69. **E. R. G. Eckert,** Trans. ASME, 56:1273—1283 (1956).
70. **E. M. Sparrow, J. L. Gregg,** J. Aeronaut. Sci., 24:852 (1957).
71. **D. Chapman, M. W. Rubesin,** J. Aeronaut. Sci., 16:547—565 (1949).
72. **H. Tribus, I. Klein,** Forced Convection from Nonisothermal Surfaces, Heat Transfer (a symposium), University of Michigan, Engineering Research Institute, 1953.
73. **E. R. G. Eckert, J. P. Hartnett, R. Birkebak,** J. Aeronaut. Sci., 24:549—550 (1957).
74. **S. Goldstein,** Modern Developments in Fluid Dynamics, vol. 2, Oxford University Press, New York, 1938.
75. **E. Eckert,** Die Berechnung der Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper, VDI-Forschungsheft 416, 1942.
76. **E. Schmidt, K. Wenner,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 12:65—73 (1941).
77. **R. M. Drake,** Jr. J. Appl. Mech., 16:1—8 (1949).
78. **E. Pohlhausen,** Z. angew. Math. Mech., 1:115 (1921).
79. **A. Fage, V. M. Falkner,** Brit. Aeronaut. Research Comm. Repts. Mem. 1408, 1931.
80. **D. Chapman, N. W. Rubesin,** J. Aeronaut. Sci., 16:547—65 (1949).
81. **H. Schlichting,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 17:1 (1951).
82. **L. Grätz,** Ann. Physik, 18:79—94 (1889); 25:337—357 (1895).
J. R. Sellars, M. Tribus, J. S. Klein, Trans. ASME, 78:441—448 (1956).

83. **H. L. Callendar,** Trans. Roy. Soc. London, 199A:55 (1902).
84. **W. Nusselt,** Z. Ver. deutsch. Ing., 54: 1154—1158 (1910).
85. **K. Millsaps, K. Pohlhausen,** Proceedings of the Conference on Differential Equations, University Bookstore, University of Maryland, College Park, Md., 1955.
86. **L. Ehret, H. Hahnemann,** Wärme-u Kältetech., 44:176 (1942).
87. **C. S. Keevil, W. M. McAdams,** Chem. Met. Eng., 36:464 (1929).
88. **K. Yamagata,** A Contribution to the Theory of Nonisothermal Laminar Flow of Fluids inside a Straight Tube of Circular Cross Section, Mem. Fac. Eng. Kyushu Imp. Univ., 8:365—445 (1940).
89. **E. R. G. Eckert, A. Y. Diagula,** Trans. ASME, 76:497—504 (1954).
90. **H. Kraussold,** VDI-Forschungsheft 351, 1931.
91. **E. N. Sieder, G. E. Tate,** Ind. Eng. Chem., 28:1429—1435 (1936).
92. **W. Nusselt,** Habilitationsschrift, Technische Hochschule, Dresden, 1909.
93. **J. Boehm,** Wärme, 66:143—152 (1943).
94. **H. Hausen,** Z. Ver. deutsch. Ing., Beih. Verfahrenstech., № 4, 1943, pp. 91—98.
95. **R. H. Norris, D. D. Streid,** Trans. ASME, 62:525—533 (1940).
96. **E. R. G. Eckert, T. F. Irvine, Jr., J. T. Yen,** ASME Paper 57-A-133.
97. **E. Jahnke, F. Emde,** Tables of Functions, Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1933.
98. **L. Prandtl,** Z. Physik, 11:1072 (1910); 29:487 (1928); **G. I. Taylor,** Rept. Mem. Brit. Aeronaut. Comm. 272, 1916, p. 423.
99. **W. Bühne,** Wärme, 61:162 (1938).
100. **E. Hoffman,** Z. Ges. Kälte-Ind., 44:99—107 (1937).
101. **E. Hoffman,** Z. Ver. deutsch. Ing., 82:741—782 (1938).
102. **R. G. Deissler,** Trans. ASME, 76:73—85 (1954).
103. **K. Goldmann,** Chem. Eng. Progr. Symposium Ser. 50, № 11, 1954, pp. 105—113.
104. **E. R. G. Eckert,** рецензия на статью Дайслера.
105. **R. B. Bringer, J. M. Smith,** J. Am. Inst. Chem. Engrs, 3:49—55 (1951).
106. **N. L. Dickinson, C. P. Welch,** Trans ASME, № 57-HT-7.
107. **E. Schmidt, E. Eckert, U. Grigull,** Jahrbuch 1939 der deutschen Luftfahrtforschung, vol. II, pp. 53—58.
108. **F. W. Dittus, L. M. K. Boelter,** Univ. Calif. Publs. Eng., 2:443 (1930).
109. **E. Eckert,** Z. Ver. deutsch. Ing., 80:137—138 (1936).
110. **H. Hausen,** Z. Ver. deutsch. Ing., Beih. Verfahrenstech., № 4, 1943, pp. 91—98.
111. **E. N. Sieder, G. E. Tate,** Ind. Eng. Chem., 28:1429—1435 (1936).
112. **J. P. Hartnett,** Trans. ASME, 77:1211—1220 (1955).
113. **R. G. Deissler,** Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 3016, 1953.
114. **W. Linke, H. Kunze,** Allgem. Wärmetech., 4:73—79 (1953).
115. **M. ten Bosch,** Die Wärmeübertragung, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1936.
116. **W. Nunner,** Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft 455, 1956.
117. **M. Jakob, W. M. Dow,** Trans. ASME, 68:124—134 (1946).
118. **H. A. Johnson, M. W. Rubesin,** Trans. ASME, 71:447—456 (1949).

119. **S. Scesa,** Experimental Investigation of Convective Heat Transfer to Air from a Flat Plate with a Stepwise Discontinuous Surface Temperature M. S. Thesis, University of California Berkeley, Calif., 1949.

120. **W. H. Corcoran, F. Page, Jr., W. A. Schlinger, B. H. Sage,** Ind. Eng. Chem., 44:401 (1952).

121. **H. Ludwieg,** Z. Flugwissenschaften, 4:73 (1956).

122. **R. G. Deissler,** Trans. ASME, 73:101—105 (1951); 76:73—85 (1954).

123. **H. Reichardt,** Z. angew. Math. Mech., 20:297—328 (1940).

124. **R. C. Martinelli,** Trans. ASME, 68:947—959 (1947).

125. **W. Nusselt,** Gesundh. Ingr., 38:477—490 (1915).

126. **H. Schlichting,** Boundary Layer Theory, p. 250, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

127. **R. Hilpert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 4:215 (1933).

128. **E. R. G. Eckert, E. Soehngen,** Trans. ASME, 74:343—347 (1952). **F. M. Sauer, R. M. Drake,** J. Aeronaut. Sci., 20:175—180 (1953).

129. **W. Y. M. Douglas, S. W. Churchill,** Recorrelation of Data for Convective Heat Transfer between Gases and Single Cylinders with Large Temperature Differences, Preprint 16, American Institute of Chemical Engineers, Heat Transfer Symposium, National Meeting, Louisville, Ky., 1955.

130. **W. H. Giedt,** J. Aeronaut. Sci., 18:725—731 (1951); **E. W. Conings, I. T. Clapp, T. F. Taylor,** Ind. Eng. Chem., 40:1076 (1948).

131. **E. D. Grimison,** Trans. ASME, 59:583—594 (1937).

132. Compact Heat Exchangers, National Press, Palo Alto, Calif., 1956.

133. **E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 16:133—140 (1949—1950).

134. **H. Thoma,** Hochleistungskessel, Springer-Verlag, Berlin, 1921; **W. Lorisch,** Mitt. Forschungsarb., 1929, p. 322.

135. **M. Sibulkin,** J. Aeronaut. Sci., 19:570—71 (1952).

136. **R. M. Drake, Jr.** J. Aeronaut. Sci., 20:309—316 (1953).

137. **H. Gröber, S. Erk, U. Grigull,** Grundgesetze der Wärmeübertragung, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

138. **J. E. Coppage, A. L. London,** Chem. Eng. Progr., 52:57—63 (1956).

139. **Sabri Ergun,** Chem. Eng. Progr., 48:227 (1952).

140. **W. H. Denton,** General Discussion on Heat Transfer, p. 370, Institution of Mechanical Engineers and American Society of Mechanical Engineers, London, 1951.

141. **E. Pohlhausen,** Z. angew. Math. Mech., 1:115—121 (1921).

142. **E. Eckert, O. Drewitz,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 11:116—124 (1940).

143. **E. Brun.** Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, 194:594 (1932).

144. **R. A. Deissler, A. L. Loeffler,** Natl Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Notes, № 4262 (1958).

145. E. **R. G. Eckert,** Survey on Heat Transfer at High Speeds, WADC Tech. Rept. 54—70, Wright Air Development Center, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1954; **E. R. G. Eckert,** Trans. ASME, 78:1273—1283 (1956).

146. **H. W. Liepmann, A. Roshko,** Elements of Gas Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

147. **J. H. Keenan, T. Kaye,** Gas Tables, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
148. **E. Eckert, W. Weise,** Forsch. Gebiete Ingenieurw. 13:246—254 (1942).
149. **L. F. Ryan,** Mitt. Inst. Aerodynamik Eidgen. Tech. Hochschule, Zurich, № 18, 1951, pp. 7—50.
150. **H. Sprenger,** Z. angew. Math. Physik, 2:293 (1951); Mitt. Inst. Aerodynamik, Eidgen, Tech. Hochschule, Zurich., № 21, 1954.
151. **B. Vonnegut,** Rev. Sci. Instr., 1950, pp. 21—22, 136.
152. **E. Eckert,** Z. Ver. deutsch. Ing., 84:813—817 (1940).
153. **A. Franz,** Jahrb. 1938 deutsch., Luftfahrt-Forsch., II:215—218.
154. **E. R. G. Eckert,** Trans. ASME, 78:1273—1283 (1956).
155. **M. R. Romig,** Jet Propulsion, 26:1098—1101 (1956).
156. **W. W. Fischer, R. H. Norris,** Trans. ASME, 71:457—469 (1949).
157. **J. H. Keenan, T. Kaye,** Gas Tables, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
158. **E. H. Kennard,** Kinetic Theory of Gases, pp. 162—181, McCraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1938.
159. **Eucken,** Physik. Z., 14:324 (1913).
160. **H. S. Tsien,** J. Aeronaut. Sci., 13:653—654 (1946).
161. **D. Burnett,** Proc. London Math. Soc., 40:382 (1935).
162. **S. Chapman, T. G. Cowling,** The Mathematical Theory of Noniniform Gases, Cambridge University Press, London, 1939.
163. **M. Smoluchowski,** Sitzber. Wien. Akad., 107:304 (1898); Anz. Akad. Wiss. Krakau A,5:129 (1910).
164. **R. A. Millikan,** Phys. Rev., 21:230 (1923).
165. **E. Blankenstein,** Phys. Rev., 22:582 (1923).
166. **M. Knudsen,** Kinetic Theory of Gases, Methuen & Co., Ltd, London, 1934.
167. **R. N. Oliver,** Thermal Accommodation Coefficients, C. I. T. Thesis, 1950.
168. **M. L. Weidmann, P. R. Trumpler,** Trans. ASME, 68:57 (1946).
169. **J. K. Roberts,** Proc. Roy. Soc., 129:146 (1930); 135:192 (1932).
170. **S. A. Schaaf,** Univ. Calif. Inst. Eng. Research Rept. HE-150-66, 1950; **F. S. Sherman,** Univ. Calif. Inst. Eng. Research Rept. HE-150-70, 1950 and HE-150-81, 1951.
171. **R. M. Drake, E. D. Kane,** General Discussion on Heat Transfer, Institution of Mechanical Engineers and American Society of Mechanical Engineers, London, 1951; **J. R. Stalder, G. Goodwin, M. O. Creager,** General Discussion on Heat Transfer, Institution of Mechanical Engineers and American Society of Mechanical Engineers, London, 1951.
172. **R. M. Drake, Jr., F. M. Sauer, S. A. Schaaf,** Univ. Calif. Inst. Eng. Research Rept. HE-150-74, 1950; **R. M. Drake, Jr., G. H. Backer,** Trans. ASME, 74:7 (1952).
173. **L. L. Kavanau, R. M. Drake, Jr.,** Univ. Calif. Inst. Eng. Research Rept. HE-150-108, 1953, **L. L. Kavanau,** Trans. ASME, 77:5 (1955).
174. **R. M. Drake, E. D. Kane,** Trans. ASME, 74:7 (1952).
175. **R. V. Churchill,** Modern Operational Mathematics in Engineering, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1944.
176. **F. M. Sauer,** J. Aeronaut. Sci., 18:5 (1951).
177. **F. M. Sauer, R. M. Drake, Jr.,** J. Aeoronaut. Sci., 20:3 (1953).
178. **J. R. Stalder, G. Goodwin, M. O. Creager,** Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2438, 1951.
179. **A. K. Oppenheim,** J. Acronaut. Sci., 20:1 (1953).
180. **J. R. Stalder, D. Jukoff,** J. Aeoronaut. Sci., 15:7 (1948).

