Л.П. Холпанов
В.Я. кадов

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НОВЫХ ХИМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Л.П. Холпанов
В.Я. Шкадов

ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
В.А. МАЛЮСОВ



МОСКВА "НАУКА" 1990

УДК 66.02:621.1:533:51–74

Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / Л.П.Холпанов, В.Я. Шкадов. – М.: Наука. – 1990. – 271 с. – ISBN 5-02-001320-X.

В книге впервые рассмотрены теоретические вопросы переноса количества движения вещества и энергии в двухфазных системах с неизвестной свободной границей (пленочное и струйное течения) применительно к химической технологии. Приведены оригинальные результаты теоретических расчетов массообмена в волновой пленке жидкости и показаны причины высокой интенсивности процессов в наиболее перспективных высокопроизводительных массообменных аппаратах.

Предложен ряд оригинальных методов решения уравнений Навье–Стокса, энергии, конвективной диффузии и теплопередачи.

Книга рассчитана на широкий круг специалистов: математиков, теплофизиков, аэромехаников, физикохимиков и инженеров химиков-технологов.

Табл. 12. Ил. 109. Библиогр.: 276 назв.

Рецензенты:

академик АН СССР *В.П. Маслов*,
член-корреспондент АН СССР *В.П. Мясников*

Редактор *И.Д. Казаринова*

Hydrodynamic and heat and mass transfer with free surface / L.P. Kholpanov, V.Ya. Shkadov. – M.: Nauka – 1990.

In nonlinear approach theoretical problems of impulse, substance and energy in two-phase system with unknown interface (film and jet flows) are firstly discussed relative to chemical tecnology. Original results of theoretical investigation of film and jet flows at turbulent and laminar regimes with taking into account the inlet problem are demonstrated. Processes and regimes of essential influence of the inlet on on heat/mass transfer intensity are defined. Reasons of high intensity of the processes in the promising highproductive massexchange apparatus are analised. Deducated to physicochemists, chemical tecnologiests, heat phisisists, airmecanics.

X $\frac{1708000000\text{-}537}{042\,(02)\text{-}90}$ 321-90, I полугодие

© Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов, 1990

ISBN 5-02-001320-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена разработке методов расчета нелинейных задач гидродинамики, тепло- и массообмена в двухфазных системах при пленочном и струйном течениях, а также задаче тепломассообмена в системах, состоящих из совокупности капель и пузырьков в контактных устройствах высокоэффективных тепломассообменных аппаратов. Это направление исследований создано на стыке вычислительной математики, теоретической гидроаэромеханики и физической химии и является теоретической основой химической технологии и теплофизики, а также дальнейшим развитием физико-химической гидродинамики.

В данном направлении научных исследований в силу специфики постановок задач, их нелинейности и, следовательно, сложности решений авторы вынуждены использовать методы вычислительной математики. Необходимость обобщить результаты численных решений формулами приближает это направление к физико-химической гидродинамике, которая построена на основе приближенных аналитических методов, позволяющих выражать в виде формул конечные результаты, что значительно расширяет возможности их использования.

Анализ процессов химической технологии и теплофизики показывает, что они могут рассматриваться как совокупность элементарных процессов, каждый из которых вносит определенный вклад в скорость суммарного процесса. Элементарный процесс поддается сравнительно строгому математическому описанию, что указывает на один из перспективных путей исследования промышленного процесса, а именно его изучение начинается с рассмотрения элементарного процесса.

Следует отметить, что даже такой путь исследования промышленного процесса сопряжен со значительными математическими трудностями, особенно если разрабатываются методы расчета гидродинамики и тепломассообмена в вязкой жидкости, чему и посвящена данная монография.

При решении таких задач приходится преодолевать математические трудности, обусловленные, во-первых, нелинейностью самих уравнений, во-вторых, наличием малого параметра при старшей производной в уравнениях гидродинамики и переноса вещества и, в-третьих, необходимостью определять поверхность контакта фаз при решении системы уравнений, что является характерной особенностью пленочных и струйных течений.

Материал книги расположен следующим образом.

Первые две главы посвящены решению (аналитическому и численному) классической задачи, связанной с течением тонких слоев вязкой жидкости по твердой поверхности в условиях волнообразования. Впервые эта задача была поставлена и решена в линейной постановке академиком П.Л. Капицей. В предлагаемой книге данная проблема получила дальнейшее развитие, в частности эта задача решена в нелинейной постановке, что позволи-

ло получить полную информацию о течении тонких пленок вязкой жидкости по твердой поверхности. Например, амплитуда волны, найденная из решения, в широком интервале изменения характерных параметров удовлетворительно согласуется с известными опытными данными. Особенностью материала этих глав является то, что предлагаемые методы решения могут быть с успехом применены теоретиками для решения уравнений нелинейных колебаний, широко используемых в различных областях науки и техники.

Глава 3 посвящена решению одного из фундаментальных вопросов химической технологии – массообмену в пленке жидкости в условиях волнообразования. Впервые теоретически установлено, что эффективность массообмена в пленке жидкости при волнообразовании определяется волновыми характеристиками, и прежде всего длиной волны, которая зависит от физико-химических и режимных параметров течения. Установление этого эффекта позволило не только объяснить причину высокой интенсивности массообмена при волнообразовании, но предсказать определяющий вклад когерентных волновых структур в расчеты эффективности массообмена как высокопроизводительных высокоэффективных тепломассообменных аппаратов, так и в расчеты аппаратов с регулярными контактными устройствами. Установленный эффект имеет и теоретическое значение. Если в теории пограничного слоя факт существования поперечного размера, зависящего от физико-химических и режимных параметров, известен был давно (толщина гидродинамического, диффузионного и теплового слоев), то существование продольного характерного размера (длины волны) доказано нами впервые на примере массообмена при волнообразовании. Именно при таком массообмене в качестве характерного размера длины выступает не длина контактного устройства (трубка), а длина волны, которая в несколько раз меньше длины трубки, что и обусловливает высокую эффективность массообмена в этих условиях.

В главе 4 этот эффект доказан при массообмене в условиях волнообразования на контактных устройствах сложной геометрии: при пленочном течении на поверхности вращающегося цилиндра и на стенке с регулярной шероховатостью. Волнообразование в последнем случае образовано регулярной шероховатостью. В процессе течения пленки жидкости по стенкам с регулярной шероховатостью при определенном соотношении высоты выступов и расстояния между ними пленка жидкости повторяет структуру регулярной шероховатости. Для этого режима в качестве характерного размера, как впервые было доказано, выступает характерный размер, равный расстоянию между выступами регулярной шероховатости. Этот эффект является предельным случаем массообмена в условиях волнообразования: длина волны, равная расстоянию между выступами, не зависит от физико-химических и гидродинамических параметров.

Главы 5–9 посвящены решению нелинейных уравнений Навье–Стокса, энергии и конвективной диффузии в одно- и двухфазных системах при ламинарном и турбулентном режимах с учетом входного гидродинамического участка. В этих главах изложен оригинальный метод, который объединяет идеи методов Галеркина, коллокаций и прямых. Показаны широкие возможности применения этого метода для решения различных задач, связанных с гидродинамикой и тепломассообменом в процессах, прово-

димых в пленках и струях. На основании решения многочисленных задач установлено, что входной гидродинамический участок влияет по-разному на эффективность тепло- и массообмена: в турбулентном режиме его влияние существенно в процессах абсорбции и конденсации, а в ламинарном – в процессах конденсации и незначительно – в процессах абсорбции. Данные главы могут представлять интерес как для специалистов по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике с точки зрения развития метода, так и для теплофизиков и инженеров-технологов, которые могут с успехом применить этот метод при решении различных задач.

Глава 10 посвящена вопросам сопряженного тепло- и массообмена. Тепловая задача решена для случая течения пленки жидкости по твердой поверхности, когда сопротивление теплообмену в твердой стенке составляет значительную долю в общем процессе теплообмена, что имеет место в процессах охлаждения (нагревания) при течении пленки жидкости по полимерным материалам. В этой же главе предложен инженерный метод расчета эффективности пленочного массообмена в интенсивных режимах при прямоточном течении фаз (режимы нисходящего и восходящего прямотоков).

Глава 11 содержит результаты теоретического исследования массопереноса и тепломассопереноса в многокомпонентных смесях. Эти вопросы относятся к наиболее важным проблемам в области химической технологии, и в первую очередь таким, как диффузионные процессы (абсорбция, хемосорбция, адсорбция, экстракция и т.д.), мембранные процессы, массодиффузионное разделение газовых смесей. Существует еще ряд областей науки и техники, где разработка технологического процесса, как правило, проводимого в многокомпонентных смесях, требует углубленного исследования массопереноса и тепломассопереноса.

Несмотря на важность изучения этого вида массопереноса и тепломассопереноса теории и методам их расчета посвящено сравнительно небольшое число исследований, особенно если данный процесс проходит в движущейся среде. Основная причина состоит в том, что массоперенос в многокомпонентных смесях представляет собой сложную математическую задачу. Она отличается от задач, рассмотренных в предыдущих главах книги, еще и тем, что при ее решении необходимо пользоваться матричными уравнениями в частных производных. Порядок "связанной" системы уравнений в частных производных на единицу меньше числа компонентов смеси. Все это указывает на то, что в постановке математического описания процессов многокомпонентного массопереноса и тепломассопереноса необходимо ограничиться наиболее существенными факторами, определяющими процесс в целом. Развиваемый в главе 11 математический подход к решению процессов многокомпонентного массопереноса и тепломассопереноса можно с успехом применять к средам неподвижной и движущейся, к активной (наличие в среде источников или стоков) и неактивной; в системах однофазной и многофазной, с нейтральными частицами и с заряженными, в изотермических и неизотермических системах.

Таким образом, в данной книге представлены теоретические исследования, которые являются дальнейшим развитием на современном уровне физико-химической гидродинамики применительно к химической технологии (нового направления, возникшего на стыке вычислительной математики, теоретической гидроаэромеханики и физической химии).

Авторы выражают сердечную благодарность академику АН СССР Н.М. Жаворонкову и ответственному редактору книги члену-корреспонденту АН СССР В.А. Малюсову, обсуждение с которыми научных результатов способствовало как дальнейшей разработке научных проблем, так и становлению нового научного направления теоретических исследований в химической технологии.

Авторы благодарны рецензентам книги академику АН СССР В.П. Маслову, члену-корреспонденту АН СССР В.П. Мясникову, а также доктору физико-математических наук В.Г. Данилову за ценные советы при дальнейшей работе над проблемами, разрабатываемыми в книге.

Основные научные результаты получены в Институте новых химических проблем АН СССР, и авторы благодарят за совместную работу сотрудников института, результаты которых способствовали развитию этого нового научного направления.

Безусловно, авторы книги считают себя ответственными за возможные ее недочеты и будут весьма признательны читателям за присланные критические замечания и пожелания.

Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов

Глава 1

ГИДРОДИНАМИКА ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ СТЕКАНИИ

Исследование гидродинамики пленочного течения имеет практический и теоретический интерес вследствие того, что такое течение является основой ряда теплофизических и химико-технологических процессов, таких, как конденсация, испарение, выпарка, абсорбция, десорбция, экстракция, пленочная ректификация. Надежный метод расчета этого течения является важным при проектировании реакторов [1], расчете процесса охлаждения в ракетных двигателях [2, 3], в камерах сгорания [4], расчете экономичных и эффективных пленочных аппаратов для опреснения морской воды и для выпаривания растворов щелочей [5]. Такие аппараты экономичны и дают продукт высокого качества [6]. Пленочное течение занимает значительный интервал режима работы конденсаторов и испарителей [7]. При определении массообмена в высокоэффективных абсорбционных колоннах с орошаемой пленкой [8] и массообмена, осложненного химическими реакциями [9, 10], также необходимо иметь данные расчета гидродинамики пленочного течения.

Особый интерес, связанный с техническими приложениями, представляет изучение волнового течения, так как образование волн приводит к существенному изменению интенсивности ряда физических процессов, протекающих в пленке, и в частности к усилению конвективной диффузии [11–13]. Эта задача представляет также и определенный теоретический интерес как удобная модель для демонстрации некоторых общих представлений теории гидродинамической устойчивости [14].

Рассмотрим волновое течение жидкой пленки со свободной поверхностью, стекающей в направлении силы тяжести. Начало развитию работ по волновому гравитационному стеканию пленки жидкости положено в работах [15, 16]. Решение задачи проведено в линейном приближении. В дальнейшем был выполнен ряд работ, также в линейном приближении, которые отличаются главным образом методами решения и достигаемой точностью [17–24]. Причем авторы некоторых работ [23, 24], пытаясь уточнить линейное решение Капицы, допустили ошибки, в частности при написании граничных условий. Наиболее строгая и полная математическая постановка линейной теории дана в работах [17, 22].

Основные результаты линейной теории в применении к волновым процессам хорошо известны. Малые возмущения в виде бегущих волн, наложенные на основное ламинарное течение с параболическим профилем скорости, могут либо усиливаться, либо затухать. Для каждого расхода жидкости существует критическая длина волны λ, которая разделяет усиливающиеся ($\lambda > \lambda_{кр}$) и затухающие ($\lambda < \lambda_{кр}$) возмущения. В плоскости Re, λ критические значения образуют линию нейтральной устойчивости. Основные недостатки линейной теории состоят в том, что она не позволяет определить амплитуду волны и ее зависимость от числа Re. Эта теория

определяет только одно значение безразмерной фазовой скорости, в то время как опыт указывает существенную зависимость ее от числа Re. Линейная теория, не позволяя определить амплитуду волны α, дает лишь скорость нарастания или затухания ее с течением времени: $\alpha \sim \exp Bt$, B зависит от расхода, длины волны и физико-химических характеристик жидкости. В опытах амплитуда волны не может возрастать до бесконечности, как это предсказывает линейная теория. С ростом амплитуды волны все большую роль приобретают взаимодействия, описываемые нелинейными членами уравнений Навье–Стокса, и устанавливается определенное равновесное состояние с конечной амплитудой – регулярный волновой режим.

Начало развития нелинейной теории регулярных волновых течений при гравитационном стекании пленки жидкости положено в работах [25, 26]. Было показано, что каждому волновому возмущению, не устойчивому согласно линейной теории, соответствует нелинейный волновой режим, который возникает в процессе развития. При фиксированном расходе амплитуда волны такого течения равна нулю на кривой нейтральной устойчивости, растет с увеличением длины волны, достигает максимума при некотором значении $\lambda = \lambda_{кр}$ и затем убывает. Режим с максимальной амплитудой был назван оптимальным, так как для него пленка жидкости при заданном расходе имеет наименьшую среднюю толщину.

Исследование процесса развития регулярных волновых течений из малых возмущений и устойчивости этих течений [25, 26] показало, что оптимальные режимы обладают определенными преимуществами перед другими и с наибольшей вероятностью реализуются в эксперименте. В этих работах применялся прямой метод для исследования волновых режимов. Форма профиля скорости в поперечном сечении задавалась заранее, затем из полной краевой задачи, описывающей течение жидкости, выводилась система нелинейных уравнений для формы поверхности и локального расхода жидкости. Были получены нелинеиные периодические решения этой системы, соответствующие волновым движениям. В работе [27] методом Крылова–Боголюбова (см. [28]) уравнение для возмущения, полученное после задания параболического профиля скорости, решено в первом приближении. По существу, это один из возможных частных случаев более общего решения работы [25], где исчерпаны возможности применения прямых методов к отысканию волновых режимов. В другой работе [29] выявлена возможность существования некапиллярных волн на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. Пока найдено только качественное согласие теоретического профиля гравитационной волны с экспериментальным.

Рассмотрим течение вертикальной поверхности под действием силы тяжести тонкого слоя жидкости. Направим ось x вдоль поверхности в направлении силы тяжести, а ось y – по нормали от стенки к пленке жидкости. В этой системе координат движение жидкости описывается следующей системой уравнений Навье–Стокса и непрерывности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + g,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Из кинематических условий на свободной поверхности тонкого слоя следует

$$v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = -\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad Q = \int_0^h u dy. \tag{1.2}$$

Граничные условия на свободной поверхности пленки имеют вид [28]

$$\left[p_1 - p_2 - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\mathbf{n}_i = (\sigma_{ik}'^{(1)} - \sigma_{ik}'^{(2)})\,\mathbf{n}_k + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

где σ – поверхностное натяжение; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны; $\sigma_{ik}'^{(1)}$ и $\sigma_{ik}'^{(2)}$ – компоненты тензора вязких напряжений; $\mathbf{n}_i$ – единичные векторы; индексы 1, 2 относятся соответственно к жидкой и газовой фазам.

Запишем проекции уравнения (1.3) на оси x и y при условии, что на поверхности действует постоянное давление p_2 на ось x:

$$p_1 - p_2 - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mathbf{n}_x = \sigma_{xx}'^{(1)}\,\mathbf{n}_x + \sigma_{xy}'^{(1)}\mathbf{n}_y, \tag{1.4}$$

на ось y:

$$p_1 - p_2 - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mathbf{n}_y = \sigma_{yx}'^{(1)}\mathbf{n}_x + \sigma_{yy}'^{(1)}\mathbf{n}_y, \tag{1.5}$$

где

$$\sigma_{xx}'^{(1)} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_{xy}'^{(1)} = \sigma_{yx}'^{(1)} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{1.6}$$

$$\sigma_{yy}'^{(1)} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Проекции нормали $\mathbf{n}$ на оси x и y связаны с касательной к волновой поверхности ($b = d\tilde{h}/dx$, $\tilde{h} = h_0 h$, где h – возмущение волновой поверхности) следующими соотношениями:

$$n_x = -b/\sqrt{1+b^2}, \quad n_y = 1/\sqrt{1+b^2}, \quad b = \mathrm{tg}\varphi, \tag{1.7}$$

где φ – угол между касательной к волновой поверхности и осью x.

Из уравнения (1.5), учитывая (1.7) и выражения для вязких напря-

жений (1.6) и полагая, что $R_2 \to \infty$, имеем

$$p_1 - \sigma \frac{1}{R_1} + \mu b \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = p_2. \tag{1.8}$$

Умножив соотношение (1.5) на b и сложив его с (1.4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2b}{1 - b^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \tag{1.9}$$

Формулы (1.8) и (1.9) связывают давление в пленке жидкости с силой поверхностного натяжения, вязкими напряжениями на поверхности волновой пленки жидкости и являются граничными условиями на свободной поверхности.

На твердой стенке выполняется условие прилипания, т.е.

при $y = 0$ $u = 0, v = 0.$ (1.10)

Предположим, что выполняется условие $n = 2\pi h_0/\lambda < 1$. Физически оно означает, что длины волн значительно больше средней толщины волновой пленки. Оценим порядок членов, входящих в систему уравнений (1.1), (1.2), и граничные условия (1.8) и (1.9). Для этого введем безразмерные переменные:

$$u = u_0 \bar{u},\ y = h_0 \bar{y},\ x = (h_0/n)\bar{x},\ v = n u_0 \bar{v},$$

$$t = (n u_0/h_0)\bar{t},\ p = p_0 + \rho u_0^2 .$$

Тогда в новых переменных система уравнений и граничные условия примут вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\nu}{h_0 u_0 n} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + n^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{g h_0}{n u_0^2}, \tag{1.11}$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = n^2 \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right] +$$

$$+ \frac{\nu n}{h_0 u_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2} \right), \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -n^2 \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{2dh/d\bar{x}}{n^2 (dh/d\bar{x})^2 - 1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right], \tag{1.13}$$

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \frac{\dfrac{\sigma n^2}{\rho u_0^2 h_0} \dfrac{d^2 n}{d\bar{x}^2}}{(1 + n^2 (dh/d\bar{x})^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{3n}{\mathrm{Re}} \frac{dh}{d\bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + n^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{6n}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \tag{1.14}$$

Из (1.12) с точностью до n^2 и $3n\mathrm{Re}^{-1}$ давление поперек слоя можно считать постоянным, т.е. $dp/dy = 0$. С такой же точностью уравнение (1.11) и граничные условия (1.13) и (1.14) принимают следующий вид [25]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{1.15}$$

$$Q = \int_0^{\tilde{h}} u\,dy, \quad p = p_2 - \sigma\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2},$$

при $y = 0 \quad u = v = 0$,

при $y = \bar{h} = h_0 h \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$ (1.16)

Краевая задача (1.15), (1.16) для гладкой пленки имеет решение

$$u = \frac{3}{2}u_0\left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right], \quad v = 0, \quad h = h_0, \tag{1.17}$$

которое соответствует ламинарному стационарному течению слоя. Линейная теория позволяет выяснить, при каких условиях нарушается единственность решения (1.17) и появляются волновые возмущения с растущей во времени амплитудой. Эта теория позволяет также установить в пространстве определяющих параметров область существования растущих возмущений и скорости нарастания возмущения в начальный момент времени. Задача нелинейной теории, рассмотренной ниже, заключается в исследовании развития таких возмущений и в определении параметров волнового течения с конечной амплитудой волн.

Рассмотрим регулярное волновое течение. Используя функцию тока, уравнение неразрывности можно проинтегрировать:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{1.18}$$

Введем безразмерные независимые переменные

$$\xi = \frac{n}{h_0}(x - \omega t), \quad \eta = \frac{y}{h_0 h} \tag{1.19}$$

и искомые функции $\Psi(\xi, \eta)$ и $h(\xi)$. Тогда задачу (1.15), (1.16) с учетом (1.18) и (1.19) можно привести к следующему виду [30–34]:

$$E\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3} = -(G\frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + H)h^3 + \frac{\partial h}{\partial \xi}\left[zh\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + zh\eta\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2\right] -$$

$$- h\left(zh\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\right), \tag{1.20}$$

$$\Psi = 0, \quad \partial\Psi/\partial\eta = 0 \text{ при } \eta = 0, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi - zh) = 0 \text{ при } \eta = 1, \tag{1.22}$$

где E, G, H – коэффициенты, которые выражаются через определяющие параметры следующим образом:

$$E = 3/\mathrm{Re}\, n, \quad G = 9n^2 \gamma \mathrm{Ga}^{1/3}/\mathrm{Re}^2, \quad n = 2\pi h_0/\lambda, \quad \mathrm{Re} = u_0 h_0 3/\nu,$$
$$H = 9\mathrm{Ga}/\mathrm{Re}^2 n, \quad \gamma = \sigma\rho^{-1}(g\nu^4)^{-1/3}, \ \mathrm{Ga} = gh_0^3/\nu^2, \ \omega = zu_0. \tag{1.23}$$

Здесь безразмерная величина γ определяется физическими свойствами жидкости σ, ν, ρ и ускорением силы тяжести g.

Требуется построить решение уравнения (1.20) с граничными условиями (1.21) и (1.22), периодическое по ξ. Задача (1.20)–(1.22) определяется четырьмя физическими параметрами: h_0, u_0, λ и z, через которые выражаются коэффициенты уравнения (1.23). По физическому смыслу рассматриваемой задачи две из названных величин должны быть заданы. Прежде всего надо задать среднюю толщину пленки h_0 или средний расход жидкости $u_0 h_0$. Далее требуется задать длину волны из допустимого интервала значений λ; этим определяется, какой именно волновой режим рассматривается из бесконечного множества режимов, возможных для заданной толщины пленки. Тогда определение двух других величин должно быть включено в алгоритм решения. Вместо u_0, h_0 удобно ввести в рассмотрение число Рейнольдса Re и число Галилея Ga. Первое их них характеризует расход, второе – среднюю толщину пленки. Вместо параметров ω и λ (фазовая скорость и длина волны) в качестве характеристик волнового режима можно использовать безразмерные параметры z и n. В дальнейшем в качестве основных безразмерных параметров выбраны Ga и n.

На рис. 1.1, взятом из работы [26], изображена область существования регулярных волновых режимов. Эта область заключена между кривой нейтральной устойчивости *1* и линией $n = 0$. Для любой пары значений Ga и n, взятой из этой области, возмущение, согласно линейной теории, неустойчиво. В нелинейной постановке ему соответствует регулярное волновое течение. Линия *2* проходит через точки, в которых амплитуда волновых течений наибольшая [25, 26]. Используя рис. 1.1, можно пояснить основные допущения, которые были сделаны при выводе уравнения (1.15) и граничных условий (1.16), а именно предположение, что $n^2 \ll 1$ и $n/\mathrm{Re} \ll 1$. Первое из этих условий во всей области от линии нейтральной устойчивости до оси $n = 0$ хорошо выполняется вплоть до значения Ga = 100, а для режимов с максимальной амплитудой (оптимальных режимов) – до значения Ga = 1000. О втором условии можно заметить, что поскольку уравнение граничной линии имеет вид [26] $n = (3\gamma)^{-1/2}\mathrm{Ga}^{5/6}$, то во всей области существования выполняется неравенство $n/\mathrm{Ga} \ll (3\gamma)^{-1/2}\mathrm{Ga}^{-1/6}$.

Величина γ обычно велика, поэтому отношение n/Ga мало всюду, за исключением случая очень малых Ga. Например, для воды при 15 °C $\gamma = 2850$ и даже при Ga = 1 будет выполняться неравенство $n/\mathrm{Ga} = 0{,}01 \ll 1$. Так как для всех волновых течений $\mathrm{Re} > \mathrm{Ga}$, то эти оценки справедливы тем более для n/Re.

Для построения периодического по ξ решения задачи (1.20) – (1.22) применим метод, использованный в работах [25, 30]. Будем искать решение в виде рядов

$$\psi = \psi_{00}(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k0}(\eta) \sin k\xi + \psi_{k1}(\eta) \cos k\xi),$$

$$h = h_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k0} \sin k\xi + h_{21} \cos k\xi). \qquad (1.24)$$

Коэффициенты разложения ψ являются функциями η, а коэффициенты разложения h – постоянными. Так как переменная ξ не входит явно в уравнение и граничные условия, то решение (1.24) определено с точностью до

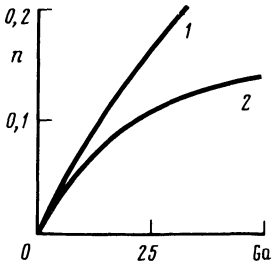


Рис. 1.1. Область существования волновых режимов течения

1 – кривая нейтральной устойчивости; *2* – кривая наибольших расходов при постоянной средней толщине пленки жидкости

произвольного сдвига по ξ. Выберем начало отсчета таким образом, чтобы $h_{11} = 0$. Поскольку толщина слоя отнесена к среднему за период значению h_0, то $h_{00} = 1$. Прежде чем вывести уравнения для коэффициентов ψ_{ik} разложения (1.24), рассмотрим граничные условия. Нетрудно убедиться, что при всех допустимых значениях ξ будем иметь

$$\psi_{ik} = 0, \ \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta = 0, \ \frac{\partial^2 \psi_{ik}}{\partial \eta^2} = 0 \text{ при } \eta = 1. \qquad (1.25)$$

Уравнение расхода (1.22) имеет простой интеграл

$$\psi_{\eta=1} - zh = \text{const}.$$

Пользуясь определением функции тока, получаем следующее выражение для расхода жидкости в пленке:

$$\int_0^h u dy = u_0 h_0 \psi_{\eta=1}. \qquad (1.26)$$

Выберем теперь константу так, чтобы среднее по ξ значение величины $\psi_{\eta=1}$ было равно единице. Тогда величина $h_0 u_0$ будет равна среднему расходу в пленке. Легко видеть, что при этом const = $1 - z$. Таким образом, получаем, что

$$\psi_{\eta=1} = 1 - z + zh. \qquad (1.27)$$

Следуя методу работ [25, 30], подставим разложение (1.24) в уравнение (1.20) и граничные условия (1.21), (1.22) и представим правую часть

в виде разложения по степеням $s = \sin\xi$, $c = \cos\xi$. Обозначим эту правую часть через Q. Тогда будем иметь

$$Q = \sum_k Q_k, \quad Q_k = \sum_{l=0} Q_{kl} s^{k-l} c^l. \tag{1.28}$$

В соответствии с (1.28) уравнения для ψ_{00}, ψ_{ik} будут иметь вид

$$\begin{aligned}
E\frac{\partial^3 \psi_{00}}{\partial \eta^3} &= Q_0 + \frac{1}{2}(Q_{20} + Q_{22}),\\
E\frac{\partial^3 \psi_{10}}{\partial \eta^3} &= Q_{10} + \frac{1}{4}(Q_{32} + 3Q_{30}),\\
E\frac{\partial^3 \psi_{11}}{\partial \eta^3} &= Q_{11} + \frac{1}{4}(Q_{31} + 3Q_{33}),\\
E\frac{\partial^3 \psi_{20}}{\partial \eta^3} &= \frac{1}{2}Q_{21}, \quad E\frac{\partial^3 \psi_{21}}{\partial \eta^3} = \frac{1}{2}(Q_{22} - Q_{20}),
\end{aligned} \tag{1.29}$$

где коэффициенты Q_k из формулы (1.28) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&Q_0 = -H,\\
&Q_1 = -(3Hh_1 + Gh_1''') + h_1'(z\psi_{0\eta} + z\eta\psi_{0\eta\eta} - \psi_{0\eta}^2) +\\
&+ (-z\psi_{1\eta\xi} + \psi_{0\eta}\psi_{1\eta\xi} - \psi_{1\xi}\psi_{0\eta\eta}),\\
&Q_2 = -(3Hh_2 + Gh_2''') + h_2'(z\psi_{0\eta} + z\eta\psi_{0\eta\eta} - \psi_{0\eta}^2) - 3Gh_1h_1''' -\\
&- 3Hh_1^2 + h_1(-z\psi_{1\eta\xi} + \psi_{0\eta}\psi_{1\eta\xi} - \psi_{0\eta\eta}\psi_{1\xi}) +\\
&+ h_1'[z(h_1\psi_{0\eta} + \psi_{1\eta}) + z\eta(\psi_{1\eta\eta} + h_1\psi_{0\eta\eta}) - 2\psi_{0\eta}\psi_{1\eta}] +\\
&+ (-z\psi_{2\xi\eta} + \psi_{0\eta}\psi_{2\eta\xi} - \psi_{0\eta\eta}\psi_{2\xi}) + (-zh_1\psi_{1\eta\xi} + \psi_{1\eta}\psi_{1\eta\xi} - \psi_{1\xi}\psi_{1\eta\eta}),\\
&Q_3 = -G[3h_1h_2''' + h_1'''(3h_1^2 + 3h_2)] - H(h_1^3 + 6h_1h_2) +\\
&+ h_1'[z(\psi_{2\eta} + h_1\psi_{1\eta} + h_2\psi_{0\eta}) + z\eta(\psi_{2\eta\eta} + h_1\psi_{1\eta\eta} + h_2\psi_{0\eta\eta}) -\\
&- (\psi_{1\eta}^2 + 2\psi_{0\eta}\psi_{2\eta})] + h_2'[z(\psi_{1\eta} + h_1\psi_{0\eta}) +\\
&+ z\eta(\psi_{1\eta\eta} + h_1\psi_{0\eta\eta}) - 2\psi_{0\eta}\psi_{1\eta}] +\\
&+ h_1[-z(\psi_{2\xi\eta} + h_1\psi_{1\eta\xi}) + (\psi_{0\eta}\psi_{2\eta\xi} + \psi_{1\eta}\psi_{1\xi\eta}) -\\
&- \psi_{1\xi}\psi_{1\eta\eta} - \psi_{2\xi}\psi_{0\eta\eta}] + h_2[-z\psi_{1\eta\xi} + \psi_{0\eta}\psi_{1\eta\xi} - \psi_{1\xi}\psi_{0\eta\eta}] -\\
&- z(h_1\psi_{2\eta\xi} + h_2\psi_{1\eta\xi}) + (\psi_{1\eta}\psi_{2\eta\xi} + \psi_{2\eta}\psi_{1\eta\xi}) -\\
&- (\psi_{1\xi}\psi_{2\eta\eta} + \psi_{2\xi}\psi_{1\eta\eta}),
\end{aligned} \tag{1.30}$$

где штрихами обозначены производные по

$$\xi, \ \psi_{k\eta\eta} = \partial^2\psi_k/\partial\eta^2, \quad \psi_{k\xi\eta} = \partial^2\psi_k/\partial\xi\partial\eta.$$

Входящие в правые части этих соотношений величины Q_{ik} можно явным образом выразить через коэффициенты разложения (1.30) и их производные по η. Для этого следует провести все указанные разложения. Так как это связано с громоздкими выкладками, то вычисление коэффициентов Q_{ik} можно включить в единый численный алгоритм, при котором не тре-

буется их явного задания. Для этого выберем четыре последовательных значениях ξ:

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = \pi/4,\ \xi_3 = \pi/2,\ \xi_4 = 3\pi/4.$$

Пусть $Q_k^i = Q_k(\xi_i)$, тогда легко показать, пользуясь соотношением (1.28), что

$$\begin{aligned} &Q_{10} = Q_1^3,\ Q_{11} = Q_1^1,\ Q_{20} = Q_2^3,\ Q_{21} = 2Q_2^2 - Q_{20} - Q_{22},\\ &Q_{22} = Q_2^1,\ Q_{30} = Q_3^3,\ Q_{31} = \sqrt{2}(Q_3^2 - Q_3^4) - Q_3^1,\\ &Q_{32} = \sqrt{2}(Q_3^2 + Q_3^4) - Q_3^3,\ Q_{33} = Q_3^1. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Теперь нахождение Q_{ik} сводится к вычислению Q_k по формулам (1.30). Для каждой из пяти функций ψ_{ik} имеем краевую задачу с тремя условиями. Два из них заданы при $\eta = 0$ и имеют вид

$$\psi_{ik} = 0,\ \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial \eta} = 0,$$

а одно – при $\eta = 1$ и имеет вид $(\partial^2 \psi_{ik})/(\partial \eta^2) = 0$.

Дополнительно из уравнения (1.27) получаем еще пять соотношений при $\eta = 1$:

$$\psi_{00} = 1,\ \psi_{10} = zh_{10},\ \psi_{11} = 0,\ \psi_{20} = zh_{20},\ \psi_{21} = zh_{21}. \tag{1.32}$$

Система нелинейных уравнений (1.29) решалась численно методом Рунге–Кутта от $\eta = 0$. Десять уравнений при $\eta = 1$, которые имеют вид $f_k = 0$, удовлетворялись подбором десяти величин δ_k:

$$\mathrm{Re},\ z,\ h_{10},\ h_{20},\ h_{21},\ \left(\frac{\partial^2 \psi_{ik}}{\partial \eta^2}\right)_{\eta = 0}. \tag{1.33}$$

Подбор этих десяти величин осуществлялся автоматически по методу Ньютона. Построение матрицы производных производили путем многократного решения задачи Коши для системы (1.29) с начальными условиями при $\eta = 0$. Пусть f_{i0} есть значение f_i при выбранных начальных значениях δ_k. Разлагая каждую из величин f_i в ряд Тейлора относительно точки δ_{k0} и оставляя только линейные члены этого ряда, получаем систему уравнений для поправок $\Delta\delta_k$:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{\partial f_i}{\partial \delta_k} \Delta\delta_k = -f_{i0},\ i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Поправки к параметрам (1.33) определялись путем численного решения линейной системы 10-го порядка. Обычно хорошая точность получалась после трех–пяти итераций. Численный алгоритм, изложенный выше, был применен к расчету серии волновых режимов в области их существования на плоскости Re/Ga – n, показанной на рис. 1.2. Расчет проводился следующим образом [30–34]. Выбирали ряд значений Ga и для каждого постоянного значения Ga проводили расчеты при различных значениях n, начиная от кривой нейтральной устойчивости до значений n, лежащих несколько ниже линии максимального значения амплитуды.

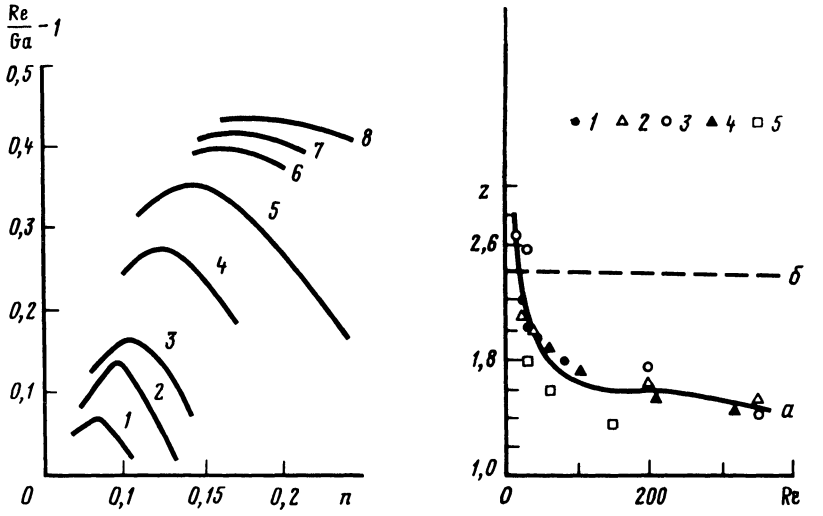


Рис. 1.2. **Зависимость расхода жидкости для слоя постоянной средней толщины h_0 от безразмерного волнового числа n при различных значениях числа Галилея Ga**

1 – Ga = 14,348; *2* – 28,183; *3* – 22,13; *4* – 32,56; *5* – 45,92; *6* – 62,5; *7* – 70; *8* – Ga = 80

Рис. 1.3. **Зависимость безразмерной фазовой скорости от $\mathrm{Re} = 3u_0h_0/\nu$**

а – **расчет по нелинейной теории [30, 32, 33]; *б* – расчет по линейной теории [15]; *1* – данные работы [16]; *2* – данные работы [35] полученные для пластины осциллографическим методом; *3* – данные работы [35], полученные с помощью киносъемки; *4* – данные работы [45]; *5* – данные работы [38] для пластины на расстоянии 11 см от источника**

Образование волн на поверхности пленки жидкости вызывает увеличение расхода. Чем больше средняя толщина пленки, тем больше относительное увеличение расхода. При одной толщине пленки расход проходит через максимум (см. рис. 1.2). Режимы, отвечающие максимуму расхода, названы в [25] оптимальными, они наиболее устойчивы к малым возмущениям [26] и с наибольшей вероятностью реализуются в эксперименте, как это будет показано ниже.

Зависимость безразмерной фазовой скорости от волнового числа приведена в табл. 1.1, из которой видно, что оптимальным волнам соответствует минимальное значение безразмерной фазовой скорости.

Зависимость безразмерной фазовой скорости оптимальных волн от числа Re представлена на рис. 1.3. Расчет по нелинейной теории (кривая *а*) [32] сравнивается с экспериментальными данными различных исследователей [35–38] и с результатами линейной теории [15] (пунктирная линия *б*). Следует отметить, что при определении фазовой скорости, проведенном в работе [35] осциллографическим методом, наблюдается лучшее совпадение с теорией, чем по данным киносъемки. Наибольшее отклонение наблюдается для данных работы [38], полученных на расстоянии 11 см от источника питания. Поскольку, как уже указывалось ранее, теория не учитывает развития характеристик волнового течения во времени, то наблюдаемое отклонение можно объяснить тем, что в рассматриваемом сечении

Таблица 1.1

Изменение амплитуды волны α, безразмерной фазовой скорости z и волнового числа n с ростом чисел Ga и Re

Ga	$\mathrm{Re} = \frac{3q}{\nu}$	α	z	$n = \frac{2\pi h_0}{\lambda}$
18,193	18,1929	$6 \cdot 10^{-4}$	2,9996	0,15
	18,1929	$6 \cdot 10^{-4}$	2,9996	0,14
	18,4957	0,105	2,9179	0,13
	19,40667	0,2111	2,6891	0,12
	20,0404	0,26030	2,53917	0,11
	20,3445	0,28087	2,45695	0,10
	20,3643	0,28215	2,4385	0,095
	20,3034	0,27815	2,4395	0,09
	20,0087	0,25798	2,4422	0,08
	19,7835	0,24144	2,4552	0,07
62,5	85,7461	0,4939	1,7782	0,205
	86,3967	0,5009	1,7505	0,195
	86,9102	0,5062	1,7272	0,185
	87,2728	0,51056	1,70605	0,175
	87,4528	0,5127	1,6895	0,165
	87,4225	0,5127	1,6911	0,155
	87,1505	0,5103	1,6974	0,145

Примечание. Выделены значения параметров, соответствующие оптимальному режиму течения пленки жидкости.

фазовая скорость еще не достигла своего максимального значения. Зависимость безразмерной скорости от Re, полученная на основании обработки методом наименьших квадратов результатов расчета по уравнениям (1.29), может быть представлена многочленами

$$z = 2{,}864 - 2{,}761 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Re} + 1{,}98 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re}^2 - 4{,}68 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Re}^3,$$

$$\mathrm{Re} \leqslant 220; \tag{1.34}$$

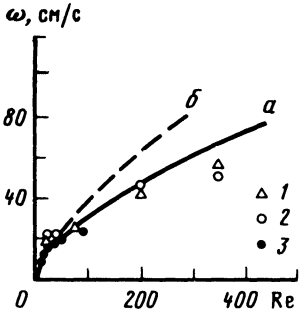
$$z = 1{,}78 - 9{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re},\ 450 \geqslant \mathrm{Re} \geqslant 220;\ z = 1{,}36\ \ \mathrm{Re} > 450. \tag{1.35}$$

Зависимость безразмерной фазовой скорости от отношения Re/Ga характеризуется быстрым падением в области малых значений Re/Ga и значительно более медленным падением, начиная с Re/Ga = 1,4. Зависимость z от отношения Re/Ga имеет вид

$$z = 5{,}97 - 3{,}12(\mathrm{Re/Ga}),\ \ \mathrm{Re/Ga} \leqslant 1{,}4; \tag{1.36}$$

$$z = 2{,}31 - 0{,}505(\mathrm{Re/Ga}),\ \ \mathrm{Re/Ga} \geqslant 1{,}4. \tag{1.37}$$

Как известно, для определения фазовой скорости необходимо знать среднюю скорость и, следовательно, среднюю толщину пленки. Однако существуют методы, которые позволяют непосредственно определять фазовую скорость [39]. На рис. 1.4 зависимость фазовой скорости от Re, согласно расчетам по нелинейной (кривая *а*) [32] и линейной (пунктир-



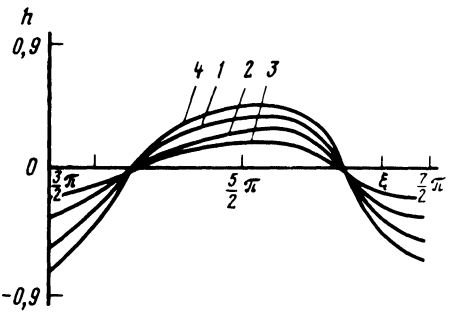


Рис. 1.4. Зависимость фазовой скорости ω от Re

а – расчет по нелинейной теории; *б* – расчет по линейной теории [15]; *1* – данные, полученные осциллографическим методом [35]; *2* – данные, полученные с помощью киносъемки [35]; *3* – данные работ [15, 16]

Рис. 1.5. Форма волны оптимальных режимов

1 – Ga = 45,92; *2* – 22,13; *3* – 14; *4* – Ga = 80

ная линия *б*) теориям, сопоставляется с экспериментальными данными различных исследователей. Теоретическая кривая *а* лучше всего согласуется с данными работы [16]. Выражение для фазовой скорости (ω, см/с) аппроксимируется многочленами от Re следующим образом:

$$\omega = 0{,}73\mathrm{Re}, \quad 0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 20; \tag{1.38}$$

$$\omega = 0{,}185\mathrm{Re} + 9{,}6, \quad 20 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 220; \tag{1.39}$$

$$\omega = 0{,}125\mathrm{Re} + 22, \quad \mathrm{Re} > 220. \tag{1.40}$$

Форма волны, рассчитанная по разложению (1.24), показана на рис. 1.5, на котором изображены волны при оптимальных режимах течения пленки воды. Волна имеет резкий передний фронт и напоминает вытянутую скатывающуюся каплю. С увеличением расхода жидкости фронт волны становится более резким и отношение максимальной толщины пленки к минимальной возрастает.

Как следует из [12], для расчета коэффициентов массопередачи требуется знать амплитуду волны. Зависимость амплитуды волны от Re показана на рис. 1.6. Амплитуда волны рассчитывалась на основании решения системы уравнений (1.29) по формуле

$$\alpha = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{max} + h_{min}}, \tag{1.41}$$

где h_{max}, h_{min} – максимальная и минимальная толщины волновой пленки жидкости.

Нетрудно убедиться, что экспериментальные данные различных авторов хорошо совпадают с результатами расчета по нелинейной теории (кривая *а*). Пунктирная линия *б* соответствует линейной теории [15]. Экспериментальные данные работы [16] получены для случая стекания тонкого слоя жидкости при регулярно-волновом режиме, который создавался ре-

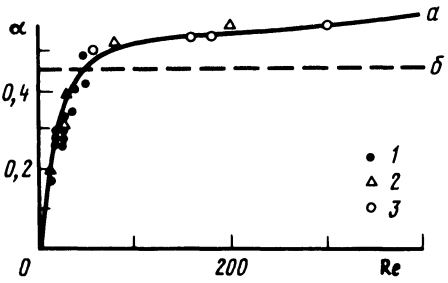


Рис. 1.6. Зависимость амплитуды волны α от Re

а – расчет по нелинейной теории; *б* – расчет по линейной теории [15]; *1* – течение пленки по наружной поверхности вертикальной трубки диаметром 25 мм при регулярно волновом режиме стекания [16]; *2* – течение жидкости по вертикальной пластине на расстоянии 670 мм от источника [35]; *3* – расчет по максимальному и минимальному значениям толщины пленки [37] ($\gamma = 2850$)

гулярными возмущениями. В работе [35] авторы изучали стекание тонких слоев жидкости по вертикальной пластине на расстоянии 670 мм от источника питания. В этой работе показано, что амплитуда волны изменяется с расстоянием от источника питания. Для сравнения с теорией на рис. 1.6 нанесены точки, полученные на расстоянии, наиболее удаленном от источника питания, поскольку предлагаемая теория не учитывает развития течения. Известно, что стекание жидкости по вертикальной пластине сопровождается образованием трехмерных волн. Можно предположить, что если величина амплитуды волны на расстоянии 670 км от источника питания достигла своего максимального значения, то вклад этих волн в величину, учитывающую возмущение потока, в целом незначителен. Амплитуда волны, по данным работы [37], рассчитана по максимальным и минимальным значениям толщины пленки для волн с максимальной амплитудой. Теоретический результат нелинейной теории (кривая *а*) представлен только для оптимального режима, т.е. для волн с максимальной амплитудой. Совпадение теории с экспериментом можно считать достаточно хорошим. Зависимость амплитуды волны от Re, полученная с помощью аппроксимации результатов решения системы (1.29) для $\gamma = 2850$, имеет вид

$$\alpha = \mathrm{Re}/(1{,}444\mathrm{Re} + 44{,}48),\ \mathrm{Re} \leqslant 100, \tag{1.42}$$

$$\alpha = 0{,}505 + 2{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re},\ 600 > \mathrm{Re} > 100, \tag{1.43}$$

$$\alpha = 0{,}643,\ \mathrm{Re} > 600,$$

где α определялась по формуле (1.41).

Ускорение силы тяжести при гравитационном волновом течении имеет существенное значение, и оно может быть учтено с помощью числа Галилея Ga. Отношение Re/Ga, как показано на рис. 1.2, достаточно полно передает возмущение, наблюдаемое при волновом гравитационном течении пленки жидкости. Если это отношение равно единице, то течение становится безволновым и возмущение волновой поверхности становится равным нулю, т.е. $\alpha = 0$. Если величина рассматриваемого отношения больше единицы, то наблюдается волновой режим течения, характеризуемый амплитудой возмущения, фазовой скоростью и длиной волны. Поэтому представляет

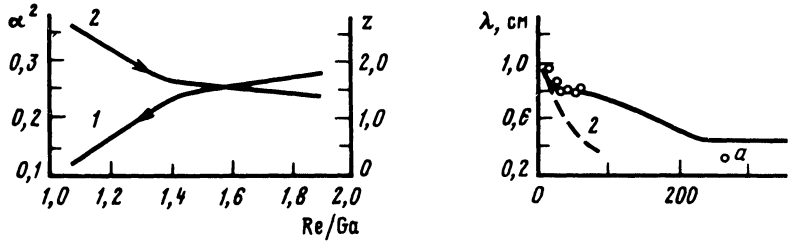


Рис. 1.7. Зависимость квадрата амплитуды волны α (*1*) и безразмерной фазовой скорости z (*2*) от отношения Re/Ga

Рис. 1.8. Зависимость длины волны λ от Re

1 – расчет по нелинейной теории [30, 32]; *2* – расчет по линейной теории [15]; *a* – данные работы [16]

интерес проводить аппроксимацию характеристик волнового пленочного течения не только функцией числа Re, но и функцией отношения Re/Ga. В ряде случаев зависимость волновых параметров пленки жидкости от отношения Re/Ga дает дополнительную информацию о характере волнового течения.

На рис. 1.7 представлена зависимость квадрата амплитуды волны и безразмерной фазовой скорости от отношения Re/Ga. Из рисунка видно, что с увеличением этого отношения амплитуда сначала резко падает до Re/Ga $\sim$ 1,4, затем темп ее уменьшения замедляется. Аналогичный характер изменения наблюдается и в зависимости безразмерной фазовой скорости. При отношении Re/Ga $\sim$ 1,4 в седловинах волн скорость принимает отрицательное значение.

Зависимости квадрата амплитуды и безразмерной фазовой скорости от отношения имеют вид

$$\alpha^2 = 0{,}7(\mathrm{Re/Ga} - 1), \quad \mathrm{Re/Ga} \leqslant 1{,}4,$$
$$\alpha^2 = 0{,}143\ \mathrm{Re/Ga} + 0{,}082, \quad \mathrm{Re/Ga} > 1{,}4, \tag{1.44}$$

$$z = 5{,}97 - 3{,}12\mathrm{Re/Ga}, \quad \mathrm{Re/Ga} \leqslant 1{,}4,$$
$$z = 2{,}31 - 0{,}48\mathrm{Re/Ga}, \quad \mathrm{Re/Ga} > 1{,}4. \tag{1.45}$$

Длины волны, так же как и амплитуда, входит в расчетное уравнение для коэффициента массоотдачи при волнообразовании [12, 13]. Зависимость ее от Re для оптимальных режимов ($\gamma = 2850$) представлена на рис. 1.8. Согласно линейной теории, длина волны с ростом Re быстро падает (пунктирная линия *2*) и при Re $\simeq$ 100 становится равной порядка 3 мм, в то время как по нелинейной теории падение длины волны происходит медленнее и при Re $>$ 220 значение λ становится постоянной величиной, равной 5 мм.

Длина волны входит в безразмерное число $G = 9n^2\gamma \mathrm{Ga}^{1/3}/\mathrm{Re}^2$. Отметим, что в это число входят не только гидродинамические величины, такие, как Re и Ga, но и величины, учитывающие физико-химические свойства жидкой пленки $\gamma = (\sigma/\rho)(\nu^4 g)^{-1/3}$. Рассмотренное число может быть

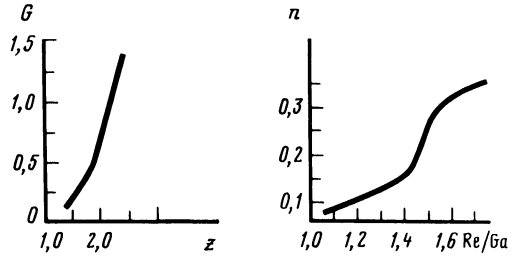


Рис. 1.9. Зависимость параметра $G = 9\,n^2\gamma \mathrm{Ga}^{1/3}/\mathrm{Re}^2$ от безразмерной фазовой скорости z ($\gamma = 2850$)

Рис. 1.10. Зависимость безразмерного волнового числа $n = 2\pi h_0/\lambda$ от отношения Re/Ga ($\gamma = 2850$)

аппроксимировано следующими алгебраическими выражениями от безразмерной фазовой скорости (рис. 1.9):

$$G = 1{,}8z - 2{,}92,\ z \geqslant 1{,}9; \tag{1.46}$$

$$G = 0{,}786z - 1,\ z \leqslant 1{,}9. \tag{1.47}$$

Эти выражения можно преобразовать через число Вебера:

$$n = 2\pi h_0/\lambda = \mathrm{We}\,(1{,}8z - 2{,}92)^{1/2},\quad z \geqslant 1{,}9; \tag{1,48}$$

$$n = 2\pi h_0/\lambda = \mathrm{We}\,(0{,}789z - 1)^{1/2},\quad z \leqslant 1{,}9.\ \ \mathrm{We} = u_0\,(\rho h_0)^{1/2}\sigma^{-1/2}. \tag{1.49}$$

Несколько более сложной является зависимость безразмерного волнового числа n от отношения Re/Ga (рис. 1.10). Эту зависимость трудно аппроксимировать многочленом низшей степени для всего интервала изменения Re/Ga. Поэтому предлагаются следующие выражения для двух характерных участков кривой:

$$n = 0{,}222\,(\mathrm{Re/Ga} - 1) + 0{,}067,\ 1{,}04 \leqslant \mathrm{Re/Ga} \leqslant 1{,}44; \tag{1.50}$$

$$n = 5{,}243\,(\mathrm{Re/Ga})^3 - 27{,}329\,(\mathrm{Re/Ga})^2 + 47{,}612\mathrm{Re/Ga} - 27{,}362,$$

$$1{,}44 < \mathrm{Re/Ga} \leqslant 1{,}7; \tag{1.51}$$

$$n = \exp\left[2{,}3\,\mathrm{Re/Ga}/(1{,}33 - 3{,}28\,\mathrm{Re/Ga})\right],\ \mathrm{Re/Ga} > 1{,}7.$$

На интегральные характеристики (расход жидкости) детальное распределение скоростей оказывает сравнительно небольшое влияние. При малых расходах в пленке численное решение системы (1.20)–(1.22), полученное в работах [30–33], близко к решению, найденному прямым методом [25]. Однако с повышением расхода жидкости расхождение увеличивается. На рис. 1.11 и 1.12 даны примеры распределения скоростей в поперечном сечении пленки. Локальное значение скорости в поперечном сечении пленки, показанное на этих рисунках, отнесено к значениям скорости на поверхности $u(1)$. Распределение скоростей показано для нескольких значения ξ. Как видно из этих рисунков, при малых расходах распределение скорости поперек пленки близко́ к параболическому. Отличие формы профилей от параболы растет с ростом расхода жидкости в пленке, и чем ближе к седловине волны, тем профиль скорости становится

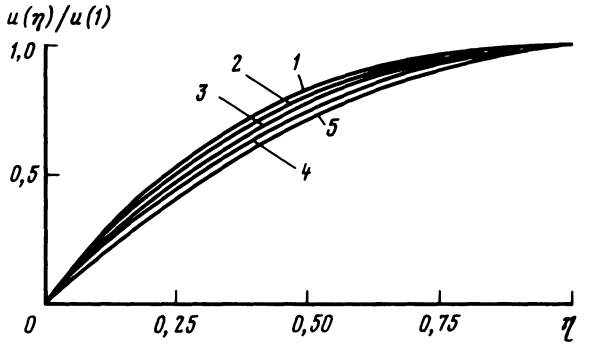


Рис. 1.11. Профиль скорости при Ga = 62,5 и n = 0,165 по длине волны
1 – $\xi = 3\pi/2$; *2* – $5\pi/4$; *3* – $2\pi/4$; *4* – $\pi/4$; *5* – $\xi = 7\pi/4$ (γ = 2850)

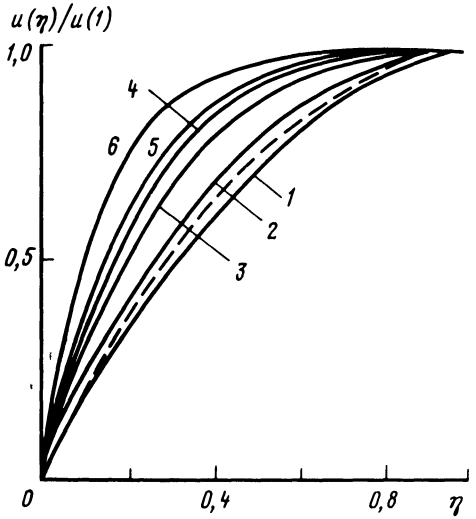


Рис. 1.12. Профиль скорости при Ga = 200, Re = 370,92 и n = 0,371 по длине волны
1 – $\xi = 0$; *2* – $\pi/4$; *3* – $\pi/2$; *4* – $3\pi/4$; *5* – π; *6* – $\xi = 5\pi/4$ (γ = 2850). Пунктирная линия – параболическое распределение скорости

более заполненным (см. рис. 1.12). Скорость на поверхности пленки жидкости, отнесенная к средней скорости ($u(1)/u_0$) на одной длине волны, изображена при постоянной средней толщине и различных длинах волн (рис. 1.13,*а*) и при различных средних толщинах и значениях длин волн, обеспечивающих максимальные расходы в слое (рис. 1.13,*б*). Характерная черта волнового течения – резкое падение скорости в наименьшем сечении пленки. С ростом амплитуды волны максимальная скорость быстро падает до нуля, а при значительных расходах достигает отрицательных значений. Для оптимальных режимов распределение скорости на длине волны показано на рис. 1.13,*б*. Как видно, область отрицательных значений скорости в сечении пленки возникает начиная с Ga = 45. При этом

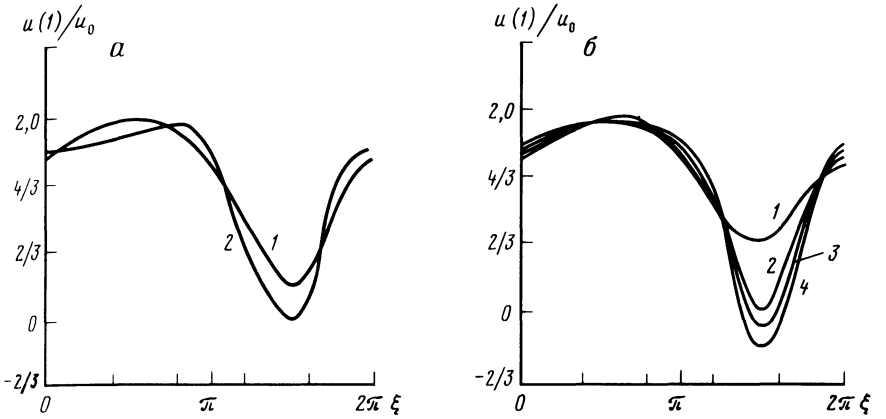


Рис. 1.13. Изменение отношения скорости на поверхности слоя $u(1)$ к средней скорости u_0 на длине волны при Ga = 32,56 и различных значениях волнового числа (*а*) и при различных значениях числа Галилея (*б*)

а: 1 – n = 0,17, *2* – n = 0,10; *б: 1* – Ga = 14,348; *2* – 32,55; *3* – 45,92; *4* – Ga = 62,5 (γ = 2850)

волновые параметры следующие: $\alpha = 0{,}46$; $z = 1{,}79$; Re = 60. Мгновенная картина течения в некоторый момент времени приведена на рис. 1.14. Здесь изображена типичная картина для функции тока при Ga = 62,5, n = = 0,165. Из решения системы уравнений (1.20) – (1.22) определялась функция тока Ψ. На рис. 1.14 нанесены значения $\Psi(y/h_0, \xi)$ на длине волны по толщине пленки. Точки равных значений Ψ соединены линиями. Как видно из рис. 1.14, в седловине волны имеет место отрицательное значение функции тока.

На рис. 1.15 показана зависимость толщины пленки от числа $\mathrm{Re}^{1/3}$. Линия *а* построена по нелинейной теории, линия *б* – по формуле Нуссельта. По нелинейной теории в отличие от формулы Нуссельта зависимость состоит из двух участков. Граница первого участка соответствует Re = 240, выше этого числа Re зависимость h_0 от $\mathrm{Re}^{1/3}$ уменьшается. Данные нелинейной теории несколько меньше значений, рассчитанных по формуле Нуссельта. Отклонение от формулы Нуссельта для чисел Re $\simeq$ 500 составляет около 8%. Толщина пленки жидкости, полученная в результате аппроксимации численных решений системы уравнений (1.20) – (1.22), представлена следующими уравнениями [33]:

$$h_0 \cdot 10^2 = \theta(78{,}96\mathrm{Re}^{1/3} + 44{,}47),\ 15 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 240; \qquad (1.52)$$

$$h_0 \cdot 10^2 = \theta(51{,}33\,\mathrm{Re}^{1/3} + 215{,}5),\ 240 < \mathrm{Re} \leqslant 500, \qquad (1.53)$$

где $\theta = (\nu^2/g)^{1/3}$.

На рис. 1.15 результаты расчета по нелинейной теории сравнены с экспериментальными данными работ [37, 40–42]. Отклонение теоретических значений от экспериментальных данных незначительное.

Незначительное различие в расчетах для средней толщины пленки, полученных по нелинейной теории в условиях волнообразования и по формуле Нуссельта, найденной из решения для гладкой пленки, указывает на то,

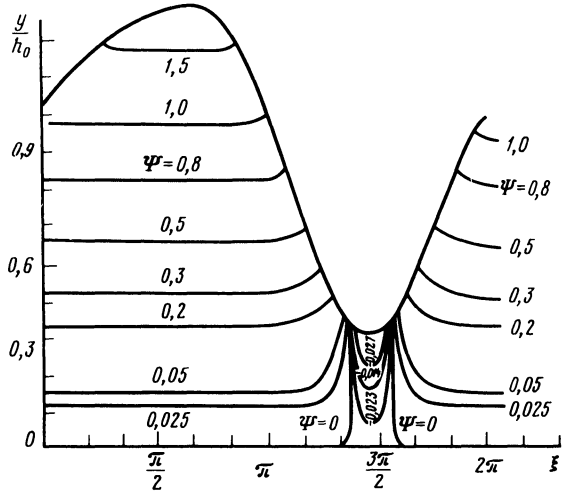


Рис. 1.14. Мгновенная картина течения в пленке жидкости при Ga = 62,5 и n = 0,165

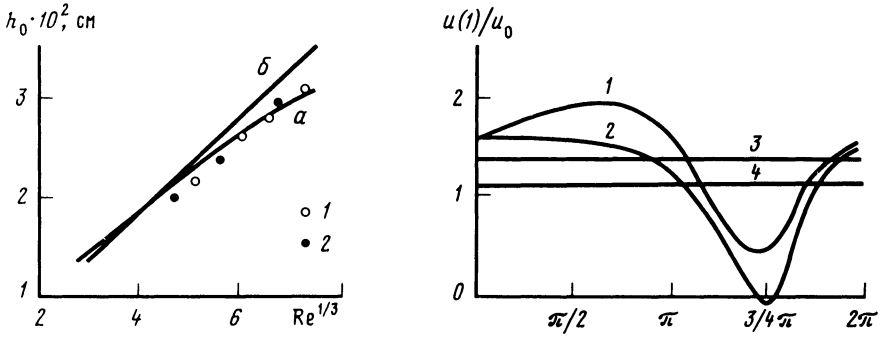


Рис. 1.15. Зависимость толщины пленки h_0 от Re

1 – экспериментальные данные [42]; *2* – экспериментальные данные [37, 40, 41]; *а* – расчет по нелинейной теории; *б* – расчет по формуле Нуссельта

Рис. 1.16. Изменение безразмерной поверхностной скорости по длине волны

1, 2 – локальные значения поверхностной скорости соответственно при Re=20,4, Ga = 18, 2 и Re = 371, Ga = 200; *3, 4* – среднеинтегральные значения поверхностной скорости соответственно при Re= 20,4, Ga = 18,2 и Re = 371, Ga = 200

что нелинейная теория позволяет определить не только локальные волновые характеристики, такие, как длина волны, амплитуда и т.д., но также правильно описывать среднеинтегральные характеристики, относительно которых происходит возмущение волновой поверхности.

Экспериментальному определению скорости на поверхности пленки жидкости посвящены исследования, обзор которых приведен в работе [43]. В этой же работе содержатся результаты измерения эффективной скорости на поверхности пленки жидкости в широком интервале чисел Re; установлена зависимость отношения эффективной средней скорости на

поверхности к среднерасходной скорости от числа Re. Показано, что это отношение с ростом числа Re уменьшается. Из линейной теории волнового пленочного течения под действием сил тяжести [15] невозможно определить, как это отношение изменяется с ростом числа Re.

Если для гладкой пленки при параболическом распределении отношение скорости на поверхности к среднерасходовой всюду равно 1,5, то расчет локальной поверхностной скорости пленки жидкости в нелинейной постановке, проведенной в [33], указывает на сложный характер ее изменения по длине волны, как это показано на рис. 1.16. Поверхностная скорость в начале длины волны для Re = 20,4 (кривая *1*) несколько увеличивается, а затем резко уменьшается. Поэтому методика определения поверхностной скорости завышает действительные ее значения. На этот недостаток методики указано также в работе [43]. В то же время необходимость в определении скорости на волновой поверхности пленки жидкости существует, так как эта величина часто используется при расчете эффективности массообмена. Эффективную скорость на поверхности по нелинейной теории определяли как среднее интегральное значений локальной скорости на длине волны $\bar{u}(1)$. Как видно из рис. 1.17, величина отношения $\bar{u}(1)/u_0$, найденная из нелинейной теории, уменьшается с увеличением числа Re. Аналогичный вид зависимости $\bar{u}(1)/u_0$ был получен экспериментально [43]. Данная зависимость может быть представлена многочленами второй степени от числа Re и от отношения Re/Ga соответственно

$$\bar{u}(1)/u_0 = 1{,}3554 - 9{,}18 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re} + 1{,}15 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Re}^2; \qquad (1.54)$$

$$\bar{u}(1)/u_0 = 2{,}065 - 0{,}829\,\mathrm{Re/Ga} + 0{,}186\,(\mathrm{Re/Ga})^2. \qquad (1.55)$$

Следует обратить внимание на то, что осредненная по длине волны поверхностная скорость $\bar{u}(1)$ не равна скорости на поверхности безволновой пленки даже при тех числах Рейнольдса, когда амплитуда волны становится незначительной величиной. И в этом случае скорость на поверхности будет изменяться по длине волны, о чем указывают формулы (1.54) и (1.55).

На рис. 1.18 изображена зависимость среднеинтегральной по длине волны поверхностной скорости $\bar{u}(1)$ и среднерасходовой скорости u_0 от числа Re. Среднерасходовую скорость волновой пленки жидкости определяли по уравнению

$$u_0 = \frac{1}{h_0 \Psi_{y=h}} \int_0^h u\,dy,$$

где $\Psi(\xi)$, $u(y, \xi)$, $h(\xi)$ – соответственно функцию тока, локальную скорость и локальную толщину пленки – рассчитывали на основании решения системы уравнений (1.20) – (1.22).

На этом же рисунке проведено сравнение расчетных по нелинейной теории данных $\bar{u}(1)$ и u_0 с экспериментальными результатами работы [43], в которой определялась эффективная поверхностная скорость. Из рис. 1.18 видно, что до $\mathrm{Re} \approx 60$, найденная в [43] эффективная поверхностная скорость согласуется с расчетной поверхностной скоростью $\bar{u}(1)$. С увеличением Re она больше соответствует среднерасходовой скорости.

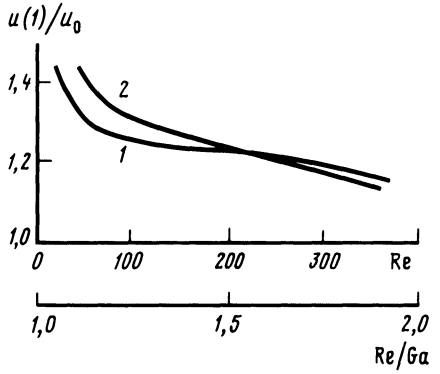
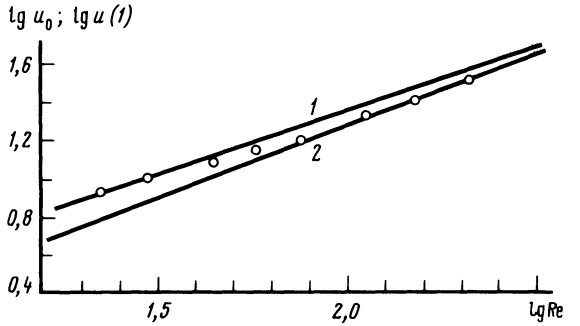


Рис. 1.17. Зависимость отношения $u(1)/u_0$ от числа Re (*1*) и отношения Re/Ga (*2*)

Рис. 1.18. Зависимость среднеинтегральной по длине волны поверхностной (*1*) и среднерасходовой (*2*) скоростей от числа $\mathrm{Re} = 3u_0 g/\nu$ при $\gamma = 2850$

Точки – экспериментальные данные работы [43]



Результаты численного решения системы уравнений (1.20)–(1.22) аппроксимируются следующими выражениями:

$$\bar{u}(1) = 0{,}992\,\mathrm{Re}^{0{,}678}; \tag{1.56}$$

$$u_0 = 0{,}548\,\mathrm{Re}^{0{,}769}. \tag{1.57}$$

Касательное напряжение на поверхности орошаемого канала при гравитационном стекании волновой пленки жидкости определялось из соотношения

$$\tau_{ст} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{1.58}$$

или в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_{ст} h_0/\mu u_0 = T.$$

Изменение безразмерного локального касательного напряжения на участке поверхности орошаемого канала, равном одной длине волны, вычисленной по нелинейной теории, показано на рис. 1.19. Начиная с Re = = 60, локальное касательное напряжение в седловинах волн принимает отрицательное значение (кривая *2*). Трудность в аппроксимации локаль-

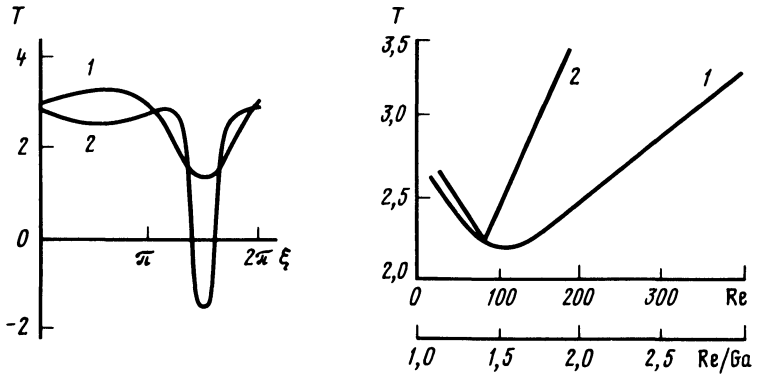


Рис. 1.19. Изменение безразмерного локального касательного напряжения на поверхности орошаемого канала T по длине волны ξ

1 – n =0,0095, Ga = 18,193, Re = 20,365; *2* – n = 0,165, Ga = 62,5, Re = 87,453 (γ = = 2850)

Рис. 1.20. Зависимость безразмерного среднеинтегрального касательного напряжения на стенке орошаемого канала T от числа Re(*1*) и отношения Re/Ga (*2*)

ного касательного напряжения полиномами от числа Re или от Re/Ga связана со сложным характером изменения касательного напряжения по длине волны. Для аппроксимации касательного напряжения многочленами выбрана его среднеинтегральная величина. На рис. 1.20 построена зависимость T от числа Re и от отношения Re/Ga. Эти зависимости имеют минимумы, соответствующие числам Re, при которых в седловинах волн появляются отрицательные значения скорости. Связь безразмерного касательного напряжения с коэффициентом сопротивления определим следующим образом. Известно, что

$$c_f = 2\tau_{ст}/\rho u_0^2,$$

или в безразмерном виде

$$c_f = 6T/\mathrm{Re}. \tag{1.59}$$

Результаты расчета по нелинейной теории аппроксимируются следующими алгебраическими многочленами от числа Re и от отношения Re/Ga:

$$C_f = \frac{23{,}58}{\mathrm{Re}^{1,13}}, \quad C_f = \frac{26{,}88}{\mathrm{Re}} - \frac{9{,}60}{\mathrm{Ga}}, \quad \mathrm{Re} < 100;$$
$$C_f = 2{,}4 \cdot 10^{-2} + \frac{10{,}60}{\mathrm{Re}}, \quad C_f = \frac{12{,}69}{\mathrm{Ga}} - \frac{4{,}62}{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Re} > 100. \tag{1.60}$$

Последнее время особое внимание уделяется изучению влияния физико-химических свойств жидкости на тепломассообменные процессы [34, 44–50]. Одна из причин этого внимания в том, что физические свойства жидкости могут существенно повлиять на режимные параметры течения, которые определяют процессы тепломассообмена. Поэтому изучение влия-

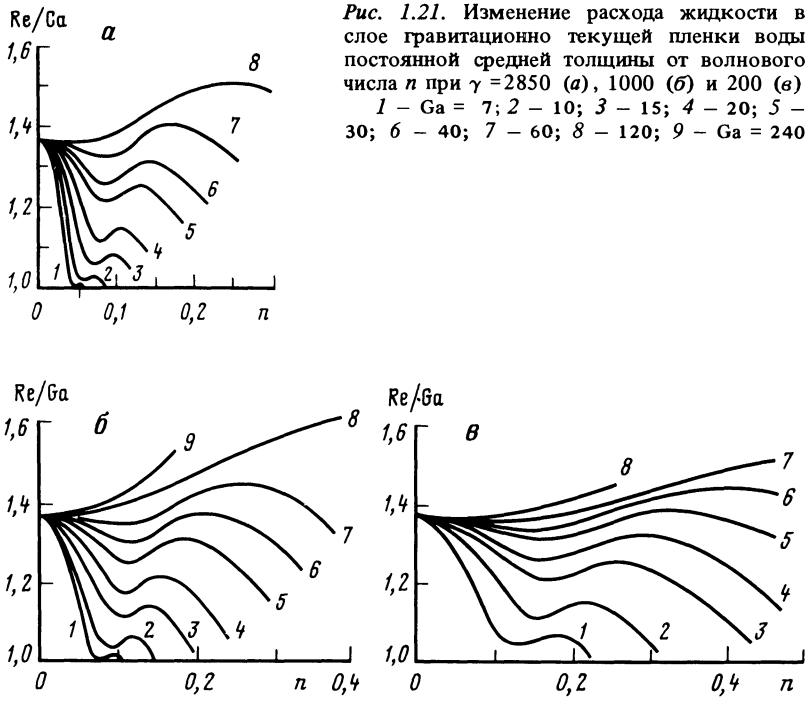


Рис. 1.21. Изменение расхода жидкости в слое гравитационно текущей пленки воды постоянной средней толщины от волнового числа n при $\gamma = 2850$ (*а*), 1000 (*б*) и 200 (*в*)
1 – Ga = 7; *2* – 10; *3* – 15; *4* – 20; *5* – 30; *6* – 40; *7* – 60; *8* – 120; *9* – Ga = 240

ния физко-химических свойств жидкости на волновые характеристики стекающей пленки жидкости, такие, как амплитуда волны, фазовая скорость и т.д., имеет не только практический, но и научный интерес с целью установления обобщенных зависимостей.

Влияние физико-химических свойств на волновые параметры установлено на основании решения той же системы нелинейных уравнений (1.20)–(1.22). Физико-химические свойства в этих уравнениях представлены комплексом $\gamma = \sigma\rho^{-1}(g\nu^4)^{-1/3}$ (см. уравнение (1.23)). Зависимость расхода в слое постоянной толщины от волнового числа исследована для широкого интервала чисел $\gamma = 2850 \div 1{,}7$ [34]. В этом интервале сохраняются условия применимости системы уравнений (1.20)–(1.22) для описания волновых течений тонких слоев жидкости.

Характерный вид изменения расхода жидкости в слое гравитационно текущей волновой пленки постоянной средней толщины (Ga = const) при различных волновых числах представлен на рис. 1.21. При этом оптимальные режимы, отмеченные ранее в работе [25] для водяной пленки, наблюдаются и для жидкостей с различными физико-химическими свойствами [34]. Кроме этих режимов, в длинноволновой области наблюдаются режимы в слое постоянной средней толщины с минимальным расходом. На рисунке эти режимы отвечают минимальным значениям на зависимостях Re/Ga от n. Это соответствует тому, что при одной и той же средней толщине пленки жидкости с различными длинами волн реализуется тот режим, расход которого минимален. Таким образом, при течении пленки

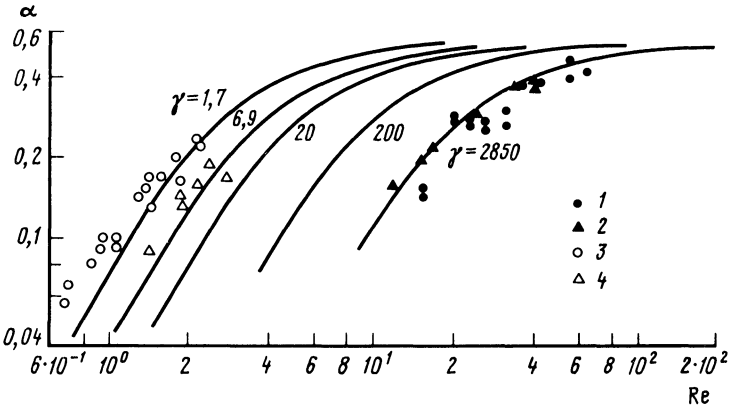


Рис. 1.22. Зависимость рассчитанной амплитуды волн оптимального режима (сплошные линии) от числа Re

Экспериментальные данные: *1* – γ = 2850 и ν = 1,14 сСт [15, 16]; *2* – 700 и 1,6 [15, 16]; *3* – 6,9 и 59 [48]; *4* – γ = 1,7; ν = 168 сСт [48]

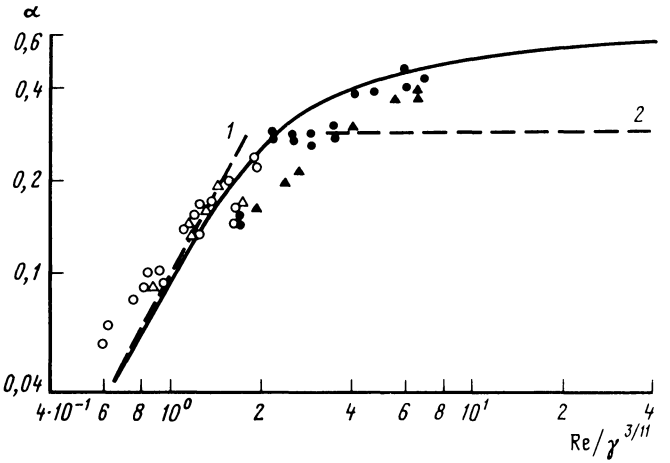


Рис. 1.23. Обобщенная зависимость α от параметра $\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}$

Сплошная линия – результаты численного счета; штриховые линии – теоретические зависимости от работы [48]; *1* – $\alpha = 0{,}1\,(\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})^{1{,}83}$; *2* – α =0,29. Обозначения экспериментальных данных те же, что на рис. 1.22

жидкости в зависимости от расхода могут реализоваться различные режимы: от оптимального с минимальным расходом до минимального режима с минимальным расходом. Режимы, находящиеся в промежутке между оптимальным и минимальным, – промежуточные. Таким образом, при сложном характере течения волновой пленки жидкости, близком к стохастическому, наблюдаются режимы с вполне определенной структурой, что указывает на существование явления самоорганизации при течении

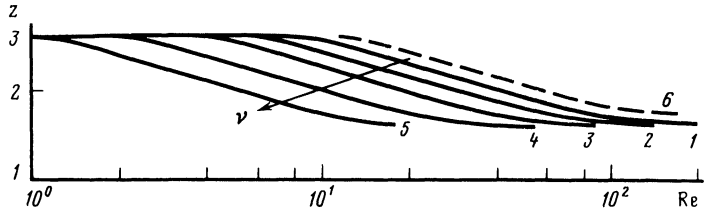


Рис. 1.24. Зависимость рассчитанной безразмерной фазовой скорости z от Re
1 – γ = 2850; *2* – 1000; *3* – 200; *4* – 20; *5* – 1, 7; *6* – теоретические результаты для γ = 3450 [46]

волновой пленки жидкости. Характерной чертой режима с минимальным расходом является то, что в этом режиме амплитуда волны мало отличается от амплитуды волны при оптимальном режиме.

Из рис. 1.21 следует: при стремлении волнового числа к нулю, что означает вырождение волнового режима, все кривые стремятся к одному и тому же значению отношения Re/Ga = 1,37, которое соответствует предельному режиму линейной теории [34]. Из этого соотношения вытекает, что толщина пленки жидкости равна

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{1{,}37}}\,\theta\,\mathrm{Re}_L^{1/3} = 0{,}9\delta = \delta_k, \qquad (1.61)$$

где $\theta = (\nu^2/g)^{1/3}$; δ, δ_k – толщины пленок по Нуссельту и Капице [15, 16].

На рис. 1.22 представлена зависимость амплитуды волны α от числа Рейнольдса Re = $3q/\nu$ для жидкостей, в которых кинематическая вязкость ν изменялась на два порядка: от 1,44 до 168 см^2/с. Сплошные линии получены на основании решения системы уравнений (1.20)–(1.23) [34], точки – экспериментальные данные различных авторов [15, 16, 48]. Удовлетворительное согласие теоретических расчетов по нелинейной теории с экспериментальными данными различных авторов указывает на применимость предложенной нелинейной теории волновых течений пленок жидкостей с разными физико-химическими свойствами. На рис. 1.23 представлена корреляция амплитуды волны от безразмерного комплекса $\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}$. С помощью этого комплекса расслоение кривых зависимости $\alpha(\mathrm{Re})$ удалось представить в виде единой обобщенной зависимости, имеющей степенной вид:

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0{,}094(\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})^{1{,}74}, \quad \mathrm{Re}/\gamma^{3/11} \leqslant 1{,}26;\\
&\alpha = (\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})/(1{,}44\,\mathrm{Re}/\gamma^{3/11} + 5), \quad 1{,}26 < \mathrm{Re}/\gamma^{3/11};\\
&\alpha = 0{,}505 + 2{,}05\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}, \quad \mathrm{Re}/\gamma^{3/11} > 11.
\end{aligned} \qquad (1.62)$$

Зависимость безразмерной фазовой скорости $Z = \omega/u_0$ от числа Re = $3q/\nu$ для систем с различными физико-химическими свойствами представлена на рис. 1.24. В исследованном интервале изменения γ безразмерная фазовая скорость уменьшается от значения Z = 3 (это соответствует

линейной теории устойчивости) [14, 17, 22] до $z \sim 1{,}5$. Эти результаты аппроксимированы следующей формулой:

$$z = 3{,}1\,(\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})^{-0{,}29},\quad 1{,}42 \leqslant \mathrm{Re}/\gamma^{3/11} \leqslant 7{,}95. \tag{1.63}$$

Нижний предел изменения параметра $\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}$ можно трактовать как начало волнообразования, что дает возможность получить значение критического числа Re_i для начала волнообразования:

$$\mathrm{Re}_i = 1{,}42\gamma^{3/11}, \tag{1.64}$$

соответственно для воды $\mathrm{Re}_i = 12{,}5$.

Глава 2

ГИДРОДИНАМИКА ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

Особый интерес представляет изучение волновой пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком, как случай, наиболее часто реализуемый в высокоскоростных тепломассообменных процессах. Впервые влияние газового потока на течение тонких слоев жидкости посредством учета в граничных условиях касательных сил при решении уравнений Навье–Стокса в линейной постановке исследовано в работах [51–53]. Эта задача в линейной постановке получила дальнейшее развитие [54, 55].

Ввиду практической важности исследуемого вопроса позже [56–58] предпринято исследование данной задачи в нелинейной постановке. Именно в этом случае удается определить амплитуду волны, ее зависимость от гидродинамических параметров, а также рассчитать другие волновые и гидродинамические параметры (длину волны, фазовую скорость и скорость на поверхности) и их зависимость от чисел Re и Ga.

Также является полезным проведение аппроксимации численных расчетов в виде многочленов от числа Re или от отношения Re/Ga, а также от величины $\Gamma_1 = \tau_0/h_0\rho(g\sin\psi_1 - \Delta/\rho)$, учитывающей взаимодействие газа с волновой поверхностью пленки жидкости, представленной в безразмерной форме. При малых значениях перепада давления $\Gamma_1 = \tau_0/\rho g\sin\psi_1 h_0$. Для случая вертикальной пластины или трубы $\sin\psi_1 = 1$. Здесь ψ_1 – угол наклона вертикальной поверхности, Δ – градиент давления в газе без учета лапласовых сил.