181. **R. J. Grosh, R. D. Cess,** Trans. ASME, 80:667—676 (1958); **E. M. Sparrow, J. L. Gregg,** J. Aeronaut. Sci., 24, 852 (1957).
182. **K. J. Boussinesq,** Calcul du pouvoir refroidissant des courrants fluides, J. math., 1:285 (1905).
183. **J. P. Hartnett, T. F. Irvine,** AIChE Journal, 3:313—317 (1957).
184. Liquid Metals Handbook, 2nd ed., Atomic Energy Commission, Department of the Navy, Washington, D. C., 1952.
185. **H. S. Mickley, R. C. Ross, A. L. Squyers, W. E. Stewart,** Heat Mass and Momentum Transfer for Flow over a Flat Plate with Blowing or Suction, Natl Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3208, 1954.
186. **W. D. Rannie,** A Simplified Theory of Porous Wall Cooling, Calif. Inst. Technol., Jet Propulsion Lab., Progr. Rept. 4-50, 1957.
187. **E. R. G. Eckert, T. N. B. Livingood,** Natl, Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2733, 1952.
188. **L. Green,** Jr., J. Appl. Mech., 19:173—178 (1952).
189. **E. R. G. Eckert, P. L. Donoghue, B. J. Moore,** Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 4102, 1957.
190. **E. R. G. Eckert,** Transpiration and Film Cooling, in „Heat Transfer" (a symposium), Engineering Research Institute, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., 1953.
191. **M. Tribus, G. Klein,** Forced Convection from Nonisothermal Surfaces, in „Heat Transfer" (a symposium), Engineering Research Institute, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., 1953.
192. **K. Weighardt,** Hot Air Discharge for De-icing, AAF-Translation № F-TS919 RE, December 1956.
193. **G. R. Kinney, Jr., J. L. Sloop,** Internal Film Cooling Experiments in a 4-inch Duct with Gas Temperatures to 2 000 F, Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem. E-50-F-19, 1950.
194. **S. Goldstein,** Modern Developments in Fluid Dynamics, Oxford University Press, New York, 1938.
195. **Y. S. Touloukian, G. A. Hawkins, M. Jacob,** Trans. ASME, 70:13 (1948).
196. **E. M. Sparrow,** Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 3508, 1955; **E. M. Sparrow, J. E. Gregg,** Trans. ASME, 78:435—440 (1956).
197. **E. Schmidt, W. Beckmann,** Tech. Mech. Theromodynam., 1:1—24 (1930).
198. **S. Ostrach,** Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 2635, 1952.
199. **E. R. G. Eckert, E. Soehngen,** USAF Tech. Rept. 5747, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1948.
200. **H. H. Lorentz,** Z. tech. Physik, 9:362—366 (1934).
201. **O. A. Saunders,** Proc. Roy. Soc., (London), A72 (948):55—71 (1939).
202. **K. Millsaps, K. Pohlhausen,** J. Aeronaut. Sci., 25:357—360 (1958).
203. **R. Hermann,** Z. angew. Math. Mech., 13:433 (1933).
204. **K. Jodlbauer,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 4:157 (1933).
205. **I. Langmuir,** Phys. Rev., 34:401 (1912).
206. **C. W. Rice,** Trans. AIEE, 42:653 (1923).
207. **J. K. Kyte, A. J. Madden, E. L. Piret,** Chem. Eng. Progr., 49:653—662 (1953).
208. **E. Schmidt,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 3:181—189 (1932).
209. **H. Schardin,** Z. Instrumentenk., 53:396—403, 424—436 (1933).

210. **T. Zobel,** Z. Ver. deutsch., Ing., 81:503 (1937).
211. **R. B. Kennard,** J. Research Natl Bur. Standards, 8:787 (1932).
212. **E. Eckert, E. Soehngen,** USAF Tech. Rept. 5747, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1948.
213. **E. Eckert,** Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, American Society of Mechanical Engineers, Berkeley, Calif., 1949; **E. Eckert, E. Soehngen, P. J. Schneider,** in „50 Jahre Grenzschichtheorie", ed. by H. Görtler and W. Tollmien, Vieweg-Verlag, Brunswick, Germany, 1955.
214. **E. R. G. Eckert, T. W. Jackson,** Natl Advisory Comm. Aeronaut. Rept. 1015, 1951.
215. **E. Schmidt,** Chem. Ingr. Tech., 1956, 175.
216. **E. C. Cobb, O. A. Saunders,** Proc. Roy. Soc. (London), A:343 (1956); **R. L. Young,** Trans. ASME, 78:1163 (1956).
217. **E. M. Sparrow,** Ph. D. Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., 1956.
218. **E. Schmidt, W. Beckmann,** Tech. Mach. Thermodynam., 1:1—24 (1930).
219. **H. Schuh,** Rept. and Transl. № 1007, AVA Monographs, 1948.
220. **S. Ostrach,** Natl, Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 2635, 1952.
221. **W. O. Carlson,** Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1956.
222. **E. Schmidt,** Chem. Ingr Tech., 1956, pp. 175—180.
223. **H. Kraussold,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 2:186—191 (1936).
224. **T. M. Hallman,** Combined Forced and Free Convection in a Vertical Tube, Ph. D. Thesis, Purdue University, 1958.
225. **E. R. G. Eckert, A. J. Diagula,** Trans. ASME, 76:497—504 (1954).
226. **W. Nusselt,** Z. Ver. deutsch. Ing., 60:541 (1916).
227. **U. Crigull,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 13:49—57 (1942).
228. **E. Schmidt, W. Schurig, W. Sellschopp,** Tech. Mech. Thermodynam., 1:53 (1930).
229. **F. Bosnjakovic,** Tech. Mech. Thermodynam., 1:358—62 (1930).
230. **H. K. Forster, N. Zuber,** J. Appl. Phys., 25:474 (1954).
231. **M. E. Ellion,** Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1953.
232. **M. Jakob,** Heat Transfer, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
233. **F. C. Gunther, F. Kreith,** Heat Transfer and Fluid Mechanical Institute, Berkeley, Calif., 1949.
234. **W. M. Rohsenow,** Trans. ASME, 74:969 (1952).
235. **H. K. Fopster, N. Zuber,** Am. Inst. Chem. Engrs. J., 1:531—535 (1955).
236. **E. L. Piret, H. S. Isbin,** Chem. Eng. Progr., 50:305 (1954).
237. **L. A. Bromley,** Chem. Eng. Progr., 46:221—227 (1950).
238. **S. S. Kutateladze,** Izvest. Akad. Nauk, U.S.S.R., Otdel. Tekh. Nauk, 4, 1951, p. 529.
239. **W. M. Rohsenow, P. Griffith,** Preprint 9, American Society of Mechanical Engineers and American Institute of Chemical Engineers, Heat Transfer Symposium, Louisville, Ky., March 1955.
240. **N. Zuber,** Trans. ASME, 80:711—720 (1958).
241. **W. M. Rohsenow, J. A. Clark,** Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 193—207, 1951.
242. **W. H. McAdams,** Heat Transmission 3rd ed., McGraw-Hill

Book Company, Inc., New York, 1954, или **Max Jakob,** Heat Transfer, vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

243. **E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 9:251—253 (1938).

244. **E. Jahnke, F. Emde,** Tables of Functions, p. 46, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1933.

245. **W. P. Allis, M. A. Herlin,** Thermodynamics and Statistical Mechanics, pp. 199—214, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.

246. **W. Sieber,** Z. tech. Physik, 22:130—135 (1941).

247. **E. Aschkinass,** Wien. Ann., 55:404 (1895).

248. **E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 7:265—270 (1936).

249. **E. Schmidt, E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 6:175—183 (1935).

250. **A. Schack,** Z. tech. Physik, 5:267—278 (1924).

251. **H. C. Hottel, H. G. Mangelsdorf,** Trans. Am. Inst. Chem. Engrs, 31:517—549 (1935); **H. C. Hottel, V. C. Smith,** Trans. ASME, 57:463—470 (1935).

252. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 387, 1937.

253. **E. Schmidt,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 3:57—70 (1932).

254. **E. Schmidt, E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 8:87 (1937).

255. **H. Schwiedessen,** Arch. Eisenhüttenw., 14:9—14, 145—153, 207—210 (1940).

256. **H. C. Hottel, R. B. Egbert,** Trans. Am. Inst. Chem. Engrs, 38:531—565 (1942); **J. E. Ebarhardt, H. C. Hottel,** Trans. ASME, 58:185—193 (1936).

257. **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

258. Heat Transmission, 3rd ed., Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

259. **E. Schmidt,** Z. Ver. deutsch. Ing., 77:1162—1164 (1933).

260. **Jahnke-Emde,** Tables of Functions, p. 78, Springer-Verlag, Berlin, 1933.

261. **F. M. Port,** Heat Transmission by Radiation from Gases, Sc. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1939.

262. **E. Eckert,** Technische Strahlungsaustauschrechnungen, VDI-Verlag, Berlin, 1937; **P. H. Moon,** Scientific Basis of Illuminating Engineering, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936.

263. **H. Hottel,** Mech. Eng., 52 (1930); **V. H. Cherry, D. D. Davis, L. M. K. Boelter,** Trans. Illum. Eng. Soc. N. Y., 1939.

264. **E. Eckert,** Z. Ver. deutsch. Ing., 79:1495—1496 (1935).

265. **G. Poljak,** Tech. Physics, U.S.S.R., 1:555 (1935).

266. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 387, p. 19, 1937.

267. **V. Paschkis,** Elektrotech. u. Maschinenbau, 54:617 (1936); **A. K. Oppenheim,** Radiation Analysis by the Network Method, ASME Preprint Paper 54-A-75.

268. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 387, 1937.

269. **E. Eckert,** Technische Strahlungsaustauschrechnungen, VDI-Verlag, Berlin, 1937.

270. **E. C. Miller, A. E. Blake, R. M. Schirmer, G. D. Kittredge, E. H. Fromm,** Radiation from Laboratory Scale Jet Combustor Flames, Phillips Petroleum Company Research Report 1526-56R on U. S. Navy Contract 52-132-C,1956.

271. **H. C. Hottel,** Mech. Eng., 52:699 (1930); Trans. ASME, 53:265 (1931).

272. **E. Eckert,** Hauptverein deutsch. Ing. Mitt., 1931, pp. 483—486; Arch. Wärmewirtsch., 13:241 (1932).
273. **F. D. Werner, R. E. Keppel,** An Improved Multiple Shield Gas Temperature Probe, Proceedings of the Third Midwestern Conference on Fluid Mechanics, pp. 463—478, University of Minnesota Book Store, Minneapolis, 1953.
274. **R. C. Jordan, J. L. Threlkeld,** Trans. Am. Soc. Heating Ventilating Engrs., 60:177—238 (1954).
275. **P. Moon,** J. Franklin Inst., 230:583—617 (1940).
276. **N. K. Hiester, T. E. Tietz, E. Loh, P. Duwez,** Jet Propulsion, 27:507—513 (1957).
277. **R. Mollier,** Z. Ver. deutsch. Ing., 67:869—872 (1923); 73:1009—1013 (1929).
278. **S. Chapman, T. G. Cowling,** The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge University Press, London, 1952.
279. **Stefan,** Wien. Ber., 68:385—425 (1874).
280. **R. G. Deissler,** Natl Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes 3145, 1954.
281. **J. P. Hartnett, E. R. G. Eckert,** Trans. ASME, 79:247—254 (1957).
282. **E. Schmidt,** Gesundh. Ingr., 52:525—529 (1929), **W. Nusselt,** Z. angew. Math. Mech., 10:105—121 (1930); **G. Ackermann,** VDI-Forschungsheft 382, 1937.
283. **E. Eckert, V. Lieblein,** Forsch., Gebiete Ingenieurw., 16:33—42 (1949).
284. **D. B. Spalding,** Proc. Roy. Soc. (London), 221A:78—99 (1954).
285. **A. Heyser,** Chem. Ingr Tech., 1956, pp. 161—164.
286. **T. K. Sherwood, R. L. Pigford,** Absorption and Extraction, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
287. **H. S. Mickley, R. C. Ross, A. L. Squyers, W. E. Stewart,** Natl Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes 3208, 1954.
288. **W. K. Lewis,** Trans. Am. Inst. Chem. Engrs, 20:9 (1927).
289. **E. Kirschbaum,** Chem. Fabrik, 14:171—181 (1941).
290. **R. Mollier,** Stodola-Festschrift, Leipzig, 1929; **Bosnjakovic,** Technische Thermodynamik, vol. 2, p. 43, Theodor Steinkopff, Verlagsbuchhandlung, Dresden, 1937.
291. **F. Bosnjakovic, M. Vilicic, B. Slipcevic,** VDI-Forschungsheft 432, p. 5/26, 1951.
292. **W. M. Kays, A. L. London,** Compact Heat Exchangers, National Press, Palo Alto, Calif., 1955.
293. **R. A. Stevens, T. R. Wolf,** ASME Paper 55-A-90; **J. Fernandez, T. R. Wolf,** ASME Paper 55-A-89.
294. **H. Hausen,** Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom, Springer-Verlag, Berlin, 1950.
295. **A. Anzelius,** Z. angew. Math. Mech., 6:291 (1926).
296. **H. Hausen,** Arch. Eisenhüttenw., 12:473—480 (1938—1939).
297. **H. Hausen,** Z. Ver. deutsch. Ing. Beih. Verfahrenstechn. № 2, 1942, pp. 31—43.
298. **B. Koch,** Grundlagen des Wärmeaustausches (Stoffwerte), Dissen T. W. Verlagsanstalt H. Bücke und Söhne, 1950.
299. **C. H. Lees,** Phil. Trans. Roy. Soc., London, 208 A, 381 (1908).
300. **Stops,** Nature, 164:966—967 (1949).
301. **Glassman, Bonilla,** Chem. Eng. Progr. Symposium Ser. 5, 49 (1953).

302. **J. B. Ubbink, W. J. de Haas,** Thermal Conductivity of Gases, Physics, 10 (1943).

303. **W. H. Keesom,** Helium, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1942.

304. **S. W. Akin,** The Thermodynamic Properties of Helium, Trans. ASME, 1950.

305. **K. K. Kelley,** Bur. Mines Bull. 371, 1934.

306. **Keenan, Kaye,** Gas Tables.

307. **J. M. Lenoir,** Univ. Ark. Bull. 18.

308. **C. R. Wilke,** J. Chem. Physics, 18:517 (1950).

309. **A. L. Lindsay, L. A. Bromley,** Ind. Eng. Chem., 42:1, 508 (1950).

310. **A. Wassiljewa,** Physik Z., 5:737 (1904).

311. **J. M. Lenoir,** Univ. Ark. Eng. Expt. Sta. Bull. 18, 1953.

312. **K. Sigwart,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 7:215—230 (1936).

313. **Granet, Gould,** Petroleum Refiner, May 1953.

314. **L. S. Marks,** Mechanical Engineers'Handbook, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.

315. Liquid Metals Handbook, 2nd. ed., Government Printing Office, Washington, D. C., 1952.

316. Handbook of Chemistry and Physics, 38th ed., Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1956—1957.

317. **K. A. Gardner,** Trans. ASME, 1945.

318. **K. A. Gardner,** Trans. ASME, 1945.

319. **K. A. Gardner,** Trans. ASME, 1945.

320. **K. A. Gardner,** Trans. ASME, 1945.

321—323. **L. M. K. Boelter, H. A. Johnson, et al.,** Heat Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif.

324. **H. Gröber, S. Erk,** Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, p. 58, Fig. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1933.

325. **H. Gröber, S. Erk,** Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, p. 75, Fig. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1933.

326. **L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson,** R. C. Martinelli, Heat Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.

327. **G. B. Schubauer, H. K. Skramstad,** J. Reasearch. Nat. Bur. Standards, 38 : 281 (1947); **A. A. Hall, G. S. Hislop,** Aeronaut. Research Comm., Rep. and Mem., № 1843 (1938).