§ 2.1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВОЛНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАРАНЕЕ ЗАДАННОМ ПРОФИЛЕ СКОРОСТИ

Закрепим начало координат на стенке пластины (трубы) и будем отсчитывать координату x в направлении силы тяжести, а координату y – по направлению нормали. Уравнения Навье–Стокса в приближении, указанном в главе 1 (см. уравнения (1.15)), и уравнение неразрывности в диф-

ференциальной форме имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \sin\psi_1 g + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial h h_0}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \tag{2.1.1}$$

$$Q = \int_0^{hh_0} u dy.$$

Для рассматриваемого течения тонких слоев жидкости будем считать, что общий градиент давления складывается из перепада давления на концах трубы, который надо приложить для поддержания заданного течения газа при отсутствии волнообразования, и градиента давления, создаваемого силами поверхностного натяжения при волнообразовании. Тогда применительно к тонким слоям жидкости общий градиент давления будет равен

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \Delta - \sigma\frac{\partial^3 h h_0}{\partial x^3}. \tag{2.1.2}$$

Взаимодействие газового потока с волновой пленкой жидкости учитывается в граничном условии через касательные силы на поверхности раздела:

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 \quad \text{при} \quad y = hh_0. \tag{2.1.3}$$

Касательная и нормальная составляющие скорости на поверхности орошаемого канала (из условия прилипания) соответственно равны:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{2.1.4}$$

Введем функцию тока $\psi(\xi, \eta)$, определяемую соотношениями

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.1.5}$$

и безразмерные независимые переменные

$$\xi = \frac{n}{h_0}(x - u_0 zt), \quad \eta = \frac{y}{hh_0}. \tag{2.1.6}$$

Задачу (2.1.1) вместе с граничными условиями (2.1.3), (2.1.4) приведем к виду (см. (1.20)–(1.22)) [56]

$$E\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3} = -\left(G\frac{\partial^3 h}{\partial\xi^3} + H\right)h^3 + \frac{\partial h}{\partial\xi}\left[zh\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + zh\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right] -$$

$$- h\left(zh\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right); \tag{2.1.7}$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta = 0; \tag{2.1.8}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = Th^2, \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi - zh) = 0 \text{ при } \eta = 1,$$

где

$$T = \tau_0 h_0 / u_0 \mu = 3\mathrm{Ga}\Gamma_1/\mathrm{Re},$$
$$\Gamma_1 = \tau_0 / h_0 \rho\Gamma, \ \Gamma = g - \Delta/\rho, \ \mathrm{Ga} = \Gamma h_0^3/\nu^2,$$
$$G = 9n^2\gamma \mathrm{Ga}^{1/3}/\mathrm{Re}^2, \ H = 9\mathrm{Ga}/\mathrm{Re}^2 n, \tag{2.1.9}$$
$$Q = q = \tilde{q} h_0 U_0, \ \gamma = (\sigma/\rho)(\nu^4\Gamma)^{-1/3}, \ E = 3/\mathrm{Re}n,$$
$$\mathrm{Re} = 3q/\nu, \ n = 2\pi h_0/\lambda.$$

Из (2.1.9) следует, что обозначение параметров, входящих в систему уравнений (2.1.7), (2.1.8), такое же, как и для случая гравитационного стекания пленки жидкости. Разница состоит в том, что вместо ускорения силы тяжести введем параметр $\Gamma = g - \Delta/\rho$, который учитывает градиент давления газового потока без учета лапласовых сил. При $T = 0$ решение системы (2.1.7), (2.1.8) совпадает с решением системы (1.20)–(1.22) для гравитационного стекания пленки жидкости.

Примем для ψ простейшее выражение в виде многочлена по η наименьшей степени, удовлетворяющего трем условиям (2.1.8) (два условия при $\eta = 0$ и одно условие при $\eta = 1$). Можно показать, что функция тока в этом случае будет иметь вид
(черточка над q всюду будет опущена):

$$\psi = -\frac{3}{2} q \left(\frac{1}{3}\eta^3 - \eta^2\right) + \frac{1}{4} Th^2 (\eta^3 - \eta^2). \tag{2.1.10}$$

Для решения поставленной задачи проинтегрируем уравнение (2.1.7) по η от 0 до 1:

$$\frac{3}{2} zhq \frac{\partial h}{\partial \xi} - zh^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{6}{5} q^2 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{9}{10} qh \frac{\partial q}{\partial \xi} -$$
$$- h^3 \left(G \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + H\right) + 3Eq + \frac{1}{4} h^3 zT \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{20} qTh^2 \frac{\partial h}{\partial \xi} +$$
$$+ \frac{1}{40} T^2 h^2 \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{1}{5} Th^3 \frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{3}{2} ETh^2 = 0. \tag{2.1.11}$$

Из второго граничного условия (2.1.8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(q - zh) = 0$$

или

$$q = 1 - z + zh. \tag{2.1.12}$$

Обозначая $h = 1 + \varphi$, где

$$\varphi = \alpha \sin\xi + \alpha^2(\varphi_{20}\sin 2\xi + \varphi_{21}\cos 2\xi) + \ldots, \qquad (2.1.13)$$

характеризуем возмущение, вызванное образованием волн на поверхности пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком. В соотношении (2.1.13) опущен член $\cos\xi$, поскольку ξ не входит явно в уравнение (2.1.11), и поэтому решение определено с точностью до сдвига по ξ. При помощи соотношений (2.1.12) и (2.1.13) уравнение (2.1.11) можно преобразовать в другое нелинейное уравнение относительно φ [56]:

$$\varphi'''(1+\varphi)^3 + [\Lambda - B\varphi(\varphi+2)]\varphi' +$$
$$+ A\varphi^2(3+\varphi) + D\varphi + r - \frac{1}{G}\left\{\frac{1}{20}zT\varphi' + \frac{1}{5}zT\varphi\varphi' + \right.$$
$$+ \frac{1}{4}Tz\varphi^2\varphi' + \frac{1}{10}Tz\varphi^3\varphi' + \frac{1}{20}T\varphi' + \frac{1}{10}T\varphi\varphi' + \frac{1}{20}T\varphi^2\varphi' +$$
$$+ \frac{1}{40}T^2\varphi' + \frac{1}{10}T^2\varphi\varphi' + \frac{3}{20}T^2\varphi^2\varphi' + \frac{1}{10}T^2\varphi^3\varphi' +$$
$$\left. + \frac{1}{40}T^2\varphi^4\varphi' - \frac{3}{2}ET - 3ET\varphi - \frac{3}{2}ET\varphi^2\right\} = 0, \qquad (2.1.14)$$

где параметры со шрихом – производные по ξ;

$\Lambda = (z^2 - 2{,}4z + 1{,}2)/G$; $r = (\mathrm{Ga} - \mathrm{Re})/\gamma \mathrm{Ga}^{1/3}n^3$;

$B = z^2/5G$; $A = H/G$; $D = (3\mathrm{Ga} - z\,\mathrm{Re})/\gamma \mathrm{Ga}^{1/3}n^3$.

Обозначение других параметров дано в (2.1.9).

Записанное выше нелинейное уравнение для возмущения свободной поверхности в результате волнообразования (2.1.14) состоит из двух частей: первая часть $T = 0$ (до фигурных скобок) соответствует гравитационному стеканию жидкой пленки. Оно получено в работе [25]. Члены в фигурных скобках учитывают влияние газового потока на волновое течение пленки жидкости [56].

Подставив ряд (2.1.13) в уравнение (2.1.14), получим нелинейные алгебраические выражения для коэффициентов ряда α и φ_{ik}. Если не применять специальной методики решения, то система оказывается незамкнутой. Способ замыкания такой системы, разработанный в [25], аналогичен тому, который применялся при решении системы нелинейных уравнений в главе 1. Опуская довольно громоздкие преобразования, в которых приведено приравнивание к нулю первых двух гармоник и свободного члена разложения, получим

$$a_{11} + \alpha^2 a_{12} = 0,$$
$$a_{21}\alpha^{-2} + a_{22}\varphi_{20} + a_{23}\varphi_{21} + a_{24} = 0,$$
$$a_{31}\alpha^{-2} + a_{32}\varphi_{20} + a_{33}\varphi_{21} + a_{34} = 0, \qquad (2.1.15)$$
$$a_{41}\varphi_{20} + a_{42}\varphi_{21} + a_{43} = 0,$$
$$a_{51}\varphi_{20} + a_{52}\varphi_{21} + a_{53} = 0,$$

где

$$K = T/G;\ a_{11} = r + 1{,}5EK;\ a_{12} = 1/2(3A + 1{,}5EK),$$
$$a_{21} = (D + 3EK),\ a_{22} = 4B + 42 + K(0{,}4z + 0{,}2 + 0{,}2T),$$
$$a_{23} = -(12A + 6EK),\ a_{24} = 3A,$$
$$a_{31} = 4(1 - \Lambda) + 1/5K(z + 1 + 0{,}5T),$$
$$a_{32} = -[12A + 2(A - r)T],$$
$$a_{33} = -[42 + 4B + K(0{,}4z + 0{,}2 + 0{,}2T)], \qquad (2.1.16)$$
$$a_{34} = 3 + B + K(0{,}25z + 0{,}05 + 0{,}15T),$$
$$a_{41} = 2D + 6EK;$$
$$a_{42} = 16 - 4\Lambda + K(0{,}2z + 0{,}2 + 0{,}1T);$$
$$a_{43} = -[3 + 2B + K(0{,}2z + 0{,}1 + 0{,}1T)],$$
$$a_{51} = 4\Lambda - 16 - K(0{,}2z + 0{,}2 + 0{,}1T),$$
$$a_{52} = 2D + 6EK,\ a_{53} = -(3A + 1{,}5EK).$$

Исключая из системы (2.1.15) $\alpha, \varphi_{20}, \varphi_{21}$, получим уравнения, устанавливающие связь между основными характеристиками волнового течения Ga, Re, n и z:

$$a_{21}a_{12}(a_{42}a_{51} - a_{41}a_{52}) + a_{11}a_{22}(a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52}) +$$
$$+ a_{11}a_{23}(a_{43}a_{51} - a_{53}a_{41}) + a_{24}a_{11}(a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51}) = 0,$$
$$a_{31}a_{12}(a_{42}a_{51} - a_{41}a_{52}) + a_{11}a_{32}(a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52}) + \qquad (2.1.17)$$
$$a_{33}a_{11}(a_{43}a_{51} - a_{53}a_{41}) + a_{11}a_{34}(a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51}) = 0.$$

Предложенные соотношения (2.1.15) – (2.1.17) справедливы как для прямотока, так и для противотока. В уравнениях (2.1.1) принято, что жидкость и газ движутся в положительном направлении оси x. При вычислении коэффициентов (2.1.16) необходимо учитывать, что при движении пленки жидкости вниз по стенке расход – положительный, а при движении вверх – отрицательный. Однако, чтобы в обоих случаях сохранялось положительное значение Re и Ga, входящих в уравнения (2.1.16), необходимо ввести правило замены знака. В частности, при движении жидкой пленки вверх надо поменять знаки перед Re и τ_0; для прямоточного нисходящего и восходящего движений $T > 0$, для противоточного движения $T < 0$.

Для примера, пользуясь системой уравнений (2.1.16), приведем в явном виде выражение для амплитуды волны при нисходящем течении [56]:

$$\alpha^2 = \left| \frac{\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}[1 - 0{,}5T] - 1}{1{,}5 + 0{,}25\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}T} \right|. \qquad (2.1.18)$$

В выражении (2.1.18) берется абсолютная величина, поскольку амплитуда волны всегда положительная. Положив, что в формуле (2.1.18) $T = 0$,

получим выражение для амплитуды волны при гравитационном стекании пленки жидкости. Поскольку

$$T = \tau_0 h_0/u_0\mu = 3\mathrm{Ga}\Gamma_1/\mathrm{Re},\ \Gamma_1 = \tau_0/h_0(\rho g \sin\psi_1 - \Delta), \tag{2.1.19}$$

а при малых значениях перепада давления

$$\Gamma_1 = \tau_0/\rho g h_0 \sin\psi_1, \tag{2.1.20}$$

для случая вертикальной пластины или трубы $\sin\psi_1 = 1$, то, учитывая это, выражение (2.1.18) приводится к явной зависимости амплитуды волны от отношения Re/Ga и числа Γ_1, учитывающего взаимодействие газового потока с волновой поверхностью пленки жидкости, а именно

$$\alpha^2 = [\mathrm{Re}/\mathrm{Ga} - (1 + 1{,}5\Gamma_1)]/(1{,}5 + 0{,}75\Gamma_1). \tag{2.1.21}$$

Положив в формуле (2.1.21) $\Gamma_1 = 0$, получим выражение для амплитуды волны при гравитационном стекании пленки жидкости [25].

§ 2.2. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ВОЛНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С НЕЙ ГАЗОВОГО ПОТОКА

В настоящем параграфе рассмотрена нелинейная теория течения волновой пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком, и найдены распределение скоростей в пленке жидкости, амплитуда и длина волны, безразмерная фазовая скорость, профиль волны, т.е. получена достаточная информация о гидродинамике волновой пленки жидкости и ее волновых характеристиках в условиях рассмотренной постановки задачи [57, 58].

Как и в § 2.1, уравнения Навье–Стокса и неразрывности при условии $h_0/\lambda < 1$ имеют вид:

$$\frac{\partial u}{dt} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial h h_0}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{2.2.1}$$

$$Q = \int_0^{hh_0} u\,dy,$$

где координата x – расстояние в направлении силы тяжести, а координата y – по нормали к стенке. Как и в § 2.1, представим локальный градиент давления в виде (2.1.2). Граничные условия зададим формулами (2.1.3), (2.1.4).

Уравнение (2.2.1) и граничные условия (2.1.3) и (2.1.4), выраженные через функции тока, определяемые соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\ ,$$

в новых безразмерных независимых переменных

$$\xi = \frac{n}{h_0}(x - u_0 z t), \quad \eta = \frac{y}{h h_0} \tag{2.2.2}$$

примут вид

$$E\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = -\left(G\frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + H\right)h^3 + \frac{\partial h}{\partial \xi}\left[zh\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + zh\eta\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2\right] - h\left(zh\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right); \tag{2.2.3}$$

$$\psi = 0, \ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = Th^2, \ \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi - zh) = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1. \tag{2.2.4}$$

Как и в § 2.1, уравнения (2.2.3) и (2.2.4) описывают как режимы восходящего и нисходящего течений, так и противоточное: для прямоточного нисходящего и восходящего течений $T > 0$, для противоточного течения $T < 0$.

Для построения периодического по ξ решения нелинейной задачи (2.2.3) и (2.2.4) применим метод, использованный в главе 1.

Будем искать решение в виде рядов

$$\psi = \psi_{00}(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty}[\psi_{k0}(\eta)\sin k\xi + \psi_{k1}(\eta)\cos k\xi],$$

$$h = h_{00} + \sum_{k=1}^{\infty}(h_{k0}\sin k\xi + h_{k1}\cos k\xi), \tag{2.2.5}$$

где коэффициенты разложения ψ являются функциями η, а коэффициенты h – константами. Так как переменная ξ в (2.2.3) не входит явно в уравнение и граничные условия, то решение в виде рядов (2.2.5) определено с точностью до произвольного сдвига по ξ.

Выберем начало отсчета таким образом, чтобы $h_{11} = 0$. Поскольку толщина слоя отнесена к среднему за период значению h_0, то $h_{00} = 1$.

Из рассмотрения граничных условий нетрудно убедиться, что при всех допустимых значениях i, k

$$\psi_{ik} = 0, \ \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \tag{2.2.6}$$

Граничные условия на поверхности пленки жидкости ($\eta = 1$) с учетом уравнений (2.2.4) и (2.2.5) примут вид

$$\frac{\partial^2 \psi_{00}}{\partial \eta^2} = T(1 + 0{,}5h_{10}^2), \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial^3 \psi_{10}}{\partial \eta^2} = T(2h_{10} - h_{10}h_{21}), \quad \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \eta^2} = Th_{10}h_{20},$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial \eta^2} = 2Th_{20}, \quad \frac{\partial^2 \psi_{21}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} T(4h_{21} - h_{10}^2).$$

Уравнение расхода (2.2.4) для слоя имеет следующий вид:

$$\psi_{\eta=1} = 1 - z + zh. \tag{2.2.8}$$

Подставим решение (2.2.5) в уравнение (2.2.3) и, опуская промежуточные довольно громоздкие выкладки, получим выражение для произвольных $\partial^3 \psi_{ik}/\partial \eta^3$ в следующем виде:

$$E \frac{\partial^3 \psi_{00}}{\partial \eta^3} = Q_{00} + \frac{1}{2}(Q_{20} + Q_{22}),$$

$$E \frac{\partial^3 \psi_{10}}{\partial \eta^3} = Q_{10} + \frac{1}{4}(Q_{32} + 3Q_{30}), \tag{2.2.9}$$

$$E \frac{\partial^3 \psi_{11}}{\partial \eta^3} = Q_{11} + \frac{1}{4}(Q_{31} + 3Q_{33}),$$

$$E \frac{\partial^3 \psi_{20}}{\partial \eta^3} = \frac{1}{2} Q_{21},$$

$$E \frac{\partial^3 \psi_{21}}{\partial \eta^3} = \frac{1}{2}(Q_{22} - Q_{20}).$$

Уравнения (2.2.9) следует решать с граничными условиями (2.2.6) – (2.2.8). Отличие краевой задачи для системы (2.2.9) от соответствующей задачи для системы (1.25) и (1.29) состоит лишь в том, что изменилось граничное условие при $\eta = 1$; условие (1.25) заменено на (2.2.7). Выражения для Q_{ki} остаются прежними (см. (1.30)). Метод решения (пристрелка), основанный на решении задач Коши, дан в главе 1.

Численный алгоритм, изложенный в главе 1, может быть применен для изучения нисходящего и восходящего прямоточных течений, а также для противоточного течения. Были проведены систематические решения системы (2.2.9) при различных значениях определяющих параметров Re, Ga,

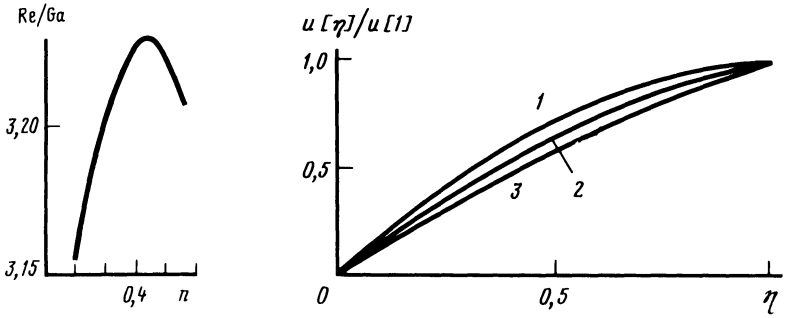


Рис. 2.2.1. Зависимость расхода жидкости для слоя постоянной средней толщины h_0 от безразмерной длины волны при $\Gamma_1 = 1$ и $\gamma = 2850$

Рис. 2.2.2. Профиль скорости при Ga = 62,5 для различных значений Γ_1 и Re при $\gamma = 2850$
1 – $\Gamma_1 = 0$, Re = 87,5; *2* – $\Gamma_1 = 0{,}5$; Re = 138,8; *3* – $\Gamma_1 = 1$, Re = 201,9

α [57–59]. Ниже приведены результаты исследования волновых режимов при нисходящем и восходящем течениях: пленка жидкости и газ движутся в одном направлении.

На рис. 2.2.1 представлены результаты расчета средней плотности орошения для пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком. При одной и той же толщине пленки жидкости зависимость плотности орошения от волнового числа проходит через максимум. Максимум на кривой расход – волновое число (см. рис. 2.2.1) соответствует оптимальному режиму течения пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком. Таким образом, при взаимодействии газового потока с волновой пленкой жидкости в режимах нисходящего и противоточного течений пленки жидкости и газа наблюдаются оптимальные волновые режимы. Отличительной особенностью этих режимов является то, что они наиболее устойчивы по отношению к малым возмущениям и, как было отмечено ранее для случая гравитационного стекания пленки жидкости, наиболее часто реализуются в эксперименте.

Таким образом, оптимальные режимы имеют место в теоретическом расчете волн как при чисто гравитационном стекании пленки жидкости по наклонной и вертикальной поверхностям, так и при взаимодействии газового потока с волновой поверхностью пленки жидкости.

На рис. 2.2.2 приведен пример распределения скоростей в пленке жидкости для нисходящего и восходящего режимов течения при разных значениях касательных сил на поверхности раздела. С увеличением безразмерного числа Γ_1, учитывающего взаимодействие газового потока с волновой поверхностью пленки жидкости, профиль из параболического переходит в новую форму, приближающуюся, особенно при больших Γ_1, к линейной. Это и понятно; движение пленки жидкости осуществляется при больших скоростях газа в основном за счет значительного взаимодействия газового потока с волновой поверхностью пленки жидкости.

На рис. 2.2.3 показана форма волновой поверхности пленки жидкости в отсутствие газового потока (кривая *1*), а также при наличии последнего

(кривые *2, 3*). Видно, что газовый поток значительно влияет на форму волны, а также на волновые параметры, как это показано на рис. 2.2.4. С увеличением газового потока амплитуда волны уменьшается, причем довольно быстро выходит на постоянную величину, не зависящую от скорости газового потока. Безразмерная фазовая скорость ($z = \omega / u_0$, где ω – фазовая скорость волны, u_0 – средняя скорость пленки жидкости в среднем сечении) в изученном интервале безразмерного числа Γ_1 возрастает, но с дальнейшим ростом Γ_1 также выходит на постоянное значение. Длина волны с ростом газового потока уменьшается.

Результаты численного решения системы нелинейных уравнений (2.2.9) с граничными условиями (2.2.6) и (2.2.7) методом наименьших квадратов аппроксимированы [57–60] от числа Re или от отношения Re/Ga, а также от величины, учитывающей взаимодействие газа с волновой поверхностью пленки жидкости в режиме нисходящего прямотока и представленной в виде безразмерной величины $\Gamma_1 = \tau_0 / h_0 (\rho g \sin\psi_1 - \Delta)$.

Амплитуда волны в зависимости от отношения Re/Ga и безразмерного числа Γ_1, учитывающего взаимодействие газового потока с волновой поверхностью пленки жидкости, представлена следующими зависимостями:

$$\alpha^2 = 0{,}7\left(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}} - 1\right) \exp\left(\frac{2{,}3\sqrt{\Gamma_1}}{a + b\sqrt{\Gamma_1}}\right), \quad \mathrm{Re/Ga} < 1{,}4, \tag{2.2.10}$$

где

$$a = -1{,}31; \quad b = 0{,}146,$$

$$\alpha^2 = \left(0{,}082 + 0{,}143\,\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}\right) \exp\left(\frac{2{,}3\Gamma_1}{d - 0{,}757\Gamma_1}\right), \quad \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}} > 1{,}4, \tag{2.2.11}$$

где

$$d = -0{,}049\sqrt{\mathrm{Ga}} - 1{,}3.$$

При $\Gamma_1 = 0$, т.е. в отсутствие взаимодействия газа с волновой поверхностью жидкой пленки, формулы (2.2.10) и (2.2.11) переходят в формулы для гравитационного стекания пленки жидкости, полученные ранее в главе 1.

Амплитуда волны, как показано на рис. 2.2.5, с ростом безразмерного числа Γ_1 падает и при значениях Γ_1 порядка единицы для всех толщин пленок и, следовательно, для всех чисел Ga выходит на не зависящее от Γ_1 значение $(\alpha_{ст})$. Значения $\alpha_{ст}$ зависят только от числа Ga и аппроксимируются следующим выражением:

$$\alpha_{ст} = \exp\left(\frac{2{,}3\,\mathrm{Ga}}{27{,}51 - 3{,}45\,\mathrm{Ga}}\right). \tag{2.2.12}$$

Как показано на рис. 2.2.4, длина волны уменьшается с ростом безразмерного числа Γ_1. Формулы для волнового числа найдены для двух интервалов изменения отношения Re/Ga: для $\mathrm{Re/Ga} > 1{,}7$ и $\mathrm{Re/Ga} < 1{,}7$.

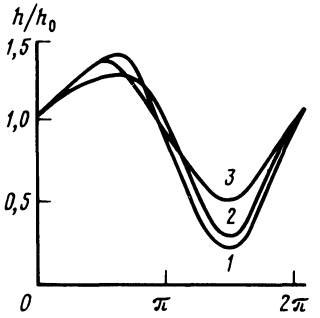
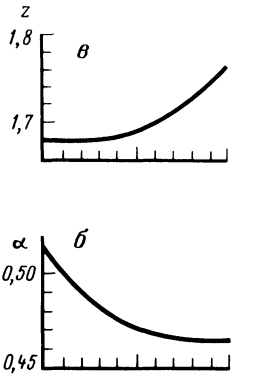


Рис. 2.2.3



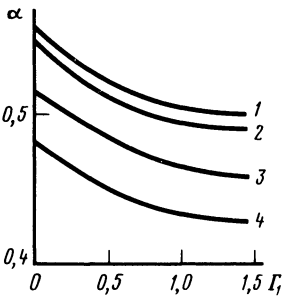


Рис. 2.2.5

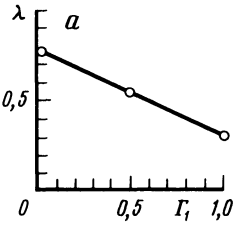


Рис. 2.2.4

Рис. 2.2.3. Форма волны при наибольшем среднем расходе для Ga = 65,5 при различных значениях Γ_1 и $\gamma = 2850$
1 – $\Gamma_1 = 0$; *2* – 0,5; *3* – 1

Рис. 2.2.4. Влияние безразмерного числа Γ_1 на волновые параметры $\lambda(a)$, $\alpha(б)$ и z (*в*) при постоянной средней толщине h_0 для Ga = 62,5 и $\gamma = 2850$

Рис. 2.2.5. Зависимость амплитуды волны от безразмерного числа Γ_1 при разных числах Ga и $\gamma = 2850$
1 – 45,9; *2* – 62,5; *3* – 120; *4* – 200

При $\mathrm{Re/Ga} > 1{,}7$ и $\Gamma_1 > 0$ волновое число аппроксимируется следующей формулой:

$$n = \exp\left[2{,}3\left(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}\right)\Big/\left(1{,}33 - 3{,}28\,\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}\right) + 2{,}3\,\frac{B\Gamma_1 - A}{\Gamma_1}\right],$$

где

$$A = \exp\left(2{,}3\,\frac{2{,}64 - 1{,}08\mathrm{Ga}}{\mathrm{Ga}}\right);$$

$$B = \exp\left[-\left(2{,}3\,\frac{13{,}6 + 0{,}54\mathrm{Ga}}{\mathrm{Ga}}\right)\right]. \qquad (2.2.13)$$

Формула для волнового числа для двухфазного течения $n_г$ при $Re/Ga < 1{,}7$ выведена с учетом зависимостей для волнового числа n при чисто гравитационном стекании пленки.

Эти зависимости получены в главе 1. В этом случае формула для $n_г$ принимает вид

$$\lg\lg(n_г/n) = A_1 \lg\Gamma - B_1, \tag{2.2.14}$$

где

$$n = 0{,}222\,(Re/Ga - 1) + 0{,}067,\quad 1{,}04 \leqslant Re/Ga \leqslant 1{,}44;$$

$$n = 5{,}243\,(Re/Ga)^3 - 27{,}329\,(Re/Ga)^2 + 47{,}612\,Re/Ga - 27{,}362,$$

$$1{,}44 < Re/Ga < 1{,}7;$$

$$n = \exp\left[2{,}3\frac{Re}{Ga}\Big/\left(1{,}33 - 3{,}28\,\frac{Re}{Ga}\right)\right],\quad \frac{Re}{Ga} > 1{,}7;$$

$$A_1 = \exp\left(2{,}3\,\frac{Ga}{5{,}69Ga - 77{,}5}\right);$$

$$B_1 = \exp\left(2{,}3\,\frac{36{,}6 - 0{,}984Ga}{Ga}\right).$$

Величина $G_г = 9n^2\gamma Ga^{1/3}/Re^2$ может быть использована для характеристики волнового течения пленки жидкости в условиях двухфазного течения. В нее входят не только гидродинамические параметры, такие, как, например, Ga, Re (см. (2.1.9)), но и величины, учитывающие физико-химические свойства жидкой пленки. Влияние воздействия газа на волновую пленку жидкости представлено следующей зависимостью числа $G_г$ от Γ:

$$\lg\left(\frac{G_г}{G}\right) = A_2\Gamma_1^2 - B_2, \tag{2.2.15}$$

где

$$A_2 = \exp\left(-2{,}3\,\frac{Ga}{3{,}7Ga - 115{,}7}\right); \tag{2.2.16}$$

$$B_2 = \exp\left(-2{,}3\,\frac{Ga}{109{,}2 - 0{,}215Ga}\right),$$

причем значение коэффициента B_2 справедливо при $Ga \leqslant 500$. Значения G для чисто гравитационного стекания пленки жидкости согласно (1.46) и (1.47) имеют вид

$$\begin{aligned} G &= 1{,}8z - 2{,}92 \quad \text{при } z \geqslant 1{,}9, \\ G &= 0{,}786z - 1 \quad \text{при } z \leqslant 1{,}9. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Отношение безразмерной поверхностной скорости при взаимодействии газового потока ($\upsilon_г = \bar{u}(1)/u_0$) к безразмерной поверхностной скорости при чисто гравитационном стекании $\upsilon = \bar{u}(1)/u_0$ (см. формулы (1.54), (1.55)) зависит от безразмерного числа Γ_1 по формуле

$$\lg(\upsilon_г/\upsilon) = A_3\Gamma_1^{1/2} + B_3, \qquad (2.2.18)$$

где

$$A_3 = \exp[2{,}3(3{,}25 - 0{,}632\mathrm{Ga}^{1/2})];$$

$$B_3 = \exp\left[2{,}3\,\frac{\mathrm{Ga}}{0{,}111\,\mathrm{Ga} - 64{,}8}\right];$$

$$\upsilon = u(1)/u_0 = 1{,}3554 - 9{,}18\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Re} + 1{,}15\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Re}^2;$$

$$\upsilon = \frac{\bar{u}(1)}{u_0} = 2{,}065 - 0{,}829\,\mathrm{Re/Ga} + 0{,}186\,(\mathrm{Re/Ga})^2.$$

Глава 3

МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Массообмену в пленке жидкости в отсутствие волнообразования посвящен целый ряд теоретических исследований, но при этом число работ, в которых исследуется массообмен в пленке жидкости в условиях волнообразования, довольно ограниченно [12, 61–64]. Между тем существуют многочисленные экспериментальные исследования, на основании которых доказано существенное увеличение массообмена в условиях волнообразования как при гравитационном стекании пленки жидкости, так и в режимах спутного течения пленки жидкости и газа; оставался неясен механизм массообмена в этих режимах и особенно влияние волновых характеристик на процессы переноса.

В работе [62] было показано, что при решении уравнения конвективной диффузии для волновой пленки жидкости при относительно малых возмущениях волновой поверхности в условиях взаимодействия газового потока с пленкой жидкости возрастание коэффициента массоотдачи объяснено увеличением поверхности контакта газового потока с пленкой жидкости:

$$\mathrm{Nu}_{ж} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\mathrm{Pe}^{0{,}5}\left(\frac{h_0}{l}\right)^{0{,}5} k,$$

где

$$\mathrm{Nu}_{ж} = \beta_{ж} h_0/D_{ж}; \quad k = \left(1 + \frac{1}{2}\,\alpha^2 \pm z\,\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}\,\frac{\tau_0 h_0}{\mu u_0}\right)^{0{,}5}; \qquad (3.1)$$

l – длина трубки; τ_0 – касательное напряжение, α – амплитуда волны.

С увеличением расхода жидкой пленки, а следовательно, и амплитуды волны [60] увеличивалось расхождение расчетов по формуле работы [62] и экспериментальных данных. Это указывает на сложность механизма массообмена в волновой пленке жидкости и на необходимость более детального его изучения.

§ 3.1. МЕХАНИЗМ ПОЛНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ
(параболическое распределение скорости)

В работах [12, 13, 63–65] постулированы и исследованы два механизма массообмена: полное перемешивание по длине волны и непрерывный рост диффузионного потока по длине трубки.

Механизм массообмена в условиях полного перемешивания в седловинах волн можно представить в виде следующей модели. От некоторой точки в седловине волны с концентрацией c_p на межфазной поверхности начинает развиваться диффузионный слой. Под диффузионным слоем будем понимать слой, прилегающий к поверхности раздела фаз, в котором концентрация распределяемого вещества на участке, равном длине волны, меняется от c_p на межфазной границе до нуля на границе диффузионного слоя δ. В конце этого участка вследствие существования вихрей [15] происходит полное перемешивание жидкости. В результате этого концентрация распределяемого вещества выравнивается по толщине пленки и становится равной c'.

На последующем участке, также равном длине волны, опять происходит рост диффузионного слоя, но с той разницей, что концентрация на его границе становится равной c'. Поэтому на втором участке необходимо решать задачу с граничными условиями $c = c_p$ на поверхности раздела и $c = c'$ на границе диффузионного слоя. Решение, полученное с этими граничными условиями, качественно не отличается от решения, найденного на первом участке. Однако количество вещества, перешедшего из газа в жидкость, на втором участке будет несколько меньше, чем на первом, за счет уменьшения движущейся силы процесса, т.е. $\Delta c = c_p - 0 > c_p - c'$.

Количество вещества Q, перешедшего из газовой фазы в жидкую на длине волны, равно

$$Q = \beta_{ж} \Delta c \pi d \int_0^{\lambda} dS, \tag{3.1.1}$$

где $\beta_{ж}$ – коэффициент массоотдачи в жидкую фазу; d – диаметр трубки; dS – элемент поверхности. С другой стороны, это количество вещества равно

$$Q = \pi d \int_0^{\lambda} j_{\lambda} \, dS, \tag{3.1.2}$$

где j_{λ} – плотность диффузионного потока на длине волны. Откуда

$$\beta_{ж} = \int_0^{\lambda} j_{\lambda} \, dS \Big/ \Delta c \int_0^{\lambda} dS. \tag{3.1.3}$$

Таким образом, в случае полного перемешивания в седловинах волн задача сводится к определению величины диффузионного слоя на расстоянии вдоль поверхности массообмена, равном длине волны. Эту величину определим из решения уравнения конвективной диффузии [12]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \tag{3.1.4}$$

с граничными условиями

$$c = c_p \qquad \text{при } y = y_{\text{гр}} = h = h_0(1 + \alpha\varphi(\xi)), \tag{3.1.5}$$

$$c = 0 \text{ при } y = 0 \text{ (вдали от поверхности раздела)}, \tag{3.1.6}$$

где $\xi = n(x - \omega t)$; $n = 2\pi/\lambda$; ω – фазовая скорость волны. В простейшем слое можно принять $\varphi(\xi) = \sin\xi$. В более общем случае следует использовать волновые решения, полученные в главах 1 и 2.

В уравнении (3.1.4) u и v являются функциями x, y, t. При параболическом распределении скорости в пленке имеем

$$u = 3v\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2}\right), \tag{3.1.7}$$

где

$$v = \omega + \frac{u_0 + \omega}{1 + \alpha\varphi(\xi)}\ ;\ h = h_0\,[1 + \alpha\varphi(\xi)]\ ;$$

h_0 – средняя толщина пленки; u_0 – средняя скорость жидкости. Если известна компонента скорости u, значение v определяется из уравнения неразрывности:

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{3.1.8}$$

При решении уравнения (3.1.4) значение составляющих скорости u и v возьмем на поверхности раздела, т.е. при $y = y_{\text{гр}}$. Это оправдано тем, что процесс переноса осуществляется в диффузионном слое, непосредственно примыкающем к поверхности раздела. Подставляя значения u и v при $y = y_{\text{гр}}$ в уравнение (3.1.4), получим

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{3}{2}u_0\left[z + \frac{1-z}{1+\alpha\varphi(\xi)}\right]\frac{\partial c}{\partial x} +$$

$$+ \alpha n h_0 u_0 \varphi'(\xi)\left[0{,}5z + 1{,}5\,\frac{1-z}{1+\alpha\varphi(\xi)}\right]\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{3.1.9}$$

Переходя к новым переменным: $y = y - y_{гр}$, $\xi = n(x - \omega t), x = x_1$, приведем уравнение (3.1.9) к виду

$$(1 + \alpha\varphi(\xi))\kappa \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} - \frac{\partial c}{\partial \xi}(d + l\varphi(\xi)) - \frac{\partial c}{\partial x_1}(g + K\varphi(\xi)) = 0, \qquad (3.1.10)$$

где

$$\kappa = D/u_0 n; l = 0{,}5z\alpha; d = 1{,}5 - z; g = 1{,}5/n; K = 1{,}5zn/\alpha. \qquad (3.1.11)$$

Будем строить решение в виде ряда Фурье:

$$c = c_0(\eta, x) + c_{10}(\eta, x)\sin\xi + c_{11}(\eta, x)\cos\xi + c_{20}(\eta, x)\sin 2\xi +$$

$$+ c_{21}(\eta, x)\cos 2\xi + \ldots$$

Предполагаем, что функция $\varphi(\xi)$ также может быть разложена в ряд Фурье. Ограничиваясь в разложениях φ первой гармоникой, для коэффициентов ряда Фурье получим систему уравнений [12]

$$\kappa\ddot{c}_0 + \frac{\kappa\alpha}{2}\ddot{c}_{10} + \frac{l}{2}c_{11} - g\frac{\partial c_0}{\partial x} - \frac{1}{2}K\frac{\partial c_{10}}{\partial x} = 0,$$

$$\kappa a\ddot{c}_0 + \kappa\ddot{c}_{10} + \alpha c_{11} - K\frac{\partial c_0}{\partial x} - g\frac{\partial c_{10}}{\partial x} = 0,$$

$$\kappa\ddot{c}_{11} - \alpha c_{10} - g\frac{\partial c_{11}}{\partial x} = 0. \qquad (3.12)$$

Решим эту систему методом интегральных соотношений [66]. В этом случае коэффициенты ряда Фурье ищем в виде

$$c_0 = c_{01} + c_{02}\frac{\eta}{\delta} + c_{03}\frac{\eta^2}{\delta^2} + c_{04}\frac{\eta^3}{\delta^3},$$

$$c_{10} = c_{101} + c_{102}\frac{\eta}{\delta} + c_{103}\frac{\eta^2}{\delta^2} + c_{104}\frac{\eta^3}{\delta^3},$$

$$c_{11} = c_{111} + c_{112}\frac{\eta}{\delta} + c_{113}\frac{\eta^2}{\delta^2} + c_{114}\frac{\eta^3}{\delta^3},$$

в которых c_{ij} и δ являются функциями x.

Граничные условия (3.1.5) и (3.1.6) в новых переменных запишутся:

при $\eta = 0$ $\quad c_0 = c_p, \quad c_{10} = c_{11} = 0,$

при $\eta = -\delta$ $\quad c_0 = 0, \quad c_{10} = c_{11} = 0.$ $\qquad (3.1.13)$

Для гладкости функции c_{ij} потребуем, чтобы при $\eta = -\delta$ $\partial c_i/\partial\eta = \partial^2 c_i/d\eta^2 = 0$, где $i = 0, 10, 11$. Проинтегрируем каждое уравнение системы

(3.1.12) по η от 0 до $-\delta$. После несложных преобразований получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно $\Delta = \delta^2(x)$, $\bar{c}_{102}, \bar{c}_{112}$:

$$-3\kappa - \bar{c}_{102}\frac{\kappa a}{2} + \frac{l}{24}\bar{c}_{112}\Delta + \frac{g}{8}\frac{d\Delta}{dx} - \frac{K}{24}\left(\Delta\frac{d\bar{c}_{102}}{dx} + \frac{\bar{c}_{102}}{2}\frac{d\Delta}{dx}\right) = 0,$$

$$-3\kappa a - \kappa\bar{c}_{102} + \frac{d}{12}\bar{c}_{112}\Delta + \frac{K}{8}\frac{d\Delta}{dx} - \frac{g}{12}\left(\Delta\frac{d\bar{c}_{102}}{dx} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{c}_{102}}{2}\frac{d\Delta}{dx}\right) = 0, \qquad (3.1.14)$$

$$-\kappa\bar{c}_{112} - \frac{d\bar{c}_{102}\Delta}{12} - \frac{g}{12}\left(\Delta\frac{d\bar{c}_{112}}{dx} + \frac{\bar{c}_{112}}{2}\frac{d\Delta}{dx}\right) = 0,$$

где

$$\bar{c}_{102} = c_{102}/c_p;\ \bar{c}_{112} = c_{112}/c_p.$$

Запишем нелинейную систему уравнений (3.1.14) в виде, более удобном для численного интегрирования на ЭВМ:

$$\frac{d\Delta}{dx} = F,$$

$$\frac{d\bar{c}_{112}}{dx} = -\frac{F}{2\Delta}\bar{c}_{112} + \frac{12}{g\Delta}f_3, \qquad (3.1.15)$$

$$\frac{d\bar{c}_{102}}{dx} = -\frac{F}{\Delta}\left(3\frac{g}{K} + \frac{1}{2}\bar{c}_{102}\right) - \frac{24}{K-\Delta}f_1,$$

где

$$F = 8\frac{f_2K - 2f_1g}{K^2 - 2g^2};$$

$$f_1 = 3\kappa + \bar{c}_{102}\frac{\kappa\alpha}{2} - \frac{l}{24}\Delta\bar{c}_{112};$$

$$f_2 = 3\kappa d + \kappa\bar{c}_{102} - \frac{d}{2}\bar{c}_{112}\Delta;$$

$$f_3 = \kappa\bar{c}_{112} + \frac{d\Delta}{12}\bar{c}_{102}.$$

При $x = 0$ $\Delta \to 0$, а для $\bar{c}_{112}$, $\bar{c}_{102}$ начальные условия находили на основании системы (3.1.15) с учетом (3.1.13) и того, что при $x = 0$ $\Delta \to 0$. Поскольку для системы уравнений (3.1.15) имеется неопределенность при $\Delta \to 0$, решение находилось со значения $x \neq 0$. Для этого функции Δ, c_{102}, c_{112} разлагали в ряды, причем коэффициенты рядов находили обычным способом.

Полученное таким образом решение системы для сравнительно больших амплитуд волн $\alpha \leqslant \sqrt{2}/z$, где $z = 1{,}4 \div 2{,}8$ [12], представлено на рис. 3.1.1, на котором по оси ординат отложена функция $c(x) = \Delta/\kappa$, а по оси абсцисс – $t = x/\lambda$. Сплошными линиями показаны результаты численного решения системы уравнений (3.1.15) на ЭВМ. Следует отметить, что область перемешивания в седловинах волн по данным главы 1 составляет не менее 30% длины волны, поэтому естественно, что величина диффузионного потока в этой области должна быть постоянной. С некоторым приближением считаем, что в действительности величина Δ/κ в области перемешивания будет изображаться пунктирными линиями.

Таким образом, с учетом сказанного выше, на длине волны функция $c(x)$ выходит на величину, не зависящую от x. Эту величину обозначим через $c = c_{\text{стац}}$. С уменьшением амплитуды волны $c_{\text{стац}}$ возрастает примерно по логарифмическому закону:

$$\lg\alpha = -0{,}7 \lg(\Delta/\kappa) + 0{,}91. \tag{3.1.16}$$

Величина диффузионного слоя до $c = c_{\text{стац}}$ изменяется по закону, представленному на рис. 3.1.2.

Учитывая данные рис. 3.1.1. и 3.1.2, можно показать, что в пределах длины волны величина диффузионного слоя может быть представлена следующим соотношением:

$$\delta(x) = \sqrt{\kappa}\exp(1{,}5 - 0{,}7 \ln\alpha)(1 - \exp(-a)\, x/\lambda)^{1/2}, \tag{3.1.17}$$

где

$$a = 2{,}3\frac{\alpha - 0{,}57}{0{,}01}, \quad 0{,}6 \leqslant \alpha; \tag{3.1.18}$$

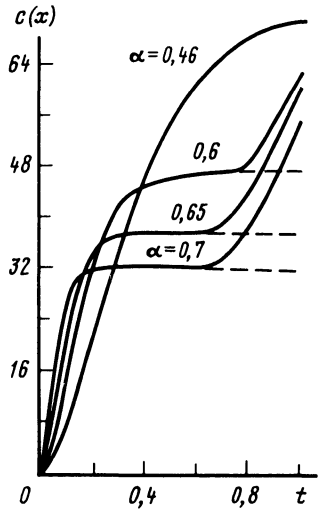
$$a = 2{,}3\,\frac{\alpha - 0{,}27}{0{,}097}, \quad 0{,}6 \geqslant \alpha. \tag{3.1.19}$$

Для определения величины плотности диффузионного потока на длине волны запишем

$$\frac{j_\lambda}{D} = \left(\frac{dc}{dN}\right)_{\eta = 0} = \frac{\partial c}{\partial x}\cos(\hat{Nx}) + \frac{\partial c}{\partial y}\cos(\hat{Ny}) =$$

$$= \frac{\partial c}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial c}{\partial x}\sin\theta,$$

где $\theta = \operatorname{arctg}(dy/dx)$; N – нормаль к поверхности раздела фаз.



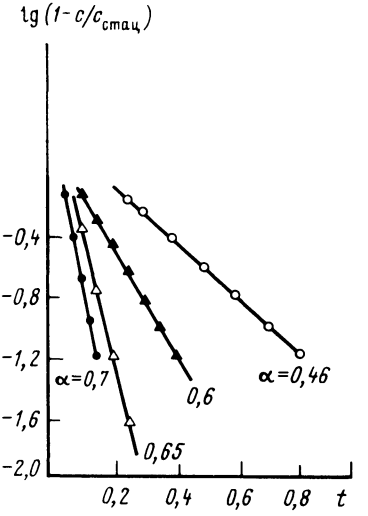


Рис. 3.1.1. Изменение безразмерного квадрата диффузионного слоя $c(x) = \Delta/\kappa$ по длине волны $t = x/\lambda$ для различных значений амплитуд α

Рис. 3.1.2. Изменение $\lg(1 - c/c_{\text{стац}})$ по длине волны для различных значений амплитуд α

Переходя в выражении для диффузионного потока от переменных x, y к переменным x_1, η, ξ, получим

$$\frac{j_\lambda}{D} = \sin\theta \left(\frac{\partial c}{\partial x_1} - h_0 \alpha n \cos\xi \frac{\partial c}{\partial \eta} + n \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial c}{\partial \eta} \cos\theta. \qquad (3.1.20)$$

Подставляя в формулу (3.1.20) вместо производных их значения после усреднения по периоду, получим соотношение

$$\frac{j_\lambda}{\Delta c} = \frac{3D}{\delta(x)} \left[1 - \left(\frac{h_0 \alpha n}{2} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{3}{2} (h_0 \alpha n)^2 \right], \qquad (3.1.21)$$

где $\delta(x)$ дано выражением (3.1.17), записанным с учетом (3.1.18) и (3.1.19). Для определения $\beta_{\text{ж}}$ подставим в формулу (3.1.3) значение $j_\lambda/\Delta c$ и, проинтегрировав по x от 0 до λ, получим [12]

$$\beta_{\text{ж}} = 7{,}5 \sqrt{\frac{Du_0}{\lambda}} [1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha n)^2] \exp(0{,}7 \ln\alpha - 1{,}5) [1 +$$

$$+ \ln(4 - \exp(-a))/a]. \qquad (3.1.22)$$

Величина $\ln(4-\exp(-a))/a$ составляет 1–2%, поэтому формула (3.1.22) принимает вид

$$\beta_{\text{ж}} = 7{,}5 \sqrt{Du_0/\lambda} [1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha n)^2] \exp(0{,}7 \ln\alpha - 1{,}5). \qquad (3.1.23)$$

Механизм полного перемешивания, как следует из формулы (3.1.23), отрицает в явном виде зависимость массообмена от длины орошаемого канала, как ранее было принято [67–69], однако показывает существенную зависимость массообмена от амплитуды и длины волны.

Учитывая, что

$$\omega = u_0 z = \lambda f, \tag{3.1.24}$$

где f – частота, формула (3.1.23) может быть выражена через другие волновые характеристики, в частности через f и z. Такой переход удобен потому, что частота волн в эксперименте определяется довольно просто [39, 70, 71]. Формула (3.1.23) с учетом (3.1.24) в этом случае преобразуется к виду [63]:

$$\beta_{ж} = 7{,}5\sqrt{Df/z}\,[1 + {}^5\!/_4 (h_0\alpha \cdot 2\pi/\lambda)^2]\,\exp(0{,}7\ln\alpha - 1{,}5) \tag{3.1.25}$$

или

$$\beta_i = B_i\sqrt{Df/z}, \tag{3.1.26}$$

где B_i при $i = 1$

$$B_1 = 7{,}5\,[1 + {}^5\!/_4 (h_0\alpha \cdot 2\pi/\lambda)^2]\,\exp(0{,}7\ln\alpha - 1{,}5). \tag{3.1.27}$$

Как будет показано в главах 4–6, вид формулы (3.1.26) сохраняется и для более сложных случаев массобмена в условиях волнообразования.

§3.2. МЕХАНИЗМ НЕПРЕРЫВНОГО РОСТА ДИФФУЗИОННОГО СЛОЯ (параболическое распределение скорости)

Если предположить, что перемешивание раствора в седловинах волн отсутствует, а величина диффузионного слоя постепенно растет по всей длине трубки, то, решая систему уравнений (3.1.15) на ЭВМ, можно получить зависимость $c(x) = \Delta/\kappa$ от числа волн $t = x/\lambda$ такую, как на рис. 3.2.1. В основном это прямые линии, как и требует теория погранслоя, с различными, зависящими от амплитуды тангенсами угла наклона. Эта зависимость приближенно описывается формулой [12]

$$c(x) = \frac{\Delta(x)}{\kappa} = \frac{1{,}6 - \alpha^2}{0{,}017}\,\frac{x}{\lambda}, \tag{3.2.1}$$

где κ дано формулой (3.1.11).

Из (3.2.1) величина диффузионного слоя определяется следующим образом:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1{,}6-\alpha^2}{0{,}034\pi}}\,\sqrt{\frac{Dx}{u_0}}. \tag{3.2.2}$$

Отметим, что величина диффузионного слоя растет с расстоянием, как $x^{1/2}$, и существенно, зависит от амплитуды волны. Причем изменение амплитуды волны α от 0,1 до 0,7 влечет изменение величины диффузионного слоя, диффузионного потока, а следовательно, и интенсивности массообмена до 60%. Между тем опытные данные дают увеличение массообмена за счет волнообразования в 2 раза и более. Поэтому механизм непрерывного рос-

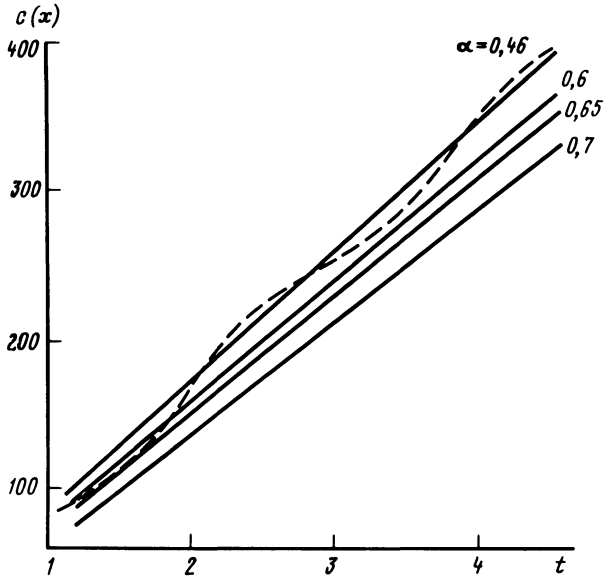


Рис. 3.2.1. Зависимость безразмерного квадрата диффузионного слоя $c(x) = \Delta/\kappa$ по длине орошаемого канала $t = \kappa/\lambda$ для различных значений амплитуд α

та диффузионного слоя не может однозначно быть ответственным за интенсивность массообмена за счет волнообразования во всем интервале чисел Рейнольдса по жидкости. Поскольку величина диффузионного слоя существенно зависит от длины орошаемого канала, материальный баланс по веществу следует составлять для всей длины трубки l:

$$\beta_{ж}\Delta c\pi d\int_0^l dS = \pi d\int_0^l j_l dS, \tag{3.2.3}$$

откуда

$$\beta_{ж} = \int_0^l \frac{j_l dS}{\Delta c} \Big/ \int_0^l dS. \tag{3.2.4}$$

Отметим, что вид формулы для расчета диффузионного потока сохраняется для обоих типов механизма массообмена в пленке жидкости в условиях волнообразования. Поэтому для расчета диффузионного потока по механизму массообмена, основанному на непрерывном росте диффузионного слоя, использовали формулу (3.1.21) с учетом выражения для диффузионного слоя (3.2.2). С учетом найденного таким образом диффузионного потока формула для коэффициента массоотдачи в жидкую фазу в условиях непрерывного роста диффузионного слоя по всему орошаемому каналу принимает вид [12]

$$\beta_{ж} = \frac{1{,}96}{\sqrt{1{,}6 - \alpha^2}}\left[1 + \frac{5}{4}(h_0\alpha n)^2\right]\sqrt{\frac{Du_0}{l}}. \tag{3.2.5}$$

Формула (3.2.5) отличается от широко известных формул, полученных в работах [67–69], наличием коэффициента, учитывающего волнообразование через амплитуду волны α. Как уже раньше упоминалось, этот коэффициент с повышением амплитуды объясняет возрастание переноса вещества при волнообразовании, но формула (3.2.5) не в состоянии дать резкое повышение массоотдачи в условиях волнообразования. Отметим, что при $\alpha \to 0$ формула (3.2.5) стремится к известным формулам [67–69].

§3.3. МЕХАНИЗМ ПОЛНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ
(линейное распределение скорости)

Как и в случае массообмена в пленке жидкости в условиях волнообразования при параболическом распределении скоростей, решение поставленной задачи базируется на решении уравнения конвективной диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \tag{3.3.1}$$

с граничными условиями

$$c = c_p \text{ при } y = y_{гр} = h = h_0[1 + \alpha\varphi(\xi)], \tag{3.3.2}$$

$c = 0$ при $y = 0$ (вдали от поверхности раздела).

В режиме восходящего прямоточного движения, а также в некоторых других случаях возможно линейное распределение скорости, т.е. $u_x = Ay$, где постоянная A, определенная из условия сохранения расхода, имеет вид

$$A = \frac{2\bar{u}}{h}, \quad \bar{u} = \omega + \frac{u_0 - \omega}{1 + \alpha\varphi(\xi)}, \tag{3.3.3}$$

где

$$h = h_0(1 + \alpha\varphi(\xi)). \tag{3.3.4}$$

Обозначение величин, входящих в формулы (3.3.2) – (3.3.4), дано в § 3.1.

Нормальная составляющая скорость в уравнении (3.3.1) определяется из уравнения неразрывности:

$$v = -\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{2}{a} - \frac{2\bar{u}}{a^2}\frac{da}{dx}\right)\frac{y^2}{2}, \; h = a. \tag{3.3.5}$$

Заметим, что по постановке задача этого параграфа отличается от задачи, исследованной в § 3.2. Разница состоит в том, что в этом параграфе использовано линейное распределение x-й компоненты скорости. Заранее можно предвидеть, что функциональная зависимость коэффициента массоотдачи останется прежней, изменится только коэффициент, зависящий от амплитуды волны.

Решение уравнения (3.3.1) с граничными условиями (3.3.2) проведено методом, подробно изложенным в § 3.2. Результаты этого решения представлены на рис. 3.3.1 [13].

Так же как это было сделано ранее в § 3.2, естественно предположить наличие двух механизмов переноса вещества при волнообразовании: полное

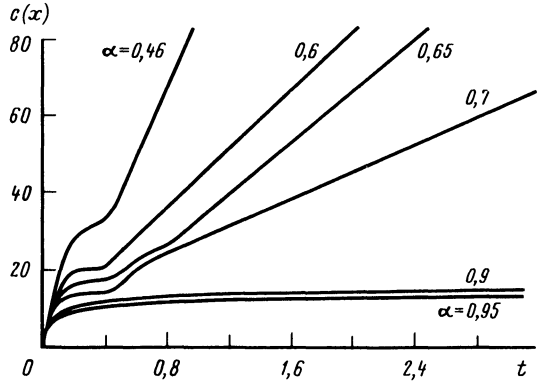


Рис. 3.3.1. Зависимость безразмерного квадрата диффузионного слоя $c(x) = \Delta/\kappa$ от длины орошаемого канала $t = x/\lambda$ для различных значений амплитуд α

перемешивание на длине волны и непрерывный рост диффузионного слоя вдоль всей поверхности массообмена.

Опуская промежуточные выкладки, которые аналогичны изложенным в § 3.2, напишем выражение для коэффициента массоотдачи в жидкую фазу для случая полного перемешивания:

$$\beta_{ж} = 7{,}5\sqrt{Du_0/\lambda}\exp(\ln\alpha - 0{,}975)(1 + {}^5\!/_4\,(h_0\alpha n)^2)\,, \qquad (3.3.6)$$

при $0{,}46 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}9$.

Для $\alpha \geqslant 0{,}9$ имеет место зависимость, отличная от других значений амплитуд. Величина $c = \Delta/\kappa = \delta^2/\kappa$ становится постоянной при $t = x/\lambda = 3$, после чего не наблюдается дальнейший ее рост, что имело место при более низких значениях амплитуд. Средние значения величины $c = \Delta/\kappa$ для $\alpha = 0{,}9$ и $\alpha = 0{,}95$ мало отличаются между собой, и соответственно коэффициент массоотдачи в жидкой фазе в этом интервале изменения амплитуд выражается формулой

$$\beta_{ж} = 2(1 + {}^5\!/_4\,(h_0\alpha n)^2)\sqrt{Du_0/\lambda}\,. \qquad (3.3.7)$$

Особенность формул (3.3.6) и (3.3.7), описывающих массообмен в пленке жидкости в условиях волнообразования по механизму полного перемешивания, состоит в том, что в них не входит длина орошаемого канала.

Характерным размером длины в формулах (3.3.6) и (3.3.7) является длина волны, которая в общем случае зависит от гидродинамических факторов, в частности от нагрузки по жидкости и газу, от физико-химических величин: поверхностного натяжения, вязкости и плотности орошаемой жидкости (см. главу 1).

С учетом (3.1.24) формулы (3.3.6) и (3.3.7) могут быть представлены в форме обобщенной зависимости (3.1.26). Тогда формула (3.3.6) при $0{,}46 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}9$ принимает вид ($i = 2$)

$$\beta_2 = B_2\sqrt{Df/z}, \qquad (3.3.8)$$

где

$$B_2 = 7{,}5\exp(\ln\alpha - 0{,}975)\,[1 + {}^5\!/_4\,(h_0\alpha 2\pi/\lambda)^2]\,, \qquad (3.3.9)$$

а формула (3.3.7) при $\alpha = 0{,}9 \div 0{,}95$ – вид

$$\beta_3 = B_3\sqrt{Df/z}, \tag{3.3.10}$$

где

$$B_3 = 2[1 + {}^5/_4(\alpha h_0 2\pi/\lambda)^2]. \tag{3.3.11}$$

Таким образом, согласно механизму, основанному на полном перемешивании в волновой пленке жидкости [формулы (3.1.23), (3.3.6), (3.3.7)], массообмен при волнообразовании определяется когерентной волновой структурой; характерным размером длины в этом случае выступает длина волны, а не длина контактного устройства, как предполагалось ранее. Этот эффект, впервые теоретически обнаруженный в работах [12, 13], в настоящее время получает все большее подтверждение в работах различных исследователей.

§3.4. МЕХАНИЗМ НЕПРЕРЫВНОГО РОСТА ДИФФУЗИОННОГО СЛОЯ (линейное распределение скорости)

Если предположить, что величина диффузионного слоя непрерывно растет по всей длине трубки, то решение задачи, представленное на рис. 3.3.1 зависимостью $c(x) = \Delta/\kappa$ от числа волн, имеет вид прямых, что требует теория пограничного слоя. Тангенсы угла наклона в этой зависимости существенно зависят от амплитуды волн.

Аналитическое выражение этой зависимости, определяемое из баланса вещества для всей трубки:

$$\beta_ж \Delta c \pi d \int_0^l dS = \pi d \int_0^l j_l dS \tag{3.4.1}$$

или

$$\beta_ж = \int_0^l \frac{j_l dS}{\Delta c} \Big/ \int_0^l dS, \tag{3.4.2}$$

имеет вид

$$\beta_ж = 15\exp(1{,}4\ln\alpha - 1{,}17)[1 + {}^5/_4(h_0\alpha n)^2]\sqrt{Du_0/l}. \tag{3.4.3}$$

Сравнивая формулы (3.4.3) и (3.2.5), можно отметить, что расчет по первой формуле (случай линейного распределения) примерно на 40% выше второй для случая постоянной скорости на поверхности раздела.

Формула (3.4.3) получена при условии непрерывного роста диффузионного слоя по всей длине массообменного участка. В этой формуле коэффициент массоотдачи зависит от длины трубки.

Таким образом, принципиальное отличие предполагаемого решения по механизму непрерывного роста диффузионного слоя по длине контактного устройства от существующих решений [67–69], полученных в аналогичных условиях, состоит в том, что перед числом $\sqrt{Du_0/l}$ имеется множитель, который существенно зависит от амплитуды волны, в частности при изменении амплитуды от $\alpha = 0{,}1$ до $\alpha = 0{,}85$ этот сомножитель увеличивается до 80%, т.е. пределы увеличения этого сомножителя при изменении амплитуды α от 0,1 до 0,85 приблизительно такие же, как и по формуле (3.2.5), полученной для случая постоянной скорости на поверхности раздела.

§3.5. О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ МАССООБМЕНА

В § 3.1–3.4 показано, что эффективность массообмена, помимо других факторов (скорость течения пленки жидкости, коэффициент диффузии), существенно зависит от длины волны и амплитуды. Это впервые было теоретически доказано на основании решения уравнения конвективной диффузии в работах [12, 13]. Позже в работах [70–73] показано, что волновые характеристики при пленочном течении имеют статистическую природу. Это было доказано для гравитационного [72–74], нисходящего [73] и восходящего прямотоков [70, 71]. В работах [70, 71, 73] по спектральным плотностям установлено существование различных типов волн; например, для восходящего прямотока [70, 71] доказано существование трех основных типов волн: волн ряби, крупных волн и волн возмущения. Число волн возмущений мало́ по сравнению с другим типом волн, поэтому в ряде работ они остались незамеченными.

Наличие волн различного сорта затрудняет пользование формулами § 3.1–3.4, так как заранее неизвестно, какой тип волн ответствен за массообмен в пленку жидкости при волнообразовании. Вместе с этим процессы массообмена обычно определяются состоянием гидродинамических явлений. Если волновые характеристики имеют статистическую природу, то естественно предположить, что массообмен в пленке жидкости, определяемый волновыми характеристиками (см. § 3.1–3.4), также имеет статистическую природу. Для того чтобы использовать аппарат статистической физики для расчета массообмена в пленке жидкости, представим формулы для расчета коэффициента массоотдачи, полученные в § 3.1 и 3.3, в виде [75]

$$\beta_i(z_k) = A_i \varphi_i(z_k), \quad i = 1, 2, \tag{3.5.1}$$

где $z_k = \dfrac{\alpha_k^m}{\lambda_k^{0,5}} \left[1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha_k n_k)^2\right]$, $m = 1$ – для случая линейного распределения скоростей в пленке жидкости (см. формулу (3.3.6)); $m = 0{,}7$ – для случая, в котором при решении уравнений конвективной диффузии использовалась скорость на поверхности пленки жидкости (см. формулу (3.1.22)); A_i – коэффициент, не зависимый от амплитуды (α_k) и длины волны (λ_k), причем, согласно формуле (3.3.6),

$$A_1 = 1{,}414 \mathrm{Re}_L^{0,5} \mathrm{Pr}^{0,5} D/h_0^{0,5}, \tag{3.5.2}$$

$$\varphi_1(z_k) = \frac{\alpha_k}{\lambda_k^{0,5}} \left[1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha_k n_k)^2\right]$$

и формуле (3.1.22)

$$A_2 = 0{,}836 \mathrm{Re}_L^{0,5} \mathrm{Pr}^{0,5} D/h_0^{0,5}, \tag{3.5.3}$$

$$\varphi_2(z_k) = \frac{\alpha_k^{0,7}}{\lambda_k^{0,5}} \left[1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha_k n_k)^2\right],$$

где $n_k = 2\pi/\lambda_k$; $\mathrm{Re}_L = 4q/\nu$; $\mathrm{Pr} = \nu/D$; $q = u_0 h_0$; h_0 – толщина пленки жидкости при волнообразовании; u_0 – среднерасходовая скорость.

Обозначим вероятность появления случайной величины через функцию $\varphi_i(z_k)$. Поскольку среднее арифметическое значение случайной величины при достаточно большом числе измерений стремится к математическому ожиданию, среднее значение коэффициента массоотдачи в волновую пленку определим по формуле [1]

$$\langle \beta_i(z) \rangle = \beta_{i(\text{ср})} = \int_{-d}^{d} p(z)\beta_i(z)dz = A_i \int_{-d}^{d} p(z)\varphi_i(z)dz, \tag{3.5.4}$$

где $[-d; d]$ – интервал определения случайной величины.

Формула (3.5.4) позволяет учесть долю вклада каждой волны в процесс массопередачи. Для дискретного задания случайной величины среднее значение коэффициента массообмена принимает вид

$$\beta_{i(\text{ср})} = A_i \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\bar{n}_k}{N} \varphi_i(z_k) \approx A_i \sum_{k=1}^{\nu} p_k(z)\varphi_i(z_k), \tag{3.5.5}$$

где N – достаточно большое число общих измерений случайной величины; $\bar{n}_k$ – число измерений случайной величины данного сорта.

С учетом результатов работ [70, 71] формулу (3.5.5) для расчета $\beta_{\text{ср}}$ удобно приближенно представить в следующем виде [75]:

$$\beta_{i(\text{ср})} = A_i \left(\frac{\bar{n}_1}{N} \varphi_i(z_1) + \frac{\bar{n}_2}{N} \varphi_i(z_2) + \frac{\bar{n}_3}{N} \varphi_i(z_3) \right), \tag{3.5.6}$$

где $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ – числа соответственно волн ряби, крупных волн и волн возмущения; A_i, φ_i даны формулами (3.5.2) и (3.5.3).

В ряде случаев коэффициент массоотдачи в основном определяется крупными волнами и волнами ряби, доля вклада волн возмущения незначительна и ею можно пренебречь ($\bar{n}_3 = 0$) [73], причем число волн ряби почти в 2 раза превосходит число крупных волн, т.е. $\bar{n}_1 \approx 2\bar{n}_2$. Это значительно сокращает процедуру расчета коэффициента массоотдачи, так как определение числа волн каждого сорта требует дополнительного проведения сложных измерений. В этом случае

$$\bar{n}_1 + \bar{n}_2 = N, \quad \bar{n}_3 = 0, \tag{3.5.7}$$

но

$$\bar{n}_1 \approx 2\bar{n}_2,$$

поэтому

$$\bar{n}_1 = {}^2/_3 N, \quad \bar{n}_2 = {}^1/_3 N. \tag{3.5.8}$$

С учетом (3.5.7) и (3.5.8) формула (3.5.6) принимает вид

$$\beta_{i(\text{ср})} = {}^2/_3 A_i (\varphi_i(z_1) + {}^1/_2 \varphi_i(z_2)). \tag{3.5.9}$$

---

[1] Рассмотрение функции $\varphi_i(z)$ как двумерной случайной величины потребует представления плотности ее распределения двойным интегралом, тогда среднее значение коэффициента массоотдачи будет определяться соответственно через двойной интервал.

Например, для режимов нисходящего или восходящего прямоточного течения (3.5.2) формула (3.5.9) преобразуется ($i = 1$):

$$\beta_{1\,(\text{ср})} = (0{,}943\,\mathrm{Re}_L^{0,5}\,\mathrm{Pr}^{0,5} D/h_0^{0,5}) \left\{ \frac{\alpha_1}{\lambda_1^{0,5}} [1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha_1 n_1)^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{\lambda_2^{0,5}} [1 + {}^5\!/_4 (h_0 \alpha_2 n_2)^2] \right\} , \qquad (3.5.10)$$

где α_1, α_2 и λ_1, λ_2 – соответственно амплитуды и длины волн ряби и крупных волн.

Формулы (3.5.2) и (3.5.3) с помощью известного соотношения

$$u_0/\lambda = f/z, \qquad (3.5.11)$$

где f, z – частота и безразмерная фазовая скорость, могут быть приведены к виду (3.1.26).

§3.6. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ПО МАССООБМЕНУ

В результате теоретических исследований, проведенных в §3.1 и 3.5, установлено, что массообмен в пленку жидкости имеет сложный характер. При малых числах $\mathrm{Re}_L = 4q/\nu$, охватывающих ламинарный безволновой режим и режим, соответствующий началу волнообразования, процесс массообмена зависит от длины контактного устройства; характерным линейным размером выступает длина трубки. Для этих чисел Re_L формулы (3.2.5) и (3.3.7), полученные по модели непрерывного роста диффузионного слоя, должны наилучшим образом соответствовать экспериментальным данным.

В табл. 3.6.1 проведено сравнение экспериментальных данных [76–78] по массообмену при ламинарном режиме течения пленки жидкости с данными, рассчитанными по формуле (3.2.5) и по формуле (3.6.1), предложенной в работах [67–69]:

$$\mathrm{Nu} = 1{,}38(\mathrm{Re}_L/4)^{0,5}\,\mathrm{Pr}^{0,5}(h_0/l)^{0,5} . \qquad (3.6.1)$$

Отличие формулы (3.6.1) от (3.2.5) состоит в том, что в последней учитывается увеличение поверхности контакта фаз за счет волн. Это увеличение поверхности контакта фаз дает лучшую согласованность данных, рассчитанных по формуле (3.2.5), с экспериментальными. Однако с увеличением числа Re_L рассчитанные по формуле (3.2.5) данные все в большей степени отличаются от данных эксперимента. Это связано с тем, что с ростом числа Re_L происходит смена механизмов массообмена в волновую пленку. При смене этого механизма массообмена все в большей степени проявляется механизм, основанный на предположении о полном перемешивании в седловинах волн (см. формулы (3.1.23), (3.3.6), (3.3.7) или (3.1.25), (3.3.8), (3.3.10)). Характерным размером длины согласно этому механизму выступает длина волны, а не длина трубки, как ранее предполагалось. Поскольку такой переход происходит постепенно, то можно предположить, что коэффициент массоотдачи в волновую пленку необходимо рассчитывать как среднюю величину от суммы коэффициентов массообмена, ответственных за каждый механизм.

Таблица 3.6.1

Сравнение данных по массообмену при ламинарном режиме течения пленки жидкости, полученных экспериментально и рассчитанных

$Re_L = 4q/\nu$	Десорбция O_2 (β, м/ч)			Абсорбция CO_2 (β, м/ч)		
	β^{*1}	β^{*2}	β^{*3}	β^{*1}	β^{*2}	β^{*3}
34	0,13	0,084	0,136	0,115	0,077	0,12
54	0,17	0,0965	0,157	0,154	0,0886	0,145
108	0,24	0,1225	0,198	0,254	0,1125	0,184

*[1] Расчет по экспериментальным данным работы [78].

*[2] Расчет по формуле (3.6.1), предложенной в работах [67–69].

*[3] Расчет по формуле (3.2.5), учитывающей волнообразование и непрерывный рост диффузионного слоя.

Таблица 3.6.2

Сравнение коэффициентов массоотдачи в системе O_2–H_2O, рассчитанных по формуле (3.6.2) и полученных экспериментально

Re_L	α	z	f, c^{-1} [79]	$\beta_{расч} \cdot 10^5$, м/с	$\beta_{эксп} \cdot 10^5$, м/с [79]
60	0,40	1,95	3,30	4,98	4,7
100	0,49	1,65	3,60	6,53	6,1
200	0,53	1,60	5,09	8,44	8,4
400	0,574	1,51	5,966	10,09	10,0
800	0,643	1,36	6,85	12,03	10,3
1200	0,643	1,36	7,5	12,57	11,02
1600	0,643	1,36	7,6	12,57	11,09

Проведем последовательный расчет по формуле (3.1.26) с учетом (3.1.27) для $i = 1$ [63]:

$$\beta_1 = B_1 \sqrt{Df/z},$$

где

$$B_1 = 7{,}5\ [1 + {}^5/_4\ (h_0 \alpha\, 2\pi/\lambda)^2]\ \exp(0{,}7 \ln\alpha - 1{,}5), \qquad (3.6.2)$$

а амплитуда и безразмерная фазовая скорость представлены соответствующими формулами (1.42), (1.43) и (1.34), (1.35).

В табл. 3.6.2 приведены результаты сравнения рассчитанных по формуле (3.6.2) и экспериментальных данных для коэффициентов массоотдачи, полученных в [79] на длинных трубках на расстоянии 2386 мм от верхнего среза трубы для системы O_2–H_2O при 20° С, $D_{O_2-H_2O} = 19 \cdot 10^{-9}$ м^2/с.

При расчете коэффициента массоотдачи по формуле (3.6.2) значения амплитуды волн α определялись по формулам (1.42), (1.43), а безразмерная базовая скорость z – по формулам (1.34), (1.35); частота волн f взята из работы [79]. Как видно из табл. 3.6.2, расчетные значения коэффициента

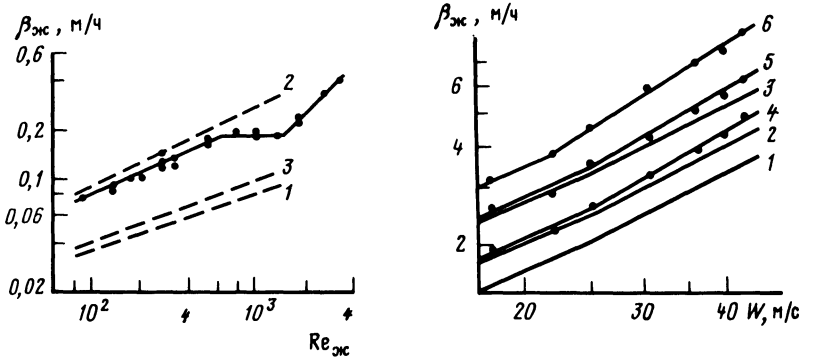


Рис. 3.6.1. Зависимость коэффициента массоотдачи в жидкой фазе $\beta_{ж}$ от числа Re = $= 4q/\nu$

Сплошная линия проведена по экспериментальным данным работы [76]; *1* – расчет по уравнению (3.6.1); *2* – по уравнению (3.1.23); *3* – расчет по уравнению (3.2.5)

Рис. 3.6.2. Зависимость коэффициента массоотдачи в жидкой фазе $\beta_{ж}$ от скорости газа W в режиме восходящего прямотока

1–3 – расчет по уравнению (3.3.6); *4–6* – экспериментальные данные по десорбции кислорода из воды воздухом в трубке диаметром d = 16,8 мм и l = 200 мм [81]. *1, 4* – q = 0,69 м^3/м · ч; *2, 5* – 1,27; *3, 6* – q = 2,03 м^3/м · ч

массоотдачи $\beta_{расч}$ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными $\beta_{эксп}$. Следует отметить, что на длинных трубах, какие исследованы в работе [79], на значительном расстоянии от среза трубы волновой режим развивается в полной мере, чем можно объяснить достаточно удовлетворительное согласие теории и эксперимента. Поскольку в работе [79] обнаружена незначительная зависимость частоты волны от длины трубки, формула (3.6.2) также передает эту зависимость. Так как волновые характеристики пленки жидкости изменяются с углом наклона орошаемого контактного устройства к горизонтали (см. главы 1 и 2), а последними, как показано ранее, определяется массообмен в волновой пленке жидкости, представляет интерес провести сравнение теории с экспериментальными данными по массообмену в наклонном канале прямоугольного сечения.

Такое сравнение проведено в работе [76] на примере десорбции углекислого газа в поток воздуха из предварительно насыщенной углекислым газом дистиллированной воды. Опыты проводились в наклонном канале прямоугольного сечения шириной 40 мм и высотой 25 мм, имеющем общую длину 1200 мм при противотоке жидкости и газа. Результаты сравнения теории и эксперимента представлены на рис. 3.6.1, взятом из работы [76]. Как следует из рисунка, результаты экспериментальных исследований удовлетворительно согласуются с формулой (3.1.23), отвечающей механизму полного перемешивания в волновой пленке. Следует при этом обратить внимание на то, что начиная с Re_L = 200 до Re_L = 1600 коэффициент массоотдачи практически остается постоянной величиной для трубчатого контактного устройства, в то время как для канала прямоугольного сечения в этом интервале наблюдается заметный его рост. Поскольку общая

Таблица 3.6.3

Результаты расчета коэффициентов массоотдачи в пленке жидкости в условиях восходящего прямоточного движения фаз для случая абсорбции углекислого газа из газовоздушной смеси водой ($t = 20°$ С, $D_{CO_2} = 1{,}77 \cdot 10^{-5}$ см^2/с)

Расход жидкости q, см^2/с	Скорость газа $u_г$, м/с	Длина и диаметр канала		Число волн			
		l, мм	d, мм	N	n_1	n_2	n_3
0,68	22,5	870	16,6	410	250	130	30
1,03	23,9	400	10,5	440	260	135	45
0,47	38,0	400	10,5	296	190	94	12
0,47	24,0	400	10,5	516	330	166	20
0,68	11,6	400	16,6	545	360	170	15
0,85	40	400	16,6	327	200	114	13
0,85	60	400	16,6	386	200	180	6

длина контактного устройства составляла 1200 мм, можно полагать, что на этой длине имеет место волновой режим со стабилизированными волновыми характеристиками.

Особый практический интерес представляет расчет массообмена в пленку жидкости в режиме высокой интенсивности, называемом восходящим прямотоком, который имеет ряд особенностей. При восходящем прямотоке наблюдаются волны трех типов [70, 71, 80] : волны ряби, крупные волны и волны возмущений. Если предположить, что при восходящем прямоточном течении фаз имеет место линейный профиль скорости (см. § 3.3, 3.4) и массообмен в жидкую пленку определяется только крупными волнами, характеризующимися фронтом с достаточно большой протяженностью, то коэффициент массоотдачи в таком режиме можно рассчитывать по формуле (3.3.6).

В работе [81] было также сделано предположение, что при восходящем прямоточном течении в пленке жидкости, движущейся вверх против сил тяжести под действием значительных касательных напряжений, имеет место линейный профиль скорости. Естественно, представляет интерес провести сравнение экспериментальных данных работы [81] с теоретической формулой (3.3.6), что сделано в этой работе.

Результаты сравнения представлены на рис. 3.6.2 (рисунок взят из [81]). Значения коэффициентов массоотдачи, рассчитанные по уравнению (3.3.6) с использованием параметров крупных волн, сопоставлены с экспериментальными значениями $\beta_ж$, взятыми на стационарном участке, где величина $\beta_ж$ остается не зависимой от длины массообменного аппарата. Сравнение теории с экспериментом показало, что экспериментальные значения $\beta_ж$ на 25–35% превышают расчетные данные. Такое сравнительно небольшое расхождение можно объяснить тем, как полагают авторы работы [81], что при расчете по формуле (3.3.6) были использованы параметры одного типа волн – крупные волны. Между тем при восходящем пленочном течении, как указывалось ранее, имеет место спектр волн. Наличие спектра волн,

Амплитуда волн			Длина волн, мм			Коэффициент массоотдачи $\beta_ж$, м/ч	
α_1	α_2	α_3	λ_1	λ_2	λ_3	расчет	эксперимент
0,1	0,32	0,59	2,0	10,0	62	0,69	0,82
0,12	0,37	0,61	2,75	10,2	62	0,75	0,95
0,13	0,38	0,64	2,52	7,6	42	0,79	0,85
0,1	0,34	0,59	2,7	10,0	62	0,51	0,67
0,29	0,33	0,57	2,8	10,5	61	0,61	0,69
0,19	0,47	0,67	2,2	7,0	42	1,71	1,95
0,2	0,52	0,7	2,25	5,5	35	2,3	2,9

а также известного факта, что гидродинамика, как правило, является определяющей в процессе массообмена, указывает на необходимость проведения сопоставления экспериментальных данных с теоретическими результатами, полученными на основании подхода, рассмотренного в § 3.5. Ранее было показано [71, 75], что прямоточное течение как стационарный случайный процесс содержит периодическую составляющую. Это дает основание ввести в расчеты эффективности массообмена такие параметры волновой структуры пленки жидкости, как амплитуда, частота, длина волны.

В табл. 3.6.3 проведено сопоставление экспериментальных данных работ [82–85] с данными, рассчитанными по формуле (3.5.10). Волновые характеристики получены в работе [70]. Как видно из таблицы, расчетные значения удовлетворительно согласуются с опытными данными. Минимальное отклонение опытных значений составляет 7%, а максимальное – 25%, причем расхождение между ними увеличивается с повышением расхода жидкости и газа, что, вероятно, объясняется уносом капель с поверхностей и возможным их осаждением, вызывая добавочное увеличение коэффициента массоотдачи. Одновременно удовлетворительное согласие теории и эксперимента указывает на то, что при расчете коэффициентов массоотдачи необходимо учитывать статистическую природу волновых характеристик.

Таким образом, несмотря на то что теоретические разработки удовлетворительно передают сущность процесса массообмена в условиях волнообразования, они намечают новый подход к организации межфазного взаимодействия в высокоэффективных тепломассобменных аппаратах, иногда называемых аппаратами нового поколения.

Глава 4

МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ НА КОНТАКТНЫХ УСТРОЙСТВАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 4.1. МАССООБМЕН НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

В пленочном массообменном аппарате с орошаемой стенкой в интервале $\mathrm{Re} = 4q/\vartheta = 200 \div 2500$ коэффициент массоотдачи для жидкостей остается практически постоянным [86]. В этих условиях большое значение для интенсификации процесса массообмена имеет перемешивание пленки жидкости. Перемешивание пленки жидкости можно производить нитями-турбулизаторами, а также вращением самого цилиндра, по стенке которого стекает жидкость. Подобный элементарный процесс массопередачи лежит в основе некоторых типов роторных тепломассообменных аппаратов. Такие аппараты обладают рядом преимуществ, одним из которых является низкое гидравлическое сопротивление при высоких значениях коэффициентов массоотдачи в жидкой фазе.

Коэффициенты массотдачи для жидкой фазы, рассчитанные по теории Хигби, не в состоянии объяснить сложную картину массообмена в волновой пленке жидкости в условиях перемешивания, и поэтому возникает необходимость введения эмпирических коэффициентов для согласования теории и эксперимента [86].

Вместе с тем достаточно широкое применение роторных аппаратов в химической промышленности, а также в других отраслях требует решения этого вопроса без привлечения эмпирических коэффициентов.

В настоящем параграфе проведено исследование данного вопроса теоретическим путем на основании решения уравнения конвективной диффузии, в частности проведено исследование массообмена в волновой пленке жидкости при ее возмущении вращающимся цилиндром, по внутренней стенке которого стекает жидкость с угловой скоростью Ω [87]. Результаты этого исследования в этой же работе распространены на расчет коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в роторных аппаратах со скребками или нитями-турбулизаторами.

В основу расчета коэффициента массообмена в волновой пленке жидкости при волнообразовании положен метод, разработанный и подробно описанный в главе 3.

Количество вещества Q, перешедшее из газовой фазы в жидкую за счет движущей силы Δc на длине волны λ,

$$Q = \pi \beta_{\text{ж}} \Delta c d \int_0^{\lambda} dS, \tag{4.1.1}$$

где dS — элемент дуги поверхности; d — диаметр цилиндра. В то же время

$$Q = \pi d \int_0^{\lambda} j_{\lambda} \, dS, \tag{4.1.2}$$

где j_λ – плотность диффузионного потока по длине волны. Отсюда

$$\beta_{ж} = \frac{\int_0^\lambda j_\lambda \, dS}{\Delta c \int_0^\lambda dS}. \qquad (4.1.3)$$

Таким образом, для того чтобы определить коэффициент массоотдачи в пленку жидкости при волнообразовании, необходимо найти распределение концентрации и затем по нему определить диффузионный поток на поверхность раздела j_λ. Распределение концентрации найдем из решения уравнения конвективной диффузии, записанного в полярных координатах:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial c}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} = D\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}. \qquad (4.1.4)$$

В уравнении (4.1.4) предполагается, что коэффициент диффузии является величиной постоянной.

Для решения уравнения (4.1.4) необходимо задать граничные условия и распределение скоростей v_φ и v_r в пленке жидкости, а также форму поверхности волны. Предполагается, что она имеет вид синусоиды и представляется формулой

$$r_0 = a - h_0\,(1 + \alpha \sin n\,(a_0\varphi - z u_0 t)), \qquad (4.1.5)$$

где a – радиус цилиндра; α – безразмерная амплитуда волны; h_0 – средняя толщина пленки; z – безразмерная фазовая скорость; u_0 – средняя скорость в среднем сечении; $n = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны.