328. **L. M. K. Boelter, H. A. Johnson, et al.,** Heat Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.

329. Measurements of the Velocity Distribution in the Boundary Layer along a Plane Surface, I. Waltmann, Delft, 1924.

330. **L. Prandtl,** Ergeb, aerodyn. Versuchsanstalt, Göttingen, 3 : 1 (1927).

331. **D. R. Hartree,** Proc. Cambridge Phil. Soc., 33(11):223 (1937).

332. **R. C. Martinelli,** Trans. ASME, 69:947—959 (1947).

333. **H. Schlichting,** Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

334. **E. R. G. Eckert, T. F. Irvine,** Trans. ASME, 77 : 709 (1956).

335. **H. L. Rubach,** Mitt. Forschungsarb., 1916, p. 185.

336. **L. Flachsbart,** Handbuch Experimental Physik, vol. IV, part 2, (1932), p. 316, Fig. 37.
337. **C. Wieselsberger,** Ergeb. aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen, 2, 24, 1932.
338. **H. Schlichting,** Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
339. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 416, 1942.
340. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 416, 1942.
341. **E. Eckert,** VDI-Vorschungsheft 416, 1942.
342. **E. Eckert, O. Drewitz,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 11 : 116 (1940).
343. **E. Eckert,** Die berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren, Grenzschicht, VDI-Forschungsheft 416, 1942.
344. **S. Levy,** J. Aeronaut. Sci. 19 : 341 (1952).
345. **L. Prandtl,** Stroemungslehre, 3rd ed., p. 377, Fig. 305, Vieweg-Verlag, Brunswick, Germany, 1949.
346. Trans. ASME, 77 : 1265 (1955).
347. **H. Hausen,** Z. Ver. deutsch. Ing., Beih. Verfahrenstech., 4 : 91—98 (1943).
348. **W. Bühne,** Wärme, 61:162 (1938).
349. **R. G. Deissler,** Trans. ASME, 76 : 73—85 (1954).
350. **R. G. Deissler,** Trans. ASME, 76:73—85 (1954).
351. **E. N. Sieder, G. E. Tate,** Ind. Eng. Chem., 28:1429—1435 (1936).
352. **W. Linke, H. Kunze,** Allgem. Wärmetech., 4:73—79 (1953).
353. **W. Nunner,** Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft 455, 1956.
354. **M. ten Bosch,** Die Wärmeübertrangung, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1936.
355. **E. Schmidt, K. Wenner,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 12; 65—73 (1933).
356. **R. Hilpert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 4 : 215 (1933).
357. **R. Hilpert,** Forsch., Gebiete Ingenieurw., 4:215 (1933).
358. **E. D. Grimison,** Trans. ASME, 59 : 583—594 (1937).
359. **W. Lorisch,** Mitt. Forschungsarb., 322 (1929).
360. **Sabri Ergun,** Chem. Eng. Progr., 48 : 227 (1952).
361. **J. C. Evvard, H. Tucker, W. C. Burgess,** Inst. Aeronaut. Sci. Preprint 438, 1954.
362. **E. Eckert, W. Weise,** Forsch. Ingenieurw., 13:246 (1942).
363. **E. Eckert,** Z. Ver. deutsch Ing., 84 : 813—817 (1940).
364. **A. Franz,** Jahrb. 1938 deut. Luftfahrt-Forsch., II, pp. 215—218.
365. **W. Fischer, R. H. Norris,** Trans. ASME, 71:457—469 (1949).
366. **R. M. Drake, Jr., G. H. Backer,** Trans .ASME, 74 : 7 (1952).
367. **L. L. Kavanau, R. M. Drake, Jr.,** Report № HE-150-108, University of California, 1953.
368. **A. K. Oppenheim,** J. Aeronaut. Sci., 20 : 1 (1953).
369. **S. Ostrach,** Natl Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 2635, 1952.
370. **E. Schmidt,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 3:81—89, 1932.
371. **L. Prandtl,** Strömungslehre, Vieweg-Verlag, Brunswick, Germany, 1949.
372. **H. Kraussold,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 5:186—191, 1934.
373. **E. R. G. Eckert, A. J. Diagula,** Trans. ASME, 75 : 497—504, 1954.
374. **U. Grigull,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 13 : 49—57, 1942.

375. **E. Schmidt, W. Schurig, W. Sellschopp,** Tech. Mech. Thermodynam. 1 : 53, 1930.
376. **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1942.
377. **N. Zuber,** ASME, Paper 57-HT-4, 1957.
378. **W. M. Rohsenow,** Heat Transfer with Evaporation, in „Heat Transfer" (a symposium), University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1952.
379. **N. W. Snyder,** Trans. ASME, 76:537—539 (1954).
380. **R. V. Dunkle,** Trans. ASME, 76:549 (1954).
381. **W. Sieber,** Z. tech. Physik, 22 : 130—135 (1941).
382. **E. Schmidt, E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 6 : 175—183 (1935).
383. **E. Eckert,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 1:265—270 (1936).
384. **E. Schmidt,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 3.57 (1932).
385. **E. Eckert,** VDI-Forschungsheft 387, 1937.
386. **E. Eckert,** Z. Ver. deutsch. Ing., 79;1495—1496 (1935).
387. **E. Eckert,** Arch. Wärmewirtsch., 13 (1932).
388. **R. C. Jordan, J. L. Threlkeld,** Trans. Am. Soc. Heating Ventilating Engrs, 60 : 177—238 (1954).
389. **J. P. Hartnett, E. Eckert,** Trans. ASME, 79:247—254 (1957).
390. **E. Eckert, V. Lieblein,** Forsch. Gebiete Ingenieurw., 16:33—42 (1949).
391. **J. M. Coulson, J. F. Richardson,** Chemical Engineering, vol. 1, p. 257, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
392. **H. Hausen,** Wärmeübertragung, im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom, p. 336, Springer-Verlag, Berlin 1950.
393. **W. M. Kays, A. L. London,** Compact Heat Exchangers, National Press, Palo Alto, Calif., 1955.
394. **H. Hausen,** Arch. Eisenhüttenw., 12:473—480 (1938).
395. **C. H. Lees,** Phil. Trans. Roy. Soc. London, 208A : 381 (1908).
396. **L. S. Marks,** Mechanical Engineers'Handbook, 5th ed., McGraw-Hill BookCompany, Inc., New York, 1951; **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
397. **L. S. Marks,** Mechanical Engineers' Handbook, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.
398. Liquid Metals Handbook, 2nd ed., Government Printing Office, Washington, D. C., 1952.
399. Handbook of Chemistry and Physics, 38th ed., Chemical Ruber Publishing Company, Clevelend, Ohio, 1956—1957.
400. Nat. Bur. Standards Circ. 564.

ЛИТЕРАТУРА ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

1. International Critical Tables, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1926—1930.
2. **L. S. Marks,** Mechanical Engineers'Handbook, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.
3. **V. D'Ans and E. Lax,** Taschenbuch für Chemiker und Physiker, Springer-Verlag, Berlin or Vienna, 1943.
4. **F. Henning,** Wärmetechnische Richtwerte, VDI-Verlag, Berlin, 1938.
5. **W. H. McAdams,** Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
6. Landolt-Bornstein, Physikalisch Chemische Tabellen, Springer-

Verlag, Berlin or Vienna, 1923; **J. W. Edwards,** Publisher, Inc., Ann Arbor, Mich., 1943.

7. **J. H. Keenan, J. Kaye,** Gas Tables, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1945.

8. **J. H. Keenan, F. G. Keyes,** Thermodynamic Properties of Steam, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1936.

9. **B. Koch,** Grundlagen des Wärmeaustausches (Stoffwerte), Dissen T. W. Verlagsanstalt H. Bücke and Söhne.

10. **S. W. Akin,** The Thermodynamic Properties of Helium, Trans. ASME, 72(6) : 751—757 (August 1950).

11. **L. S. Kowalczyk,** Thermal Conductivity and Its Variability with Temperature and Pressure, Trans. ASME, 77(7) : 1021—1036 (October 1955).

12. **H. W. Wooley, R. B. Scott, F. G. Brickwedde,** Compilation of Thermal Properties of Hydrogen in Its Various Isotopic and Ortho-Para Modifications, J. Research Natl. Bur. Standards, 41 (November 1948).

13. **J. F. Masi,** Survey of Experimental Determinations of Heat Capacity of Ten Technically Important Gases, Trans. ASME, 76(7) : 1067—1074 (October 1954).

14. **J. Hilsenrath,** et al., Tables of Thermal Properties of Gases, Natl. Bur. Standards Circ. 564, November 1955.

15. **F. G. Keyes, D. J. Sandell, Jr.,** New Measurements of the Heat Conductivity of Steam and Nitrogen, Trans. ASME, 72(6) : 767—778 (August 1950).

16. **Lees, Charles H.,** Conductivities of Metals and Alloys at Low Temperatures, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 208A : 381 (1908).

17. **Lenoir, John M.,** Thermal Conductivity of Gases at Atmospheric Pressure, Univ. Ark. Eng. Exp. Sta. Bull. 18, August 1953.

18. **W. W. Coblentz,** The Diffuse Reflecting Power of Various Substances, Bull. Bur. Standards, 9 : 283—324 (1913).

19. **C. F. Randolph, M. J. Overholser,** Phys. Rev., 2:144 (1915).

20. **E. O. Hulbert,** Astrophys. J., 42 : 205 (1915).

21. **G. K. Burgess, P. D. Foote,** Bull. Bur. Standards, 11 : 41 (1915—1916); 12 : 83 (1915—1916).

22. **E. Schmidt,** Gesundh. Ingr., 20 (1927).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

МОНОГРАФИИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

1. Акопян А. А., Общая термодинамика, Госэнергоиздат, 1955.
2. Андреев П. А. и др., Жидко-металлические теплоносители ядерных реакторов, Судпромгиз, 1959.
3. Антуфьев В. М. и Ламм Ю. А., Теплообменные аппараты новой конструкции для газотурбинных установок, Машгиз, 1956.
4. Берман Л. Д., Теплообменные аппараты и конденсационные устройства турбоустановок, Машгиз, 1959.
5. Боришанский В. М., Теплоотдача при кипении под высоким, сверхвысоким и околокритическим давлением, Машгиз, 1958.
6. Брдлик П. М. и др., Теплопередача, под ред. проф. П. Н. Романенко, 1956.
7. Введенский А. А., Термодинамические расчеты нефтехимических процессов, Гостоптехиздат, 1960.
8. Возновач П. Д., Охлаждение металлургических печей высокотемпературными теплоносителями, Металлургиздат, 1959.
9. Вопросы массопередачи. Научно-методическая конференция, Госхимиздат, 1957.
10. Вопросы теплопередачи и методы определения теплофизических характеристик, под редакцией проф. С. И. Щепкина (Труды Московского института химического машиностроения, т. 15), 1958.
11. Воронин Г. И., Основы термодинамики и теплопередачи, Оборонгиз, 1958.
12. Воскресенский К. Д., Сборник расчетов и задач по теплопередаче, изд. 2-е, Госэнергоиздат, 1959.
13. Вукалович М. П., Термодинамические свойства воды и водяного пара, изд. 6-е, Машгиз, 1958.
14. Вукалович М. П., Термодинамические свойства воды и водяного пара. Таблицы и диаграммы, изд. 5-е, Машгиз, 1955.
15. Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Физматгиз, 1959.
16. Дорфман Л. А., Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел, Физматгиз, 1960.
17. Дьяконов Г. К., Вопросы теории подобия в области физико-химических процессов, изд. АН СССР, 1956.
18. Жуковский В. С., Основы теории теплопередачи, Госэнергоиздат, 1960.
19. Забродский С. С., Перенос тепла псевдоожиженным слоем зернистого материала, 1958.
20. Исследования в области тепловых измерений (сборник статей), Машгиз, 1956.
21. Исследование в области тепловых измерений и теории теплообмена, под ред. проф. Г. М. Кондратьева, Стандартгиз, 1958.

22. Исследование теплоотдачи к пару и воде, кипящей в трубах при высоких давлениях (сборник), под ред. чл.-корр. АН СССР Н. А. Доллежаль, Атомиздат, 1958.
23. Катыс Г. П., Методы и приборы для измерения параметров нестационарных тепловых процессов (температура, давление, расход), Машгиз, 1959.
24. Кириллин В. А., Шейндлин А. Е. и Шпильрайн Э. Э., Задачник по технической термодинамике, изд. 2-е, Госэнергоиздат, 1957.
25. Конаков П. К., Теория подобия и ее применение в теплотехнике, Госэнергоиздат, 1959.
26. Конвективный и лучистый теплообмен (сборник статей), изд. АН СССР, 1960.
27. Кондратьев Г. М., Тепловые измерения, Машгиз, 1957.
28. Корнеев Б. Г., Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях, Физматгиз, 1960.
29. Кутателадзе С. С., Основы теории теплообмена, Машгиз, 1957.
30. Кутателадзе С. С. и Боришанский В. М., Справочник по теплопередаче, Госэнергоиздат, 1958.
31. Лавров Н. В. и др., Термодинамика реакций газификации и синтеза их газов, изд. АН СССР, 1960.
32. Левич В. Г., Физико-химическая гидродинамика, Физматгиз, 1959.
33. Литвин А. М., Теоретические основы теплотехники, изд. 4-е, перераб. и доп., Госэнергоиздат, 1960.
34. Литвин А. М., Техническая термодинамика, изд. 3-е, перераб. и доп., Госэнергоиздат, 1956.
35. Лыков А. В. и Михайлов Ю. А., Теория переноса энергии и вещества, изд. АН БССР, 1959.
36. Лыков М. В., Тепло- и массообмен в процессах сушки, Госэнергоиздат, 1956.
37. Лыков М. В., Сушка распылением, Пищепромиздат, 1955.
38. Лыков А. В., Теоретические основы строительной теплофизики, изд. АН БССР, 1961.
39. Микрюков В. Е., Курс термодинамики, изд. 3-е, Учпедгиз, 1960.
40. Микрюков В. Е., Теплопроводность и электропроводность металлов и сплавов. Металлургиздат, 1959.
41. Михеев М. А., Основы теплопередачи, изд. 3-е, перераб., Госэнергоиздат, 1956.
42. Пляцко Г. В., Нестационарные задачи теплопроводности и термоупругости с приложением к расчету элементов теплосиловых установок, изд. АН УССР, 1960.
43. Предводителев А. С. и др., Термодинамические функции воздуха для температур от 1 000 до 12 000° К и давлений от 0,001 до 1 000 *ата*, изд. АН СССР, 1960.
44. Ралко А. В., Экспериментальное исследование тепло- и массообмена при фазовых и химических превращениях, Госстройиздат УССР, 1958.
45. Смольский Б. М., Внешний тепло- и массообмен в процессе конвективной сушки, изд. Белгосуниверситета, 1957.
46. Сыромятников Н. Н., Волков В. Ф., Процессы в кипящем слое, Металлургиздат, 1959.
47. Сушков В. В., Техническая термодинамика, изд. 6-е, перераб., Госэнергоиздат, 1960.

48. Тареев В. М., Справочник по тепловому расчету рабочего процесса двигателей внутреннего сгорания, «Речной транспорт», 1959.
49. Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах (сборник), под ред. академика АН БССР А. В. Лыкова, Госэнергоиздат, 1957.
50. Вопросы теплообмена (сборник), пер. с англ., Госэнергоиздат, 1959.
51. Тепло- и массообмен в процессах испарения (сборник), под ред. А. В. Лыкова, изд. АН СССР, 1958.
52. Теплообмен и гидродинамика, изд. АН УССР, 1958.
53. Теплообмен и гидродинамика, вып. 2, изд. АН УССР, 1956.
54. Теплообмен при высоких тепловых нагрузках и других специальных условиях (сборник), под ред. А. А. Арманда, Госэнергоиздат, 1959.
55. Теплофизические свойства веществ. Справочник, под ред. проф. Н. Б. Варгафтика, Госэнергоиздат, 1956.
56. Тимрот Д. Л. и др., Таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара, изд. 2-е, Госэнергоиздат, 1958.
57. Фукс Н. А., Испарение и рост капель в газообразной среде, изд. АН СССР, 1958.
58. Чечеткин А. В., Высокотемпературные теплоносители, Госэнергоиздат, 1957.
59. Чиркин В. С., Теплопроводность промышленных материалов. Справочное пособие, Машгиз, 1957.
60. Чиркин В. С., Теплофизические свойства материалов. Справочное руководство, Физматгиз, 1959.
61. Чистяков С. Ф., Краткий справочник по теплотехническим приборам и регуляторам, Госэнергоиздат, 1960.
62. Швец И. Т. и Федоров В. И., Вопросы нестационарного теплообмена в роторах турбин, изд. Киевского университета, 1960.
63. Шевельков В. Л., Теплофизические характеристики изоляционных материалов, Госэнергоиздат, 1958.
64. Ястржембский А. С., Техническая термодинамика, изд. 8-е доп. и перераб., Госэнергоиздат, 1960.
65. Босворт Р. Ч. Л., Процессы теплового переноса, пер. с англ. Б. Б. Доценко, под ред. Ю. А. Суринова, Гостехиздат, 1957.
66. Бошнякович Ф., Техническая термодинамика, пер. с нем. и ред. М. П. Вукаловича и В. А. Кириллина, ч. 1, Госэнергоиздат, 1955.
67. Бошнякович Ф., Техническая термодинамика, пер. с нем. и ред. М. П. Вукаловича и В. А. Кириллина, ч. 2, Госэнергоиздат, 1956.
68. Гребер Г., Эрк С. и Григуль У., Основы учения о теплообмене, пер. с нем., изд. Иностранной литературы, 1958.
69. Гроот С. Р., Термодинамика необратимых процессов, пер. Д. М. Левина, под ред. А. В. Лыкова, Гостехиздат, 1956.
70. Грю К. Э. и Иббс Т. Л., Термическая диффузия в газах, пер. с англ. И. С. Максимовой, под ред. А. В. Лыкова, Гостехиздат, 1956.
71. Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем. В. Л. Бонч-Бруевича и В. Б. Сандомирского, изд. Иностранной литературы, 1955.
72. Ингерсолл Л. Р. и др., Теплопроводность, ее применение в технике и геологии, пер. с англ., Машгиз, 1959.
73. Пригожин И., Введение в термодинамику необратимых процессов, пер. с англ., изд. Иностранной литературы, 1960.
74. Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи (сборник оригинальных статей), под ред. проф. Г. Гертлера и проф. Толлми-

на, пер. с англ. и нем., под ред. проф. В. А. Баума, Госэнергоиздат, 1960.

75. Шнейдер П., Инженерные проблемы теплопроводности, пер с англ., изд. Иностранной литературы, 1960.

76. Эккерт Э. Р., Введение в теорию тепло- и массообмена, — пер. с англ. И. А. Носенко, под ред. А. В. Лыкова, Госэнергоиздат, 1957.

77. Якоб М., Вопросы теплопередачи, пер. с англ., изд. Иностранной литературы, 1960.

СТАТЬИ И АВТОРЕФЕРАТЫ

Расчетно-аналитические методы решения задач тепло- и массопереноса

1. Авдуевский В. С., Оброскова Е. И., Исследование ламинарного пограничного слоя на пористой пластинке с учетом тепломассообмена, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Механика и машиностроение, 1960, № 4. —

2. Авдуевский В. С. и Копяткевич Р. М., Расчет ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии теплообмена и произвольном распределении давления вдоль поверхности, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Механика и машиностроение, 1960, № 1. —

3. Андрианкин Э. И., Распространение неавтомодельной тепловой волны, Журнал эксперим. и теор. физики, 35, 1958, № 2.

4. Андрианкин Э. И. и Рыжов О. С., Распространение тепловой волны, близкой к сферической, Доклады АН СССР, т. 115, 1957, № 5.

5. Андрианкин Э. И., Тепловая волна, излучающая энергию с фронта, № 11, Журнал техн. физики, т. 29, 1959.

6. Андрианов В. Н., Некоторые задачи теории лучистого теплообмена в одномерных схемах, «Теплоэнергетика», 1960, № 6.

7. Аксенов А. П., Турбулентный пограничный слой конуса в сверхзвуковом потоке с учетом теплоизлучения, Вестник Ленинградского института, серия математики, механики и астрономии, № 19, вып. 4, 1957.

8. Алявдин И. Н., Расчет несимметричного прогрева пластины, Научн. труды Моск. технолог. института легкой промышленности, сборник 5, 1955.

9. Амброк Г. С., Влияние переменности температуры поверхности на теплообмен при ламинарном течении в пограничном слое, Журнал техн. физики, т. 27, вып. 4, 1957.

10. Асатурян А. Ш. и Тонкошкуров Б. А., Свободная тепловая конвекция вблизи горизонтального цилиндра в высоковязких средах, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

11. Бойков Г. П. и Короленко Ю. А., Температурное поле в телах эллипсного сечения при внутренних источниках тепла, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

12. Бер Л. Э., К теории термогравитационной конвекции в условиях турбулентного режима, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, 1957, № 11.

13. Бер Л. Э., Об одном методе решения задач неизотермической турбулентной конвекции, в канале между параллельными плоскостями, Журнал техн. физики, т. 29, № 1, 1959.

14. Берг В. А., О построении температурного поля в снеголедя-

ном покрове, Труды Ленингр. гидрометеороло г. института, вып. 5—6, 1956.

15. Берлянд О. С., Об одном методе решения уравнения диффузии (теплопроводности), Инж.-физич. журнал, т. 2, № 5, 1959.

16. Берман Л. Д., Об аналогии между тепло- и массообменом, «Теплоэнергетика», 1955, № 8.

17. Бойков Г. П., Анализ прогрева тел под действием лучистого тепла на основе теории подобия, Известия Томского политехн. института, 101, 1958.

18. Бойков Г. П., К вопросу исследования прогрева тел под действием лучистого тепла на основе теории подобия, Известия высш. учеб. заведений, Черная металлургия, 1960, № 8.

19. Бойков Г. П., Негодяева Н. Н., Николаева Г. В., Квазистационарный прогрев пластины при наличии дополнительных стенок, Известия Томского политехн. института, 101, 1958.

20. Бойков Г. П., Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла, Сообщ. 1 и 2, Известия Томского политехн. института, т. 101, 1958.

21. Бойков Г. П., Скоростной расчет прогрева тел под действием лучистого тепла, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 10.

22. Бойков Г. П., Температурные поля в телах конечных размеров при внутреннем тепловыделении, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 5, 1959.

23. Большов В. П., Мичков Е. М. и Усманов А. Г., Исследование распределения температур в поперечном сечении каталитического реактора методом гидротепловой аналогии, Труды Казанского хим.-технолог. института, вып. 19—20, 1955.

24. Борисенко А. И. и Мышкис А. Д., Температурное и скоростное поля при ламинарном движении жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами, Прикладная математика и механика, Отдел. техн. наук АН СССР, т. 23, вып. 4, 1959.

25. Бояршинова А. А., Некоторые результаты исследования теплового конвективного движения в вертикальном цилиндре ограниченной длины, Уч. зап. Молотовского университета, 9, № 4, 1955.

26. Бровкин Л. А., Закономерность основной стадии нагрева твердых тел, Научн. докл. высшей школы, Металлургия, 1959, № 1.

27. Бровкин Л. А., Метод приближенного расчета нагрева тел при переменной температуре среды, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1958, № 6.

28. Бровкин Л. А., Нагрев тел лучеиспусканием в среде с переменной температурой, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1959, № 7.

29. Будрин Д. В., Гидростатический интегратор для решения дифференциального уравнения теплопроводности с учетом зависимости теплофизических свойств (коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости) от температуры, Труды Уральского политехн. института, сб. 58, 1955.

30. Будрин Д. В., Суханов Е. Л., Коэффициенты для расчета нагрева или охлаждения тел простой формы, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 2, 1959.

31. Будрин Д. В. и Суханов Е. Л., Регуляризация температурных полей тел простой формы, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 1, 1959.

32. Будрин Д. В., Суханов Е. Л., Температурное поле в архимедовом цилиндре при регулярном тепловом режиме, Известия высш. учебных заведений, Приборостроение, 1958, № 5.

33. Бузник В. М. и Везломцев К. А., Исследование теплоотдачи цилиндра в условиях смешанной конвекции. Труды Николаевского кораблестроительного института, вып. 19, 1959.

34. Бутузов А. И., К вопросу о передаче тепла через стержень переменного сечения при условии внутреннего обогрева, Известия Киевского политехнич. института, т. 30, Сборник трудов теплотехн. фак., ч. 1, 1960.

35. Бэр Л. Э., К теории термогравитационной конвекции в условиях турбулентного режима, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1957, № 11.

36. Вентцель Т. Д., Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности, Доклады АН СССР, т. 131, № 5, 1960.

37. Ветров Б. Н., Тодес О. М., Распространение тепловой волны при прогреве шихты потоком газа, Журнал техн. физики, т. 25, № 7, 1955.

38. Вирозуб И. Е., Приближенный метод расчета полей скоростей и температур при обтекании профиля ламинарным потоком сжимаемой жидкости с теплообменом, Сборник трудов Института теплоэнергетики АН Укр. ССР, № 14, 1958.

39. Вулис Л. А., К расчету свободных турбулентных течений с помощью эквивалентной задачи теории теплопроводности, Известия АН Казах. ССР, Серия энергетическая, вып. 2(18), 1960.

40. Вулис Л. А. и Устименко Б. П., К расчету теплоотдачи к жидким металлам, Известия АН Казах. ССР, Серия энергетическая, вып. 2, 1959.

41. Вулис Л. А., Трофименко А. Т., Тепловые задачи для ламинарной струи, распространяющейся вдоль стенки, Журнал техн. физики, т. 26, № 12, 1956.

42. Вулис Л. А., Турбулентный перенос тепла и вещества при струйном движении газа. В сборнике «Вопросы аэродинамики и теплопередачи в котельно-топочных процессах», Госэнергоиздат, 1958.

43. Вульфсон Н. И., Статистические методы определения действительных параметров конвективных потоков по наблюдениям, Известия АН СССР, Серия геофизическая, 1958, № 7.

44. Гаврилова Р. И. и Прудников А. П., Об одной задаче теории теплопроводности, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

45. Гамаюнов Н. И., Исследование переноса тепла и влаги в ограниченном стержне, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 4, 1960.

46. Гамаюнов Н. И., Новый метод определения коэффициентов тепло- и массообмена, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

47. Гамаюнов Н. И., О критериях неизотермического переноса, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

48. Гвоздков Н. Н., О распространении тепла в твердом пористом теле при просачивании жидкостей, Вестник Моск. университета, Серия математики, механики, астрономии, физики, химии, 1958, № 1.

49. Гвоздков Н. Н., О турбулентном трении и теплоотдаче конуса, обтекаемого газодинамическим потоком, Труды Воронежского университета, т. 42, вып. 2, 1956.

50. Гершуни Г. З., К вопросу об устойчивости плоского конвективного движения жидкости, Журнал техн. физики, т. 25, № 2, 1955.

51. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными верти-

кальными плоскостями, Известия высш. учебных заведений, Физика, 1958, № 4.

52. Глебов Ю. С., Особые случаи регулярного теплового режима второго рода, Научные труды Ленинградского института точной механики и оптики, вып. 37, 1959.

53. Голованов О. М., Влияние силы на коэффициент конвективного теплообмена и сопротивления при обтекании тел с отрывом, Сборник научн. трудов (Куйбышевского индустриального института), вып. 8, Теплотехника, 1959.

54. Голованов О. М., Применение теории подобия к выводу уравнения гидродинамической теории теплообмена при обтекании тел с открывом, Сборник научных трудов Куйбышевского индустриального института, вып. 2, Теплоэнергетика, 1957.

55. Гордов А. Н., О регулярном тепловом режиме 2-го рода, Труды ВНИИ метрологии, вып. 25, 1955.

56. Гордов А. Н., О распространении температурных волн в цилиндре, Журнал техн. физики, т. 25, № 8, 1955.

57. Гордов А. Н., Применение теории теплообмена к исследованию калориметрического опыта, Труды ВНИИ метрологии, вып. 25, 1955.

58. Гордов А. Н., Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующими скоростью и температурой, Приклад. матем. и мех., т. 29, № 2, 1955.

59. Гордов А. Н., Температурное поле тел в условиях переменной температуры среды и меняющейся теплоотдачи, Труды ВНИИ метролог., вып. 35(95), 1958.

60. Горяинов Л. А., Об аналитических методах решения задачи теплообмена движущейся излучающей среды с тепловоспринимающей поверхностью, Труды Московского института инженеров ж.-д. транспорта, вып. 125, 1960.