Будем считать, что концентрация распределяемого вещества на поверхности пленки постоянна, а вдали от поверхности принимает нулевое или постоянное значение. Поскольку сопротивление массопередачи сосредоточено в жидкой фазе, примем, что концентрация изменяется только внутри диффузионного слоя в жидкости. В соответствии с этими предположениями граничные условия для уравнения (4.1.4) примут вид:

$$\begin{aligned} &c = c_p \quad \text{при} \quad r = r_{гр} = r_0, \\ &c \to 0 \quad \text{при} \quad r \to a. \end{aligned} \qquad (4.1.6)$$

В уравнении (4.1.4) v_φ и v_r являются функциями φ, r, t. При параболическом распределении скорости в пленке v_φ определяется выражением

$$v_\varphi = a\Omega_0 - 3\,(a\Omega_0 - u_{ср})\left[\frac{a-r}{a-r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-r}{a-r_0}\right)^2\right], \qquad (4.1.7)$$

где $u_{ср} = u_0\left[z + \dfrac{1-z}{1 + \alpha \sin n\,(a_0\varphi - z u_0 t)}\right]$ – средняя скорость по сечению.

При известном значении v_φ, v_r определяются из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \qquad (4.1.8)$$

Таким образом, исследование поставленной задачи состоит в следующем: необходимо решить уравнение (4.1.4) при распределении скоростей, заданных выражениями (4.1.7) и (4.1.8), с известной формой волны и с граничными условиями (4.1.6).

Для удобства введем безразмерные координаты:

$$\varphi_1 = \varphi; \quad \eta = \frac{r_0 - r}{a - r_0}, \quad \xi = n(a_0\varphi - zu_0 t). \tag{4.1.9}$$

Необходимость в сохранении переменной $\varphi_1 = \varphi$ состоит в том, что данная задача рассматривается при условии развития по координате φ концентрационного профиля. Только при бесконечно большом φ может установиться концентрационный профиль, зависящий от η и ξ. Но, поскольку φ имеет конечное значение, сохранение в уравнении (4.1.4) координаты φ необходимо.

С учетом (4.1.9) уравнение (4.1.4) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial \eta}\left[\frac{\eta+1}{a-r_0}\frac{\partial r_0}{\partial t} + \frac{\eta+1}{a-r_0}\frac{\partial r_0}{\partial \varphi_1}\frac{v_\varphi}{r} - \frac{v_r}{a-r_0}\right] +$$

$$+\frac{\partial c}{\partial \xi}\left[na\frac{v_\varphi}{r} - znu_0\right] + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial c}{\partial \varphi_1} = \frac{D}{(a-r_0)^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}. \tag{4.1.10}$$

В уравнении (4.1.10) значения составляющих скоростей берутся на поверхности раздела двух сред, т.е. при $r = r_0$ или $\eta = 0$. Это допущение справедливо, так как процесс переноса вещества осуществляется в диффузионном слое, примыкающем к поверхности раздела.

В этом случае уравнение (4.1.10) принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial \xi}\left[\frac{na_0}{2r_0}u_0\left(3z - k + 3\frac{1+z}{1+\alpha\sin\xi}\right) - znu_0\right] +$$

$$+\frac{\partial c}{\partial \varphi_1}\left(3z - k + 3\frac{1+z}{1+\alpha\sin\xi}\right) = \frac{D}{h_0^2(1+\alpha\sin\xi)^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}, \tag{4.1.11}$$

где

$$k = a\,\Omega_0/u_0,\ r_0 = a_0 - \alpha h_0 \sin\xi, \tag{4.1.12}$$

$n = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны; Ω_0 – угловая скорость вращения цилиндра.

Или после очевидных преобразований

$$\kappa_0\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}(1 + \theta_0\sin\xi) - \frac{\partial c}{\partial \xi}(\theta_1 + \theta_2\sin\xi + \theta_3\sin^2\xi +$$

$$+\theta_4\sin^3\xi) - \frac{\partial c}{\partial \varphi_2}(\theta_5 + \theta_6\sin\xi + \theta_7\sin^2\xi) = 0, \tag{4.1.13}$$

где

$$\kappa_0 = 2D/(nu_0h_0^2);\ \varphi_2 = na_0\varphi_1;\ b = h_0/a_0;\ \theta_0 = -\alpha b;$$

$$\theta_1 = 3 - 2z - k;\ \theta_2 = \alpha(3 - z - 2k + 2zb);$$

$\theta_3 = \alpha^2 (z - k + 4zb)$; $\theta_4 = 2z\alpha^3 b$; $\theta_5 = 3 - k$;

$\theta_6 = \alpha (3 + 3z - 2k)$; $\theta_7 = \alpha^2 (3z - k)$.

Как и в главе 3, будем искать решение уравнения (4.1.13) в виде ряда Фурье:

$$c = c_0 (\eta, \varphi_2) + c_{10} (\eta, \varphi_2) \sin \xi + \\ + c_{11} (\eta, \varphi_2) \cos \xi + c_{20} (\eta, \varphi_2) \sin 2\xi + \\ + c_{21} (\eta, \varphi_2) \cos 2\xi + \ldots \qquad (4.1.14)$$

Уравнение (4.1.13) методом, изложенным в главе 3, приводится к следующей системе дифференциальных уравнений [87]:

$$\bar{\Delta}' = \Phi = \frac{A_5 f_1 - A_7 f_2}{A_7^2 - A_4 A_5}, \qquad (4.1.15)$$

$$\bar{c}'_{102} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(A_4 - \frac{1}{2} A_7 \bar{c}_{102} \right) \Phi + f_1 \right],$$

$$\bar{c}'_{112} = \frac{1}{A_6 \Delta} \left[f_3 - \frac{1}{2} A_6 \Phi \bar{c}_{112} \right],$$

где

$$f_1 = -2\pi (9 + A_0 \bar{c}_{102} - A_1 \bar{c}_{112} \bar{\Delta});$$

$$f_2 = -2\pi (2 A_0 + \bar{c}_{102} - A_2 \bar{c}_{112} \bar{\Delta});$$

$$f_3 = -2\pi (c_{112} + A_3 c_{102} \Delta); \quad \Delta = \delta^2 (\varphi_2)/\kappa_0;$$

$$A_0 = {}^3/_2\, \theta_0; \quad A_1 = 1/8\, (\theta_2 + {}^3/_4\, \theta_4);$$

$$A_2 = {}^1/_{12}\, (\theta_1 + {}^3/_4\, \theta_3); \quad A_3 = {}^1/_{12}\, (\theta_1 + {}^1/_4\, \theta_3); \qquad (4.1.16)$$

$$A_4 = {}^3/_8\, (\theta_5 + {}^1/_8\, \theta_7); \quad A_5 = {}^1/_{12}\, (\theta_5 + {}^3/_4\, \theta_7);$$

$$A_6 = {}^1/_{12}\, (\theta_5 + {}^1/_4\, \theta_7); \quad A_7 = {}^1/_8\, \theta_6;$$

$$\bar{c}_{i2} = c_{i2}/c_p, \quad i = 10, 11.$$

После того как было найдено численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1.15), плотность диффузионного потока на поверхности раздела жидкость–газ определялась по уравнению

$$-\frac{j}{D}\bigg|_{r=r_0} = \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial r} \cos (\hat{rn}) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \cos (\hat{\varphi n}) =$$

$$= -\frac{\partial c}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r_0} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \sin \theta, \qquad (4.1.17)$$

где

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} = -\alpha n h_0 \cos \xi / (1 - \alpha b \sin \xi). \qquad (4.1.18)$$

Подставив в (4.1.17) значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$, выраженные через $\operatorname{tg}\theta$ (см. формулу (4.1.18)), а также $\partial c/\partial r$ и $\partial c/\partial\varphi$, определенные из решения (4.1.15), найдем величину плотности диффузионного потока, осредненного по длине волны. Затем, подставив найденное значение диффузионного потока в формулу (4.1.3), представим выражение для коэффициента массоотдачи в виде

$$\frac{\beta_{ж}\sqrt{2D}}{\sqrt{\nu u_0 D}} = \frac{A}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3+\bar{c}_{102}\sin\xi+\bar{c}_{112}\cos\xi}{\bar{\Delta}^{1/2}}\,\psi(\xi)\,d\xi, \quad (4.1.19)$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{\sqrt{1-2\alpha b\sin\xi+\alpha^2 b^2\sin^2\xi+\alpha^2 n^2 h_0^2\cos^2\xi}}{(1+\alpha\sin\xi)(1-\alpha b\sin\xi)}$$

или

$$\beta_{ж} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/2}\Omega_0^{1/2}D^{1/2}A/k^{1/2}. \quad (4.1.20)$$

Значение функций $\bar{\Delta}$, $\bar{c}_{102}$, $\bar{c}_{112}$ в формуле (4.1.19) или (4.1.20) находим из решения нелинейных уравнений (4.1.15).

Как показали расчеты, величина A зависит от k и от α и фактически не зависит от безразмерной фазовой скорости z.

Зависимость величины A от k и α, полученная аппроксимацией численного решения системы уравнений (4.1.15) с учетом (4.1.19), представлена формулами

$$A = 2{,}6\,\alpha + 3{,}5 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant 1{,}5; \quad (4.1.21)$$

$$A = (4{,}6 - 1{,}2\,\alpha - k/(k+1))/(1-0{,}66\,\alpha) \text{ при } k > 1{,}5. \quad (4.1.22)$$

Таким образом, формула (4.1.20) совместно с (4.1.21) и (4.1.22) является решением поставленной задачи.

Если волновая пленка жидкости вращается вместе с цилиндром как твердое тело, то $k \to 1$ и формула (4.1.20) с учетом (4.1.21) принимает вид

$$\beta_{ж} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/2}\Omega_0^{1/2}D^{1/2}(2{,}6\,\alpha + 3{,}5). \quad (4.1.23)$$

Выразив скорость вращения Ω_0 через число оборотов в минуту n_1, получим

$$\beta_{ж} = 9\cdot 10^{-2}\,(2{,}6\,\alpha + 3{,}5)\,n_1^{1/2}\,(a/\lambda)^{1/2}D^{1/2}. \quad (4.1.24)$$

При $k \neq 1$ формула (4.1.20) с учетом (4.1.21) и (4.1.22) после выражения угловой скорости вращения цилиндра Ω_0 через число оборотов в минуту n_1 принимает вид

$$\beta_{ж} = 9\cdot 10^{-2}\,(A/k^{1/2})\,n_1^{1/2}\,(a/\lambda)^{1/2}D^{1/2}. \quad (4.1.25)$$

Согласно формулам (4.1.24) и (4.1.25) коэффициент массоотдачи в жидкой среде зависит от скорости вращения цилиндра в степени 0,5 от радиуса трубки, амплитуды и длины волны на поверхности пленки жидкости.

Несмотря на то что формулы (4.1.24) и (4.1.25) трудно проверить из-за отсутствия экспериментальных данных, следует отметить, что они качественно согласуются с формулой для массообмена в пленке жидкости при гравитационном ее стекании в условиях волнообразования (см. главу 3).

Формулы (4.1.24) и (4.1.25), так же как и для гравитационного стекания (см. главу 3), зависят от коэффициента диффузии, длины и амплитуды волны и интенсивности перемешивания, причем степени в этих зависимостях при соответствующих членах совпадают.

Следует отметить, что полученный результат можно с успехом применить при расчете коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в роторных аппаратах со скребками или нитями-турбулизаторами, что будет сделано в следующем параграфе.

§ 4.2. МАССООБМЕН В РОТОРНЫХ АППАРАТАХ СО СКРЕБКАМИ ИЛИ НИТЯМИ-ТУРБУЛИЗАТОРАМИ

Применим результаты исследования, проведенного в § 4.1, к расчету коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в роторных аппаратах со скребками или нитями-турбулизаторами.

При исследовании массоотдачи в жидкой фазе в роторном аппарате со скребками или нитями-турбулизаторами обнаружены волны на поверхности пленки жидкости [86]. В этом случае в качестве длины волны следует брать расстояние между скребками или нитями-турбулизаторами и расчет длины волны проводить по формуле

$$\lambda = 2\pi a/N, \tag{4.2.1}$$

где N – число скребков или нитей-турбулизаторов.

Амплитуду волны можно оценить следующим образом. Положим, что в силу сохранения расхода, толщины пленки жидкости над нитями-турбулизаторами такие же, как и средняя толщина. В этом случае амплитуда волны выражается формулой

$$\alpha = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{max} + h_{min}} = \frac{2r_1}{2r_1 + 2h_0}, \tag{4.2.2}$$

где r_1 – радиус нити-турбулизатора.

С учетом (4.2.1) формула (4.1.25) принимает вид

$$\beta_{ж} = 9 \cdot 10^{-2} \frac{A}{k^{1/2}} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} D^{1/2} n_1^{1/2}, \tag{4.2.3}$$

где величина $k = a\Omega_0/u_0$ определяется по формуле [87]

$$k = {}^1/_2 \left(1 + \sqrt{1 + 2Nc_x}\right). \tag{4.2.4}$$

Для случая обтекания жидкостью тонких одиночных цилиндров в интервале Re от 10^2 до 10^5 величина c_x изменяется от 0,7 до 1 [88]. С точностью до 20% выберем среднее значение c_x = 0,85 для всего интервала Re. 20-процентная ошибка в определении c_x приводит к 10-процентной ошибке в

Таблица 4.2.1

Абсорбция малорастворимого углекислого газа водой из потока воздуха (t = = 20°C; D_{CO_2} = 1,77 · 10^{-5} см²/с; a = 1,3 см)

Номер ротора	Диаметр нити d, мм	Скорость вращения n_1, об/мин	$\beta_ж \cdot 10^4$, м/с	
			эксперимент [86]	расчет по формуле (4.2.5)
		Число нитей N = 4		
1	0,15	279	1,51	1,55
1	0,15	420	1,85	1,91
1	0,15	680	2,29	2,41
1	0,15	1140	3,05	3,14
2	0,45	284	2,2	1,8
2	0,45	410	2,8	2,2
2	0,45	680	3,6	2,9
		Число нитей N = 20		
3	0,15	284	2,68	2,58
3	0,15	410	3,00	3,01
3	0,15	680	3,60	3,91

определении k, которая входит в расчетную формулу для определения коэффициента массоотдачи.

Подставив выражение для k из формулы (4.2.4) в (4.2.3), получим расчетную формулу для коэффициента массоотдачи в роторном пленочном массообменном аппарате со скребками или нитями-турбулизаторами в виде

$$\beta_ж = 12{,}728 \cdot 10^{-2} \frac{A}{(1+\sqrt{1+2Nc_x})^{1/2}} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} D^{1/2} n_1^{1/2}, \qquad (4.2.5)$$

причем A определяется по формулам (4.1.21) и (4.1.22) в зависимости от величины k.

В табл. 4.2.1 проведено сопоставление значений коэффициентов массоотдачи, рассчитанных по формуле (4.2.5), с результатами экспериментальных исследований, проведенных в работе [86]. Величина A определялась из (4.1.21) и (4.1.22), так как всюду $k > 1{,}5$. Значение амплитуды волны рассчитывалось по формуле (4.2.2), в которой толщина пленки находилась как среднее арифметическое толщин пленок в интервале чисел Рейнольдса от 10^2 до 10^3, т.е. для интервала значений Re, в котором величина $\beta_ж$ практически не зависит от расхода жидкости, а определяется только числом оборотов цилиндра в минуту.

Из табл. 4.2.1 следует, что теоретические и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются. Как положительный факт можно отметить то обстоятельство, что формула (4.2.5) получена теоретически и не содержит ни одной опытной постоянной. Это еще раз указывает на широкие возможности применения механики жидкости и газа к расчету сложного в гидродинамическом отношении случая массообмена, какой имеет место в роторном аппарате со скребками или нитями-турбулизаторами.

Критическое значение числа оборотов цилиндра в минуту может быть найдено, как и в работе [86], из равенства значения $\beta_э$, вычисленного по формуле (4.2.5), и значения $\beta_ж$ для гравитационного стекания волновой пленки жидкости (см. главу 3). И опять-таки это критическое число определяется теоретическим путем.

§ 4.3. МАССООБМЕН НА СТЕНКЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

В главе 3 показано, что волнообразование в пленке жидкости, текущей по гладкой поверхности, значительно интенсифицирует процесс тепломассообмена. Это обстоятельство, естественно, наводит на мысль о создании волнообразования искусственно посредством регулярной шероховатости.

При рассмотрении вопроса о влиянии искусственной шероховатости на теплообмен в пленке жидкости следует учесть известные в литературе положения о соотношении высоты выступа шероховатости и толщины пленки жидкости [88, 89]. В частности, в случае, когда толщина пленки намного превосходит высоту выступа, влияние шероховатости на тепломассообмен практически нивелируется; существенное влияние шероховатости на тепломассообмен наблюдается тогда, когда толщина пленки одного порядка с высотой выступа.

Вопрос о влиянии искусственной шероховатости на интенсификацию процесса тепломассообмена обсуждался экспериментально и теоретически в работах [90–103].

Наиболее обстоятельное исследование влияния искусственной шероховатости на массообмен проведено в работе [96]. В ней изучалась абсорбция CO_2 пленкой воды, стекающей по наклонной пластинке с поперечными выступами прямоугольного профиля, в зависимости от числа Re, геометрических параметров шероховатости и угла наклона пластины к горизонту.

Впоследствии этот вопрос исследован более подробно в [102, 103]. Авторы этих работ связали режимы течения пленки жидкости, отмеченные в работе [96], с соотношением расстояния между выступами к величине циркуляционной зоны или, вернее, к величине следа за плохо обтекаемым телом. При этом установили, что максимальное увеличение массоотдачи наблюдается в том случае, когда величина циркуляционной зоны приблизительно равна $(5 \div 8)\ h$. Именно такая величина получается для длины зоны отрыва за плохо обтекаемым телом [104–106].

С точки зрения обобщения экспериментальных данных представляет определенный интерес работа [107]. Из этой работы следует, что для чисел $\mathrm{Re} < 1500 \div 1600$ средняя толщина пленки с практически пренебрежимой погрешностью может быть рассчитана по формуле Нуссельта для гладкой поверхности.

При больших числах Re средняя толщина пленки зависит от вида шероховатости (поперечная или продольная), к тому же показатель степени при числах Re также отличается от нуссельтского. В работах [100, 101] на основании численного решения уравнения конвективной диффузии и движения установлено, что геометрия шероховатой поверхности существенно влияет на гидродинамику и массоперенос; при этом рассмотрены

три модели: 1) модель с прямоугольной накаткой; 2) модель для насадки из гофрированной сетки; 3) промежуточная модель.

Теоретически найдено оптимальное соотношение $s/h \sim 10$, при котором происходит максимальное увеличение массоотдачи. К сожалению, в данной работе не приведено количественное сопоставление результатов расчета с существующими экспериментальными данными, что затрудняет сделать вывод о возможности применения полученных результатов для количественных расчетов, к тому же авторы сделали вывод о существовании волнового и турбулентного режимов за плохо обтекаемым телом на основании только уравнения пограничного ламинарного течения пленки жидкости.

В режимах интенсивного взаимодействия пленки жидкости с газовым потоком существует несколько работ: в режиме восходящего прямотока [108, 109] и нисходящего [96].

Выводы, сделанные в работе [96], указывают на то, что коэффициент массоотдачи в жидкой фазе в зависимости от соотношений s/h проходит через максимум. Соотношение s/h, при котором наблюдается максимальная массопередача, наблюдается в тех же пределах, что и при гравитационном стекании пленки жидкости. Наиболее полно изучен этот вопрос с применением оригинальной методики определения гидродинамических параметров в работах [110–113].

Таким образом, как при восходящем прямотоке, так и при гравитационном стекании пленки жидкости максимальная величина коэффициента массопередачи достигается при значении циркуляционной зоны, приблизительно равной $(5 \div 8)h$. Эта величина, как указывалось выше, приблизительно соответствует зоне отрыва за плохо обтекаемым телом [104–106].

Теоретически рассмотрим именно такой случай, поскольку он представляет непосредственно практический интерес, так как для него различными авторами найдено в некоторых случаях превышение коэффициента массоотдачи до трех раз по сравнению с их значениями для гладкой поверхности при прочих равных условиях.

Трудность решения данной задачи даже для оптимального случая состоит в необходимости рассматривать всю область между выступами, что возможно сделать, решив уравнение эллиптического вида, а не параболического, как это делается. Вместе с тем с некоторыми предположениями, вытекающими из анализа экспериментальных данных, данную задачу удалось свести к задаче, рассмотренной в главе 3 [114–116]. Сущность предположений заключается в следующем. Анализ результатов исследования гидродинамики как восходящего потока, так и при гравитационном стекании в трубках с регулярной шероховатостью показал, что на поверхности пленки жидкости имеет место стояние волны с длиной, равной расстоянию между выступами. В соответствии с этими данными стоячие волны в пленке жидкости следует рассматривать как результат появления регулярной шероховатости. Это позволяет опустить в расчетах сложные формы аналитической зависимости стоячих волн над гладкой поверхностью, принимая за длину волны расстояние между выступами в регулярной шероховатости. Данное предположение усиливается еще тем, что процесс массопередачи в тонком слое при наличии сопротивления только

в жидкой фазе сосредоточен около свободной поверхности раздела фаз, а отличие течений по гладкой и шероховатой поверхностям наблюдается только в слое, примыкающем к стенке.

При этих предположениях механизм массоотдачи в пленке жидкости с регулярной шероховатостью можно считать частным случаем модели массоотдачи в пленке жидкости при волнообразовании, предложенной в главе 3.

ОДНОФАЗНАЯ ЗАДАЧА

При расчете коэффициента массоотдачи в жидкой фазе используем предположения о наличии стоячих волн в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью. Тогда, как и в главе 3, коэффициент массоотдачи в жидкой фазе определим из выражения

$$\beta_{ж} = \int_0^s j_s dl / \Delta c \int_0^s dl, \tag{4.3.1}$$

где Δc – движущая сила массоотдачи; l – длина поверхности контакта; s – расстояние между выступами; j_s – величина диффузионного потока, которую определим из решения уравнения конвективной диффузии [116]:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{4.3.2}$$

В уравнении (4.3.2) u и v – компоненты скорости соответственно по направлению осей x и y. Ось x направлена вдоль поверхности массообмена, y – перпендикулярно ей.

Уравнение (4.3.2) отличается от уравнения (3.1.4) отсутствием члена $\partial c/\partial \tau$. Последнее обстоятельство связано с предположением о наличии стоячих волн, в то время как в главе 3 были рассмотрены волны, движущиеся с фазовой скоростью ω.

При решении уравнения (4.3.2) примем граничные условия:

$$c = c_p \text{ при } y = y_{гр} = h_0 (1 + \alpha \sin nx), \tag{4.3.3}$$

$c \to 0$ при $y \to 0$ (вдали от свободной поверхности).

Граничные условия (4.3.3) означают, что на поверхности раздела, заданной формулой $y_{гр} = h_0 (1 + \alpha \sin nx)$, где h_0 – средняя толщина пленки в среднем сечении, a – амплитуда волны, $n = 2\pi/\lambda$, концентрация принимает всюду постоянное значение.

Применим параболический профиль скорости в пленке жидкости:

$$u = 3\bar{u} (y/y_{гр} - y/2y_{гр}^2), \tag{4.3.4}$$

где

$$\bar{u} = u_0/(1 + \alpha \sin nx). \tag{4.3.5}$$

Компонента скорости v определена из условия неразрывности потока:

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{4.3.6}$$

Поскольку процесс массопередачи осуществляется в тонком диффузионном слое, прилегающем к поверхности раздела, при решении уравнения (4.3.2) значения составляющих скоростей u и v можно принять равными их значениям на межфазной поверхности, т.е. при $y = y_{гр}$. Тогда уравнение (4.3.2) с учетом выражений (4.3.4)–(4.3.6) примет следующий вид:

$$\frac{3}{2}\frac{u_0}{1+\alpha\sin nx}\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{3}{2}\frac{\alpha n h_0 u_0 \cos nx}{1+\alpha\sin nx}\frac{\partial c}{\partial y}=D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \qquad (4.3.7)$$

Уравнение (4.3.7) является уравнением в частных производных с переменными коэффициентами. Это уравнение и граничные условия с помощью новых переменных $\eta = y - y_{гр}, x_1 = nx$ приводится к виду

$$\kappa\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}-\frac{1{,}5}{1+\alpha\sin x_1}\frac{\partial c}{\partial x_1}=0; \qquad (4.3.8)$$

$$\eta = 0 \quad c = c_p,$$
$$\eta \to \infty \quad c \to 0, \qquad (4.3.9)$$

где

$$\kappa = D/u_0 n.$$

Заметим, что уравнение (4.3.8) является частным случаем уравнения (3.1.4) для массообмена в пленке жидкости при волнообразовании, это подтверждает, что принятая модель является частным случаем модели массообмена при волнообразовании, разработанной в главе 3. С помощью безразмерной переменной $t = {}^2/_3\int(1+\alpha\sin x_1)dx_1$ уравнение (4.3.8) приводится к каноническому виду уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}, \qquad (4.3.10)$$

$$\eta = 0 \quad c = c_p,$$
$$\eta = -\infty \; c \to 0. \qquad (4.3.11)$$

Решением уравнения (4.3.10) с граничными условиями (4.3.11) является функция

$$c = c_p - \frac{2c_p}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta/2\sqrt{\kappa t}}\exp(-\xi^2)d\xi, \qquad (4.3.12)$$

где $\int_0^{\eta/2\sqrt{\kappa t}}\exp(-\xi^2)d\xi$ – интеграл вероятности, для которого имеются таблицы.

Для определения плотности диффузионного потока и коэффициента массоотдачи в жидкую фазу используем условие

$$-\frac{j_s}{D}=\left(\frac{\partial c}{\partial \vec{n}}\right)_{\eta=0}=\frac{\partial c}{\partial x}\cos(\hat{nx})+\frac{\partial c}{\partial y}\cos(\hat{ny})=\frac{\partial c}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial c}{\partial x}\sin\theta, \qquad (4.3.13)$$

Таблица 4.3.1

Сравнение значений коэффициента массоотдачи, полученных экспериментально [96] и рассчитанных по формуле (4.3.16)

$Re_ж = q/\nu$	Толщина пленки h_0, см	$\beta_ж \cdot 10^2$, см/с	
		эксперимент [96]	расчет по формуле (4.3.16)
170	0,046	1,9	2,46
400	0,072	2,7	3,1
700	0,095	3,5	3,74
1000	0,12	4,0	4,31
1500	0,14	4,8	4,9

где

$\theta = \operatorname{arctg}(dy_{гр}/dx)$.

Чтобы определить коэффициент массоотдачи в жидкой фазе, необходимо по найденному решению (4.3.12) вычислить диффузионный поток по формуле (4.3.13), а затем полученное выражение поставить в формулу (4.3.1) и провести интегрирование по длине волны.

Опуская промежуточные вычисления, необходимые для проведения численных расчетов на ЭВМ, приведем окончательное выражение для коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в условиях регулярной шероховатости:

$$\beta_ж = \sqrt{\frac{Du_0}{\lambda}}\,[1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(\alpha)\,, \qquad (4.3.14)$$

где функция $f(\alpha)$, найденная аппроксимацией численных данных, имеет вид

$$f(\alpha) = 1{,}22 - 0{,}23\alpha \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant 0{,}4,$$
$$f(\alpha) = 1{,}1 \quad \text{при} \quad \alpha > 0{,}4. \qquad (4.3.15)$$

При $\lambda = s$ (s – шаг регулярной шероховатости) формула (4.3.14) принимает вид

$$\beta_ж = \sqrt{\frac{Du_0}{s}}\,[1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(\alpha)\,. \qquad (4.3.16)$$

Результаты сопоставления экспериментальных данных работы [96] процесса абсорбции CO_2 пленкой жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью, для случая оптимального отношения $s/k = 6{,}7$ представлены в табл. 4.3.1 ($D_{25°C} = 2 \cdot 10^{-5}$ см^2/с). Как видно из таблицы, предложенная модель удовлетворительно описывает экспериментальные данные работы [96].

На рис. 4.3.1 проведено сопоставление коэффициента массоотдачи при абсорбции CO_2 пленкой жидкости, текущей по стенке с регулярной шеро-

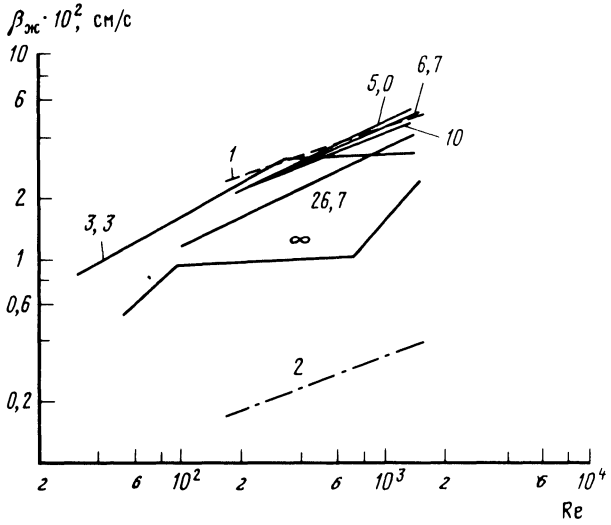


Рис. 4.3.1. Зависимость коэффициента массоотдачи $\beta_{ж}$ от числа Re = q/ν при абсорбции CO_2 водяной пленкой жидкости, текущей по шероховатой поверхности

Сплошные линии – экспериментальные данные [96] при различных отношениях расстояния между выступами (s) к высоте выступа (k); ∞ – данные, соответствующие массоотдаче в гладкую пленку, (θ = 24° 56′). Пунктирная линия – расчет по формуле (4.3.16) для оптимального соотношения s/k = 6,7. Штрихпунктирная линия – расчет по формуле из работы [96]

ховатостью, при различных отношениях s/k. Обращает внимание, помимо всего прочего, что коэффициент массоотдачи при наличии искусственной шероховатости существенно отличается от такого для случая гладкой поверхности при соблюдении прочих равных условий.

ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим двухфазный массообмен при условии, что сопротивление массопередаче остается в пленке жидкости. Влияние газа на массообмен в этом случае учтено касательным напряжением на границе раздела пленки жидкость–газ. Такая постановка задачи при решении уравнений гидродинамики впервые была предложена в линейной [51–53] и нелинейной [56–59, 115] постановках. В этих работах было получено выражение для функции тока для течения волновой пленки жидкости по гладкой поверхности в спутном потоке газа в линейной и нелинейной постановках задачи. Строго говоря, к данной задаче эта функция тока неприменима, так как в ней не учтено наличие шероховатости. Но если учесть тот факт, что процесс массопередачи сосредоточен в тонком слое вблизи свободной поверхности, а отличие течений по гладкой и шероховатой поверхностям наблюдается в слое, примыкающем к стенке, то с большой степенью точности можно использовать формулы для скорости течения около свободной поверхности.

Выражение для скоростей на поверхности раздела с учетом касательного напряжения на поверхности раздела согласно полученной в работах

[56–59, 115] функции тока имеет вид

$$u = u_0 \left[\frac{3}{2} \frac{1}{1 + \alpha \sin nx} + \frac{1}{4} T(1 + \alpha \sin nx \right]; \qquad (4.3.17)$$

$$v = nh_0 u_0 \alpha \cos nx \left[\frac{3}{2} \frac{1}{1 + \alpha \sin nx} + \frac{1}{4} T(1 + \alpha \sin nx) \right], \qquad (4.3.18)$$

где $T = \tau_0 h_0 / \mu u_0$ – безразмерное касательное напряжение; $n = 2\pi/\lambda$; u_0 – средняя скорость; α – амплитуда волны; h_0 – средняя толщина пленки.

При этих предположениях механизм массоотдачи в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью, можно считать частным случаем модели массопереноса в пленке жидкости при волнообразовании, предложенной в главе 3.

Коэффициент массоотдачи рассчитывается по формуле

$$\beta_{ж} = \int_0^s j_s dl / \Delta c \int_0^s dl, \qquad (4.3.19)$$

где величина диффузионного потока, в свою очередь, определяется из решения уравнения конвективной диффузии

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \qquad (4.3.20)$$

с граничными условиями

$$c = c_p \quad \text{при} \quad y = y_{гр} = h_0(1 + \alpha \sin nx), \qquad (4.3.21)$$

$c \to 0$ при $y \to 0$ (вдали от поверхности раздела).

Несмотря на то что уравнение (4.3.20) и граничные условия (4.3.21) для двухфазной задачи формально совпадают с уравнениями (4.3.2) и граничными условиями (4.3.3) для однофазной задачи, данные уравнения существенно отличаются между собой, так как в уравнение (4.3.20) следует поставить распределение скоростей (4.3.17) и (4.3.18), полученное с граничным условием

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 \quad \text{при} \quad y = y_{гр}, \qquad (4.3.22)$$

учитывающим касательное напряжение τ_0 на границе раздела пленки жидкость–газ.

С учетом (4.3.17) и (4.3.18) уравнение (4.3.20) примет вид

$$\frac{u_0}{4} \left[\frac{6}{1 + \alpha \sin nx} + T(1 + \alpha \sin nx) \right] \left[\frac{\partial c}{\partial x} + nh_0 \alpha \cos nx \frac{\partial c}{\partial y} \right] = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \qquad (4.3.23)$$

Отметим, что при $T = 0$ (отсутствует взаимодействие газа с пленкой жидкости) уравнение (4.3.23) переходит в уравнение (4.3.7), полученное для случая гравитационного стекания пленки жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью.

С введением новых переменных $\eta = y - y_{гр}$, $y_{гр} = h_0(1 + \alpha\sin nx)$, $x_1 = nx$ уравнение (4.3.23) и граничные условия (4.3.21) приводятся к виду

$$nu_0 \frac{6 + T(1 + \alpha\sin x_1)^2}{4(1 + \alpha\sin x_1)} \frac{\partial c}{\partial x_1} = D\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}, \tag{4.3.24}$$

$$c = c_p \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$
$$c = 0 \quad \text{при} \quad \eta \to -\infty. \tag{4.3.25}$$

Опуская промежуточные выкладки, которые аналогичны при решении однофазной задачи, приведем выражение для коэффициента массоотдачи в жидкой фазе [116]:

$$\beta_{ж} = \sqrt{\frac{Du_0}{2s}} \frac{\int_0^1 \frac{1 + (\alpha n h_0 \cos(2\pi x_1))^2}{\sqrt{t_0}} dx_1}{\int_0^1 \sqrt{1 + (\alpha n h_0 \cos(2\pi x_1))^2}\, dx_1}, \tag{4.3.26}$$

где

$$t_0 = \frac{1}{4t}; \quad t = \int_0^{x_1} \frac{4(1 + \alpha\sin x)}{6 + T(1 + \alpha\sin x)^2} dx.$$

Аппроксимировав результаты численных решений интегралов в (4.3.26), получим окончательную формулу для коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в условиях регулярной шероховатости при наличии газового потока:

$$\beta_{ж} = \sqrt{Du_0/\lambda}\,[1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(T), \tag{4.3.27}$$

где

$$f(T) = 1{,}1 + 0{,}113\,T \quad \text{при} \quad T \leqslant 4,$$
$$f(T) = 10{,}04\sqrt{T}/(1 + 5{,}97\sqrt{T}) \quad \text{при} \quad T > 4. \tag{4.3.28}$$

При $\lambda = s$ формула (4.3.27) принимает вид

$$\beta_{ж} = \sqrt{Du_0/s}\,[1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(T). \tag{4.3.29}$$

Величину амплитуды волны определяем по формуле [116]:

$$\alpha = (h_{max} - h_{min})/h_{max} + h_{min},$$

причем при использовании этой формулы принимаем из условия сохранения расхода, что толщина пленки жидкости над выступом шероховатости такая же, как и средняя толщина пленки. В этом случае

$$\alpha = k/(k + 2h_0) \tag{4.3.30}$$

где k – высота выступа.

В табл. 4.3.2 проведено сопоставление экспериментальных данных для коэффициентов массоотдачи, полученных в работе [117], с расчетными данными по найденной формуле (4.3.29) с учетом (4.3.28) и (4.3.30). Расчет проведен для случая оптимального соотношения $s/k \simeq 6{,}7 \div 8{,}5$ при различных нагрузках по жидкости и газу.

Из таблицы следует, что при числах $Re_{ж} = 693 \div 1128$ и скоростях газа до 30 м/с (до турбулентной области) наблюдается заметное завышение

Таблица 4.3.2

Десорбция кислорода водой в трубке с элементами шероховатости прямоугольного профиля при восходящем движении двухфазного потока

Номер п/п	$u_г$, м/с	q, см²/с	Δp, мм вод.ст.	k, мм	β, см/с		$Re_ж = 4q/\nu$
					расчет по формуле (4.3.29)	[117]	
			Высота выступа k = 0,3 мм				
1	20,31	1,733	88	2	0,1583	0,0960	693
2	24,79	1,733	120	2	0,1705	0,1200	693
3	28,56	1,733	146	2	0,1798	0,1445	693
4	31,85	1,733	178	2	0,1879	0,1663	693
5	34,80	1,733	202	2	0,1946	0,1926	693
6	39,99	1,733	260	2	0,2200	0,2120	693
7	20,30	1,733	92	2,5	0,1357	0,1050	693
8	24,77	1,733	128	2,5	0,1465	0,1330	693
9	31,80	1,733	190	2,5	0,1620	0,1830	693
10	39,39	1,733	276	2,5	0,1770	0,2400	693
			Высота выступа k = 0,25 мм				
11	20,17	1,733	82	2	0,1500	0,0900	693
12	24,66	1,733	110	2	0,1600	0,1160	693
13	34,61	1,733	186	2	0,1836	0,1784	693
14	39,77	1,733	232	2	0,1939	0,2180	693
15	42,06	1,733	256	2	0,1983	0,2355	693
16	20,09	2,82	113	2	0,1728	0,1360	1128
17	24,53	2,82	218	2	0,1840	0,1726	1128
18	31,48	2,82	218	2	0,2090	0,2380	1128
19	39,43	2,82	312	2	0,2183	0,3200	1128
			Высота выступа k = 0,3 мм				
20	20,16	3,74	166	2	0,1946	0,1750	1496
21	24,52	3,74	320	2	0,2101	0,2246	1496
22	31,35	3,74	182	2	0,2300	0,3080	1496
23	20,23	3,74	182	2,5	0,1930	0,1861	1496
24	24,55	3,74	242	2,5	0,2100	0,2394	1496
25	31,36	3,74	350	2,5	0,2264	0,3212	1496
26	20,09	4,6	198	2	0,2090	0,2240	1840
27	24,44	4,6	266	2	0,2234	0,2637	1840
28	31,20	4,6	390	2	0,2419	0,3601	1840
29	20,05	4,6	216	2,5	0,2044	0,2276	1840
30	24,35	4,6	280	2,5	0,2182	0,2885	1840

Примечание. $u_г$ – скорость воздуха в трубке; q – плотность орошения; Δp – перепад давления в трубке; s – расстояние между выступами; $d_{тр}$ = 16,8 мм; l = = 150 мм; $t_{вод}$ = 20°С; $t_{вод.вх}$ = 19,9°С; $t_{воды\ вых}$ = 19,7°С.

расчетных данных над экспериментальными (см. № 1–17). При этих числах $Re_ж$ заметное влияние оказывают входные эффекты. При числах $Re_ж$, соответствующих волновому режиму, наблюдается удовлетворительное согласие теории и эксперимента (см. № 4–6, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29). При скоростях газа больше 30 м/с и числах $Re_ж$, соответствующих переходу в турбулентную область, турбулизация пленки жидкости возрастает,

и это сказывается на отклонениях расчетных и экспериментальных данных (см. № 22, 25, 28, 30).

Согласие расчетных и экспериментальных данных для режима, при котором наблюдаются на поверхности пленки стоячие волны, указывает на то, что выбранная математическая модель удовлетворительно описывает сложный режим двухфазного массообмена в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью.

Отклонение расчетных данных от экспериментальных для режимов, при которых необходимо учитывать либо входные эффекты, либо развитую турбулентность, указывает на один из возможных подходов для теоретического исследования этой сложной проблемы.

Надо полагать, что при рассмотрении вопроса массопередачи в волновую пленку, движущуюся по поверхности с регулярной шероховатостью, а также в условиях ее взаимодействия с газовым потоком, при снятии предположения о наличии стоячих волн, вид формул (4.3.14), (4.3.29), а также (4.3.15) и (4.3.28) сохранится. Тогда, заменяя в формулах (4.3.14) и (4.3.27) $u_0/\lambda = f/z$, где f – частота волн, z – безразмерная фазовая скорость, получим обобщенную зависимость (3.1.26) для коэффициента массоотдачи в пленку жидкости на регулярной шероховатости:

$$\beta_i = B_i \sqrt{df/z},$$

где для $i = 4$ (однофазная задача)

$$B_4 = [1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(\alpha),$$

а $f(\alpha)$ представлена функциями (4.3.15), и для $i = 5$ (двухфазная задача)

$$B_5 = [1 + 0{,}6(\alpha n h_0)^2]\, f(T),$$

где $f(T)$ представлена формулами (4.3.28).

Глава 5

ГИДРОДИНАМИКА И МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА

§ 5.1. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ. ОДНОФАЗНАЯ ЗАДАЧА

Интерес к пленочному течению на входном участке за последнее время возрос [118–128]. Помимо прямого применения результатов исследования гидродинамики и массообмена на входном участке в пленочных тепломассообменных аппаратах, результаты ускоренного течения пленки жидкости на вертикальной и наклонной поверхностях могут быть использованы при исследованиях гидродинамики и массообмена в насадочных колоннах, в которых движется пленка жидкости по элементам насадки. В местах соприкосновения элементов насадки (рис. 5.1.1) равномерность течения нарушается. В результате потери части кинетической энергии скорость падает, а в силу сохранения расхода пленка утолщается. Миновав

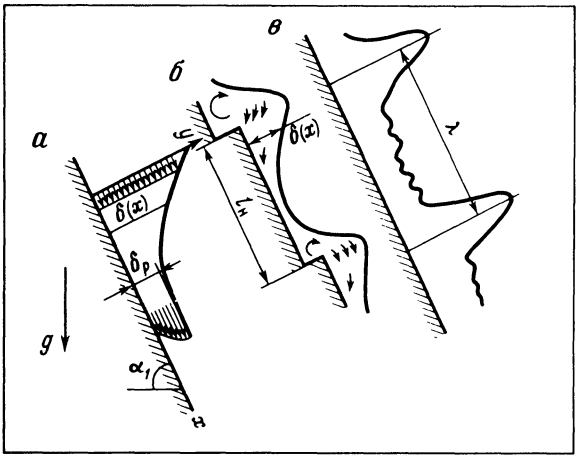


Рис. 5.1.1. Схема течения пленки жидкости на входном участке
а – на плоском орошаемом канале; *б* – на элементах насадки; *в* – на одиночных волнах

этот участок, пленка вновь приобретает ускорение. Ускорение происходит на безволновом участке, так как ускоренное течение весьма устойчиво против различных возмущений. Как показано в работе [119], турбулентное течение может вновь стать ламинарным, если оно подвержено ускорению.

При изучении гидродинамики в пленке жидкости на входном участке применялись различные методы решения, в которых достигалась разная точность. Наиболее полное исследование проведено в работе [121]. Исследование массообмена в пленке жидкости на входном участке не проводили из-за сложности решения задачи. Между тем развитие профиля скорости и толщины пленки на входном участке непременно должно сказаться на дальнейшем формировании пленочного течения и массообмена в ней. К тому же на основании результатов экспериментальных исследований известно, что на входном участке пленочного аппарата пленка жидкости остается гладкой даже при больших числах Рейнольдса. Поэтому исследования гидродинамики и массообмена на входном участке имеют как научный, так и практический интерес.

Наиболее плодотворным и эффективным методом для исследования гидродинамики и тепломассообмена на входном участке оказался метод поверхностей равных расходов. Впервые примененный для течения струи [129] он получил дальнейшее развитие и приложение к решению различных задач гидродинамики и тепломассообмена с поверхностью раздела [63–65, 130–145].

В настоящей главе этот метод применен к исследованию гидродинамики и тепломассообмена при пленочном течении по гладкой поверхности в трубе или канале.

Система уравнений Навье–Стокса, уравнения конвективной диффузии на входном участке в слое жидкости переменной толщины $\delta(x)$ при ламинарном течении имеют вид [65] (случай, когда сопротивление массопере-

дачи сосредоточено в жидкой пленке)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=g\sin\alpha_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ ; \tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0;$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial c}{\partial y}=D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\ ; \tag{5.1.2}$$

$$y=0,\ u=\upsilon=0,\ c=0;\ x=0\ \ c=0; \tag{5.1.3}$$

$$y=\delta(x)\ \ \partial u/\partial y=0,\ c=c_1\ . \tag{5.1.4}$$

Граничное условие (5.1.3) предполагает "прилипание скорости жидкости" к твердой поверхности канала; и на входе в канал подается жидкость, в которой отсутствует распределяемый компонент. Решение задачи не изменяется, если на вход в канал подается жидкость с постоянной концентрацией распределяемого компонента.

Граничное условие (5.1.4) предполагает отсутствие касательного напряжения на поверхности раздела; ускоренное стекание гладкой пленки жидкости переменной толщины, величина которой определяется из решения системы уравнений (5.1.1)–(5.1.4), происходит только под действием сил гравитации и сил давления. В ряде случаев силами давления ввиду их малости по сравнению с силами гравитации можно пренебречь. Концентрация на поверхности пленки жидкости принимается постояннной и равной c_1.

Обезразмеривание скоростей u и υ и поперечной координаты y (см. рис. 5.1.1) в системе уравнений (5.1.1) и (5.1.2) можно проводить двояко:

1) текущую скорость можно относить к скорости в начальном сечении, а поперечную координату – к величине щели $H(0)$, из которой истекает жидкость;

2) текущую скорость можно относить к скорости на установившемся участке, а поперечную координату – к толщине пленки на установившемся участке.

Обезразмеривание уравнений (5.1.1) и (5.1.2) и граничных условий (5.1.3) и (5.1.4) проведено по второму способу:

$$u=u_0\bar{u},\ x=\delta_p\mathrm{Re}\bar{x},\ \ y=\delta_p\bar{y},\ \ c=c_1\bar{c}, \tag{5.1.5}$$

где u_0 – средняя скорость жидкости; $\delta_p=\left[3\nu^2/\left(g\sin\alpha_1-\frac{\partial p}{\partial x}\rho\right)\mathrm{Re}\right]^{1/3}$ – толщина пленки жидкости; $\mathrm{Re}=(u_0\delta_p)/\nu$; $\mathrm{Pr}=\nu/D$; $\mathrm{Pe}=u_0\delta_p/D$.

Система уравнений и граничные условия (5.1.1)–(5.1.4) в безразмерных переменных (5.1.5) примут вид

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{\upsilon}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=3+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\ ; \tag{5.1.6}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial\bar{y}}=0;$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2}; \qquad (5.1.7)$$

$$\bar{y} = 0 \quad \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{c} = 0; \quad \bar{x} = 0 \quad \bar{c} = 0;$$

$$\bar{y} = \delta(x)/\delta_p \quad \partial \bar{u}/\partial \bar{y} = 0, \quad \bar{c} = 1. \qquad (5.1.8)$$

В дальнейшем для простоты написания черточки в уравнениях и граничных условиях (5.1.6)–(5.1.8) опущены.

Для решения задачи применим метод равной поверхности [63–65]. С этой целью представим профиль скорости $u(x, y)$ в виде

$$u = \sum_{k=1}^{N} A_k(x) U_k [y_k(x)], \qquad (5.1.9)$$

где N – номер приближения; $U_k(y_k)$ – полная система функций поверхностей $y_k(x)$, через которые не проходит поток жидкости.

Введем в поле течения пленки жидкости линии $y_k = y_k(x)$ и обозначим

$$u_k(x) = u[x, y_k(x)], \quad v_k(x) = v[x, y_k(x)], \quad c_k(x) = c[x, y_k(x)],$$

где $u_k(x), v_k(x)$ – компоненты скорости на поверхности $y_k(x)$ в направлении координат x и y соответственно в условиях стационарного течения, рассматриваемого в настоящей главе. Поставим цель свести задачу о развитии течения в пленке жидкости и массообмена в ней к численному определению полей скоростей $u_k(x)$ и $v_k(x)$ и концентраций $c_k(x)$, а также межфазной поверхности $\delta(x)$.

Из определения $y_k(x)$ как линии равного расхода, а также из условия сохранения расхода и уравнения неразрывности следует

$$v_k = u_k \frac{\partial y_k}{\partial x}. \qquad (5.1.10)$$

Из постоянства расхода по длине массообменного аппарата следует

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} u dy = 0. \qquad (5.1.11)$$

После замены интеграла конечно-разностным выражением получим уравнение для линий постоянного расхода

$$\frac{dy_k}{dx} = F_k, \qquad (5.1.12)$$

где

$$F_k = \frac{dy_{k-1}}{dx} - \frac{y_k - y_{k-1}}{u_k - u_{k-1}}\left(\frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k-1}}{dx}\right).$$

Уравнение (5.1.6) с учетом условий (5.1.10), (5.1.11) примет вид

$$u_k \frac{du_k}{dx} = 3 + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2}. \qquad (5.1.13)$$

Чтобы рассчитать правые части в уравнениях (5.1.12) и (5.1.13), необходимо иметь производные скорости по y, для вычисления которых воспользуемся представлением профиля скорости через полные системы функций $U_k[y_k(x)]$. Согласно соотношению (5.1.9), эта система может быть представлена различными полиномами. В настоящей главе применялись ортогональные полиномы Чебышева, Лежандра и полиномы вида

$$U_k = \frac{j+1}{j}\left(\frac{y_k}{y_N}\right)^j - \left(\frac{y_k}{y_N}\right)^{j+1}, \qquad (5.1.14)$$

где $y_N(x)$ – поверхность пленки.

Полиномы Чебышева в полной системе функций U_k применялись в виде

$$U_k(y_k) = T_{j+1}(z_k) - T_{j+1}(0) - [T_j(z_k) - T_j(0)]\frac{(j+1)^2}{j^2}, \qquad (5.1.15)$$

где

$$z_k = y_k(x)/y_N(x).$$

Отметим, что существенного различия в результатах расчета при применении полиномов (5.1.14), (5.1.15) не наблюдалось, однако требуемая точность при применении полиномов Чебышева достигалась меньшим числом членов. Выбор полиномов Чебышева обусловлен еще и тем, что, во-первых, сходимость этих полиномов самая сильная, во-вторых, погрешности в этих полиномах распределены наивыгоднейшим образом, а именно равномерно по всему интервалу. Поэтому в дальнейшем все расчеты в основном были проведены с использованием полиномов Чебышева. При вычислении коэффициентов многочлена Чебышева использовалось рекурентное соотношение

$$T_{j+1}(z_k) = 2z_k T_j(z_k) - T_{j-1}(z_k).$$

Потребуем, чтобы скорость, определяемая по формуле (5.1.9), совпала с $u_k(x)$ на линиях $y_k(x)$. Тогда для определения коэффициентов $A_k(x)$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} A_k U_k[y_k(x)] = u_k(x), \quad k = 1, 2, ..., N. \qquad (5.1.16)$$

Определив значения $A_k(x)$ из системы уравнений (5.1.16) на линиях y_k, по формуле (5.1.9) найдем производные скорости по y. Решение систем (5.1.12), (5.1.13) и (5.1.16) проводилось одновременно.

В сечении $x = 0$ должны быть заданы начальные условия. Можно задавать профиль скорости и по заданному начальному профилю определять A_k; можно также задавать A_k и по ним определять начальный профиль скорости в сечении пленки жидкости. В проведенном исследовании в начальном сечении задавался профиль скорости, причем применялся в расчетах как постоянный профиль, так и параболический. Сетку линий по сечению пленки жидкости при $x = 0$ можно задавать как переменной, так и равномерной. В расчетах применялась равномерная сетка расчетных линий при $x = 0$: $y_k(0) = k/(N-1)$, где N – номер приближения.

При расчете массоотдачи в жидкую фазу уравнение конвективной диффузии с учетом соотношения (5.1.10) преобразовывалось к виду, удобному для интегрирования:

$$u_k \frac{dc_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 c_k}{\partial y_k^2}, \tag{5.1.17}$$

где

$$\frac{dc_k}{dx} = \frac{\partial c_k}{\partial x} + \frac{\partial c_k}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x}; \tag{5.1.18}$$

$$c(x,y) = \sum_{k=1}^{N} A1_k N1_k(y_k(x)). \tag{5.1.19}$$

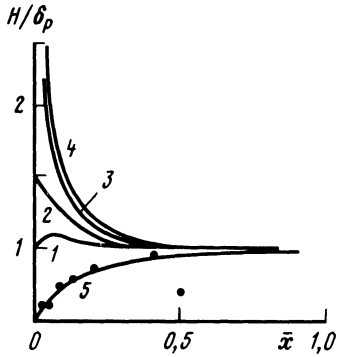
Концентрация распределяемого вещества, подобно скорости, разлагалась на полную систему функций $N1_k$. При расчете правой части уравнения (5.1.17) концентрация распределяемого вещества, выраженная через полную систему функций, может быть представлена различными полиномами. В расчете применялись ортогональные полиномы Чебышева, которые с учетом граничных условий (5.1.8) имели вид

$$N1_k(z_k) = T_{j+1}(z_k) + T_{j+1}(0)(2z_k^2 - z_k - 1). \tag{5.1.20}$$

Система уравнений (5.1.12), (5.1.13), (5.1.17) с граничными условиями (5.1.8) решалась методом Рунге–Кутта с постоянным и автоматическим шагом. Для гладких решений значение шага было порядка 0,02; для тех случаев, когда перед второй производной был существенно малый параметр, значение шага, как показали расчеты, было порядка 0,005. (В некоторых случаях удобно ввести безразмерную переменную вида $x = \delta_p \mathrm{Pe} \bar{x}_1$, тогда в уравнении (5.1.17) исчезает малый параметр при старшей производной.)

Алгоритм, изложенный выше, был применен для расчета на входном участке поля скоростей и концентрации в зависимости от ширины щели H и от числа Re, толщины пленки по длине орошаемого канала, касательного напряжения на стенке орошаемого канала, коэффициента массоотдачи в жидкую пленку, что дало возможность получить полную информацию о течении ламинарной безволновой пленки на входном участке.

На рис. 5.1.2 показана зависимость локальной толщины пленки (как конструктивного параметра колонного аппарата) от безразмерной длины входного участка при различных отношениях ширины щели к толщине пленки жидкости, рассчитываемой по формуле Нуссельта. Существенное влияние ширины щели на ускоренное течение пленки жидкости наблюдается до отношения $H/\delta_p = 3$ (см. рис. 5.1.2). При $H/\delta_p > 3$ ширина щели влияет незначительно на ускоренное течение пленки жидкости (кривые *3,4*). На этом же рисунке проведено также сравнение расчетных данных, найденных по предложенному алгоритму, с экспериментальными данными (точка *а*) [120], относящимся к ускоренному течению пленки в орошаемом канале. Согласованность теоретических и экспериментальных данных, как видно из рис. 5.1.2, можно считать удовлетворительными. Формула для локальной толщины пленки, полученная аппроксимацией численных



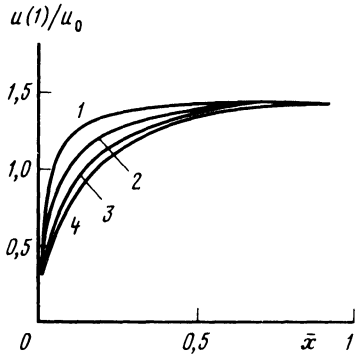


Рис. 5.1.2. Зависимость локальной толщины пленки от безразмерного расстояния от кромки оросителя

1 – H/δ_p = 1; *2* – 1,5; *3* – 3; *4* – 10; *5* – 0,5; • – экспериментальные данные для H/δ_p = 0,47

Рис. 5.1.3. Зависимость локальной поверхностной скорости от безразмерного расстояния от кромки оросителя

1 – $H/\delta_p = 1$; *2* – 1,5; *3* – 3; *4* – H/δ_p = 10

решений на ЭВМ, для $H/\delta_p \gg 1{,}1$ имеет вид

$$\delta(x) = \delta_p (H/\delta_p)^{0,1/(0,1+\bar{x})}, \tag{5.1.21}$$

где

$$\bar{x} = x/\delta_p \mathrm{Re}\,.$$

На рис. 5.1.3 построена зависимость локальной поверхностной скорости от безразмерного расстояния от входа. Показано, что профиль безразмерной поверхностной скорости существенно зависит от безразмерной ширины входной щели до $H/\delta_p = 3$. При $H/\delta_p > 3$ это изменение незначительно. Формула для поверхностной скорости, полученная аппроксимацией численных решений на ЭВМ для $H/\delta_p \geqslant 1{,}1$, имеет вид

$$u(1)/u_0 = A\sqrt{\bar{x}} + B, \tag{5.1.22}$$

где

$$A = \exp(2{,}3H_1/(4{,}35H_1 + 21{,}5));$$

$$B = 0{,}33 + 0{,}44/\sqrt{H_1}\,; H_1 = H/\delta_p. \tag{5.1.23}$$

За длину активного гидродинамического участка принималось расстояние от входа, на котором рассчитанные профиль скорости на поверхности пленки жидкости и толщина пленки жидкости отличались на величину ϵ от таковых, рассчитанных для случая стабилизированного течения (решение Нуссельта). При ϵ = 0,02 (рассчитанные профиль и толщина пленки жидкости отличаются на 2% от решения Нуссельта) длина входного участка,

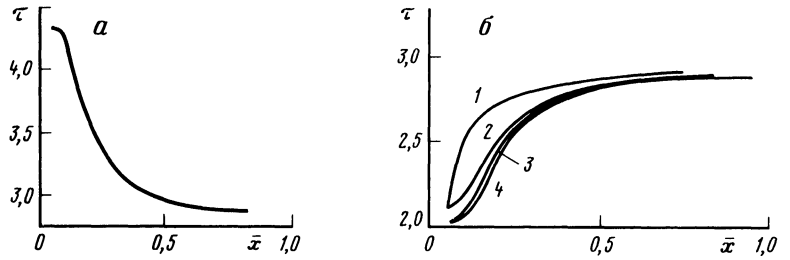


Рис. 5.1.4. Зависимость локального касательного напряжения от безразмерного расстояния от кромки оросителя
а – H/δ_p = 0,5; *б* – H/δ_p: *1* – 1; *2* – 1,5; *3* – 3; *4* – 10

полученная аппроксимацией численного решения на ЭВМ, выражается следующей формулой:

$$l_{вх} = \exp(2{,}3H_1/(20 - 28H_1))\delta_p \mathrm{Re}; \qquad (5.1.24)$$

при ϵ = 0,0002

$$l_{вх} = 2\exp(-2{,}3H_1/(28H_1 - 20))\delta_p \mathrm{Re}. \qquad (5.1.25)$$

Другой важной характеристикой пленочного течения является касательное напряжение на стенке орошаемого канала. Авторам неизвестно о таких расчетах, проведенных ранее, несмотря на то что величина касательного напряжения связана с локальным градиентом скорости и перепадом давления и с ее помощью можно определять гидравлические потери в пленочных аппаратах. На рис. 5.1.4 представлена характерная зависимость касательного напряжения на входе в орошаемый канал при различных величинах безразмерной ширины щели. Как видно из рисунка, наблюдается резкое изменение касательного напряжения по длине орошаемого участка, причем для $H_1 < 1$ оно падает, а для $H_1 > 1$ – возрастает, при этом падение касательного напряжения на стенке при $H_1 < 1$ обусловлено ростом толщины пленки (см. рис. 5.1.2), а его возрастание – уменьшением толщины пленки по длине орошаемого канала.

На рис. 5.1.5 проведено сравнение расчетных безразмерных толщин пленок (*а*) и безразмерных касательных напряжений (*б*) при различных размерах щели ъ экспериментальными результатами работы [146]. Как следует из рисунка, участки стабилизации для пленки жидкости и для касательного напряжения совпадают. Этот факт был впервые экспериментально отмечен в работе [146]. Последнее обстоятельство, вероятнее всего, является условием сохранения расхода: незначительное изменение профиля скорости, а соответственно и касательного напряжения на стенке орошаемого канала вызывает изменение и в толщине пленки жидкости. И только при большой стабилизации профиля скорости (касательного напряжения) наблюдается полная стабилизация пленки жидкости при условии сохранения расхода.

Аппроксимация численного решения, полученного с помощью ЭВМ, для касательного напряжения на стенке орошаемого канала имеет следующий

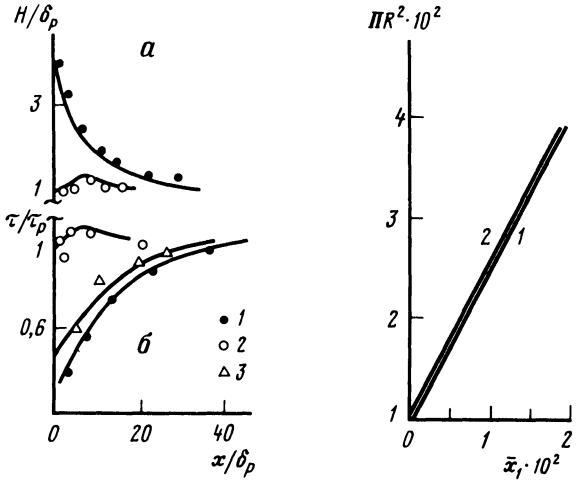


Рис. 5.1.5. Сравнение результатов численных решений (сплошные линии) с экспериментальными данными [146] для безразмерной толщины пленки (*а*) и для безразмерного касательного напряжения (*б*)

1 – Re = q/ν = 75, H/δ_p = 3,7; *2* – 455; 1; *3* – 180; 1,3

Рис. 5.1.6. Зависимость величины ΠR^2 от безразмерного расстояния от кромки оросителя при различных Pr

1 – Pr = 300; *2* – Pr = 500÷2500

вид (для $H_1 > 1{,}1$):

$$\lg\frac{\tau}{\tau_p} = -1/(A_1\bar{x} + 2), \tag{5.1.26}$$

где

$$A_1 = \exp(2{,}3H_1/(0{,}73H_1 - 0{,}26));$$

$$\bar{x} = x/\delta_p \mathrm{Re}.$$

Как отмечено выше, при расчете массообмена предполагалось, что сопротивление массопередаче сосредоточено в пленке жидкости. Для расчета коэффициента массоотдачи в последней использовано равенство

$$D\left(\frac{dc}{dy}\right)_{y=y_N} = \frac{d}{dx}\int_0^{y_N} ucdy. \tag{5.1.27}$$

Равенство (5.1.27) может быть получено после интегрирования уравнения конвективной диффузии для пленки переменной толщины с учетом кинематического условия на поверхности раздела (5.1.10), выражающего тот факт, что поверхность пленки жидкости является линиями тока.

Усреднив выражение (5.1.27) по продольной координате на участке с характерной длиной b, получим[1]

$$\frac{1}{b}\int_0^b D\left(\frac{dc}{dy}\right)_{y=y_N} dx = \frac{1}{b}\int_0^b \left[\frac{d}{dx}\int_0^{y_N}(uc)dy\right]dx. \qquad (5.1.28)$$

После усреднения обеих частей равенства (5.1.28) по поверхности контакта и вычисления интеграла (в 5.1.28) с учетом граничного условия (5.1.8) и обезразмеривания вида $x = \delta_p \mathrm{Re}\mathrm{Pr}\bar{x}_1$ получим

$$\beta_{\text{ср}} = \frac{1}{b}\int_0^{y_N} ucdy = \frac{u_0\delta_p c_1}{b}\left[\int_0^{y_N} ucdy\right]_{\bar{x}_1 = b/\delta_p \mathrm{Re}\mathrm{Pr}} = \frac{u_0\delta_p}{b}\,\Pi R\,|_{\bar{x}_1}. \qquad (5.1.29)$$

На рис. 5.1.6 построена зависимость безразмерной величины ΠR^2 от безразмерной координаты $\bar{x}_1 = x/\delta_p \mathrm{Re}\mathrm{Pr}$ при различных величинах Pr. Линия *1* соответствует расчету ΠR^2 в зависимости от x_1 для Pr = 300, линия *2* – для Pr = 1000. Параллельные линии, находящиеся между прямыми *1* и *2*, отличаются одна от другой числом Pr. Выше числа Pr = 1000 все расчетные линии в интервале чисел Pr от 1000 до 2500 совпали с линией *2*. Как видно из рис. 5.1.6, влияние числа Pr на величину отрезка, отсекаемого от оси ΠR^2, незначительно. В частности, в интервале чисел от 300 до 1000, где наблюдается различие в результате расчета ΠR^2 в зависимости от числа Pr, величина отрезка колеблется от $0{,}98 \cdot 10^{-2}$ до $1 \cdot 10^{-2}$. Для этого интервала расчетная формула величины отрезка имеет вид

$$b_1 = \exp(-2{,}3\,\mathrm{Pr}/(0{,}5013\,\mathrm{Pr} - 1{,}3)). \qquad (5.1.30)$$

Зависимость ΠR от безразмерной длины выражается следующей формулой:

$$\Pi R = \sqrt{1{,}55\bar{x}_1 + b}. \qquad (5.1.31)$$

Формула для среднего коэффициента массоотдачи в жидкую фазу с учетом (5.1.30) и (5.1.31) принимает вид

$$\beta_{\text{ср}} = 1{,}25\frac{u_0^{0,5}D^{0,5}}{b^{0,5}}\sqrt{1 + 0{,}65\frac{b_1\delta_p\mathrm{Pe}}{b}}, \qquad (5.1.32)$$

где Pe = RePr.

Поскольку изменение b_1 в широком интервале изменения числа Pr незначительно, в дальнейшем принято, что $b_1 = 10^{-2}$. С учетом этого формула (5.1.32) принимает вид

$$\beta_{\text{ср}} = 1{,}25\sqrt{\frac{u_0 D}{b}\left(1 + 0{,}65 \cdot 10^{-2}\frac{\delta_p\mathrm{Pe}}{b}\right)}. \qquad (5.1.33)$$

---

[1] Градиент концентрации необходимо рассчитывать по нормали к поверхности пленки, т.е. $j = D\,(dc/dn)$. Расчеты в связи с этим усложнялись, однако существенной разницы в конечных результатах не наблюдалось, так как $dc/dy \gg dc/dx$. Поэтому в дальнейшем средний коэффициент массоотдачи $\beta_{\text{ср}}$ рассчитывался по соотношению (5.1.29).

В формуле (5.1.33) b – некоторый параметр длины.

Если за характерный параметр принять длину орошаемого канала, то $b = l$ и формула (5.1.33) для гладкой пленки с учетом входного участка принимает следующий вид:

$$\beta_1 = 1{,}25\sqrt{\frac{u_0 D}{l}\left(1 + 0{,}65 \cdot 10^{-2}\,\frac{\delta_p \mathrm{Pe}}{l}\right)}. \qquad (5.1.34)$$

Формула (5.1.34), учитывающая развитие течения во входном участке, отличается от известных формул [67, 68] добавочным членом $\sqrt{1 + 0{,}65 \cdot 10^{-2}(\delta_p \mathrm{Pe})/l}$, учитывающим массообмен на входном участке. Влияние этого члена на коэффициент массоотдачи в жидкой фазе возрастает с увеличением чисел Re.

В работе [147] исследовано гравитационное течение волновой пленки жидкости и определены его волновые параметры. В частности, найдены волны, имеющие относительную амплитуду $\alpha = \frac{h_{\text{макс}} - h_{\text{мин}}}{h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}}}$ порядка единицы и длину волны порядка $\lambda_{\text{од}} = 30{,}5$ см в интервале чисел $\mathrm{Re}_L = (4U_0 h_0)/\nu$ от 900 до 6000. По форме волна имела вид такой, какой показан на рис. 5.1.1, *в*. Это одиночная волна, развивающаяся с расстоянием. По своему виду она схожа с ускоренным течением пленки жидкости на входном участке. Это дает основание сделать предположение о возможном сходстве также и в процессе массопереноса. В этом случае коэффициент массоотдачи будет изменяться по зависимости (5.1.33).

В качестве характерного параметра используется длина волны. Формула для массопередачи в жидкую фазу при этом предположении примет вид

$$\beta_{2b} = 1{,}25\,\frac{u_0^{0,5} D^{0,5}}{\lambda_{\text{од}}^{0,5}}\sqrt{1 + 0{,}65 \cdot 10^{-2}\,\frac{\delta_p \mathrm{Pe}}{\lambda_{\text{од}}}}, \qquad (5.1.35)$$

где $\lambda_{\text{од}}$ – длина волны, найденная в работе [147] и равная 30,5 см.

В главе 3 проведено исследование массоотдачи в жидкую пленку при волнообразовании. Для расчета коэффициента массоотдачи на длине волны (механизм полного перемешивания) формула имела вид (см. § 3.1, формула (3.1.23)).

$$\beta_1 = \beta_{3b} = 7{,}5 \exp(0{,}7\ \ln\alpha - 1{,}5)\,[1 + 1{,}25\,(h_0 \alpha n)^2]\,\sqrt{Du_0/\lambda} \qquad (5.1.36)$$

или при замене $u_0/\lambda = f/z$ преобразовывалась к виду (3.1.25).

Если происходит непрерывный рост диффузионного слоя по длине трубки, то формула для расчета коэффициента массоотдачи в жидкую пленку имела вид (см. § 3.2, формула (3.2.5))

$$\beta_{\text{ж}} = \beta_{4b} = (1{,}96/(\sqrt{1{,}6 - \alpha^2}))(1 + 1{,}25\,(h_0 \alpha n)^2)\,\sqrt{Du_0/l}. \qquad (5.1.37)$$

В действительности, как показано в § 3.1 и 3.2, наблюдается частичное перемешивание. В формулу, описывающую массообмен в пленке жидкости

при условии частичного перемешивания, должны входить соотношения вида (5.1.36) и (5.1.37) с соответствующими весовыми коэффициентами ρ_i, хотя точные величины этих коэффициентов неизвестны. Если предположить, что весовые коэффициенты для обоих случаев одинаковы, то формула для расчета коэффициента массоотдачи в жидкую фазу с учетом частичного перемешивания будет иметь вид

$$\beta_{5b} = \rho_1\beta_{3b} + \rho_2\beta_{4b} = 0{,}5\,(\beta_{3b} + \beta_{4b}). \qquad (5.1.38)$$

На входном участке с ускоренным течением пленки жидкости волны отсутствуют. Расчет коэффициента массоотдачи на этом участке следует проводить по формуле (5.1.33), но вместо характерной длины в этой формуле следует брать длину входного участка по формуле (5.1.24) или (5.1.25) в зависимости от степени приближения к расчетным данным по формуле Нуссельта. После входного участка, по-видимому, следует участок, на котором происходит развитие волновых параметров. Длина его остается неизвестной. За участком развития расчет коэффициентов массоотдачи следует проводить в случае частичного перемешивания по формуле (5.1.38). Общая формула, учитывающая входной участок и частичное перемешивание, имеет вид

$$\beta_o = 1{,}25\,\frac{u_0^{0,5}D^{0,5}}{l_{вх}^{0,5}}\sqrt{1 + 0{,}65\cdot 10^{-2}\,\frac{\delta_p \mathrm{Pe}}{l_{вх}}\left(\frac{l_{вх}}{l}\right)} + 0{,}5(\beta_{3b} + \beta_{4b})\,\frac{l - l_{вх}}{l}. \qquad (5.1.39)$$

Расчет по формуле (5.1.39) проводился с использованием длины входного участка, определяемой по (5.1.25).

На рис. 5.1.7 показаны результаты расчета по формулам (5.1.34) – (5.1.39). Линии *9* и *10* соответствуют верхнему и нижнему интервалам разброса экспериментальных данных, полученных различными исследователями [79, 146, 148–156] в широком интервале чисел Re_L. Результаты расчета по формуле (5.1.36) с учетом волновых характеристик [35], как показано на рисунке, соответствуют верхнему интервалу разброса экспериментальных данных. До $\mathrm{Re}_L = 4q/\nu = 300$ значения, вычисленные по формуле (5.1.36) с учетом длины одиночной волны [147] (линия *7*), находятся в соответствии с экспериментальными данными; выше $\mathrm{Re}_L = 300$ наблюдается занижение расчетных коэффициентов массоотдачи. Аналогичная картина, но до меньшего числа Рейнольдса ($\mathrm{Re}_L = 100$), наблюдается при вычислениях по формуле (5.1.35) (линия *6*), полученной по результатам расчета входного участка течения одиночной волны, и по формуле (5.1.37) (линия *2*), найденной в условиях волнообразования по модели прорастания диффузионного слоя. Интервал согласованности экспериментальных данных и вычисленных по формуле (5.1.34) для входного участка (линейный размер равен длине трубки) меньше и составляет $\mathrm{Re}_L = 4q/\nu = 80$. Результаты расчета по формулам (5.1.38) и (5.1.39) (линии *3*, *5*) согласуются с экспериментальными данными в широком интервале чисел Re.

На рис. 5.1.8 результаты расчета по этим формулам сравнены с различными данными исследователей. Удовлетворительная согласованность тео-

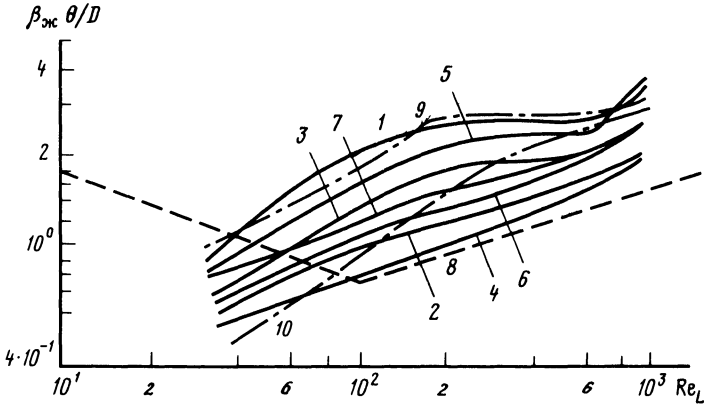


Рис. 5.1.7. Зависимости $\beta_ж\,\theta/D$ от $Re = 4q/\nu$, рассчитанные по различным формулам

1 – формула (5.1.36) при использовании волновых параметров [35]; *2* – формула (5.1.37); *3* – формула (5.1.38); *4* – формула (5.1.34); *5* – формула (5.1.39); *6* – формула (5.1.35); *7* – формула (5.1.36) при использовании величины одиночной волны [147]; *8* – расчет по формулам из работ [67] и [68]; *9*, *10* – соответственно верхний и нижний пределы разброса экспериментальных данных [65]

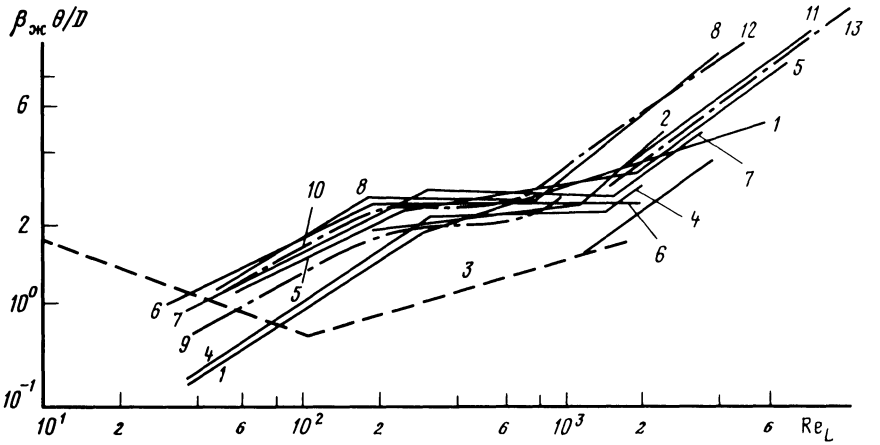


Рис. 5.1.8. Зависимость безразмерного коэффициента массоотдачи $\beta_ж\,\theta/D$ от числа $Re_L = 4q/\nu$ по экспериментальным данным различных исследователей

1 – расчет по формуле из работы [148]; *2* – экспериментальные данные [149], пересчитанные с 25 °С, длина канала $l = 1{,}14$ м, $d = 0{,}025$ м; *4* – расчет по формулам из работ [151, 154], $d = 0{,}026$ м; *5* – экспериментальные данные [152], пересчитанные с 14 °С, $l = 2{,}5$ м, $d = 0{,}048$ м; *6* – расчет по формулам из работы [153], $l = 0{,}57$ м; *7* – экспериментальные данные [77], $l = 0{,}5$ м, $d = 0{,}022$ м, пересчитанные с 15 °С; *8* – экспериментальные данные [155], $l = 0{,}57$ м, $d = 0{,}026$ м; пунктирная линия *3* – расчет по уравнениям [67] и [68] для $l = 0{,}57$ м. Пересчет к температуре 20 °С проводили в работе [79, 86] на основании зависимости $\beta\theta/D = A\,Pr^{1/2}$, где $A = 3{,}76$ (левая ветвь), $A = 2$ (правая ветвь); штрихпунктирные линии *9*, *10* – расчет по формулам (5.1.38), (5.1.39) соответственно; *11* – экспериментальные данные [156]; штрихпунктирная линия *12* – расчет по формуле (5.2.15) для турбулентного режима при $b = l$; штрихпунктирная линия *13* – расчет по формулам (5.2.16), (5.2.23), (5.2.28) для турбулентного режима

рии и эксперимента дает основание рекомендовать формулы (5.1.38) и (5.1.39) для расчета коэффициента массоотдачи в жидкой фазе в высокоэффективных массообменных аппаратах с орошаемой стенкой в интервале чисел $\mathrm{Re} = 4q/\nu$ от 40 до 1600, т.е. позволяет теоретически и без привлечения экспериментальных данных рассчитывать высокоэффективные массообменные аппараты с орошаемой пленкой. Точность расчета по этим формулам трудно определить, так как эти линии лежат на середине интервала изменения экспериментальных данных различных авторов, исследовавших абсорбцию CO_2 водой. В то же время трудно отдать предпочтение тем или иным экспериментальным данным.

§ 5.2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ. ОДНОФАЗНАЯ ЗАДАЧА

Движение жидкости или газа при больших числах Рейнольдса, известное как турбулентное течение, является устойчивым относительно усредненных по времени значений скорости, концентрации, температуры и давления. В действительности же все эти величины претерпевают нерегулярные изменения. Поэтому для окончательного и логически обоснованного решения проблемы турбулентного движения требуется примененеие статистической механики. Однако такая задача, являясь более перспективной в связи с тем, что опирается на более близкую к действительности модель турбулентности, остается математически сложной по сравнению с другими известными задачами, решаемыми статистической механикой, так как природа основных параметров, и особенно их функции распределения, до настоящего времени неизвестны.

Развитие статистической природы турбулентности обязано прежде всего известным работам Тейлора, Гейзенберга, Колмогорова (см. [157]). Но и в этих работах рассмотрена только простейшая форма турбулентности, а именно изотропная турбулентность. Проблема анизотропной турбулентности, имеющая большую связь с практическими задачами, остается и до нашего времени менее разработанной.

Обычно при математическом исследовании турбулентное течение разлагают на усредненные и пульсационные движения. Например, скорость, давление, температуру и концентрацию представляют так:

$$u = \bar{u}_0 + u'; \; v = \bar{v} + v'; \; p = \bar{p} + p'; \; c = \bar{c} + c'.$$

При разложении каждой актуальной величины, входящей в уравнение Навье–Стокса, и проведении операции усреднения получается уравнение для турбулентного движения. Приведем такой переход на примере плоского течения. Уравнения Навье–Стокса и конвективной диффузии для плоского случая с учетом гравитации имеют вид

$$\rho\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}.$$

Заменив в этой системе уравнений все актуальные величины (u, v, p.,c) суммами усредненных и пульсационных составляющих, предполагаем при этом постоянными величинами физические константы среды μ, p, D. Если принять во внимание, что усредненное движение стационарно и эффекты молекулярного обмена импульсом и веществом малы по сравнению с аналогичными эффектами молярной природы, присутствующими за счет турбулентных пульсаций, а также использовать основное положение теории пограничного слоя $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$, то систему уравнений (а) для турбулентного течения можно привести к следующему виду:

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_{т})\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right]+g;$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}=0; \qquad (б)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(D+D_{т})\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\right],$$

где $\mu_{т}$, $D_{т}$ – коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии. При последующем анализе этой системы черточки над усредненными величинами будут опущены.

По поводу коэффициента турбулентной вязкости и его связи с длиной перемешивания l и полем усредненных скоростей имеются детальные исследования Прандтля, Тейлора и Кармана (см. [157]).

Анализ турбулентного течения для пленки жидкости и струи в последующих главах строится на уравнениях, записанных в виде (б).

В химической, нефтехимической промышленности и в смежных областях имеется ряд процессов массообмена, при которых перенос массы в пленку жидкости происходит при турбулентном ее течении. В частности, в различных областях техники широко известны абсорберы с падающей пленкой жидкости при больших нагрузках по жидкости, т.е. при турбулентном течении пленки жидкости.

Из-за математической сложности задачи в литературе отсутствуют даже какие-либо попытки расчета массообмена при турбулентном течении пленки жидкости с учетом входного участка. К тому же накопилось достаточно много работ, в которых проведены экспериментальные исследования массопередачи в жидкую пленку при турбулентном ее течении [77, 79, 148, 149, 152, 156, 158]. Как будет показано ниже, имеющееся разногласие в экспериментальных данных по зависимости коэффициента массоотдачи от числа Re на трубках разной длины может быть объяснено влиянием входного участка. В данном параграфе указанная задача решена методом, рассмотренным в § 5.1. При этом коэффициент массоотдачи в турбулентную пленку находился из решения системы уравнений Навье–Стокса и уравнения конвективной диффузии. Для плоского случая система уравнений,

описывающих данную задачу, имеет вид [63, 64, 130, 131, 133]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\sin\alpha_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{эф}\frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{эф}\frac{\partial c}{\partial y}\right); \tag{5.2.2}$$

при $y = 0$ $u = v = 0$; $c = 0$;

при $y = h(x)$ $\partial u/\partial y = 0$, $c = c_1$, (5.2.3)

где $\nu_{эф} = \nu + \nu_т$; $D_{эф} = D + D_т$; ν, D и $\nu_т$, $D_т$ – соответственно переносные коэффициенты для молекулярного и турбулентного режимов течения пленки жидкости; α_1 – угол наклона орошаемого канала.

Трудность в решении задачи (5.2.1) – (5.2.3) состоит в том, что толщина пленки $h(x)$, изменяющаяся с расстоянием от входа, неизвестна и находится из решения этой задачи.

При построении теории тепломассообмена при турбулентном течении пленки жидкости функции $\nu_{эф}$, $D_{эф}$ должны быть заданными.

В настоящем параграфе задается закон изменения этих функций. В частности, предполагается, что $\nu_{эф}$ и $D_{эф}$ изменяются по параболическому закону. Заметим, что это предположение не является жестким, суживающим общую постановку задачи, так как, по существу, любую функцию можно разложить в ряд, ограничиваясь двумя членами разложения. К тому же учитывается, что на стенке орошаемого канала и поверхности раздела пленка жидкости–газ величины коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии приближаются к молекулярным. С учетом сказанного функции $\nu_{эф}$ и $D_{эф}$ имеют вид

$$\nu_{эф}/\nu = 1 + \nu_т/\nu = 1 + TB(\eta - \eta^2);$$

$$D_{эф}/D = 1 + D_т/D = 1 + TD(\eta - \eta^2), \tag{5.2.4}$$

где

$$TB = a\delta_p^2/\nu;\ TD = TB\cdot \mathrm{Pr};\ \mathrm{Pr} = \nu/D;\ \eta = y/\delta_p; \tag{5.2.5}$$

a – константа пропорциональности, не зависящая от координат x, y.

Как и в работе [158], полагаем, что константа a зависит от следующих параметров:

$$a = a_0 f(\sigma,\ \rho, \nu, h_0, E, g), \tag{5.2.6}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – плотность жидкой пленки; ν – вязкость; h_0 – средняя толщина пленки жидкости при турбулентном течении; E – энергия диссипации.

Функциональная зависимость (5.2.6) образует комплекс вида

$$a = a_0\frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/2}, \tag{5.2.7}$$

где a_0 – коэффициент пропорциональности.

Если величина a_0 известна, то задача (5.2.1) – (5.2.3) определена однозначно. Как уже отмечалось выше, теория турбулентного переноса в пленке жидкости пока не в состоянии определить заранее этот коэффициент пропорциональности. В настоящем сообщении, как и в большинстве случаев, он находится на основании известных экспериментальных данных [77, 79, 148, 149, 152, 156, 158].

При решении системы (5.2.1) – (5.2.3) применялись безразмерные переменные в виде

$$u = u_0\bar{u};\ y = \delta_p\bar{y};\ c = c_1\bar{c};\ x = \delta_p \mathrm{Re}\bar{x};$$
$$p = p^0_{\text{ж}} + \rho_{\text{ж}}u_0^2\bar{p};\ \mathrm{Re} = \delta_p u_0/\nu. \tag{5.2.8}$$

Равенство $\partial u/\partial y = 0$ в граничном условии (5.2.3) предполагает отсутствие интенсивного взаимодействия пленки жидкости с газом, т.е. в случае однофазного потока.

Система (5.2.1) – (5.2.3) решена методом, подробно описанным в § 5.1. Приведем результаты расчета массопередачи в турбулентную жидкую пленку, опуская математические выкладки, изложенные в § 5.1. Средний коэффициент массоотдачи в жидкую пленку определим по формуле [63, 64, 130]

$$\beta_{\text{ср}} = \frac{1}{b}\int_0^{y_N} ucdy = \frac{u_0\delta_p}{b}\int_0^{y_N} ucdy = \frac{u_0\delta_p}{b}\,\Pi R\Big|_{x\,=\,b/\delta_p \mathrm{Pe}}, \tag{5.2.9}$$

где $\mathrm{Pe} = \mathrm{RePr}$; b – некоторый характерный размер длины, по которому следует проводить усреднение локального коэффициента массоотдачи.

Величины скорости и концентрации в формуле (5.2.9.), являющиеся функциями x и y, находятся из численного решения системы (5.2.1) – (5.2.3).

Результаты численного решения системы (5.2.1) – (5.2.3), найденные с помощью ЭВМ, аппроксимированы формулой

$$\beta_{1\text{т}} = (1{,}37 + 2{,}28\sqrt{TB})\,\frac{u_0^{1/2}D^{1/2}}{b^{1/2}}. \tag{5.2.10}$$

Уравнение (5.2.10) получено независимо от закона распределения эффективных коэффициентов турбулентного переноса в пленке жидкости. В настоящем параграфе анализ этого уравнения проведен для распределений коэффициентов турбулентного переноса, представленных формулами (5.2.4) и (5.2.5), а функциональная зависимость принята в виде комплекса (5.2.7). Отметим, что комплекс (5.2.7) может быть выражен в виде другой функциональной зависимости [159, 160]. В этом случае общий вид решения останется таким же, как представлено формулой (5.2.10), однако величина TB, а следовательно, и a в формуле (5.2.7) изменится.

Отличительной особенностью полученного решения (5.2.10) является то, что при его получении эффективные коэффициенты турбулентного переноса считались зависимыми от двух координат y и x, что ранее не учитывалось ни в одной работе.

Формула (5.2.10) с учетом (5.2.5) и (5.2.7) принимает вид

$$\beta_{1\,т} = \left[1{,}37 + 2{,}28 a_0^{1/2} \frac{\delta_p}{\nu^{1/2}} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/4}\right] \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{b^{1/2}}. \qquad (5.2.11)$$

Отметим, что при $TB \to 0$ формула (5.2.10) приближается к известной формуле для коэффициента массоотдачи в ламинарную гладкую пленку жидкости. Величина входного участка, согласно (5.2.8), имеет вид

$$b = l_{вх} = k\delta_p \mathrm{Re}, \qquad (5.2.12)$$

где k – некоторая постоянная величина.

Подставив (5.2.12) в (5.2.11), получим

$$\frac{\beta_{2\,т}}{D^{0,5}} = \frac{A\nu^{1/2}}{\delta_p} + B\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/4}, \qquad (5.2.13)$$

где $A = 1{,}37/k^{1/2}$ и $B = 2{,}28\,(a_0/k)^{1/2}$. (5.2.14)

Чтобы выразить энергию диссипации E через среднюю скорость u_0 и турбулентную толщину пленки жидкости h_0, используем соотношение $E = gu_0$. Известен ряд формул, аппроксимирующих u_0 и h_0 для турбулентного режима [161]. С помощью формул, найденных в работе [37], соотношения (5.2.11) и (5.2.13) приводятся к виду

$$\frac{\beta_{1\,т}}{D^{1/2}} = \left[1{,}37 + 2{,}28 a_0^{1/2} \delta_p \left(\frac{\rho g}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{u_0 h_0}{\nu}\right)^{3/4}\right] \frac{u_0^{1/2}}{b^{1/2}}; \qquad (5.2.15)$$

$$\frac{\beta_{2\,т}}{D^{1/2}} = A\frac{\nu^{1/2}}{\delta_p} + B\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} (g\nu)^{1/2} \left(\frac{u_0 h_0}{\nu}\right)^{3/4}, \qquad (5.2.16)$$

где A и B по-прежнему определены формулами (5.2.14).

Из формул (5.2.15) и (5.2.16) следует, что коэффициент массоотдачи находится в обратно пропорциональной зависимости от σ. Аналогичная зависимость была доказана теоретически в § 3.1 для случая массообмена при волновом режиме стекания пленки жидкости.

Формулы (5.2.15) и (5.2.16) позволяют рассчитывать массообмен в турбулентную пленку в трубке конечной длины с учетом входного участка. При бесконечном удалении от оросителя, что практически означает проведение массообмена в трубке достаточно большой длины, концентрация распределяемого компонента становится зависимой только от поперечной координаты и не зависимой от продольной. В этом случае уравнение конвективной диффузии принимает вид

$$\frac{d}{dy}\left[1 + TD(y - y^2)\right]\frac{dc}{dy} = 0, \qquad (5.2.17)$$

где $TD = TB \cdot \mathrm{Pr}$,

$$TB = a_1 \delta_p^2 / D; \quad a_1 = a_{01}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)\left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/2}. \qquad (5.2.18)$$

Таким образом, вид зависимости (5.2.18) такой же, как и на начальном участке, однако коэффициент пропорциональности может быть другим.

Граничные условия следующие:

$$c = c_p \text{ при } y = 0 \text{ (на поверхности)}; \tag{5.2.19}$$

$$c = c_1 \text{ при } y = 1 \text{ (на стенке)}; \tag{5.2.20}$$

$$c = c_1 \text{ при } y \to \infty \text{ (вдали от поверхности)}. \tag{5.2.21}$$

Для решения уравнения (5.2.17) достаточно двух граничных условий: одно граничное условие задается на поверхности пленки жидкости (например, условие (5.2.19)), другое – на некотором характерном расстоянии от поверхности раздела. В частности, таким характерным расстоянием может быть орошаемая поверхность канала, на которой задано граничное условие в виде, например, соотношения (5.2.20). Тогда решение дифференциального уравнения (5.2.17) с граничными условиями (5.2.19) и (5.2.20) предполагает, что диффундирующее вещество распределено по всей толщине пленки жидкости и, по существу, представляет одну модель массопереноса.

Если же задается граничное условие на достаточно большом удалении от поверхности раздела, что означает использование граничного условия в форме (5.2.21), то в такой постановке предполагается существование диффузионного пограничного слоя, в котором происходит основное изменение концентрации распределяемого компонента. В этом случае решение задачи (5.2.17) с граничными условиями (5.2.19) и (5.2.21) представляет другую модель массопереноса вещества.

Проведенный расчет показывает, что окончательный результат практически одинаков для обеих моделей и имеет вид

$$\beta_{3\text{т}} = A_1 \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/4} D^{1/2}, \tag{5.2.22}$$

или, выражая в формуле (5.2.22) энергию диссипации через среднюю скорость течения пленки жидкости, получим

$$\beta_{3\text{т}} = A_1 \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} (g\nu)^{1/2} \left(\frac{u_0 h_0}{\nu}\right)^{3/4} D^{1/2}, \tag{5.2.23}$$

где $A_1 = 0{,}63 a_0^{1/2}$.

Ввиду неопределенности коэффициента турбулентного переноса (формула (5.2.7)) в выражения для коэффициентов массопереноса для различных условий массообмена (5.2.15), (5.2.16) и (5.2.23) входят неизвестные постоянные коэффициенты. На данном уровне развития теории турбулентности указанные выше коэффициенты пока невозможно определить теоретически. По этой причине эти коэффициенты определены на основании экспериментальных данных [77, 79, 148, 149, 152, 156, 158]. Их численные значения имеют вид

$$a_0^{1/2} = 0{,}055; \quad k^{1/2} = 1{,}9; \quad a_0^{1/2} = 2{,}5 a_0^{1/2}. \tag{5.2.24}$$

Из формулы (5.2.12) с учетом коэффициентов (5.2.24) следует, что величина входного участка при турбулентном течении пленки жидкости равна

$$l_{вх} = k\delta_p \mathrm{Re} = 3{,}61\delta_p \frac{\delta_p u_0}{\nu} = 3{,}61 \frac{\delta_p^2}{h_0}\left(\frac{h_0 u_0}{\nu}\right), \qquad (5.2.25)$$

где δ_p принимается равной предельной толщине пленки, соответствующей переходу к турбулентному режиму. Это значение взято равным 0,053 см, что соответствует $\mathrm{Re} = 4q/\nu = 1500$. Величина турбулентной пленки жидкости h_0 в формуле (5.2.25) определялась по известной формуле из работы [37]:

$$h_0 = \frac{1}{400^{1/5}}\left(\frac{3\nu^2}{g}\right)^{1/3}\left(\frac{q}{\nu}\right)^{8/15}. \qquad (5.2.26)$$

Подставляя в формулу (5.2.25) значение h_0 из (5.2.26) и проведя необходимые расчеты для водяной пленки жидкости с учетом (5.2.24), получим

$$l_{вх} = 4{,}996\,(q/\nu)^{7/15}. \qquad (5.2.27)$$

Из формулы (5.2.27) следует, что величина входного участка при турбулентном течении пленки жидкости отличается от величины входного участка при ламинарном течении ((см. § 5.1, формулы (5.1.24) и (5.1.25)) не только коэффициентом перед числом Re, но и показателем степени при Re. Показатель степени при числе Re для турбулентного выражения равен 0,75; для ламинарного – 1, т.е. развитие всех величин (скорости, толщины пленки и т.д.) при турбулентном течении гравитационной пленки жидкости происходит медленее, чем при ламинарном[1]. Это объясняется особенностью турбулентного течения в пленке жидкости. На входе в канал пленка жидкости приобретает ускорение. Так как ускоренное течение более устойчиво против различных возмущений [119], то имеется участок, на котором наблюдается течение пленки жидкости, при котором масштаб турбулентности имеет порядок всей толщины пленки, так называемый участок с внешним масштабом турбулентности. И только пройдя этот участок, в пленке жидкости в полной мере развивается турбулентность с колмогоровским масштабом турбулентности, иногда называемым внутренним масштабом турбулентности [167–171]. Обычно расчет турбулентного массообмена проводится с учетом только внутреннего колмогоровского масштаба турбулентности, а следовательно, не учитывается зависимость турбулентных переносных свойств от продольной координаты x, что не может объяснить различного влияния длины орошаемого канала на коэффициент массоотдачи в турбулентную пленку. Вот почему при расчете турбулентного массобмена в пленку жидкости необходимо учитывать зависимость коэффициентов турбулентного переноса от продольной координаты, что и сделано при использовании зависимостей (5.2.4) и (5.2.5). Этим и объясняется более высокое значение величины входного участка при турбулентном течении пленки жидкости.

[1] Дополнительное влияние поверхностных сил на течение пленки жидкости [162–166] рассмотрено в § 5.3, 5.4.

Расчеты величины входного участка и приведенного коэффициента $\beta_i\theta/D$ абсорбции CO_2 турбулентной пленкой жидкости ($\theta = (\nu^2/q)^{1/3}$, $D_{CO_2} = 1{,}77 \cdot 10^{-5}$ см^2/с, $t = 20\,^\circ$C) для турбулентного течения при разных числах $Re_L = 4q/\nu$ представлены ниже:

$Re_L = 4q/\nu$	1600	3000	5000	8000	10000
$l_{вх}$, см	81,79	109,68	139,2	172,55	191,45
$l_1 = 57$ см, $\beta_{1т}\theta/D$	4,658	7,388	11,132	16,543	20,082
$l_2 = 250$ см, $\beta_{ср}\theta/D$	3,421	5,213	7,311	9,945	11,400
$l_3 = 600$ см, $\beta_{ср}\theta/D$	3,278	5,136	7,400	10,337	12,070

Видно, что уже при числах $Re_L = 1600$ величина входного участка становится значительной. При изменении числа Re_L почти на целый порядок входной участок изменился только в 2 раза.

Понятно, что если длина входного участка больше длины трубки, т.е. $l_{вх} > l$, то в качестве характерной длины в формуле (5.2.15) следует брать длину трубки, т.е. $b = l$. Если длина входного участка меньше длины трубки, т.е. $l_{вх} < l$, то расчет следует проводить по формуле

$$\beta_{ср} = \beta_{2т}\frac{l_{вх}}{l} + \beta_{3т}\frac{l - l_{вх}}{l}, \qquad (5.2.28)$$

где $\beta_{2т}$ и $\beta_{3т}$ определяются формулами (5.2.16) и (5.2.23) с учетом коэффициентов из формулы (5.2.24).

Эти два положения в расчете массообмена с учетом входного участка вполне очевидны. Действительно, если входной участок занимает всю длину трубки, то он, естественно, и будет характерным линейным размером, т.е. $b = l$.

Второе положение, записанное математически выражением (5.2.28), означает, что в том случае, когда $l > l_{вх}$, существует область, где процесс массопередачи определяется формулой (5.2.16), учитывающей входной участок, но эта область простирается не на всю трубку, а только на ее часть. Поэтому формула (5.2.16) умножается на долю $l_{вх}/l$, на которой массообмен определяется входным участком. На оставшемся участке трубки длиной $(l - l_{вх})$ входной участок не влияет на массообмен, поэтому массопередача определяется формулой (5.2.23) с учетом весового коэффициента, равного $(l - l_{вх})/l$.

При расчете приведенного коэффициента массопередачи в турбулентную пленку жидкости для различных трубок последние подобраны таким образом, чтобы проследить влияние входного участка на массообмен для трубок первого типа (l_1), длина которых с ростом числа Re остается меньше длины входного участка, и трубок второго типа (l_2, l_3), длина которых превосходит длину входного участка.

Из расчета следует, что коэффициенты массоотдачи для трубок первого типа превосходят таковые для трубок второго типа, причем с ростом числа Re_L это превышение возрастает. Так, при $Re_L = 1600$ превышение составило 26%, а при Re = 10000 – 76%. Одновременно интересен тот факт, что для трубок второго типа коэффициенты массоотдачи практически не зависят от длины трубок. Так, для трубок l_2 и l_3, для которых справедливо соотношение $l > l_{вх}$, коэффициенты массоотдачи остаются практически одинаковыми во всем интервале изменения числа Re_L.

Если обратиться к монографии по абсорбции [8], то можно выяснить, что при исследовании массоотдачи на одной и той же системе некоторые исследователи обнаружили влияние длины трубки на коэффициент массоотдачи, другие этого не обнаружили.

Теперь благодаря проведенному исследованию массоотдачи в пленке жидкости с учетом входного участка стало возможным объяснить такое различие соотношением длины трубки и входного участка, в результате чего создаются различные условия протекания процесса массопереноса.

На рис. 5.1.8 для турбулентного режима течения пленки жидкости $\mathrm{Re}_L > 1500$ проведено сопоставление расчетных значений коэффициентов массоотдачи по предложенным формулам с экспериментальными данными различных исследователей на трубках разной длины. Из рисунка следует, что коэффициенты массоотдачи для трубок первого типа значительно превосходят коэффициенты массоотдачи для трубок второго типа, и при этом коэффициенты массоотдачи не зависят от длины для трубок второго типа. Этот рисунок также иллюстрирует достаточно удовлетворительную согласованность теории и эксперимента и вместе с тем указывает на необходимость проведения процессов массообмена в более коротких трубках, для которых $l > l_{\text{вх}}$.

§ 5.3. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ. ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА
(влияние градиента поверхностного натяжения)

Наличие на поверхности касательного напряжения, создаваемого газовым потоком или за счет градиентов поверхностного натяжения $(d\sigma/dx)$, существенно изменяет интенсивность массопереноса. Этот вопрос до настоящего времени оставался неизученным, особенно на входном участке.

Система уравнений Навье–Стокса и уравнение конвективной диффузии, описывающие данную задачу, имеют вид [63, 162, 163]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\sin\alpha_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{5.3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{5.3.2}$$

Граничные условия для скорости и концентрации на стенке канала принимаются следующими:

$$\text{при } y = 0 \quad u = v = 0, \quad c = 0. \tag{5.3.3}$$

На входе канала концентрация в безволновой пленке жидкости принимается в следующем виде:

$$\text{при } x = 0 \quad c = 0; \tag{5.3.4}$$

а на поверхности раздела пленка жидкости–газ

$$\text{при } y = H(x) \quad c = c_1. \tag{5.3.5}$$

Если использовать в качестве граничного условия на поверхности раздела пленка жидкости–газ выражение для касательного напряжения в виде

$$\text{при } y = H(x) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0(x), \tag{5.3.6}$$

то, решив систему уравнений (5.3.1), (5.3.2) с граничными и начальными условиями (5.3.3)–(5.3.6), получим распределение полей скоростей, концентраций и величину коэффициента массоотдачи в пленку жидкости для случая течения пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком на поверхности раздела пленка жидкости–газ (задача I).

Если в качестве граничного условия на поверхности раздела пленка жидкости–газ использовать соотношение

$$y = H(x) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\sigma(x)}{dx}, \tag{5.3.7}$$

означающее появление дополнительных касательных напряжений на поверхности пленки жидкости за счет градиентов поверхностного натяжения $(d\sigma/dx)$, то решение системы уравнений (5.3.1), (5.3.2) с граничными и начальными условиями (5.3.3)–(5.3.5), (5.3.7) соответствует случаю, когда касательная сила на поверхности пленки жидкости уравновешивается градиентом поверхностного натяжения (задача II).

Исследование гидродинамики и массообмена в данной главе отличается от аналогичных исследований, проведенных в работах [164, 165], тем, что в настоящей главе при решении системы уравнений, подобной (5.3.1), (5.3.2), снят ряд приближений, примененных в работах [164, 165].

Система уравнений (5.3.1), (5.3.2) для задач I и II решалась методом, подробно изложенным в § 5.1.

Алгоритм, изложенный в § 5.1, применен для расчета на входном участке полей скоростей, концентраций и коэффициента массоотдачи в жидкую пленку в зависимости от числа Re, ширины щели пленочного распределителя, толщины пленки по длине орошаемого канала, касательного напряжения на границе раздела фаз.

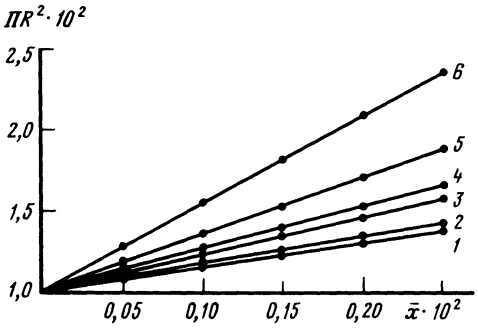
Коэффициент массоотдачи в пленку жидкости при условии, что сопротивление массопередачи сосредоточено только в жидкой фазе, определяется, подобно § 5.1, формулой

$$\beta_{\text{ср}} = \frac{1}{b} \int_0^{y_N(x)} u c dy = \frac{u_0 \delta_p}{b} \Pi R \Big|_{\bar{x}_1 = x/\delta_p \text{RePr}}. \tag{5.3.8}$$

На рис. 5.3.1 представлены результаты численного решения системы дифференциальных уравнений (5.3.1), (5.3.2) в виде зависимости $\Pi R = \beta_{\text{ср}} b/u_0\delta_p$ от безразмерной длины орошаемого канала $\bar{x}$ при различных значениях параметра B_i (B_1 для задачи I и B_2 для задачи II): $B_1 = \tau_0 h_0/\mu w_0$; $B_2 = (h_0/\mu w_0)(d\sigma/dx)$.

Эта зависимость аппроксимируется следующей формулой:

$$\Pi R = \sqrt{A_0 \bar{x}_1 + 0{,}01}, \tag{5.3.9}$$



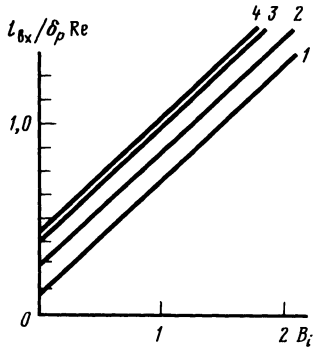


Рис. 5.3.1. Зависимость ΠR^2 от безразмерной длины канала $\bar{x}$ при различных B_i (i = 1, 2)

1 – B_i = 0; *2* – 0,1; *3* – 0,5; *4* – 0,8; *5* – 1,5; *6* – B_i = 3,0

Рис. 5.3.2. Зависимость безразмерной длины входного участка $l_{вх}/\delta_p \mathrm{Re}$ от B_i (i = = 1, 2) при различных H_1

1 – H_1 = 1,5; *2* – 2,0; *3* – 3,0; *4* – H_1 = 4,0

где

$$\lg A_0 = \frac{0{,}94B_i^{1/4} + 0{,}162}{3{,}92 - 1{,}53B_i^{1/4}} \quad \text{при} \quad B_i \geqslant 0{,}1; \tag{5.3.10}$$

$$A_0 = 1{,}68 \quad \text{при} \quad 0{,}02 \leqslant B_i \leqslant 0{,}1$$

(i = 1 соответствует задаче I; i = 2 – задаче II).

Соединяя (5.3.8) и (5.3.9), получим

$$\beta_{ср} = \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{b^{1/2}} A_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{10^{-2}\delta_p \mathrm{RePr}}{A_0 b}}, \tag{5.3.11}$$

где A_0 дано формулой (5.3.10).

В формулу (5.3.11) входит характерная длина b. В ряде случаев в качестве характерной длины может приниматься длина волны λ (§ 5.1), тогда формула (5.3.11) принимает вид

$$\beta_{ср} = \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{\lambda^{1/2}} A_0^{1/2} \sqrt{1 + (10^{-2}\delta_p \mathrm{RePr})/A_0\lambda}. \tag{5.3.12}$$

В случае, когда в качестве характерного размера длины используется длина трубки, формула (5.3.11) преобразуется к виду

$$\beta_{ср} = \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{l^{1/2}} A_0^{1/2} \sqrt{1 + (10^{-2}\delta_p \mathrm{RePr})/A_0 l}. \tag{5.3.13}$$

Система уравнений (5.3.1), (5.3.2) с граничными и начальными условиями для задач I и II описывает перенос вещества при пленочном массообмене. При замене концентрации (c) на температуру (t) в (5.3.1) –

(5.3.7) получим систему уравнений, описывающую распределение температуры и скоростей в пленке жидкости. Для того чтобы совпадение системы уравнений и граничных условий для теплообмена и массообмена было полным, замену температуры t через обезразмеренную температуру $\bar{t}$ следует провести по формуле $t = \bar{t}(t_s - t_w) + t_w$, где t_w, t_s –температура на стенке и на поверхности пленки соответственно. Решив эту систему, можно рассчитать коэффициент теплоотдачи в пленку жидкости, причем средний коэффициент теплоотдачи определим через тепловой поток на поверхность пленки жидкости. Опуская промежуточные выкладки, аналогичные тем, которые привели к формуле (5.3.11), приведем окончательную формулу для среднего коэффициента теплоотдачи (α_{cp}):

$$\frac{\alpha_{cp}}{\rho c_p} = \frac{u_0^{1/2} a^{1/2}}{b^{1/2}} A_0^{1/2} \sqrt{1 + (10^{-2}\delta_p \mathrm{RePr})/A_0 b}\,, \qquad (5.3.14)$$

где a – коэффициент температуропроводности; $\mathrm{Pr} = \nu/a$; $\mathrm{Re} = u_0\delta_p/\nu$; A_0 определяется формулой (5.3.10).

В безразмерном виде соотношение (5.3.14) можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}^{0,5}\mathrm{Pr}^{0,5}\left(\frac{\delta_p}{b}\right)^{0,5} A_0^{0,5}\sqrt{1 + \frac{0{,}01\delta_p \mathrm{RePr}}{A_0 b}}\,, \qquad (5.3.15)$$

где $\mathrm{Nu} = \alpha_{cp}\delta_p/\kappa$; κ – коэффициент теплопроводности.

Значение характерного размера длины в формулах (5.3.14) и (5.3.15) следует выбирать аналогично формулам (5.3.12) и (5.3.13) в зависимости от условий эксперимента. В частности, если процесс теплоотдачи происходит на длине волны, то $b = \lambda$, иначе $b = l$, где l – длина орошаемого канала.

При расчете коэффициента массоотдачи в ряде случаев необходимо знать величину входного участка $l_{вх}$ (см. § 5.1). За длину активного участка принималось то расстояние от входа, на котором рассчитанные профили скорости и толщины пленки жидкости отличались на величину ϵ от таковых, рассчитанных для случая гидродинамически стабилизированного течения.

На рис. 5.3.2 показано влияние коэффициента B_i на величину входного участка при различных величинах безразмерной ширины оросителя $H_1 = H(0)/\delta_p$ ($H(0)$ – ширина оросителя).

Аппроксимация этой зависиомсти представлена следующим выражением:

$$l_{вх} = [0{,}1B_i + \exp(2{,}3H_1/(20 - 28H_1))]\delta_p \mathrm{Re}. \qquad (5.3.16)$$

При $B_i = 0$ эта формула превращается в формулу, полученную ранее в § 5.1.

§ 5.4. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ. ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА

При наличии газового потока на величину коэффициента массоотдачи оказывает заметное влияние касательное напряжение, действующее на границе пленка жидкости–газ. Влияние газового потока на коэффициент массоотдачи с учетом входного участка до сих пор никем не рассматри-

валось, однако решение этой задачи имеет определенный теоретический и практический интерес.

Система уравнений, описывающих данную задачу, имеет вид [166]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\sin\alpha_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{эф}\frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{5.4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{эф}\frac{\partial c}{\partial y}\right). \tag{5.4.2}$$

Начальные и граничные условия для этой системы уравнений следующие:

при $x = 0$ $c = 0$, $u_н = f(y)$; (5.4.3)

при $y = 0$ $u = v = 0$, $c = 0$; (5.4.4)

при $y = H(x)$ $\partial u/\partial y = R_i$, $i = 1, 2, 3$, (5.4.5)

где индексы $i = 1, 2, 3$ соответствуют различным условиям задачи: так, при $i = 1$ $R_1 = \tau_0/\mu_{эф}$. Для других значений i решение задачи приведено в § 5.5.

В общем случае касательное напряжение на границе раздела (τ_0) является функцией расстояния от точки питания орошаемого канала. В этом параграфе используются средние значения этих величин, т.е. $\tau_0 = \text{const}$. Предполагается, что коэффициенты переноса изменяются по параболическому закону, т.е.

$$\frac{\nu_{эф}}{\nu} = 1 + TB\frac{1}{1-2m}(\eta^2 - 2m\eta); \tag{5.4.6}$$

$$\frac{D_{эф}}{D} = 1 + TD\frac{1}{1-2m}(\eta^2 - 2m\eta), \tag{5.4.7}$$

где $\eta = y/\delta_p$; $TB = a\delta_p^2/\nu$; $TD = \text{Pr} \cdot TB$; m – постоянная, определяющая положение максимума зависимостей (5.4.6) и (5.4.7).

Зависимости, представленные формулами (5.4.6) и (5.4.7), не обращаются в ноль, как это было для случая, рассмотренного в § 5.2, а принимают конечное значение, т.е. рассмотрен более общий случай.

Как и в § 5.2, функциональную зависимость для величины, характеризующей турбулентность, представим в виде комплекса

$$a = a_0\frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{h_0^3E^3}{g\nu}\right)^{1/2}, \tag{5.4.8}$$

где a_0 – коэффициент пропорциональности; σ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – плотность жидкой пленки; ν – вязкость; h_0 – средняя толщина пленки жидкости при турбулентном течении; E – энергия диссипации.

При решении системы уравнений (5.4.1), (5.4.2) с начальными и граничными условиями (5.4.3)–(5.4.5) используем следующие безразмерные

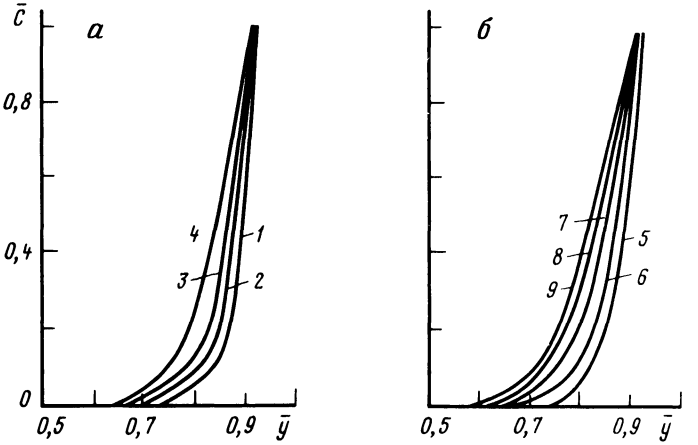


Рис. 5.4.1. Профиль концентрации распределяемого вещества на различных расстояниях от кромки оросителя при $TB = 10^{-3}$ (*а*) и 10^{-2} (*б*)

1 – $\bar{x} = 10^{-3}$; *2* – $2 \cdot 10^{-3}$; *3* – $3 \cdot 10^{-3}$; *4* – $5{,}5 \cdot 10^{-3}$; *5* – 10^{-3}; *6* – $2 \cdot 10^{-3}$; *7* – $3 \cdot 10^{-3}$; *8* – $4{,}5 \cdot 10^{-3}$; *9* – $5{,}5 \cdot 10^{-3}$. Pr = 800; $B_i = 0{,}3$; $H_1 = 3$

переменные:

$$u = u_0\bar{u}; \quad y = \delta_p\bar{y}; \quad c = c_1\bar{c}; \quad x = \delta_p \mathrm{Re}\bar{x}; \qquad (5.4.9)$$

$$p = p_0 + \rho u_0^2\bar{p}; \quad \mathrm{Re} = \delta_p u_0/\nu.$$

В ряде случаев безразмерная продольная переменная принималась в виде $x = \delta_p \mathrm{RePr}\bar{x}$.

Система уравнений (5.4.1), (5.4.2) с граничными и начальными условиями в обезразмеренном виде решена методом, описанным в § 5.1. В результате решения этой системы уравнений получено распределение профилей скоростей и концентраций в пленке жидкости, а значения последних затем использовались для определения среднего коэффициента массоотдачи в жидкой пленке по формуле [166]

$$\beta_{\mathrm{ср}} = \frac{1}{b}\int_0^{y_N} u(x, y)\, c\,(x, y)\, dy = \frac{u_0\delta_p}{b}\int_0^{y_N} \bar{u}\,\bar{c}\, d\bar{y} =$$

$$= \frac{u_0\delta_p}{b}\,\Pi R\Big|_{x=b/\delta_p \mathrm{RePr}}, \qquad (5.4.10)$$

где b – некоторый характерный элемент длины, по которому следует проводить усреднение локального коэффициента массоотдачи.

Характерные профили концентрации распределяемого вещества по длине орошаемого канала показаны на рис. 5.4.1, *а, б*. Из рисунка следует, что основное изменение концентрации распределяемого вещества по длине орошаемого канала сосредоточено в слое, непосредственно прилегающем к поверхности пленки жидкости.

Представляет наибольший интерес и имеет практическую значимость изменение безразмерного коэффициента массоотдачи по длине орошае-

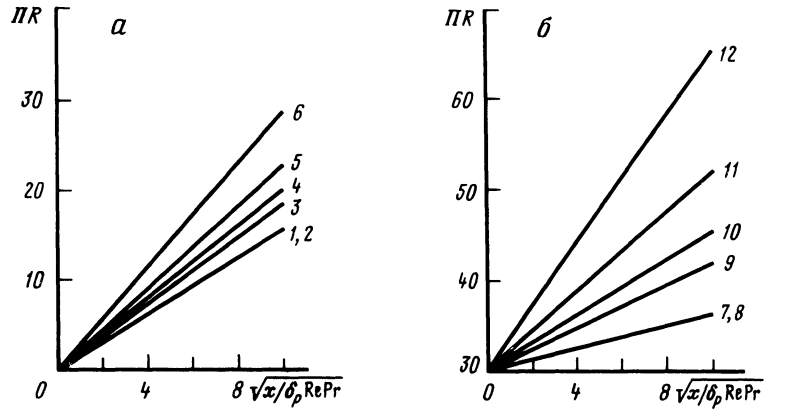


Рис. 5.4.2. Зависимость ΠR от $\sqrt{x/\delta_p \mathrm{RePr}}$ для $TB = 10^{-2}$ (*а*) и 1 (*б*) при различных значениях B_i

1, 7 – 0; *2* – 0,1; *3, 9* – 0,5; *4, 10* – 0,8; *5, 11* – 1,5; *6, 12* – 3,0

мого участка. Такая зависимость представлена на рис. 5.4.2, *а, б,* из которого следует, что с увеличением числа TB, характеризующего изменение турбулентных коэффициентов переноса поперек пленки, безразмерный коэффициент массоотдачи $\Pi R = \beta_{\mathrm{ср}} b/u_0\delta_p$ возрастает. Он также возрастает с увеличением числа B_i:

$$B_i = \delta_p R_i/u_0, \quad R_1 = \tau_0/\mu_{\mathrm{эф}}, \; i = 1, 2, 3. \tag{5.4.11}$$

Здесь индекс i, как уже указывалось, соответствует различным условиям задачи.

Решение задачи найдено с использованием формул (5.4.6) и (5.4.7) при значениях m, соответственно равных 0,4 и 0,6. Существенных различий при этом в решениях задачи не наблюдалось.

Численные значения коэффициента массоотдачи для различных значений параметров TB и B_i и на различном расстоянии от оросителя аппроксимированы следующей формулой:

$$\beta_{\mathrm{ср}} = \frac{u_0\delta_p}{b}(1 + 1{,}66\sqrt{TB})\, A_0^{1/2}\sqrt{\bar{x}}, \tag{5.4.12}$$

где

$$\bar{x} = b/\delta_p \mathrm{RePr}, \quad TB = a\delta_p^2/\nu. \tag{5.4.13}$$

Отметим, что формула (5.4.12), как и (5.2.10) (см. § 5.2), справедлива для любой функциональной зависимости для коэффициентов турбулентного обмена. Далее расчет проведен для функциональной зависимости, данной формулой (5.4.8), следовательно, величина a определяется по формуле (5.4.8), а A_0 находится из следующего соотношения:

$$\lg A_0 = (0{,}88B_i^{1/4} + 0{,}33)/(3{,}92 - 1{,}53B_i^{1/4}) \text{ при } B_i \geqslant 0{,}12; \tag{5.4.14}$$

$$A_0 = 1{,}88 \text{ при } 0 \leqslant B_i \leqslant 0{,}12.$$

При $TB \to 0$ и $B_i \to 0$ формула (5.4.12) приближается к известной формуле для коэффициента массоотдачи в ламинарную пленку жидкости. При $B_i \to 0$ и различном TB эта формула превращается в формулу, полученную в § 5.2 для случая гравитационного стекания пленки жидкости при турбулентном режиме ее течения, т.е. в отсутствие интенсивного взаимодействия газового потока с турбулентной пленкой жидкости.

С учетом (5.4.8), (5.4.13) формула (5.4.12) приобретает вид

$$\beta_{ср} = \left[1 + 1{,}16 a_0^{1/2} \frac{\delta_p}{\nu^{1/2}} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/4}\right] \frac{u_0^{1/2} D^{1/2} A_0^{1/2}}{b^{1/2}}. \quad (5.4.15)$$

Входной участок, как и в § 5.2, определяется из соотношения

$$l_{вх} = k\delta_p \mathrm{Re}. \quad (5.4.16)$$

Коэффициент массоотдачи с учетом входного участка определяется из формулы (5.4.15) после замены в ней величины b на величину входного участка из соотношения (5.4.16). В этом случае формула (5.4.15) принимает следующий вид:

$$\frac{\beta_{ср}}{D^{1/2}} = \frac{A\nu^{1/2}}{\delta_p} + B\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2}\left(\frac{h_0^3 E^3}{g\nu}\right)^{1/4}, \quad (5.4.17)$$

где

$$A = (A_0/k)^{1/2}; \quad B = 1{,}16(A_0 a_0/k)^{1/2}. \quad (5.4.18)$$

Отметим, что формула (5.4.17) по внешнему виду совпадает с формулой (5.2.13), полученной для гравитационного стекания пленки жидкости при турбулентном режиме ее течения. Существенное отличие наблюдается в выражениях для коэффициентов A и B, приведенных в (5.4.18). Однако при $R_i \to 0$ идентичность наблюдается и в коэффициентах A и B.

Если длина начального участка больше длины трубки, то характерным линейным размером является длина трубки, т.е. $b = l$.

При расчете коэффициента массоотдачи по формуле (5.4.17) следует иметь в виду, что $k = 3{,}61$; $a_0^{1/2} = 0{,}055$; $\delta_p = 0{,}0053$ см, A_0 определяется по формуле (5.4.14).

§ 5.5. ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАССООБМЕНА

Если касательное напряжение на поверхности пленки жидкости создается только градиентом поверхностного натяжения, то значение градиента скорости в граничном условии (5.4.5) принимает вид

$$R_2 = d\sigma/dx\mu_{эф}. \quad (5.5.1)$$

Естественно, может быть общий случай, при котором касательное напряжение на поверхности пленки жидкости создается как газовым потоком, так и градиентом поверхностного натяжения. В этом случае

$$R_3 = (\tau_0 + d\sigma/dx)\mu_{эф}. \quad (5.5.2)$$

Как легко заметить, специального решения этих задач не требуется, так как они решены в общем случае в § 5.4. Общее решение задачи представлено формулой (5.4.17) и коэффициентами A и B в (5.4.18).

Степень влияния градиента поверхностного натяжения на коэффициент массоотдачи зависит от величины A_0, которая находится по формуле (5.4.14), где

$$B_i = \delta_p R_i / u_0, \tag{5.5.3}$$

а R_i определяется по одной из формул – (5.5.1) или (5.5.2).

Характер влияния коэффициента B_i, представленного формулой (5.5.3), на безразмерный коэффициент массоотдачи показан на рис. 5.4.2, *а, б.*

Порядок расчета коэффициента массоотдачи с учетом градиента поверхностного натяжения такой же, как и для случая массообмена при турбулентном течении пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком, описанного в § 5.4.

Глава 6

СОВМЕСТНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АБСОРБЦИИ

§6.1. ПЛЕНКА ЖИДКОСТИ НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ СТАБИЛИЗИРОВАННОМ УЧАСТКЕ. ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА

Процессы массообмена часто сопровождаются теплообменом. Это явление имеет место, например, при абсорбции аммиака водой [8]. Данный процесс часто встречается в химической технологии. В холодильной технике процесс совместного тепломассопереноса занимает также значительное место, например в холодильных абсорбционных машинах [172], технологический процесс которых основан на абсорбции водными растворами бромистого лития или хлористого кальция однокомпонентного газа.

Существуют теоретические расчеты совместного тепло- и массообмена при абсорбции гравитационно стекающей пленки жидкости без учета влияния газового потока или градиента поверхностного натяжения на эффективность тепломассообмена [175]. Между тем такие факторы, как поток газа в трубке или наличие градиента поверхностного натяжения на границе пленка–газ (пар), значительно моут изменить эффективность процесса тепломассообмена. В этой связи рассмотрение данной задачи с учетом газового потока или градиента поверхностного натяжения на границе пленка жидкости–газ представляет практический и теоретический интерес.

Математически данная задача записывается в следующем виде:

$$g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \tag{6.1.1}$$

$$u(y) \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}; \tag{6.1.2}$$

$$u(y)\frac{\partial t}{\partial x} = a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \qquad (6.1.3)$$

$$x = 0 \quad t = t_0, \quad c = c_0; \qquad (6.1.4)$$

$$y = 0 \quad u = 0, \quad t = t_w, \quad c = c_1; \qquad (6.1.5)$$

$$y = \delta_p \quad c = dt + b; \qquad (6.1.6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\kappa}{\Delta HD}\frac{\partial t}{\partial y}; \qquad (6.1.7)$$

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0, \quad \text{или} \quad \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\sigma}{dx}, \qquad (6.1.8)$$

где a – коэффициент температуропроводности; δ_p – толщина пленки; κ – коэффициент теплопроводности; ΔH – теплота фазового перехода; d и b – заданные константы.

Система уравнений (6.1.1)–(6.1.3) с граничными и начальными условиями (6.1.4)–(6.1.8) описывает процесс тепломассопереноса в пленке жидкости при неизотермической асорбции при следующих предположениях [174]: 1) течение жидкости на гидродинамически стабилизированном участке ламинарное; 2) стенка изотермическая, непроницаемая для абсорбируемого вещества; 3) на границе раздела жидкость–газ (пар) имеет место состояние насыщенного для системы асборбируемое вещество–жидкий раствор; 4) на границе раздела жидкость–газ (пар) действует касательное напряжение, создаваемое газовым потоком (τ_0) (задача I) или градиентом поверхностного натяжения ($d\sigma/dx$) см.уравнение (6.1.8) (задача II); 5) состояние насыщения описывается линейной зависимостью (6.1.6), причем коэффициенты d и b определяются давлением пара.

Данная задача отличается в своей постановке от задачи, исследованной в работе [175], тем, что в ней учтено влияние на эффективность тепломассообмена газового потока или градиента поверхностного натяжения. Как показано из решения, проведенного в этом параграфе, эти эффекты могут значительно повлиять на коэффициенты массо- и теплооотдачи.

Поскольку уравнения гидродинамики, переноса тепла и массы являются независимыми, найдем сначала из решения уравнения (6.1.1) распределение скоростей на стабилизированном участке. Оно имеет вид

$$u(y) = \left(\frac{g\delta_p}{\nu} + T_i\right)y - \frac{g}{2\nu}y^2, \quad i = 1, 2, \qquad (6.1.9)$$

где $T_1 = \tau_0/\mu$, $T_2 = d\sigma/dx\,\mu$ – параметры задач I и II.

Найденный профиль скорости в пленке жидкости подставим в уравнения (6.1.2) и (6.1.3), затем решим эти уравнения методом Хевисайда–Карсона, для чего каждый член уравнений (6.1.2) и (6.1.3) умножим на $p\exp(-px)$ и полученные выражения проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$. Уравнения (6.1.2) и (6.1.3), начальные и граничные условия (6.1.4)–(6.1.8) в

изображениях Хевисайда–Карсона примут следующий вид:

$$\tilde{c}''(y) = \frac{u(y)}{D}\,[p\tilde{c} - p\tilde{c}_0]\,;$$

$$\tilde{t}''(y) = \frac{u(y)}{a}\,[p\tilde{t} - p\tilde{t}_0]\,; \qquad (6.1.10)$$

$$x = 0 \quad \tilde{t} = \tilde{t}_0, \quad \tilde{c} = \tilde{c}_0\,;$$

$$y = 0 \quad \tilde{t} = \tilde{t}_w, \quad \tilde{c} = \tilde{c}_1\,; \qquad (6.1.11)$$

$$y = \delta_p \quad \tilde{c} = d\tilde{t} + b, \quad k\frac{d\tilde{t}}{dy} = \frac{d\tilde{c}}{dy}, \qquad (6.1.12)$$

где $k = \kappa / \Delta HD$; $('')$ – дифференцирование по y.

Найдем решение уравнений (6.1.10) при условиях, что процесс тепломассопереноса определяется диффузионным слоем, прилегающим к поверхности пленки жидкости. Это позволяет заменить распределение скорости в пленке жидкости скоростью на поверхности, т.е. $u(y) = u_n$. Для удобства решения уравнений (6.1.10) введем новую переменную $\eta = \delta_p - y$. Решения этих уравнений в новой переменной примут вид

$$\tilde{c}(\eta) = A_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{u_n p}{D}}\,\eta\right) + A_2 \exp\left(\sqrt{\frac{u_n p}{D}}\,\eta\right) + \tilde{c}_0\,; \qquad (6.1.13)$$

$$\tilde{t}(\eta) = A_3 \exp\left(-\sqrt{\frac{u_n p}{D}}\,\eta\right) + A_4 \exp\left(\sqrt{\frac{u_n p}{D}}\,\eta\right) + \tilde{t}_0. \qquad (6.1.14)$$

Из условия, что функции для концентраций и температуры за пределами диффузионного слоя должны быть ограниченными, следует $A_2 = A_4 = 0$. Постоянные интегрирования определим из граничных условий (6.1.12). Они равны

$$A_1 = \frac{(d\tilde{t}_0 + b - \tilde{c}_0)\,k\sqrt{D/a}}{(k\sqrt{D/a} - d)}\,; \qquad (6.1.15)$$

$$A_3 = \frac{d\tilde{t}_0 + b - \tilde{c}_0}{k\sqrt{D/a} - a}\,.$$

Выражения для концентраций (6.1.13) и температуры (6.1.14) с учетом (6.1.15) примут вид

$$\tilde{c}(\eta) = \frac{(d\tilde{t}_0 + b - \tilde{c}_0)k\sqrt{D/a}}{k\sqrt{D/a} - d} \exp\left(-\sqrt{\frac{u_n p}{D}}\,\eta\right) + \tilde{c}_0\,;$$

$$\tilde{t}(\eta) = \frac{(d\tilde{t}_0 + b - \tilde{c}_0)}{(k\sqrt{D/a} - d)} \exp\left(-\sqrt{\frac{u_n p}{a}}\,\eta\right) + \tilde{t}_0. \qquad (6.1.16)$$

Опуская промежуточные вычисления, подробно изложенные в работе [174], приведем выражения для концентрации и температуры:

$$c(x,\eta)=\frac{(dt_0+b-c_0)k\sqrt{D/a}}{k\sqrt{D/a}-d}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{1}{Dx}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)}\right)\right];$$

$$t(x,\eta)=\frac{dt_0+b-c_0}{k\sqrt{D/a}-d}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{1}{ax}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)}\right)\right]. \qquad (6.1.17)$$

По найденным выражениям для (6.1.17) определим диффузионные и тепловые потоки к поверхности пленки жидкости. Они равны

$$j(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{dt_0+b-c_0}{(1-\Delta Hd/\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}})}\sqrt{\frac{D}{x}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)}, \qquad (6.1.18)$$

$$q(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{[(c_0-b)/d-t_0]\kappa}{(1-\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}}/\Delta Hd)}\sqrt{\frac{1}{ax}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)},$$

где $\mathrm{Lu}=a/D$ – число Льюиса.

Средние по длине l диффузионные и тепловые потоки можно получить, проинтегрировав уравнения (6.1.18) по x и разделив их на длину l :

$$I_{\mathrm{cp}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{dt_0+b-c_0}{(1-\Delta Hd/\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}})}\sqrt{\frac{D}{l}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)};$$

$$q_{\mathrm{cp}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{[(c_0-b)/d-t_0]\kappa}{(1-\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}}/\Delta Hd)}\sqrt{\frac{1}{al}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)}. \qquad (6.1.19)$$

На основании формул (6.1.19) представим интенсивность переноса массы и тепла в критериальном виде через числа Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_{g_i}=\frac{I_{\mathrm{cp}}l}{D\Delta c}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1-\Delta Hd/\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}})}\sqrt{\frac{l}{D}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)};$$

$$\mathrm{Nu}_{T_i}=\frac{q_{\mathrm{cp}}l}{\kappa\Delta t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1-\rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}}/\Delta Hd)}\sqrt{\frac{l}{a}\left(\frac{1}{2}\frac{g\delta_p^2}{\nu}+T_i\delta_p\right)}. \qquad (6.1.20)$$

Заметим, что формулы для диффузионного и теплового чисел Нуссельта в отсутствие газового потока ($T_1=0$) и градиента поверхностного натяжения ($T_2=0$) превращаются в известные зависимости, полученные ранее в работе [175] и положенные в основу расчета эффективности тепло-

массопереноса в холодильных абсорбционных машинах. Из полученных формул (6.1.18)–(6.1.20) следует, что интенсивность переноса массы и тепла существенно зависит как от касательного напряжения на границе пленки жидкости, так и от градиента поверхностного натяжения.

§ 6.2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО ПЛЕНОЧНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Как сказано ранее (§ 6.1), при неизотермической абсорбции процессы переноса вещества и энергии протекают совместно, что создает дополнительные трудности в расчетах коэффициентов массоотдачи (теплоотдачи), связанные с одновременным решением уравнений переноса вещества и энергии.

Ниже проведен расчет теломассообмена для наиболее часто встречающихся в различных областях техники и технологии контактных устройств, в которых реализуются следующие случаи течения волновой пленки жидкости: свободно стекающая под действием силы тяжести (модель 1); текущая по стенке с регулярной шероховатостью и взаимодействующая с газовым потоком (модель 2); находящаяся на внутренней поверхности вращающегося цилиндра (модель 3).

Несмотря на то что тепломассообмен в этих моделях протекает в различных гидродинамических и диффузионных условиях, уравнения переноса вещества в отсутствие источников членов и при пренебрежении энергией диссипации и диффузионным переносом энтальпии, записанной в векторной форме, имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (u\nabla)c = D\nabla\nabla c \ ; \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u\nabla)T = a\nabla\nabla T. \tag{6.2.2}$$

При решении системы уравнений (6.2.1) и (6.2.2) распределение скоростей задавалось таким же, как в главах 3 и 4 при решении задач, соответствующих моделям 1 и 3. Применялись те же граничные и начальные условия, кроме условий на поверхности, которые имеют существенное отличие. Как в §6.1, рассмотрен случай, когда на поверхности устанавливается состояние насыщения, описываемое линейной зависимостью вида (6.1.6). В случае нелинейной зависимости концентрации от температуры вся область разбивается на участки, которые аппроксимируются линейными соотношениями вида (6.1.6).

Кроме условия (6.1.6), на поверхности раздела используется условие типа (6.1.7), которые из-за особенности поверхности раздела в каждой из задач, соответствующих моделям 1 и 3, имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \left(\frac{\kappa}{\Delta HD}\right)\frac{\partial T}{\partial n}, \tag{6.2.3}$$

где n – нормаль к поверхности раздела жидкость–газ (пар).

Для каждой модели система уравнений (6.2.1) и (6.2.2) решена теми же методами, что и при изотермической абсорбции (см. главы 3 и 4). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид решения этих задач [63]:

$$\beta_{i\text{ТМ}} = \beta_i f_1; \tag{6.2.4}$$

$$\alpha_{i\text{ТМ}} = \alpha_i f_2, \tag{6.2.5}$$

где β_i , $i = 1, 2, 3$ – коэффициенты абсорбции для изотермической абсорбции и для моделей 1 и 3 (они получены в главах 3 и 4), а

$$f_1 = 1/(1 - \text{Ka}/\sqrt{\text{Lu}}),\ f_2 = 1/(1 - \sqrt{\text{Lu}}/\text{Ka}), \tag{6.2.6}$$

$\text{Lu} = a/D$ – число Льюиса, $\text{Ka} = \Delta H d/\rho c_p$ – число Кутателадзе, где ρ – плотность жидкости, c_p – теплоемкость, d представлено формулой (6.1.6).

Отметим, что добавочные множители f_1 и f_2 получены ранее в работах [172, 175]. В данной главе установлено, что эти множители сохраняют свое постоянное значение и при других гидродинамических условиях и режимах.

Таким образом, для того чтобы рассчитать коэффициенты массоотдачи (теплоотдачи) при неизотермической абсорбции, достаточно провести расчет коэффициентов абсорбции (теплоотдачи) при изотермических условиях и полученное выражение умножить на добавку f_1 или f_2. Например, формула для коэффициента массоотдачи в волновую пленку при неизотермической абсорбции (по модели полного перемешивания (3.1.25) имеет следующий вид:

$$\beta_{\text{ТМ}} = 7{,}5\sqrt{\frac{Df}{z}}\left[1 + \frac{5}{4}\left(h_0\frac{\alpha 2\pi}{\lambda}\right)^2\right]\exp(0{,}7\ln\alpha - 1{,}5)f_1, \tag{6.2.7}$$

где величина f_1 дана формулой (6.2.6).

§6.3. ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ ИСПАРИТЕЛЬНОМ ОХЛАЖДЕНИИ. ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА.

Рассмотрим процесс пленочного испарительного охлаждения в режиме нисходящего прямоточного движения газа и пленки жидкости, текущей по стенкам с регулярной шероховатостью [173]. Пленка жидкости под действием силы тяжести и гидродинамического взаимодействия с газовым потоком движется в канале. Температура жидкости на входе и вдали от поверхности раздела отличается от температуры жидкости на поверхности пленки. Испарившаяся с волновой поверхности пленки жидкость удаляется за счет конвективной диффузии в толщу газового потока. Предполагается, что в обеих фазах профили скорости можно описать многочленом второй степени, т.е. они близки к параболическому:

$$u_{\text{ж}} = A_1 + B_1\left(\frac{y}{y_{\text{гр}}}\right) + c_1\left(\frac{y}{y_{\text{гр}}}\right)^2; \tag{6.3.1}$$

$$u_г = A_2 + B_2\left(\frac{y-R}{y_{гр}-R}\right) + c_2\left(\frac{y-R}{y_{гр}-R}\right)^2,$$

где $y_{гр}$ – граница поверхности пленки жидкости; R – полуширина канала; индексы "ж", "г" относятся к жидкости и газу.

Неизвестные коэффициенты A, B, C в уравнениях (6.3.1) определяются с помощью граничных условий:

$$\begin{aligned}
&\text{при } y = 0 && u_ж = 0;\\
&\text{при } y = y_{гр} = y_0 && u_г = u_ж,\ \mu_ж \frac{\partial u_ж}{\partial y} = \mu_г \frac{\partial u_г}{\partial y};\\
&\text{при } y = R && \partial u_г / \partial y = 0,
\end{aligned} \qquad (6.3.2)$$

где μ – вязкость.

Используя известные выражения для расхода q в пленке жидкости и газа, определим коэффициенты A, B, C:

$$A_1 = 0; \quad B_2 = 0;$$

$$B_1 = 6\,\frac{\{q_ж[2(R-y_0)^2 + 3ky_0(R-y_0)] - q_г k y_0^2\}}{y_0(R-y_0)[4(R-y_0)+3ky_0]}; \qquad (6.3.3)$$

$$C_1 = 3\,\frac{\{-2q_ж(R-y_0)[(R-y_0)+3ky_0] + 3q_г k y_0^2\}}{y_0(R-y_0)[4(R-y_0)+3ky_0]};$$

$$A_2 = 3\,\frac{\{-q_ж(R-y_0)^2 + q_г y_0[2(R-y_0)+ky_0]\}}{y_0(R-y_0)[4(R-y_0)+3ky_0]};$$

$$C_2 = \frac{3[3q_ж(R-y_0) - 2q_г y_0]}{y_0[4(R-y_0)+3ky_0]},$$

где $k = \mu_г/\mu_ж$.

Тогда выражения (6.3.1) на волновой поверхности пленки с учетом (6.3.3) примут вид

$$u_ж = u_г = u_{гр} = \frac{3[2q_ж(R-y_0)^2 + q_г k y_0^2]}{y_0(R-y_0)[4(R-y_0)+3ky_0]}. \qquad (6.3.4)$$

Распределение температуры в пленке жидкости и испарившейся с волновой поверхности пленки влаги можно описать уравнениями

$$\frac{\partial T_ж}{\partial \tau} + u_{xж}\frac{\partial T_ж}{\partial x} + v_{yж}\frac{\partial T_ж}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T_ж}{\partial y^2}; \qquad (6.3.5)$$

$$\frac{\partial c_г}{\partial \tau} + u_{xг}\frac{\partial c_г}{\partial x} + v_{yг}\frac{\partial c_г}{\partial y} = D_г\frac{\partial^2 c_г}{\partial y^2}, \qquad (6.3.6)$$

где a и $D_г$ – коэффициенты температуропроводности и диффузии; c – концентрация.

При решении уравнений (6.3.5) и (6.3.6) принимали следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \qquad T_{ж} = T_{ж0},\ c_{г} = c_{г0}; \tag{6.3.7}$$

$$\text{при } y = y_0 \qquad \frac{\rho a c_p}{\Delta H}\frac{\partial T_{ж}}{\partial y} = D_{г}\frac{\partial c_{г}}{\partial y} \tag{6.3.8}$$

$$c_{г} = dT_{ж} + b,$$

где c_p – теплоемкость; ΔH – теплота фазового перехода; d, b – известные постоянные.

Вдали от поверхности раздела в жидкой и газовой фазах значения температуры и концентрации газа принимали равными температуре и концентрации на входе в канал:

$$\text{при } y = 0 \qquad T_{ж} = T_{ж0}; \qquad \text{при } y = R\ \ c_{г} = c_{г0}. \tag{6.3.10}$$

Следуя [116], предположим, что регулярная шероховатость на поверхности канала вызывает стоячие волны на поверхности пленки жидкости; процесс массопередачи сосредоточен в тонком слое около поверхности раздела; различие течений по гладкой и шероховатой поверхностям наблюдается только в области, примыкающей к стенке; уравнение поверхности задается в виде первой гармоники разложения в ряд Фурье волновой поверхности пленки, т.е. $y_0 = h_0(1 + \alpha\sin nx)$, где h_0 – средняя толщина пленки; α – амплитуда волновой поверхности; $n = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны). При этих предположениях уравнения (6.3.5), (6.3.6) в новых переменных $\eta = y - y_0$, $x_1 = nx$ с учетом (6.3.4) примут вид

$$u_{гр}(x_1)\frac{\partial T_{ж}}{\partial x_1} = \kappa_0\frac{\partial^2 T_{ж}}{\partial \eta^2};\ u_{гр}(x_1)\frac{\partial c_{г}}{\partial x_1} = D_0\frac{\partial^2 c_{г}}{\partial \eta^2}, \tag{6.3.11}$$

где $\kappa_0 = a/n$; $D_0 = D_{г}/n$.

Уравнения (6.3.11) после замены переменной

$$t = \int_0^{x_1}\frac{d\xi}{u_{гр}(\xi)} \tag{6.3.12}$$

преобразуются:

$$\frac{\partial T_{ж}}{\partial t} = \kappa_0\frac{\partial^2 T_{ж}}{\partial \eta^2};\ \frac{\partial c_{г}}{\partial t} = D_0\frac{\partial^2 c_{г}}{\partial \eta^2}.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$T_{ж} = T_q + T_l\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta/2\sqrt{\kappa_0 t}}\exp(-\vartheta^2)d\vartheta;$$

$$c_{г} = c_q + c_l\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta/2\sqrt{D_0 t}}\exp(-\vartheta^2)d\vartheta. \tag{6.3.13}$$

Константы интегрирования T_q, T_l, C_q, C_l определены с помощью граничных условий (6.3.7)–(6.3.10). Поток влаги, испарившейся с поверхности раздела, равен

$$j = -D_г \frac{dc_г}{dm} = -D_г \left[\frac{\partial c_г}{\partial y} \cos\theta - \frac{\partial c_г}{\partial x} \sin\theta \right], \qquad (6.3.14)$$

где $\theta = \operatorname{arctg}(dy_0/dx)$; m – вектор нормали.

С учетом (6.3.13) выражение (6.3.14) перепишется в виде

$$j = \frac{\sqrt{2}(dT_{ж0} + b - c_{г0})\sqrt{D_г u_0/\lambda}}{\sqrt{t}} f_1, \qquad (6.3.15)$$

где u_0 – среднерасходовая скорость жидкости; λ – длина волны; t определяется по (6.3.12); добавка f_1, учитывающая неизотермичность процесса, определяется в (6.2.6). Таким образом, добавка f_1, которая сохраняла постоянное значение в различных гидродинамических режимах (см. §6.2), остается также постоянной для другого, более сложного процесса, такого как тепломассообмен при испарительном охлаждении.

Средний коэффициент массоотдачи

$$\beta_{ср} = \int_0^{s_0} j dl / \Delta c \int_0^{s_0} dl, \qquad (6.3.16)$$

где s_0 – длина пути интегрирования.

Аппроксимируя результаты численного интегрирования формулы (6.3.16), с учетом (6.3.12) и (6.3.15) получим ($h_0/R = 0{,}01 \div 0{,}5$ и $q_г/q_ж = 10 \div 3500$):

$$\beta_{ср} = \sqrt{6}\sqrt{D_г u_0/\lambda}\,[0{,}458 + (q_г/q_ж)(8{,}8 \cdot 10^{-4} - 6{,}6 \cdot 10^{-3}(h_0/R) + 1{,}3 \cdot 10^{-2}(h_0/R)^2]\, f_1, \qquad (6.3.17)$$

где $q_г$, $q_ж$ – расходы газа и жидкой пленки; f_1 определяется в (6.2.6).

В ряде случаев в формуле (6.3.17) удобно заменить отношение u_0/λ на f/z, как это сделано в главе 3, где f – частота волн, z – безразмерная фазовая скорость. Для случая стоячих волн, как следует из главы 4 (см. §4.3), длина волны равна расстоянию между выступами s, т.е. $\lambda = s$. В соответствии с этим формула (6.3.17) будет определяться геометрическими размерами шероховатости.

§6.4. ТЕПЛОМАССООБМЕН В СИСТЕМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ СОВОКУПНОСТИ КАПЕЛЬ ИЛИ ПУЗЫРЬКОВ

Известен метод анализа совместного тепломассообмена на одиночной капле [172].

Проведем аналогичный анализ для совокупности капель или пузырьков, обтекаемых сплошной средой при нестационарном тепломассообмене [176]. Капли или пузырьки, участвующие в процессе тепломассообмена, в

общем случае имеют различные размеры. Рассмотрим процесс совместного тепломассообмена в каплях или пузырях, имеющих средний статистический радиус. Тем более для данного случая в работе [177] получено распределение скоростей в движущихся облаках капель или пузырьков в следующем виде:

$$v_{r,2} = \frac{3}{2}\frac{u_0}{W}\beta(1-\Phi^{5/3})(1-\eta^2)\cos\theta; \qquad (6.4.1)$$

$$v_{\theta,2} = \frac{3}{2}\frac{u_0}{W}\beta(1-\Phi^{5/3})(2\eta^2-1)\sin\theta, \qquad (6.4.2)$$

где

$$u_0 = \frac{2}{9}\frac{|\rho_2-\rho_1|gR^2}{\mu_1}; \quad W = 3+2\beta+2\Phi^{5/3}(1-\beta);$$

$\beta = \mu_1/(\mu_2+\gamma)$; ρ_i, μ_i – плотность и вязкость соответственно; γ – межфазная вязкость, обусловленная присутствием поверхностно-активных веществ и определяемая в [177]; R – среднестатистический радиус дисперсной фазы; Ф – объемная доля дисперсной фазы; $\eta = r/R$; r – радиальное расстояние; $i = 1$ относится к сплошной среде; $i = 2$ – к дисперсной фазе.

Распределения концентрации и температуры в дисперсной фазе найдены из решения уравнений переноса массы и тепла:

$$\frac{\partial\bar{c}_2}{\partial t} + v_{r,2}\frac{\partial\bar{c}_2}{\partial r} + \frac{v_{\theta,2}}{r}\frac{\partial\bar{c}_2}{\partial\theta} = D_2\Delta^2\bar{c}_2; \qquad (6.4.3)$$

$$\frac{\partial\bar{t}_2}{\partial t} + v_{r,2}\frac{\partial\bar{t}_2}{\partial r} + \frac{v_{\theta,2}}{r}\frac{\partial\bar{t}_2}{\partial\theta} = a_2\Delta^2\bar{t}_2, \qquad (6.4.4)$$

где $v_{r,2}, v_{\theta,2}$ определены по формулам (6.4.1) и (6.4.2);

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta};$$

D_2, a_2 – коэффициенты диффузии и температуропроводности.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на всей поверхности дисперсной фазы устанавливается состояние насыщения, которое сохраняется в течение всего процесса и подчиняется линейной зависимости, т.е..

$$\text{при } r = R \quad \bar{c}_2 = d_2\bar{t}_2 + b_2, \qquad (6.4.5)$$

где d_2, b_2 – заданные постоянные.

Граничные и начальные условия для решения уравнений (6.4.3) и (6.4.4) следующие:

$$\text{при } t = 0 \quad \bar{c}_2(r,\theta,0) = c_{20}; \quad \bar{t}_2(r,\theta,0) = t_{20}; \qquad (6.4.6)$$

при $r = R$ $D_2 \dfrac{\partial \bar{c}_2}{\partial r} = \dfrac{\kappa_2}{\Delta H} \dfrac{\partial \bar{t}_2}{\partial r}$, (6.4.7)

где κ_2 – коэффициент теплопроводности; ΔH – теплота фазового перехода. Кроме того,

$$\frac{\partial \bar{c}_2(r, 0, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{c}_2(r, \pi, t)}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial \bar{t}_2(r, 0, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{t}_2(r, \pi, t)}{\partial \theta}. \tag{6.4.8}$$

Условие (6.4.8) означает, что верхняя и нижняя точки капли или пузырька соприкасаются с чистым раствором.

Вдали от поверхности раздела концентрация и температура равны первоначальным, т.е.

$$\bar{c}_2 = c_{20}; \quad \bar{t}_2 = t_{20}. \tag{6.4.9}$$

После замены переменных $\xi_2 = y/R, y = r - R, \tau = tD_2/R^2, c_2 = \bar{c}_2/c_{20}, \bar{t}_2 = \bar{t}_2/t_{20}$ и при предположении, что основное сопротивление переноса вещества и тепла сосредоточено в пограничном слое, величина которого много меньше радиуса дисперсной частицы, т.е. $|y|/R \ll 1$, уравнения (6.4.4) и (6.4.3), граничные и начальные условия (6.4.5) – (6.4.9) примут вид:

$$\frac{\partial c_2}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \mathrm{Pe}_{эф} \xi_2 \cos\theta \frac{\partial c_2}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} \mathrm{Pe}_{эф} \sin\theta \frac{\partial c_2}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi_2}; \tag{6.4.10}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \mathrm{Pe}_{эф} \xi_2 \cos\theta \frac{\partial t_2}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} \mathrm{Pe}_{эф} \sin\theta \frac{\partial t_2}{\partial \theta} = \mathrm{Lu} \frac{\partial^2 t_2}{\partial \xi_2^2}; \tag{6.4.11}$$

при $\tau = 0$ $c_2(y, \theta, 0) = 1$, $t_2(y, \theta, 0) = 1$; (6.4.12)

вдали от поверхности раздела $(y \to -\infty)$

$$c_2(-\infty, \theta, \tau) = 1; \quad t_2(-\infty, \theta, \tau) = 1; \tag{6.4.13}$$

при $y = 0$ $c_2 = \bar{d}_2 t_2 + \bar{b}_2$; $A_2 \dfrac{\partial t_2}{\partial y} = \dfrac{\partial c_2}{\partial y}$, (6.4.14)

где

$$\mathrm{Pe}_{эф} = \frac{2\mathrm{Ru}_0 L}{D_2}; \quad \mathrm{Lu} = a_2/D_2; \quad A_2 = \frac{\kappa_2 t_{20}}{\Delta H D_2 C_{20}};$$

$$\bar{d}_2 = t_{20} d/c_{20}; \quad \bar{b}_2 = b_2/c_{20}; \quad L = \beta(1 - \Phi^{5/3})/W. \tag{6.4.15}$$

Введем новые переменные $\eta = \xi_2 g(\theta)$, $\sigma = \sigma(\theta, \tau)$, причем неизвестные функции $g(\theta)$ и $\sigma(\theta, \tau)$ определим из следующих дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{3}{4} \mathrm{Pe}_{эф} \sin\theta \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = g^2(\theta);$$

$$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} g(\theta) = 0, \tag{6.4.16}$$

а концентрацию и температуру находим из уравнений

$$\frac{\partial c_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} \; ; \; \frac{\partial t_2}{\partial \sigma} = \mathrm{Lu}\,\frac{\partial^2 t_2}{\partial \eta^2} \; . \tag{6.4.17}$$

Решения уравнений (6.4.16), (6.4.17) имеют вид

$$g(\theta) = \left(\frac{3}{4}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \sin^2\theta; \tag{6.4.18}$$

$$\sigma = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + \frac{1-B}{1+B} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-B}{1+B}\right)^3; \tag{6.4.19}$$

$$c_2 = A_{10} + B_{10}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z_1} \exp(-u^2)\,du\right); \tag{6.4.20}$$

$$t_2 = A_{11} + B_{11}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z_2} \exp(-u^2)\,du\right), \tag{6.4.21}$$

где

$$z_1 = \left|\frac{y}{R}\right|\left(\frac{3}{4}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \sin^2\theta/2\sqrt{\sigma};$$

$$z_2 = \left|\frac{y}{R}\right|\left(\frac{3}{4}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \sin\theta/2\sqrt{\mathrm{Lu}\sigma};$$

$$B = (1-\cos\theta)\exp\left(-\frac{3}{2}\,\mathrm{Pe}_{эф}\,\tau\right)\Big/(1+\cos\theta).$$

Диффузионный (j) и тепловой (q) потоки, определенные из решения (6.4.18)–(6.4.21), имеют вид

$$j = \frac{D_2}{2R}\left(\frac{3}{\pi}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \frac{(dt_{20} + b_2 - c_{20})\sin^2\theta}{(1 - \Delta H d/c_p\,\rho\sqrt{\mathrm{Lu}})\sqrt{\sigma}}\; ; \tag{6.4.22}$$

$$q = \frac{\lambda_2}{2R}\left(\frac{3}{\pi}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \frac{[(c_{20} - b_2)/d - t_{20}]\sin^2\theta}{(1 - \rho c_p\sqrt{\mathrm{Lu}}/\Delta H d)\sqrt{\mathrm{Lu}\sigma}} \tag{6.4.23}$$

или в безразмерном виде

$$\mathrm{Nu_g} = \left(\frac{3}{\pi}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \sin^2\theta/(1 - \Delta H d/\rho_2 c_p\sqrt{\mathrm{Lu}})\sqrt{\sigma}\;, \tag{6.4.24}$$

$$\mathrm{Nu_т} = \left(\frac{3}{\pi}\,\mathrm{Pe}_{эф}\right)^{1/2} \sin^2\theta/(1 - \rho_2 c_p\sqrt{\mathrm{Lu}}/\Delta H d)\sqrt{\mathrm{Lu}\sigma}\;, \tag{6.4.25}$$

где

$$\mathrm{Nu_g} = 2jR/D_2\,(dt_{20} + b_2 - c_{20});$$

$$\mathrm{Nu_т} = 2qR/\lambda_2\,[(c_{20} - b_2)/d - t_{20}]$$

– локальные диффузионное и тепловое числа Нуссельта, причем значения $Re_{эф}$ и σ даны соответственно формулами (6.4.15) и (6.4.19).

Полные потоки вещества и тепла на поверхность дисперсной фазы определяются по формулам

$$I = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} j \sin\theta \, d\theta \quad \text{и} \quad Q = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} q \sin\theta \, d\theta. \tag{6.4.26}$$

Подставляя (6.4.22) и (6.4.23) в формулы (6.4.26), получим следующие выражения для полного потока вещества и тепла:

$$\frac{I}{2\pi R^2} = \frac{D_2}{2R}\left(\frac{3}{\pi}\,Re_{эф}\right)^{1/2} \frac{(dt_{20} + b_2 - c_{20})M}{(1 - \Delta H d/c_p\rho_2\sqrt{Lu})}\,; \tag{6.4.27}$$

$$\frac{Q}{2\pi R^2} = \frac{\kappa_2}{2R}\left(\frac{3}{\pi}\,Re_{эф}\right)^{1/2} \frac{[(c_{20} - b_2)/d - t_{20}]\,M}{(1 - \rho_2 c_p\sqrt{Lu}/\Delta H d)\sqrt{Lu}}\,, \tag{6.4.28}$$

где $M = \dfrac{3{,}015}{A^{0{,}491}}$ при $10^{-3} \leqslant A \leqslant 1$;

$M = \dfrac{3{,}015}{A^{0{,}117}}$ при $1 \leqslant A \leqslant 10$;

$M = 2{,}3094$ при $A \geqslant 10$; $A = \dfrac{3}{2}\,Re_{эф}\tau$.

Уравнения (6.4.22)–(6.4.25), (6.4.27), (6.4.28) являются общим решением задачи совместного тепломассообмена для ансамбля капель или пузырей, обтекаемых потоком сплошной среды. Из этих же уравнений следует, что неизотермичность учитывается теми же добавками f_1 и f_2 (6.2.26), которые вытекали из решения задач в §6.1–6.3.

Из общих решений (6.4.22)–(6.4.25), (6.4.27), (6.4.28) вытекают частные случаи. В частности, при $\tau \to \infty$ (стационарный режим), $\Phi \to 0$ (объемная доля диспесной фазы равная нулю), $\gamma \to 0$ (отсутствует влияние межфазной вязкости) и при условии бесконечной проводимости дисперсной фазы уравнения (6.4.22) и (6.4.24) превращаются в известные решения [69, 178, 179].

Как следует из полученных решений, диффузионные (тепловые) потоки при стационарном и нестационарных режимах почти на порядок отличаются между собой. В первый момент времени, когда член, ответственный за изменение концентрации во времени, во много раз превосходит конвективные члены, т.е. при $\partial c/\partial\tau \gg (v\nabla)c$, система уравнений (6.4.3) и (6.4.4) преобразуется в уравнения нестационарной диффузии (теплопередачи) в неподвижной среде. В этом случае решение будет зависеть только от времени протекания процесса, которое, согласно условию $\partial c/\partial\tau \gg (v\nabla)c$, не зависит от гидродинамической обстановки, а потому оно не может быть связано с ней.

В этом интервале времени ($10^{-3} \leqslant A \leqslant 1$) решения (6.4.22) и (6.4.23) практически переходят в известные решения нестационарной диффузии (теплопередачи).

В другом предельном случае, когда $(v\nabla c) \gg \partial c/\partial \tau$, процесс становится стационарным, полностью зависящим от гидродинамической обстановки и определяется ею. Однако в интервале времени $1 \leqslant A \leqslant 10$ (так называемый промежуточный режим) процесс тепломассообмена зависит как от временно́го интервала, так и от гидродинамической обстановки и определяется этими величинами. Если режим, при котором $\partial c/\partial \tau \leqslant (v\nabla)c$, иногда и определяют из решения при $\partial c/\partial \tau \gg (v\nabla)c$ путем выражения времени через гидродинамические характеристики (скорость, характерная длина), что, безусловно, является существенным приближением (теория Хигби, теория Данквертса), то промежуточный режим в интервале времени $1 \leqslant A \leqslant 10$ не подлежит определению ни по одному из предельных режимов. Таким образом, переход от нестационарного режима при $\partial c/\partial \tau \gg (v\Delta)c$ к стационарному при $(v\nabla)c \gg \partial c/\partial \tau$ происходит не скачкообразно, а через промежуточный режим, зависящий как от времени протекания процесса, так и от гидродинамической обстановки.

Данный анализ указывает на то, что следует с большой осторожностью переносить на процессы массообмена с поверхностью раздела известные теории Хигби и Данквертса, полученные для неподвижной сплошной среды, и тем более объяснять этими теориями различную гидродинамическую обстановку. Однако следует отдать должное, что эти теории просты и доступны для широкого круга исследователей-инженеров.

Глава 7

ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СПИРАЛИ АРХИМЕДА

Одной из разновидностей высокоскоростных тепломассообменных аппаратов являются аппараты системы Подбильняка [180], элементом которых является спираль Архимеда, вращающаяся с угловой скоростью ω. По внутренней поверхности этой спирали течет пленка жидкости, противотоком движется пар (газ).

Такие тепломассообменные аппараты со спирально-свернутым ротором компактны, имеют большую поверхность фазового контакта и сравнительно небольшое гидравлическое сопротивление. Благодаря действию центробежной силы в таком аппарате незначителен брызгоунос. Они могут работать в наклонном положении до углов $45-50^{\circ}$, при вибрациях, во время передвижения. Известно, что обычные колонны не пригодны для этих целей, так как при наклонах и качке процесс разделения несколько нарушается.

Когда аппарат такой конструкции появился впервые, было мнение, что в нем происходит особый процесс, отличный от известных. Такое мнение сложилось в связи с большой эффективностью этого массообменного аппарата. Для выяснения причин такой большой эффективности массопередачи была проведена работа [181], в процессе которой было установлено, что в этом аппарате справедливы все обычные законы массо-

передачи. Эффективность же массопередачи достигается за счет контакта паровой фазы с пленкой жидкости, вращающейся вместе со спиралью: брызгоунос, снижающий эффективность работы многих массообменных аппаратов (насадочных, колпачковых и т.д.), здесь незначителен. Производительность колонны и скорость вращения спирали связаны с линейными размерами аппарата и не могут изменяться в широких пределах. Это является недостатком колонны такого типа. Приближенный гидродинамический анализ показал [181], что архимедова спираль дает достаточно постоянную скоростью вдоль улитки, а это, в свою очередь, позволяет получить пленку жидкости достаточно устойчивой толщины. Направление вращения спирали в сторону ее завивания дает более устойчивую пленку.

С момента появления аппарата системы Подбильняка интерес к исследованию массообмена на конструкциях аппаратов подобного типа возрос [180–188].

Гидродинамика пленки жидкости на вращающейся спирали Архимеда была предметом изучения ряда исследователей [181, 184–188]. Сложность математического описания этой задачи, состоящая в том, что при вращении криволинейной поверхности необходимо учитывать центробежную силу и силу инерции Кориолиса, не позволила решить эту задачу с учетом всех сил, поэтому все расчеты получены были приближенными и требовали постановки дополнительного эксперимента.

Хотя в работе [187] для получения зависимости толщины пленки использовались уравнения движения, учет сил инерции и сил Кориолиса в них был неточен.

В работе [188] приведен ряд конструкций аппаратов, где спираль Архимеда является их основной частью.

За последнее время наметилась тенденция использовать этот аппарат для исследования высокоскоростной абсорбции, однако обстоятельные данные по гидродинамике и массообмену применительно к абсорбции отсутствуют.

В ряде работ указывается на существенное влияние гидродинамики пленки жидкости [183, 187, 188] на массообмен в жидкой фазе при ректификации. Вместе с этим отсутствуют какие-либо теоретические расчеты по учету массообмена жидкой фазы и совсем не обсуждался вопрос о начальном гидродинамическом участке и тепломассообмене на нем.

Настоящая глава посвящена изучению гидродинамики пленки жидкости на начальном участке, тепломассообмену на нем, влиянию взаимодействия газового потока с пленкой жидкости на массообмен [136–139, 189–190]. Ряд задач решен двумя методами: методом интегральных соотношений и предложенным методом. Показаны пределы применимости метода интегральных соотношений.

§ 7.1. ОДНОФАЗНЫЙ МАССООБМЕН. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

При исследовании различных задач гидродинамики и массообмена применялся метод интегральных соотношений. Основная идея этого метода состоит в том, что вместо точных распределений скоростей в сечениях пограничного гидродинамического слоя применяется некоторый набор профилей, представленных семейством кривых с одним параметром. Изменение параметра создает то разнообразие профилей, которое необходимо для приближенного описания движения во всем пограничном слое. Этот параметр, иногда его называют "формпараметром", представляет собой функцию продольной координаты в пограничном слое. Для определения этого параметра выведено интегральное условие, которое является результатом применения теоремы импульсов к элементарному объему пограничного слоя и называется иногда уравнением импульсов.

Этот метод, использующий только один параметр, а следовательно, только одно уравнение, тем точнее будет описывать движение жидкости, чем удачнее будет выбран набор профилей. Иногда решение, полученное этим методом, отличается от точного менее чем на 5%. Однопараметрические методы по построению решения близки идеям прямых методов Галеркина и вариационного метода Ритца.

В этой связи представляет интерес исследование гидродинамики и массообмена методом интегральных соотношений, а затем сравнить решения с решениями, полученными другими методами, что и сделано в настоящей главе.

Предполагается, что жидкость несжимаемая, движение установившееся, потоки изотермичны. Тонкий слой жидкости движется без волнообразования по спирали Архимеда, уравнение спирали в полярных координатах r, θ имеет вид $r = A\theta$, $A > 0$. Предполагается, что градиент давления в слое создается только за счет вращения. Систему координат x, y свяжем с обтекаемой твердой поверхностью, начало координат совместим с плоскостью входного отверстия потока, ось x направлена вдоль потока, y – по нормали к потоку. При этих предположениях движение тонкого слоя жидкости можно описать уравнениями Прандтля [134]:

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial y}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ ;\\
&-\frac{u^2}{R(x)} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\ ;\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
\qquad (7.1.1)
$$

$R(x)$ – радиус кривизны в полярных координатах:

$$
R(x) = \frac{(r^2 + r_\theta^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_\theta^2 - rr_{\theta\theta}} = \frac{A(\theta^2 + 1)^{3/2}}{\theta^2 + 2},
$$

где $r_\theta = dr/d\theta$; $r_{\theta\theta} = d^2r/d\theta^2$; F_x, F_y – проекции массовых сил на оси x

и y соответственно. Массовыми силами, действующими на частицы жидкости, являются центробежная $\bar{F}_{ц} = \omega^2 R(x)$ и кориолисова сила инерции $\bar{F}_{кор} = 2\bar{\omega}\bar{v}$. Изменение направления вращения спирали отразится только на второй из них. Проекции массовых сил на оси x и y имеют вид

$$F_x = \omega^2 R(x)\cos\alpha \pm 2\omega v;$$
$$F_y = -\omega^2 R(x)\sin\alpha \mp 2\omega u; \qquad (7.1.2)$$

где верхний знак соответствует вращению спирали против часовой стрелки, а нижний – по часовой; α – угол, образованный вектором центробежной силы и положительным направлением касательной. Так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\tau}{r_\theta} = \theta, \text{ то } \cos\alpha = 1/\sqrt{\theta^2+1}, \quad \sin\alpha = \theta/\sqrt{\theta^2+1}.$$

В переменных θ, y система уравнений (7.1.1) выразится так:

$$\frac{u}{A\sqrt{\theta^2+1}}\frac{\partial u}{\partial\theta} + v\frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{1}{A\sqrt{\theta^2+1}}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$
$$-\frac{u^2}{R(\theta)} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{1}{A\sqrt{\theta^2+1}}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad (7.1.3)$$

Из условия прилипания к стенке следует, что

$$\text{при } y = 0 \quad u = v = 0. \qquad (7.1.4)$$

Если пренебречь силой трения на поверхности раздела, то будем иметь условия

$$\text{при } y = \delta \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad p = p_a = \text{const}, \quad u = U. \qquad (7.1.5)$$

Сравнивая систему уравнений движения (7.1.3) и рассмотренную в работе [187], можно отметить, что авторы указанной работы неточно выразили массовые силы, а также не учли градиент давления поперек слоя, который в данном случае уравновешивается проекцией массовых сил на ось y и величиной $u^2/R(x)$. В связи с этим возникает еще большая потребность в тщательном рассмотрении вопросов гидродинамики тонкого слоя жидкости на вращающейся спирали Архимеда.

Решим систему (7.1.3) методом интегральных соотношений. Полином второй степени, который удовлетворяет граничным условиям (7.1.4) и (7.1.5), имеет вид

$$u = U\left[2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right], \qquad (7.1.6)$$

где U определяется из формулы расхода $\int_0^{\delta(x)} u\,dy = q = u_0 h_0$ (h_0 – начальная толщина пленки) и выражается так:

$$U = \frac{3}{2}\frac{q}{\delta}. \qquad (7.1.7)$$

Исключив давление из второго уравнения системы (7.1.3), найдем $\partial p/\partial\theta$. Затем, проинтегрировав в пределах пограничного слоя первое уравнение системы (7.1.3) по y и учитывая $\partial p/\partial\theta$, получим нелинейное уравнение относительно $\delta(\theta)$. В безразмерных координатах оно имеет вид

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\theta} = \left\{ \frac{9\,\mathrm{Ga}(\theta^2+1)^{3/2}}{\mathrm{Re}^2 E(\theta^2+2)}\bar{\delta} - \frac{9}{2}\bar{\delta}^2\frac{\mathrm{Ga}(\theta^4+5\theta^2+2)}{\mathrm{Re}^2(\theta^2+2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{33}{40}\frac{E\theta(\theta^2+4)}{(\theta^2+1)^{5/2}} - \frac{9\sqrt{\theta^2+1}}{\mathrm{Re}\,E}\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right\} \Bigg/ \left\{ -\frac{6}{5}\frac{1}{\bar{\delta}^2} \mp \right. \tag{7.1.8}$$

$$\left. \mp \frac{21}{4}\frac{(\mathrm{Ga}E)^{1/2}}{\mathrm{Re}} + \frac{9\,\mathrm{Ga}\theta(\theta^2+1)}{\mathrm{Re}^2(\theta^2+2)}\bar{\delta} \right\},$$

где $\mathrm{Ga} = \omega^2 A h_0^3/\nu$ – число Галилея; $\mathrm{Re} = 3q/\nu$ – модифицированное число Рейнольдса; $\bar{\delta} = \delta/h_0$; $E = h_0/A$ – безразмерный параметр, характеризующий спираль; $\bar{\omega} = \omega h_0/u_0$ – безразмерная угловая скорость; верхний знак соответствует вращению против часовой стрелки, а нижний – по часовой стрелке.

Уравнение (7.1.8) решено численно методом Рунге–Кутта. Характерный вид зависимости толщины пленки жидкости на спирали от ее длины при различных значениях гидродинамических параметров показан на рис. 7.1.1,*а*. Темп выхода толщины пленки на постоянное значение от числа Рейнольдса и угловой скорости вращения спирали ω: чем больше ω и меньше Re, тем быстрее работа аппарата выходит на режим с постоянной толщиной пленки. Эту величину можно найти при больших θ из уравнения (7.1.8) аналитически, положив в нем $d\bar{\delta}/d\theta = 0$:

$$\delta = \sqrt[3]{3q\nu/\omega^2 A}. \tag{7.1.9}$$

Как видно из (7.1.9), толщина пленки жидкости растет с увеличением расхода и уменьшается с увеличением угловой скорости вращения, а также зависит от характеристики спирали A, что является особенностью для данного вида пленочного течения.