61. Горяинов Л. А. и Кумсков В. Т., К вопросу расчета лучистой составляющей сложного теплообмена, Труды Московского института инженеров ж.-д. транспорта, вып. 112, 1959.

62. Григорьев Б. А., Некоторые задачи лучистого нагрева неограниченной пластины, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 9, 1958.

63. Григорьев Б. А., Некоторые задачи нагрева неограниченной пластины нестационарными лучистыми потоками, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1958.

64. Данилова И. Н., О температурном поле в конечном полом цилиндре при теплообмене на границах, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, Энергетика и атвоматика, 1960, № 4.

65. Дворниченко П. В., Некоторые соображения о методике расчета теплообмена и гидравлического сопротивления при течении газа с большой скоростью, Журнал техн. физики, т. 26, № 7, 1956.

66. Докучаев Н. Ф., К вопросу о физической природе коэффициентов тепло- и массообмена, Сборник трудов Всесоюзного заочного института пищевой промышленности, 1958, № 3.

67. Дульнев Г. Н. и Кондратьев Г. М., Обращенная теория регулярного теплового режима, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, 1956, № 7.

68. Дульнев Г. Н., Принцип местного влияния в теории теплопроводности, Научн. труды Ленинградского института точной механики и оптики, вып. 37, 1959.

69. Дульнев Г. Н., Семякин Э. М., Сравнение двух методов измерения коэффициента теплоотдачи. В сборнике «Исследования в области тепловых измерений и приборов», 1957.

70. Ермаков В. С., Исследование процессов переноса тепла в тепловыделяющих элементах ядерного реактора, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 9, 1958.

71. Ермаков В. С., Исследование температурного поля в тепловыделяющих элементах ядерного реактора, Труды Института энергетики АН БССР, вып. 9, 1959.

72. Ермаков В. С., К вопросу о нестационарном температурном поле в тепловыделяющем элементе реактора, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

73. Ермаков В. С., Нестационарное температурное поле в тепловыделяющих элементах реактора, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 4, 1960.

74. Ермаков В. С., Жук И. П., Ярошевич О. И., К расчету температур в тепловыделяющих элементах ядерного реактора в переходных режимах, Инж.-физич, журнал, т. 4, № 1, 1961.

75. Ермаков В. С., Жук И. П., Ярошевич О. И., К вопросу нестационарной теплопроводности в тепловыделяющих элементах ядерного реактора, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 5, 1961.

76. Зысина-Моложен Л. М., Исследование влияния продольного градиента давления на развитие пограничного слоя, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 4, 1959.

7. Зысина-Моложен Л. М., Некоторые количественные характеристики перехода от ламинарного течения к турбулентному в пограничном слое, Журнал техн. физики, т. 25, № 7, 1955.

78. Зысина-Моложен Л. М., О характере перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое, Журнал техн. физики, т. 25, № 7, 1955.

79. Зысина-Моложен Л. М., Приближенный метод расчета теплового пограничного слоя, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 5, 1959.

80. Калихман Л. Е., Теплообмен в окрестности передней критической точки в осесимметрическом и плоском потоке газа, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1955, № 8.

81. Калихман Л. Е., Турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости на пористой стенке, Журнал техн. физики, т. 25, № 11, 1955.

82. Капинос В. М., Мацевиный Ю. М., К определению температурного поля с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1959, № 11.

83. Ким Е. И., Об одной задаче теплообмена системы тел, Прикл. матем. и мех., т. 21, № 5, 1957.

84. Коздоба Л. А. и Махненко В. И., Электрическое моделирование нестационарных температурных полей при наличии переменных источников тепла, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

85. Коздоба Л. А., Применение сеток сопротивления для решения задач нестационарной теплопроводности, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 7, 1960.

86. Костерин С. И., Кошмаров Ю. А., К расчету сопротивления и теплообмена тел в потоке газа при наличии турбулентного пограничного слоя, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 7, 1958.

87. Коцобинский О. Ю. и Хинчин А. С., Метод определения теплопроводности и объемной теплоемкости твердых и сыпучих тел в зависимости от температуры, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 11, 1958.

88. Кравчук Е. М., Определение тепловых коэффициентов сыпучих и твердых материалов по методу плоских тепловых волн, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 10, 1958.

89. Кубанский П. Н., Влияние акустических течений на процесс конвективного теплообмена, Акустический журнал, т. 5, вып. 1, 1959.

90. Кудряшев Л. И. и Ипатенко А. Я., Влияние свободного движения на коэффициент теплоотдачи при обтекании пара в области малых чисел Рейнольдса, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 3, 1959.

91. Кудряшев Л. И., Обобщение гидродинамической теории теплообмена на случай обтекания тел с отрывом, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1953, № 9.

92. Кудряшев Л. И., Теория подобия как метод построения приближенного аналитического решения задач гидромеханики и теплообмена, Сборник научн. трудов Куйбышевского индустриального института, 1956, т. 1, № 6.

93. Кузнецов С. П., Применение теории нестационарных полей температуры и влажности к определению коэффициентов термо- и влагопроводности, Известия Томского политехн. института, т. 89, 1957.

94. Кутателадзе С. С., Ивашенко Н. И., Заблоцкая Т. В., О влиянии внутреннего источника тепла на коэффициент теплоотдачи, Атомная энергия, т. 7, вып. 3, 1959.

95. Лабунцов Д. А., Номограммы для расчета температурного поля твердых тел, охлаждаемых (нагреваемых) в среде с постоянной температурой, «Теплоэнергетика», 1958, № 7.

96. Леонтьев А. И., Аналитическое исследование течения газа в цилиндрической трубе при наличии теплообмена, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 5, 1958.

97. Логинов Л. И. и Юшков П. П., Численное интегрирование системы уравнений тепломассообмена с помощью неявных формул. Инж.-физич. журнал, т. 3, № 10.

98. Лойцянский Л. Г., Перенос тепла в турбулентном движении, Прикладная математика и механика, т. 24, вып. 4, 1960.

99. Лыков А. В., К исследованию тепло- и массообмена в бинарных газовых смесях. Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

100. Лыков А. В. и Смирнов М. С., К исследованию кинетики процесса сушки, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1956, № 8.

101. Лыков А. В. и Прудников А. П., К исследованию явлений переноса тепла и вещества в пористых телах, Доклады АН БССР, т. 2, № 8, 1958.

102. Лыков А. В., К теории теплового регулярного режима, Доклады АН БССР, т. 1, № 2, 1957.

103. Лыков А. В., Кинетика прогрева твердых тел. В сборнике «Затвердевание металлов», Машгиз, 1958.

104. Лыков А. В. Массотеплообмен при фазовых и химических превращениях. В сборнике «Проблемы энергетики», АН СССР, 1959.

105. Лыков А. В., Молярно-молекулярный массо- и теплоперенос в капиллярно-пористых телах, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 10, 1960.

106. Лыков А. В., Применение теории Онзагера к исследованию переноса тепла и вещества, Труды Института энергетики АН БССР, вып. 4, 1958.

107. Лыков А. В., Тепло- и массообмен в дисперсных средах при фазовых превращениях, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 6, 1958.

108. Лыков А. В., Тепло- и массообмен при фазовых и химических превращениях. В сборнике «Тепло- и массообмен в процессах испарения», изд. АН СССР, 1958.

109. Маковозов М. И., Применение системы дифференциальных уравнений тепло- и массообмена к процессу контактной сушки. Журнал техн. физики, т. 25, вып. 14, 1955.

110. Мартынов Г. А., О решении обратной задачи Стефана в случае сферической симметрии, Журнал техн. физики, т. 30, № 2, 1960.

111. Мацкевич И. П., Решение задачи стационарной теплопроводности для плоскости с n — эллиптическими вырезами. Инж.-физич. журнал, т. 2, № 4, 1959.

112. Машовец В. П. и Коробов М. А., Условия электрического моделирования теплового поля с внутренними источниками тепла, Журнал техн. физики, т. 28, вып. 10, 1958.

113. Меркулов В. И., Теплообмен в плоском установившемся потоке вязкой жидкости, Прикладная математика и механика, т. 23, вып. 3, 1959.

114. Меркулов В. И., Теплообмен между жидкостью и тепловыделяющим стержнем, Известия АН УССР, 1959, № 9.

115. Михайлов Ю. А., Применение системы дифференциальных уравнений тепло- и массообмена к процессу конвективной сушки. Известия АН Латв. ССР, 1956, № 12.

116. Мотулевич В. П., Расчет теплообмена и скорости разрушения тел в потоке газа без продольных градиентов давления при наличии на их поверхности источников инородного вещества, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 10, 1958.

117. Мотулевич В. П., Расчет теплообмена и трения плоской пластины, обдуваемой сверхзвуковым потоком, при наличии пористого подвода газа и сублимации в условиях ламинарного пограничного слоя, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Энергетика и автоматика, 1959, № 1.

118. Мотулевич В. П., Теплообмен в лобовой точке тупых тел, омываемых потоком жидкости, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

119. Мотулевич В. П., Теплообмен и трение пластины в потоке газа при образовании турбулентного пограничного слоя с пористой подачей инородного вещества, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 8, 1960.

120. Мочалин А. И., Задача теплопроводности для неограниченного цилиндра, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

121. Мочалин А. И., Применение функции Дирака к решению задач теплопроводности, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 5, 1958.

122. Мочалин А. И., Совместное использование функции Дирака и интегральных преобразований, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 10, 1959.

123. Мочалин А. И., Нагревание шара мгновенным поверхностным источником тепла, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 1, 1961.

124. Мочалин А. И., Нагревание ограниченного цилиндра мгновенным точечным источником тепла, Инж.-физич. журнал, № 4, № 2, 1961.

125. Новожилов В. И., Исследование температурного поля в слое воздуха у нагретой плоской поверхности, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 6, 1958.

126. Олейник Б. Н., Регуляризация температурных полей, Научн. труды Ленинградского института точной механики и оптики, вып. 37, 1959.

127. Олейник Б. Н., Регуляризация тепловых процессов, Труды ВНИИ метролог., вып. 35/95, 1958.

128. Перельман Т. Л., Теплообмен в ламинарном погранич-

ном слое при обтекании тонкой пластины с внутренними источниками, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 5, 1961.

129. Перельман Т. Л., Распределение температур в цилиндре с внутренними источниками и охлаждающем его турбулентном потоке жидкости, Инж.-физич журнал, т. 3, № 11, 1960.

130. Перельман Т. Л., Температурное поле в конечном цилиндре с внутренними источниками, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

131. Петрикевич В. А., Исследование теплообмена в узком канале методом плиты, Известия высш. учебных заведений. Авиац. техника, 1959, № 5.

132. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Мальтер В. Л., Теплообмен в трубах при наличии в потоке жидкости внутренних источников тепла, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 9.

133. Петухов И. В., О численном интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя, Доклады АН СССР, т. 132, № 2, 1960.

134. Плят Ш. Н., Распределение температуры в абразивных изделиях в процессе термической обработки (обжига), Инж.-физич. журнал, т. 3, № 7, 1960.

135. Полонская Ф. М., Применение теории Онзагера к исследованию переноса тепла и вещества в пористых телах, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 4, 1958.

136. Полушкин А. А., К вопросу о конвективном теплообмене в условиях внутренней задачи, Инж. физич.-журнал, т. 1, № 2, 1958.

137. Полушкин А. А., О критериях подобия тепло- и массообмена в процессах испарения жидкости (обзор), Инж.-физич. журнал, т. 2, № 2, 1959.

138. Порхаев А. П., Применение теории Онзагера к исследованию процессов тепло- и массообмена, Труды Московского технологического института пищевой промышленности, вып. 9, 1957.

139. Прокофьев В. А., Осреднение по направлениям уравнения переноса лучистой энергии, Вестник Московского университета, серия матем., механ., астрон., физики, химии, 1958, № 2.

140. Прокофьев В. А., Уравнения переноса интегральных функций радиационного поля, Вестник Московского университета, серия матем., механики, астрон., физики, химии, 1958.

141. Прудников А. П., Решение некоторых задач теории молекулярного переноса для тел простейшей формы, Известия АН, Отдел. техн. наук, 1957, № 8.

142. Прудников А. П., Решение одной смешанной краевой задачи теории термодиффузии, Доклады АН СССР, т. 120, № 2, 1958.

143. Рабинович Г. Д., Нестационарный теплообмен в противоточном рекуперативном аппарате, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 2, 1961.

144. Рабинович Г. Д., Задача о нестационарном охлаждении ограниченного объема жидкости, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 3, 1961.

145. Рабинович Г. Д., Задача об охлаждении однородного цилиндрического стержня с внутренними источниками тепла в потоке жидкости, Труды Института энергетики АН БССР, вып. 6, 1958.

146. Рабинович Г. Д., К расчету теплообменных аппаратов, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 3, 1958.

147. Рабинович Г. Д., К расчету теплообменных аппаратов, Журнал техн. физики, т. 28, вып. 5, 1958.

148. Рабинович Г. Д., Некоторые задачи нестационарного теплообмена в слое дисперсного материала, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 4, 1960.

149. Регирер С. А., О тепловом эффекте при течении электропроводной жидкости между параллельными стеками, Приклад. матем. и мех., АН СССР, т. 23, вып. 5, 1959.

150. Редозубов Д. В., О линейных тепловых задачах с одной движущейся границей, Журнал техн. физики, т. 27, № 9, 1957.

151. Редозубов Д. В., Об одном способе применения контурных интегралов к решению одномерных задач теории теплопроводности, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 1, 1959.

152. Романенко С. В. и Тамразов П. М., Основные задачи термодинамики потока с учетом реальных граничных условий, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1959, № 1.

153. Романенко С. В., Течение вязкого газа в цилиндрической трубе с теплообменом при наличии скачка уплотнения, Журнал техн. физики, т. 25, вып. 6, 1955.

154. Рубцов Н. А., К расчетам теплообмена в сложных системах лучеобменивающихся серых тел, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 8, 1960.

155. Семяшкин Э. М., Определение коэффициента лучеиспускательной способности поверхностей на основе теории регулярного режима, Известия высш. учебных заведений, Приборостроение, 1958, № 1.

156. Сидоров Э. А., К расчету сопротивления и конвективного теплообмена при турбулентном нестационарном режиме, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

157. Сидоров Э. А., О связи поверхностного трения с теплообменом, Журнал техн. физики, т. 27, вып. 3, 1957.