При нормальной работе аппарата пленка жидкости растекается тонким слоем по стенкам спирального канала. Для соответствующего решения величина $d\bar{\delta}/d\theta$ должна быть отрицательной. В противоположном случае режим спирального массообменного аппарата нарушается, что приводит его к "захлебыванию". Режим работы спирального аппарата, при котором наступает "захлебывание", показан на рис. 7.1.1,*б*. Толщина пленки вначале, как и обычно, падает, но затем, начиная с некоторой длины спирали ($\theta \simeq 5$), она резко возрастает, что свидетельствует о нарушении нормальной работы массообменного аппарата. На режим "захлебывания" заметно оказывают влияние характеристика спирали E и угловая скорость вращения аппарата, поэтому условия "захлебывания" оценим при различных значениях скорости вращения аппарата:

а) $\bar{\omega} \ll 1$. Величина $d\bar{\delta}/d\theta$ положительна, т.е. при малых скоростях вра-

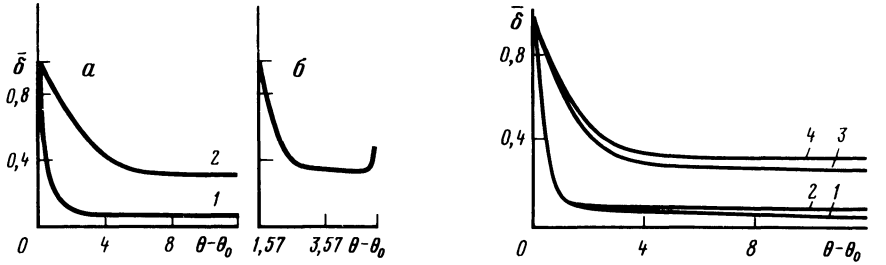


Рис. 7.1.1. Зависимость безразмерной толщины пленки жидкости от длины спирали для $E = 1$

а: Re = 300: *1* – $\bar{\omega} = 10$; *2* – $\bar{\omega} = 1$; *б*: Re = 60; $\bar{\omega} = 1$

Рис. 7.1.2. Зависимость безразмерной толщины пленки (кривые *1* и *3*) и диффузионного слоя (разность между кривыми *1* и *2*, *3* и *4*) от длины спирали для $E = 1$

Re = 300: *1*, *2* – $\bar{\omega} = 10$; Pr = 1000; *3*, *4* – $\omega = 1$; Pr = 100

щения аппарата его "захлебывание" наступает практически всегда;

б) $\bar{\omega} \gg 1$.

$$E < \frac{\bar{\delta}(\theta^4 + 5\theta^2 + 2)}{2(\theta^2 + 1)^{3/2}(\theta^2 + 2)} . \qquad (7.1.10)$$

Для заданной спирали при большой скорости вращения можно подобрать h_0, θ_0 таким образом, чтобы условие (7.1.10) выполнялось, тогда "захлебывание" не будет происходить;

в) при умеренных скоростях вращения аппарата он будет работать без "захлебывания" при условии

$$\frac{\bar{\delta}(\theta^4 + 5\theta^2 + 2)}{2(\theta^2 + 1)^{3/2}(\theta^2 + 2)} < E < \frac{7(\theta^2 + 2)}{4\bar{\delta}\,\bar{\omega}\theta(\theta^2 + 1)} . \qquad (7.1.11)$$

Определим силу трения τ пленки жидкости по всей длине L спирального аппарата:

$$\tau = \int_0^L \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} dx = 1{,}44\rho\nu^{1/3}q^{1/3}\omega^{4/3}A^{2/3}L . \qquad (7.1.12)$$

Сила трения пленки жидкости, помимо гидродинамических и физико-химических свойств, зависит от характеристики самой спирали.

Если сопротивление массопередачи сосредоточено в жидкой фазе, то рассчитать коэффициент массоотдачи в жидкую фазу можно на основании уравнения конвективной диффузии

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} , \qquad (7.1.13)$$

в котором скорости u и v нужно взять из решения гидродинамической задачи (7.1.6). Предполагается, что коэффициент диффузии является

постоянной величиной и молекулярный перенос в поперечном направлении много меньше продольного. Введем новую систему координат, связанную со старой соотношениями $y_1 = -y + \delta$, $x_1 = x$ (δ – толщина пограничного слоя). В новых переменных граничные условия примут вид:

$$\text{при } y_1 = 0 \quad c = c_\infty ;$$
$$\text{при } y_1 = \delta_д \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0, \quad c = 0, \tag{7.1.14}$$

где $\delta_д$ – толщина диффузионного слоя.

Полином третьей степени, удовлетворяющий граничным условиям (7.1.14), имеет вид

$$c(x, y) = c_\infty \left(1 - \frac{y_1}{\delta_д}\right)^3 . \tag{7.1.15}$$

Интегрируя (7.1.13) по y в пределах от $y = \delta - \delta_д$ до $y = \delta$, т.е. по толщине диффузионного слоя, и учитывая граничные условия (7.1.14), получим

$$\frac{ds^2}{dx} = \frac{80D}{(5 - S^2)\delta_д} , \tag{7.1.16}$$

где $S = \delta_д/\delta$.

Запишем решение уравнения (7.1.16) в квадратурах:

$$\delta_д = \delta\sqrt{5 - \sqrt{25 - \frac{160D}{q}\int \frac{dx}{\delta(x)}}} ; \tag{7.1.17}$$

для режима с постоянной толщиной пленки формула (7.1.17) примет вид

$$\delta_д = \delta\sqrt{5 - 5\sqrt{1 - \frac{\gamma x}{25}}} , \tag{7.1.18}$$

где

$$\gamma = 160D/q\delta . \tag{7.1.19}$$

Усредненный по характерному размеру L коэффициент массоотдачи в жидкую пленку определим по формуле

$$\beta = \frac{1}{Lc_\infty}\int_0^L D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=\delta} dx = \tag{7.1.20}$$
$$= \frac{60\sqrt{5}\,D}{\delta\gamma L}\left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma L}{25}}\right)^{1/2} - \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma L}{25}}\right)^{3/2}\right].$$

Формула (7.1.20) может быть упрощена разложением в ряд членов в квадратной скобке. Физически это соответствует случаю больших чисел Pr (рис. 7.1.2). Разлагая подкоренное выражение формулы (7.1.20) в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получим для коэффициента

массоотдачи в жидкую фазу

$$\beta = \frac{94{,}86D}{\delta L^{1/2}\gamma^{1/2}}\,[1 - 0{,}0067\gamma L],$$

или, учитывая (7.1.9) и (7.1.19),

$$\beta = 6{,}25\frac{A^{1/6}D^{1/2}\omega^{1/3}q^{1/3}}{\nu^{1/6}L^{1/2}}\left[1 - 0{,}74\frac{DL\omega^{2/3}A^{1/3}}{\nu^{1/3}q^{4/3}}\right]. \qquad (7.1.21)$$

§ 7.2 ДВУХФАЗНЫЙ МАССООБМЕН. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Влияние газового потока на течение тонкого слоя жидкости учитывается с помощью касательных сил на поверхности раздела, т.е.

$$\text{при } y = \delta \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} = B, \quad p = p_a = \text{const}, \quad u = U. \qquad (7.2.1)$$

Решим систему (7.1.3) методом интегральных соотношений [138]. Полином второй степени, который удовлетворяет граничным условиям (7.1.4) и (7.2.1), имеет вид

$$\frac{u}{U} = \left(2 - \frac{B\delta}{U}\right)\frac{y}{\delta} - \left(1 - \frac{B\delta}{U}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2, \qquad (7.2.2)$$

где U определяется из формулы для расхода $\int_0^{\delta(x)} u\,dy = q = \text{const}$ и выражается так:

$$U = \frac{3q}{2\delta} + \frac{B\delta}{4}. \qquad (7.2.3)$$

Исключив давление из второго уравнения системы (7.1.3), найдем $\partial p/\partial\theta$. Затем, проинтегрировав в пределах пограничного слоя первое уравнение системы (7.1.3) по y и учитывая найденное $\partial p/\partial\theta$, получим нелинейное уравнение относительно $\delta(\theta)$. В безразмерных координатах оно имеет вид

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\theta} = \left\{\frac{9\mathrm{Ga}(\theta^2+1)^{3/2}}{\mathrm{Re}^2E(\theta^2+2)}\bar{\delta} - \frac{9}{2}\bar{\delta}^2\frac{\mathrm{Ga}}{\mathrm{Re}^2}\frac{\theta^4+5\theta^2+2}{(\theta^2+2)^2} - \right.$$

$$- \frac{E\theta(\theta^2+4)}{(\theta^2+1)^{5/2}}\left(\frac{33}{40} + \frac{3}{40}\bar{B}\bar{\delta}^2 + \frac{\bar{B}^2\bar{\delta}^4}{160}\right) + \frac{9\sqrt{\theta^2+1}}{\mathrm{Re}E}\left(\frac{\bar{B}}{2} - \frac{1}{\bar{\delta}^2}\right)\Bigg\} \Bigg/$$

$$\Bigg/ \left\{-\frac{6}{5}\frac{1}{\bar{\delta}^2} + \frac{\bar{B}}{20} + \frac{\bar{B}^2\bar{\delta}^2}{40} \mp \frac{6\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{7}{B} + \frac{3}{16}\bar{B}\bar{\delta}^2\right) + \right. \qquad (7.2.4)$$

$$\left. + \frac{9\mathrm{Ga}}{\mathrm{Re}}\frac{\theta(\theta^2+1)}{\theta^2+2}\bar{\delta} - \frac{E(\theta^2+2)}{(\theta^2+1)^{3/2}}\left(\frac{3}{20}\bar{B}\bar{\delta} + \frac{1}{40}\bar{B}^2\bar{\delta}^2\right)\right\},$$

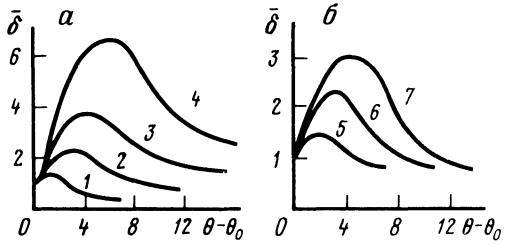


Рис. 7.2.1. Зависимость безразмерной толщины пленки жидкости от длины спирали для Re = 300; Γ = 1 при E = 1 и различных значениях Δ(*а*) и при Δ = 1 и различных значениях E (*б*)

а: *1* – Δ = 0,4; *2* – 1; *3* – 1,6; *4* – Δ = 2,5; *б*: *5* – E = 0,5; *6* – 1; *7* – E = 1,5

где $\bar{B} = Bh_0/u_0 = \Gamma\dfrac{\mathrm{Ga}}{\mathrm{Re}}$; $\Gamma = \dfrac{3\tau_0}{\rho\omega^2 A h_0}$; $\mathrm{Ga} = \omega^2 A h_0^3/\nu^2$; $\mathrm{Re} = 3q/\nu$; $\bar{\delta} = \delta/h_0$; $\Delta = \delta_p/h_0 = \sqrt[3]{\mathrm{Re}/\mathrm{Ga}}$; δ_p – предельное значение δ; $E = h_0/A$; верхний знак соответствует вращению против часовой стрелки, нижний знак – по часовой.

Заметим, что при $\bar{B}$ = 0, т.е. в отсутствие взаимодействия газового потока со слоем жидкости, уравнения (7.2.4) и (7.1.8) совпадают. Уравнения (7.2.4) решены численно методом Рунге–Кутта.

Характерный вид зависимости толщины пленки жидкости на спирали от ее длины при различных значениях гидродинамических параметров показан на рис. 7.2.1. Из рисунка видно, что для всех принятых режимов работы спирального аппарата толщина пленки при изменении всех параметров происходит через максимум, затем падает с тенденцией выхода на постоянное значение. Максимум растет с увеличением числа Re, т.е. с увеличением расхода пленки жидкости. Наличие максимума можно объяснить явлениями входа. Пленка жидкости на входе подвержена влиянию двух факторов: подаче жидкости из оросителя и последующему ее растеканию по спирали Архимеда. При больших расходах пленки жидкости она скапливается у входа, т.к. ее растекание недостаточно интенсивно, чтобы справиться с большими расходами. Однако при меньших расходах, когда растекание уже значительное, максимум уменьшается, т.е. происходит как бы рассасывание пленки жидкости. И действительно, с уменьшением расхода величина максимума становится меньше. Аналогично можно объяснить наличие максимума на рис. 7.2.1, где представлена зависимость безразмерной толщины пленки от расстояния оросителя. По аналогии с предыдущим рассуждением можно сказать, что все факторы, соответствующие повышению расхода, будут увеличивать максимумы.

Темп выхода толщины пленки на постоянное значение зависит от числа Рейнольдса, числа Галилея, величины силы трения на поверхности раздела, геометрической характеристики спирали: чем больше Ga и меньше Re и E, тем быстрее работа аппарата выходит на режим с постоянной толщиной пленки. Эту величину можно найти при больших θ аналитически из

уравнения (7.2.4), положив в нем $d\bar{\delta}/d\theta = 0$; она равна

$$\bar{\delta} = -\frac{\bar{B}\mathrm{Re}}{6\mathrm{Ga}} + \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{Re}}{2\mathrm{Ga}} - \frac{\bar{B}^3\mathrm{Re}^3}{216\mathrm{Ga}^3} + \frac{\mathrm{Re}}{2\mathrm{Ga}}\sqrt{1 - \frac{\bar{B}^3\mathrm{Re}^2}{54\mathrm{Ga}^2}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2\mathrm{Ga}} - \frac{\bar{B}^3\mathrm{Re}^3}{216\mathrm{Ga}^3} - \frac{\mathrm{Re}}{2\mathrm{Ga}}\sqrt{1 - \frac{\bar{B}^3\mathrm{Re}^2}{54\mathrm{Ga}^2}}} \quad . \tag{7.2.5}$$

Уравнение (7.2.5) можно аппроксимировать формулой

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3q\nu}{\omega^2 A}}\exp\left(-0{,}1247\frac{\Gamma}{E}\right), \tag{7.2.6}$$

которая при отсутствии силы трения на поверхности пленки жидкости ($\Gamma = 0$) совпадает с формулой (7.1.9).

Сила трения τ пленки жидкости о поверхность всей длины спирального аппарата имеет вид

$$\tau = \int_0^L \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dx = 1{,}44\rho\nu^{1/3}q^{1/3}\omega^{4/3}A^{2/3}L \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\frac{0{,}26\tau_0}{\rho\nu^{1/3}q^{1/3}\omega^{4/3}A^{2/3}}\right)\right]^{-2} - \frac{\tau_0 L}{2}, \tag{7.2.7}$$

которая при отсутствии силы трения на поверхности пленки жидкости совпадает с формулой (7.1.12).

Учитывая взаимодействие газового потока с пленкой жидкости, уравнение для толщины диффузионного слоя (7.1.16) принимает вид [138]

$$\frac{d\delta_д}{d\theta} = \frac{\dfrac{720\sqrt{\theta^2+1}}{\mathrm{Re}E\mathrm{Pr}} - \dfrac{d\bar{\delta}}{d\theta}\left[\bar{\delta}_д^2\left(-\dfrac{30}{\bar{\delta}^2} + 6\dfrac{\bar{\delta}_д^2}{\bar{\delta}^4} + B(5 - \bar{\delta}_д^2)\right)\right]}{30\dfrac{\bar{\delta}_д}{\bar{\delta}} - 6\dfrac{\bar{\delta}_д^3}{\bar{\delta}^3} + \bar{B}\,\bar{\delta}_д\left(5\bar{\delta} - B\bar{\delta}_д + 3\dfrac{\bar{\delta}_д^2}{\bar{\delta}}\right)}. \tag{7.2.8}$$

Решая совместно уравнения (7.2.4) и (7.2.8) и учитывая соотношение (7.1.15), которое для двухфазной задачи имеет такой же вид, как и для однофазной, проведем усреднение на некоторой характерной длине спирали L диффузионного потока на поверхность раздела:

$$\beta = \frac{1}{Lc_\infty}\int_0^1 D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=\delta_д} dx = \frac{3D}{L}\int_0^L \frac{1}{\delta_д}\,dx, \tag{7.2.9}$$

или, аппроксимировав результаты численного решения, получим

$$\beta = 3\,\mathrm{Re}^{1/2} E^{1/2} \nu^{1/2} D^{1/2} L^{-1} k;$$

$$k = [(-0{,}0095\Delta + 0{,}03)\Gamma + (0{,}04\Delta - 0{,}22)E - 0{,}12\Delta + 0{,}6]\sqrt{\bar{L}} +$$

$$+ (0{,}0004\,\mathrm{Re} + 0{,}05)\,\Gamma - 0{,}0007\,\mathrm{Re} - 0{,}3, \qquad (7.2.10)$$

где $\bar{L} = L/h_0$.

Точность полученных аппроксимирующих формул по сравнению с численным решением в исследованном нами интервале параметров составляет примерно ±5%.

§7.3. ОДНОФАЗНЫЙ МАССООБМЕН. МЕТОД ПОВЕРХНОСТЕЙ РАВНЫХ РАСХОДОВ

Как показано в §7.1 и 7.2, метод интегральных соотношений тем точнее будет описывать движение жидкости, чем удачнее выбраны профили скорости и концентраций. Обычно при решении задач гидродинамики и массообмена интегральным методом профиль скорости (температуры, концентрации) представляют в виде полиномов третьей степени. В ряде случаев полиномы такой степени достаточно точно отвечают (в пределах 5%) точному решению. Однако имеются такие задачи, особенно на искривленных поверхностях, когда возникают трудности при выборе удачного профиля.

Течение на входном участке отличается тем, что почти все основные характеристики течения жидкости претерпевают изменение. Это создает дополнительную трудность при решении задач.

В данном параграфе применен метод поверхностей равных расходов (см. гл. 5) к расчету гидродинамики и массообмена в слое жидкости переменной толщины на вращающейся спирали Архимеда с учетом входного участка.

Уравнение движения пленки по внутренней поверхности вращающейся спирали Архимеда и уравнение конвективной диффузии в постановке Прандтля имеют вид (см. §7.1 и 7.2):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$-\frac{u^2}{R(x)} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad (7.3.1)$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \qquad (7.3.2)$$

Обозначения в уравнениях (7.3.1) и (7.3.2) те же, что и в §7.1 и 7.2. Будем использовать следующие граничные и начальные условия:

$$\text{при } y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad c = 0;$$

$$\text{при } y = H(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad p = \mathrm{const}, \quad c = c_p; \qquad (7.3.3)$$

$$\text{при } x = 0, \quad c = 0.$$

Причем уравнение поверхности $H(x)$ пленки жидкости переменной толщины определяется из решения системы уравнений (7.3.1) с учетом кинематического условия на поверхности раздела: $v = udH/dx$.

Проведем обезразмеривание системы уравнений (7.3.1), (7.3.2) и граничных условий (7.3.3):

$$u = u_p\bar{u},\quad x = \delta_p \mathrm{Re}\bar{x},\quad y = \delta_p\bar{y},\quad c = c_p\bar{c},$$

где $\delta_p = h_0\sqrt[3]{\mathrm{Re/Ga}}$ получена из решения системы уравнений (7.3.1), (7.3.2) на участке стабилизации; u_p – средняя скорость на этом участке; $\mathrm{Re} = 3q/\nu$; q – расход пленки жидкости; c_p – равновесная концентрация на поверхности; $h_0 = H(0)$ – ширина щели; $\mathrm{Ga} = \omega^2 A h_0^3/\nu^2$ – число Галилея.

Система уравнений (7.3.1), (7.3.2) и граничные условия (7.3.3) в новых переменных ($dx = A\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$) примут вид [137]:

$$\frac{E\Delta\mathrm{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}u\frac{\partial u}{\partial\theta} + v\frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{E\Delta\mathrm{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}\frac{\partial p}{\partial\theta} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\qquad (7.3.4)$$

$$-E\Delta\frac{u^2}{R(\theta)} = F_y - \frac{\partial p}{\partial y};\quad \frac{E\Delta\mathrm{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;\qquad (7.3.5)$$

$$\frac{E\Delta\mathrm{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}u\frac{\partial c}{\partial\theta} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{3}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2};$$

при $y = 0$ $u = v = 0$, $c = 0$;

при $y = \dfrac{H(x)}{\delta_p}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial\theta} = 0$, $c = 1$; (7.3.6)

при $x = 0$ $c = 0$;

$$F_x = 9\frac{\theta^2+1}{\theta^2+2} \pm \frac{6\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^2}{\mathrm{Re}}v;\qquad (7.3.7)$$

$$F_x = -\frac{9\mathrm{Ga}\Delta^3}{\mathrm{Re}^2}\,\theta\,\frac{\theta^2+1}{\theta^2+2} \mp \frac{6\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^{1/2}}{\mathrm{Re}}u,$$

где $\Delta = \delta_p/h_0$; $E = h_0/A$.

Как и в главе 5, введем в поле течения линии $y_k = y_k(x)$ и обозначим $u_k(x) = u[x, y_k(x)]$; $v_k(x) = v[x, y_k(x)]$; $c_k(x) = c[x, y_k(x)]$.

Поставим целью свести задачу о развитии течения в пленке жидкости и массообмена в ней к численному определению функций $u_k(x)$, $v_k(x)$, $c_k(x)$ и межфазной поверхности $H(x)$. Определим y_k как линии равного расхода, тогда $u_k(x)$ и $v_k(x)$ связаны между собой соотношениями

$$v_k(x) = \frac{E\Delta\mathrm{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}u_k(x)\frac{dy_k}{d\theta},\qquad (7.3.8)$$

которые вытекают из условия сохранения расхода и уравнения неразрыв-

ности. Кроме того, уравнение неразрывности равносильно следующей системе уравнений:

$$\int_{y_{k-1}(x)}^{y_k(x)} u\,dy = \text{const}_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Вычисляя эти интегралы по формуле трапеций с равномерной по переменной θ оценкой погрешности, имеющей третий порядок малости $\theta_3 = \{\max_k [y_k - y_{k-1}]\}^3$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$(y_k(x) - y_{k-1}(x))(u_k(x) + u_{k-1}(x)) = \text{const}_k + \theta_3 . \tag{7.3.9}$$

После дифференцирования обеих частей (7.3.9) по θ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения поверхностей равного расхода $y_k(x)$, а именно

$$\frac{dy_k}{d\theta} = \frac{dy_{k-1}}{d\theta} - \frac{y_k - y_{k-1}}{u_k + u_{k-1}}\left(\frac{du_k}{d\theta} + \frac{du_{k-1}}{d\theta}\right). \tag{7.3.10}$$

Производные по независимой переменной θ имеют вид

$$\frac{d\varphi_k}{d\theta} = \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}\right]_{y=y_k}, \tag{7.3.11}$$

где $\varphi_k = u_k,\ p_k,\ c_k$.

Выражая из (7.3.11) $\partial\varphi_k/\partial\theta$ и подставляя их в уравнения (6.3.4) и (7.3.5), учитывая при этом соотношение (7.3.8), сведем данную задачу к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{E\Delta\text{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}u_k\frac{du_k}{d\theta} = F_{xk} - \frac{E\Delta\text{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}\left[\frac{dp_k}{d\theta} - \frac{\partial p_k}{\partial y_k}\frac{dy_k}{d\theta}\right] + 3\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2}; \tag{7.3.12}$$

$$\frac{dp_k}{d\theta} = \frac{dp_{k-1}}{d\theta} + \frac{dM_k}{d\theta}; \tag{7.3.13}$$

$$\frac{E\Delta\text{Re}}{\sqrt{\theta^2+1}}u_k\frac{dc_k}{d\theta} = \frac{3}{\text{Pr}}\frac{\partial^2 c_k}{\partial y_k^2}, \tag{7.3.14}$$

где $M_k(\theta) = \int_{y_{k-1}}^{y_k}\left(E\Delta\frac{u^2}{R(\theta)} + F_y\right)dy;$

$$\frac{\partial p_k}{\partial y_k} = F_{yk} + E\Delta\frac{u_k^2}{R(\theta)}; \quad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Для вычисления вторых производных по y в уравнениях (7.3.12) и (7.3.14) сеточные решения u_k и c_k представим в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям (7.3.6). В настоящем параграфе системе базисных функ-

ций для скорости и концентрации выбирались соответственно в виде

$$V_{kj}(x) = \left(\frac{j+1}{j} - \eta_k\right)\eta^j{}_k ; \qquad (7.3.15)$$

$$K1_{kj}(x) = \frac{1}{2}(\eta^j_k - \eta^{j+1}_k) + \eta^{j+1}_k , \qquad (7.3.16)$$

а также применялись ортогональные полиномы Чебышева первого рода в виде

$$V_{kj} = T_{j+1}(\eta_k) - T_{j+1}(0) - [T_j(\eta_k) - T_j(0)]\left(\frac{j+1}{j}\right)^2 ;$$

$$K1_{kj} = T_{j+1}(\eta_k) + T_{j+1}(0)(2\eta^2_k - \eta_k - 1),$$

где $\eta_k(x) = \dfrac{y_k(x)}{H(x)}$; $j = 1, 2, \ldots, N$; $k \quad 1, 2, \ldots, N$.

Заметного отличия в результатах расчетов при использовании различных систем базисных функций не наблюдалось. Однако требуемая точность при применении полиномов Чебышева достигалась меньшим числом членов.

Решения $u_k(x)$ и $c_k(x)$ представлялись в виде

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j(x) V_{kj}(x); \qquad (7.3.17)$$

$$c_k(x) = \sum_{j=1}^{N} A1_j(x) K1_{kj}(x), \qquad (7.3.18)$$

где $j = 1, 2, \ldots, N$; $k = 1, 2, \ldots, N$, справедливом при произвольных значениях независимой переменной x. Эта система линейных алгебраических уравнений используется для определения коэффициентов разложения $A_j(x)$, $A1_j(x)$, которые участвуют в вычислении вторых производных по y на k-й координатной поверхности $\partial^2 u_k/\partial y_k^2$, $\partial^2 c_k/\partial y_k^2$.

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (7.3.10), (7.3.12)–(7.3.14) с учетом (7.3.15)–(7.3.18) решена методом Рунге–Кутта. В связи с тем, что в задаче есть неопределенная величина $dp_1/d\theta$, процесс определения правых частей этой системы разбивался на два этапа:

1) вычисление прогоночных коэффициентов и расчет по ним неизвестного граничного условия;

2) вычисление собственно правых частей.

С этой целью система уравнений (7.3.10), (7.3.12)–(7.3.14) приводилась к виду

$$\frac{du_k}{d\theta} + L_k \frac{dp_k}{d\theta} + N_k \frac{dy_k}{d\theta} = R_k ; \qquad (7.3.19)$$

$$\frac{dy_k}{d\theta} - \frac{dy_{k-1}}{d\theta} + S_k \frac{du_k}{d\theta} + S_k \frac{du_{k-1}}{d\theta} = 0;$$

$$\frac{dp_k}{d\theta} - \frac{dp_{k-1}}{d\theta} + Q_k \frac{du_k}{d\theta} + T_k \frac{du_{k-1}}{d\theta} = \Omega_k ;$$

$$L_k = \frac{1}{u_k}, \quad N_k = \frac{1}{u_k}\left(\frac{9}{\mathrm{Re}}\theta\frac{\theta^2+1}{\theta^2+1} - \frac{E\Delta(\theta^2+2)}{(\theta^2+1)^{3/2}}u_k^2\right);$$

$$R_k = \frac{9(\theta^2+1)^{3/2}}{E\Delta\mathrm{Re}u_k(\theta^2+2)} + \frac{3\sqrt{\theta^2+1}}{E\Delta\mathrm{Re}u_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} ;$$

$$S_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{u_k + u_{k-1}} ;$$

$$Q_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{u_k + u_{k+1}}\left[(u_k^2 + u_{k-1}^2)\frac{E\Delta(\theta^2+2)}{2(\theta^2+1)^{3/2}} - \frac{9}{\mathrm{Re}}\theta\frac{\theta^2+1}{\theta^2+2} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{3\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^2(u_k + u_{k-1})}{\mathrm{Re}}\right] - (y_k - y_{k-1})\left[u_k\frac{E\Delta(\theta^2+2)}{(\theta^2+1)^{3/2}} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{3\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^2}{\mathrm{Re}}\right] ;$$

$$T_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{u_k + u_{k-1}}\left[(u_k^2 + u_{k-1}^2)\frac{E\Delta(\theta^2+2)}{2(\theta^2+1)^{3/2}} - \frac{9}{\mathrm{Re}}\theta\frac{\theta^2+1}{\theta^2+2} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{3\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^2}{\mathrm{Re}}(u_k + u_{k-1})\right] - (y_k - y_{k-1})\left[u_{k-1}\frac{E\Delta(\theta^2+2)}{(\theta^2+1)^{3/2}} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{3\mathrm{Ga}^{1/2}E^{1/2}\Delta^2}{\mathrm{Re}}\right] ;$$

$$\Omega_k = (y_{k-1} - y_k)\left[(u_k^2 + u_{k-1}^2)\frac{E\Delta\theta(\theta^2+4)}{2(\theta^2+1)^{5/2}} + \frac{9}{\mathrm{Re}}\frac{\theta^4 + 5\theta^2 + 2}{(\theta^2+2)^2}\right] .$$

Представим искомые функции $du_k/d\theta$, $dy_k/d\theta$, $dp_k/d\theta$ в виде прогоночных соотношений:

$$\frac{du_k}{d\theta} = U_k + \hat{U}_k\frac{dp_1}{d\theta}; \quad \frac{dy_k}{d\theta} = Y_k + \hat{Y}_k\frac{dp_1}{d\theta}; \quad \frac{dp_k}{d\theta} = P_k + \hat{P}_k\frac{dp_1}{d\theta} . \qquad (7.3.20)$$

Подставляя эти выражения в (7.3.19) и считая, что U_{k-1}, $\hat{U}_{k-1}$, Y_{k-1}, $\hat{Y}_{k-1}$, P_{k-1}, $\hat{P}_{k-1}$ известны, получим явные выражения прогоночных коэффициентов в виде следующих рекуррентных соотношений:

$$U_k = [R_k - N_k(Y_{k-1} - S_kU_{k-1}) - L_k(\Omega_k + P_{k-1} -$$
$$- T_kU_{k-1})]/(1 - L_kQ_k - N_kS_k);$$
$$\hat{U}_k = [N_k(S_k\hat{U}_{k-1} - \hat{Y}_{k-1}) + L_k(T_k\hat{U}_{k-1} - \hat{P}_{k-1})]/(1 - L_kQ_k - N_kS_k);$$
$$Y_k = -S_kU_{k-1} + Y_{k-1} - S_kU_k ; \qquad (7.3.21)$$
$$\hat{Y}_k = -S_k\hat{U}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} - S_k\hat{U}_k ;$$
$$P_k = \Omega_k + P_{k-1} - T_kU_{k-1} - Q_kU_k;$$
$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k-1} - T_k\hat{U}_{k-1} - Q_k\hat{U}_k .$$

Из условия

$$\frac{du_1}{d\theta} = \frac{dy_1}{d\theta} = \frac{dp_N}{d\theta} \tag{7.3.22}$$

и из системы уравнений (7.3.19) находим значения прогоночных коэффициентов при $k = 2$:

$U_2 = (R_2 - L_2\Omega_2)/(1 - L_2Q_2 - N_2S_2)$;

$U_2 = -L_2/(1 - L_2Q_2 - N_2S_2)$;

$Y_2 = -S_2U_2$; $\hat{Y}_2 = -S_2\hat{U}_2$;

$P_2 = \Omega_2 - Q_2U_2$; $\hat{P}_2 = 1 - Q_2\hat{U}_2$.

Далее, пользуясь соотношениями (7.3.21), находим значения прогоночных коэффициентов при любом k. В частности, при $k = N$ имеем

$$\frac{dp_N}{d\theta} = P_N + \hat{P}_N \frac{dp_1}{d\theta},$$

но $dp_1/d\theta$ известно из (7.3.22), следовательно, определяем

$$\frac{dp_1}{d\theta} = \left(\frac{dp_N}{d\theta} - P_N\right)/\hat{P}_N. \tag{7.3.23}$$

После этого обратной прогонкой вычисляем значения правых частей системы дифференциальных уравнений (7.3.19).

После того как определено поле скоростей u_k, решалась также методом Рунге–Кутта система дифференциальных уравнений для определения концентрации в слое жидкости.

Для расчета коэффициента массоотдачи в пленку жидкости используем равенство

$$D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=y_N} = \frac{d}{dx}\int_0^{y_N} ucdy, \tag{7.3.24}$$

которое получено после интегрирования уравнения конвективной диффузии поперек пленки жидкости переменной толщины с учетом равенства (7.3.8) на поверхности раздела. Усреднив выражение (7.3.24) по продольной координате на участке с характрной длиной L, получаем

$$\beta = \frac{1}{L}\int_0^L D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=y_N} dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left[\frac{d}{dx}\int_0^{y_N} ucdy\right] dx. \tag{7.3.25}$$

После усреднения обеих частей равенства (7.3.25) по поверхности контакта, вычисления интеграла с учетом граничного условия (7.3.6) и обезразмеривания вида $x = \delta_p \mathrm{RePr}\bar{x}$ получим выражение для среднего коэффициента массоотдачи в пленку жидкости:

$$\beta = \frac{1}{Lc_p}\int_0^L D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=y_N} dx = \frac{1}{Lc_p}\left[\int_0^{y_N} ucdy\right]_{x=L} =$$

$$= \frac{u_p\delta_p}{L}\left[\int_0^{y_N} \bar{u}\bar{c}dy\right]_{\bar{x}=L/(\delta_p\mathrm{RePr})} = \frac{u_p\delta_p}{L} HT\Big|_{\bar{x}=L/(\delta_p\mathrm{RePr})} \tag{7.3.26}$$

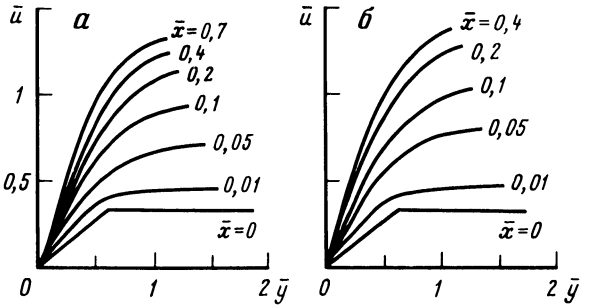


Рис. 7.3.1. Зависимость безразмерной скорости от поперечной координаты для E = = 0,1, $H1$ = 3 при Re = 100 (*а*) и 500 (*б*)

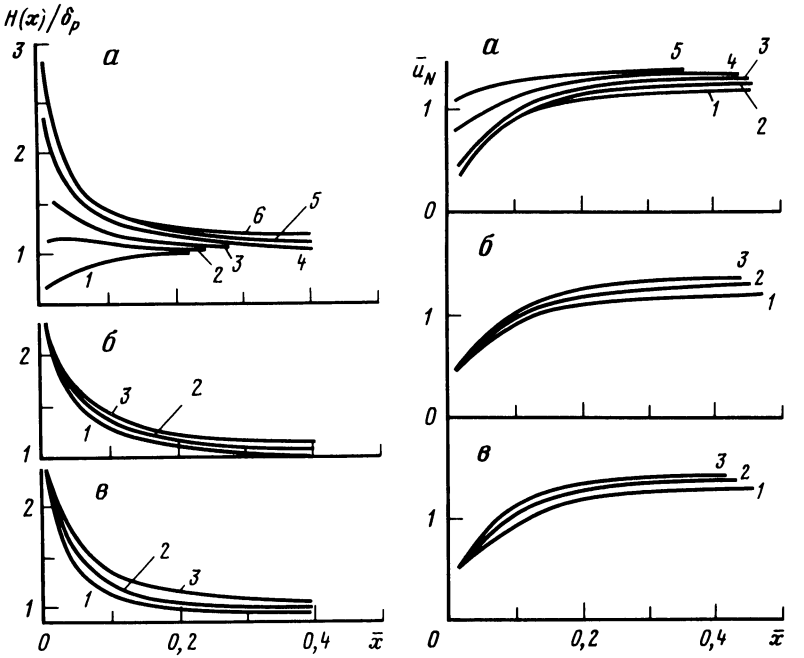


Рис. 7.3.2. Зависимость безразмерной толщины пленки жидкости от безразмерной толдлины спирали

а: Re = 300; E = 0,1; *1* – $H1$ = 0,5; *2* – 1; *3* – 1,5; *4* – 3; *5* – 7; *6* – $H1$ = 10; *б*: E = = 0,1; $H1$ = 3; *1* – Re = 500; *2* – 300; *3* – Re = 100; *в*: Re = 300; $H1$ = 3; *1* – E = 1; *2* – 0,5; *3* – E = 0,1

Рис. 7.3.3. Зависимость безразмерной поверхности скорости от безразмерной длины спирали

а: Re = 300; E = 0,1; *1* – $H1$ = 10; *2* – 7; *3* – 3; *4* – 1,5; *5* – $H1$ = 1; *б*: E = 0,1; $H1$ = 3; *1* – Re = 100; *2* – 300; *3* – Re = 500; *в*: Re = 300, $H1$ = 3; *1* – E = 0,1; *2* – 0,5; *3* – E = 1

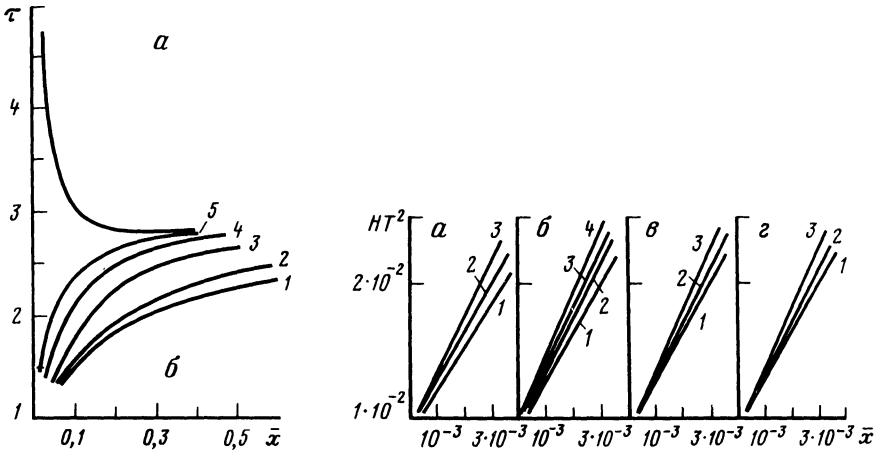


Рис. 7.3.4. Зависимость локального касательного напряжения от безразмерной длины спирали для Re = 300, E = 0,1
а: $H1$ = 0,5; *б*: *1* – $H1$ = 10; *2* – 7; *3* – 3; *4* – 1,5; *5* – $H1$ = 1

Рис. 7.3.5. Зависимость величины HT^2 для массообмена от безразмерной длины спирали
а: Re = 100; E = 0,1; Δ = 0,1; *1* – Pr = 100; *2* – 300; *3* – Pr = 1000; *б*: Re = 100; E = 0,1; Pr = 300; *1* – Δ = 0,1; *2* – 0,4; *3* – 1; *4* – Δ = 1,6; *в*: Re = 100; Δ = 0,1; Pr = = 300; *1* – E = 0,1; *2* – 0,5; *3* – E = 1; *г*: E = 0,1; Pr = 300; Δ = 0,1; *1* – Re = 100; *2* – 500; *3* – Re = 1000

Алгоритм, изложенный выше, был применен для расчета на входном участке поля скоростей, концентраций, поверхности раздела, касательного напряжения на стенке спирального канала в зависимости от ширины щели, числа Re и конструктивного параметра спирали E.

На рис. 7.3.1 представлен характерный вид развития профиля скорости в пленке жидкости $H1 = 1/\Delta$. На рис. 7.3.2 представлена зависимость безразмерной толщины пленки жидкости от безразмерной длины спирали. Из рисунков видно, что существенное влияние ширины щели на ускоренное течение пленки жидкости наблюдается до отношения $H1$, равного 7. При $H1 > 7$ ширина щели влияет на ускоренное течение пленки жидкости незначительно.

На рис. 7.3.3 представлена зависимость безразмерной поверхностной скорости от безразмерной длины спирали. Развитие поверхностной скорости подчиняется тем же закономерностям, что и развитие пленки жидкости (см. гл. 5).

На рис. 7.3.4 представлена характерная зависимость касательного напряжения на стенке спирального аппарата при различных значениях безразмерной ширины щели. Как видно из рисунка, наблюдается резкая зависимость касательного напряжения в области около кромки пленочного распределителя, причем для $H1 < 1$ оно падает около кромки пленочного распределителя, а для $H1 > 1$ – возрастает.

На рис. 7.3.5 показан характерный вид зависимости величины HT^2 от безразмерной длины спирали при различных значениях гидродинамических параметров. Из рисунка видно, что большим значениям Δ, E, Re, Pr

соответствуют и большие значения HT^2. Влияние этих параметров на величину отрезка, отсекаемого от оси, незначительно; величина отрезка колеблется от $0{,}85 \cdot 10^{-2}$ до 10^{-2}, поэтому за нее можно принять 0,009. Величина HT^2 аппроксимируется следующим выражением:

$$HT^2 = (3{,}5 + 0{,}7\Delta + 1{,}2E + 0{,}001\,\mathrm{Re} + 0{,}0007\,\mathrm{Pr})\bar{x} + 0{,}009, \qquad (7.3.27)$$

точность которого в исследованном интервале параметров составляет около 5%. Формула для среднего коэффициента массоотдачи в жидкую фазу с учетом (7.3.27) принимает вид

$$\beta = \frac{q^{1/3}\omega^{1/3}A^{1/6}D^{1/2}}{3^{2/3}\nu^{1/6}L^{1/2}} \times$$

$$\times \sqrt{3{,}5 + 0{,}7\Delta + 1{,}2E + 10^{-3}\,\mathrm{Re} + 7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pr} + 9 \cdot 10^{-3}\frac{\delta_p \mathrm{RePr}}{L}}, \qquad (7.3.28)$$

где

$$\delta_p = 3^{1/3}\nu^{1/3}q^{1/3}/\omega^{2/3}A^{1/3};\ \ \mathrm{Re} = 3q/\nu;\ \ \Delta = \sqrt[3]{\mathrm{Re}/\mathrm{Ga}};$$
$$E = h_0/A. \qquad (7.3.29)$$

Сравнивая формулы для коэффициентов массоотдачи в жидкую пленку, рассчитанные по методу интегральных соотношений (7.1.21) и по методу равных поверхностей (7.3.28), можно отметить их сходство в функциональных зависимостях от основных параметров процесса. Однако численные их значения несколько отличаются: расчетные данные по формуле (7.3.28) несколько превышают данные по формуле (7.1.21). Такое различие можно объяснить тем, что для описания полей концентрации и скоростей в методе поверхностей равных расходов применялось большое число базисных функций, с помощью которых более полно аппроксимировались течение и массоперенос.

§7.4. ДВУХФАЗНЫЙ МАССООБМЕН. МЕТОД ПОВЕРХНОСТЕЙ РАВНЫХ РАСХОДОВ

В § 7.3 методом поверхностей равных расходов проведено исследование гидродинамики и массообмена в слое жидкости на вращающейся спирали в отсутствие волнообразования и сил трения на поверхности раздела фаз. В данном параграфе проведено изучение влияния взаимодействия газового потока с пленкой жидкости на гидродинамику и массообмен с помощью касательных сил на поверхности раздела фаз, т.е.

$$\text{при}\quad y = H(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} = B. \qquad (7.4.1)$$

Введем безразмерную величину касательного напряжения через гидродинамические и физико-химические параметры течения Re, Ga, Δ, Γ, т.е.

$$B_0 = \frac{\mathrm{Ga}}{\mathrm{Re}}\Delta^2\Gamma,$$

где

$$\mathrm{Re} = 3q/\nu;\quad \mathrm{Ga} = \omega^2 A h_0^3/\nu^2;\quad \Delta = \delta_p/h_0;$$

$$\Gamma = 3\tau_0/\rho\omega^2 A h_0;\quad h_0 = H(0),\quad H_1 = 1/\Delta. \tag{7.4.2}$$

При решении системы уравнений (7.3.1) методом поверхностей равных расходов с учетом граничного условия (7.4.1) в отличие от § 7.1 и 7.2 обезразмеривание продольной координаты проведено по толщине δ_p. Эта толщина в формуле (7.4.2) найдена из решения системы уравнений (7.3.1) с учетом граничного условия (7.4.1) на гидродинамически установившемся участке и имеет вид

$$\delta_p = H_0 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ga}}\left(1 - \frac{B_0}{2}\right)}. \tag{7.4.3}$$

В соответствии с (7.4.2) выражения для массовых сил примут следующий вид:

$$F_x = 9\left(1 - \frac{B_0}{2}\right)\frac{\theta^2 + 1}{\theta^2 + 2} \pm \frac{6\mathrm{Ga}^{1/2} E^{1/2} \Delta^2}{\mathrm{Re}}\,\bar{v};$$

$$F_y = -\frac{9\mathrm{Ga}\Delta^3}{\mathrm{Re}^2}\theta\,\frac{\theta^2 + 1}{\theta^2 + 2} \mp \frac{6\mathrm{Ga}^{1/2} E^{1/2} \Delta^2}{\mathrm{Re}}\,\bar{u}, \tag{7.4.4}$$

где $E = h_0/A$.

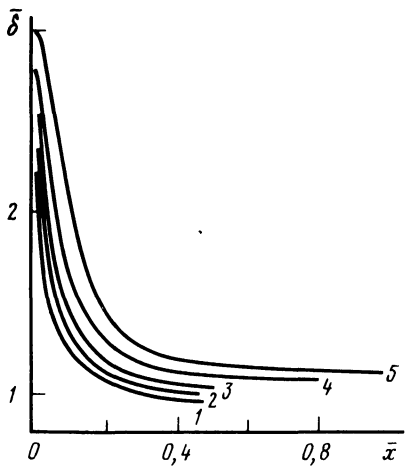
Граничные условия для уравнений (7.3.1) и (7.3.2) при решении данной задачи остаются прежними, т.е.

$$\begin{aligned} &\text{при } y = 0 \quad u = v = c = 0;\\ &\text{при } y = H(x) \quad c = c_p;\\ &\text{при } x = 0 \quad c = 0. \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Методика расчета гидродинамики и массообмена в пленку жидкости при наличии касательного напряжения на поверхности раздела такая же, как и в § 7.3.

Опуская промежуточные выкладки, изложенные подробно в § 7.3, приведем окончательные результаты численного решенеия системы (7.3.1) и (7.3.2) с граничными условиями (7.4.1) и (7.4.5) с учетом выражения для массовых сил, представленных формулами (7.4.4) [139].

Зависимость безразмерной толщины пленки от безразмерной длины спирали представлена на рис. 7.4.1. Из рисунка следует, что касательное напряжение существенно влияет на выход толщины пленки на стационарный режим: с повышением безразмерного касательного напряжения выход на стационарный режим затягивается. На рис. 7.4.2 показано развитие профиля скорости по длине спирали в условиях взаимодействия газового потока с толщиной (пунктирные линии) и при отсутствии такого взаимодействия (сплошные линии). Профиль скорости в первом случае становится менее заполненным, чем во втором.



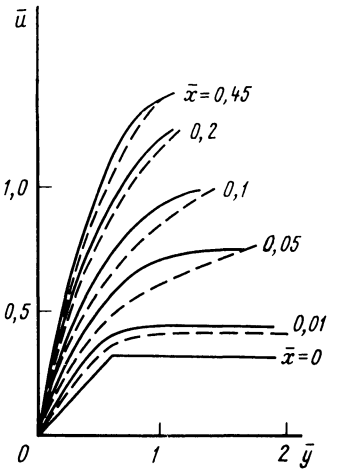


Рис. 7.4.1. Зависимость безразмерной толщины пленки $\bar{\delta} = \delta/\delta_p$ от безразмерной длины спирали $\bar{x} = x/\delta_p \mathrm{Re}$ для $\mathrm{Re} = 3q/\nu$, $E = 0{,}1$, $\Delta = 1/3$ при различных значениях числа Г

1 – Г = 0,1; *2* – 0; *3* – 0,1; *4* – 0,3; *5* – Г = 0,5

Рис. 7.4.2. Развитие профиля скорости в пленке жидкости при различных состояниях от входа x для Re = 300, $E = 0{,}1$, $\Delta = 1/3$ и Г = 0 (сплошные линии) и 0,1 (пунктирные линии)

Для среднего коэффициента массоотдачи, определяемого соотношениями

$$\beta = \frac{1}{Lc_p}\int_0^L D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=y_N} dx = \frac{1}{Lc_p}\int_0^L \left[\frac{d}{dx}\int_0^{y_N} ucdy\right] = \frac{u_p\delta_p}{L}HT\Big|_{\bar{x}=L/(\delta_p \mathrm{RePr})},$$

получена формула [139], аппроксимирующая численное решение систем (7.3.1) и (7.3.2) с граничными условиями (7.4.1) и (7.4.5):

$$\beta = \frac{q^{1/3}\omega^{1/3}A^{1/6}D^{1/2}}{3^{2/3}\nu^{1/6}L^{1/2}}\,[(3{,}5 + 0{,}7\,\Delta + 1{,}2E + 0{,}001\,\mathrm{Re} +$$

$$+ 0{,}0007\,\mathrm{Pr} + 0{,}009\delta_p \mathrm{RePr}/L)(1 + 0{,}3\Gamma)]^{1/2}. \qquad (7.4.6)$$

При Г = 0 формула (7.4.6) превращается в формулу (7.3.28), полученную этим же методом в условиях отсутствия взаимодействия газового потока с пленкой жидкости.

§ 7.5. ОДНОФАЗНЫЙ И ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛООБМЕН
(метод поверхностей равных расходов)

При расчете теплообмена в пленке жидкости на вращающейся спирали Архимеда с учетом входного участка система уравнений (7.3.1) остается прежней. Уравнение диффузии (7.3.2) заменено уравнением конвективной теплопроводности

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{7.5.1}$$

Граничные условия для системы уравнений (7.3.1), (7.5.1) следующие:

$$\begin{aligned} &y = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ T = T_{ст},\\ &y = H(x),\ \partial u/\partial y = \tau_0/\mu = B,\ p = \text{const},\ T = T_{пл},\\ &x = 0,\ T = T_{ст}. \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Опуская промежуточные выкладки, которые проделаны в § 7.3, приведем окончательное решение задачи для коэффициента теплоотдачи (α), усредненного по характерной длине L при $B = 0$ [136]:

$$\alpha_{ст} = \frac{c_p \rho q^{1/3}\omega^{1/3}A^{1/6}a^{1/2}}{3^{2/3}L^{1/2}\nu^{1/6}}\,[3{,}9 + 0{,}75\Delta + 0{,}9E + 0{,}001\,\mathrm{Re} +$$

$$+ 0{,}007\,\mathrm{Pr_т} + 0{,}005\,\Delta\ \delta_p \mathrm{RePr_т}/L\,]^{1/2}, \tag{7.5.3}$$

где a – коэффициент температуропроводности, а число $\mathrm{Pr_т} = \nu/a$.

При произвольном значении B эта задача решена в работе [139]. Формула для среднего коэффициента теплоотдачи с учетом входного участка имеет следующий вид:

$$\alpha_{2ср} = \alpha_{1ср}(1 + 0{,}3\Gamma)^{1/2}, \tag{7.5.4}$$

где $\alpha_{ср}$ дан формулой (7.5.3).

Обозначения величин, входящих в формулы (7.5.3) и (7.5.4), даны в § 7.3 и 7.4.

Глава 8

ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН В ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЯХ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА

§ 8.1. ЛАМИНАРНАЯ СТРУЯ ЖИДКОСТИ

Интерес, проявляемый к струйным течениям, объясняется их большим техническим приложением. Как правило, струйные течения имеют определяющее значение в том или ином технологическом процессе. Чтобы интенсифицировать технологический процесс, необходимо тщательно изучить гидродинамику и тепломассобмен в струях. Струйное течение занимает также видное место в теоретической и особенно прикладной механке вязкой жидкости. Литература, посвященная струйному течению и тепломассообмену в нем, огромна [104–106].

В химической технологии струйные течения также широко применяются. Так, получила широкое применение ламинарная струя для исследования нестационарной абсорбции при малых периодах контакта [191, 192]. Период контакта в таком массообменном контактном устройстве зависит от расстояния между соплом, из которого вытакает струя, и приемной трубкой, а также от расхода струи.

Ламинарная струя применяется также для исследования массоотдачи в жидкой фазе [8] и для моделирования хемосорбции по методу Данквертса [9]. Струйные течения реализуются в ряде режимов на контактных устройствах [193, 194].

Известен струйный абсорбер Вентури [195] с подачей жидкости под давлением. Вытекающая из форсунки струя жидкости эжектирует газ.

На ситчатых тарелках в широких интервалах изменения нагрузок по жидкости и газу существенная доля межфазового контакта приходится на струю газа, вытекающую из отверстий этих тарелок. Это явилось причиной тщательного изучения массоотдачи как в одиночной газовой струе, так и в случае массового барботажа [196].

Все сказанное выше указывает на важность исследования струйного течения при решении ряда задач химической технологии. Особый интерес представляет изучение возможнсоти применения теоретической гидромеханики к решению поставленных выше задач.

Отметим, что известные решения строились из условия пренебрежения начальным участком, т.е. строились решения, в которых игнорировались размеры отверстий, распределения скорости и концентрации в сечении выходного отверстия, называемого насадкой.

Ламинарная осесимметричная струя жидкости, вытекающая из отверстия под действием силы тяжести, представляет интерес как удобная модель для изучения механизма абсорбции [9], а также для моделирования при определенных условиях некоторых видов контактных устройств [8, 196].

Входной участок, на котором происходит существенное развитие профилей скоростей, концентраций и радиуса струи, оказывает влияние на массообмен в струе [140]. В связи с этим в данном параграфе с помощью

метода, изложенного в главе 5, проведено исследование гидродинамики и массообмена осесимметричной струи жидкости с учетом входного участка на основании решения уравнений Навье–Стокса и конвективной диффузии.

Свяжем систему координат с осью симметрии, а ее начало совместим с плоскостью выхода струи, ось x направим по потоку, а y – перпендикулярно ему. В этом случае система уравнений примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u + g; \tag{8.1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + v\left(\Delta v - \frac{\nu}{y^2}\right); \tag{8.1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0; \tag{8.1.3}$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\Delta c, \tag{8.1.4}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Рассмотрим случай, когда сопротивление массопередаче сосредоточено в струе жидкости и молекулярный перенос в поперечном направлении много больше продольного, так что последним можно пренебречь.

С учетом этих предположений система уравнений (8.1.1) – (8.1.4) после введения безразмерных переменных $u = u_0\overline{u}$, $y = R_0\overline{y}$, $p = p_0 + \rho u_0^2\overline{p}$, $c = c_p\overline{c}$, где u_0 и R_0 – скорость и радиус струи в начальном сечении; c_p – концентрация насыщения; ρ – плотность, примет вид (черточки опущены) [140]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{\mathrm{Fr}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0; \tag{8.1.5}$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c}{\partial y}\right). \tag{8.1.6}$$

Из условия осесимметрии следует, что

$$\text{при } y = 0 \quad v = 0, \quad \partial u/\partial y = 0, \quad \partial c/\partial y = 0. \tag{8.1.7}$$

На межфазной граничной поверхности струи при отсутствии касательных напряжений и при постоянстве концентраций граничные условия имеют вид

$$\text{при } y = H(x) \quad \partial u/\partial y = 0, \quad c = c_p. \tag{8.1.8}$$

В случае абсорбции труднорастворимых газов концентрация распределяемого компонента в начальном сечении струи принимается равной нулю, если абсорбцию проводят чистой водой или другой какой-либо жидкостью, или же равной постоянному значению в том случае, когда абсорбтив был уже насыщен до известной концентрации, меньшей, чем равновесная, т.е.

$$x = 0 \quad c = 0 \quad \text{или} \quad c = c_0 = \text{const}. \tag{8.1.9}$$

Сложность решения уравнений (8.1.5) и (8.1.6) состоит в том, что, помимо определения полей скорости и концентраций как функции координат x и y, требуется также найти саму поверхность струи. Для ее определения используем кинематическое условие на поверхности струи:

$$\text{при} \quad y = H(x) \quad v = u \frac{dH}{dx} . \tag{8.1.10}$$

Решим систему уравнений (8.1.5), (8.1.6) с граничными и начальными условиями (8.1.7) – (8.1.9) методом, подробно описанным в главе 5. Для этого введем в поле течения линии равного расхода $y_k = y_k(x)$, так что

$$u_k(x) = u[x, y_k(x)]\,; \; v_k(x) = v[x, y_k(x)]\,;$$

$$c_k(x) = c[x, y_k(x)]\,;$$

$$k = 1, 2,.., N. \tag{8.1.11}$$

Согласно (8.1.11), производная по независимой переменной имеет вид

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right]_{y = y_k;\, \varphi_k = u_k,\, c_k}. \tag{8.1.12}$$

Градиент давления $\partial p/\partial x$ в уравнении (8.1.5) определим из следующей формулы [143]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{\text{We}} \frac{1}{H^2(x)} \frac{dH}{dx} .$$

Подставляя выражение (8.1.10) и (8.1.12) в систему уравнений (8.1.5) и (8.1.6) и учитывая соотношение для градиента давления, придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений k-го слоя:

$$u_k \frac{du_k}{dx} = -\frac{1}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{We}} \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k} \frac{\partial u_k}{\partial y_k} \right); \tag{8.1.13}$$

$$u_k \frac{dc_k}{dx} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 c_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k} \frac{gc_k}{\partial y_k} \right). \tag{8.1.14}$$

Уравнение неразрывности (8.1.5) равносильно следующей системе уравнений:

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k} yudy = \text{const}_k,\ k = 2,3,...,N. \tag{8.1.15}$$

Интеграл (8.1.15) вычислим, например, по формуле трапеций:

$$(y_k - y_{k-1})(y_k u_k + y_{k-1}u_{k-1}) = \text{const}_k. \tag{8.1.16}$$

Заметим, что входящие в равенство (8.1.16) величины y_k и u_k являются функциями координаты x.

Дифференцируя (8.1.16) по x и подставив в полученную производную du_k/dx выражение (8.1.13), найдем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения поверхностей равных расходов:

$$\frac{dy_k}{dx} = A_k \frac{B_N}{1 - A_N} + B_k;\ k = 1, 2,..,N, \tag{8.1.17}$$

где

$$A_1 = B_1 = 0;$$

$$A_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - u_k}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}} A_k - \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}};$$

$$B_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - u_k}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}} B_k - \frac{\Delta_{k+1} + \gamma_{k+1}}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}};$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_k u_k + y_{k+1}u_{k+1}}{y_{k+1} - y_k};\ \beta_{k+1} = \frac{1}{\text{We}H^2}\theta_{k+1};$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{\text{Fr}}\theta_{k+1};\quad \theta_{k+1} = \frac{y_k}{u_k} + \frac{y_{k+1}}{u_{k+1}};$$

$$\Delta_{k+1} = \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{y_{k+1}}{u_{k+1}}\Sigma_{k+1} + \frac{y_k}{u_k}\Sigma_k\right);$$

$$\Sigma_{k+1} = \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial y_{k+1}^2} + \frac{1}{y_{k+1}}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial y_{k+1}},$$

где $\text{Re} = u_0 R_0/\nu$, $\text{Fr} = u_0^2/gR_0$, $\text{We} = \rho u_0^2 R_0/\delta$ – числа Рейнольдса, Фруда и Вебера; δ – коэффициент поверхностного натяжения; ν – кинематическая вязкость.

Для вычисления диссипативного слагаемого, входящего в правую часть равенства (8.1.13), и правой части уравнения (8.1.14) воспользуемся следующим приемом. Представим решение $\varphi_k(x)$ в виде разложения в ряд

по полной системе сеточных функций:

$$\varphi_k(x) = \sum_{y=1}^{N} A_j(x)\,\Psi_{jk}(x), \tag{8.1.18}$$

при $\varphi_k(x) = u_k(x), c_k(x)$; $\Psi_{jk} = V_{jk}, k_{jk}$; $A_j(x) = a(x), a_1(x)$.

Для определения профилей скорости систему базисных фукнций в (8.1.18) выбираем в виде

$$V_{jk} = 1, \quad V_{jk} = (\eta_k)^{2j-2}\left(1 - \frac{j-1}{j}\,\eta_k^2\right), \tag{8.1.19}$$

а для профилей концентраций

$$k_{j.k} = T_{j+1}(\eta_k) + T1_{j+1}(0)(2\eta_k^2 - \eta_k - 1), \tag{8.1.20}$$

где $\eta_k = y_k(x)/H(x)$, $T_{j+1}(\eta_k)$ – ортогональные полиномы Чебышева; $T1_{j+1}(\eta_k)$ – их первые производные.

Алгоритм решения системы уравнений (8.1.13), (8.1.14) и (8.1.17) аналогичен описанному в главе 5.

Рассмотренный численный алгоритм применен для определения полей скоростей, концентраций и поверхности струи.

Средний коэффициент массоотдачи струи жидкости, вытекающей из отверстия под действием силы тяжести, определялся из следующего выражения:

$$\beta_0 = \frac{1}{\Delta c \Pi} \int_0^s 2\pi R(x) D \frac{\partial c}{\partial n}\, ds, \tag{8.1.21}$$

где $\Pi = 2\pi R(x)x$; $\dfrac{\partial c}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial x}\cos(\hat{nx}) + \dfrac{\partial c}{\partial y}\cos(\hat{nx})$.

Выражение (8.1.21) приведем к следующему виду:

$$G = 2\pi R_0^2 u_0 c_p (1 + \mathrm{tg}^2\theta) \int_0^{u_N} \bar{y}\bar{u}\bar{c}\,d\bar{y}\,|_0^{\bar{s}} -$$

$$-2\pi R_0 D c_p \int_0^{\bar{s}} \bar{y}_n \frac{d\bar{c}}{dx}\,\mathrm{tg}\theta\, d\bar{x} = 2\pi R_0^2 u_0 c_p M. \tag{8.1.22}$$

Входящие в выражение (8.1.22) профили скорости $u(x)$, концентрации $c(x)$ и радиуса струи $R(x)$ находились численно из решения системы дифференциальных уравнений (8.1.13), (8.1.14) и (8.1.17). Характерный вид зависимости безразмерного потока (M) от расстояния входного отверстия, из которого вытекает струя, для различных характерных параметров Re, Pr, Fr представлен на рис. 8.1.1. Эти результаты численных решений задачи для средней безразмерной скорости абсорбции на участке струи дли-

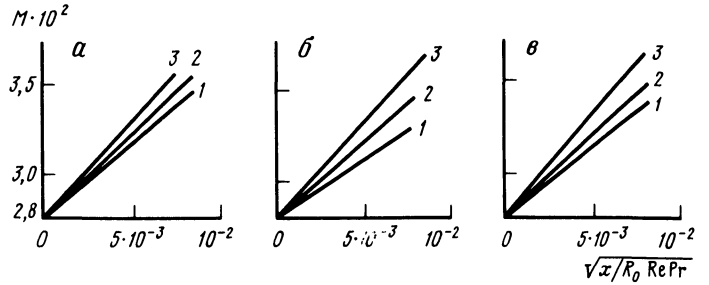


Рис. 8.1.1. Зависимость безразмерной величины скорости абсорбции M от безразмерной длины струи при различных значениях Fr, Pr, Re

а: Fr = 100; Pr = 500; *1* – Re = 500; *2* – 3000; *3* – Re = 5000; *б*: Fr = 100; Re = 1000; *1* – Pr = 100; *2* – 500; *3* – Pr = 1000; *в*: Re = 1000; Pr = 500; *1* – Fr = 10 000; *2* – 100; *3* – Fr = 10

ной x аппроксимированы следующими выражениями:

для $\mathrm{Fr} \leqslant 100$

$$M = (4 \cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 4 \cdot 10^{-5}\mathrm{Re} - 2{,}4 \cdot 10^{-3}\mathrm{Fr} + 0{,}84)\sqrt{\frac{x}{\mathrm{RePr}R_0}}; \qquad (8.1.23)$$

для $\mathrm{Fr} > 100$

$$M = (4 \cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 0{,}6)\sqrt{\frac{x}{\mathrm{RePr}R_0}}. \qquad (8.1.24)$$

Точность аппроксимации в интервале чисел $2{,}5 \cdot 10^2 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 5 \cdot 10^3$, $10^2 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 10^3$ и $10 \leqslant \mathrm{Fr} \leqslant 10^4$ составляет 5%.

Если известна длина входного участка ($l_{вх}$), то вместо локального значения x в формулы (8.1.23) и (8.1.24) следует подставить значение $l_{вх}$. Тогда с помощью этих формул можно рассчитать скорость абсорбции на входном участке.

С учетом выражений (8.1.21) – (8.1.24) формулы для среднего коэффициента массоотдачи жидкой струи длиной l на входном участке примут вид:

для $\mathrm{Fr} \leqslant 100$

$$\beta_0 = \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{l_{вх}^{1/2}} (4 \cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 4 \cdot 10^{-5}\mathrm{Re} - 2{,}4 \cdot 10^{-3}\mathrm{Fr} + 0{,}84): \qquad (8.1.25)$$

для $\mathrm{Fr} \geqslant 100$

$$\beta_0 = \frac{u_0^{1/2} D^{1/2}}{l_{вх}^{1/2}} (4 \cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 0{,}6). \qquad (8.1.26)$$

В связи с тем, что устойчивая длина струи (l) практически соизмерима с длиной входного участка ($l_{вх}$), в расчетах скорости абсорбции в качестве характерного размера длины можно брать саму длину струи (l). В соответствии с этим в расчетах скорости абсорбции, проведенных ниже, было по-

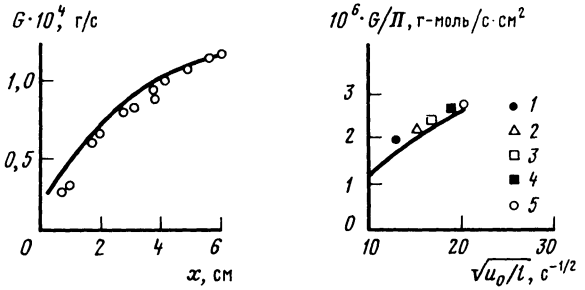


Рис. 8.1.2. Сравнение результатов расчета скорости абсорбции CO_2 водой по формулам (8.1.25) и (8.1.26) (сплошная линия) с экспериментальными данными работы [197] (точки) при следующих значениях переменных: $u_0 = 36{,}5$ см/с; $R_0 = 0{,}18664$ см; Re = 675; Pr = 525; Fr = 7,3; We = 3,4; $D = 1{,}92 \cdot 10^{-5}$ см^2/с; $\nu = 1{,}01 \cdot 10^{-2}$ см^2/с; $c_p = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ г/см^3

Рис. 8.1.3. Зависимость скорости абсорбции от времени контакта

Сплошная линия – расчет по формулам (8.1.25) и (8.1.26), точки – расчет по экспериментальным данным работы [192]; *1* – $u_0 = 168$ см/с; *2* – 223; *3* – 266; *4* – 344; *5* – $u_0 = 390$ см/с

ложено, что $l_{вх} = l$. Возникаемая в связи с этим погрешность зависит от числа Re и начального радиуса струи.

Ниже приведено сопоставление предположенных теоретических формул (8.1.22) – (8.1.26) с экспериментальными данными различных авторов [192, 197], которые исследовали скорость абсорбции CO_2 струей воды, вытекающей из длинной капиллярной трубки под действием силы тяжести.

На рис. 8.1.2 представлено такое сравнение. Сплошная линия получена из расчетов по формуле (8.1.22) с учетом выражений (8.1.23) и (8.1.24), точки – экспериментальные данные [197]. Как видно из рисунка, наблюдается удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

На рис. 8.1.3 представлено сопоставление теоретических результатов расчета коэффициентов абсорбции по предложенным формулам (8.1.25), (8.1.26) с экспериментальными данными работы [192], в которой изучалась скорость абсорбции CO_2 водой от времени контакта (l/u_0). Как следует из рисунка, экспериментальные данные при больших временах контакта, а следовательно, при $u_0 = \text{const}$, меньших расстояний от входа, согласуются лучше с теоретическими результатами на входном участке. Это объясняется тем, что эффект входного участка при расчете коэффициента массоотдачи струи заметен чем более, чем ближе к отверстию проводились замеры в опытах.

В табл. 8.1.1 проведено сравнение скорости абсорбции малорастворимого газа струей жидкости по предложенным формулам (8.1.22) – (8.1.24) с экспериментальными данными работы [192]. Из таблицы следует удовлетворительное согласие теории и эксперимента, к тому же характерные параметры процесса абсорбции струей жидкости изменялись в заметных интервалах (Re ~ в 2 раза, Fr ~ в 6 раз, We ~ в 5 раз). В связи с этим для изученного интервала гидродинамических и физико-химических величин

Таблица 8.1.1

Абсорбция малорастворимого газа струей жидкости из неподвижного газа CO_2 ($D = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ см^2/с, l =0, 952 см, R_0 = 0,3835 см)

u_0, см/с	Re	Fr	We	$G \cdot 10^6$ г-моль/с		Ошибка,%
				эксперимент [192]	расчет по формуле (8.1.22)	
168	640	750	14,7	0,445	0,408	8
223	845	1320	26	0,49	0,456	7
266	1000	1880	37	0,523	0,493	5,7
344	1300	3150	62	0,58	0,565	2,6
390	1480	4400	80	0,61	0,59	3

формулы (8.1.22) – (8.1.26) могут быть рекомендованы для практических расчетов.

Если начальная скорость падения струи достаточно велика, силы тяжести не изменяют существенно u_x и она на всем протяжении течения остается практически равной средней скорости в начальном сечении струи u_0, то массоотдачу в струе можно рассчитать из решения следующей задачи:

$$u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right). \tag{8.1.27}$$

Как и ранее, используя выводы теории пограничного слоя, полагаем, что поперечный молекулярный перенос компонента в струе больше продольного, так что последним можно пренебречь. Тогда уравнение (8.1.27) примет вид

$$u_0 \frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c}{\partial y}\right). \tag{8.1.28}$$

Граничные и начальные условия для концентрации остаются прежними и имеют вид

$$c(y, 0) = c_0; \tag{8.1.29}$$

$$c(R_1, x) = c_p; \tag{8.1.30}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(0, x) = 0. \tag{8.1.31}$$

Введем функцию $N(y, x) = c(y, x) - c_0$, после чего уравнение (8.1.28), начальные и граничные условия (8.1.29) – (8.1.31) примут вид

$$u_0 \frac{\partial N}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial N}{\partial y}\right); \tag{8.1.32}$$

$$N(y, 0) = 0; \tag{8.1.33}$$

$$N(R_1, x) = c_p - c_0 = N_1; \tag{8.1.34}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}(0, x) = 0. \tag{8.1.35}$$

Для расчета коэффициента массоотдачи по уравнению (8.1.32) с граничными условиями (8.1.33) – (8.1.35) используем метод Хевисайда–Карсона. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{N}(y) = p \int_0^\infty \exp(-px) N(y, x) dx, \tag{8.1.36}$$

которая является изображением Хевисайда–Карсона функции $N(y, x)$. Умножив все члены уравнения (8.1.32) на величину $p\exp(-px)$ и проинтегрировав по x в пределах от 0 до ∞, получим

$$\frac{d^2\widetilde{N}}{dy} + \frac{1}{y}\frac{d\widetilde{N}}{dy} - \frac{pu_0}{D}\widetilde{N} = 0. \tag{8.1.37}$$

Введя новую переменную $z\sqrt{D/pu_0} = y$, приведем уравнение (8.1.37) к одному из видов уравнения Бесселя. Решением этого уравнения будут функции Бесселя первого и второго рода $I_0(z)$ и $K_0(z)$. Следовательно, решение его можно записать:

$$N = AI_0(z) + BK_0(z). \tag{8.1.38}$$

Константы интегрирования A и B определим из граничных условий (8.1.33) – (8.1.35). Так, из граничного условия (8.1.34) следует

$$N_1 = AI_0(z_0) + BK_0(z_0), \quad z_0 = R_1\sqrt{pu_0/D}. \tag{8.1.39}$$

С помощью другого граничного условия (8.1.35) с учетом того, что $dI_0(z)/dz = I_1(z)$, $dK_0(z)/dz = -K_1(z)$, получим

$$\lim_{z \to 0} [AI_1(z) - BK_1(z)] = 0. \tag{8.1.40}$$

Так как при $z \to 0$ $K_1(0) \to \infty$, а $I_1(0) \to 0$, то из-за ограниченности решения (8.1.38), вытекающего из граничных условий (8.1.33) – (8.1.35), следует положить в соотношении (8.1.40) константу $B = 0$. Тогда окончательное решение уравнения (8.1.37), удовлетворяющее поставленными граничными условиями, примет вид

$$\widetilde{N} = N_1 I_0(z)/I_0(z_0), \tag{8.1.41}$$

где $z_0 = R_1\sqrt{pu_0/D}$; K_1 – радиус струи на стабилизированном участке.

Локальный коэффициент массоотдачи, записанный в операторной форме, можно получить продифференцировав выражение (8.1.41) по y и устремив найденную зависимость к y_0. Опуская выкладки, запишем

$$\beta_1 = \sqrt{u_0 D}\sqrt{p}. \tag{8.1.42}$$

Переходя в (8.1.42) от изображения к оригиналу, получим выражение для локального коэффициента массоотдачи:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{u_0 D}{x}}\,. \qquad (8.1.43)$$

Из выражения (8.1.43) средний коэффициент массоотдачи на длине жидкой струи l равен

$$\beta_\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{u_0 D}{l}}\,. \qquad (8.1.44)$$

Чтобы определить эффект входа, достаточно формулы (8.1.25) и (8.1.26) поделить на (8.1.44), тогда
для $\mathrm{Fr} \leqslant 100$

$$\frac{\beta_0}{\beta_\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{l}{l_{вх}}\right)^{1/2}(4\cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 4\cdot 10^{-5}\mathrm{Re} - 2{,}4\cdot 10^{-3}\mathrm{Fr} + 0{,}84); \qquad (8.1.45)$$

для $\mathrm{Fr} \geqslant 100$

$$\frac{\beta_0}{\beta_\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{l}{l_{вх}}\right)^{1/2}(4\cdot 10^{-4}\mathrm{Pr} + 0{,}6). \qquad (8.1.46)$$

Если предположить, что устойчивая длина струи совпадает с величиной входного участка, то $l/l_{вх} \approx 1$. В этом случае коэффициент массоотдачи, рассчитанный по формулам (8.1.25) и (8.1.26), будет приблизительно на 25–30% меньше коэффициента массоотдачи, рассчитанного из представления цилиндрической струи как твердого жгута, вытекающего с постоянной скоростью, равной средней скорости в начальном сечении.

Гидродинамика и массоотдача на входном участке ламинарной струи жидкости с учетом сил трения на межфазной поверхности рассмотрены в [142].

Влияние сил трения на движение струи жидкости, взаимодействующей с газовым потоком, учитывается касательным напряжением на межфазной поверхности, т.е.

$$\text{при } y = H(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} = B. \qquad (8.1.47)$$

Система координат и метод решения двухфазной задачи (с учетом граничного условия (8.1.47)) аналогичны решению задачи об истечении струи жидкости под действием силы тяжести и градиента давления. Опуская промежуточные выкладки, приведем решение системы уравнений (8.1.5) и (8.1.6) с граничными условиями (8.1.7) и (8.1.47) в виде аппроксимирующих численный расчет формул:

$$\beta_{ср} = \frac{u_0 R_0}{x} M\cdot A\,. \qquad (8.1.48)$$

где

$M = (4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pr} + 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Re} - 2{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Fr} + 0{,}84)\sqrt{x/\mathrm{RePr}R_0}$ при $\mathrm{Fr} \leqslant 100$

$M = (4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pr} + 0{,}6)\sqrt{x/\mathrm{RePr}R_0}$ при $\mathrm{Fr} > 100$;

$A = 1$ при $0 \leqslant \bar{B} < 0{,}01$;

$\lg A = (1{,}1 + 0{,}23/\bar{B})^{-1}$ при $\bar{B} \geqslant 0{,}01$;

$\bar{B} = \tau_0 R_0/\mu u_0$.

§ 8.2. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ ГАЗА

Случай течения газовой струи и тепломассообмен в ней при больших числах Рейнольдса распространен наиболее часто в связи с тем, что некоторые режимы течения газовой струи имеют место на ситчатых и других типах тарелок. Массообменные аппараты с ситчатыми тарелками составляют в настоящее время значительную долю от массообменной аппаратуры в химической и нефтехимической промышленности, включая и аппаратуру большой единичной мощности, поэтому вопрос изучения гидродинамики и массообмена в струе особенно важен. К тому же, если учесть тот факт, что массообмен на таких тарелках наиболее интенсивен при выходе струи из отверстий, приобретает особый интерес теоретическое изучение массообмена турбулентной газовой струи с учетом входного участка, т.е. участка, где происходит существенное развитие скоростей в газовой струе, а также и самой струи.

В настоящем параграфе методом, разработанным в главе 5, проведено исследование гидродинамики и массообмена в осесимметричной турбулентной газовой струе, вытекающей из отверстия в жидкость.

Уравнение турбулентного пограничного слоя для осесимметричной газовой струи имеет следующий вид [141]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_\text{т})y\frac{\partial u}{\partial y}\right]; \tag{8.2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0; \tag{8.2.2}$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(D + D_\text{т})y\frac{\partial c}{\partial y}\right]. \tag{8.2.3}$$

В этих уравнениях компоненты скорости, концентрации и давления являются средними величинами: D, $D_\text{т}$ – молекулярный и турбулентный коэффициенты диффузии; ν, $\nu_\text{т}$ – кинематические коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости. Коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии в общем случае являются функциями координаты y.

Граничными и начальными условиями этой задачи являются соотношения:

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0; \tag{8.2.4}$$

при $y = H(x)$ $c = c_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \tau_0/\mu = B$;

при $x = 0$ $c = c_1 = \text{const}$. (8.2.5)

Равенство производных скорости и концентрации по y на оси указывает на симметрию полей скоростей и концентрации. На поверхности струи при $y = H(x)$ учитывается касательное напряжение. Предполагается, что на поверхности струи концентрация постоянна. Для замыкания задачи используем известное соотношение Прандтля

$$\nu_т = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \tag{8.2.6}$$

Гипотеза Прандтля о связи пульсаций скорости с градиентом скоростей усредненного движения, выраженная в виде зависимости (8.2.6), должна быть дополнена гипотезой связи пути перемешивания l с характерными размерами течения струи. Отсутствие твердых границ при струйном течении дало основание Прандтлю предположить постоянство длины пути перемешивания поперек струи. Математически это предположение выражается соотношением

$$l = dR, \tag{8.2.7}$$

где R – половина ширины струи; d – коэффициент структуры струи, определяемый опытным путем.

Это предположение применялось в работах различных авторов, исследовавших струйное течение как в строгой постановке (Толмин, Шлихтинг) [198], так и в приближенной [199]. Формула (8.2.7), как показали результаты экспериментальных исследований, не лишена недостатков: во-первых, коэффициент d, входящий в эту формулу, не является универсальной постоянной (для плоскопараллельного следа за плохо обтекаемым телом величина d вдвое больше, чем для плоских и заполненных струй); во-вторых, величина не остается постоянной поперек струи [200] – на внешней границе струи она существенно меньше, чем в центральной ее части.

Это позволило получить для длины пути перемешивания следующее экспериментальное соотношение [201]:

$$\frac{l}{R} = \kappa_0 \frac{\kappa}{2} \frac{R_\sim}{R} \left[1 - \left(\frac{R}{R_\sim} \right)^2 \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right], \tag{8.2.8}$$

где $R_\sim = 1{,}5R$ – некоторая фиктивная граница импульсации.

Учитывая, что соотношение (8.2.8) достаточно хорошо описывает результаты многих авторов, примем в дальнейшем формулу (8.2.8) как некоторое обобщение экспериментальных данных. Заметим, что при $y = \pm R_\sim$ $l = 0$ и $\partial l/\partial y = \pm \kappa_0 \kappa$, причем $\kappa = 0{,}18$, а величина κ_0, полученная с учетом обобщения экспериментальных данных на начальном участке, имеет вид

$$\kappa_0 = 0{,}2 - 1{,}07 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Re} + 10^{-(0{,}4 + 0{,}0003\,\mathrm{Re})}. \tag{8.2.9}$$

Определив по формуле (8.2.6) с учетом соотношения (8.2.8) величи-

ну $\nu_т$, коэффициент турбулентной диффузии найдем из соотношения

$$D_т = \nu_т / \mathrm{Pr}_т ,$$

где $\mathrm{Pr}_т$ – турбулентное число Прандтля.

В исследованиях по гидродинамике и массообмену при струйном течении было выбрано $\mathrm{Pr}_т = 0{,}75$ [202].

Таким образом, система дифференциальных уравнений (8.2.1)–(8.2.3) с граничными условиями (8.2.4), (8.2.5) вместе с соотношениями (8.2.6), (8.2.8) и (8.2.9) является замкнутой. Она описывает массообмен турбулентной осесимметричной одиночной газовой струи, вытекающей из отверстия радиусом R_0 с некоторой заданной начальной скоростью u_0 в жидкость.

С помощью безразмерных переменных

$$u = u_0 \bar{u}, \quad y = R_0 \bar{y}, \quad p = p_0 + \rho u_0^2 \bar{p}, \quad x = \mathrm{Re} R_0 \bar{x} , \qquad (8.2.10)$$

$$c = c_2 + \bar{c}(c_1 - c_2), \quad \nu_т = \bar{\nu}_т R_0 u_0 ,$$

где R_0, u_0 – радиус и средняя скорость в начальном сечении; $\mathrm{Re} = u_0 R_0 / \nu$ (ν – коэффициент кинематической вязкости), данная система уравнений и граничные условия примут следующий вид (черточки опущены) [141]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) +$$

$$+ \nu_т \mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \nu_т}{\partial y} ; \qquad (8.2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0; \qquad (8.2.12)$$

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\nu_т \mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}_т}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}_т}\frac{\partial \nu_т}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y} ; \qquad (8.2.13)$$

при $y = 0$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad v = 0, \quad \dfrac{\partial c}{\partial y} = 0;$

при $y = H(x)/R_0$ $\quad c = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\tau_0 R_0}{\mu u_0} = \bar{B}; \qquad (8.2.14)$

при $x = 0$ $\quad c = 1.$

В некоторых случаях для устранения малого параметра перед старшей производной в уравнении конвективной диффузии применялась безразмерная переменная вида $x = \mathrm{Re} R_0 \mathrm{Pr} \bar{x}$. Такой вид обезразмеривания облегчает аппроксимацию численных данных.

Система уравнений (8.2.11)–(8.2.13) с граничными условиями (8.2.14) решена методом, подробно описанным в главе 5. С этой целью в поле течения струи введены линии равного расхода $y_k = y_k(x)$. В соответствии с этим поля скоростей и концентраций принимают вид

$$u_k(x) = u[x, y_k(x)], \quad v_k(x) = v[x, y_k(x)], \tag{8.2.15}$$

$$c_k(x) = c[x, y_k(x)].$$

Причем из условия сохранения расхода и уравнения непрерывности вытекает, что

$$v_k = u_k \frac{dy_k}{dx}, \tag{8.2.16}$$

где $k = 1, 2, ..., N$.

Из (8.2.15) следует, что производная по независимой переменной x имеет вид

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{y=y_k}, \tag{8.2.17}$$

где $\varphi_k = u_k, c_k$.

Учитывая выражение для градиента давления dp/dx, данное формулой в § 8.1, и подставляя соотношения (8.2.16) и (8.2.17) в (8.2.11)–(8.2.13), придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для k-го слоя:

$$u_k\frac{du_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{We}}\frac{1}{H^2}\frac{dH}{dx} + \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\right) +$$

$$+ \nu_т \mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\right) + \mathrm{Re}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\frac{\partial v_k}{\partial y_k}; \tag{8.2.18}$$

$$u_k\frac{dc_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 c_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial c_k}{\partial y_k}\right) + \frac{\nu_т \mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}_т}\left(\frac{\partial^2 c_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k}\frac{\partial c_k}{\partial y_k}\right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}_т}\frac{\partial c_k}{\partial y_k}\frac{\partial \nu_т}{\partial y_k}. \tag{8.2.19}$$

На поверхности струи не происходит образования новой фазы, вследствие чего по всей длине струи сохраняется постоянство расхода, т.е.

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k} yu\,dy = \mathrm{const}_k, \quad k = 2, 3, ..., N. \tag{8.2.20}$$

Заменив этот интеграл разностным аналогом, например по формуле трапеции, получим для k-го слоя систему нелинейных алгебраических уравнений

$$(y_k - y_{k-1})(y_k u_k + y_{k-1}u_{k-1}) = \mathrm{const}_k, \tag{8.2.21}$$

в которых y_k и u_k являются функциями координаты x.

Система нелинейных дифференциальных уравнений для определения поверхностей равного расхода получается в результате дифференцирования соотношения (8.2.21) по x и последующей замены полученных производных du_k/dx выражением (8.2.18). Найденная таким образом система имеет вид

$$\frac{dy_k}{dx} = A_k \frac{B_N}{1 - A_N} + B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{8.2.22}$$

где значения A_k и B_k приведены в § 8.1.

Для вычисления диссипативного слагаемого, входящего в правую часть уравнений (8.2.18) и (8.2.19), используем следующий прием. Представим сеточное решение $\{\varphi_k(x)\}$ в виде разложения в ряд по полной системе сеточных функций, удовлетворяющих граничным условиям (8.2.14):

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j(x) V_{jk}(x); \quad c_k(x) = \sum_{j=1}^{N} A_{1j}(x) V_{jk}(x). \tag{8.2.23}$$

Система базисных функций, входящих в выражение (8.2.23) для определения профилей скорости и концентрации, выбиралась, как и в § 8.1, в следующем виде:

$$V_{1k} = 1, \quad V_{jk} = (\eta_k)^{2j-2}\left(1 - \frac{j-1}{j}\eta_k^2\right). \tag{8.2.24}$$

Отметим, что базисные функции можно выражать и через полиномы Чебышева, Лежандра и др., причем существенных различий в результате расчета не наблюдалось, поэтому большинство результатов было получено из решения указанной выше задачи с применением базисных функций вида, представленного соотношением (8.2.24).

При решении системы дифференциальных уравнений (8.2.18), (8.2.19) и (8.2.22) начальные условия задавались следующим образом. Координатные линии в начальном сечении выбирали в виде соотношения

$$y_k(0) = \frac{k-1}{N-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Профиль скорости в начальном сечении выбирался плоским и параболическим. Как показали расчеты, эта величина не влияет существенно на окончательный результат, поэтому бóльшая часть расчетов проведена с применением параболического профиля. К такому же выводу о независимости профиля скорости в начальном сечении пришли авторы работы [196], экспериментально изучая эффективность массопередачи при истечении газовой струи в жидкость как через одиночное отверстие в тарелке, так и при истечении из длинной прямой трубки, внутренний диаметр которой равен диаметру отверстия.

Средний коэффициент массопередачи газовой трубулентной струи вычислялся по соотношению

$$\beta_{r0} = \frac{1}{\Delta c \Pi} \int_0^s 2\pi R(x) D \frac{\partial c}{\partial n} dS. \tag{8.2.25}$$

где

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial y}\cos(\widehat{n, y}) + \frac{\partial c}{\partial x}\cos(\widehat{n, x});$$

Π – поверхность контакта; Δc – движущая сила массоотдачи, или

$$\beta_{r0} = \frac{1}{\Pi}\left\{2\pi R_0^2 u_0(1+\mathrm{tg}^2\theta)\int_0^{y_N}\bar{y}\bar{u}\bar{c}\,d\bar{y}\,|_0^s - \right.$$

$$\left. - 2\pi D R_0\int_0^{\bar{s}}\bar{y}_N\frac{d\bar{c}}{dx}\,\mathrm{tg}\theta\,d\bar{x}\right\} = \frac{1}{\Pi}2\pi R_0^2 u_0\,HT. \qquad (8.2.26)$$

В связи с тем, что большинство исследователей относили коэффициент массоотдачи к площади выходного отверстия, при аппроксимации численных значений для коэффициента массоотдачи данное обстоятельство учитывалось введением эффективной площади поверхности контакта в виде $\Pi = \pi R_0^2$. Входящие в выражение (8.2.26) профили скоростей $u(x, y)$, концентраций $c(x, y)$ и поверхность струи $H(x)$ находились численно из решения системы дифференциальных уравнений (8.2.18), (8.2.19) и (8.2.22) с граничными условиями (8.2.14). Результаты численных значений для HT аппроксимированы следующей формулой:

$$HT = a[(1{,}1 + 0{,}8R_0)10^{-3}u_0 + 6 + 4R_0]\sqrt{\frac{x}{\mathrm{RePr}R_0}} + 0{,}5b. \qquad (8.2.27)$$

С учетом (8.2.27) формула (8.2.26) для среднего коэффициента массоотдачи осесимметричной турубулентной газовой струи принимает вид

$$\beta_{r0} = 2\mathrm{Re}^{0,5}\mathrm{Pr}^{0,5}l^{0,5}R_0^{-1,5}D\{a[(1{,}1 + 0{,}8R_0)10^{-3}u_0 + 6 +$$

$$+ 4R_0] + 0{,}5b\sqrt{(\mathrm{RePr}R_0)/l}\}, \qquad (8.2.28)$$

где l – длина входного участка струи, см; $\mathrm{Re} = u_0R_0/\nu$; $\mathrm{Pr} = \nu/D$; u_0 – скорость струи в начальном сечении, см; R_0 – радиус струи в начальном сечении, см; $b = 1$ для аммиачно-воздушной струи; $b = -2{,}32$ для аммиачно-гелиевой струи; $a = 1 + 100\,\bar{B}$ при изменении $\bar{B}$ в интервале от 0 до 0,005; $\bar{B} = \tau_0 R_0/\mu u_0$.

Отметим, что в изученном интервале изменения безразмерного касательного напряжения $\bar{B}$ влияние последнего на коэффициент массоотдачи мало и им можно пренебречь, т.е. $a \approx 1$.

Формула (8.2.28) получена для расчета массоотдачи в одиночной турбулентной осесимметричной газовой струе, вытекающей из отверстия в жидкость. В табл. 8.2.1 и на рис. 8.2.1 проведено сравнение рассчитанных по формуле (8.2.28) данных с экспериментальными данными работы [196], в которой изучалась массоотдача в газовой фазе при истечении воздушно-аммиачной смеси в воду через отверстие на тарелке. В связи с тем, что величина входного участка струи по расчету была больше высоты светлой жидкости на тарелке (h_0), в формуле (8.2.28) принималось $l = h_0$, причем в (8.2.28) h_0 следует брать в сантиметрах. Одновременно это положение

Таблица 8.2.1

Массоотдача в газовой фазе при истечении воздушно-аммиачной смеси в воду через отверстие в стенке

Номер п/п	u_0, см/с	h_n, см	Re	$\beta_{г0}$, см/с		Погрешность, %
				[196]	расчет по формуле (8.2.28)	
			Радиус струи R_0 = 0,1 см			
1	1010	2,2	697	4730	4821	+1,94
2	2000	2,2	1379	7150	8180	+14,42
3	4030	2,2	2779	13500	15217	+12,72
4	6000	2,2	4138	20200	22489	+11,33
5	1010	9,2	697	7600	8039	+5,78
6	2000	9,2	1379	13800	13398	−2,91
7	4030	9,2	2779	25200	24661	−2,14
8	6000	9,2	4138	36200	36410	+0,58
			Радиус струи R_0 = 0,2 см			
9	1020	2	1407	2820	3017	+7,0
10	2110	2	2910	4940	5422	+9,76
11	4210	2	5807	11100	10198	−8,12
12	5290	2	7296	15900	12755	−19,78
13	1020	4,2	1407	4060	3668	−9,65
14	2110	4,2	2910	6840	6566	−4,0
15	4210	4,2	5807	13400	12266	−8,46
16	5290	4,2	7296	17500	15333	−12,38
17	1020	8,2	1407	5500	4586	−16,61
18	2110	8,2	2910	9500	8111	−14,62
19	4210	8,2	5807	17300	15059	−12,95
20	5290	8,2	7296	20772	18816	−10,40
			Радиус струи R_0 = 0,3 см			
21	508	6,2	1051	2020	1948	−3,55
22	1102	6,2	2280	3490	3438	−1,50
23	2120	6,2	4386	6160	5869	−4,72
24	4350	6,2	9000	11600	11320	−2,42
25	5230	6,2	10820	14700	13563	−7,79
26	508	9,2	1051	2290	2232	−2,51
27	1102	9,2	2280	3870	3799	+0,74
28	2120	9,2	4386	6750	6610	−2,08
29	4350	9,2	9000	13000	12696	−2,34
30	5230	9,2	10820	16100	15208	−5,54
			Радиус струи R_0 = 0,5 см			
31	760	7	2620	1940	2055	5,92
32	1015	7	3500	2480	2574	3,79
33	2030	7	7000	3980	4587	15,26
34	3040	7	10483	5850	6599	12,80

Примечание. d_k = 100 мм; $L_ж$ = 100 л/ч; q = 4 м²/ч; D = 0,214 см²/с; ν = 0,145 см²/с.

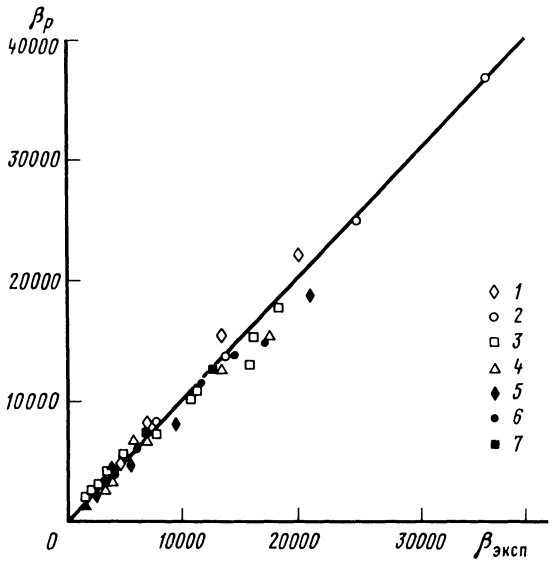


Рис. 8.2.1. Сравнение результатов расчета по формуле (8.2.28) с опытными данными различных исследователей [196]

1–4 – воздушно-аммиачная струя, $u_0 = 1000 \div 6000$ см/с, $R_0 = 0{,}1 \div 0{,}5$ см, $h_{пер} = 2 \div 9{,}2$ см; *5–7* – аммиачно-гелиевая струя, $u_0 = 1000 \div 6000$ см/с, $R_0 = 0{,}2$ см, $h_{пер} = 2{,}2$ см

указывает на то, что основной массообмен происходит в непосредственной близости от тарелки, что согласуется с выводами работы [196].

Как уже указывалось выше, формула (8.2.28) получена для единичной газовой струи, контактирующей с жидкостью. Данный элементарный акт имеет место при работе контактного устройства в виде ситчатой или провальной тарелки при таких расстояниях между отверстиями, когда взаимным влиянием отверстий можно пренебречь. В этом случае уравнения Навье–Стокса и конвективной диффузии, записанные в виде (8.2.1)–(8.2.3) для одиночной струи, будут также практически справедливы и для группы отверстий. Таким образом, чтобы формулу (8.2.28) применить к массовому барботажу, которое имеет место при работе в массообменных аппаратах с ситчатыми тарелками, необходимо изучить характер изменения массопередачи при переходе от единичного акта контактирования к массовому барботажу.

В работах [196, 203] проведено такое исследование. В частности, было доказано, что коэффициент массоотдачи в газовой фазе на ситчатых тарелках, рассчитанный по данным работы [203], и в одиночном отверстии, рассчитанный по формуле (8.2.28), отличаются на некоторую функцию, учитывающую размеры диаметра отверстий на тарелке и расстояние между ними, т.е.

$$\beta_{гт} = \beta_{г0} f(d_0/t), \qquad (8.2.29)$$

где $\beta_{гт}$ – коэффициент массоотдачи при массовом барботаже; $\beta_{г0}$ рассчитан по формуле (8.2.28).

Функция $f(d_0/t)$, найденная в работе [196], имеет вид

$$f(d_0/t) = \exp(-a_0 d_0/t), \qquad (8.2.30)$$

где $a_0 = 3{,}1 - 2{,}7 \cdot d_0$, если диаметр отверстия (d_0) выражать в см.

Функция $f(d_0/t)$ подобрана таким образом, чтобы при большом расстоянии между отверстиями, т.е. при $t \to \infty$, она равнялась 1. К тому же в работе [196] было показано, что для отверстий диаметром 6 мм $\beta_{г0}$ практически совпадает с $\beta_{гт}$ для ситчатой тарелки с "живым" сечением 6,95%.

Таким образом, пользуясь формулой (8.2.28), можно рассчитывать реальные массообменные аппараты с ситчатыми тарелками, имея в виду соотношение (8.2.30). Этим показана возможность рассчитывать реальные массообменные аппараты на основе изучения элементарного акта массопередачи.

§ 8.3. КОНДЕНСАЦИЯ НА ЛАМИНАРНОЙ СТРУЕ

Непосредственное соприкосновение пара со струями жидкости имеет место в многочисленных тепломассообменных аппаратах. При непосредственном соприкосновении фаз повышается скорость конденсации пара, так как создается возможность значительного развития поверхности охлаждения путем дробления потока на отдельные струи и капли. Подобные процессы могут протекать в смешивающих подогревателях, конденсаторах и в ряде элементов энергетических установок.

Теоретический расчет теплообмена в струе в смесительных конденсационных установках разработан только для ряда простых случаев [7, 204], а именно при предположении, что струя жидкости, вытекая из начального сопла, сохраняет свою первоначальную цилиндрическую форму вплоть до точки, где она начинает распадаться на капли.

Изменение скоростей по координате, отсчитываемой вдоль струи, не учитывалось, причем за скорость струи в уравнении для количества движения принималась средняя величина, одинаковая по всей длине струи и равная начальной скорости истечения из сопла. В действительности сопло имеет конечную длину, поэтому как для потока, так и для температуры существует некоторый начальный участок, на котором происходит их стабилизация. На этом же участке стабилизируются и геометрические размеры вытекающей струи. Безусловно, все эти факторы, особенно наглядно проявляющиеся на входном участке, должны влиять на коэффициенты теплообмена на этом участке струи [145]. Понятно, что рассмотренные выше явления имеют место в условиях конденсации насыщенного пара при не слишком низких давлениях, когда интенсивность конденсации определяется процессами переноса тепла в струе.

На важность подобного рода исследований указывает и тот факт, что наиболее существенные отклонения экспериментальных данных от расчетных зависимостей, полученных в работах [7, 204], наблюдаются именно на входном участке.

В настоящем параграфе проведено численное исследование процесса конденсации пара на свободно падающей струе жидкости с учетом входного участка и инерционных членов. Таким образом, сделана попытка ликвиди-

ровать имеющийся пробел в исследовании конденсации на свободно падающей ламинарной струе жидкости.

Предполагается, что струя жидкости с заданными начальной температурой T_0 и распределением скорости по сечению круглого сопла радиуса R_0 вытекает в пространство, заполненное насыщенным паром той же жидкости с температурой $T_н$.

Данная задача формулируется так: требуется найти распределение температуры и скорости струи, ее геометрические размеры, а также тепловой поток в струю на различных расстояниях от устья сопла до места начала распада струи на капли. А это значит, что требуется решить систему уравнений для количества движения и энергии при ламинарном течении жидкости в струе. Эта система уравнений имеет вид [145]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial (yu)}{\partial x} + \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0; \tag{8.3.1}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{8.3.2}$$

Начальные и граничные условия выбираются следующие:

$$\text{при } x = 0 \quad u = u_0(y), \quad T = T_0(y); \tag{8.3.3}$$

$$\text{при } y = 0 \quad \partial u/\partial y = 0, \quad v = 0, \quad \partial T/\partial y = 0; \tag{8.3.4}$$

$$\text{при } y = H(x) \quad \partial u/\partial y = 0, \quad T = T_н. \tag{8.3.5}$$

Система уравнений (8.3.1), (8.3.2) с помощью безразмерных переменных

$$\begin{gathered} x = R_0\bar{x}, \quad y = (R_0/c^{1/4})\bar{y}, \quad u = (\nu c^{1/2}/R_0)\bar{u}, \\ v = (\nu c^{1/4}/R_0)\bar{v}, \quad p = (\rho\nu^2 c/R_0^2)\bar{p}, \quad \bar{T} = (T - T_0)/(T_н - T_0), \end{gathered} \tag{8.3.6}$$

где $c = gR_0^3/\nu_2$; u_0 — среднерасходовая скорость в начальном сечении; T_0, $T_н$ — температура на оси и поверхности струи, соответственно; R_0 — радиус сопла, из которого вытекает струя; ρ — плотность струи; $a = \lambda/(\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности струи; λ — коэффициент теплопроводности струи; $\mathrm{Re} = u_0 R_0/\nu$; $\mathrm{Fr} = u_0^2/gR_0$; $\mathrm{We} = \rho u_0^2 R_0/\gamma$; $\mathrm{Pr} = \nu/a$, приведена к виду, удобному для численного интегрирования методом, изложенным в главе 5:

$$u_k\frac{du_k}{dx} = \frac{\mathrm{Re}^2}{\mathrm{We}c^{3/4}}\frac{1}{H^2(x)}\frac{dH}{dx} + \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\right) + 1; \tag{8.3.7}$$

$$\frac{dy_k}{dx} = A_k\frac{B_N}{1 - A_N} + B_k; \tag{8.3.8}$$

$$u_k\frac{dT_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial T_k}{\partial y}\right), \tag{8.3.9}$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения.

На рис. 8.3.1 представлена звисимость безразмерной длины струи от расстояния при различных числах Рейнольдса Re (*а*) и Вебера We (*б*). Число We заметно влияет не только на радиус струи, но и на его кривизну. Это влияние тем заметнее, чем ближе к точке выхода струи из отверстия:

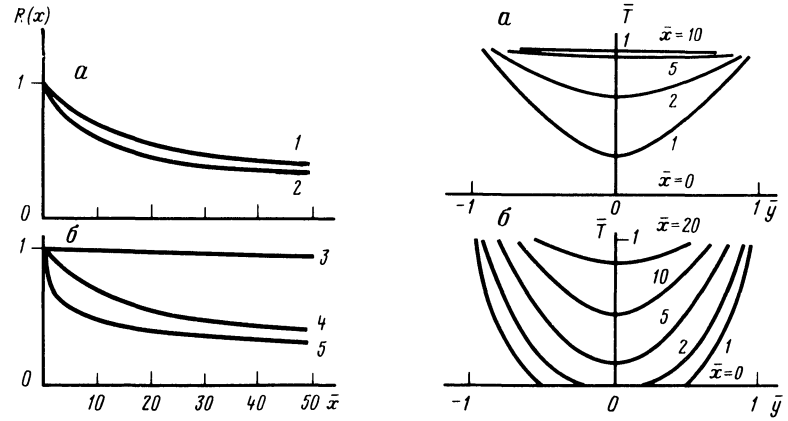


Рис. 8.3.1. Зависимость безразмерного радиуса струи от безразмерной длины струи *а*: We = 0,5; *1* – Re = 772; 1000; *2* – Re = 200; *б*: Re = 772; *3* – We = 0,001; *4* – 0,05; *5* – We = 5

Рис. 8.3.2. Развитие безразмерного профиля температуры по сечению струи на разных состояниях от входа струи

Re = 772; We = 0,05; *а* – Pr = 7; *б* – Pr = 50

разница в величинах радиуса, при $\bar{x} = 5$ почти в 2 раза больше, чем при $\bar{x} =$ = 50, когда радиус струи выходит на постоянную величину.

На рис. 8.3.2 представлены результаты численного расчета безразмерной температуры струи на различных расстояниях от начала входа струи. При $\bar{x} = 0$ безразмерная температура $\bar{T} = 0$, что отвечает начальной температуре струи. С увеличением расстояния от своего устья струя нагревается с поверхности $T_н$ ($\bar{T} = 1$). Интенсивность нагрева струи зависит от числа Прандтля, т.е. от ее физико-химических свойств. Нагрев происходит тем быстрее, чем меньше число Прандатля. От чисел Рейнольдса и Вебера профиль температуры струи практически не зависит. Эта независимость носит, естественно, условный характер, так как на рис. 8.3.2, *а, б* эта зависимость представлена в безразмерных координатах, в частности при $x = R_0\bar{x}$ и $y =$ $= (R_0/c^{1/4})\bar{y}$, т.е. в реальных координатах, на характер зависимости радиуса струи на различном расстоянии от входа струи в пространство, заполненное паром, будет влиять величина $c = gR_0/\nu^2$, где g – ускорение свободного падения, которое выполняет функцию внешней силы.

Интенсивность теплопередачи определяется тепловым потоком на поверхности струи:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=R(x)} = \frac{\rho c_p}{R} \frac{\partial}{dx} \int_0^R y\bar{u}\,T dy. \qquad (8.3.10)$$

Средний коэффициент теплоотдачи в струе, как известно, вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{1}{\Pi \Delta T} \int_0^x 2\pi R(x) \lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{R(x)} dx, \qquad (8.3.11)$$

где П – площадь поверхности контакта струи жидкости с паром определяется из следующего соотношения:

$$П = \int_0^x 2\pi R(x)dx.$$

При расчете теплообмена в теплообменных устройствах обычно используется критерий Стантона, определяемый из формулы

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_0}. \qquad (8.3.12)$$

Подставляя в формулу (8.3.12) выражение для коэффициента теплоотдачи из (8.3.11), учитывая при этом формулу (8.3.10), получим

$$St = \frac{c^{1/4}}{Re} \frac{\int_0^{\bar{R}} \bar{y}\bar{u}Td\bar{y}\,|_0^{\bar{x}}}{\int_0^{\bar{x}} \bar{R}(x)d\bar{x}}. \qquad (8.3.13)$$

Решение данной задачи получено при различных числах: Re, We и Pr, причем число Вебера изменялось в пределах от 10^{-3} до 5, число Re – от 200 до 1000, а число Pr – от 1 до 50. В этих пределах найдены профили температур и скорости на различном расстоянии от входа струи, а также развитие радиуса струи. Затем по найденным величинам по формуле (8.3.13) вычислялось число Стантона, а результаты численного решения аппроксимировались с точностью до 5% следующей формулой:

$$St = f_1 f_2 f_3 \left(\frac{x}{2R_0}\right)^{-0,8}, \qquad (8.3.14)$$

где

$$f_1 = 1{,}25 \cdot 10^{-2} - 7{,}5 \cdot 10^{-6}\,Re;$$

$$f_2 = 1{,}05 - Pr\left(8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-4}\frac{x}{2R_0}\right);$$

$$f_3 = 1{,}05 - A\left(0{,}4 + 0{,}1\frac{x}{2R_0}\right) \quad \text{для } A \geqslant 2{,}5;$$

$$f_3 = 1{,}05 - A + \frac{x}{2R_0}(0{,}03 - 0{,}6A) \quad \text{для } A < 2{,}5,$$

где $Re = u_0 R_0/\nu$; u_0 – среднерасходовая скорость в начальном сечении; R_0 – начальный радиус струи; $A = \rho\nu^2 c^{3/4}/\gamma R_0 = c^{3/4}Re^{-2}We$; We – число Вебера; γ – коэффициент поверхностного натяжения; ν – кинематическая вязкость; $c = gR_0^3/\nu$; $We = \rho u_0^2 R_0/\gamma$.

На рис. 8.3.3 и в табл. 8.3.1 проведено сравнение результатов численного решения, аппроксимированных формулой (8.3.14), с экспериментальными данными работы [205], в которой исследовалась теплоотдача при конденсации пара на ламинарной струе воды.

Таблица 8.3.1

Теплоотдача при конденсации водяного пара на ламинарной струе воды (R_0 = 0,8 см, Pr = 7, We = 0,005)

$\frac{x}{2R_0}$	$4St \cdot 10^{-3}$		Погрешность, %
	эксперимент [204, 205]	расчет по формуле (8.3.14)	
	Число Рейнольдса Re = 772		
5,34	7,2	7,266	0,78
6,8	5,7	5,99	5,16
8	5	5,27	5,47
10	4,4	4,43	0,58
12,73	3,73	3,75	0,64
14,55	3,45	3,3	−4,28
15,9	3,27	3,08	−5,75
18,18	2,9	2,78	−4,19
20	2,7	2,58	−4,38
25,45	2,36	2,15	−9,04
	Число Рейнольдса Re = 473		
1,82	23,6	22,8	−3,5
3,46	13,6	13,7	0,43
5,33	9	9,69	7,73
6,8	7,2	7,89	10
10	5,39	5,90	10
11,82	5	5,18	3,6
13,64	4,67	4,63	−0,8

На рис. 8.3.3 представлена зависимость локального числа Стантона от безразмерной длины струи. Сплошные линии *1* и *2* получены по формуле (8.3.14) для We = 0,05, Re = 772 и 473 соответственно, линии *3* и *4* получены на основании решения указанной выше задачи при следующих предположениях [7, 205]: пренебрегалось развитием скорости струи и температуры, а также конвективным членом $v(\partial T/\partial y)$ в уравнении (8.3.1), учитывающим радиальный перенос тепла, предполагалось, что скорость u в уравнении (8.3.1) равна средней величине, одинаковой по всей длине струи и равной начальной скорости истечения из сопла. Точки на рис. 8.3.3 соответствуют экспериментальным данным работ [204, 205]. Как легко заметить, расчет по формуле (8.3.14) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными во всем интервале изменения безразмерной длины струи. Теоретический расчет, проведенный по формуле (8.3.14), указывает на расслоение экспериментальных данных в зависимости от числа Re. Этот факт также согласуется с экспериментальными данными работ [204, 205]. Существенное отклонение теоретического расчета, проведенного в работах [7, 204], от экспериментальных данных авторов этих работ (линии *3, 4*) указывает на то, что пренебрежение входным эффектом в расчете тепломассообмена может внести значительные погрешности (при $\bar{x}$ = 2 до 200%).

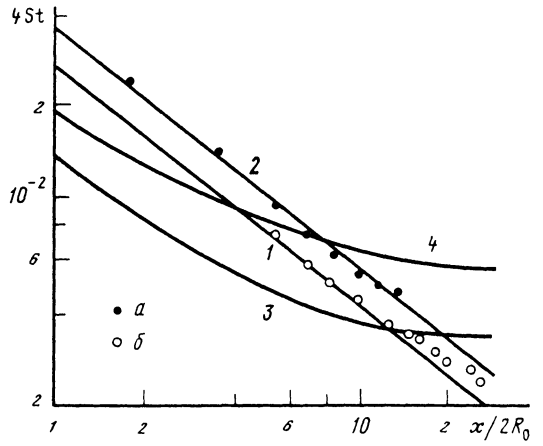


Рис. 8.3.3. Зависимость числа St от безразмерной длины $x/2R_0$ струи
1,2 – расчет по формуле (8.3.14); *3,4* – расчет по формулам из работ [204]; *а* – Re = 473; *б* – Re = 772, экспериментальные данные работы [205]

В данном параграфе показана важность учета входного участка при расчете процесса конденсации в струе.

В табл. 8.3.1 также проведено сравнение экспериментальных данных работ [204, 205] с формулой (8.3.14), найденной аппроксимацией численного решения. Как видно из таблицы, погрешность в расчетах не превышает 11%, что вполне приемлемо для инженерных расчетов.

§ 8.4. КОНДЕНСАЦИЯ НА ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

С ростом скорости истечения холодной струи наблюдается смена гидродинамических режимов: ламинарная струя переходит в турбулентную.

Существуют экспериментальные данные по конденсации паров воды [204] и паров фреона-12 [206] на холодной струе той же жидкости при турбулентном режиме ее истечения.

При решении уравнения энергии для турбулентной струи в работах [7, 204, 206] допущен ряд неточностей, упрощающих данную постановку задачи, в частности пренебрегалось влиянием на эффективность теплоотдачи сил поверхностного натяжения и поперечной составляющей скорости, к тому же составляющая скорости находилась из гидравлических расчетов.

В результате таких упрощений имело место значительное расхождение (до 50%) теоретических расчетов с экспериментальными данными тех же авторов. Особенно значительное расхождение наблюдалось на начальном участке. Надо отметить, что аналогичное расхождение теории и эксперимента (только еще в большей степени) наблюдалось и при конденсации на ламинарной струе (см. § 8.3). В § 8.3 показано также, что причина расхождения теории с опытными данными кроется в том, что не учитывались входные эффекты. В связи с этим представляет определенный теоретический и практический интерес исследование конденсации на турбулентной

струе с учетом входного участка. В данном параграфе проведен теоретический расчет этой задачи.

Предполагается, что струя жидкости со среднерасходовой скоростью и начальной температурой T_0 и заданным при $x = 0$ распределением скорости по сечению круглого отверстия радиусом R_0 вытекает в пространство, заполненное насыщенным паром той же жидкости с температурой насыщения ($T_н$); радиальная составляющая градиента температуры много больше осевой. При не слишком низких давлениях процесс конденсации определяется в основном процессами переноса тепла в струе. Это позволяет описать данный процесс уравнениями количества движения в постановке Прандтля и энергии при турбулентном истечении струи:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_{эф} y \frac{\partial u}{\partial y}\right];$$

$$\frac{\partial (yu)}{\partial x} + \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0; \qquad (8.4.1)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[a_{эф} y \frac{\partial T}{\partial y}\right], \qquad (8.4.2)$$

где $\nu_{эф} = \nu + \nu_т$, $a_{эф} = a + a_т$.

При решении уравнений (8.4.1) и (8.4.2) использовались начальные и граничные условия:

при $x = 0$ $u = u_0$ или $u = f(y)$, $T = T_0$; (8.4.3)

при $y = 0$ (на оси струи) $\partial u/\partial y = 0$, $v = 0$, $\partial T/\partial y = 0$; (8.4.4)

при $y = R(x)$ (на поверхности струи) $\partial u/\partial y = \tau_0/\mu = B$, $T = T_н$. (8.4.5)

С помощью безразмерных переменных $x = R_0\bar{x}$, $y = R_0\bar{y}$, $u = u_0\bar{u}$, $p = p_0 + \rho u_0^2 \bar{p}$, $T = T_0 + (T_н - T_0)T$ система уравнений (8.4.1), (8.4.2) приведена к виду, удобному для численного интегрирования методом, изложенным в главе 5 (черточки опущены) [207]:

$$u_k\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{We}}\frac{1}{R^2(x)}\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{\mathrm{Fr}} + T_1; \qquad (8.4.6)$$

$$\frac{dy_k}{dx} = A_k\frac{B_N}{1 - A_N} + B_k; \qquad (8.4.7)$$

$$u_k\frac{dT_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + T^2; \qquad (8.4.8)$$

где

$$T_1 = \frac{\nu_т}{R_0 u_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{R_0 u_0}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \nu_т}{\partial y};$$

$$T_2 = \frac{a_т}{R_0 u_0}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{1}{R_0 u_0}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial a_т}{\partial y};$$

$$A_1 = B_1 = 0; \tag{8.4.9}$$

$$A_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - u_k}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}} A_k - \frac{B_k}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}};$$

$$B_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - u_k}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}} B_k - \frac{\Delta_{k+1} + \gamma_{k+1}}{\alpha_{k+1} + u_{k+1}};$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_k u_k + y_{k+1} u_{k+1}}{y_{k+1} - y_k};$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\theta_{k+1}}{\mathrm{We} R^2}; \quad \gamma_{k+1} = \frac{\theta_{k+1}}{\mathrm{Fr}};$$

$$\theta_{k+1} = \frac{y_k}{u_k} + \frac{y_{k+1}}{u_{k+1}}; \quad \Delta_{k+1} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{y_{k+1}}{u_{k+1}} \Sigma_{k+1} + \frac{y_k}{u_k} \Sigma_k \right);$$

$$\Sigma_{k+1} = \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial y_{k+1}^2} + \frac{1}{y_{k+1}} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial y_{k+1}}.$$

Одной из трудностей решения системы уравнений (8.4.6)–(8.4.8) является ее незамкнутость. Для замыкания необходимо иметь в явном виде закон изменения турбулентных коэффициентов переноса. С этой целью использовались наиболее распространенные для струй выражения коэффициентов турбулентной вязкости. Одно из этих выражений представлено в следующем виде:

$$\nu_т = \mathrm{Pr} \epsilon u(x) R(x),$$

где значения ϵ принимались равными $\epsilon_1 = 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_3 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Согласно [7], наиболее близко согласующаяся с экспериментальными данными величина $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$.

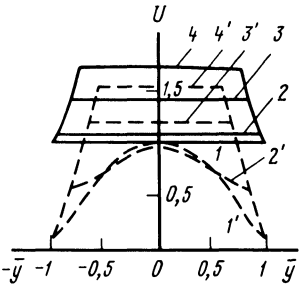
Из обзора экспериментальных работ по турбулентному теплообмену в струях [202] следует, что Pr = 0,75. В соответствии с этим окончательная формула для турбулентной вязкости, используемая в расчетах, имела вид

$$\nu_т = 0{,}75 \epsilon u(x) R(x). \tag{8.4.10}$$

Другое выражение для коэффициента турбулентной вязкости получено на основании теории Прандтля:

$$\nu_т = \kappa l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{8.4.11}$$

где κ – опытная константа, приведенная в работе [208] и равная 0,013; $l = \left| \frac{\Delta u_m}{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_m} \right|$ – длина смещения, Δu_m, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_m$ – максимальная разность скоростей и градиента скорости соответственно.



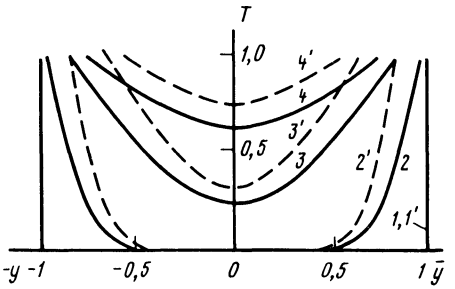


Рис. 8.4.1. Изменение профиля скорости по длине струи для плоского (сплошные линии) и параболического (пунктирные линии) профилей в начальном сечении струи
1, 1' – $\bar{x}$ = 0; *2, 2'* – 25; *3, 3'* – 200; *4, 4'* – $\bar{x}$ = 400

Рис. 8.4.2. Изменение профиля температуры по длине струи для плоского (сплошные линии) и параболического (пунктирные линии) профилей в начальном сечении струи
1, 1' – $\bar{x}$ = 0; *2, 2'* – 25; *3, 3'* – 200; *4,4'* – $\bar{x}$ = 400

Система уравнений (8.4.6)–(8.4.8) интегрировалась численно методом Рунге–Кутта для различных законов распределения скоростей в начальном сечении (8.4.3) и различных выражений для коэффициентов турбулентной вязкости, представленных соответственно уравнениями (8.4.10) и (8.4.11). В результате численного решения этой системы найдено распределение скоростей и температуры в сечении струи и по ее длине, а на основании последних зависимостей найдено выражение для локального коэффициента теплоотдачи.

Число Стантона, которое применялось для сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными, вычислялось по формуле (вывод формулы приведен в § 8.3)

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_0} = \frac{\int_0^R yuTdy \Big|_0^x}{\int_0^R R(x)dx}, \qquad (8.4.12)$$

где α – средний коэффициент теплоотдачи; ρ, c_p – плотность и теплоемкость среды; u_0 – средняя скорость в начальном сечении; γ – коэффициент поверхностного натяжения.

При численном решении уравнений (8.4.1) и (8.4.2) числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} = u_0 R_0/\nu$), Фруда ($\mathrm{Fr} = u_0^2/(gR_0)$), Прандтля ($\mathrm{Pr} = \nu/a$) и Вебера ($\mathrm{We} = \rho u_0^2 R_0/\gamma$) изменялись в следующих пределах: Re – от 1 500 до 20 000, Fr – от 400 до 5000, Pr – от 1 до 50, We – от 50 до 2500.

Для изученного диапазона чисел Re, Fr, Pr, We установлено, что изменение числа $\bar{B} = BR_0/u_0$ от 0 до 0,001 число Стантона оставалось практически постоянным. Малые значения $\bar{B}$, применяемые в расчетах, естественно, ограничивают область полученных результатов. В частности, результаты расчета можно применять для малых значений трения на поверхности струи.

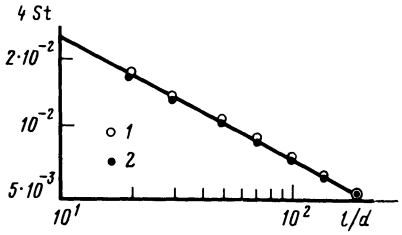
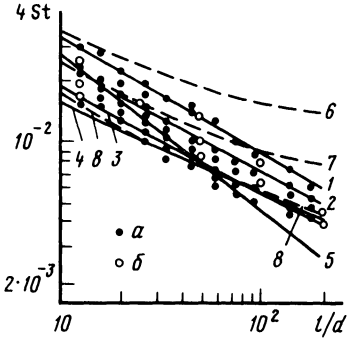


Рис. 8.4.3. Изменение числа St по длине струи для плоского профиля скорости в начальном сечении при $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ и различных числах We
1 – We = 66; *2* – We = 2500



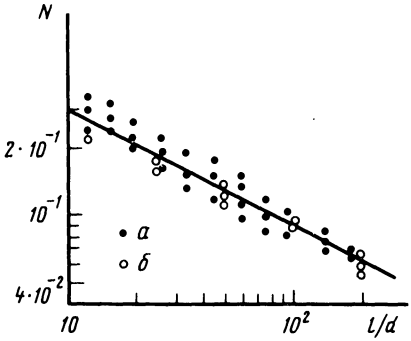


Рис. 8.4.4. Изменение числа St по длине струи при различных ϵ и начальных профилях скорости
$\nu_T = \epsilon \mathrm{Pr} u(x) R(x)$: профиль плоский: *1* – $\epsilon = 10^{-3}$; *2* – $5 \cdot 10^{-4}$; *3* – $\epsilon =$ $2{,}5 \cdot 10^{-4}$; профиль $u(0) = 1 - 0{,}5y^2$; *4* – $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$; $\nu_T =$ $0{,}013l^2|du/dy|$: профиль $u(0) = 1 - 0{,}5y^2$, *5* – $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$; расчет ν_T по формулам работы [204]: *6* – $\epsilon = 10^{-3}$; *7* – $5 \cdot 10^{-4}$; *8* – ϵ точки – опытные данные: *а* – [204]; *б* – [206]

Рис. 8.4.5. Сравнение результатов расчета по формуле (10.5.13) с экспериментальными данными
а – [204]; *б* – [206]; $N = \mathrm{St}/0{,}047 \mathrm{Re}^{-0{,}143} \mathrm{Pr}^{-0{,}074} \mathrm{Fr}^{-0{,}064}$

Характерный вид изменения профиля скоростей по длине струи показан на рис. 8.4.1. При задании в начальном сечении плоского профиля его вид практически не меняется (сплошные линии). Параболический профиль скорости, заданный в начальном сечении, трансформируется в процессе своего развития в плоский (пунктирные линии).

Профиль температуры по внешнему виду мало меняется в зависимости от того, какой задан в начальном сечении профиль скорости – плоский или параболический (рис. 8.4.2), однако количественно профиль температуры зависит от профиля скоростей в начальном сечении канала.

Число We – практически не влияет на число St на всем протяжении изменения длины струи (рис. 8.4.3).

На рис. 8.4.4 проведено сопоставление результатов экспериментальных и теоретических расчетов различных авторов.

Теоретический расчет проведен на основании решений уравнений (8.4.1) и (8.4.2) с граничными и начальными данными (8.4.3) – (8.4.5), а коэффициент St находился из этих решений по формуле (8.4.12).

Линии *1–3* на рис. 8.4.4 получены с использованием в уравнении (8.4.9) коэффициента турбулентной вязкости, представленной формулой (8.4.10)

при различных значениях ϵ, причем профиль скорости в начальном сечении задавался плоским. Линия *4* получена с применением той же формулы (8.4.10), что и для линий *1–3*, однако профиль скоростей в начальном сечении для этой линии задавался параболическим. С таким же профилем в начальном сечении при $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, но для другого выражения турбулентной вязкости, представленной формулой (8.4.11), получена линия *5*. Сравнение результатов расчета, представленных линиями *2, 4, 5* на рис. 8.4.4 показывает, что заметное влияние на эффективность теплопередачи оказывает не только коэффициент турбулентной вязкости, но и профиль скорости в начальном сечении канала.

На этом же графике пунктирными линиями *6–8* представлены результаты расчета по теоретическим формулам, полученным в работе [204] без учета входного эффекта. Экспериментальные данные нанесены по результатам работы [204, 206].

Как следует из рис. 8.4.4 и рис. 8.4.5, наиболее удовлетворительное согласие теоретических расчетов с опытными данными различных исследователей соответствует линии *4*. Эта линия в изученном интервале изменения параметров Re, Fr, Pr, We с точностью ± 10% аппроксимируется следующей формулой [207]:

$$\mathrm{St} = 0{,}047 \left(\frac{l}{2R_0}\right)^{-0{,}52} \mathrm{Re}^{-0{,}0033} \mathrm{Pr}^{-0{,}074} \mathrm{Fr}^{-0{,}064}. \qquad (8.4.13)$$

Удовлетворительное согласие экспериментальных данных различных авторов с формулой (8.4.13) позволяет рекомендовать ее для инженерных расчетов теплопередачи при конденсации на турбулентных струях.

§ 8.5. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО РАСХОДА ПО СЕЧЕНИЮ СТРУИ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ НА ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЯХ

В § 8.3 и 8.4 проведено исследование процесса конденсации пара на ламинарных и турбулентных струях жидкости с учетом входного участка и при предположении, что расход жидкости имеет постоянное значение по сечению струи. В настоящем параграфе это исследование расширено на случай переменного расхода [209].

Предполагается, что струя жидкости с начальной температурой T_0 и заданным при $x = 0$ распределением скорости по сечению круглого отверстия радиусом R_0 вытекает в пространство, заполненное насыщенным паром той же жидкости с температурой насыщения $T_н$; радиальная составляющая градиента температуры много больше осевой. В соответствии с этим уравнения количества движения и энергии для течения струи жидкости имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{эф} y \frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad (8.5.1)$$

$$\frac{\partial (yu)}{\partial x} + \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0; \qquad (8.5.2)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{эф} y \frac{\partial T}{\partial y}\right). \qquad (8.5.3)$$

Для ламинарного течения $\nu_{эф} = \nu$, $a_{эф} = a$; для турбулентного $\nu_{эф} = \nu + \nu_т$, $a_{эф} = a + a_т$, где $\nu_т, a_т$ – кинематические коэффициенты турбулентного обмена. Граничные и начальные условия для системы уравнений (8.5.1) – (8.5.3) следующие:

$$\text{при } x = 0 \quad u = u_0, \quad T = T_0; \qquad (8.5.4)$$

$$\text{при } y = 0 \quad \text{(на оси струи)} \frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad (8.5.5)$$

где равенство (8.5.5) вытекает из условия симметрии течения:

$$\text{при } y = R(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} = B, \quad T = T_н; \qquad (8.5.6)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\rho h_{fg}}{y}\frac{d}{dx}\int_0^{R(x)} yudy, \qquad (8.5.7)$$

где соотношение (8.5.7) выражает условие сохранения энергии на межфазной поверхности.

Система уравнений (8.5.1) – (8.5.3), как и в § 8.3 и 8.4, преобразуется к виду, удобному для численного интегрирования.

Так, уравнения приведенные в безразмерных переменных для изменения количества движения и энергии в турбулентных струях, имеют вид

$$u_k\frac{du_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{We}}\frac{1}{R^2(x)}\frac{dR}{dx} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\right) +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Fr}} + T_1 + \Phi(k-1)\frac{\partial u_k}{\partial y_k}; \qquad (8.5.8)$$

$$\frac{dy_k}{dx} = A_k\frac{B_N}{1 - A_k} + B_k; \qquad (8.5.9)$$

$$u_k\frac{dT_k}{dx} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial y_k^2} + \frac{1}{y_k}\frac{\partial T_k}{\partial y_k}\right) + T_2 + \Phi(k-1)\frac{\partial T_k}{\partial y_k}, \qquad (8.5.10)$$

где T_1 и T_2 – члены, зависящие от кинематических коэффициентов турбулентного обмена (см. § 8.4), а через $\Phi(x)$ обозначено

$$\frac{d}{dx}\int_0^{R(x)} yudy = y\Phi(N-1). \qquad (8.5.11)$$

Введенная таким способом функция Ф учитывает непостоянство расхода по сечению струи. Объединяя выражения (8.5.11) и (8.5.7), получим для Ф

выражение

$$\Phi = \frac{\lambda}{\rho h_{fg}(N-1)} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=R(x)},$$

или в безразмерном виде

$$\Phi = \frac{\xi}{\mathrm{RePr}(N-1)} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=R(x)}, \qquad (8.5.12)$$

где $\xi = c_p(T_т - T_0)/h_{fg}$ – параметр переохлаждения.

Система уравнений (8.5.8) – (8.5.10) интегрировалась численно методом Рунге–Кутта. На входе при $x = 0$ функцию Ф считали заданной, при $x > 0$ ее вычисляли на каждом шаге по формуле (8.5.12). В результате численного решения этой системы найдено распределение скорости и температуры по сечению и по длине струи и с помощью последних зависимостей определен коэффициент теплоотдачи. Выражение для среднего коэффициента теплоотдачи для струи жидкости с учетом изменения расхода по длине струи в отличие от § 8.4 имеет вид

$$\alpha = \frac{\rho c_p}{\Pi \Delta T}\left(1 + \frac{T_н c_p}{h_{gf}}\right)^{-1} \int_0^x 2\pi \frac{d}{dx} \int_0^{R(x)} yuT\,dy\,dx \qquad (8.5.13)$$

или через критерий Стантона и безразмерные переменные соотношения (8.5.13) преобразуется к следующему виду:

$$\mathrm{St} = \int_0^{R(x)} yuT\,dy \,|_0^x/(1+\xi) \int_0^x R(x)\,dx. \qquad (8.5.14)$$

На основании аппроксимации численного решения системы уравнений (8.5.8) – (8.5.10) с граничными и начальными условиями (8.5.4) – (8.5.7) в интервале чисел Re от 1 500 до 20 000, Pr от 1 до 50, Fr от 50 до 15 000, $|\xi|$ от 0,001 до 1 с помощью соотношения (8.5.14) получено выражение для числа Стантона:

$$\mathrm{St} = A\,(0{,}047 - 0{,}035\,\xi)\left(\frac{l}{2R_0}\right)^{-0{,}52} \mathrm{Re}^{-0{,}033}\mathrm{Pr}^{-0{,}074}\mathrm{Fr}^{-0{,}064}, \qquad (8.5.15)$$

где $\mathrm{Re} = u_0 R_0/\nu$; $\mathrm{Pr} = \nu/a$; $\mathrm{Fr} = u_0^2/(gR_0)$; $\mathrm{We} = \rho u_0^2 R/\gamma$, γ – коэффициент поверхностного натяжения; R_0 – начальный радиус струи; u_0 – среднерасходовая скорость в начальном сечении; A – параметр, который учитывает начальный профиль скорости ($A = 1$, если начальный профиль плоский; $A = 0{,}18(l/2R_0)^{0{,}26}$, если начальный профиль параболический).

Представляет интерес провести сравнение формулы (8.5.15) для числа Стантона с экспериментальными данными. В § 8.4 проводилось такое сравнение по данным работы [204]. Начальный профиль скорости считался плоским из условий эксперимента, значение параметра переохлаждения находилось в интервале от 0,04 до 0,16 и его не учитывали.

В табл. 8.5.1 показано сравнение с экспериментальными данными рабо-

Таблица 8.5.1

Сравнение экспериментальный данных работы [210] по испарению паров воды из турбулентной струи с расчетом по формуле (8.5.15) (ν = 0,0101 см^2/с; R_0 = = 0,2 см; Pr = 7; ξ = −0,02; A = 0,45).

Re	Fr	St · 100		Δ, %
		эксперимент	расчет	
		$l/2R_0$ = 42,75		
7 800	775	0,138	0,128	−7,0
8 400	889	0,134	0,127	−4,5
8 900	1009	0,132	0,125	−4,8
9 500	1150	0,129	0,124	−3,6
10 000	1274	0,127	0,123	−2,9
10 500	1405	0,125	0,122	−2,0
11 200	1598	0,123	0,118	−3,8
		$l/2R_0$ = 33,25		
6 600	555	0,172	0,150	−12,1
7 100	755	0,157	0,146	−7,1
9 900	1032	0,151	0,143	−5,6
10 000	1274	0,144	0,141	−2,1
		$l/2R_0$ = 23,75		
6 000	459	0,205	0,196	−4,1
6 000	459	0,203	0,196	−3,1
6 700	572	0,205	0,173	−12,8
7 100	642	0,187	0,176	−5,9
7 600	736	0,187	0,175	−6,8
8 200	857	0,187	0,173	−5,9
8 800	987	0,184	0,171	−1,0
10 000	1274	0,170	0,167	−1,7
10 500	1405	0,168	0,166	−1,6
11 100	1570	0,168	0,164	−2,5
11 700	1744	0,159	0,163	2,5

ты [210] по испарению паров воды из круглой турбулентной струи радиусом 0,2 см. Начальный профиль скорости считался параболическим, поэтому $A \approx 0{,}45$; параметр переохлаждения ξ = −0,02. Как следует из таблицы, расчетные данные по формуле (8.5.15) находятся в хорошем согласии с опытными данными работы [210].

Для ламинарного течения аппроксимационная формула для числа Стантона, полученная на основании численного решения уравнений (8.5.1) – (8.5.3) при $\nu_{эф} = \nu, a_{эф} = a$ имеет вид

$$\mathrm{St} = (f_1 f_2 f_3 - 0{,}004\,\xi)\,(l/2R_0)^{-0{,}8} \qquad (8.5.16)$$

где

$$f_1 = 1{,}25 \cdot 10^{-2} - 7{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Re};$$

$$f_2 = 1{,}05 - \mathrm{Pr}\left(8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-4}\frac{l}{2R_0}\right);$$

$$f_3 = 1{,}05 - c^{3/4}\mathrm{Re}^{-2}\mathrm{We}\left(0{,}4 + 0{,}01\frac{l}{2R_0}\right) \qquad \text{для } \mathrm{We} \geqslant 2{,}5;$$

$$f_3 = 1{,}05 - c^{3/4}\mathrm{Re}^{-2}\mathrm{We} + \frac{l}{2R_0}\,(0{,}03 - 0{,}6c^{3/4}\mathrm{Re}^{-2}\mathrm{We}) \qquad \text{для } \mathrm{We} < 2{,}5,$$

где $c = gR_0^3/\nu^2$, $\mathrm{We} = \rho u_0^2 R_0/\gamma$, $\mathrm{Re} = u_0 R_0/\nu$, ξ дан в (8.5.12).

В § 8.3 проводилось сравнение числа Стантона с экспериментальными данными [205]. В этом случае значение параметра переохлаждения ξ было не больше 0,15, поэтому его влиянием на теплообмен при конденсации на ламинарной струе жидкости пренебрегли.

Глава 9

ЛАМИНАРНАЯ ПЛЕНОЧНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ НА СФЕРЕ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА

В работе [211] показано, что в окрестности критической точки на сфере существует автомодельное решение уравнений пограничного слоя. В окрестности этой точки в той же работе изучена ламинарная пленочная конденсация.

В этой главе изучена ламинарная пленочная конденсация не только в окрестности критической точки на сфере, но и за ее пределами [212].

Пусть x отсчитывается от верхней критической точки (где $x = 0$) вдоль окружности на поверхности сферы, а расстояние измеряется по нормали к поверхности. Как и в работе [211], предполагается, что сфера погружена в безграничный объем чистого пара, температура которого равна его температуре насыщения $t_н$, а поверхность сферы поддерживается при постоянной температуре t_1, меньшей $t_н$. По поверхности сферы движется вниз тонкий непрерывный слой конденсата. Свойства конденсата не зависят от температуры, вязкая энергия диссипации мала, так что ею можно пренебречь. При этих предположениях уравнения количества движения и энергии, которые описывают установившееся ламинарное осесимметричное течение пленки жидкости на сфере, имеют следующий вид [212]:

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0; \tag{9.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g(\rho - \rho_v)}{\rho}\sin\frac{x}{R}; \tag{9.2}$$

$$u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y} = a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \tag{9.3}$$

где R – радиус сферы; r – расстояние от оси симметрии, $r = R\sin(x/R)$; ρ, ρ_v – плотность конденсата и паровой фазы; a – коэффициент температуропроводности.

Граничные условия принимаются следующие:

$$\text{при } y = 0 \quad t = t_1, \; u = v = 0; \tag{9.4}$$

$$\text{при } y = \delta(x) \quad t = t_н, \; \partial u/\partial y = 0. \tag{9.5}$$

К граничным условиям (9.4) и (9.5) добавляется условие сохранения энергии на поверхности пленка жидкости–пар:

$$k \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{\delta(x)} = \frac{\rho h_0}{r} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} urdy, \tag{9.6}$$

где k – коэффициент теплопроводности; h_0 – скрытая теплота парообразования.

С помощью безразмерных переменных

$$\begin{aligned} &x = R\bar{x}, \; u = (\nu c^{1/2}/R)\,\bar{u}, \; v = (\nu c^{1/4}/R)\,\bar{v}, \\ &y = (R/c^{1/4})\,\bar{y}, \; r = R\bar{r}, \\ &t = \bar{t}\,(t_н - t_1) + t_1, \end{aligned} \tag{9.7}$$

где $c = [g(\rho - \rho_v)/\rho\nu^2]R^3$, система уравнений (9.1)–(9.3) и граничные условия (9.4), (9.5) преобразуются к виду (черточки опущены):

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0; \tag{9.8}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x; \tag{9.9}$$

$$u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \tag{9.10}$$

$$\text{при } y = 0 \quad t = 0, \; u = v = 0; \tag{9.11}$$

$$\text{при } y = \delta(x) \quad t = 1, \; \partial u/\partial y = 0; \tag{9.12}$$

$$\text{при } y = \delta(x) \quad \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{\delta} = \frac{\mathrm{Pr}}{\gamma}\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} urdy, \tag{9.13}$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/a$, $\gamma = c_p(t_н - t_1)/h_0$.

Решим систему уравнений (9.8)–(9.10) с граничными условиями (9.11)–(9.13) методом, описанным в главе 5. Согласно этому методу, введем в поле течения линии равного расхода и обозначим

$$u_k(x) = u[x, y_k(x)], \; v_k(x) = v[x, y_k(x)], \; t_k(x) = t[x, y_k(x)].$$

Решение системы дифференциальных уравнений (9.8) – (9.10) будем искать в виде

$$u_k = \sum_{j=1}^{N} A_j(x)\, U_j(y_k(x)); \quad t_k = \sum_{j=1}^{N} A1_j(x) N1_j(y_k(x)), \tag{9.14}$$

где N – номер приближения; U_j, $N1_j$ – полные системы функций поверхностей $y_k(x)$, через каждую из которых отсутствует поток жидкости. Значения u_k, t_k, y_k определим из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$u_k \frac{du_k}{dx} = \Phi(k-1) \frac{\partial u_k}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} + \sin x; \tag{9.15}$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{2\Phi - (y_k - y_{k-1})\left[\dfrac{du_k}{dx} + \dfrac{du_{k-1}}{dx} + (u_k + u_{k-1})\operatorname{ctg} x\right]}{u_k + u_{k-1}}; \tag{9.16}$$

$$u_k \frac{dt_k}{dx} = \Phi(k-1) \frac{\partial t_k}{\partial y_k} + \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 t_k}{\partial y_k^2}. \tag{9.17}$$

Функция Ф в уравнениях (9.15) – (9.17) находится из решения следующего уравнения:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_k} urdy = r\Phi(k-1). \tag{9.18}$$

В начальном сечении ($x = 0$) задавались начальные условия для распределения скорости и температуры, а также сетка расчетных линий. Значение функции Ф в начальном сечении принималось равным нулю.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (9.15) – (9.17) с граничными и начальными условиями решалась методом Рунге–Кутта, причем функция Ф, вычисляемая по уравнению (9.18), использовалась как с предыдущего шага, так и находилась методом итераций. При сравнительно малом шаге интегрирования заметных различий в определении функции Ф не наблюдалось.

Изложенный алгоритм применен для определения полей скоростей, температур, толщины пленки жидкости на различном расстоянии от критической точки, и на основании последних проведено вычисление среднего числа Нуссельта по формуле

$$\mathrm{Nu} = \bar{\alpha} 2R/k. \tag{9.19}$$

Средний коэффициент теплоотдачи к поверхности $\bar{\alpha}$ вычислялся через локальный α по следующей формуле:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha dx, \tag{9.20}$$

где

$$\alpha = \frac{k}{t_1 - t_н} \left(\frac{dt}{dy}\right)_0. \tag{9.21}$$

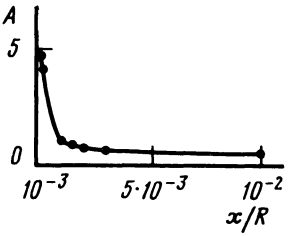


Рис. 9.1. Изменение отношения $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0 = A$ с расстоянием от критической точки

Точки на графике определены расчетным путем; кривая построена по формулам (9.24), (9.25)

Для определения локального коэффициента теплоотдачи проинтегрируем (9.10) по толщине пленки конденсата, учитывая при этом выражения (9.13) и (9.18). Найдем

$$-ra\left(\frac{dt}{dy}\right)_0 = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta(x)} ur\left(t - t_н - \frac{h_0}{c_p}\right)dy. \tag{9.22}$$

С учетом (9.21) и (9.22) выражение для локального коэффициента теплоотдачи принимает вид

$$\alpha = \frac{\rho c_p \nu c^{1/4}}{Rr}\frac{d}{dx}\int_0^{\delta(x)} ur\left(t - 1 - \frac{1}{\gamma}\right)dy,$$

откуда с учетом (9.19) и (9.20) среднее число Нуссельта выражается формулой

$$\mathrm{Nu} = 2\mathrm{Pr}c^{1/4}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{r}\frac{d}{dx}\int_0^{\delta(x)} ur\left(t - 1 - \frac{1}{\gamma}\right)dydx. \tag{9.23}$$

В работе [211] получена формула

$$\mathrm{Nu}_0 = k_1 c^{1/4}(\mathrm{Pr}/\gamma)^{1/4}, \tag{9.24}$$

в которой некоторый средний коэффициент пропорциональности k_1, найденный эмпирическим путем, был равен 1.35.

Отношение числа Нуссельта, определенного по формуле (9.23), к числу Нуссельта, полученному по формуле (9.24) ($\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0 = A$), меняется с удалением от критической точки. Характер такого изменения показан на рис. 9.1, из которого видно, что по мере удаления от критической точки отношение A уменьшается, асимптотически приближаясь к постоянному значению.

Полученный результат можно аппроксимировать формулой

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_0 A, \tag{9.25}$$

где

$A = 5 - 8 \cdot 10^3 (x/R)$ при $0 < x/R \leqslant 5 \cdot 10^{-4}$;

$A = 1 - 2 \cdot 10^2 (x/R)$ при $5 \cdot 10^{-4} \leqslant x/R \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$;

$A = 0{,}4$ при $x/R \geqslant 3 \cdot 10^{-3}$.

Из рис. 9.1 видно, что зависимость числа Нуссельта при ламинарной пленочной конденсации на сфере имеет сложный характер. В окрестности критической точки на сфере число Нуссельта резко изменяется, уменьшаясь по мере удаления от этой точки. Область резкого изменения числа Нуссельта мала и составляет незначительную долю радиуса.

Глава 10

ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН КАК СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

§ 10.1. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ КАНАЛ (ОТСУТСТВИЕ МАССОВЫХ СИЛ). ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Как уже указывалось в предыдущих главах, изучение течения пленки жидкости, являясь в теоретическом отношении математически сложной задачей, привлекло внимание многих исследователей из-за кажущейся на первый взгляд простоты. Если учесть, что течение пленки жидкости сравнительно просто можно реализовать на практике, изучение гидродинамики и массообмена в ней имеет глубокие корни.

Еще в 1924 г. Льюис и Уитмен [213], исходя из представлений Нернста, предлагают известную двупленочную теорию. Пленочная теория сыграла положительную роль в развитии представлений о механизме массообмена. Имеющиеся недостатки этой теории подробно разобраны в работе [214]. Хигби [67] предложил модель "проницания". Ее преимущество в простоте. В дальнейшем Данквертс и Кишиневский [215–219] усовершенствовали эту модель, предложив модель "обновления поверхности". Позже [218] Данквертс пришел к выводу, что ни пленочная теория, ни теория проницания не могут претендовать на точное объяснение механизма массоотдачи. Существует и ряд других теорий, подробно рассмотренных в [219], которые являются лишь модификацией упомянутых выше.

Реальная гидродинамическая картина учитывается при более строгом подходе к явлениям массопередачи, требующем решения дифференциальных уравнений переноса вещества и количества движения жидкой и газовой фаз.

При этом для стационарного процесса в пленке жидкости уравнение конвективной диффузии обычно записывается в следующем виде:

$$u(y)\frac{\partial c}{\partial x} = D\,\mathrm{div}\nabla c.$$

Это уравнение предполагает известным распределение скорости в жидкой и газовой фазах.

Решение данного уравнения при различной степени приближения для разного профиля скорости приведено в работах [68, 220–223].

В работах [52, 223, 224] влияние газовой фазы на жидкую и наоборот учитывалось посредством рассмотрения гидродинамического взаимодействия потоков.

В работе [225] аналогичная задача решена методом возмущений отдельно для жидкой и газовой фаз.

Авторы работы [226] применили решение уравнения конвективной диффузии к расчету массообмена в режиме восходящего прямотока.

Впервые задача двухфазного массообмена рассмотрена в работе [227], где предполагалось заданным распределение концентрации в глубине аппа-

рата. В действительности же это распределение должно быть получено из решения самой задачи.

Краткий обзор основных теоретических работ позволяет сделать выводы: известно большое количество решений, полученных при различных дополнительных ограничениях; не выяснена область применения тех или иных частных решений.

Ответ на этот вопрос для каждой конкретной массообменной системы можно получить в результате исследования диффузионной задачи при наличии сопротивления в обеих фазах [228–231].

Пленочный массообмен в условиях отсутствия массовых сил описывается системой уравнений в частных производных: уравнением движения жидкой пленки и газа и уравнениями конвективной диффузии распределяемого вещества [52, 223, 224]:

$$u\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu_1\frac{\partial u_1}{\partial y^2}; \qquad (10.1.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0;$$

$$u_1\frac{\partial c_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial c_1}{\partial y} = D_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2}, \quad y < h_0, \; x > 0;$$

$$u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0; \qquad (10.1.2)$$

$$u_2\frac{\partial c_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial c_2}{\partial y} = D_2\frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2}, \quad y > h_0, \; x > 0,$$

где индекс 1 относится к пленке жидкости; индекс 2 – к газовой фазе; h_0 – средняя толщина пленки жидкости.

К уравнениям (10.1.1.), (10.1.2) добавляются граничные условия:

при $y = 0$ $u_1 = v_1 = 0$, $c_1 = c_{10}$;

при $y = h_0$ $u_1 = u_2$, $c_1 = kc_2$; (10.1.3)

$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y}; \; D_1\frac{\partial c_1}{\partial y} = D_2\frac{\partial c_2}{\partial y};$$

при $y = R$ (на оси канала) $\partial c_2/\partial y = 0$;

при $x = 0$ (на входе в канал) $c_2 = c_{20}$, $c_1 = c_{10}$.

Упростим диффузионную задачу двухфазного массообмена. Предположим, что диффузионное сопротивление сосредоточено в пленке жидкости, т.е. концентрация в газовой фазе является постоянной величиной вплоть до поверхности раздела.

Следовательно, в системе уравнений (10.1.2) следует исключить уравнение конвективной диффузии в газовой фазе. В соответствии с этим предпо-

ложением граничные условия (10.1.3) примут вид:

при $y = 0$ $u_1 = v_1 = 0$, $c_1 = c_{10}$;

при $y = h_0$ $u_1 = u_2$; $\mu_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y}$; $c_1 = c_0$; (10.1.4)

при $y \to \infty$ $u = u_\infty$.

Анализ этой задачи состоит в том, что нужно решить уравнения (10.1.1) и (10.1.2) с граничными условиями (10.1.4). Введем функцию тока для жидкости и газа по формулам

$$\Psi_1 = f(\eta)\sqrt{\nu_2 U_\infty x}, \quad \Psi_2 = G(\eta)\sqrt{\nu_2 U_\infty x}; \tag{10.1.5}$$

$$\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu_2 x}. \tag{10.1.6}$$

В соответствии с этими обозначениями составляющие скорости примут вид

$$u_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}; \tag{10.1.7}$$

$$u_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}.$$

В новых переменных система уравнений (10.1.1) и (10.1.2) и граничные условия (10.1.4) примут вид

$$f''' + \left(\frac{\nu_2}{2\nu_1}\right) f \cdot f'' = 0; \tag{10.1.8}$$

$$G''' + (1/2)\, G \cdot G'' = 0; \tag{10.1.9}$$

$$\eta = 0 \quad f(0) = f'(0) = 0; \tag{10.1.10}$$

$$\eta = \eta_\delta \quad f'(\eta_\delta) = G'(\eta_\delta), \quad \mu_1 f''(\eta_\delta) = \mu_2 G''(\eta_\delta); \tag{10.1.11}$$

$$\eta \to \infty \quad G'(\infty) = 1. \tag{10.1.12}$$

Решение уравнения (10.1.9) с условиями (10.1.11) и (10.1.12) будет иметь вид

$$G(\eta) \sim F(\eta - \gamma), \tag{10.1.13}$$

где γ – постоянная, которую следует определить с помощью граничных условий (10.1.11) и (10.1.12).

Как известно, решение уравнений (10.1.8) и (10.1.9) с учетом (10.1.13) можно искать в виде рядов:

$$f(\eta) = \frac{\nu_1}{\nu_2}\left[\frac{\alpha\eta^2}{2} - \frac{\alpha^2\eta^5}{2\cdot 5!} + 11\frac{\alpha^3\eta^8}{2\cdot 8!} - \ldots\right]; \tag{10.1.14}$$

$$G(\eta) = F_w + \frac{F_w'}{2}(\eta - \gamma)^2 - \frac{F_w F''}{2\cdot 3!}(\eta - \gamma)^3 + \ldots \tag{10.1.15}$$

При сравнительно малых расстояниях от стенки и от поверхности раздела, что равносильно существованию пограничных слоев у поверхности

орошаемого канала и у поверхности пленки со стороны газа, уравнения (10.1.14) и (10.1.15) принимают вид

$$f(\eta) = \nu_1 \alpha \eta^2 / 2\nu_2; \tag{10.1.16}$$

$$G(\eta) = F_w + (F''_w/2)(\eta - \gamma)^2, \tag{10.1.17}$$

где постоянные α, γ найдены на основании граничных условий (10.1.10) – (10.1.12) [52, 223].

Уравнение конвективной диффузии (10.1.1) с помощью выражения

$$c = c_{10} - (c_{10} - c_0)\theta(\eta) \tag{10.1.18}$$

приводится к виду

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{\nu^2}{2D_1} f(\eta)\frac{d\theta}{d\eta} = 0. \tag{10.1.19}$$

Решение уравнения (10.1.19) найдено при следующих граничных условиях:

$$\eta = 0 \quad \theta(\eta) = 0, \quad \eta = \eta_\delta \quad \theta(\eta) = 1. \tag{10.1.20}$$

При граничных условиях (10.1.20) уравнение (10.1.19) имеет решение

$$\theta(\eta) = \beta(\mathrm{Pr}) \int_0^\eta \exp\left[-(\nu_2/2D_1)\int_0^t f(\xi)\,d\xi\right] dt.$$

Диффузионный поток на поверхности пленки жидкости имеет вид [52, 223]

$$j = (D_1/2{,}9)(c_{10} - c_0)\mathrm{Pr}_1^{1/3}(\mu_2/\mu_1)^{2/3}(\rho_1/\rho_2)^{1/3}\sqrt{U_\infty/\nu_2 x}. \tag{10.1.21}$$

Из (10.1.21) величина диффузионного слоя δ вычисляется так:

$$1/\delta = \mathrm{Pr}_1^{1/3}(2{,}9)^{-1}(\mu_2/\mu_1)^{2/3}(\rho_1/\rho_2)^{1/3}\sqrt{U_\infty/\nu_2 x}.$$

Учитывая, что величина динамического слоя на пластине

$$\delta_0 \sim \sqrt{\nu_2 x/U_\infty}, \tag{10.1.22}$$

имеем

$$\delta_0 = \delta \mathrm{Pr}_1^{1/3}(\mu_2/\mu_1)^{2/3}(\rho_1/\rho_2)^{1/3}.$$

Таким образом, соотношение между динамическим (δ_0) и диффузионным (δ) слоями одно- и двухфазного потоков не совпадает на величину, зависящую от физико-химических свойств системы $(\mu_2/\mu_1)^{2/3}(\rho_1/\rho_2)^{1/3}$, что существенно отличается от известного классического предельного закона, выведенного для однофазного потока.

§10.2. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ КАНАЛ. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

В этом случае исследование массообмена в системе жидкость–газ базируется на решении системы уравнений [228–230].

$$\frac{\partial c_1}{\partial x'} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial y_1^2}; \quad \beta^2\frac{\partial c_2}{\partial x'} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial y_2^2} \tag{10.2.1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\text{при } y_1 = y_2 = 1 \quad c_1 = c_2', (-\gamma)\frac{\partial c_2}{\partial y_2} = \frac{\partial c_1}{\partial y_1}; \tag{10.2.2.}$$

$$\text{при } y_2 = 0 \ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} = 0; \ \text{при } y_1 = 0 \ \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = 0;$$

$$\text{при } x' = 0 \quad c_2 = 1, \quad c_1 = 0, \tag{10.2.3}$$

где введены обозначения

$$c_1(x, y_1) = c_1'/kc_{20}'; \quad c_2(x, y_2) = c_2'/c_{20}'; \quad y_1 = y/h_0;$$
$$y_2 = (R - y)/(R - h_0); \quad x' = x/h_0\mathrm{Pe}_1; \quad x'' = x/R \cdot \mathrm{Pe}_2; \tag{10.2.4}$$
$$\gamma = 1/\epsilon\beta^2 = D_2h_0/D_1Rk; \quad \epsilon = qk/R\bar{u}_2; \quad \beta^2 = R\mathrm{Pe}_2/h_0\mathrm{Pe}_1;$$
$$\mathrm{Pe}_1 = h_0\bar{u}_{01}/D_1; \quad \mathrm{Pe}_2 = \bar{u}_{02}(R - h_0)/D_2,$$

k – безразмерная константа Генри; R – полуширина канала; $\bar{u}_{01}$, $\bar{u}_{02}$ – среднерасходовые скорости в жидкости и газе; h_0 – толщина пленки; c_{20}' – концентрация на входе в канал.

Уравнение (10.2.1) справедливо при условии, что $h/l \ll 1$, где l – длина канала.

В уравнение (10.2.1) и граничные условия (10.2.2) входят безразмерные параметры ϵ и β^2. Для выяснения физической природы этих параметров напишем уравнение материального баланса для орошаемой трубки при предположении $R \gg h_0$:

$$\bar{c}_{20}'\pi R^2\bar{u}_{02} = \bar{c}_{2k}'\pi R^2u_{02} + 2\pi Rq\bar{c}_{1k}', \tag{10.2.5}$$

где $\bar{c}_{20}'$, $\bar{c}_{2k}'$ – средние по сечению начальная и конечная концентрации газа; $\bar{c}_{1k}'$ – средняя по сечению конечная концентрация вещества в пленке жидкости.

Из уравнения (10.2.5) следует:

$$1 - \bar{c}_{2k} = \frac{2\pi Rqk}{\pi R^2\bar{u}_{02}}\bar{c}_{1k} = \epsilon\bar{c}_{1k}, \tag{10.2.6}$$

где $\epsilon = 2\pi Rc_{20}'kq/\pi R^2c_{20}' = L/mG$ есть отношение потока вещества, которое может унести в единицу времени пленка жидкости с максимальной концентрацией kc_{20}', к потоку вещества в газовой фазе, подаваемому на орошение. Для канала $\epsilon = qk/R\bar{u}_2$. Физический смысл параметра $\beta^2 = R\mathrm{Pe}_2/2h_0\mathrm{Pe}_1$ для трубки и $\beta^2 = R\mathrm{Pe}_2/h_0\mathrm{Pe}_1$ для канала можно выяснить, сделав предположение о справедливости существования зависимостей для толщины слоя в жидкости и газе:

$$\delta_1 \simeq D_1^{0,5}/\bar{u}_{01}^{0,5}; \quad \delta_2 \simeq D_2^{0,5}/\bar{u}_{02}^{0,5}. \tag{10.2.7}$$

После этих предположений параметр β принимает вид

$$\beta \simeq \frac{R}{\delta_2} : \frac{h_0}{\delta_1}. \tag{10.2.8}$$

Таким образом, параметр β характеризует отношение глубин прорастания диффузионных слоев в каждой фазе. Последнее определяет диффу-

зионное сопротивление в одной или обеих фазах. А это определяется либо соотношением (10.2.8), когда сопротивление массопередачи сосредоточено в обеих фазах, либо стремлением диффузионного слоя и его предельной величины к одной фазе, тогда процесс массопередачи будет определяться сопротивлением другой фазы. Например, при $\delta_2 \to R$ (величина диффузионного слоя в газовой фазе стремится к полуширине канала), а $1/\beta \to h_0/\delta_1$, т.е. сопротивление массопередачи определяется жидкой фазой.

Решение системы (10.2.1) с граничными условиями (10.2.2) и (10.2.3) методом разделения переменных получено в работах [228–230]. Найдены формулы для расчета средней по толщине пленки концентрации, а также выражения для поверхностной концентрации. Из этих формул, как частные случаи, вытекают формула Вязовова, если сопротивление массообмену сосредоточено в жидкой фазе, и формула Пикфорда для расчета массоотдачи в газовой фазе.

Наиболее наглядно эти результаты для любых параметров ϵ и β можно представить в графоаналитическом виде.

Количество вещества Q, перешедшее в единицу времени на единицу длины через поверхность раздела фаз, равно

$$Q = \int_0^h u_1 c_1'(x, y)\, dy = k c_{20}' \bar{u}_{01} h_0 \bar{c}_{1k}. \qquad (10.2.9)$$

Подставляя из (10.2.6) значения средней концентрации в формулу (10.2.9), получим

$$Q = k c_{20}' \bar{u}_{01} h_0 (1 - \bar{c}_{2k})/\epsilon. \qquad (10.2.10)$$

Определим безразмерный поток следующим образом:

$$I = Q/c_{20}' R \bar{u}_{02} = (1 - \bar{c}_{2k}) = \epsilon \bar{c}_{1k}. \qquad (10.2.11)$$

В работах [228–230] показано, что для нисходящего прямотока

при $x \to \infty$ $\bar{c}_2(x) = \bar{c}_1(x) = c_s(x) = 1/(1 + \epsilon)$, (10.2.12)

где $c_s(x)$ – поверхностная концентрация.

Тогда с учетом (10.2.11) безразмерный поток при $x \to \infty$ принимает вид

$$I(\infty) = \epsilon/(1 + \epsilon). \qquad (10.2.13)$$

Аналитические расчеты [228–230] показали, что в окрестности входа, т.е. при $x \to 0$ в обеих фазах существуют диффузионные пограничные слои. Учитывая это, можно записать выражение для безразмерного потока в виде

$$I(z) = \epsilon \bar{c}_1(z) = [\epsilon/(1 + \epsilon)]\, b(z), \qquad (10.2.14)$$

где $z \Rightarrow x' = l/h_0 \mathrm{Pe}_1$ для жидкой фазы, $z \Rightarrow x'' = l h_0 \mathrm{Pe}_2$ - для газовой, причем очевидно, что $x' = \beta^2 x''$, где l – расстояние, на котором безразмерный поток $I(z)$ отличается от предельного $I(\infty)$ менее чем на 10%.

Можно приблизительно оценить характер изменения функции в $b(z)$: при $z \to 0$ $b(z) \to 2\sqrt{z}/\sqrt{\pi}$, а при $z \to \infty$ $b(z) \to 1$.

Для того чтобы определить характер изменения функции $b(z)$ на всем интервале изменения z, необходимо решить систему уравнений (10.2.1) с граничными условиями (10.2.2) и (10.2.3). Эта система решена численно [231] с использованием неявных разностных схем, аппроксимирующих

данную двухфазную задачу. Чтобы определить, в каком случае сопротивление массообмену сосредоточено в одной из фаз, а в каком – в обеих фазах, выбирается подходящая система координат $X = \lg\epsilon$, $Y = \lg(1/\epsilon\beta^2)$ (рис. 10.2.1). Точки в плоскости $X-Y$, лежащие на линии $Y = \text{const}$, характеризуют сопротивление массообмену в фазе или фазах. При переходе от точки плоскости с бо́льшим значением ϵ к точкам с меньшими значениями ϵ величина емкости пленки жидкости в двухфазной системе уменьшается, уменьшается также возможность абсорбции (десорбции) пленкой жидкости, т.е. увеличивается сопротивление массообмену в жидкой фазе.

Понятно, что в зависимости от уровней $Y = \text{const}$, т.е. от физико-химических свойств системы, плотности орошения пленки жидкости, сопротивление массообмену в жидкой фазе будет наступать быстрее или медленнее. Удобнее в прямоугольной системе $X-Y$ рассматривать переход сопротивления массообмену из одной фазы в другую с помощью уровней $E = \lg(\epsilon\beta)$ и $\lg\beta^2$. Ряд прямых, обладающих этими свойствами, показан на рис. 10.2.1. При дальнейшем рассмотрении решения в плоскости нас будут интересовать параметры β^2, E при $\epsilon \ll -1{,}1$ и $\epsilon \gg 1$. Решение двухфазной задачи (10.2.1) с граничными условиями (10.2.2) и (10.2.3) получено в виде зависимости функции $b(z)$, а следовательно, и безразмерного потока (10.2.14) от безразмерного расстояния для различных параметров:

$X[-1; -0{,}75; -0{,}5; -0{,}25; 0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1]$ и

$E[-\infty; -1; -0{,}75; -0{,}5; -0{,}25; 0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1]$.

Результаты расчета представлены на рис. 10.2.2–10.2.4. Выбор интервалов параметров обусловлен изменением концентрации распределяемого вещества на поверхности раздела фаз. Например, при $\beta^2 \ll 1$, как следует из работ [228–230], поверхностная концентрация изменяется по длине канала и убывает от входа к выходу из канала, т.е. является убывающей функцией. Наоборот, при $\beta^2 \gg 1$ и поверхностная концентрация увеличивается от входа к выходу из канала, т.е. является функцией возрастающей. При $\beta^2 = 1$ поверхностная концентрация является постоянной величиной и равна

$$c_s(x) = 1/(1 + \epsilon).$$

Таким образом, при $\beta^2 = 1$, когда поверхностная концентрация постоянна по длине орошаемого канала, двухфазная задача массообмена распадается на две однофазные задачи: задачу Вязовова, когда сопротивление массообмену сосредоточено в жидкой фазе, и задачу Гретца–Пикфорда, когда сопротивление массообмену сосредоточено в газовой фазе.

Функция $b(z)$ при сопротивлении массообмену в жидкой фазе принимает вид

$$b(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\exp(-\pi^2(k + 1/2)^2 z)}{\pi^2(k + 1/2)^2}, \quad z = x' \qquad (10.2.15)$$

Решение Вязовова получается, если подставить функцию $b(z)$ в формулу (10.2.14).

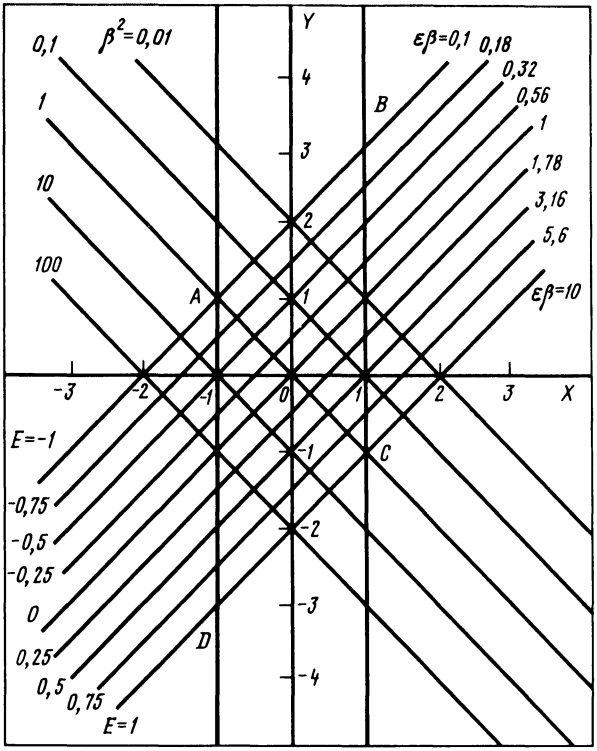


Рис. 10.2.1. Плоскость $X-Y$
$X = \lg\epsilon$, $Y = \lg(1/\epsilon\beta)^2$

Решение Гретца–Пикфорда с учетом выражения для функции $b(z)$ принимает вид

$$I_r = \frac{\epsilon - 1 + b(z)}{1 + \epsilon}, \quad z = x''. \tag{10.2.16}$$

Сначала рассмотрим решение задачи для точек верхней полуплоскости ($\beta^2 \leqslant 1$). Для малых значений параметров $\epsilon\beta \ll 1$ изменением концентрации в газовой фазе по координате $y_г$ можно пренебречь. Например, численное решение на прямой AB, где $\epsilon\beta = 0{,}1$, представлено на рис. 10.2.2,*а, б, в*. При дальнейшем уменьшении $\epsilon\beta$ решение задачи не зависит от этого параметра и практически совпадает с решением задачи при $E = -\infty$. Решение задачи зависит только от параметра X (см. рис. 10.2.3). Функция $b(z)$, а следовательно, и безразмерный диффузионный поток определяются соответственно формулами (10.2.15) и (10.2.16). Решение задачи массообмена в данной области было исследовано с различной точностью и для различных законов распределения скорости в трубах и плоских каналах ранее в работах [68, 221, 222].

Решение задачи двухфазного массообмена для точек плоскости, расположенных выше прямой AB и ограниченных прямыми AD и BC (рис. 10.2.1),

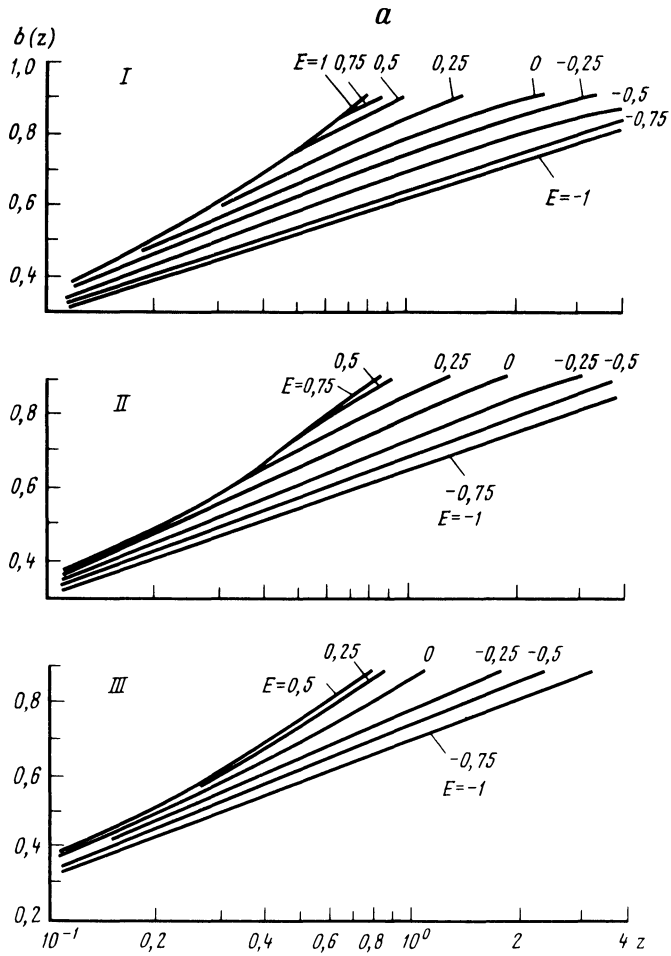
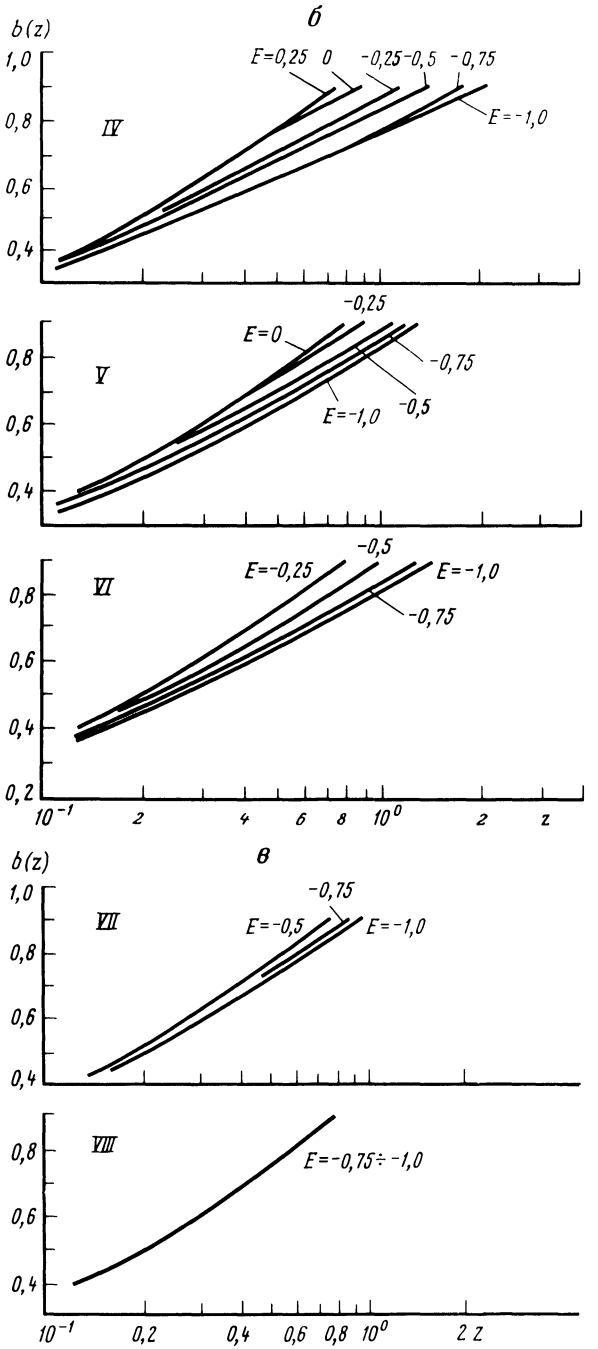


Рис. 10.2.2. Решение задачи при постоянном значении X
а: *I* – $X = 1$; *II* – 0,75; *III* – 0,5; *б*: *IV* – 0,25; *V* – 0; *VI* – –0,25; *в*: *VII* – 0,5; *VIII* – $X = 0{,}75$

зависит также только от параметра X, и функция $b(z)$ определяется из графика на рис. 10.2.5 или же из нижних кривых (см. рис. 10.2.2, *а, б, в*). Последнее свойство связано с тем, что с уменьшением E кривые все больше приближаются друг к другу и при достаточно большом $E \ll -1$ практически совпадают с кривой при $E = -1$. Вот почему функцию $b(z)$ можно определять из рис. 10.2.5, полученного из решения задачи двухфазного массообмена при $E \to -\infty$, и из нижних кривых на рис. 10.2.2, *а, б, в*, полученных из аналогичной задачи при $E = -1$.