158. Сидоров Э. А., Обобщение решения Гретца на случай лучистого теплообмена, Известия АН СССР, Отд. техн. наук, Энергетика и автоматика, 1959, № 6.

159. Сидоров Э. А., Учет влияния нестационарности режима при конвективном теплообмене, «Теплоэнергетика», 1958, № 4.

160. Смирнов А. Г., Теория некоторых магнитогидродинамических явлений свободной тепловой ламинарной конвекции электропроводящей жидкости в вертикальной трубе в слабом магнитном поле, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 10, 1959.

161. Смирнов М. С., Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и влаги при наличии испарения и граничных условий второго рода, Труды Всесоюзного научно-исследовательского кинофотоинститута, вып. 2, 1958.

162. Смирнов М. С., Температурное поле в трехслойной стенке при граничном условии четвертого рода. Труды Московского технологического института пищевой промышленности, вып. 8, 1957.

163. Соколов В. А., О некоторых особенностях теплового излучения, Известия Томского политехн. института, 86, 1958.

164. Степанчук В. Ф., Хутский Г. И., Об одной теории теплоты (О работах А. И. Вейника), Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1960, № 5.

165. Суринов Ю. А., О некоторых вопросах теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей среде, Доклады АН СССР, т. 123, № 5, 1958.

166. Суринов Ю. А., Об основных методах современной теории лучистого теплообмена. В сборнике «Проблемы энергетики», АН СССР, 1959.

167. Суринов Ю. А., Решение одной смешанной задачи поля теплового излучения, Известия высш. учебных заведений, Физика, 1959, № 2.

168. Текучев А. Н., Теплообмен при неселективном излучении через прозрачную плоскопараллельную пластинку между двумя «серыми» параллельными поверхностями, Труды Рязанского радиотехнического института, т. 4, 1958.

169. Темкин А. Г., Инерция температурных полей, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 12, 1959.

170. Темкин А. Г., Инерция температурных полей, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 1, 1960.

171. Титов А. М., Интегральные оптические параметры поверхности тела и их роль в теории лучистого теплообмена, Труды Краснодарского института пищевой промышленности, вып. 12, 1955.

172. Трофимов Е. П., Задача о нестационарном поле температур неограниченного полого цилиндра, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 10, 1960.

173. Умаров С. У., Хайдарова С. К., К теории явлений переноса тепла и электричества в полупроводниках, Доклады АН Уз. ССР, 1957, № 10.

174. Усольцев С. А., Решение уравнений теплопроводности для полуограниченного стержня, составленного из однородных частей с источниками, помещенными в точках соединений частей стержня, Ученые записки Казахстанского университета, т. 30, 1957.

175. Френкель В. Я., Теплообмен излучением между двумя бесконечными параллельными цилиндрами, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 4, 1960.

176. Цой П. В., Задача о переносе тепла и влаги при наличии испарения и краевых условий второго рода, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

177. Цой П. В., Краевая задача для обобщенной системы уравнений переноса энергии и вещества, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 4, 1961.

178. Чернаков П. В., О периодических решениях уравнения теплопроводности, Известия высш. учебных заведений, Математика, 1959, № 2.

179. Шимко Н. Г., Решение уравнения теплопроводности для трехслойного стержня, Труды Института энергетики АН БССР, вып. 4, 1958.

180. Шимко Н. Г., Юшков П. П., Об одном конечном интегральном преобразовании Ханкеля, Инж.-физич. журнал., т. 2, № 6.

181. Шубин Е. П., Метод приближенного решения трансцендентных уравнений при расчете теплообменников, «Теплоэнергетика», 1955, № 11.

182. Шубин Е. П., Новая приближенная формула для средней логарифмической разности температур, «Теплоэнергетика», 1957.

183. Шубин Е. П., Новые приближенные формулы для теплового расчета теплообменников, «Водоснабжение и сантехника», 1958, № 5.

184. Юшков П. П., О численном интегрировании системы дифференциальных уравнений переноса тепла и массы вещества, Труды Института энергетики АН БССР, вып. 10, 1959.

185. Юшков П. П., Об одной разностной схеме численного интегрирования уравнения теплопроводности, Доклады АН БССР, т. 1, № 3, 1957.

186. Юшков П. П., О численном интегрировании уравнения теплопроводности в случае, когда термические коэффициенты зависят от температуры, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 9, 1958.

187. Юшков П. П., Приближенное решение задач нестационар-

ной теплопроводности методом конечных разностей, Труды Института энергетики, вып. 6, 1958.

188. Юшков П. П. и Логинов Л. И., Численное интегрирование уравнения теплопроводности в пространстве трех измерений, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 2, 1958.

189. Ярышев Н. А., Применение метода акад. В. Г. Галеркина к решению некоторых задач теории регулярного теплового режима. В сборнике «Исследование в области тепловых измерений и приборов», 1957.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕПЛООБМЕНА

1. Адрианов В. Н., Применение метода электроаналогии к решению задач лучистого теплообмена, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Энергетика и автоматика, 1959, № 11.

2. Адрианов В. Н. и Поляк Г. Л., Применение фотографического метода в световом моделировании лучистого теплообмена, Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии, т. 5, вып. 2, 1960.

3. Адрианов В. Н. и Шорин С. Н., Лучистый теплообмен в потоке излучающей среды, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1958, № 5.

4. Амбразявичюс А. Б., Жукаускас А. А., Исследование теплоотдачи пластины в потоке капельной жидкости, Труды АН Литов. ССР, серия Б, 1959, № 3.

5. Амбразявичюс А. Б., Жукаускас А. А., К вопросу о влиянии направления теплового потока на теплоотдачу пластины в потоке жидкости, Труды АН Литов. ССР, Б, 4(16), 1958.

6. Андреевский А. А., Теплоотдача к одиночной трубе в поперечном потоке жидкости с малым числом Прандтля, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 10, 1959.

7. Андреевский А. А., Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра расплавленным натрием, Атомная энергия, т. 7, вып. 3, 1959.

8. Антуфьев В. М., Влияние температурных условий потока и стенки на теплообмен при поперечном смывании пучков труб капельной жидкости, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 7, 1961.

9. Арсеев А. В., Теплоотдача и сопротивление в трубах при высокотемпературном нагреве воздуха (К расчету воздухонагревателей), «Теплоэнергетика», 1959, № 6.

10. Бакиров Н. У., Конвективный теплообмен в сужающихся и расширяющихся осесимметричных соплах. Известия высших учебных заведений, Авиационная техника, 1958, № 4.

11. Бассель А. Б. и Гельперин, Теплообменные аппараты высокой интенсивности, Хим. наука и промышленность, т. 3, № 6, 1958.

12. Батищев Я. Ф., Исследование теплоотдачи от стенки к воздуху с насадкой из стальных шариков, Труды Новочеркасского политехн. института, т. 70/84,, 1957.

13. Баум В. А., Бологa М. К., Брдлик П. М., Теплообмен при поперечном обтекании плоских поверхностей, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

14. Болотина К. С., Исследование течений с трением и теплообменом в сверхзвуковых соплах, Автореферат дисс. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, М., 1959 (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова).

15. Бондарева А. К. и Тодес О. М., Теплопроводность и теплообмен в кипящем слое, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 2, 1960.

16. Будрин Д. В. и Суханов Е. Л., Коэффициенты для расчета нагрева или охлаждения тел простой формы, Инж.-физич. журнал, т. 2, 1959.

17. Бузник В. М. и Везломцев К. А., Некоторые результаты обобщения экспериментальных данных по интенсификации процессов конвективного теплообмена, Известия высших учебных заведений, Энергетика, 1959, № 8.

18. Бузник В. М. и Везломцев К. А., Обобщенное уравнение теплообмена естественной и вынужденной конвекцией при внешнем обтекании тел, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1960, № 2.

19. Бузник В. М. и Везломцев К. А., Характер изменения теплового пограничного слоя около горизонтального цилиндра при естественной конвекции, Труды Николаевского кораблестроительного института, вып. 19, 1959.

20. Бузник В. М., Ипатенко А. Я., Ролинский В. Ю., Экспериментальное исследование теплообмена на вибрирующей поверхности, Труды Николаевского кораблестроительного института, вып. 15, № 1.

21. Бурштейн А. И., Исследование стационарного теплового потока, протекающего сквозь проводник с током, Журнал техн. физики, т. 27, № 7, 1957.

22. Варыгин Н. Н. и Мартюшин И. Г., Расчет поверхности теплообмена в аппаратах с кипящим слоем, «Химическое машиностроение», 1959, № 5.

23. Введенская Л. А., К экспериментальному определению поправки к гидродинамической теории теплообмена при турбулентном движении в трубах, Сборник научных трудов Куйбышевского индустриального института, вып. 6, кн. 1, 1956.

24. Вестфрид Ф., О лучистом теплообмене в цилиндрических оболочках, «Теплоэнергетика», 1959, № 4.

25. Волчок Н. Ф., Лучистый теплообмен в топках трубчатых печей, Труды Гродненского нефт. института, № 19, 1956.

26. Волчок Л. Я., О погрешности приборов, обусловленной теплообменом измерительной проволоки с державками, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 6, 1959.

27. Воронин В. И., Сопротивление и теплоотдача конуса, обтекаемого сверхзвуковым газовым потоком, Труды Воронежского университета, т. 42, вып. 2, 1956.

28. Вышенский В. В., Конвективный теплообмен в циклонной камере, Труды института энергетики АН Казах. ССР, т. 2, 1960.

29. Гершуни Г. З. и Жуховицкий Е. М., О теплопередаче через вертикальную щель прямоугольного сечения при сильной конвекции, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

30. Гольденберг С. А. и Иевлев В. Н., Определение интенсивности турбулентности по тепловому источнику, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 2, 1959.

31. Горьков Л. П., Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 33, № 2, 1957.

32. Горянинов Л. А. и Кумсков В. Т., О конвективной составляющей сложного теплообмена при высоких температурах, Сборник Ленинградского института инженеров ж.-д. транспорта, вып. 160, 1958.

33. Девойно А. Н., Основные закономерности теплообмена

в разреженном газе при естественной конвекции, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

34. Дедусенко Ю. М., Влияние оребрения наружной поверхности на основные показатели перекрестноточных теплообменников газотурбинных установок. В сборнике «Труды лабораторий гидравлических машин», Акад. наук УССР, вып. 6. 1956.

35. Дейчман Б. С., Измерение температуры в потоке газа больших скоростей, Труды Уфимского авиационного института, вып. 2, 1956.

36. Дорощук В. Е., Фрид Ф. П., Исследование теплоотдачи в кольцевых каналах, «Энергомашиностроение», 1959, № 11.

37. Дорфман Л. А., Теплоотдача вращающегося диска, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 6, 1958.

38. Дубровин И. В., Теплоотдача при высоких температурах и поперечном обтекании трубных пучков, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1960, № 7.

39. Дульнев Г. Н., Теплообмен в ограниченных системах тел с источниками энергии. Автореферат дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук, М., 1957 (Энергетический институт имени Г. М. Кржижановского АН СССР).

40. Емельяненко О. В., Измерение температуры поверхности тел термопарой с контролируемым подогревом, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 10, 1960.

41. Еникеев М. П., Теплоотдача плоской поверхности при различных углах ее наклона в случае свободного движения воздуха, Труды Казанского с.-х. института, вып. 42, т. 3, 1959.

42. Ермолин В. К., Применение закрученного потока для интенсификации конвективного теплообмена в условиях внутренней задачи, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, Энергетика и автоматика, 1960, № 1.

43. Жукаускас, Макарявичюс, Индрюнас, Шланчяускас, Теплоотдача коридорного пучка труб в поперечном потоке жидкости, Труды АН Лит. ССР, Б, № 4, 1957.

44. Жукаускас, Макарявичюс, Индрюнас, Шланчяускас, Теплоотдача шахматного пучка труб $S_1/d=1{,}1$ и $S_2/d=1{,}9$ в поперечном потоке жидкости, Труды АН Лит. ССР, Б2/14, 1958.

45. Жукаускас А. А., Шланчяускас А. А., Яронис Э. П., Исследование влияния ультразвуковых волн на теплообмен тел в жидкостях, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 1, 1961.

46. Забродский С. С., К анализу экспериментальных данных по переносу тепла псевдоожиженным слоем, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 4, 1958.

47. Забродский С. С., К вопросу о теплообмене в псевдоожиженном (кипящем) слое, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 2, 1960.

48. Забродский С. С., К вопросу об эффективной теплопроводности развитого всевдоожиженного (кипящего) слоя, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 1, 1959.

49. Забродский С. С., О механизме теплоотдачи от стенки к псевдоожиженному слою зернистого материала, Известия АН БССР, Серия физ. технических наук, 1956, № 2.

50. Забродский С. С., Основные закономерности переноса тепла псевдоожиженным слоем, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 3, 1958.

51. Забродский С. С., Перенос тепла псевдоожиженным слоем зернистого материала. Автореферат-диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Минск, 1958 (Акад. наук БССР).

52. Зенкевич Б. А., К вопросу о законе подобия для критиче-

ской тепловой нагрузки при вынужденном движении жидкости, Атомная энергия, т. 4, № 1, 1958.

53. Зенкевич Б. А. и др., Критические тепловые нагрузки при продольном омывании пучка трубок водой, недогретой до температуры насыщения, Атомная энергия, т. 4, № 4.

54. Ибрагимов М. Х., Субботин В. И., Ушаков П. А., Исследование теплоотдачи при турбулентном течении в трубах тяжелых жидких металлов, Атомная энергия, т. 8, № 1, 1960.

55. Ивашкевич А. А., Критические тепловые потоки при вынужденном движении жидкости в каналах, Атомная энергия, т. 8, № 1, 1960.

56. Кавадеров А. В. и Самойлович Ю. А., Нагрев «тонких» тел одновременно излучением и конвекцией, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 7, 1959.

57. Казакова Е. А., Теплообмен с водой и этиловым спиртом при естественной конвекции вблизи критической точки, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

58. Калашников Н. В. и Черникин В. И., Исследование теплообмена между вибрирующими подогревателями и вязкими жидкостями, Доклады АН СССР, т. 119, № 4, 1958.

59. Караваев Н. М. и Майков В. П., К определению коэффициентов теплообмена в слое зернистого материала, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, 1957, № 11.

60. Касперович А. С., Исследование теплоотдачи полупроводниковых термосопротивлений методом электротепловых аналогий. В сборнике «Материалы конференции молодых ученых АН БССР», Минск, 1958.