Решение задачи двухфазного массообмена для точек плоскости, расположенных выше прямой AB и правее прямой BC (дальнейшее увеличение параметра X), практически совпадает с нижними кривыми на рис. 10.2.2, *а*


б
b(z)
1,0
0,8
0,6
0,4
IV
E=0,25
0
-0,25
-0,5
-0,75
E=-1,0
V
-0,25
E=0
-0,75
-0,5
E=-1,0
VI
-0,5
E=-0,25
E=-1,0
-0,75
0,2
10⁻¹
2
4
6
8
10⁰
2
z
в
b(z)
VII
-0,75
E=-0,5
E=-1,0
VIII
E=-0,75÷-1,0
0,2
0,4
0,6
0,8
10⁰
2 z

и на рис. 10.2.3. В этой области (правый верхний угол) решение задачи описывается аналитической формулой, которая имеет вид

$$b(z) = 1 - \exp(z)[1 - \Phi(\sqrt{z})], z = x', \qquad (10.2.17)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности.

Область плоскости $X-Y$ правее прямой BC и ограниченная продолжением прямых AB и DC характеризуется тем, что решение задачи двухфазного массообмена зависит только от параметра E и не зависит от параметра X. При расчете безразмерного диффузионного потока можно пользоваться решением задачи при $X = 1$, т.е. рис. 10.2.2, *а*, так как при дальнейшем увеличении параметра X решение задачи не зависит от этого параметра.

Область, расположенная правее прямых DC и BC, характеризуется тем, что изменением концентрации в жидкой фазе можно пренебречь, основное сопротивление массообмена сосредоточено в газовой фазе. Это так называемая область Пикфорда.

Выше рассмотрены практически все возможные решения задачи двухфазного массообмена для параметра $\beta^2 \ll 1$, т.е. для верхней полуплоскости. Для того чтобы найти решение этой задачи для параметра $\beta^2 \gg 1$, т.е. для нижней полуплоскости, произведем некоторые преобразования уравнения (10.2.1) и граничных условий (10.2.2) и (10.2.3). В частности, сделаем замену $S_г = 1 - c_г$, $S_ж = 1 - c_ж$. Тогда для функций $S_г$ и $S_ж$ получим следующую двухфазную диффузионную задачу:

$$\frac{\partial S_г}{\partial x''} = \frac{\partial^2 S_г}{\partial y_г^2}; \quad \left(\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{\partial S_ж}{\partial x''} = \frac{\partial^2 S_ж}{\partial y_ж^2}; \qquad (10.2.18)$$

$$\frac{\partial S_г}{\partial y_г} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial S_ж}{\partial y_ж}, \; S_г = S_ж \text{ при } y_г = y_ж = 1;$$

$$\frac{\partial S_г}{\partial y_г} = 0 \text{ при } y_г = 0; \quad \frac{\partial S_ж}{\partial y_ж} = 0 \text{ при } y_ж = 0; \qquad (10.2.19)$$

$$S_г = 0, \; S_ж = 1 \text{ при } x'' = 0.$$

Между решениями диффузионных задач (10.2.1)–(10.2.3) и (10.2.18), (10.2.19) существует простая связь:

$$S_г(x'', y_г, \beta^2, \gamma) = c_ж(x', y_ж, 1/\beta^2, 1/\gamma);$$
$$S_ж(x'', y_ж, \beta^2, \gamma) = c_г(x', y_г, 1/\beta^2, 1/\gamma). \qquad (10.2.20)$$

Из соотношений (10.2.20) следует, что выполняется равенство

$$b(z, X_0, E_0) = b(z, -X_0, -E_0). \qquad (10.2.21)$$

Последнее равенство означает, что рис. 10.2.2, *а, б, в* можно пользоваться также для нижней полуплоскости. При этом следует иметь в виду соблюдение равенства (10.2.21), т.е. для найденных значений X_0 и E_0 в нижней полуплоскости следует выбирать кривые на рис. 10.2.2, *а, б, в*, полученные для верхней полуплоскости, со значением параметров $-X_0$ и $-E_0$.

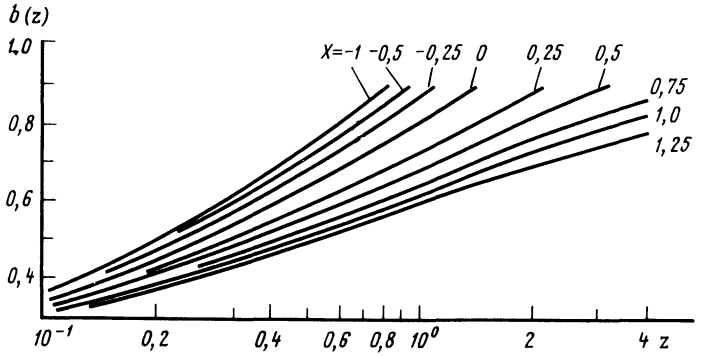


Рис. 10.2.3. Решение задачи при $E = -\infty$

Отсюда для каждой подобласти, расположенной в верхней полуплоскости, найдется соответствующая "симметричная" подобласть в нижней полуплоскости.

В заключение следует указать общую методику расчета безразмерного диффузионного потока, пользуясь графиками на рис. 10.2.2,*а, б, в*. Методика расчета диффузионного потока в канале произвольной длины следующая:

а) сначала вычисляется безразмерная длина z_0;

б) в зависимости от значения параметров $X_0 = \lg\epsilon_0$ и $E_0 = \lg(\epsilon_0, \beta_0)$ функция $b(z)$ определяется по графикам рис. 10.2.2–10.2.3 или по одной из аналитических формул (10.2.15), (10.2.17);

с) найдя значения функции $b(z)$ в точке z_0, безразмерный поток и среднюю концентрацию в жидкости $c_ж(x)$ определяют с помощью формулы (10.2.14).

§10.3. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ДВУХФАЗНОГО БЕЗВОЛНОВОГО ПЛЕНОЧНОГО МАССООБМЕНА С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ПО АБСОРБЦИИ И ДЕСОРБЦИИ ГАЗОВ

По величине константы k газы, подчинающиеся закону Генри, условно подразделяются [8] на плохо растворимые ($k < 10^3$), умеренно растворимые ($k \sim 10^2$) и хорошо растворимые ($k > 10^3$). Значение k определяют по растворимости газов в воде по формуле $k = c_ж^{общ}/c_г'$, где $c_ж^{общ}$ – постоянная общая концентрация растворимого компонента в жидкой фазе; $c_г'$ – постоянная концентрация растворимого компонента в газовой фазе.

ПЛОХО РАСТВОРИМЫЕ ГАЗЫ

Типичными представителями плохо растворимых газов являются He ($k = 10^{-2}$, $t = 20\,^\circ$C), O_2 ($k = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$), CO_2 ($k = 0{,}94$). Исследованию абсорбции и десорбции плохо растворимых газов в лабораторных условиях на трубках малого диаметра ($R \sim 1$ см) в режимах прямо- и противотоков посвящены работы [77, 83, 155, 232 - 234].

Как и ранее, введем следующие обозначения для безразмерных концентраций:

$$c_1(x, y) = \frac{c_1(x, y) - c'_{1\,0}}{kc'_{2\,0}}, \quad c_2(x, y) = \frac{c'_2(x, y)}{c'_{2\,0}}, \tag{10.3.1}$$

где c'_1, c'_2 – концентрация в жидкой и газовой фазах.

Выражение для количества вещества, перешедшего в единицу времени на единицу периметра через поверхность раздела с учетом параболического распределения скорости, имеет вид

$$Q = \int_0^h u_1(y)\,[c'_1(l, y) - c'_{1\,0}]dy = kc'_{2\,0}\bar{u}_{0\,1}h_0\,\bar{c}_1(l), \tag{10.3.2}$$

где $$c_1(l) = \int_0^1 \frac{3}{2}(2y_1 - y_1^2)c_1(l, y_1)\,dy_1. \tag{10.3.3}$$

С другой стороны,

$$Q = q\,[c'_1(l) - c'_{1\,0}]. \tag{10.3.4}$$

Следовательно, средний безразмерный диффузионный поток, как следует из соотношений (10.3.2) и (10.3.4), связан с концентрациями на входе и выходе жидкой фазы выражением

$$\bar{c}_1(l) = \frac{\bar{c}'_1 - c'_{1\,0}}{kc'_{2\,0}}.$$

Аналогично можно показать, что

$$1 - \bar{c}_2(l) = \frac{c'_{2\,0} - \bar{c}'_2(l)}{c'_{2\,0}},$$

где $1 - \bar{c}_2(l) = 1 - \int_0^1 2(1 - y_2^2)\,c_2(l, y_2)\,y_2 dy_2$ – средний безразмерный поток.

Прежде чем пользоваться той или иной зависимостью $b(z)$ при расчете безразмерного диффузионного потока, необходимо определить параметры $\epsilon = 2kq/Ru_2$ и $1/\epsilon\beta^2 = hD_2/kRD_1$. В зависимости от числовых значений этих параметров мы можем попасть в область, в которой сопротивление сосредоточено только в одной фазе, или в область диффузионного взаимодействия фаз.

Экспериментальные данные различных авторов представлены на рис. 10.3.1, где нанесены в основном только те точки, для которых $\mathrm{Re}_1 = h_0u_1/\nu_1 < 30$. Как видно из рисунка, наблюдается совпадение экспериментальных данных с расчетом по уравнению, описывающему массообмен при сопротивлении в жидкой фазе (уравнение типа Вязовова), – сплошная линия вполне удовлетворительная.

На рис. 10.3.2 представлена зависимость $(\bar{c}'_1 - \bar{c}_{1\,0})/kc'_{2\,0}$ ($\bar{c}'_1 = \bar{c}'_{\text{ж}}$, $c'_{1\,0} = c^0_{\text{ж}}$, $c'_{2\,0} = c^0_{\text{г}}$) от безразмерной длины массообменного аппарата при $\mathrm{Re}_1 = u_1h_0/\nu_1 > 30$. Все экспериментальные точки группируются около прямой, уравнение которой

$$\bar{c}_1(l) = 0{,}435\lg\frac{l}{h\mathrm{Pe}_1} + 1{,}12. \tag{10.3.5}$$

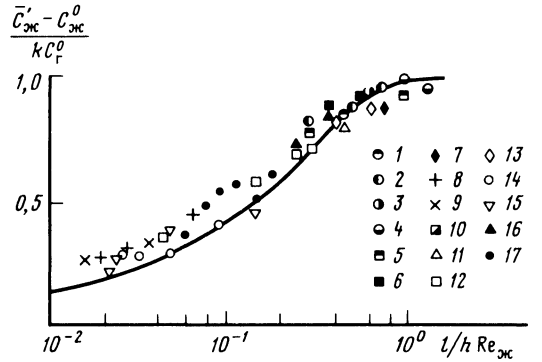


Рис. 10.3.1. Сравнение экспериментальных данных [77] (*1–10*), [234] (*11, 12*), [155] (*13*), [233] (*14*), [235] (*15, 16*) и [83] (*17*), полученных для случая диффузионного сопротивления в жидкой фазе при малых числах Рейнольдса, с предельной диффузионной зависимостью [68] (сплошная линия)

Данные работы [77]. Десорбция O_2 из воды в воздух: *1* – l = 50 см, R = 1,1 см, $Re_{ж}$ = 14; *2* – 89 см, 1,1 см, 17; 20 и 28; *3* – 89 см, 0,8 см, 20; *4* – 151,5 см; 1,1 см, 20; Десорбция CO_2 из воды в воздух: *5* – l = 50 см, R = 1,1 см, $Re_{ж}$ = 14; *6* – 89 см, 1,1 см, 14; 20; *7* – 151,5 см, 1,1 см, 20; Десорбция CO_2 из 50%-ного раствора глицерина: *8* – l = 50 см, R = 1,1 см, $Re_{ж}$ = 3,9 и 3; *9* – 89 см, 1,1 см, 3,8 и 7,4; Десорбция CO_2 из 83%-ного раствора гликоля: *10* – l = 151,5 см, R = 1,1 см, $Re_{ж}$ = 2; Абсорбция CO_2 водой: *11* – l = 110 см, R = 1,15 см, $Re_{ж}$ = 21; *12* – 122 см, 2,25 см, 16; 18; 20 и 33; *13* – 57 см, 1,3 см, 10, 15; Абсорбция чистого CO_2 водой: *14* – l = 16 см, R = 0,7 см, $Re_{ж}$ = 20; 28 и 47; Абсорбция CO_2 водой: *15* – l = 21 см, R = 1,26 см, $Re_{ж}$ = 36; 58 и 63; *16* – 101,5 см, 2,45 см, 24; 20; *17* – l = 40 см, R = 0,83 см, $Re_{ж}$ = 18; 23; 29, 35; 43

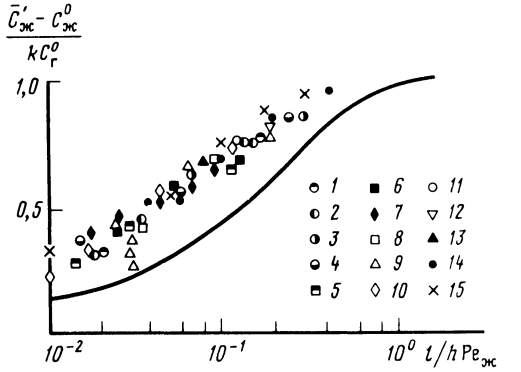


Рис. 10.3.2. Сравнение экспериментальных данных [77] (*1–7*), [234] (*8, 9*), [155] (*10*), [83] (*11*), [235] (*12, 13*) и [232] (*14, 15*) по массоотдаче, лимитируемой жидкой фазой при $Re_{ж} > 30$, с предельной диффузионной зависимостью [68] (сплошная линия)

Десорбция O_2 из воды в воздух: *1* – l = 50 см, R = 1,1 см; *2* – 89 см; 1,1 см; *3* – 89 см, 0,8 см; *4* – 151,5 см, 1,1 см; Десорбция CO_2 из воды в воздух: *5* – 50 см, 1,1 см; *6* – 89 см, 1,1 см; *7* – 151,5 см, 1,1 см; Абсорбция CO_2 водой: *8* – 122 см, 2,25 см; *9* – 110 см, 1,15 см ($Re_{ж}$ = 142; $1/\epsilon\beta^2$ = 286); ϵ = 0,4 (верхняя точка), ϵ = 0,8 и 1 (нижняя точка); *10* – 57 см, 1,3 см; Абсорбция CO_2 водой, прямоток: *11* – 40 см, 0,83 см; Абсорбция CO_2 водой: *12* – 21 см, 1,26 см; *13* – 101,5 см, 2,45 см; Десорбция He из воды в воздух: *14* – 96 см, 1 см; Десорбция CO_2 из воды в воздух: *15* – l – 96 см, R = 1 см

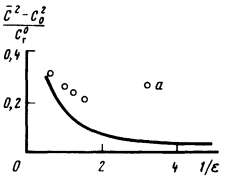


Рис. 10.3.3. Зависимость безразмерной концентрации в газовой фазе от фактора диффузионного потенциала $1/\epsilon$

Сплошная линия – расчет по формулам из работ [229–231], *а* – экспериментальные данные работы [235]; l = 110 см, R = = 1,15 см, $1/\epsilon$ = 286

Важно заметить, что экспериментальные данные различных исследователей располагаются выше теоретической зависимости типа Вязовова. Систематическое превышение потока вещества в области, где сопротивление массопередаче сосредоточено в жидкой фазе, объясняется дополнительным конвективным переносом за счет волнообразования.

В работе [234] при исследовании абсорбции CO_2 водой при фиксированной плотности орошения $q = h_0 u_1$ ($1/\epsilon\beta^2$ = 286, Pe_1 = 142) при очень малых скоростях газа ($u_2 < 10$ см/с) было обнаружено влияния газовой фазы на коэффициент массоотдачи в жидкости. В этом случае величина параметра ϵ достигала порядка единицы, поэтому, как видно из рис. 10.2.1, при расчете абсорбции необходимо учитывать диффузионное взаимодействие фаз, приводящее к занижению величины потока (см. рис. 10.3.2, точки *9*). Более наглядно влияние газовой фазы на массопередачу в жидкости показано на рис. 10.3.3, где безразмерный диффузионный поток $1 - \bar{c}_2(l)$ представлен как функция параметра $1/\epsilon \sim u_2$. Теоретическая кривая на этом рисунке построена по величине безразмерной концентрации $1 - \bar{c}_2(l)$ в точке при соответствующих значениях $1/\epsilon\beta^2$ и ϵ ($1/\epsilon\beta^2$ = = 286; ϵ = 0,2; 0,65; 1; 2). Таким образом, теоретическая кривая, по-видимому, правильно описывает тенденцию изменения безразмерного потока от скорости газа. Последнее обстоятельство указывает на то, что даже при расчете массообмена в плохо растворимых газах необходимо предварительно определить параметры ϵ и $1/\epsilon\beta^2$ и только после этого выбирать формулу расчета.

Таблица 10.3
Пояснения к рис. 10.3.4

Номер эксперимента	Длина трубки l, см	Радиус трубки R, см	$Re_ж$	Ламинарное
				$Re_Г$
1	100	1,0	483	570–2600
2	150	1,175	154	1500–1570
3	110	1,15	153	180–1640
4	50	0,75	148	300–1130
5	25	1,175	153	960–1970
6	35,5	1,3	63	220–1890
7	50	1,26	–	1600–1700
8	20	1,26	–	–
9	152	1,1	26	440–1800
10	89	0,8	28	320–1920
11	89	0,8	21	320–1920

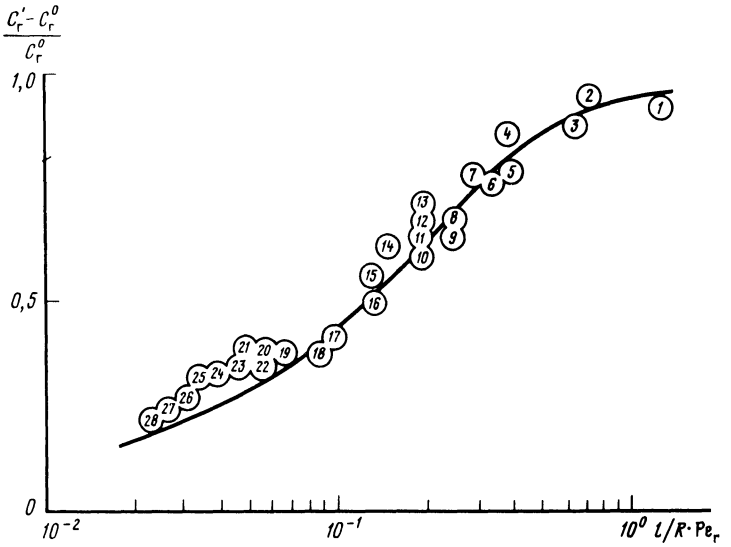


Рис. 10.3.4. Сравнение экспериментальных данных (см. табл. 10.3) по массоотдаче, лимитируемой газовой фазой при ламинарном движении газа с предельной диффузионной зависимостью (сплошная линия)

Эксперимент № 1, 2: *5* – $Re_г$ = 545;
Эксперимент № 3, 4: *1* – $Re_г$ = 180; *2* – 296; *3* – 338; *4* – 585; *6* – 570; *7* – 870; *12* – 900;
Эксперимент № 5: *13* – $Re_г$ = 1800; *20* – 960; *21* – 1080; *23* – 1280; *26* – 1970;
Эксперимент № 6: *17* – $Re_г$ = 770; *18* – 810; *19* – 955; *22* – 1250; *24* – 1600; *25* – 1880;
Эксперимент № 7: *15* – $Re_г$ = 1680; *16* – 1680; *8* – 1070; *9* – 1320;
Эксперимент № 8: *27* – $Re_г$ = 1600; *28* – 1700;
Эксперимент № 9: *11* – $Re_г$ = 1800;
Эксперимент № 10: *10* – $Re_г$ = 1500; *14* – 1920

течение газа		Турбулентное течение газа			Литература
$1/\epsilon\beta^2$	ϵ	$Re_г$	$1/\epsilon\beta^2$	ϵ	
0 33	380–80	2600–5750	3–8	80–40	[236]
0,3	35–30	2900–10700	4–9	20–5	
0,26	350–40	7800–10800	3–6	20–6	[237]
0,33	230–60	2210–5530	3–2	30–20	
0,2	80–40	2200–5400	1–2	30–15	
0,12	150–20	–	–	–	[77]
0,14	10–60	–	–	–	
0,2	–	–	–	–	[235]
0,1	25–7	2560–6050	1–3	5–2	[150]
0,13	50–10	2800– 10700	1–6	8–1,5	
0,25	360–60				

Абсорбция и десорбция NH_3 в лабораторных условиях в режиме противотока в трубках с орошаемыми стенками изучались в работах [77, 155, 234–236]. Размеры трубок и скорости потоков газа и жидкости в указанных выше работах суммированы в табл. 10.3, где также указаны интервалы изменения параметров ϵ и $1/\epsilon\beta^2$ для двух режимов течения газа: ламинарного ($Re_г \approx 2300$) и турбулентного ($Re_г > 2300$). Сравнение параметров ϵ и $1/\epsilon\beta^2$ в таблице и на рис. 10.2.4 показывает выполнение во всех опытах для ламинарного потока газа условия, что сопротивление массопередаче сосредоточено в газовой фазе, следовательно, расчет массопередачи следует проводить на основании уравнения типа Гретца–Пикфорда, которое позволяет проводить расчет массопередачи, если сопротивление последней сосредоточено только в газовой фазе.

На рис. 10.3.4 точками представлены результаты экспериментальных данных в виде зависимости $(c'_г - c^0_г)/c^0_г$ от $l/R\,Pe_г$, а сплошной линией – данные, рассчитанные по уравнению типа Гретца–Пикфорда. Как видно из рисунка, экспериментальные данные хорошо соответствуют теоретическому решению.

§ 10.4. СОПРЯЖЕННЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ПЛЕНКОЙ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОЙ СТЕНКОЙ

При рассмотрении теплообмена между пленкой жидкости и твердой стенкой обычно полагают, что температура на твердой поверхности задана и постоянна, т.е. независима от пространственных координат. Это позволяет существенно упростить решение задач. Однако следует заметить, что температура стенки может считаться постоянной только в весьма идеализированном случае (бесконечно большая теплопроводность твердого тела). На практике, как правило, температура на поверхности тела не является постоянной и зависит от пространственных координат. Это проявляется особенно при охлаждении изделий из полимерных материалов стекающей пленкой [238].

Если задача конвективного теплообмена между пленкой жидкости и твердой стенкой при постоянной температуре на поверхности тела достаточно хорошо изучена, то при переменной температуре эта задача не изучалась.

В силу этого теплообмен между пленкой жидкости и твердой поверхностью необходимо рассматривать с позиции сопряженного конвективного теплообмена [244]. В этом случае уравнения энергии в жидкости и твердом теле решаются совместно, причем на границе твердое тело–жидкость принимается равенство температур и тепловых потоков, т.е. используют граничные условия четвертого рода.

Обобщая результаты теоретических и экспериментальных исследований по теплообмену с переменной и постоянной температурами [238–243], можно сделать выводы [244]:

а) как теоретические, так и экспериментальные исследования показали, что коэффициент теплоотдачи зависит не только от гидродинамики потока, но и от свойств обтекаемого тела;

б) использование закона Ньютона при рассмотрении конвективного

теплообмена при переменной температуре является физически противоречивым фактом;

в) результаты, полученные для стационарного теплообмена, не могут быть распространены на нестационарный теплообмен.

В настоящем параграфе предлагается численный метод решения сопряженных задач конвективного теплообмена быстрой сходимости.

Пленка жидкости гравитационно стекает по поверхности вертикальной бесконечно широкой пластины толщиной b и длиной l. Обозначим толщину стекающей ламинарной жидкой пленки h_0. Прямоугольную систему координат выберем так, что ось x совпадает с поверхностью раздела фаз, причем $x = 0$ на верхнем, а $x = l$ на нижнем конце пластины. На внешней стороне пластины $(y = -b)$, а также на свободной поверхности пленки $(y = h_0)$ задаются известные профили температур ψ_2 и ψ_1. В общем случае уравнения энергии и граничные условия в выбранной системе координат имеют вид [244]:

$$c\gamma u_x \frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \right) + A\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 ; \tag{10.4.1}$$

$$u_x = 3u_0 \left[\frac{y}{h_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h_0} \right)^2 \right]; \quad 0 < y < h_0 ;$$

$$\frac{\partial^2 t_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 t_2}{\partial y^2} = 0 ; \tag{10.4.2}$$

$$t_1 = \psi_1(x) \text{ при } y = h_0 ; \; t_2 = \psi_2(x) \text{ при } y = -b ; \tag{10.4.3}$$

$$t_1 = \varphi_1(y), \; t_2 = \varphi_2(y) \text{ при } x = 0; \; t_2 = \theta_2 \text{ при } x = l ; \tag{10.4.4}$$

$$t_1(x) = t_2(x), \qquad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \text{ при } y = 0 . \tag{10.4.5}$$

Исследуем решение задачи при упрощенных граничных условиях

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \psi_1 = t_0, \quad \theta_2 = t_l , \tag{10.4.6}$$

$$\psi_2(x) = t_0 + (t_l - t_0)(x/l) .$$

Указанные упрощения, не меняя общности численной реализации решения задачи сопряженного теплообмена, могут соответствовать процессу нагрева (охлаждения) пленки жидкости или процессу конденсации пара на твердой вертикальной поверхности с последующим стеканием жидкости в виде тонкой пленки под действием силы тяжести. При этом было сделано некоторое упрощение этой задачи, так как толщина жидкого слоя в процессе конденсации изменяется вниз по потоку, а в рассматриваемой задаче она принимается постоянной.

Введем следующие безразмерные величины:

$t_1 = t_0 + (t_l - t_0) T_1$ — в жидкой фазе;

$t_2 = t_0 + (t_l - t_0) T_2$ — в твердой фазе;

$u_{ж}(y) = 3(\eta - \tfrac{1}{2}\eta^2)\bar{u}_{ж}$, $S = (l/b)^2$;

$\kappa = (\lambda_2/\lambda_1)(h_0/b)$, $P = l/(h_0 \mathrm{Pe}_{ж})$;

$z = x/l$, $\mathrm{Pe}_{ж} = \bar{u}_{ж} h_0 / a_1$;

$\eta_1 = 1 - y/h_0$ – в жидкой фазе; $\eta_2 = 1 + y/b$ – в твердой фазе, где $b = h_1 - h_0$, $a_1 = \lambda_1/c_p'\rho'$ – коэффициент температуропроводности жидкости; $\bar{u}_ж$ – средняя скорость движения жидкости.

С помощью указанных безразмерных величин уравнения (10.4.1), (10.4.2), а также граничные условия к ним примут вид:

$$3\left(\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_1^2\right)\frac{\partial T_1}{\partial z} = P\frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta_1^2}\ ; \qquad (10.4.7)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + S\frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta_2^2} = 0\ ; \qquad (10.4.8)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \eta_1} = -\kappa\frac{\partial T_2}{\partial \eta_2}\ ,\quad T_1 = T_2 \quad \text{при } \eta_1 = \eta_2 = 1\ ;$$

$$T_2 = z \quad \text{при } \eta_2 = 0\ ;\quad T_1 = 0 \quad \text{при } \eta_1 = 0\ ; \qquad (10.4.9)$$

$$T_2 = T_1 = 0 \quad \text{при } z = 0\ ;\quad T_2 = 1 \quad \text{при } z = 1.$$

Для численного решения уравнений методом сеток (10.4.7) и (10.4.8) с граничными условиями (10.4.9) выберем совокупность точек с координатами $\eta_1 = h/2 + mh$; $\eta_2 = h/2 + mh$; $m = -1, 0, 1, ..., M-1, M$, $z = (½ + n)h$, где $h = 1/M_0$.

Производные в уравнениях (10.4.7) и (10.4.8) заменялись центральными разностями, использовалась четырехточечная неявная схема. Полученный разностный аналог для уравнения параболического типа (10.4.7) решался методом прогонки, для элиптического типа (10.4.8) – методом векторной прогонки [244].

Порядок расчета температурного поля в пленке жидкости и в твердой пластине следующий. На границе раздела пленка жидкости–твердая стенка задается произвольная температура. Для меньшего числа итераций в качестве начального приближения следует принимать линейное распределение температуры так, чтобы это распределение удовлетворяло заданным значениям температуры на концах пластины. Пусть первоначальное распределение имеет вид $f^i(x_n)$, i – число итераций. По заданному распределению температуры $f^i(x_n)$ на каждом элементе длины, равном шагу интегрирования, определяется температура и соответственно с помощью обратной прогонки все температурное поле в пленке жидкости, а векторной прогонкой определяется температурное поле в твердой стенке. С помощью полученных температурных полей в жидкой и твердой стенках определяется новое температурное распределение на границе пленка жидкости–твердая стенка, т.е. $f^{i+1}(x_n)$. Счет закончен, если удовлетворяется неравенство $[f^{i+1}(x_n) - f^i(x_n)] < \epsilon$, где ϵ – заданная величина, принимаемая в расчетах равной $\epsilon = 0{,}05$. Алгоритм, подробно изложенный в работе [244], применен для решения задачи (10.4.7), (10.4.8) с граничными условиями (10.4.9).

Определим безразмерные числа Нуссельта для первой и второй фаз следующим образом:

$$I = (\lambda_1(t_l - t_0)l/h)\int_0^1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1}\,dz = (\lambda_2(t_l - t_0)l/b)\int_0^1 \frac{\partial T_2}{\partial \eta_2}\,dz\ . \qquad (10.4.10)$$

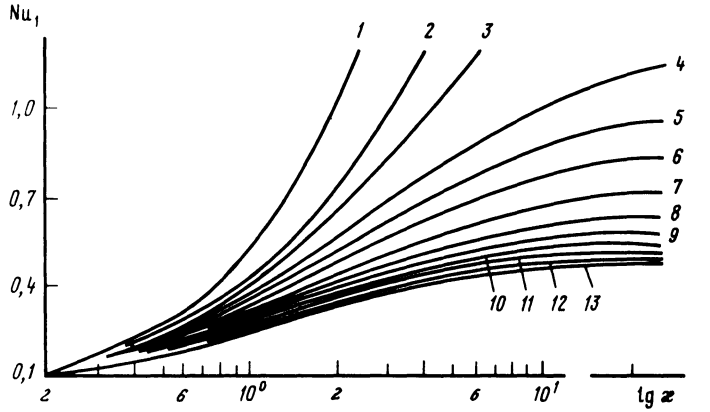


Рис. 10.4.1. Зависимость безразмерного числа Нуссельта Nu от κ при различных значениях параметра P

1 – $\lg P = -\infty$; *2* – -2; *3* – $-1{,}5$; *4* – -1; *5* – $-0{,}8$; *6* – $-0{,}6$; *7* – $-0{,}4$; *8* – $-0{,}2$; *9* – 0; *10* – 0,2; *11* – 0,4; *12* – 0,6; *13* – $\lg P = +\infty$

Между $\mathrm{Nu}_1 = \int_0^1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1}\, dz$ и $\mathrm{Nu}_2 = \int_0^1 \frac{\partial T_2}{\partial \eta_2}\, dz$ существует связь:

$$\mathrm{Nu}_1 = \kappa\, \mathrm{Nu}_2 . \qquad (10.4.11)$$

В общем случае решение задачи (10.4.7) – (10.4.9) зависит от трех независимых параметров: S, P и κ.

Для реальных труб $S \gg 1$, тогда задача практически зависит от двух параметров: P и κ. Результаты расчета зависимости числа Nu_1 от κ при различных κ представлены на рис. 10.4.1. При любых P существуют такие числа $\kappa_{\min}$ и $\kappa_{\max}$, что при $x \leqslant x_{\min}$ справедливо соотношение

$$\mathrm{Nu}_1(\kappa) = \kappa/2. \qquad (10.4.12)$$

Это означает, что при достаточно малых κ кривые $\mathrm{Nu}_1(\kappa)$ практически совпадают с предельной кривой *1* на рис. 10.4.1, для которой $\lg P = -\infty$. Тогда поверхностная температура $T_S(z) = 0$ в любой точке раздела фаз, причем

$$\mathrm{Nu}_2(\kappa) = 1/2. \qquad (10.4.13)$$

Равенство (10.4.13) означает, что сопротивление теплообмену полностью сосредоточено в твердой стенке.

При больших значениях κ функция $\mathrm{Nu}_1(\kappa)$ стремится к предельному значению (см. рис. 10.4.1) и при $\kappa \geqslant \kappa_{\max}$ отличается от него менее чем на 10%. При этом температура на границе раздела фаз совпадает с заданной температурой на внешней стороне стенки. Сопротивление теплообмену сосредоточено в жидкости, и задачу можно решить только в пленке с граничным условием $T_S(z) = \psi_2$. В настоящей работе рассмотрен случай $\psi_2(z) = z$. Очевидно, указанные выше закономерности будут справедливы и при произвольной функции $\psi_2(x)$.

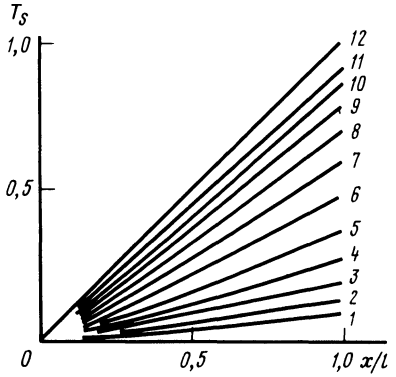


Рис. 10.4.2. Зависимость безразмерной температуры T_S на границе раздела фаз от безразмерной длины x/l для $\lg P = 0$ при различных значениях параметра κ

1 – $\kappa = 0{,}1$; *2* – 0,16; *3* – 0,25; *4* – 0,4; *5* – 0,63; *6* – 1,0; *7* – 1,6; *8* – 2,5; *9* – 4,0; *10* – 6,3; *11* – 10,0; *12* – $\kappa = \infty$

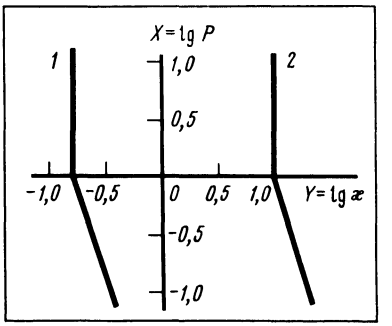


Рис. 10.4.3. Плоскость $X-Y$

$X = \lg P$, $V = \lg\kappa$.

В точках, расположенных левее кривой *1*, сопротивление тепломассообмену сосредоточено в твердой стенке; в точках, расположенных правее кривой *2* – в жидкой пленке

Расчет функции $T_S(x)$ при произвольном значении κ, но лежащем в интервале κ_{min} и κ_{max}, для $\lg P \to 0$ представлен на рис. 10.4.2. Как видно из рисунка, поверхностная температура линейно изменяется по длине.

В предельном случае при $\lg P \to \infty$ (см. рис. 10.4.1) число Нуссельта равно

$$\mathrm{Nu}_1(\kappa) = \frac{1}{2}\,\frac{\kappa}{1+\kappa}\,. \qquad (10.4.14)$$

Для определения числа Нуссельта при значениях P, лежащих в интервале от 0 до ∞, решения системы уравнений (10.4.7), (10.4.8) с граничными условиями (10.4.9) в двухфазной области представлены на рис. 10.4.3 в плоскости $X-Y$, где $X = \lg P$ и $Y = \lg\kappa$. Значения κ_{min} и κ_{max}, полученные с помощью рис. 10.4.3, аппроксимируются следующим образом:

$$Y_{min} = -0{,}8,\quad Y_{max} = 1 \quad \text{при } \lg P \geqslant 0;$$

$$Y_{min} = -8 - \frac{\lg P}{3},\quad Y_{max} = \frac{\lg P}{3} \quad \text{при } \lg P < 0. \qquad (10.4.15)$$

С помощью плоскости $X-Y$, изображающей решение двухфазной задачи, можно определить, в какой фазе сосредоточено сопротивление теплообмену. В частности, в точках, лежащих левее кривой *1*, сопротивление теплообмену сосредоточено в твердой стенке; в точках, расположенных правее кривой *2* – в жидкой пленке.

Содержание плоскости $X-Y$ (см. рис. 10.4.3) для двухфазного теплообмена в системе твердая стенка–пленка жидкости идентично содержанию

плоскости для двухфазного теплообмена в системе жидкость–газ (см. § 10.3).

Это позволяет сделать вывод: двухфазный теплообмен в любой системе можно изобразить в виде плоскости, в которой имеются области, где сопротивление теплообмену сосредоточено только в одной из двух фаз, а также существует значительная область, где сопротивление сосредоточено в обеих фазах. Таким образом, прежде чем проводить расчет двухфазного теплообмена, необходимо определить, в какой точке плоскости находится данная двухфазная система. И только после этого можно корректно пользоваться тем или иным уравнением.

На рис. 10.4.4 представлена зависимость $\sqrt[3]{P}\,\mathrm{Nu}_1$ от $\lg(\sqrt[3]{P}\kappa)$. Из рисунка следует: при $\lg(\kappa\sqrt[3]{P}) \geqslant 10$ функция $\sqrt[3]{P}\mathrm{Nu}_1 \to 0{,}6$, а при $\lg(\kappa\sqrt[3]{P}) \leqslant -0{,}8$ выполняется равенство $\sqrt[3]{P}\mathrm{Nu}_1 \simeq \kappa\sqrt[3]{P}/2$, что эквивалентно соотношению (10.4.12). Численные решения при различных значениях $\lg P$ можно аппроксимировать следующими выражениями:

$$\mathrm{Nu}_1 = \begin{cases} 0{,}55\dfrac{\kappa}{1+\kappa} & \text{при } \lg P > 0; \\ 0{,}55\dfrac{\kappa\sqrt[3]{P}}{1+\kappa\sqrt[3]{P}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{P}} & \text{при } \lg P \leqslant 0. \end{cases}$$

Применим предложенный метод к расчету матричных теплообменников [245]. Контактные матричные рекуператоры (КМР), или теплообменники, нашли широкое применение в различных отраслях науки и техники [246, 247]. Рассмотрим работу одного из типов таких теплообменников, собранных попеременно из перфорированных пластин, хорошо проводящих тепло, и прокладок из плохо проводящих тепло материалов. В прокладках предусмотрены "окна" прямоугольной формы, образующие в собранном пакете каналы для чередующихся встречных потоков "холодного" и "горячего" газов. Если ширина каждого из каналов намного больше его высоты, то рассматриваемый теплообменник схематически можно заменить рядом плоских параллельных щелей, разделенных металлическими перегородками шириной b. При достаточно большом числе перегородок, учитывая естественную симметрию системы, можно ограничиться рассмотрением теплообмена между любыми двумя соседними каналами, разделенными стенкой (рис. 10.4.5). Расчет процесса теплопередачи обычно сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка для среднемассовых температур обоих каналов и средней температуры стенки при условии, что коэффициенты теплоотдачи в обоих каналах и коэффициенты теплопроводности стенки известны [245]. Однако, не касаясь вопроса о дополнительных трудностях, возникающих при экспериментальном определении этих коэффициентов, появляются сомнения относительно применимости подобной методики в общем случае. Это связано с тем, что использование фазовых коэффициентов теплопередачи, полученных при стандартных гидродинамических условиях, даже при расчете двухфазного теплообмена без учета термического сопротивления стенки, который является частным случаем рассматриваемого процесса, приводит к существенным ошибкам [248].

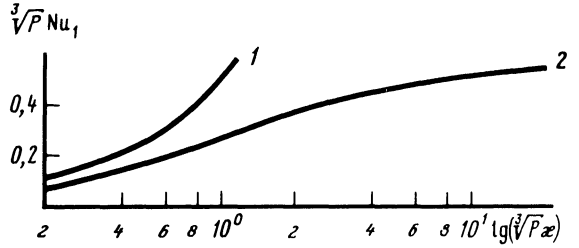


Рис. 10.4.4. Зависимость безразмерной функции $\sqrt[3]{P}\,Nu_1$ от переменной $\sqrt[3]{P}\,\kappa$ при $\lg P \leqslant 0$ (кривая *2*)
Кривая *1* – функция $\kappa\sqrt[3]{P}/2$

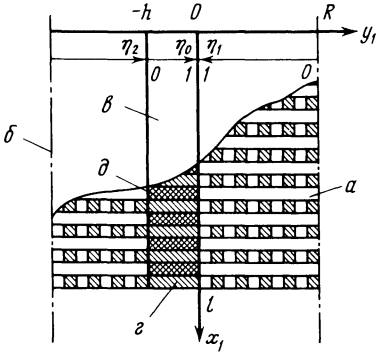


Рис. 10.4.5. Схема двух соседних каналов
а, б – оси 1-го и 2-го каналов; *в* – разделительная стенка; *г* – перфорированная пластина; *д* – прокладка

Между тем решение подобных вопросов можно получить из уравнений конвективной теплопроводности с эквивалентными коэффициентами переноса тепла и в сопряженной постановке.

Выберем прямоугольную систему координат (x_1, y_1) так, как показано на рис. 10.4.5. Ось x_1 направлена в сторону движения "горячего" газа ($x_1 = 0$ при входе его в аппарат; $y_1 = 0$ и $y_1 = R$ выполняется на одной из стенок и в центре канала, R – полуширина).

Предположим, что перенос тепла в продольном и поперечном направлениях внутри разделительной перегородки подчиняется закону Фурье с коэффициентами λ_{x0}, λ_{y0}:

$$\lambda_{y0}\frac{\partial^2 T_0'}{\partial y_1^2} + \lambda_{x0}\frac{\partial^2 T_0'}{\partial x_1^2} = 0. \qquad (10.4.16)$$

Полагаем, что расстояния, на которых тепловой поток испытывает заметные изменения, намного больше характерных размеров: δ – толщины перфорированной пластины; δ_0 – толщины прокладки. В этом случае эффективный коэффициент λ_{y0} можно определить из условия

$$\lambda_{y0}\frac{\partial T_0'}{\partial y_1}(\delta + \delta_0) = \lambda\delta\frac{\partial T_0'}{\partial y_1} + \lambda_0\delta_0\frac{\partial T_0'}{\partial y_1},$$

откуда

$$\lambda_{y0} = (\lambda\delta + \lambda_0\delta_0)/(\delta + \delta_0). \qquad (10.4.17)$$

Для эффективного коэффициента λ_{x0} справедливо известное правило аддитивности [7]

$$(\delta + \delta_0)/\lambda_{x0} = \delta/\lambda + \delta_0/\lambda_0 \ . \qquad (10.4.18)$$

Будем считать, что перенос тепла в каждом из каналов в продольном направлении осуществляется за счет вынужденной конвекции, а в поперечном – путем обычной теплопроводности по тонким перфорированным пластинам:

$$c_p \rho u \frac{\partial T'}{\partial x_1} = \lambda_э \frac{\partial^2 T'}{\partial y_1^2} \ ; \qquad (10.4.19)$$

$$\lambda_{x0} \frac{\partial^2 T'_0}{\partial x_1^2} + \lambda_{y0} \frac{\partial^2 T'_0}{\partial y_1^2} = 0, \qquad (10.4.20)$$

где c_p – теплоемкость газа, ρ – его плотность, u – средняя скорость газа в канале, λ_{y0}, λ_{x0} даны формулами соответственно (10.4.17) и (10.4.18); $\lambda_э$ – эффективная теплопроводность.

Начальными и граничными условиями для уравнений (10.4.19) и (10.4.20) выбираем следующие соотношения:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad T' = T'_н, \quad \frac{\partial T'_0}{\partial x_1} = 0; \qquad (10.4.21)$$

$$\text{при } x_1 = l \quad \frac{\partial T'_0}{\partial x_1} = 0; \qquad (10.4.22)$$

на внешней стороне пластины и в центре канала:

$$\text{при } y_1 = -h \quad \frac{\partial T'_0}{\partial y_1} = q_0 \ ; \quad \text{при } y_1 = R \quad \frac{\partial T'}{\partial y_1} = 0, \qquad (10.4.23)$$

где q_0 – тепловой поток на внешней стороне пластины, толщиной h; условия сопряжения потоков и температур на стенке канала имеют вид

$$\text{при } y_1 = 0 \quad \lambda_{y0} \frac{\partial T'_0}{\partial y_1} = \lambda_э \frac{\partial T'}{\partial y_1} \ , \quad T'_0 = T'. \qquad (10.4.24)$$

Система уравнений (10.4.19), (10.4.20) вместе с начальными и граничными условиями является замкнутой. Эффективная теплопроводность ($\lambda_э$) может быть определена обычным путем, а также оценена теоретически. Например, приведем расчет $\lambda_э$ для ребра (рис. 10.4.6), представляющего собой пластину толщиной δ с круглой перфорацией (радиус отверстия r, расстояние между центрами $2d$). Предполагая, что характерный размер заметного изменения теплового потока немного превышает d, можно записать следующие приближенные равенства (рис. 10.4.6):

$$j = \lambda d \frac{\Delta T'_{12}}{d - r} = \lambda (d - r\cos\varphi) \frac{\partial T'}{\partial y_1} = \lambda_п d \frac{\Delta T'_{02}}{d} \ , \qquad (10.4.25)$$

где j – тепловой поток вдоль пластины единичной толщины на рассматри-

ваемом участке (полоска толщиной d); $\Delta T'_{02}$ и $\Delta T'_{12}$ – разность температур в сечениях $00'$, $22'$ и $11'$, $22'$ соответственно.

Разность $\Delta T'_{02}$ можно представить в виде

$$\Delta T'_{02} = \Delta T'_{01} + \int_0^{\pi/2} \frac{\partial T'}{\partial y_1} dy_1 =$$

$$= (j/\lambda)[(d - r)/d + \int_0^{\pi/2} (r\cos\varphi/(d - r\cos\varphi))d\varphi . \qquad (10.4.26)$$

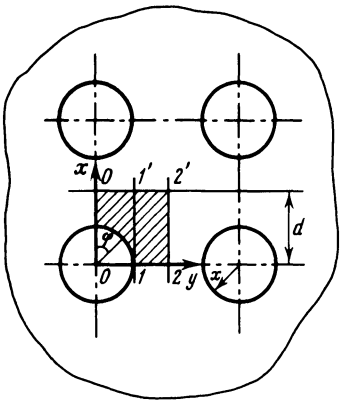


Рис. 10.4.6. К выводу выражения для $\lambda_э$

Сравнивая (10.4.26) с последним числом (10.4.25), определяющим коэффициент теплопроводности ребра $\lambda_п$, получим

$$\lambda_п = \lambda/[(d - r)/d + \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi/((d/r) - \cos\varphi))d\varphi . \qquad (10.4.27)$$

Если предположить, что поперечный перенос тепла в канале по перфорированному ребру намного превышает соответствующий перенос в газовой фазе, то, очевидно, эффективный коэффициент будет равен

$$\lambda_э = \delta\lambda_п/(\delta + \delta_0) . \qquad (10.4.28)$$

Введем безразмерные переменные (z, η, η_0) и функции (T, T^0) по формулам

$$z = x_1/l, \quad \eta = (R - y_1)/R, \quad \eta_0 = (h + y_1)/h,$$

$$T' = T'_н + (qh\kappa)T, \quad T'_0 = T'_н + (qh\kappa)T^0 . \qquad (10.4.29)$$

В безразмерном виде двухфазную задачу (10.4.19)–(10.4.24) приведем к следующему виду:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = P\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \quad S\frac{\partial^2 T^0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta_0^2} = 0, \qquad (10.4.30)$$

$$\text{при } z = 0 \quad T = \frac{\partial T^0}{\partial z} = 0; \quad \text{при } z = 1 \quad \frac{\partial T^0}{\partial z} = 0, \qquad (10.4.31)$$

при $\eta_0 = 0$ $\dfrac{\partial T}{\partial \eta_0} = \dfrac{1}{\kappa}$; при $\eta = 0$ $\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0$, (10.4.32)

при $\eta = \eta_0 = 1$ $T = T^0$; $\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -\kappa \dfrac{\partial T^0}{\partial \eta^0}$. (10.4.33)

Уравнения (10.4.30) решены численно с использованием равномерной сетки с шагом $h = 1/M$ по переменным z, η, η_0, где η, $\eta_0 = ih_1$; $z = jh_1$; $i = 0, 1, ..., M$; $j = 0, 1, ..., M^0$. (Безразмерная система координат показана на рис. 10.4.5.)

Разностные аналоги дифференциальных уравнений (10.4.30) записываются в следующем виде:

$$\frac{T_{ij} - T_{i,j-1}}{h_1} = P\left[\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h_1^2}\right]; \quad (10.4.34)$$

$$S\left[\frac{T^0_{i,j-1} - 2T^0_{i,j} + T^0_{i,j+1}}{h_1^2}\right] + \frac{T^0_{i-1,j} - 2T^0_{i,j} + T^0_{i+1,j}}{h_1^2} = 0; \quad (10.4.35)$$

Представим уравнение (10.4.34) в виде

$$A\,T_{i-1,j} + B\,T_{i,j} + C\,T_{i+1,j} = F_i, \quad (10.4.36)$$

где коэффициенты A, B, C, F_i равны

$$A = C = 1; \quad B = -h_1/P + 2; \quad F_i = (-h_1/P)T_{i,j-1}, \quad i, j = 1, 2, ..., M - 1.$$

Следуя методу прогонки, введем прогоночные коэффициенты V_{i+1}, W_{i+1},

$$T_{i,j} = V_{i+1}\,T_{i+1,j} + W_{i+1}, \quad (10.4.37)$$

определяемые из рекуррентных соотношений

$$V_{i+1} = -C/(B + A\,V_i), \quad W_{i+1} = (F_i - A\,W_i)/(B + A\,V_i). \quad (10.4.38)$$

Из граничного условия (10.4.32) находим $V_1 = 1$, $W_1 = 0$. Если температура на поверхности $T_{M,j}$ заранее известна, то с помощью (10.4.37) и (10.4.38) по стандартной методике можно определить температурное поле внутри первого канала.

Уравнения (10.4.35) и разностные аналоги граничных условий (10.4.31), (10.4.32) внутри стенки представим в виде

$$T^0_{(i+1),j} + [ST^0_{i(j+1)} - 2(1+S)T^2_{ij} + ST^0_{i(j-1)}] + T^0_{(i+1)j} = 0; \quad (10.4.39)$$

$$T^0_{i1} = T^0_{i0} = 0, \quad T_{iM} - T^0_{i(M-1)} = 0; \quad T_{0j}{}^0 = T_{1j}{}^0 - h_1/\kappa. \quad (10.4.40)$$

Равенства (10.4.39) можно представить в форме, подобной (10.4.36), для векторного столбца $\mathbf{T}^0$:

$$\hat{A}\mathbf{T}^0_{i-1} + \hat{B}\mathbf{T}_i + \hat{C}\mathbf{T}^0_{i+1} = 0, \; i = 1,2, ..., M - 1,$$

где матрицы операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и вектор-столбцы $\mathbf{T}_i^0$ равны:

$$A = C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & . & \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \\ . & . & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{vmatrix} -2-S & S & 0 & . & . & . & . \\ S & -2-S & S & 0 & . & . & . \\ 0 & S & -2-S & S & 0 & . & . \\ . & . & . & 0 & S & -2-S & S \\ . & . & . & . & . & S & -2-S \end{vmatrix}, \quad T_i^0 = \begin{vmatrix} T_{i1}^0 \\ T_{i2}^0 \\ . \\ . \\ . \\ T_{i(M-1)}^0 \end{vmatrix},$$

Решение уравнений получено методом матричной прогонки.

Предположим, что между любыми двумя соседними векторами $\mathbf{T}_i^0$ и $\mathbf{T}_{i+1}^0$ существует связь:

$$\mathbf{T}_i^0 = \hat{V}_{i+1}\,\mathbf{T}_{i+1}^0 + \mathbf{W}_{i+1}. \tag{10.4.41}$$

Тогда рекуррентные соотношения для определения операторов $\hat{V}_{i+1}$ и векторов $\mathbf{W}_{i+1}$ имеют вид

$$\hat{V}_{i+1} = -(\hat{A}\hat{V}_i + \hat{B})^{-1}\hat{C}, \quad \mathbf{W}_{i+1} = -(\hat{A}\hat{V} + \hat{B})^{-1}\hat{A}\mathbf{W}_i. \tag{10.4.42}$$

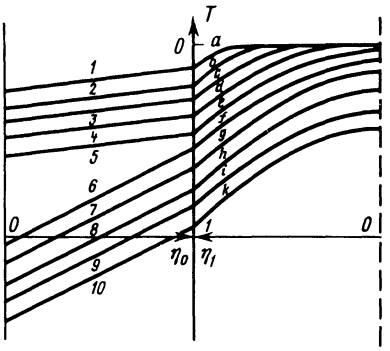
Из граничного условия (10.4.40) видно, что $\hat{V}_1$ – единичный оператор, а элементы вектор-столбца $\mathbf{W}_1$ равны $W_{1j} = -h_1/\kappa_0$, $j = 1, 2, \dots, M-1$. По известной температуре на границе раздела фаз T_{Mj} из формул (10.4.41), (10.4.42) определяется температурное поле во внутренних точках разделительной перегородки.

Решение двухфазной задачи получено методом последовательных приближений. На первом этапе неизвестная температура на границе раздела фаз принимается равной единице ($T_{Sj}^{(1)} = 1$). По описанной выше методике определяется поле температур внутри стенки и в канале в этом приближении. Поверхностная температура во втором приближении $T_{Sj}^{(2)}$ находится с помощью не использованного до сих пор условия сопряжения потоков (10.4.33), разностная аппроксимация которого записывается в виде

$$-\kappa\left(\frac{11T_{ij}^0 - 18T_{(M-1)}^0 + 9T_{(M-2)j}^0 - 2T_{(M-3)j}^0}{6h_1}\right) =$$

$$= \frac{11T_{Mj} - 18T_{(M-1)j} + 9T_{(M-2)j} - 2T_{(M-3)j}}{6h_1}, \tag{10.4.43}$$

причем производные на границе $\partial T/\partial\eta$, $\partial T^0/\partial\eta_0$ аппроксимированы с точностью до h_1^2 на четырехточечном шаблоне. Положив в (10.4.43) $T_{Mj}^0 = T_{Mj} = T_{Sj}^{(2)}$, можно определить следующее приближение для поверх-



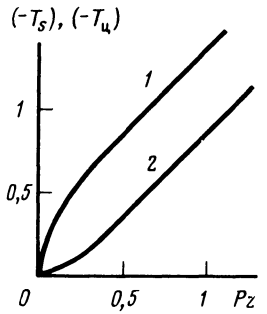


Рис. 10.4.7. Безразмерные температурные профили в канале (a–k) и внутри стенки (1–10)

a, *1* – $\lg Pz = -2$; *b*, *2* – $(-1{,}5)$; *c*, *3* – $(-1{,}2)$; *d*, *4* – (-1); *e*, *5* – $(-0{,}8)$; *f*, *6* – $(-0{,}7)$; *g*, *7* – $(-0{,}5)$; *h*, *8* – $(-0{,}4)$; *i*, *9* – $(-0{,}3)$; *k*, *10* – $(-0{,}2)$; *1*–*5* – $\kappa = 0{,}1$; *6*–*10* – $\kappa = 0{,}5$

Рис. 10.4.8. Безразмерные температуры как функции Pz

1 – T_s; *2* – $T_{\text{ц}}$

ностной температуры $T_{Sj}^{(2)}$ через значения сеточных функций T_{ij}, T_{ij}^{0} в первом приближении:

$$T_{Sj}^{(2)} = [18(\kappa T_{(M-1)j}^{0} + T_{(M-1)j}) - 9(\kappa T_{(M-2)j}^{0} -$$

$$- T_{(M-2)j}) + 2(\kappa T_{(M-3)j}^{0} - T_{(M-3)j})] / [11(1+\kappa)]$$

и т.д. Процесс вычисления заканчивается, как только разность $|T_{Sj}^{(n+1)} - T_{Sj}^{(n)}|$ для двух последовательных итераций не станет меньше заранее заданного малого числа.

В общем случае решение задачи (10.4.10)–(10.4.33) зависит от безразмерных параметров P, κ, S. Однако практический интерес представляет случай $S \ll 1$, так как для реальных КМР всегда выполняются неравенства $\lambda_{x0} \ll \lambda_{y0}$, $h \ll l$. На рис. 10.4.7 представлены результаты расчета профилей температур в КМР для ряда значений параметров κ и P при малых S. Изменение температуры T^0 в поперечном направлении практически линейно. Физически это понятно, так как при $S \to 0$ уравнение (10.4.30) упрощается и $\partial^2 T^0 / \partial \eta_0^2 = 0$. Кроме того, как видно из рис. 10.4.7, при малых S распределение температуры в канале не зависит от κ, а следовательно, единственным параметром, влияющим на температурный профиль, является P, а точнее, Pz. На расстояниях от входного сечения, на которых выполняется неравенство $Pz \geqslant 0{,}2$, в канале устанавливаются подобные температурные профили (см. рис. 10.4.7). Можно показать в этом случае, что имеет место следующая параболическая зависимость:

$$T = (\eta^2/2 - 1/6) + Pz. \qquad (10.4.37)$$

На рис. 10.4.8 приведены зависимость T_s, $T_{\text{ц}}$, т.е. температуры на стенке и в центре канала, как функции параметра Pz.

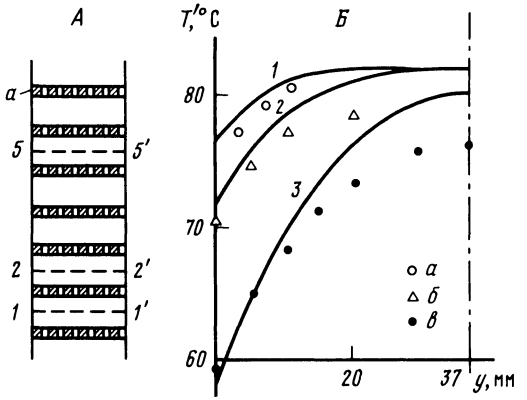


Рис. 10.4.9. Сравнение вычисленных и экспериментальных данных

А: схематическое изображение экспериментальной системы: *а* – перфорированная пластина: *11'*, *22'*, *55'* – сечения, в которых измерялась температура [245]; *Б*: *1* – расчет температуры по модели [245] для сечения *11'*; *2* – для сечения *22'*; *3* – для сечения *55'*; *а* – измерение значения температуры в сечении *11'*; *б* – в сечении *22'*; *в* – в сечении *55'*

Полученные выше результаты сравним с экспериментальными данными по измерению температурного профиля в газовой фазе поперек канала на модельной установке [249]. Горячий газ ($T'_н$ = 82° С, расход G = = 10 кг/ч) проходил через пакет из чередующихся медных перфорированных пластин (сечение 37×37 мм, r = 0,96 мм, λ = 380 ккал/(м · ч · °С) и фторпластовых прокладок (δ_0 = 2 мм) (рис. 10.4.9,*а*). Условия эксперимента были такими, что на одной из сторон канала тепловой поток отсутствовал, а на противоположной поддерживался практически постоянным (q = 1 ÷ 21,3 °С/мм). Температурные профили были измерены в сечениях *1, 2, 5* (см. рис. 10.4.9, *а*). Результаты сравнения данных теории и эксперимента приведены на рис. 10.4.9,*б*. Пересчет от безразмерных температур к размерным проводили по формулам (10.4.29) с использованием равенств

$$Pz = x_1\lambda_э/Gc_p,\ q_0h\kappa = qR,\ q = q_0(\lambda_{0y}/\lambda_э). \qquad (10.4.38)$$

Числовые значения входящих в (10.4.38) параметров λ_{0y} = 45,2, $\lambda_э$ = = 35,9 ккал/(м · ч · °С), R = 0,037 м. Соответствие теоретических и экспериментальных результатов вполне удовлетворительное.

В [249] отмечено, что начиная с шестого сечения температурные профили можно считать установившимися. Ниже приведены значения параметров Pz для сечений *1–6*:

Сечения	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$Pz \cdot 10^2$	2	6	9	13	16	20

Начиная с шестого сечения выполняется неравенство $Pz \geqslant 0{,}2$, что соответствует условию справедливости формулы (10.4.37).

Таким образом, используемая модель переноса тепла в ряде случаев может оказаться полезной для расчета КМР рассматриваемого типа.

§ 10.5. ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В РЕЖИМАХ ВОСХОДЯЩЕГО И НИСХОДЯЩЕГО ТЕЧЕНИЙ ФАЗ

В том случае, когда сопротивление массопередаче сравнимо в обеих фазах, необходимо исследовать массопередачу с позиции сопряженного массообмена. Для случая двухфазного турбулентного тепломассообмена следует записывать дифференциальные уравнения в виде, учитывающем турбулентное течение фаз и соответствующий ему турбулентный массоперенос в каждой фазе.

Турбулентный тепломассообмен как сопряженную задачу рассмотрим на примере процесса абсорбции в высокоскоростных массообменных пленочных аппаратах в режимах восходящего и нисходящего течений фаз.

Если влиянием входного участка на процессы тепломассопереноса пренебречь, то система уравнений двухфазного тепломассообмена при турбулентном движении фаз имеет вид [250]

$$u_1 \frac{\partial c_1'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} D_{эф1} \frac{\partial c_1'}{\partial y}; \qquad (10.5.1)$$

$$u_2 \frac{\partial c_2'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} D_{эф2} \frac{\partial c_2'}{\partial y}, \qquad (10.5.2)$$

где $c_1'(x, y)$ и $c_2'(x, y)$ – концентрации распределяемого вещества в жидкой и газовой фазах; u_1, u_2 – распределение скоростей соответственно в жидкой и газовой фазах; $D_{эф1} = D_1 + D_{т1}$; $D_{эф2} = D_2 + D_{т2}$ – эффективные коэффициенты, состоящие из молекулярных коэффициентов диффузии в фазах (D_1, D_2) и турбулентных коэффициентов переноса ($D_{т1}$, $D_{т2}$). Последние величины в общем случае могут зависеть от пространственных координат.

При решении задач турбулентного тепломассообмена закон изменения коэффициентов турбулентной диффузии считается заранее известным. При решении задач (10.5.1) и (10.5.2) предполагается параболический закон их изменения, т.е.

$$D_{т1} = A_{т1}(\eta_1 - \eta_2^2);$$

$$D_{т2} = A_{т2}(\eta_2 - \eta_2^2),$$

где $A_{т1} = 6\bar{D}_1$, $A_{т2} = 6\bar{D}_2$, $\bar{D}_i$ – средний коэффициент турбулентного переноса в фазе, $i = 1, 2$.

Учитывая приведенные выше соотношения, напишем окончательные выражения для коэффициентов эффективной диффузии в жидкой и газовой фазах:

$$D_{эф1} = D_1 + 6\bar{D}_1(\eta_1 - \eta_1^2); \qquad (10.5.3)$$

$$D_{эф2} = D_2 + 6\bar{D}_2(\eta_2 - \eta_2^2). \qquad (10.5.4)$$

Для системы дифференциальных уравнений (10.5.1) и (10.5.2) прини-

маем следующие граничные и начальные условия:

при $x = 0$ $\quad c_1' = c_{01}'$, $\quad c_2' = c_{02}'$; (10.5.5)

при $y = 0$ $\quad \partial c_1'/\partial y = 0$; (10.5.6)

при $y = R$ $\quad \partial c_2'/\partial y = 0$. (10.5.7)

Условие (10.5.5) означает, что на входе в массообменный аппарат в режиме восходящего или нисходящего прямотока концентрация распределяемого компонента имеет заданное значение. Условие (10.5.6) означает, что стенка массообменного аппарата является непроницаемой для распределяемого компонента, а условие (10.5.7) вытекает из условия симметричности рассматриваемой задачи.

На поверхности раздела пленка жидкости–газ (пар) выполняется условие сопряжения потоков и термодинамическое равновесие между фазами:

$$D_1 \frac{\partial c_1'}{\partial y} = D_2 \frac{\partial c_2'}{\partial y}; \qquad (10.5.8)$$

$$c_1' = k c_2'.$$

С помощью безразмерных переменных

$$u_1 = u_{01}\bar{u}_1 = u_{ж}\bar{u}_1,\ u_2 = u_{02}\bar{u}_2 = u_{г}\bar{u}_2;$$

$$y = h_0\eta_1,\ y = R - (R - h_0)\eta_2, \qquad (10.5.9)$$

$$c_2' = c_{01}'/k + (c_{02}' - c_{01}'/k)c_2,$$

$$c_1' = c_{01}' + k(c_{02}' - c_{01}'/k)c_1 \quad z = l\bar{D}_1 / u_{ж}h_0^2$$

уравнения (10.5.1) и (10.5.2), граничные и начальные условия (10.5.5)–(10.5.9) примут вид:

$$\bar{u}_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left[E_1 + 6(\eta_1 - \eta_1^2)\right] \frac{\partial c_1}{\partial \eta_1}; \qquad (10.5.10)$$

$$\beta^2 u_2 \frac{\partial c_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta_2}\left[E_2 + 6(\eta_2 - \eta_2^2)\right] \frac{\partial c_2}{\partial \eta_2}; \qquad (10.5.11)$$

$$\eta_2 = 0 \quad \frac{\partial c_1}{\partial \eta_1} = 0; \qquad (10.5.12)$$

$$\eta_z = 0 \quad \frac{\partial c_2}{\partial \eta_2} = 0; \qquad (10.5.13)$$

$$\eta_2 = \eta_1 = 1 \quad c_2 = c_1; \qquad (10.5.14)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \eta_2} = -\epsilon\beta^2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta_1}; \qquad (10.5.15)$$

$$z = 0 \quad c_2 = 1,\ c_1 = 0, \qquad (10.5.16)$$

где h_0, R – средняя толщина пленки и полуширина канала; $E_1 = D_1/\bar{D}_1$, $E_2 = D_2/\bar{D}_2$; $\epsilon = qk/(R - h_0)u_г$; $\beta = \sqrt{R\mathrm{Pe}_2/h_0\mathrm{Pe}_1}$; $q = u_ж h_0$ – плотность орошения; u_{01}, u_{02} или $u_ж$, $u_г$ – среднерасходовые скорости в жидкой и газовой фазах; $\epsilon\beta^2 = k\bar{D}_1(R - h_0)/\bar{D}_2 h_0$; $\mathrm{Pe}_1 = q/\bar{D}_1$; $\mathrm{Pe}_2 = u_г(R - h_0)/\bar{D}_2$.

Умножив уравнение для безразмерной концентрации в жидкой фазе (10.5.9) на u_1 и проинтегрировав по y от 0 до h_0, получим:

$$\int_0^{h_0} u_1 c_1' dy = \int_0^{h_0} u_1 c_{01}' dy + \int_0^{h_0} (kc_{02}' - c_{01}) u_1 c_1 dy. \qquad (10.5.17)$$

Если обозначить $\int_0^{h_0} u_1 c_1 dy = c_1 q$; $\int_0^{h_0} u_1 c_1' dy = \bar{c}_1' q$, то выражение (10.5.17) примет вид

$$\bar{c}_1(z) = \frac{\bar{c}_1'(z) - c_{01}'}{kc_{02} - c_{01}}. \qquad (10.5.18)$$

Формула (10.5.18) представляет собой отношение действительного количества поглощенного компонента к тому количеству, которое было бы поглощено при максимально возможном насыщении жидкости на участке длиной l. Для абсорбера длиной l это есть коэффициент насыщения, характеризующий его эффективность, т.е.

$$\psi = \bar{c}_1 = \bar{c}. \qquad (10.5.19)$$

Система уравнений и граничных условий (10.5.10)–(10.5.16) выписана для массообмена. Для теплообмена, если пренебречь энергией диссипации потока, вид этих уравнений и граничных условий сохранится, только вместо концентрации следует учитывать температуру, вместо эффективных коэффициентов диффузии – коэффициенты теплопроводности, а параметр $k = 1$. Ниже рассмотрено решение диффузионной задачи, хотя путем упомянутой выше замены решение остается справедливым и для теплообмена.

Поток вещества через поверхность раздела в единицу времени на единицу периметра равен

$$Q = \int_0^{h_0} (c_{01}' - c_1') u_1 dy = \int_{h_0}^{R - h_0} (c_{02}' - c_2') u_2 dy. \qquad (10.5.20)$$

Учитывая, что

$$\int_0^{h} (c_{01}' - c_1') u_1 dy = qk(c_{02}' - c_{01}'/k)\bar{c}_1;$$
$$\int_{h_0}^{R - h_0} (c_{02}' - c_2') u_2 dy = (R - h_0)u_г(c_{02}' - c_{01}'/k)(1 - \bar{c}_2), \qquad (10.5.21)$$

из (10.5.20) и (10.5.21) найдем

$$qk(c_{02}' - c_{01}'/k)\bar{c}_1 = (R - h_0)u_г(c_{02}' - c_{01}'/k)(1 - \bar{c}_2)$$

или

$$\epsilon\bar{c}_1 = 1 - \bar{c}_2. \qquad (10.5.22)$$

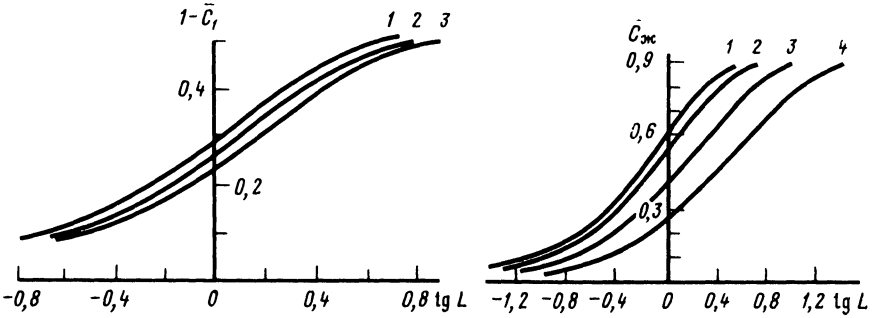


Рис. 10.5.1. Решение двухфазной задачи при $\epsilon = 1$ и различных β
1 – $\beta = 1$; *2* – 0,32; *3* – $\beta = 0{,}1$

Рис. 10.5.2. Решение двухфазной задачи при $\epsilon = 0{,}1$ и различных β
1 – $\beta = 1$; *2* – 3,2; *3* – 10; *4* – $\beta = 100$

Система дифференциальных уравнений (10.5.10) и (10.5.11) с граничными условиями (10.5.12)–(10.5.16) решена численно на ЭВМ [251]. При решении этой системы дифференциальные операторы с переменными коэффициентами $D_{эф}(y)$ заменялись разностными операторами по неявной схеме, например, для точек m, n:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_n^m = \frac{1}{\Delta x}\left(c_n^m - c_{n-1}^m\right); \qquad (10.5.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{эф}\frac{\partial c}{\partial y}\right)_n^m = \frac{1}{\Delta y^2}\left[\left(\frac{D_{эф.n}^{m+1} + D_{эф.n}^m}{2}\right)\left(c_n^{m+1} - c_n^m\right) - \left(\frac{D_{эф.n}^m + D_{эф.n}^{m-1}}{2}\right)\left(c_n^m - c_n^{m-1}\right)\right].$$

Система алгебраических уравнений, полученная после замены дифференциальных операторов разностными и аппроксимирующая двухфазную задачу (10.5.10) и (10.5.11), решалась методом прогонки отдельно в газовой и жидкой фазах с использованием граничных и начальных условий (10.5.12)–(10.5.16).

Результаты численных решений представлены на рис. 10.5.1 и 10.5.2 в виде зависимости безразмерных потоков в жидкой ($\bar{c}_1 = \bar{c}_{ж}$) и газовой ($1 - \bar{c}_2$) фазах при различных значениях параметров задачи ϵ и β от безразмерной длины аппарата $L = u_{01} h_0^2 z / \bar{D}'_1$.

Анализ результатов решения двухфазной задачи при турбулентном течении фаз показал, что решение задачи в координатах $Y = \lg(1/\epsilon\beta^2)$ и $X = \lg\epsilon$ можно представить в виде плоскости (рис. 10.5.3), по виду совпадающей для задачи двухфазного тепломассообмена при ламинарном течении фаз (см. рис. 10.5.1, рис. 10.5.3). Такой результат является в некоторой степени обобщением исследований по двухфазному тепломассообмену при ламинарном и турбулентном течениях фаз и одновременно указывает на осто-

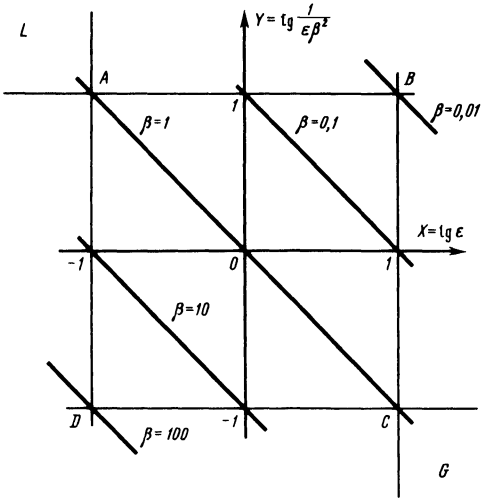


Рис. 10.5.3. Плоскость решения двухфазной задачи

рожность использования известных решений в широком пределе изменений параметров ϵ и β. Действительно, для точек плоскости (см. рис. 10.5.3), расположенных выше прямой AB, при $\epsilon\beta \leqslant 10^{-1}$ решение задачи двухфазного массообмена зависит от параметра ϵ. Только при одновременном выполнении условий $\epsilon\beta \leqslant 10^{-1}$ и $\epsilon \leqslant 10^{-1}$, т.е. в области выше прямой AB и левее AD, двухфазная задача вырождается в однофазную. В этом случае сопротивление массопередачи сосредоточено только в жидкой фазе (подобласть L). В области плоскости, расположенной правее прямой BC ($\epsilon > 10$), безразмерный поток вещества $I = 1 - \bar{c}_2$ зависит только от одного параметра $\epsilon\beta$.

При одновременном соблюдении неравенства $\epsilon \geqslant 10$, $1/\epsilon\beta \leqslant 0{,}1$, т.е. в области плоскости, расположенной ниже прямой DC и правее прямой BC (подобласть G), сопротивление массопередачи сосредоточено в газовой фазе и решение задачи можно получить из уравнения конвективной диффузии только для газовой фазы.

В области плоскости, расположенной ниже прямой DC, решение задачи зависит только от одного параметра ϵ. При $\epsilon \leqslant 10^{-1}$, т.е. для подобласти, расположенной левее прямой AD, решение задачи зависит от одного параметра $\epsilon\beta$.

Рассмотрим конкретные примеры расчета эффективной высокоскоростной пленочной абсорбции для области $\epsilon \leqslant 10^{-1}, \epsilon\beta \leqslant 10^{-1}$ (подобласть L).

Как показано выше, в этом случае сопротивление массопередачи сосредоточено в жидкой фазе и задача двухфазного массообмена вырождается в однофазную, т.е. достаточно решить только уравнение (10.5.10) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} z &= 0 \qquad c_1 = 0; \\ \eta_1 &= 1 \qquad c_1 = 1; \\ \eta_1 &= 0 \qquad \partial c_1/\partial\eta_1 = 0. \end{aligned} \tag{10.5.24}$$

Данная задача для каждого из режимов течения фаз (восходящего и нисходящего пленочного течений) рассмотрена для двух профилей скорости в пленке жидкости: однородного (вариант А) и линейного (вариант Б). Вариант А соответствует массопередаче в режимах восходящего и нисходящего прямотоков с постоянной усредненной скоростью по сечению пленки жидкости. Вариант Б соответствует аналогичному процессу переноса массы с линейным профилем скорости по сечению пленки. Большинство исследователей склонны считать, что распределение скорости в пленке жидкости в режимах восходящего и нисходящего прямотоков близко при больших скоростях газа к линейному профилю. Этим и обусловлен выбор варианта Б. Однако отметим, что разработанная методика расчета процесса абсорбции при турбулентном режиме не ограничивается только этими двумя профилями. Она может быть применена к расчету абсорбции также с любым профилем скорости в пленке жидкости.

Для того чтобы исследовать ту или иную математическую модель переноса вещества или тепла, необходимо выяснить, какие величины и зависимости, входящие в данную математическую модель, известны, а какие необходимо определить. В зависимости от того, что является искомой величиной, задачи разделяются на два виде: прямая задача и обратная.

В прямой задаче обычно требуется определить концентрационное поле, если известно дифференциальное уравнение переноса и заданы условия, полностью определяющие краевую задачу.

В обратной задаче обычно требуется определить граничные условия или коэффициенты, входящие в дифференциальное уравнение переноса, если известно математическое описание процесса и концентрационное поле.

Как уже отмечалось выше, в дифференциальные уравнения (10.5.10) и (10.5.11) входят неизвестные коэффициенты турбулентного переноса вещества. С этой позиции указанная задача будет относиться ко второму типу, т.е. к обратным задачам, согласно которым для уравнений (10.5.10) и (10.5.11) переносные коэффициенты следует определять из решения самой задачи.

На рис. 10.5.4 представлены результаты численного решения уравнения (10.5.10) с начальными и граничными условиями (10.5.24) в виде зависимости коэффициента насыщения абсорбции ($\psi = \bar{c}$) от безразмерной длины массообменного участка $z = l\bar{D}_1/u_{01}h_0^2$ (l – длина массообменного аппарата) для двух типов профилей: постоянного (*а*) и линейного (*б*). Решения представлены для различных соотношений молекулярного и турбулентного коэффициентов переноса $E_1 = E = D_1/\bar{D}_1$. Так как турбулентный коэффициент переноса, как правило, больше молекулярного, то параметр E выбран в интервале изменения его от 0 до 1. Кривые зависимости $\bar{c}$ от z для параметра $E = 1{,}25$ приведены с той только целью, чтобы показать, что и при $E > 1$ решение задачи является также гладким и без особенностей.

Отметим, что при увеличении длины массообменного участка, коэффициент насыщения, как и следовало ожидать из рассматриваемого физического явления, стремится к единице.

Результаты численного решения аппроксимированы соотношением [251, 252]

$$\bar{c}_1 = \psi = 0{,}72 + 0{,}623\sqrt{E} + 0{,}721\lg z. \qquad (10.5.25)$$

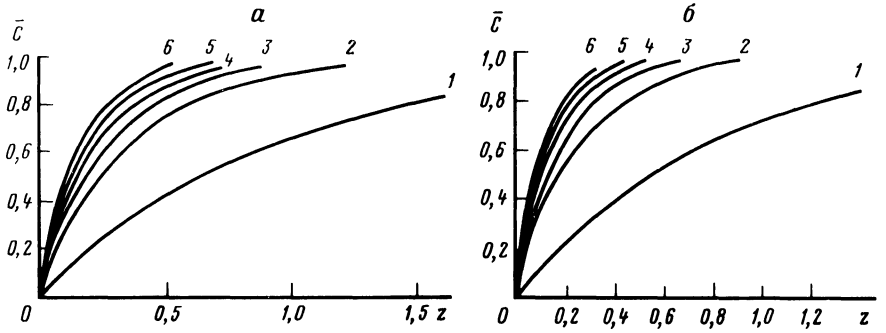


Рис. 10.5.4. Зависимость коэффициента насыщения от безразмерной длины массообменного участка при различных значениях E для случаев постоянного (*а*) и линейного (*б*) профилей скорости пленки жидкости

1 – E = 0; *2* – 0,25; *3* – 0,5; *4* – 0,75; *5* – 1; *6* – E = 1,25

Эта формула дает для вариантов А и Б погрешность меньше 10% при $z \geqslant 0{,}18$.

Пример расчета турбулентного массообмена при пленочном течении в режиме нисходящего прямоточного течения фаз. Течение пленки жидкости сверху вниз под действием значительных касательных напряжений газа, совпадающего по направлению с течением пленки жидкости, известно в литературе как нисходящее пленочное течение или нисходящий прямоток. Тепломассообменные аппараты, в которых контактирование между фазами происходит в режиме нисходящего прямотока, в настоящее время находят применение в химической промышленности, а также в смежных областях. Причем исследование этого вопроса стоит в центре внимания ученых при проектировании современных тепломассообменных аппаратов.

Ниже будет приведен метод расчета массообменного аппарата в режиме нисходящего прямотока [251, 252]. Для определения турбулентного коэффициента переноса использованы экспериментальные данные работ [81–83]. Для этого случая по известной величине из этих работ с помощью рис. 10.5.4 определялась величина z, а следовательно, $\bar{D}$ для различных значений $u_г$, q, h_0, l и параметров E. Определенный таким образом $\bar{D}$ или же его безразмерная величина E представлена на рис. 10.5.5 для постоянного (*а*) и линейного (*б*) профилей скорости пленки жидкости. В координатах $1/Eq^{0,5} - u_г$ для обоих профилей скорости наблюдается прямолинейная зависимость. Данная зависимость может быть аппроксимирована соотношением вида

$$1/Eq^{0,5} = Au_г \,. \qquad (10.5.26)$$

Как следует из рис. 10.5.5, тангенс угла наклона в зависимости (10.5.26) существенно зависит от параметра E. Эта зависимость представлена на рис. 10.5.6 для двух профилей скорости пленки жидкости. Любопытно отметить, что профиль скорости в пленке жидкости не влияет на зависимость A от E. Зависимость A от E может быть аппроксимирована следующим соотношением:

$$A = 10^{-2}(0{,}201 + 0{,}25E)/(0{,}1 + E)\,. \qquad (10.5.27)$$

Для развитого турбулентного потока турбулентный коэффициент диффузии $\bar{D}_1$ обычно превосходит молекулярный коэффициент D_1, а поэтому параметр E приобретает значения меньше единицы, т.е. $E \ll 1$. Для этого случая формула (10.5.27) принимает вид

$$A = 2{,}01 \cdot 10^{-2}, \qquad (10.5.28)$$

т.е. коэффициент A в соотношении (10.5.26) перестает зависеть от параметра E.

С учетом (10.5.27) и (10.5.28) формула для определения безразмерного коэффициента турбулентной диффузии приобретает следующие виды:

для E, существенно отличных от нуля,

$$E = 1/[\sqrt{k_1^2 - 7{,}5k_1 + 25} + (k_1 - 5)], \qquad (10.5.29)$$

для E, существенно меньше единицы ($E \ll 1$),

$$E = 1/2{,}01k_1. \qquad (10.5.30)$$

В формулах (10.5.29) и (10.5.30) $k_1 = 10^{-2}q^{0,5}u_г$, причем q выражено в $см^2/с$, $u_г$ – в см/с.