61. Кванталиани Е. Е., Тепловые потери при нагнетании жидкости горячими газами, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

62. Кириллин В. А., Шейндлин А. Е., Чеховской В. Я., Экспериментальное определение энтальпии корунда (Al_2O_3) при температурах от 500 до 2 000° С, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 2, 1961.

63. Ковалевская А. Е. и Перельман Р. Г., О теплообмене в поле действия центробежных сил, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1958, № 11.

64. Костерин С. И., Кожинов И. А., Леонтьев А. И., Влияние пульсаций давления в потоке газа на конвективный теплообмен, «Теплоэнергетика», 1959, № 3.

65. Костерин С. И. и Кошмаров Ю. А., Выбор определяющей температуры при расчетах конвективного теплообмена и трения в газодинамических условиях, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 7.

66. Костерин С. И. и Магомедов А. Д., Исследование движения вязкой жидкости в условиях теплообмена в области больших чисел Прандтля, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1958, № 10.

67. Костерин С. И. и Кошмаров Ю. А., К расчету сопротивления и теплообмена тел в потоке газа при наличии турбулентного пограничного слоя, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 7, 1958.

68. Костерин С. И. и Кошмаров Ж. А., Турбулентный пограничный слой на плоской пластине при безградиентном обтекании сжимаемой жидкостью, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 7, 1959.

69. Коченов И. С., К тепловому расчету рабочего канала ядерного реактора, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 12, 1959.

70. Коченов И. С., Переходные процессы в обогреваемых трубах, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 10, 1958.

71. Кравцов С. Ф., Исследование теплообмена элементов элек-

трического сопротивления в процессе нагревания, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1959, № 12.

72. Крюкова М. Г., Некоторые вопросы теплообмена газа с твердыми частицами, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 4, 1958.

73. Курочкин Ю. П., Теплообмен в потоке зернистого материала, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 4, 1958.

74. Кутателадзе С. С., Субботин В. И., Боришанский В. М. и Кириллов Л. Л., Теплообмен при течении жидкого металла в трубах, Труды 2-й Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, т. 2, Ядерные реакторы и ядерная энергия, Атомиздат, 1959.

75. Кутателадзе С. С., Теплоотдача при течении жидкого металла в трубе и на пластине, Журнал техн. физики, т. 28, вып. 4, 1958.

76. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. и Новиков И. И., Теплообмен в жидких металлах, Атомная энергия, т. 4, вып. 5, 1958.

77. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Законы сопротивления и теплообмена в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа и метод расчета трения и теплообмена, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

78. Лившиц Б. Л. и Фогель В. О., Интенсификация процесса в теплообменных аппаратах, обогреваемых высокотемпературными теплоносителями, «Промышленная энергетика», 1959, № 1.

79. Малев М. Д., Методы снижения температуры сетки в электронных лампах, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 7, 1959.

80. Малкина Л. И., Теплообмен в самолетном кислородном газификаторе, «Кислород», 1959, № 4.

81. Маренов А. Е., Исследование теплообмена при сверхзвуковых течениях воздуха по трубам, Инж. сборник Института механики АН СССР, т. 25, 1959.

82. Маренов А. Е., Определение коэффициентов теплоотдачи при сверхзвуковых течениях разреженного газа по трубам, Инж. сборник (Институт механики АН СССР), т. 30, 1960.

83. Мигай В. К., Теплообмен в треугольном канале при ламинарном течении, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 7, 1958.

84. Микк И. Р., Эпик И. П., Решение некоторых трехмерных задач лучистого теплообмена приведением их к двухмерным, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

85. Морозов М. Г., Взаимодействие сверхзвукового потока с прямоугольным углублением на плоской пластине, Журнал техн. физики, т. 28, № 1, 1958.

86. Петухов Б. С. и Нольде Л. Д., Теплообмен или вязкостно-гравитационном течении жидкостей в трубах, «Теплоэнергетика», 1959, № 1.

87. Петухов Б. С. и Кириллов В. В., Теплообмен при турбулентном течении сжимаемого газа в трубах в области M до 4, «Теплоэнергетика», 1960, № 5.

88. Петухов Б. С., Цветков Ф. Ф., Расчет теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах в области малых чисел Пекле, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 3, 1961.

89. Пискунов А. А., Методика светового моделирования лучистого теплообмена в промышленных печах. Автореферат дисс. на соискание ученой степени кандидата технических наук, М., 1959 (Московский институт стали).

90. Плят Ш. Н., Згонник Н. П., Теплопроводность корундовых изделий, «Огнеупоры», 1958, № 6.

91. Плят Ш. Н., Згонник Н. П., Методика определения коэффициента теплопроводности абразивно-керамических черепков. «Абразивы», 1954, № 10.

92. Плят Ш. Н., Згонник Н. П., Теплопроводность шихты для получения карбида кремния, «Абразивы», 1955, № 12.

93. Плят Ш. Н., Исследование теплопроводности абразивно-керамических черепков, «Абразивы», 1958, № 20.

94. Плят Ш. Н., К вопросу о распространении теории обобщенной проводимости Оделевского на теплопроводность, Журнал техн. физики, т. 27, № 12, 1957.

95. Плят Ш. Н., Згонник Н. П., Метод определения коэффициента теплоотдачи в туннельных печах абразивной промышленности, «Абразивы», 1959, № 26

96. Покатаев В. В., Номограмма для определения приведенной степени черноты и коэффициента теплопередачи, «Теплоэнергетика» 1960, № 10.

97. Полонская Ф. М. и Мельникова И. В., К исследованию теплообмена газа с твердыми телами, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 2, 1958.

98. Померанцев А. А., Нагревание стенки сверхзвуковым потоком газа, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 8, 1960.

99. Померанцев А. А., Теплообмен обтеканием разреженного газа со стенкой, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

100. Померанцев А. А., К точной теории свободной конвекции, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

101. Предводителев А. С., О характере теплового движения в жидкостях, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

102. Предводителев А. С., О характере теплового движения в жидкостях, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 7, 1961.

103. Рабинович Г. Д., Тепло- и массообмен в слое влажного материала, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

104. Рабинович Г. Д., Теплообмен в слое дисперсного материала, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 11, 1960.

105. Рабинович Г. Д. и Слободич Г. Н., Экспериментальное исследование процесса теплообмена между пульсирующим газовым потоком и взвешенными в нем твердыми частицами, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 9, 1959.

106. Романенко С. В. и Тамразов П. М., Новые методы газодинамического расчета теплообменных аппаратов, Известия Киевского политехн. института, т. 30, Сборник трудов теплотехнического факультета, ч. 1, 1960.

107. Романенко С. В. и Шейнкман А. Г., Об измерении температуры сверхзвукового потока газа при течении его в трубе с отводом тепла, Известия Киевского политехн. института, т. 30, Сборник трудов теплотехнического факультета, ч. 1, 1960.

108. Свергуненко Л. А., К вопросу о влиянии теплопроводности на поглощение звука в кристаллах, Инж.-физич. журнал т. 3, № 7, 1960.

109. Сергеев О. А., К вопросу о расчете теплоотдачи нитей термоанемометров. В сборнике «Исследования в области тепловых измерений и приборов» Л. 1957.

110. Сидоров Э. А., К вопросу о выборе теплоносителя для ядерных реакторов (Письмо в ред.), Атомная энергия, т. 8, вып. 3, 1960.

111. Сидоров Э. А., Некоторые современные методы теории кон-

вективного теплообмена и их применение, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 5, 1958.

112. Сидоров Э. А., О взаимодействии конвекции и излучения в поглощающей среде, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Механика и машиностроение, 1959, № 5.

113. Смирнов А. Г., Свободная тепловая конвекция ртути в замкнутой круглой трубе в поперечном магнитном поле, Журнал техн. физики, т. 28, № 7, 1958.

114. Субботин В. И., Ушаков П. А., Жуков А. В., Исследование теплообмена при продольном обтекании водой пучка стержней с относительным шагом равным 1,4, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 3, 1961.

115. Стырикович М. А., Факторович Л. Е., Влияние длины обогреваемого участка трубы на величину критических тепловых потоков при вынужденном движении пароводяной смеси, «Теплоэнергетика», 1959, № 2.

116. Стырикович М. А. и Мостинский И. Л., О влиянии неравномерности обогрева периметра трубы на величину критических тепловых потоков, Доклады АН СССР, т. 127, № 2, 1959.

117. Сыромятников Н. И., Высокочастотный метод исследования теплообмена в кипящем слое, Труды Уральского политехнического института. Сборник 96, 1960.

118. Третьяков А. П. и Чэн Хуа-Дин, Влияние ультразвука на интенсификацию теплообмена, «Теплоэнергетика», 1960, № 11.

119. Фастовский В. Г., Петровский Ю. В., Теплоотдача и сопротивление шахтных пучков из трубок с непрерывным спиральным оребрением, «Теплоэнергетика», 1960, № 6.

120. Федорович Е. Д., Теплоотдача пластины, обтекаемой турбулентным пограничным слоем несжимаемой жидкости при $Pr \ll 1$ Инж.-физич. журнал, т. 2, № 9, 1959.

121. Циклаура Г. В. и Усанов В. В., К вопросу о теплообмене в трубе при больших скоростях движения воздуха, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 11, 1960.

122. Цзян Чже-Син, Применение метода расфокусирования на теневом приборе для измерения плотностей в струе, истекающей из сопла при нерасчетном режиме, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 4, 1961.

123. Шишов Е. В., Эффект восстановления энтальпии на поверхности цилиндра, обтекаемого потоком газа высокой скорости, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 1, 1961.

124. Щитников В. К., Экспериментальное исследование теплообмена шара в турбулентном потоке воздуха, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 6, 1961.

125. Щитников В. К., Теплообмен тел различной формы с вынужденным потоком жидкости, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 7, 1961.

126. Эльперин И. Т., Тепло- и массообмен во встречных струях, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 5, 1961.

127. Эльперин И. Т., О рациональном методе оценки использования потенциала тепла в процессах теплообмена, Труды Института энергетики (АН БССР), вып. 10, 1959.

128. Эльперин И. Т., Об одном методе интенсификации теплообмена (Информ. сообщение), Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

129. Яковлев В. В., Теплоотдача некипящей воды при высоких тепловых нагрузках (Письмо в ред.), Атомная энергия, т. 2, № 2, 1957.

130. Ярошевич О. И., Исследование процессов переноса тепла в тепловыделяющих элементах ядерных реакторов методом гидравлического моделирования, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

Тепло- и массообмен при фазовых превращениях

1. Алимов Р. З., О некоторых закономерностях процесса тепло- и массообмена при испарительном охлаждении сильно нагреваемых поверхностей, Известия высших учебных заведений, «Авиационная техника», 1960, № 1.

2. Алимов Р. З., Тепло- и массообмен при охлаждении сильно нагреваемых поверхностей испарением, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

3. Алумяэ А. Э., К вопросу о влиянии влагообмена на теплообмен при определении тепловых коэффициентов, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

4. Берман Л. Д., Некоторые закономерности совместно протекающих процессов тепло- и массообмена в гетерогенных системах, Журнал техн. физики, т. 29, вып. 1, 1959.

5. Берман Л. Д., О критериях подобия для совместно протекающих процессов тепло- и массообмена в гетерогенных системах. Журнал техн. физики, т. 28, вып. 11, 1958.

6. Боришанский В. М., К вопросу об обобщении опытных данных по прекращению пузырькового кипения в большом объеме жидкости. В сборнике «Теплопередача и аэрогидродинамика», Машгиз, 1955.

7. Боришанский В. М., Коэффициенты теплоотдачи к кипящей воде при сверхвысоких давлениях, «Энергомашиностроение», 1958, № 7.

8. Боришанский В. М. и Кутателадзе С. С., О расчете теплоотдачи и гидравлического сопротивления при течении жидких металлов в трубах, «Энергомашиностроение», 1957, № 6.

9. Брдлик П. М., Конденсация пара из неподвижных парогазовых смесей, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 3, 1959.

10. Буров Ю. Г., Смирнов В. А., Исследование теплообмена при пленочной конденсации чистых паров. В сборнике «Проблемы энергетики», АН СССР, 1959.

11. Вишнев И. П. и Елухин Н. К., Теплоотдача при кипении сжиженных газов в трубах и ее обработка в безразмерных координатах, Труды Всесоюзного научно-исследовательского института кислородного машиностроения, вып. 3, 1960.

12. Григорьев Л. Н. и Усманов А. Г., Теплообмен при кипении анизотропных смесей, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

13. Гутман Э. М., К исследованию фильтрационного переноса в капиллярно-пористых системах, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 10, 1958.

14. Дерюгин В. М. и Федынский О. С., О теплоотдаче при переходном режиме течения жидких металлов в трубах, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 12, 1959.

15. Дорофеев В. М., Охлаждающая установка с вихревой трубой, Труды Куйбышевского авиационного института, вып. 6, 1958.

16. Ермакова Е. А., Некоторые результаты экспериментального исследования теплообмена при сублимации льда, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 12, 1958.

17. Ермакова Е. А., О механизме тепло- и массообмена при сублимации льда под вакуумом, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 11, 1958.

18. Ермоленко В. Д., К исследованию массопереноса в коллоидных телах, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 8, 1960.

19. Ермоленко В. Д., Применение методов термодинамики необратимых процессов к явлениям массопереноса в коллоидных телах, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 5, 1960.

20. Казанский М. Ф., Влияние температуры на состояние поглощенной капиллярной влаги в макропорах дисперсного тела, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 3, 1961.

21. Казанский М. Ф. и Куландина А. Н., Влияние форм связи влаги на теплоперенос в типичных капиллярно-пористых телах, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 5, 1959.

22. Казанский М. Ф. и Луцик П. П., Влияние форм связи поглощенной влаги на кинетику гидротермического поля в поликапиллярно-пористом коллоидном теле при сушке, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 11, 1960.

23. Кастелин О. Н., Митькина Е. А., Предводителев А. С., Плавление тел в сверхзвуковом потоке, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, Энергетика и автоматика, 1959, № 2.

24. Коваленко В. Ф., Опытное исследование влияния вибрации на теплоотдачу при кипении, «Теплоэнергетика», 1958.

25. Конаков П. К., Филимонов С. С. и Хрусталев Б. А., К расчету лучистого теплообмена в охлаждаемых камерах горения, Журнал техн. физики, т. 27, вып. 5, 1957.

26. Конаков П. К., Уравнения теплового процесса камер сгорания, Труды Московского института инженеров ж.-д. транспорта, вып. 125, 1960.

27. Консетов В. В., Теплообмен при конденсации пара внутри горизонтальных труб, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

28. Краснощеков Е. А. и Протопопов В. С., К вопросу о теплообмене при течении углекислоты и воды в сверхкритической области параметров состояния, «Теплоэнергетика», 1960, № 10.

29. Кургаев Е. Ф., О диффузии в кипящем слое, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 4, 1959.

30. Лабунцов Д. А., Обобщение зависимости для теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкостей, «Теплоэнергетика», 1960, № 5.

31. Лабунцов Д. А., Теплообмен при конденсации пара на вертикальной поверхности в условиях турбулентного стекания пленки конденсата, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 8, 1960.

32. Малак Я. и Шмидт И., Исследование теплообмена в гомогенном кипящем атомном реакторе, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 9, 1959.

33. Мотулевич В. П., Расчет теплообмена и трения плоской пластины, обдуваемой сверхзвуковым потоком при наличии пористого подвода газа и сублимации в условиях ламинарного пограничного слоя, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, Энергетика и автоматика, 1959, № 1.

34. Мухленов И. П. и Трабер Д. Г., Теплоотдача от взвешенного слоя зернистых материалов к поверхности теплообмена, Журнал прикладной химии, т. 33, № 10, 1960.

35. Нестеренко А. В., Тепло- и массообмен при испарении жидкости со свободной поверхности, Журнал техн. физики, т. 25, № 4, 1955.

36. Полетавкин П. Г. и Шапкин Н. А., Теплоотдача при поверхностном кипении воды, «Теплоэнергетика», 1958, № 5.

37. Положий С. В., К вопросу о кипении жидкости с подводом тепла через стенку, Известия Томского политехн. института, вып. 80, 1955.

38. Порхаев А. П. и Докучаев Н. Ф., Экспериментальное исследование процессов переноса вещества и энергии в модельном капиллярно-пористом теле, Труды Московского института пищевой промышленности, вып. 12, 1958.

39. Прудников А. П., К исследованию тепло- и массообмена в дисперсных средах, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 4, 1958.

40. Рычков А. И., О связи между теплообменом при кипении и внутренним (молекулярным) давлением жидкости, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

41. Смольский Б. М., Тепло- и массообмен тел различной формы с вынужденным потоком газовой среды (Обзор), Инж.-физич. журнал, т. 1, № 5, 1958.

42. Сергеев Г. Т., Тепло- и массообмен при испарении жидкости в вынужденном потоке газа, Инж.-физич. журнал, т. 4, № 2, 1961.

43. Степанов В. В., О зависимости тепло- и массообмена при намораживании льда на свободной поверхности воды, Известия высш. учебных заведений, Энергетика, 1958, № 12.

44. Тимчук Б. И., Исследование теплообмена в расплавленных металлах при фазовых превращениях, Инж.-физич. журнал, т. 2, № 11, 1959.

45. Фукс Н. А., К теории испарения мелких капелек, Журнал техн. физики, т. 28, № 1, 1958.

46. Цой П. В., Задача о переносе тепла и влаги для полуограниченной среды трех измерений при краевых условиях второго рода, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

47. Яблонская В. П., К исследованию переноса тепла и влаги в промерзающих и протаивающих грунтах, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 1, 1960.

Тепло- и массообмен при химических превращениях

1. Аббовский А. П., О методике расчета теплообмена в топках паровых котлов, Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР, Энергетика, 1958, № 10.

2. Адрианов В. Н., Шорин С. Н., Исследование теплообмена в камере горения газа, «Теплоэнергетика», 1959, № 4.

3. Вавилов Н. С., Связь коэффициентов лучистой теплоотдачи и лучистого теплообмена и номограмма для их определения, Труды Института металлургии имени Байкова, вып. 5, 1960.

4. Ваулин Е. П., О влиянии физико-химических превращений и диффузии на теплообмен в потоках газовых смесей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук 1958 (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова).

5. Вулис Л. А., Клингер В. Г., Исследование лучистого обмена энергией методом световых моделей. В сборнике «Исследования физических основ рабочего процесса топок и печей», Алма-Ата, изд. АН Казах. ССР, 1957.

6. Вулис Л. А., О моделировании теплового режима горения с помощью полупроводниковых сопротивлений, Известия АН Казах. ССР, Серия энергетическая, вып. 1/17, 1960.

7. Глинков М. А., Кривандин В. А., Бугрова Б. А., Направленная радиация пламени при неравномерном распределении температур, Научный доклад высшей школы, «Металлургия», 1958, № 1.

8. Гурвич А. М., Блох А. Г., Носовицкий А. И., Лучистый теплообмен в запыленной газовой среде, «Теплоэнергетика», 1955, № 2.

42—2

9. Захариков Н. А., Влияние неравномерной температуры газового потока на лучистый теплообмен в печах. В сборнике «Вопросы производства стали», Киев, изд. АН УССР, вып. 3, 1956.

10. Иванцов Г. П., Любов Б. Я., Поляк Б. Т. и Ройтбурд А. Л., Расчет скорости кристаллизации металлического слитка при различных тепловых потоках через его поверхность, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 3, 1960.

11. Казакевич Ф. П., Крапивин А. М., Анофриев Г. И. и Веселый И. Г., Исследование лучистого теплообмена в топке парового котла при сжигании природного газа, «Теплоэнергетика», 1959, № 10.

12. Казаков Е. Д. и Сахарова И. А., Влияние внутреннего тепло- и массообмена на миграцию минеральных веществ в зерне пшеницы при гидротермической обработке, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 6, 1960.

13. Кацнельсон Б. Д., Шатиль А. А., Исследование теплообмена в горизонтальной циклонной камере горения с воздушным охлаждением, «Энергомашиностроение», 1959, № 11.

14. Кокорев Д. Т., Экспериментальные методы исследования лучистого теплообмена в теплотехнике. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук, 1956 (Московский технологический институт пищевой промышленности).

15. Колченогова И. П. и Шорин С. Н., Исследование переноса лучистой энергии в ослабляющей среде, Известия АН СССР, Отдел техн. наук, 1956, № 5.

16. Лебедев В. И., Исследование влияния степени черноты среды на теплообмен в топочной камере, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 12, 1960.

17. Митор В. В., Теплообмен между факелом и полуутопленными экранами, «Теплоэнергетика», 1960, № 9.

18. Михайлов П. М., О термических условиях теплообмена в топках котельных агрегатов, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 8, 1958.

19. Нарежный Э. Г., Исследование теплообмена в газотурбинной камере сгорания с завихрителем охлаждающего воздуха. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1958 (Ленинградский кораблестроительный институт).

20. Ралко А. В., Экспериментальное исследование тепло- и массообмена в процессе обжига, Инж.-физич. журнал, т. 1, № 6, 1958.

21. Рубцов Н. А., К теоретическому методу расчета теплообмена в топках, Инж.-физич. журнал, т. 3, № 2, 1960.

22. Шорин С. Н., Особенности теплообмена лучеиспусканием в камерах сжигания, Труды Научно-технического общества черной металлургии, т. 7, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно черное тело 436
Анализ размерностей 288
Аналогия Прандтля—Тэйлора 258
— Рейнольдса 251—253

Бернулли уравнение 5, 124, 133, 148
Био критерий 70
Больцмана постоянная 365
Буферный слой 278

Вина закон 443
Влагосодержание 536
Влажность относительная 537
Вязкость динамическая 157
— кинематическая 158

Газ селективно серый 501
Гидравлический диаметр 200
Градиент давления 187
Грасгофа критерий 294

Давление излучения 439
— общее (полное) 19
— парциальное 535
— статическое 19
Дальтона закон 534
Диаметр гидравлический 200
Динамическая вязкость 157
Диффузное отражение 434
Дюамеля теорема 226

Жидкие металлы, теплообмен в них 367

Закон Вина 443

— Дальтона 534
— Кирхгофа 437—438
— Ламберта 440
— Ома 25
— Планка 452
— Фика 24
— Фурье 46
— Релея — Джинса 451
— Стефана 552
— Стефана — Больцмана 445
Заторможенное состояние 326
Зеркальное отражение 434

Излучательная способность 436
— — кажущаяся 506
— — направленная 459
— — полусферическая 459
Излучение 23
Излучение абсолютно черного тела 445
— свойства 432
— солнечное 525
— тепловое 465
Изоляция, критическая толщина 59
Изотермическая поверхность 45
Интерферометр 393
Испарение 416
— кипением 416
— при пузырчатом кипении 423
— с бассейновым кипением 417
— — локальным кипением 417
— — пленочным кипением 423
— со свободно-конвективным кипением 423
Испарительное охлаждение 371—383

Кабель подземный 85
Квазистационарное состояние 145
Кётте поток 317
Кинематическая вязкость 158
Кирхгофа закон 437—438
Кнудсена критерий 343
Конвекция в жидких металлах 367—371
— — разреженных газах 337
— — турбулентном потоке 396
— вынужденная, обтекание конуса 335
— нестабильность пограничного слоя 321, 322
— обтекание пластины 350
— определение 22, 23
— поперечное омывание труб 298
— — — цилиндрических тел 231
— при больших скоростях 316—367
— — сверхкритическом давлении воды 261
— — турбулентном режиме, последние достижения в теории 272
— распределение температур и скоростей 384
— свободная 382—408
— — горизонтальных стен 402
— — — труб 393
— смешанная, свободная и вынужденная 406
— трубы некруглого сечения 303
— у плоской пластины с изменяющейся температурой 225

Конвекция у плоской плиты, ламинарный пограничный слой 175
— — — — турбулентный пограничный слой 268
— уравнение пограничного слоя 326, 327
— шары и насадки 310
— шероховатые поверхности труб 266
— эквивалентная теплопроводность 405
Коэффициент аккомодации 343
— восстановления температуры 319
— — энтальпии 329
— диффузии 548
— испарения 580
— лобового сопротивления 204
— — — плоской плиты в разреженном газе 350
— отражения 348
— температуропроводности 51
— теплообмена 28
— — при кипении 421
— теплопередачи 29
— теплопроводности 46
— термодиффузии 549
— трения 179
— турбулентной диффузии для количества движения 273
— — — — массы 577
— — — — тепла 274
— формы 93, 482
Критерий Био 70
— Грасгофа 294
— Кнудсена 343
— Льюиса 560
— Маха 297
— Нуссельта 222
— Пекле 224
— Прандтля 217
— Рейнольдса 162
— Стантона 258
— Фурье 102
— Шервуда 412
— Шмидта 572
— Эккерта 217, 291
Критическая толщина изоляции 59
Ламберта закон 440
Ламинарный подслой 181, 278
— поток 159
Лапласа—Пуассона уравнение 95
Лапласа уравнение 89
Лучистый теплообмен 23, 480
Льюиса критерий 560
Манглера преобразование 311
Массосодержание 536
Маха критерий 297
Метод релаксации 95
— Шмидта 122
Навье-Стокса уравнение 345—346
Нуссельта критерий 222
Ома закон 25
Относительная влажность 537
Отражательная способность 435
Отражение зеркальное 434
—рассеянное (диффузное) 434
Охлаждение абляционное 302
— испарительное 371—383
— пленочное 371—383
— пористое (транспирацией) 371—383
Парциальное давление 535
Пекле критерий 224
Перекрестный ток 30
Перенасыщение 538
Пирометрия 520
Планка закон 452
Плотность, молярная, парциальная 440
Поверхность изотермическая 45
Поглощательная способность, определение 435
Пограничный слой 159
— — гидродинамический 210
— — на плоской плите 175, 218
— — нестабильность 183
— — тепловой 210, 215
Погрешности при измерении температур 517
Полусферическая излучательная способность 459
Пористое охлаждение 371—383
Постоянная Больцмана 445
— Планка 452
Потенциальная функция 89
Поток в трубе 164
— — трубке Хильша 331
— Кетте 317
— ламинарный 159
— Пуазейля 195
— свободномолекулярный 344
— скользящий 344
— турбулентный 159
Прандтля критерий 217
Преобразование Манглера 311
Пропускательная способность, определение 435

Противоток 30
Профиль скорости 175, 176
— — в трубе 193
— температуры 210
Прямоток 30
Психрометр 582
Пуазейля поток 195
Пучки труб 298

Разность температур среднеарифметическая 34
— — среднелогарифмическая 34
Распределение скорости по Максвеллу 338
Ребристая поверхность нагрева 65, 68, 71, 76, 78
Рейнольдса аналогия 251—253
— критерий 162
Релаксация 95
Релея — Джинса закон 451

Сопротивление тепловое (термическое) 26, 56
— формы 203
Состояние заторможенное 326
— квазистационарное 145
Спектр электромагнитного излучения 432, 433
Средний свободный пробег молекулы 338
Стантона критерий 258
Статическая температура 20
Статическое давление 19
Стефана закон 552
Стефана — Больцмана закон 445

Температура восстановления 318, 328, 363
— интегральная (объемная) 240
— кажущаяся, монохроматическая 521
— полная 20
— статическая 20
— цветовая 521
Теорема Дюамеля 226
Тепловое излучение 465
Тепловые волны 135
Теплообмен в жидких металлах 367
— ламинарный поток, влияние турбулентности 301, 302
— лучистый 23, 480
Теплообменник регенеративного типа 590
Теплообменник рекуперативного типа 585
— с параллельным током 30—33
— — перекрестным током 30—33
— — противотоком 30—33
Теплопроводность 22, 23, 42
Тепло рассеяния 214
Термодиффузионное отношение 549
Термодиффузия 549
Термометр отсасывающий 520
Термометры для высокоскоростных потоков 331—333
Толщина пограничного слоя 166, 177—178
Точка насыщения 536
— росы 541
Трубка тока тепла 92
— Хильша 332
Турбулентная флуктуация 161
Турбулентный поток 159, 272, 277

Уравнение Бернулли 20, 156, 168, 187, 323—324
— количества движения пограничного слоя 165
— Лапласа 89
— Лапласа-Пуассона 95
— Навье-Стокса 345—346
— непрерывности 174
— пограничного слоя и его точные решения 189
— теплового потока через пограничный слой 210
— теплопроводности 48
— энергии 213

Фика закон 549
Функция потенциальная 89
— тока 90
Фурье закон 24
— критерий 102

Хильша трубка 332

Шервуда критерий 412
Шмидта критерий 558, 572
— метод 122

Эквивалентная толщина конвективного пограничного слоя 270
— — смещения пограничного слоя 169, 178, 182
Эккерта критерий 217, 291
Эффективность ребра 71
— теплообменника 586