После того как величина среднего коэффициента турбулентного переноса определена, методика расчета процесса абсорбции для нисходящего прямотока состоит в следующем:

1) с помощью формулы (10.5.29) при заданных h_0, q, $u_г$ и D_1 определяется безразмерный коэффициент турбулентного переноса E, а по нему и средний коэффициент турбулентной диффузии $\bar{D}_1 = D$. Причем h_0 следует выражать в см, D_1 – в $см^2/с$, q – в $см^2/с$, $u_г$ – в см/с, l – в см;

2) по соотношению $lD_1/qh_0 = z$ определяется безразмерная длина массообменного аппарата;

3) по формуле (10.5.25) определяется коэффициент насыщения абсорбера.

В том случае, когда по заданному коэффициенту насыщения абсорбера необходимо определять длину массообменного аппарата, последовательность пунктов 2) и 3) следует поменять местами.

Такие расчеты, проведенные для режима нисходящего прямотока, в широком интервале изменения нагрузок по фазам удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [81–83].

Пример расчета турбулентного массообмена при пленочном течении в режиме восходящего прямоточного течения фаз. Поток газа, текущий против силы тяжести, при больших касательных взаимодействиях на границе пленки жидкости–газ, увлекает за собой пленку жидкости. Течение пленки жидкости против силы тяжести и спутного потока газа в литературе известно как восходящий прямоток.

Тепломассообменные аппараты, в которых организуется взаимодействие между фазами в режиме восходящего прямотока, известны в литературе как высокоскоростные тепломассообменные аппараты.

Разработанная методика расчета двухфазного массообмена для высокоинтенсивных режимов применена к расчету высокоскоростного пленочного массообмена в режиме восходящего прямотока [251, 252].

Как и для нисходящего прямотока, расчет безразмерного коэффициента турбулентной диффузии в жидкой фазе E проводился для плоского про-

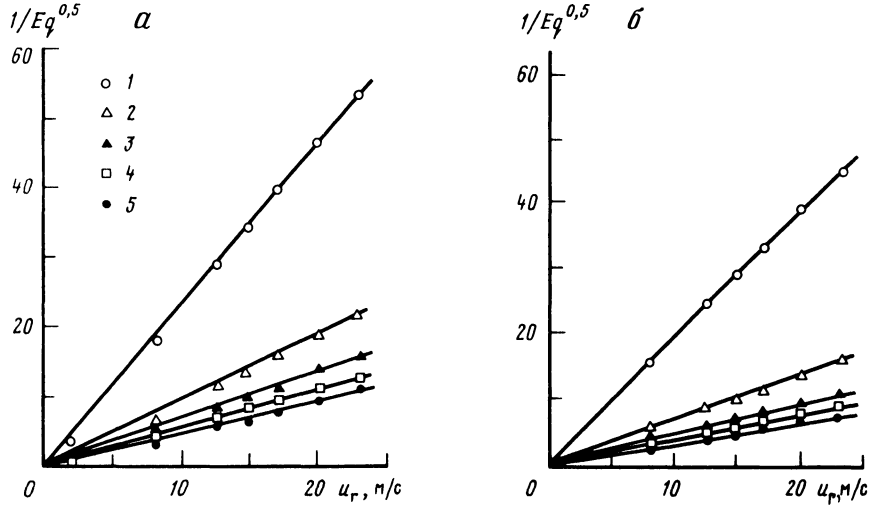


Рис. 10.5.5. Зависимость $1/Eq^{0,5}$ от скорости газа при абсорбции CO_2 $u_г$ для постоянного (*а*) и линейного (*б*) профилей скорости пленки жидкости в режиме нисходящего прямотока при различных значениях E

1 – $E = 0$; *2* – $E = 0{,}25$; *3* – $E = 0{,}5$; *4* – $E = 0{,}75$; *5* – $E = 1$

филя (вариант А) и линейного (вариант Б). С целью определения переносного коэффициента $E_1 = E$ при решении обратной задачи (уравнение (10.5.10) с граничными условиями (10.5.24)) были использованы экспериментальные данные по абсорбции водой углекислого газа и десорбции кислорода из воды [81–83].

На рис. 10.5.7 и 10.5.8 представлена обратная зависимость безразмерного коэффициента диффузии, отнесенного к скорости газа в степени 0,06 ($u_г$ выражалась в см/с), от плотности орошения пленки жидкости для различных значений величины E соответственно при абсорбции водой углекислого газа и десорбции кислорода из воды. Как следует из рис. 10.5.8, *а, б,* во всем изученном интервале плотностей орошения ($q = 0{,}13 \div 8$ см^2/с) и скорости газа ($u_г = 11 \div 45$ м/с) наблюдается прямолинейная зависимость $1/Eu_г^{0,06}$ от плотности орошения.

Тангенс угла наклона A_1 в прямолинейной зависимости от плотности орошения, как следует из рис. 10.5.9, существенно зависит от безразмерного коэффициента турбулентного переноса E, а также от природы абсорбируемого газа. Так же как и для нисходящего прямотока (см. рис. 10.5.6), величина A практически не зависит от профиля распределения скоростей в пленке жидкости. Это обстоятельство облегчает проводить обобщение результатов численного решения рассматриваемой задачи.

Формула, аппроксимирующая результаты численного расчета, представленного на рис. 10.5.7–10.5.9, имеет вид

$$E = (\sqrt{9{,}61\,k_2^2 - 4{,}6k_2 + 1} + (1 - 3{,}1k_2))/10k_2, \qquad (10.5.31)$$

где $k_2 = qu_г^{0,06}(D_{CO_2}/D_{O_2})^2$, q выражено в см^2/с, $u_г$ – в см/с.

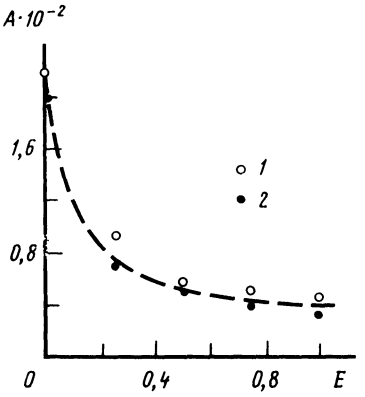
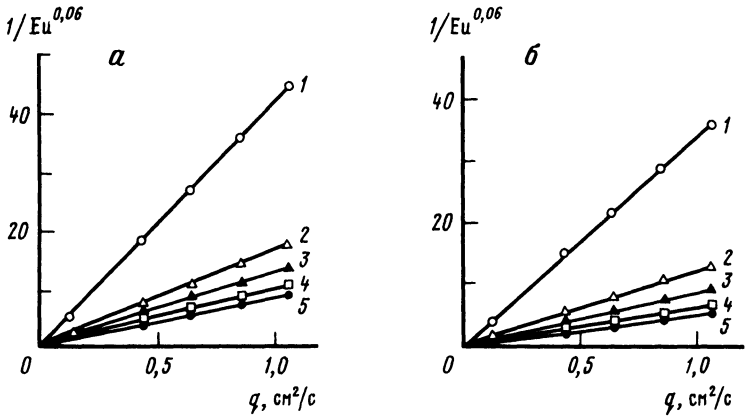


Рис. 10.5.6. Зависимость тангенса угла наклона в уравнении $1/Eq^{0,5} = Au_{\Gamma}$ для нисходящего прямотока при абсорбции CO_2 от параметра E для постоянного (*1*) и линейного (*2*) профилей скорости пленки жидкости

Рис. 10.5.7. Зависимость $1/Eu_{\Gamma}^{0,06}$ от плотности орошения жидкости q для постоянного (*а*) и линейного (*б*) профилей скорости пленки жидкости в режиме восходящего прямотока при абсорбции CO_2 и различных значениях E

1 – E = 0; *2* – 0,25; *3* – 0,5; *4* – 0,75; *5* – E = 1



Порядок расчета эффективности пленочного абсорбера в режиме восходящего прямотока такой же, как и для нисходящего:

1) по формуле (10.5.31) по заданной скорости газа, плотности орошения и природе абсорбируемого газа определяется безразмерный коэффициент турбулентного переноса, а следовательно, и $\bar{D}_1$;

2) по соотношению $l\bar{D}/qh_0 = z$ определяется z;

3) по формуле (10.5.25) определяется коэффициент насыщения абсорбера.

В том случае, когда по заданному коэффициенту насыщения абсорбера необходимо определить длину массообменного аппарата, последовательность пунктов 2) и 3) следует поменять местами.

Результаты расчета коэффициента насыщения по этой методике в режиме восходящего прямоточного течения фаз для различных расходовых и геометрических характеристик, контактирующих устройств и природы абсорбируемого компонента удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [81–83]. Наибольшее расхождение результатов расчета коэффициента насыщения абсорбера с опытными данными составляет не больше 18%. Если учесть, что интервал изменения нагрузок по фазам

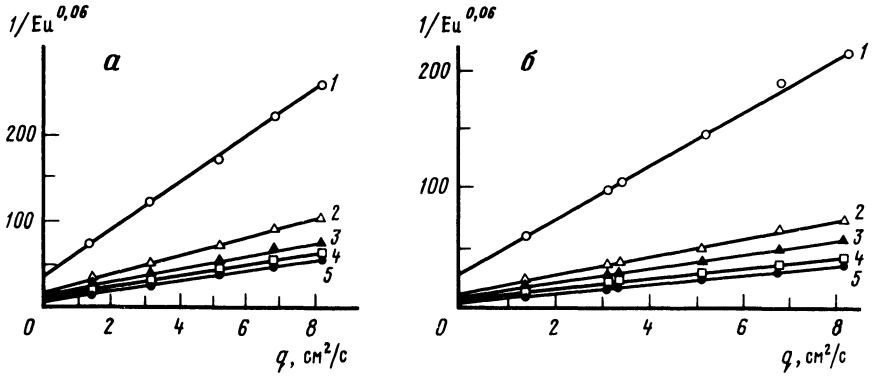


Рис. 10.5.8. Зависимость $1/Eu_г^{0,06}$ от плотности орошения жидкости q для постоянного (*а*) и линейного (*б*) профилей скорости пленки жидкости в режиме восходящего прямотока при десорбции O_2 и различных значениях E

1 – $E = 0$; *2* – 0,25; *3* – 0,5; *4* – 0,75; *5* – $E = 1$

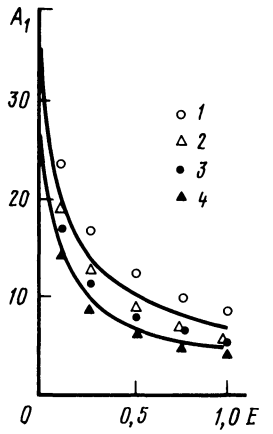


Рис. 10.5.9. Зависимость тангенса угла наклона A_1 в уравнении $1/Eu_г^{0,06} = A_1 q$ от параметра E для восходящего прямотока при абсорбции углекислого газа CO_2 (*1, 2*) и кислорода O_2 (*3, 4*) для постоянного (*1, 3*) и линейного (*2, 4*) профилей скорости пленки жидкости

довольно значительный, предложенная методика расчета абсорберов может представить интерес при разработке научно обоснованных расчетов высокоскоростной массообменной аппаратуры. Вместе с тем следует указать на некоторые границы применимости этой методики. Как видно из рис. 10.5.9, величина турбулентного коэффициента переноса зависит от природы абсорбируемого вещества. Поскольку нахождение этого коэффициента проводилось из анализа обратной задачи, согласно которой концентрации на концах массообменного аппарата считались известными, то для более широкого применения предлагаемой методики в расчетах массообменной аппаратуры необходимо иметь довольно широкий спектр экспериментальных данных, в котором природа распределяемого компонента менялась бы в широких интервалах. К сожалению, такие данные отсутствуют.

Расчет тепломассообмена в режиме противотока проведен аналогичным методом. Подробно эти исследования изложены в работах [251, 252].

Глава 11

СОПРЯЖЕННЫЙ МАССОПЕРЕНОС И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ

Теория массопереноса и массопереноса, осложненного тепловыми эффектами (тепломассопереноса), представляет значительный интерес для многих традиционных и новых областей науки и современной техники.

Тепломассоперенос в многокомпонентных смесях относится к наиболее важным проблемам в области химической технологии, и в первую очередь таким, как диффузионные процессы (дистилляция, абсорбция, хемосорбция, адсорбция, сушка, экстракция, кристаллизация), мембранные процессы, массодиффузионное разделение газовых смесей. Изучение этих вопросов позволит решить ряд проблем, стоящих перед сенсорной техникой, поскольку она имеет дело с процессом адсорбции в многокомпонентных смесях. Существует еще ряд областей науки и техники, где разработка технологического процесса, как правило, проводимого в многокомпонентных смесях, требует углубленного исследования тепломассопереноса.

Несмотря на важность изучения этого вида тепломассопереноса, теории и методам его расчета посвящено сравнительно небольшое число исследований, особенно если данный процесс проходит в движущейся среде. Основная причина состоит в том, что массоперенос в многокомпонентных смесях представляет собой сложную математическую задачу. Она отличается от задач, рассмотренных в предыдущих главах книги, еще и тем, что при ее решении необходимо пользоваться матричными уравнениями в частных производных

Порядок "связанной" системы уравнений в частных производных на единицу меньше числа компонентов смеси. Все это указывает на то, что в постановке математического описания процессов многокомпонентного массопереноса необходимо ограничиться наиболее существенными факторами, определяющими процесс в целом. Использование тех или иных предположений способствует упрощению решения задачи, иначе данная проблема может оказаться в рамках общих постановочных задач, где учтены все факторы, но получить решение будет затруднительно.

Развиваемый ниже математический подход к решению процессов многокомпонентного массопереноса и тепломассопереноса можно с успехом применять к средам неподвижной и движущейся, к активной (наличие в среде источников или стоков) и неактивной; в системах однофазной и многофазной, с нейтральными частицами и заряженными, в изотермических и неизотермических системах.

Метод расчета, изложенный в данной главе, применен к многокомпонентному пленочному двухфазному массопереносу и тепломассопереносу в системе с нейтральными частицами как в активной, так и в неактивной среде. Основой для расчета являются системы уравнений конвективной диффузии и теплопередачи. Особенность постановки задач – использование граничных условий четвертого рода.

§ 11.1 ДВУХФАЗНЫЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЙ МАССОПЕРЕНОС

В настоящее время в теории массообменных процессов отсутствуют способы определения концентраций и потоков многокомпонентных смесей, основанные на решении уравнений конвективной диффузии с граничными условиями четвертого ряда, учитывающими сопряжения контактирующихся фаз. Разработанные методы описания кинетики массопереноса в многокомпонентных смесях [253–258] при определении характеристик массообмена по высоте аппарата требуют принятия допущений, снижающих точность вычислений [259–260].

В данном параграфе предложен метод расчета массопередачи, протекающей в многокомпонентной двухфазной газожидкостной системе, который основан на решении системы дифференциальных уравнений конвективной диффузии с учетом граничных условий четвертого рода [261, 262]. Метод позволяет определять значения концентраций для всех компонентов многокомпонентной смеси в любой точке массообменного аппарата и на основании этих значений найти потоки и коэффициенты переноса массы и определить эффективность аппарата.

Закономерность массообмена в движущейся n-компонентной смеси описывается уравнением конвективной диффузии, представленным в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{uc}) = \nabla([D]\nabla\mathbf{c}), \qquad (11.1)$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ – скорость направленного движения фазы; $[D]$ – матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии размерностью $(n-1)\ (n-1)$; $\mathbf{c}$ – вектор мольных концентраций компонентов.

В стационарных условиях и при постоянной среднерасходовой скорости ($\bar{\mathbf{u}} = u = \text{const}$) уравнение (11.1) упрощается:

$$u\nabla\mathbf{c} = \nabla([D]\nabla\mathbf{c}). \qquad (11.2)$$

Входящая в (11.1) и (11.2) матрица $[D]$ выражается через коэффициенты молекулярной диффузии бинарных пар компонентов, составляющих данную смесь. Формулы для расчета элементов $[D]$ можно получить на основе молекулярно-кинетической теории газов и жидкостей [263]. Важным свойством матрицы $[D]$ является возможность ее преобразования к диагональному виду [263, 264].

Рассмотрим двухфазный пленочный массообмен в многокомпонентной газожидкостной системе, движущейся вдоль вертикальной трубки в режиме нисходящего прямоточного течения фаз. Жидкость и газ движутся со среднерасходовыми скоростями; скорость изменения параметров фаз в продольном направлении много меньше, чем в поперечном. Предполагается, что толщина пленки жидкости (h_0) в процессах массопереноса не изменяется в продольном и поперечном направлениях. Будем считать матрицы $[D_{\text{ж}}]$ и $[D_{\text{г}}]$ независимыми от текущих концентраций [254–256]. Пусть ось x направлена вдоль стенки трубы, а ось y – перпендикулярно ей. В этом случае система уравнений конвективной диффузии (11.2) в фа-

зах запишется в виде

$$u_{ж}\frac{\partial c_{ж}}{\partial x} = [D_{ж}]\frac{\partial^2 c_{ж}}{\partial y^2}; \tag{11.3}$$

$$u_{г}\frac{\partial c_{г}}{\partial x} = [D_{г}]\frac{\partial^2 c_{г}}{\partial y^2}. \tag{11.4}$$

Граничные условия задаются следующими соотношениями:

на входе в трубку

$$\text{при } x = 0 \quad c_{ж} = c_{ож}, \quad c_{г} = c_{ог}; \tag{11.5}$$

на стенке трубки

$$\text{при } y = 0 \quad c_{ж} = c_{ож}; \tag{11.6}$$

на оси трубки

$$\text{при } y = R \quad c_{г} = c_{ог}. \tag{11.7}$$

На поверхности раздела фаз соблюдаются условия фазового равновесия и неразрывности потока для каждого компонента смеси:

$$y = h_0 \quad c_{гi} = m_i c_{жi};\ J_{жi} = J_{гi}, \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{11.8}$$

Выражая диффузионные потоки вещества через градиенты концентрации на основе обобщенного закона Фика и используя векторную форму записи, из (11.8) получим

$$c_{г} = \lceil m \rfloor c_{ж}; \tag{11.9}$$

$$[D_{г}]\frac{\partial c_{г}}{\partial y} = [D_{ж}]\frac{\partial c_{ж}}{\partial y}, \tag{11.10}$$

где $\lceil m \rfloor$ – диагональная матрица равновесия.

Как указывалось ранее, матрицы $[D_{г}]$ и $[D_{ж}]$ обладают тем свойством, что они могут быть преобразованы к диагональному виду [254, 263] по формулам

$$[G]^{-1}[D_{г}][G] = \lceil D'_{г} \rfloor; \tag{11.11}$$

$$[L]^{-1}[D_{ж}][L] = \lceil D'_{ж} \rfloor, \tag{11.12}$$

где $\lceil D'_{г} \rfloor$ и $\lceil D'_{ж} \rfloor$ – диагональные матрицы, состоящие из собственных значений матриц $[D_{г}]$ и $[D_{ж}]$.

Система уравнений (11.3) и (11.4) с граничными условиями (11.6) – (11.10) является связанной системой уравнений параболического типа с граничными условиями четвертого рода, что создает трудности при ее решении. Поэтому воспользуемся свойствами матриц $[D_{г}]$, $[D_{ж}]$ (формулы

(11.11), (11.12)) и преобразуем исходную систему к виду [261]

$$u_{ж}\frac{\partial c_{ж}'}{\partial x} = \lceil D_{ж}' \rfloor \frac{\partial^2 c_{ж}'}{\partial y^2}\ ;\ u_{г}\frac{\partial c_{г}'}{\partial x} = \lceil D_{г}' \rfloor \frac{\partial^2 c_{г}'}{\partial y^2}, \qquad (11.13)$$

где $c_{ж}' = [L]^{-1} c_{ж}$, $c_{г}' = [G]^{-1} c_{г}$. (11.14)

При $x = 0$ $c_{ж}' = c_{oж}' = [L]^{-1} c_{oж}$; $c_{г}' = c_{oг}' = [G]^{-1} c_{oг}$. (11.15)

При $y = 0$ $c_{ж}' = c_{oж}'$; при $y = R$ $c_{г}' = c_{oг}'$. (11.16)

При $y = h_0$ $c_{г}' = [R_1] c_{ж}'$; $\lceil D_{г}' \rfloor \frac{\partial c_{г}'}{\partial y} = [R_2] \lceil D_{ж}' \rfloor \frac{\partial c_{ж}^{p}}{\partial y}$, (11.17)

где $[R_1] = [G]^{-1} \lceil m \rfloor [L]$; $[R_2] = [G]^{-1} [L]$. (11.18)

Обозначим $y_1 \equiv y$ при $0 \leqslant y \leqslant l_0$; $y_2 \equiv y$ при $h_0 \leqslant y \leqslant R$ и введем безразмерные координаты η_1, η_2 с помощью соотношений

$$\eta_1 = 1 - y_1/h_0\ ;\ \eta_2 = 1 - (R - y_2)/(R - h_0). \qquad (11.19)$$

Тогда система (11.13) – (11.17) примет окончательный вид

$$\frac{\partial c_{ж}'}{\partial x} = \lceil \alpha_{ж} \rfloor \frac{\partial^2 c_{ж}'}{\partial \eta_1^2}\ ;\ \frac{\partial c_{г}'}{\partial x} = \lceil \alpha_{г} \rfloor \frac{\partial^2 c_{г}'}{\partial \eta_2^2}\ , \qquad (11.20)$$

где $\alpha_{ж\,i} = D_{ж\,i}/u_{ж} h_0^2$; $\alpha_{г\,i} = D_{г\,i}'/u_{г}(R - h_0)^2$, $i = 1, 2, ..., n - 1$. (11.21)

При $x = 0$ $c_{ж}' = c_{oж}'$; $c_{г}' = c_{oг}'$. (11.22)

При $\eta_1 = 1$ $c_{ж}' = c_{oж}'$; при $\eta_2 = 1$ $c_{г}' = c_{oг}'$. (11.23)

При $\eta_1 = \eta_2 = 0$ $c_{г}' = [R_1] c_{ж}'$; (11.24)

$$\lceil D_{г}' \rfloor \frac{\partial c_{г}'}{\partial \eta_2} = -\frac{R - h_0}{h_0} [R_2] \lceil D_{ж}' \rfloor \frac{\partial c_{ж}'}{\partial \eta_1}. \qquad (11.25)$$

Решения системы уравнений (11.20) имеют вид

$$c_{ж\,i}' = A_{1\,i} + B_{1\,i} \int_0^{z_{1\,i}} \exp(-\omega^2)\, d\omega;\ c_{г\,i}' = A_{2\,i} + B_{2\,i} \int_0^{z_{2i}} \exp(-\omega^2) d\omega, \qquad (11.26)$$

где $z_{1\,i} = \eta_1/2\sqrt{\alpha_{ж\,i} x}$; $z_{2\,i} = \eta_2/(2\sqrt{\alpha_{г\,i} x})$,

$A_{1\,i}$, $B_{1\,i}$, $A_{2\,i}$, $B_{2\,i}$ – константы; $i = 1, 2, ..., n - 1$.

Для определения констант используем граничные условия (11.22), (11.24),

(11.25) и известное соотношение интеграла вероятности $\int_0^{\infty} \exp(-\omega^2) d\omega = \sqrt{\pi}/2$.

Из (11.22) получим

$$\mathbf{c}'_{\text{ож}} = \mathbf{A}_1 + (\sqrt{\pi}/2)\,\mathbf{B}_1\,;\ \mathbf{c}'_{\text{ог}} = \mathbf{A}_2 + (\sqrt{\pi}/2)\mathbf{B}_2\,. \tag{11.27}$$

Из (11.24) следует

$$\mathbf{A}_2 = [R_1]\,\mathbf{A}_1\,. \tag{11.28}$$

Продифференцируем формулу (11.26) по η_1 и η_2 и определим значение производной в точках $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$.

Получим

$$(\partial c'_{\text{ж}i}\,/\partial\eta_1)_{\eta_1\,=\,0} = B_{1i}/2\sqrt{\alpha_{\text{ж}i}x}\,; \tag{11.29}$$

$$(\partial c'_{\text{г}i}/\partial\eta_2)_{\eta_2\,=\,0} = B_{2i}/2\sqrt{\alpha_{\text{г}i}\,x}. \tag{11.30}$$

Подставив (11.29), (11.30) в (11.25), после преобразования найдем

$$B_{2i}\sqrt{D'_{\text{г}i}} = -\sqrt{u_{\text{ж}}/u_{\text{г}}}\sum_{y=1}^{n} [R_2]_{ij}\ \sqrt{D'_{\text{ж}j}}\,B_{1j}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{B}_2 = -\sqrt{u_{\text{ж}}/u_{\text{г}}}\,[R_3]\,\mathbf{B}_1\,, \tag{11.31}$$

где $[R_3] = (\ulcorner D'_{\text{г}} \urcorner)^{-0,5}[R_2](\ulcorner D'_{\text{ж}} \urcorner)^{0,5} = [G]^{-1}[D_{\text{г}}]^{-0,5}[L]$.

Итак, получена система из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными в векторной форме: (11.27), (11.28), (11.31). Ее решение, найденное с помощью операций матричной алгебры, можно записать в виде

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{c}'_{\text{ож}} - [\Phi]\,\mathbf{d}; \tag{11.32}$$

$$\mathbf{B}_1 = (2/\sqrt{\pi})[\Phi]\,\mathbf{d}\,; \tag{11.33}$$

$$\mathbf{A}_2 = [R_1]\,(\mathbf{c}'_{\text{ож}} - [\Phi]\,\mathbf{d}); \tag{11.34}$$

$$\mathbf{B}_2 = (2/\sqrt{\pi})([R_1]\,[\Phi] - \ulcorner I \urcorner)\,\mathbf{d}, \tag{11.35}$$

где

I – единичная матрица. (11.36)

Формулы (11.32) – (11.36) вместе с (11.26) дают возможность определить преобразованные концентрации $\mathbf{c}'_{\text{ж}}$, $\mathbf{c}'_{\text{г}}$ при любых значениях координат.

Теперь необходимо выполнить обратный переход к реальным концентрациям $c_ж$, $c_г$, который осуществляется при помощи соотношений (11.14)

С учетом обозначений

$$S'_{жi}(x, \eta_1) = \int_0^{z_{1i}} \exp(-\omega^2)d\omega; S'_{гi}(x, \eta_2) = \int_0^{z_{2i}} \exp(-\omega^2)d\omega$$

Формулы (11.26) примут вид

$$\mathbf{c}'_ж = \mathbf{A}_1 + \ulcorner S'_ж \lrcorner \mathbf{B}_1; \mathbf{c}'_г = \mathbf{A}_2 + \ulcorner S_г \lrcorner \mathbf{B}_2. \qquad (11.37)$$

Отсюда и из (11.14) получим

$$\mathbf{c}_ж = [L]\,\mathbf{c}'_ж = [L]\,\mathbf{A}_1 + [L]\,\ulcorner S'_ж \lrcorner \mathbf{B}_1 = [L]\mathbf{A}_1 + [S_ж][L]\mathbf{B}_1, \qquad (11.38)$$

$$\mathbf{c}_г = [G]\mathbf{c}'_г = [G]\mathbf{A}_2 + [G]\,\ulcorner S'_г \lrcorner \mathbf{B}_2 = [G]\mathbf{A}_2 + [S_г][G]\mathbf{B}_2, \qquad (11.39)$$

где

$$[S_ж] = [L]\,\ulcorner S_ж \lrcorner [L]^{-1}; [S_г] = [G]\,\ulcorner S'_г \lrcorner [G]^{-1}. \qquad (11.40)$$

Определим $[L]\mathbf{A}_1$, используя (11.32) и (11.36):

$$[L]\mathbf{A}_1 = [L]\mathbf{c}'_{oж} - [L]\,(\sqrt{u_ж/u_г}[R_3] + [R_1])^{-1}([R_1]\mathbf{c}'_{oж} -$$

$$- \mathbf{c}'_{oг}) = \mathbf{c}_{oж} - [L]\,(\sqrt{u_ж/u_г}\,[G]^{-1}[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5}[L] +$$

$$+ [G]^{-1}\,\ulcorner m \lrcorner\,[L])^{-1}([R_1]\mathbf{c}'_{oж} - \mathbf{c}'_{oг}) = \mathbf{c}_{oж} -$$

$$- [L]\,\{[G]^{-1}(\sqrt{u_ж/u_г}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5} + \ulcorner m \lrcorner)[L]\}^{-1}([G]^{-1} \times$$

$$\times \ulcorner m \lrcorner\,[L]\mathbf{c}'_{oж} - [G]^{-1}\mathbf{c}'_{oг}) = \mathbf{c}_{oж} - (\sqrt{u_ж/u_г}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5} +$$

$$+ \ulcorner m \lrcorner)^{-1}(\ulcorner m \lrcorner\,\mathbf{c}_{oж} - \mathbf{c}_{oг}),$$

или, обозначив

$$[T] = \sqrt{u_ж/u_г}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{-0,5} + \ulcorner m \lrcorner; \Delta\mathbf{c}_0 = \ulcorner m \lrcorner\mathbf{c}_{oж} - \mathbf{c}_{oг}, \qquad (11.41)$$

получим

$$[L]\mathbf{A}_1 = \mathbf{c}_{oж} - [T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0. \qquad (11.42)$$

Из (11.33) и (11.36) аналогично найдем

$$[L]\,\mathbf{B}_1 = (2/\sqrt{\pi})[T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0. \qquad (11.43)$$

Теперь с помощью (11.34) и (11.36) определим

$$[G]\mathbf{A}_2 = [G][R_1]\mathbf{c}'_{0ж} - [G][R_1](\sqrt{u_ж/u_г}[R_3] +$$

$$+ [R_1])^{-1}([R_1]\mathbf{c}'_{0ж} - \mathbf{c}'_{0г}) = \ulcorner m \lrcorner\, \mathbf{c}_{0ж} - \ulcorner m \lrcorner [L] \times$$

$$\times (\sqrt{u_ж/u_г}\,[G]^{-1}[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5}[L] + [G]^{-1}\ulcorner m \lrcorner\,[L])^{-1} \times$$

$$\times ([R_1]\mathbf{c}'_{0ж} - \mathbf{c}'_{0г}) = \ulcorner m \lrcorner\, \mathbf{c}_{0ж} - \ulcorner m \lrcorner [T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0 =$$

$$= \ulcorner m \lrcorner\, (\mathbf{c}_{0ж} - [T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0). \qquad (11.44)$$

Наконец, из (11.35) и (11.36) находим

$$[G]\mathbf{B}_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[G][R_1][\Phi]\mathbf{d} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}[G]\mathbf{d} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\ulcorner m \lrcorner\,[T]^{-1} - \ulcorner I \lrcorner)\Delta\mathbf{c}_0. \qquad (11.45)$$

Подставляя (11.42) – (11.45) в (11.38), (11.39), определим концентрации $\mathbf{c}_ж$, $\mathbf{c}_г$ в любой точке аппарата:

$$\mathbf{c}_ж(x, \eta_1) = \mathbf{c}_{0ж} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}[S_ж] - \ulcorner I \lrcorner\right)[T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0, \qquad (11.46)$$

$$\mathbf{c}_г(x, \eta_2) = \mathbf{c}_{0г} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}[S_г] - \ulcorner I \lrcorner\right)(\ulcorner m \lrcorner[T]^{-1} - \ulcorner I \lrcorner)\Delta\mathbf{c}_0. \qquad (11.47)$$

Формулы (11.46) и (11.47) дают возможность определить все поле концентраций компонентов в жидкой и газовой фазах, т.е. при $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \eta_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta_2 \leqslant 1$.

Зная поля концентраций компонентов, можно определить кинетические характеристики массопереноса в многокомпонентной смеси – потоки массы и коэффициенты массопередачи. Для этого воспользуемся соотношением (11.29) и запишем преобразованный диффузионный поток:

$$[L]^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{J}' = \frac{1}{h_0}\ulcorner D'_ж \lrcorner\, \frac{\partial \mathbf{c}'_ж}{\partial \eta_1}\bigg|_{\eta_1 = 0} = \frac{1}{2}\sqrt{u_ж/x}\,(\ulcorner D'_ж \lrcorner\,)^{0,5}\mathbf{B}_1.$$

Отсюда с помощью (11.43) получим

$$\mathbf{J} = [L]\mathbf{J}' = \frac{1}{2}\sqrt{u_ж/u_г}[L]\,(\ulcorner D'_ж \lrcorner)^{0,5}\mathbf{B}_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{u_ж/x}\,[D_ж]^{0,5}[L]\mathbf{B}_1 = \sqrt{u_ж/(\pi x)}\,[D_ж]^{0,5}[T]^{-1}\Delta\mathbf{c}_0. \qquad (11.48)$$

Эквивалентную форму для расчета потоков компонентов можно получить и из уравнений для газовой фазы (11.30), (11.45).

Преобразуем теперь (11.48) к более удобному виду:

$$\mathbf{J} = \sqrt{u_{ж}/(\pi x)}\,([D_{ж}]^{-0,5})^{-1}\,[T]^{-1}\,\Delta \mathbf{c}_0 = \sqrt{u_{ж}/(\pi x)}([T]\,[D_{ж}]^{-0,5})^{-1}\,\Delta \mathbf{c}_0.$$

Подставив сюда (11.41), получим

$$\mathbf{J} = \sqrt{u_{ж}/(\pi x)}\,(\sqrt{u_{ж}/u_{г}}\,[D_{г}]^{-0,5} + {}^{г}m_{ж}[D_{ж}]^{-0,5})^{-1}\,\Delta \mathbf{c}_0 =$$

$$= (\sqrt{\pi x/u_{г}}\,[D_{г}]^{-0,5} + \sqrt{\pi x/u_{ж}}\,{}^{г}m_{ж}[D_{ж}]^{-0,5})^{-1}\,\Delta \mathbf{c}_0. \qquad (11.49)$$

Если ввести матрицы коэффициентов массоотдачи в фазах

$$[\beta_{ж}(x)] = \beta([D_{ж}], x) = \sqrt{u_{ж}/(\pi x)}\,[D_{ж}]^{-0,5}; \qquad (11.50)$$

$$[\beta_{г}(x)] = \beta([D_{г}], x) = \sqrt{u_{г}/(\pi x)}\,[D_{г}]^{0,5},$$

$$\text{то } \mathbf{J} = ([\beta_{г}(x)]^{-1} + {}^{г}m_{ж}[\beta_{ж}(x)]^{-1}\,\Delta \mathbf{c}_0 = [k(x)]\,\Delta \mathbf{c}_0, \qquad (11.51)$$

где матрица диффузионных коэффициентов массопередачи определяется соотношением аддитивности фазовых сопротивлений

$$[K(x)]^{-1} = [\beta_{г}(x)]^{-1} + {}^{г}m_{ж}\,[\beta_{ж}(x)]^{-1}. \qquad (11.52)$$

Важно подчеркнуть, что входящие в (11.51) матрицы коэффициентов массоотдачи в фазах являются функциями координаты x, что дает возможность вычислить потоки компонентов и коэффициенты массопередачи в любом сечении аппарата.

При переходе к массопереносу в бинарных смесях формула (11.49) преобразуется в известные соотношения, полученные для случаев, когда сопротивление массопередаче сосредоточено в жидкой или в газовой фазе.

§ 11.2 ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС
(нисходящий прямоток)

Массоперенос в многокомпонентных смесях, осложненный переносом энергии (тепломассоперенос), сопровождает различные физико-химические, технологические и теплофизические процессы. Двухфазные потоки, в которых происходит тепломассоперенос, являются рабочим телом в процессах, используемых в металлургической, нефтеперерабатывающей, химической, криогенной промышленности, а также в других областях техники.

Если двухфазному массопереносу или теплопереносу в бинарных системах посвящено значительное число исследований, опубликованных в периодических зарубежных и отечественных изданиях, а также в ряде монографий (см. гл. 10), то тепломассопереносу в многокомпонентных смесях

посвящены единичные исследования, несмотря на то что двухфазный тепломассоперенос в многокомпонентных смесях является одним из важных направлений в теории тепломассообменных процессов. Особый интерес представляет изложение этого вопроса в сопряженной постановке.

Ниже рассмотрен метод решения подобных задач на примере совместного двухфазного тепломассопереноса в многокомпонентной газожидкостной системе, движущейся вдоль вертикального канала в режиме нисходящего прямоточного течения фаз [265].

Ось x направим вдоль стенки канала, а ось y – перпендикулярно ей. Будем считать коэффициенты температуропроводности и многокомпонентной диффузии независимыми от текущих значений температур и концентраций [254–256]. Рассмотрим случай, когда тепломассоперенос протекает в стационарных условиях, суммарный диффузионный перенос энтальпии в объеме фаз пренебрежимо мал, жидкость и газ движутся со среднерасходовыми скоростями, скорость изменения параметров фаз в продольном направлении много меньше, чем в поперечном. Предполагаем, что диссипативным членом в уравнении конвективного теплообмена и переносом вещества за счет термодиффузии можно пренебречь, а также что толщина пленки (h_0) в процессах тепломассопереноса не изменяется в продольном и поперечном направлениях. При этих предположениях система уравнений конвективного массообмена и теплообмена имеет следующий вид:

$$u_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial x}=\kappa_{ж}\frac{\partial^2 T_{ж}}{\partial y^2}\,,\quad u_{г}\frac{\partial T_{г}}{\partial x}=\kappa_{г}\frac{\partial^2 T_{г}}{\partial y^2}\,,$$

$$u_{ж}\frac{\partial \mathbf{c}_{ж}}{\partial x}=[D_{ж}]\frac{\partial^2 \mathbf{c}_{ж}}{\partial y^2},\quad u_{г}\frac{\partial \mathbf{c}_{г}}{\partial x}=[D_{г}]\frac{\partial^2 \mathbf{c}_{г}}{\partial y^2}\,, \qquad (11.2.1)$$

где $u_{ж}$, $u_{г}$ – среднерасходовые скорости жидкой пленки и газового потока; $\kappa_{ж}$, $\kappa_{г}$ – коэффициенты температуропроводности; $[D]$ – матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии; $\mathbf{c}_{ж}$, $\mathbf{c}_{г}$ – векторы мольных концентраций компонентов смеси в жидкости и газе; $T_{ж}$, $T_{г}$ – температура смеси. Граничные условия задаются следующими соотношениями:

на входе в канал при $x = 0$

$$T_{ж}=T_{0ж},\ T_{г}=T_{0г},\ \mathbf{c}_{ж}=\mathbf{c}_{0ж},\ \mathbf{c}_{г}=\mathbf{c}_{0г}\,, \qquad (11.2.2)$$

на стенке трубки при $y = 0$

$$T_{ж}=T_{0ж},\quad \mathbf{c}_{ж}=\mathbf{c}_{0ж}\,, \qquad (11.2.3)$$

на оси трубки при $y = R$

$$T_{г}=T_{0г},\quad \mathbf{c}_{г}=\mathbf{c}_{0г}\,. \qquad (11.2.4)$$

На поверхности раздела фаз при $y = h_0$ соблюдаются условия фазового равновесия, балансов тепла и массы:

$$T=T_{ж}=T_{г},\quad \mathbf{c}_{г}=m\,\mathbf{c}_{ж}+\mathbf{P}_1 T+\mathbf{P}_2\,, \qquad (11.2.5)$$

$$q_{ж}=q_{г}+\sum_{i=1}^{n}J_i\Delta\widetilde{H}_i\,, \qquad (11.2.6)$$

где $\ulcorner m \lrcorner$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ – параметры равновесной зависимости (11.2.5); q – тепловой поток; J – вектор диффузионных потоков компонентов смеси; ΔH_i – разность мольных энтальпий i-го компонента в газовой и жидкой фазах, переносимая потоком его массы через поверхность раздела; n – число компонентов смеси,

$$J_i = J_{\text{ж}\,i} = J_{\text{г}\,i}\,, \quad i = 1, 2, ..., n\,. \tag{11.2.7}$$

Воспользовавшись тождеством $\sum_{i=1}^{n} J_i = 0$, можно преобразовать условие (11.2.6) к виду

$$q_{\text{ж}} = q_{\text{г}} + \sum_{i=1}^{n-1} J_i \Delta H_i\,, \text{ где } \Delta H_i = \Delta\widetilde{H}_i - \Delta\widetilde{H}_n\,. \tag{11.2.8}$$

Используя закон Фурье и обобщенный закон Фика, из (11.2.7), (11.2.8) получим балансовые соотношения на поверхности раздела фаз в следующей форме:

$$\lambda_{\text{ж}} \frac{\partial T_{\text{ж}}}{\partial y} = \lambda_{\text{г}} \frac{\partial T_{\text{г}}}{\partial y} + (\Delta\mathbf{H})^T [D_{\text{ж}}] \frac{\partial \mathbf{c}_{\text{ж}}}{\partial y}\,, \tag{11.2.9}$$

$$[D_{\text{ж}}] \frac{\partial \mathbf{c}_{\text{ж}}}{\partial y} = [D_{\text{г}}] \frac{\partial \mathbf{c}_{\text{г}}}{\partial y}\,, \tag{11.2.10}$$

где $\lambda_{\text{ж}}$, $\lambda_{\text{г}}$ – коэффициенты теплопроводности в жидкости и газе.

Входящие в систему уравнений (11.2.1) матрицы $[D_{\text{г}}]$, $[D_{\text{ж}}]$ выражаются через коэффициенты молекулярной диффузии бинарных пар компонентов, составляющих данную смесь. Формулы для расчета элементов матриц $[D_{\text{г}}]$, $[D_{\text{ж}}]$ можно получить из молекулярной теории газов [254–256, 263]. Важным свойством матриц $[D_{\text{г}}]$, $[D_{\text{ж}}]$ является их приводимость к диагональному виду [254]:

$$[G]^{-1} [D_{\text{г}}] [G] = \ulcorner D'_{\text{г}} \lrcorner; \quad [L]^{-1} [D_{\text{ж}}] [L] = \ulcorner D'_{\text{ж}} \lrcorner\,, \tag{11.2.11}$$

где $\ulcorner D' \lrcorner$ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $[D]$.

Система уравнений (11.2.1) с граничными условиями (11.2.2)–(11.2.5), (11.2.9), (11.2.10) является связанной системой уравнений параболического типа с граничными условиями четвертого рода, что создает существенные трудности при ее решении. Поэтому воспользуемся свойствами матриц $[D_{\text{г}}]$, $[D_{\text{ж}}]$ (формулы (11.2.11)) и преобразуем исходную систему к виду

$$u_{\text{ж}} \frac{\partial T_{\text{ж}}}{\partial x} = \kappa_{\text{ж}} \frac{\partial^2 T_{\text{ж}}}{\partial y^2}\,; \quad u_{\text{г}} \frac{\partial T_{\text{г}}}{\partial x} = \kappa_{\text{г}} \frac{\partial^2 T_{\text{г}}}{\partial y^2}\,; \tag{11.2.12}$$

$$u_{\text{ж}} \frac{\partial \mathbf{c}'_{\text{ж}}}{\partial x} = \ulcorner D'_{\text{ж}} \lrcorner \frac{\partial^2 \mathbf{c}'_{\text{ж}}}{\partial y^2}\,; \quad u_{\text{г}} \frac{\partial \mathbf{c}'_{\text{г}}}{\partial x} = \ulcorner D'_{\text{г}} \lrcorner \frac{\partial^2 \mathbf{c}'_{\text{г}}}{\partial y^2}\,,$$

где

$$\mathbf{c}'_{\text{ж}} = [L]^{-1} \mathbf{c}_{\text{ж}}\,; \quad \mathbf{c}'_{\text{г}} = [G]^{-1} \mathbf{c}_{\text{г}}\,. \tag{11.2.13}$$

При $x = 0$

$$T_{ж} = T_{0ж},\ T_{г} = T_{0г},\ \mathbf{c}'_{ж} = \mathbf{c}'_{0ж},\ \mathbf{c}'_{г} = \mathbf{c}'_{0г}\ , \tag{11.2.14}$$

где

$$\mathbf{c}'_{0ж} = [L]^{-1}\mathbf{c}_{0ж},\quad \mathbf{c}'_{0г} = [G]^{-1}\mathbf{c}_{0г}\ .$$

При $y = 0$ $\quad T_{ж} = T_{0ж},\quad \mathbf{c}'_{ж} = \mathbf{c}'_{0ж}.$ (11.2.15)

При $y = R$ $\quad T_{г} = T_{0г},\quad \mathbf{c}'_{г} = \mathbf{c}'_{0г}\ .$ (11.2.16)

При $y = h_0$ $\quad T_{ж} = T_{г} = T;\ \mathbf{c}'_{г} = [R_1]\mathbf{c}'_{ж} + \mathbf{P}'_1 T + \mathbf{P}'_2,$ (11.2.17)

$$[R_2]\,\ulcorner D'_{ж}\urcorner \frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial y} = \ulcorner D'_{г}\urcorner \frac{\partial \mathbf{c}'_{г}}{\partial y}\ ,$$

$$\lambda_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial y} = \lambda_{г}\frac{\partial T_{г}}{\partial y} + \mathbf{r}_1^T \frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial y}\ ,$$

где

$$\mathbf{P}'_1 = [G]^{-1}\mathbf{P}_1;\ \mathbf{P}'_2 = [G]^{-1}\mathbf{P}^2;\quad \mathbf{r}_1^T = (\Delta \mathbf{H})^T [D_{ж}]\,[L];$$

$$[R_1] = [G]^{-1}\ulcorner m\urcorner\,[L];\quad [R_2] = [G]^{-1}[L]. \tag{11.2.18}$$

Обозначим $y_1 \equiv y$ при $0 \leqslant y \leqslant h_0$, $y_2 \equiv y$ при $h_0 \leqslant y \leqslant R$ и введем безразмерные координаты η_1, η_2. с помощью соотношений

$$\eta_1 = 1 - y_1/h_0,\quad \eta_2 = 1 - (R - y_2)/(R - h_0).$$

Тогда система (11.2.12) – (11.2.17) примет окончательный вид:

$$\frac{\partial T_{ж}}{\partial x} = \gamma_{Tж}\frac{\partial^2 T_{ж}}{\partial \eta_1^2}\ ,\quad \frac{\partial T_{г}}{\partial x} = \gamma_{Tг}\frac{\partial^2 T_{г}}{\partial \eta_2^2}\ , \tag{11.2.19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial x} = \ulcorner \gamma_{ж}\urcorner \frac{\partial^2 \mathbf{c}'_{ж}}{\partial \eta_1^2}\ ,\quad \frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial x} = \ulcorner \gamma_{г}\urcorner \frac{\partial^2 \mathbf{c}'_{г}}{\partial \eta_2^2}\ ,$$

где

$$\gamma_{Tж} = \kappa_{ж}/u_{ж}h_0^2;\quad \gamma_{Tг} = \kappa_{г}/u_{г}(R - h_0)^2;$$

$$\gamma_{жi} = D'_{жi}/u_{ж}h_0^2;\quad \gamma_{гi} = D'_{гi}/u_{г}(R - h_0)^2.$$

При $x = 0$ $\quad T_{ж} = T_{0ж},\ T_{г} = T_{0г},\ \mathbf{c}'_{ж} = \mathbf{c}'_{0ж},\ \mathbf{c}'_{г} = \mathbf{c}'_{0г}.$ (11.2.20)

При $\eta_1 = 1$ $\quad T_{ж} = T_{0ж},\qquad \mathbf{c}'_{ж} = \mathbf{c}'_{0ж}\ .$ (11.2.21)

При $\eta_2 = 1$ $\quad T_{г} = T_{0г},\quad \mathbf{c}'_{г} = \mathbf{c}'_{0г}\ .$

При $\eta_1 = \eta_2 = 0$ $\quad T_{ж} = T_{г} = T,\ \mathbf{c}'_{г} = [R_1]\,\mathbf{c}'_{ж} + \mathbf{P}'_1 T + \mathbf{P}'_2,$ (11.2.22)

$$\lambda_{г}\frac{\partial T_{г}}{\partial \eta_2} = \frac{R - h_0}{h_0}\lambda_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial \eta_1} + \frac{R - h_0}{h_0}\mathbf{r}_1^T\frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial \eta_1}\ , \tag{11.2.23}$$

$$\ulcorner D'_{г}\urcorner \frac{\partial \mathbf{c}'_{г}}{\partial \eta_2} = -\frac{R - h_0}{h_0}[R_2]\,\ulcorner D'_{ж}\urcorner \frac{\partial \mathbf{c}'_{ж}}{\partial \eta_1}\ . \tag{11.2.24}$$

Найдем решение уравнений (11.2.19) в погранслойном приближении, предполагая, что основные изменения концентраций компонентов $c'_{жi}$ и $c'_{гi}$ и их температур $T_ж$, $T_г$ происходят в слоях, примыкающих к поверхности раздела фаз, считая при этом функции ограниченными:

$$T_ж = a_1 + b_1 \int_0^{\omega_1} \exp(-\psi^2) d\psi_1 T_г = a_2 + b_2 \int_0^{\omega_2} \exp(-\psi^2) d\psi,$$

$$c'_{жi} = A_{1i} + B_{1i} \int_0^{z_{1i}} \exp(-\psi^2) d\psi, \; c'_{гi} = A_{2i} + B_{2i} \int_0^{z_{2i}} \exp(-\psi^2) d\psi, \tag{11.2.25}$$

где

$$\omega_1 = \eta_1 / 2\sqrt{\gamma_{Tж} x}; \; \omega_2 = \eta_2 / 2\sqrt{\gamma_{Tг} x}; \; z_{1i} = \eta_1 / 2\sqrt{\gamma_{жi} x};$$

$$z_{2i} = \eta_2 / 2\sqrt{\gamma_{гi} x}; \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Для определения констант интегрирования a_1, a_2, b_1, b_2, A_{1i}, A_{2i}, B_{1i}, B_{2i} воспользуемся начальными и граничными условиями (11.2.20) и (11.2.22)–(11.2.24), имея в виду предположения относительно функций $c'_{жi}$, $c'_{гi}$, $T_ж$, $T_г$, высказанные выше:

$$T_{0ж} = a_1 + b_1\sqrt{\pi}/2; \quad T_{0г} = a_2 + b_2\sqrt{\pi}/2; \tag{11.2.26}$$

$$\mathbf{c}'_{0ж} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\sqrt{\pi}/2; \quad \mathbf{c}'_{0г} = \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\sqrt{\pi}/2;$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a; \quad \mathbf{A}_2 = [R_1]\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{P}'_1 a + \mathbf{P}'_2; \\ &b_2 = -\sqrt{u_ж/u_г}\,[r_3 b_1 - r_4 \mathbf{r}_1^T (\ulcorner D'_{ж} \lrcorner)^{-0,5} \mathbf{B}_1]; \\ &\mathbf{B}_2 = -\sqrt{u_ж/u_г}\,[R_3]\,\mathbf{B}_1, \end{aligned}\right| \tag{11.2.27}$$

где

$$r_3 = \sqrt{\kappa_г}\lambda_ж / \sqrt{\kappa_ж}\lambda_г; \quad r_4 = \sqrt{\kappa_г}/\lambda_г; \tag{11.2.28}$$

$$[R_3] = (\ulcorner D'_{г} \lrcorner)^{-0,5} [R_2] (\ulcorner D'_{ж} \lrcorner)^{0,5}.$$

Решение системы алгебраических скалярно-векторных уравнений (11.2.26)–(11.2.27) получим в виде

$$b_1 = \frac{\eta\varphi}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{u_ж/u_г}\; r_4 \mathbf{r}_1^T (\ulcorner D'_{ж} \lrcorner)^{-0,5} [\Omega] (\omega + \mathbf{P}'_1 T_{0ж} + \mathbf{P}'_2) + \Delta T_0}{1 + \varphi\sqrt{u_ж/u_г}\; r_4 \mathbf{r}_1^T (\ulcorner D'_{ж} \lrcorner)^{-0,5} [\Omega]\,\mathbf{P}'_1}, \tag{11.2.29}$$

$$b_2 = b_1 - 2\Delta T_0/\sqrt{\pi}, \; a_1 = a_2 = T_{0ж} - b_1\sqrt{\pi}/2.$$

$$\mathbf{B}_1 = [\Omega]\,\{(2/\sqrt{\pi})(\omega + \mathbf{P}'_1 T_{0ж} + \mathbf{P}'_2) - \mathbf{P}'_1 b_1\}, \quad \mathbf{B}_2 = -\sqrt{u_ж/u_г}\,[R_3]\mathbf{B}_1,$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{c}'_{0ж} - \sqrt{\pi}\,\mathbf{B}_1/2, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{c}'_{0г} - \sqrt{\pi}\,\mathbf{B}_2/2, \tag{11.2.30}$$

где

$$\varphi = (\sqrt{u_ж/u_г}\; r_3 + 1)^{-1}; \quad \Delta T_0 = T_{0ж} - T_{0г}; \tag{11.2.31}$$

$$[\Omega] = (\sqrt{u_ж/u_г}\;[R_3] + [R_1])^{-1}; \quad \omega = [R_1]\,\mathbf{c}'_{0ж} - \mathbf{c}'_{0г}.$$

Формулы (11.2.29)–(11.2.31) вместе с (11.2.25) дают возможность определить температуры $T_ж$, $T_г$ и преобразованные концентрации $c'_ж$, $c'_г$ для любых значений координат.

Теперь необходимо выполнить обратный переход к реальным значениям $c_ж$, $c_г$. Этот переход осуществляется при помощи соотношений (11.2.13).

Введем обозначения:

$$S_{гж}(x,\eta_1) = \int_0^{\omega_1} \exp(-\psi^2)d\psi,\quad S_{Tг}(x,\eta_2) = \int_0^{\omega_2} \exp(-\psi^2)d\psi,$$

$$S'_{ж\,i}(x,\eta_1) = \int_0^{z_1 i} \exp(-\psi^2)d\psi,\quad S'_{г\,i}(x,\eta_2) = \int_0^{z_2 i} \exp(-\psi^2)d\psi.$$

Тогда формулы (11.2.25) с учетом (11.2.30) примут вид

$$T_ж(x,\eta_1) = T_{0ж} + (S_{Tж}(x,\eta_1) - \sqrt{\pi}/2)b_1, \qquad (11.2.32)$$

$$T_г(x,\eta_2) = T_{0г} + (S_{Tг}(x,\eta_2) - \sqrt{\pi}/2)b_2, \qquad (11.2.33)$$

$$\mathbf{c}'_ж(x,\eta_1) = \mathbf{c}'_{0ж} + (\ulcorner S'_{ж}\urcorner - (\sqrt{\pi}/2)\ulcorner I\urcorner)\mathbf{B}_1, \qquad (11.2.34)$$

$$\mathbf{c}'_г(x,\eta_2) = \mathbf{c}'_{0г} + (\ulcorner S'_{г}\urcorner - (\sqrt{\pi}/2)\ulcorner I\urcorner)\mathbf{B}_2. \qquad (11.2.35)$$

Воспользовавшись соотношениями (11.2.13), из (11.2.34), (11.2.35) получим

$$\mathbf{c}_ж = [L]\,\mathbf{c}'_ж = \mathbf{c}_{0ж} + ([S_ж(x,\eta_1)] - (\sqrt{\pi}/2)\ulcorner I\urcorner)[L]\mathbf{B}_1, \qquad (11.2.36)$$

$$\mathbf{c}_г = [G]\,\mathbf{c}'_г = \mathbf{c}_{0г} + ([S_г(x,\eta_2)] - (\sqrt{\pi}/2)\ulcorner I\urcorner)[G]\mathbf{B}_2, \qquad (11.2.37)$$

где $[S_ж(x,\eta_1)] = [L]\ulcorner S'_{ж}\urcorner[L]^{-1}$; $[S_г(x,\eta_2)] = [G]\ulcorner S'_{г}\urcorner[G]^{-1}$.

Преобразуя выражения

$$[L]\mathbf{B}_1 = [L][\Omega]([G]^{-1}[G])\{(2/\sqrt{\pi})(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}'_1 T_{0ж} + \mathbf{P}'_2) - \mathbf{P}'_1 b_1\} =$$

$$= (2/\sqrt{\pi})[\Phi](\Delta c_0)_T,$$

$$[G]\mathbf{B}_2 = -[G]\sqrt{u_ж/u_г}\,[R_3]\mathbf{B}_1 = -\sqrt{u_ж/u_г}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5}[L]\mathbf{B}_1 =$$

$$= (2/\sqrt{\pi})(\ulcorner m\urcorner[\Phi] - \ulcorner I\urcorner)(\Delta c_0)_T, \qquad (11.2.38)$$

где

$$[\Phi] = (\sqrt{u_ж/u_г}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5} + \ulcorner m\urcorner)^{-1};$$

$$(\Delta c_0)_T = \ulcorner m\urcorner c_{0ж} - c_{0г} + \mathbf{P}_1 T_{0ж} + \mathbf{P}_2 - (\sqrt{\pi}/2)\mathbf{P}_1 b_1, \qquad (11.2.39)$$

и подставляя их в (11.2.36), (11.2.37), будем иметь

$$\mathbf{c}_ж(x,\eta_1) = \mathbf{c}_{0ж} + ((2/\sqrt{\pi})[S_ж(x,\eta_1)] - \ulcorner I\urcorner)[\Phi](\Delta c_0)_T, \qquad (11.2.40)$$

$$\mathbf{c}_г(x,\eta_2) = \mathbf{c}_{0г} + ((2/\sqrt{\pi})[S_г(x,\eta_2)) - \ulcorner I\urcorner)(\ulcorner m\urcorner[\Phi] - \ulcorner I\urcorner)(\Delta c_0)_T. \qquad (11.2.41)$$

С помощью аналогичных выкладок можно привести формулу (11.2.29) к

виду, не содержащему промежуточных величин:

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varphi \times$$

$$\times \frac{\sqrt{u_ж/u_г}\,(\sqrt{\kappa_г}/\lambda_г)(\Delta\mathbf{H})^T [D_ж]^{-0,5}[\Phi]\,(\overline{m}\mathbf{c}_{0ж} - \mathbf{c}_{0г} + \mathbf{P}_1 T_{0ж} + \mathbf{P}_2) + \Delta T_0}{1 + \varphi\sqrt{u_ж/u_г}\,(\sqrt{\kappa_г}/\lambda_г)(\Delta\mathbf{H})^T [D_ж]^{0,5}[\Phi]\mathbf{P}_1}, \tag{11.2.42}$$

что является более удобным при непосредственных расчетах.

Таким образом, полученные соотношения (11.2.32), (11.2.33) и (11.2.40), (11.2.41) дают возможность определять поля температур и концентраций в жидкой и газовой фазах, т.е. их значения для любой точки (x, η_1) или (x, η_2), где $x \geqslant 0, 0 \leqslant \eta_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \eta_2 \leqslant 1$.

Зная температурные и концентрационные распределения в фазах, можно определить потоки тепла и массы компонентов смеси на поверхности раздела фаз. Для этого продифференцируем формулы (11.2.32), (11.2.34) в точке $\eta_1 = 0$:

$$\left.\frac{\partial T_ж}{\partial \eta_1}\right|_{\eta_1 = 0} = \frac{b_1}{2\sqrt{\gamma_{Tж} x}}, \quad \left.\frac{\partial c_{ж\,i}}{\partial \eta_1}\right|_{\eta_1 = 0} = \frac{B_{1\,i}}{2\sqrt{\gamma_{ж\,i} x}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тогда тепловой поток

$$q = \frac{\lambda_ж}{2}\sqrt{u_ж/\kappa_ж x}\; b_1,$$

а массовый поток

$$\mathbf{J}' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u_ж/x}\,(\overline{D'_ж})^{0,5}\mathbf{B}_1,$$

где $\mathbf{B}_1$ и b_1 даны формулами (11.2.30) и (11.2.42).

Выполняя переход к реальным потокам $\mathbf{J}$ с учетом выражения для $[L]\mathbf{B}_1$ (формула (11.2.38)), получим

$$\mathbf{J} = [L]\mathbf{J}' = \sqrt{u_ж/\pi x}\,[D_ж]^{0,5}[\Phi]\,(\Delta c_0)_T, \tag{11.2.43}$$

где $[\Phi]$ и $(\Delta c_0)_T$ даны формулами (11.2.39).

Эквивалентные формулы для расчета потоков можно получить и из уравнений для газовой фазы (11.2.33), (11.2.40).

Решение задачи (11.2.12) несколько упрощается, если к тем приближениям, которые применены при решении системы уравнений (11.2.1), добавим еще одно условие: разность мольных энтальпий i-го компонента в газовой и жидкой фазах, переносимая потоком его массы через поверхность раздела, настолько мала, что потоком тепла, переносимым за счет этой разности энтальпий, можно пренебречь по сравнению с потоком тепла, переносимым теплопроводностью [265].

При этих предположениях необходимо решить систему уравнений (11.2.1) с граничными условиями (11.2.2) – (11.2.5) и (11.2.10). Условие (11.2.9) заменено на следующее:

$$\lambda_ж \frac{\partial T_ж}{\partial y} = \lambda_г \frac{\partial T_г}{\partial y}. \tag{11.2.44}$$

Система уравнений с этими граничными и начальными условиями с помощью свойства матриц $[D_г]$ и $[D_ж]$ (11.2.11) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial c'_ж}{\partial x} = \ulcorner \gamma_ж \lrcorner \frac{\partial^2 c'_ж}{\partial \eta_1^2}, \quad \frac{\partial c'_г}{\partial x} = \ulcorner \gamma_г \lrcorner \frac{\partial^2 c'_г}{\partial \eta_2^2}, \tag{11.2.45}$$

где

$$c'_ж = [L]^{-1} c_ж, \quad c'_г = [G]^{-1} c_г, \tag{11.2.46}$$

$$\frac{\partial T_ж}{\partial x} = \gamma_{Tж} \frac{\partial^2 T_ж}{\partial \eta_1^2}, \quad \frac{\partial T_г}{\partial x} = \gamma_{Tг} \frac{\partial^2 T_г}{\partial \eta_2^2}. \tag{11.2.47}$$

Здесь

$$\gamma_{ж\,i} = D'_{ж\,i}/u_ж h_0^2, \quad \gamma_{г\,i} = D'_{г\,i}/u_г (R - h_0)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\gamma_{Tж} = \kappa_ж/u_ж h_0^2, \quad \gamma_{Tг} = \kappa_г/u_г (R - h_0)^2. \tag{11.2.48}$$

При $x = 0$ $c'_ж = c'_{0ж} = [L]^{-1} c_{0ж}$,

$$c'_г = c'_{0г} = [G]^{-1} c_{0г}, \quad T_ж = T_{0ж}, \quad T_г = T_{0г}. \tag{11.2.49}$$

При $y = 0$ $\eta_1 = 1$, $c'_ж = c'_{0ж}$, $T_ж = T_{0ж}$. (11.2.50)

При $y = R$ $\eta_2 = 1$, $c'_г = c'_{0г}$, $T_г = T_{0г}$. (11.2.51)

При $y = h_0$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0, \quad T_ж = T_г = T, \quad c'_г = [R_1] c'_ж + \mathbf{P}'_1 \cdot T + \mathbf{P}'_2, \tag{11.2.52}$$

$$\ulcorner D'_г \lrcorner \frac{\partial c'_г}{\partial \eta_2} = -\frac{R - h_0}{h_0} [R_2] \ulcorner D'_ж \lrcorner \frac{\partial c'_ж}{\partial \eta_1},$$

$$\lambda_г \frac{\partial T_г}{\partial \eta_2} = -\frac{R - h_0}{h_0} \lambda_ж \frac{\partial T_ж}{\partial \eta_1},$$

где

$$[R_1] = [G]^{-1} \ulcorner m \lrcorner [L], \quad [R_2] = [G]^{-1} [L], \quad \mathbf{P}'_1 = [G]^{-1} \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}'_2 = [G]^{-1} \mathbf{P}_2. \tag{11.2.53}$$

Решение уравнений (11.2.45), (11.2.47) имеет вид:

$$c'_{ж\,i} = A_{1i} + B_{1i} \int_0^{z_{1i}} \exp(-\omega^2/d\omega, \quad c'_{г\,i} = A_{2i} + B_{2i} \int_0^{z_{2i}} \exp(-\omega^2) d\omega,$$

$$T_ж = a_1 + b_1 \int_0^{z_3} \exp(-\omega^2) d\omega, \quad T_г = a_2 + b_2 \int_0^{z_4} \exp(-\omega^2) d\omega, \tag{11.2.54}$$

где

$$z_{1i} = \eta_1/2\sqrt{\gamma_{ж\,i} x}; \quad z_{2i} = \eta_2/2\sqrt{\gamma_{г\,i} x},$$

$$z_3 = \eta_1/2\sqrt{\gamma_{Tж} x}; \quad z_4 = \eta_2/2\sqrt{\gamma_{Tг} x},$$

$A_{1i}, B_{1i}, A_{2i}, B_{2i}, i = 1, 2, \ldots, n-1; a_1, b_1, b_2, a_2$ — константы.

Для определения констант используем граничные условия (11.2.49),

(11.2.52) и получим

$$a_1 = a_2 = a = T_{0ж} - \varphi\Delta T_0,\ b_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varphi\Delta T_0,\ b_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\varphi - 1)\Delta T_0, \tag{11.2.55}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{c}'_{0ж} - [\Phi](\mathbf{d} + \mathbf{P}'_1 \cdot a + \mathbf{P}'_2),\ \mathbf{B}_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[\Phi](\mathbf{d} + \mathbf{P}'_1 \cdot a + \mathbf{P}'_2),$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{c}'_{0г} + \sqrt{u_ж/u_г}\,[R_3][\Phi](\mathbf{d} + \mathbf{P}'_1 \cdot a + \mathbf{P}'_2), \tag{11.2.56}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{u_ж/u_г}\,[R_3][\Phi](\mathbf{d} + \mathbf{P}'_1 \cdot a + \mathbf{P}'_2),$$

где

$$\varphi = \left(\sqrt{\frac{u_ж}{u_г}}\,\frac{\lambda_ж}{\lambda_г}\sqrt{\frac{\kappa_г}{\kappa_ж}} + 1\right)^{-1},\ \Delta T_0 = T_{0ж} - T_{0г},$$

$$[\Phi] = \sqrt{\frac{u_ж}{u_г}}\,[G]^{-1}[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5}([L] + [R_1])^{-1},$$

$$\mathbf{d} = ([R_1]\mathbf{c}'_{0ж} - \mathbf{c}'_{0г}).$$

Обратный переход к реальным концентрациям $\mathbf{c}_ж$ и $\mathbf{c}_г$ осуществляется при помощи формул (11.2.46).

Обозначим

$$S'_{жi}(x, \eta_1) = \int_0^{z_{1i}} \exp(-\omega^2)d\omega,\ S'_{гi}(x, \eta_2) = \int_0^{z_{2i}} \exp(-\omega^2)d\omega,$$

$$S_{Tж}(x, \eta_1) = \int_0^{z_3} \exp(-\omega^2)d\omega,\ S_{Tг}(x, \eta_2) = \int_0^{z_4} \exp(-\omega^2)d\omega. \tag{11.2.57}$$

Тогда после матричных преобразований получим

$$\mathbf{c}_ж(x, \eta_1) = \mathbf{c}_{0ж} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}[S_ж(x, \eta_1)] - \ulcorner I \lrcorner\right)[T]^{-1}(\Delta\mathbf{c}_0)_T, \tag{11.2.58}$$

$$\mathbf{c}_г(x, \eta_2) = \mathbf{c}_{0г} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}[S_г(x, \eta_2)] - \ulcorner I \lrcorner\right)(\ulcorner m \lrcorner[T]^{-1} - \ulcorner I \lrcorner)(\Delta\mathbf{c}_0)_T, \tag{11.2.59}$$

$$T_ж(x, \eta_1) = T_{0ж} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}S_ж(x, \eta_1) - 1\right)\varphi\Delta T_0, \tag{11.2.60}$$

$$T_г(x, \eta_2) = T_{0г} + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}S_{Tг}(x, \eta_2) - 1\right)(\varphi - 1)\Delta T_0, \tag{11.2.61}$$

где $\ulcorner I \lrcorner$ – единичная матрица,

$$[S_ж(x, \eta_1)] = [L]\ulcorner S'_ж \lrcorner[L]^{-1},\ [S_г(x, \eta_2)] = [G]\ulcorner S'_г \lrcorner[G]^{-1},$$

$$[T] = \sqrt{\frac{u_ж}{u_г}}\,[D_г]^{-0,5}[D_ж]^{0,5} + \ulcorner m \lrcorner,\ (\Delta\mathbf{c}_0)_T = \ulcorner m \lrcorner\mathbf{c}_{0ж} - \mathbf{c}_{0г} + \mathbf{P}_1(T_{0ж} - \varphi\Delta T_0) + \mathbf{P}_2.$$

Формулы (11.2.58)–(11.2.61) дают возможность вычислить значения концентраций компонентов и температур смеси в жидкой и газовой фазах в любой точке аппарата, т.е. при $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \eta_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta_2 \leqslant 1$.

Чтобы рассчитать потоки массы компонентов, продифференцируем первую из формул (11.2.54) в точке $\eta_1 = 0$. Тогда

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{h_0} \ulcorner D'_{ж} \urcorner \frac{\partial c'_{ж}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1 = 0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_{ж}}{x}} (\ulcorner D'_{ж} \urcorner)^{0,5} \mathbf{B}_1 .$$

Воспользовавшись формулой (11.2.56) для $\mathbf{B}_1$ и выполнив обратный переход к потокам $\mathbf{J}$, получим

$$\mathbf{J} = [L]\,\mathbf{J}' = \sqrt{\frac{u_{ж}}{\pi x}}\,[D_{ж}]^{0,5}\,[T]^{-1}(\Delta c_0)_T . \qquad (11.2.62)$$

Для расчета потоков тепла продифференцируем третью из формул (11.2.54). Тогда

$$q = \frac{1}{h_0}\lambda_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial \eta_1}\Big|_{\eta_1 = 0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_{ж}}{x}}\frac{\lambda_{ж}}{\sqrt{\kappa_{ж}}} b_1 = \sqrt{\frac{u_{ж}}{\pi x}}\frac{\lambda_{ж}}{\sqrt{\kappa_{ж}}}\varphi \Delta T_0 . \qquad (11.2.63)$$

Эквивалентные формулы для расчета потоков компонентов и потока тепла можно получить и из уравнений для газовой фазы.

Преобразуя равенства (11.2.62) и (11.2.63), получим зависимости для потоков массы и тепла в форме

$$\mathbf{J} = [K(x)]\,(\Delta c_0)_T, \quad q = K_T(x)\Delta T_0, \qquad (11.2.64)$$

где матрица коэффициентов массопередачи $[K(x)]$ и коэффициент теплопередачи $K_T(x)$ выражаются формулами, соответствующими соотношениям аддитивности фазовых сопротивлений массо- и теплоотдаче:

$$[K(x)]^{-1} = [\beta_{г}(x)]^{-1} + \ulcorner m \urcorner [\beta_{ж}(x)]^{-1}, \qquad (11.2.65)$$

$$K_T^{-1}(x) = \alpha_{г}^{-1}(x) + \alpha_{ж}^{-1}(x),$$

$$[\beta_{г}(x)] = \sqrt{\frac{u_{г}}{\pi x}}\,[D_{г}]^{0,5},\ [\beta_{ж}(x)] = \sqrt{\frac{u_{ж}}{\pi x}}\,[D_{ж}]^{0,5}, \qquad (11.2.66)$$

$$\alpha_{г}(x) = \sqrt{\frac{u_{г}}{\pi x}}\frac{\lambda_{г}}{\sqrt{\kappa_{г}}},\quad \alpha_{ж}(x) = \sqrt{\frac{u_{ж}}{\pi x}}\frac{\lambda_{ж}}{\sqrt{\kappa_{ж}}}, \qquad (11.2.67)$$

где $[\beta_{ж}(x)]$, $[\beta_{г}(x)]$ – матрицы коэффициентов массоотдачи; $\alpha_{ж}(x)$, $\alpha_{г}(x)$ – коэффициенты теплоотдачи жидкой и газовой фаз.

Таким образом, предложенный метод дает возможность рассчитать поля концентраций компонентов и температур (формулы (11.2.58)–(11.2.61)), а также определить распределение потоков массы и тепла, коэффициентов массо- и теплопереноса по высоте аппарата (формулы (11.2.64)–(11.2.67)).

§ 11.3. ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС (противоток)

Двухфазный тепломассоперенос при противоточном пленочном течении контактирующих фаз (пленка жидкости–газ (пар)) имеет особенность в постановке задачи. Эта особенность в том, что на входе в контактное устройство заданными считаются параметры первой (жидкой) фазы. Параметры второй (газовой) фазы должны быть определены из решения задачи. Они считаются известными только на выходе первой фазы из контактного устройства. Такая постановка задачи отвечает реальному противоточному массопереносу или тепломассопереносу и требует разработки метода, характерного только для противоточного тепломассопереноса.

Особенность этого метода диктуется также физикой процесса: первая фаза под действием сил гравитации стекает вниз, а вторая движется под действием приложенных извне сил против сил гравитации. Если противоточный тепломассоперенос рассматривать в одной системе координат, в плоскости которой находятся обе фазы, и если предположить, что первая фаза движется вниз с положительным значением среднерасходовой скорости, то среднерасходовая скорость второй фазы в этой системе координат должна принимать отрицательное значение. Поскольку расчет противоточного тепломассопереноса базируется на решениях уравнений параболического типа, то отрицательное значение среднерасходовой скорости второй фазы изменит тип уравнений, что приведет к дополнительным трудностям расчета противоточного тепломассопереноса, которые можно избежать с помощью применения численных методов.

Эти трудности значительно возрастут при расчете тепломассопереноса в многокомпонентных смесях. В данном параграфе метод изложен на примере двухфазного тепломассопереноса в бинарных системах, имея в виду, что он может быть распространен также и на многокомпонентные смеси.

Для того чтобы тип уравнений был одним и тем же (параболическим), ось x_1 направим в сторону движения жидкой фазы, ось y_1 – от стенки канала к центру, а оси x_2, y_2 направим противоположно осям x_1, y_1.

Предполагается, что пленки жидкости и газа движутся ламинарно, законы изменения скоростей в фазах известны, физико-химические свойства среды постоянны, диссипативные члены в уравнениях энергии незначительны и ими можно пренебречь, источниковые члены в уравнениях переноса вещества и тепла отсутствуют.

При этих предположениях система уравнений конвективного переноса вещества и энергии примет вид [267]

$$u_i(y_i)\frac{\partial \widetilde{c}_i}{\partial x_i} = D_i\frac{\partial^2 \widetilde{c}_i}{\partial y_i^2}, \qquad (11.3.1)$$

$$u_i(y_i)\frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial x_i} = \kappa_i\frac{\partial^2 \widetilde{T}_i}{\partial y_i^2}, \quad \text{где } i = 1, 2, \qquad (11.3.2)$$

с начальными и граничными условиями:

сверху, на входе в канал жидкости, т.е.

$$\text{при } x_1 = 0 \quad \widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_{01}; \quad \widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_{01}; \qquad (11.3.3)$$

снизу, на входе газа, т.е.

при $x_2 = 0$ $\widetilde{c}_2 = \widetilde{c}_{02}$; $\widetilde{T}_2 = \widetilde{T}_{02}$; (11.3.4)

на стенке канала

при $y_1 = 0$ $\dfrac{\partial \widetilde{c}_1}{\partial y_1} = 0$; (11.3.5)

$\widetilde{T}_1 = T_{\text{ст}}$ (11.3.6)

на вертикальной оси канала

при $y_2 = 0$ $\dfrac{\partial \widetilde{c}_2}{\partial y_2} = 0$; $\dfrac{\partial \widetilde{T}_2}{\partial y_2} = 0$; (11.3.7)

на поверхности раздела фаз при $y_1 = h_0$ и $y_2 = R - h_0$ соблюдаются условия термодинамического равновесия фаз

$\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2 = \widetilde{T}$; (11.3.8)

$\widetilde{c}_1 = k_0(\widetilde{T})\widetilde{c}_2 + k_1(\widetilde{T})$, (11.3.9)

а также материального и теплового балансов

$$D_1 \partial \widetilde{c}_1 / \partial y_1 = -D_2 \partial \widetilde{c}_2 / \partial y_2 = J_{\text{гр}}; \lambda_1 \partial \widetilde{T}_1 / \partial y_1 = -\lambda_2 \partial \widetilde{T}_2 / \partial y_2 + J_{\text{гр}} r_A, \quad (11.3.10)$$

где h_0 – толщина пленки; R – полуширина канала; λ_i, κ_i, D_i, $i = 1,2$ – коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и диффузии; $\widetilde{c}_i, \widetilde{T}_i$, $i = 1,2$ – концентрации и температуры в фазах; $\widetilde{c}_{01}$, $\widetilde{T}_{01}$ – концентрация и температура на входе в канал жидкой пленки; $\widetilde{c}_{02}$, $\widetilde{T}_{02}$ – концентрация и температура на входе газа в канал; $k_0(\widetilde{T})$, $k_1(\widetilde{T})$ – коэффициенты фазового равновесия.

Система уравнений (11.3.1), (11.3.2) с начальными и граничными условиями (11.3.3) – (11.3.10) описывает совместный тепломассоперенос при двухфазной ламинарной абсорбции в режиме противоточного движения фаз. Решение этой системы позволяет получить реальные поля концентраций и температур в аппарате и на их основе рассчитать его эффективность.

Задача исследована для течения со средней скоростью, хотя примененный метод решения пригоден для любого заданного профиля скорости.

Коэффициенты равновесной зависимости (11.3.9) зададим следующими выражениями:

$k_0(\widetilde{T}) = A$; $k_1(\widetilde{T}) = B\widetilde{T} + G$. (11.3.11)

С учетом (11.3.11) уравнение (11.3.9) приводится к виду

$\widetilde{c}_1 = A\widetilde{c}_2 + B\widetilde{T} + G$. (11.3.12)

Введем безразмерные переменные с помощью соотношений

$\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_{01} + A(\widetilde{c}_{02} - (\widetilde{c}_{01} - B\widetilde{T}_{02} - G)/A)c_1$;

$\widetilde{c}_2 = (\widetilde{c}_{01} - B\widetilde{T}_{02} - G)/A + (\widetilde{c}_{02} - (\widetilde{c}_{01} - B\widetilde{T}_{02} - G)/A)\,c_2$;

$\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_{01} + (\widetilde{T}_{02} - \widetilde{T}_{01})T_1$; $\widetilde{T}_2 = (\widetilde{T}_{02} - \widetilde{T}_{01})T_2 + \widetilde{T}_{01}$;

$u_1 = u_{01}\bar{u}_1$; $u_2 = u_{02}\bar{u}_2$;

$$y_1 = h_0\eta_1 \; ; \quad y_2 = (R - h_0)\eta_2 \; ; \quad x_1 = h_0^2 u_{01} z_1 / D_1 \; ;$$
$$x_2 = h_0^2 u_{01} z_2 / D_1 \; ,$$

где u_{01}, u_{02} – среднерасходовые скорости жидкой и газовой фаз. Тогда система уравнений (11.3.1), (11.3.2) преобразуется следующим образом:

$$\bar{u}_1 \frac{\partial c_1}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta_1^2} \; ; \quad \bar{u}_2 \beta^2 \frac{\partial c_2}{\partial z_2} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta_2^2} \; ;$$

$$\frac{\bar{u}_1}{\mathrm{Le}_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta_1^2} \; ; \quad \bar{u}_2 \beta_1^2 \frac{\partial T_2}{\partial z_2} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta_2^2} \; , \qquad (11.3.14)$$

а начальные и граничные условия (11.3.3) – (11.3.8), (11.3.10) – (11.3.12) принимают вид:

при $z_1 = 0$ $c_1 = 0$; $T_1 = 0$; при $z_2 = 0$ $c_2 = 1$; $T_2 = 1$; (11.3.15)

при $\eta_1 = 0$ $\dfrac{\partial c_1}{\partial \eta_1} = 0$; $T_1 = T^*$, (11.3.16)

где

$$T^* = (T_{\text{ст}} - \tilde{T}_{01})/(\tilde{T}_{02} - \tilde{T}_{01}) \; ;$$

при $\eta_2 = 0$ $\dfrac{\partial c_2}{\partial \eta_2} = 0$; $\dfrac{\partial T_2}{\partial \eta_2} = 0$; (11.3.17)

при $\eta_1 = \eta_2 = 1$ $T_1 = T_2$; $c_1 = c_2 + B^*(T_2 - 1)$; (11.3.18)

$$\frac{\partial c_2}{\partial \eta_2} + \beta^2 \epsilon \frac{\partial c_1}{\partial \eta_1} = 0, \qquad (11.3.19)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \eta_2} + \varphi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1} = -\varphi_2 \frac{\partial c_2}{\partial \eta_2}$$

где

$$B^* = B(\tilde{T}_{02} - \tilde{T}_{01})/(A\tilde{c}_{02} - \tilde{c}_{01} + B\tilde{T}_{02} + G); \qquad (11.3.20)$$

$$\varphi_1 = (\lambda_1/\lambda_2)((R - h_0)/h_0); \qquad (11.3.21)$$

$$\varphi_2 = (A\tilde{c}_{02} - \tilde{c}_{01} + B\tilde{T}_{02} + G)D_2 r_A / \lambda_2 A(\tilde{T}_{02} - \tilde{T}_{01}) \qquad (11.3.22)$$

где

$$\beta^2 = (u_{02}D_1)/(u_{01}D_2)((R - h_0)/h_0)^2; \quad \beta_1^2 = \beta^2/\mathrm{Le}_2 \; ;$$

$\epsilon = (u_{01}h_0)/(u_{02}(R - h_0))$; Le_1, Le_2 – числа Льюиса для жидкой и газовой фаз; r_A – теплота абсорбции.

Полученная система уравнений (11.3.14) с начальными и граничными условиями (11.3.15) – (11.3.19) решена численно методом, предложенным в [244]. Расчет производится по итерационной схеме, при этом на каждой итерации выполняется пересчет граничных значений переменных с использованием уравнений (11.3.18), (11.3.19). Сопряжение решений проводится

в соответствующих один другому сечениях

$$i_1 = N - i_2,$$

где N – число сечений по высоте контактного устройства; i_1 – номер сечения в системе координат (z_1, η_1) (сверху вниз); i_2 – номер сечения в системе координат (z_2, η_2) (снизу вверх).

При достижении заданной точности вычисляются локальные значения концентраций и температур в фазах, их среднеинтегральные значения в каждом сечении, определяемые формулами

$$\bar{c}_1(z_1) = \int_0^1 c_1(z_1, \eta_1)d\eta_1; \quad \bar{T}_1(z_1) = \int_0^1 T_1(z_1, \eta_1)d\eta_1;$$
$$\bar{c}_2(z_2) = \int_0^1 c_2(z_2, \eta_2)d\eta_2; \quad \bar{T}_2(z_2) = \int_0^1 T_2(z_2, \eta_2)d\eta_2, \qquad (11.3.23)$$

а также значения граничных потоков массы и тепла, различные кинетические характеристики процесса и т.п.

Анализ результатов решения задачи двухфазного сопряженного тепломассообмена показал, что существует некоторая аналогия между этим решением и решением задачи двухфазного массообмена (см. гл. 10). Эта аналогия заключается в соответствующем влиянии параметров β^2 и ϵ на изменение характеристик процесса. Так, если представить решение задачи в зависимости от положения точки на координатной плоскости ($X = \lg\epsilon$, $Y = \lg(1/\epsilon\beta^2)$, то можно сделать следующие выводы. В левом верхнем углу плоскости (при $\epsilon \leqslant 10^{-1}$ и $\epsilon\beta^2 \leqslant 10^{-1}$) двухфазная задача вырождается в однофазную, так как в этом случае сопротивление тепломассопередаче практически сосредоточено в жидкой фазе. В правом нижнем углу плоскости (при $\epsilon \geqslant 10$ и $\epsilon\beta^2 \geqslant 10$) сопротивление сосредоточено в газовой фазе, что также приводит к вырождению двухфазной задачи в однофазную. В левом нижнем и правом верхнем углах плоскости (X, Y) решение практически зависит только от параметра $\epsilon\beta^2$. Поэтому, прежде чем пользоваться решениями уравнений совместного двухфазного тепломассопереноса, необходимо определить параметры ϵ и $\epsilon\beta^2$, т.е. найти точку в плоскости (X, Y). В зависимости от нахождения этой точки следует пользоваться решением или однофазной (сопротивление тепломассопереносу сосредоточено в какой-либо одной фазе), или двухфазной задачи.

Особый интерес при анализе решения задачи двухфазной неизотермической абсорбции представляло исследование температурного влияния на массообмен. При наложении на исходную систему уравнений (11.3.1), (11.3.2) граничного температурного условия (11.3.6) (изотермическая стенка) это влияние оказалось незначительным. Такое явление вполне соответствует физической картине процесса совместного тепломассопереноса, так как условие постоянства температуры стенки контактного устройства при выделении дополнительной теплоты растворения в жидкой фазе (уравнение (11.3.10)) может поддерживаться лишь при отведении тепла через стенку аппарата. Поэтому температура жидкой фазы практически сохраняет постоянное значение, близкое к $T_{ст}$, и, по сути, не влияет на массообмен.

Иная картина наблюдается при замене граничного условия (11.3.6) на условие, соответствующиее адиабатическому тепломассопереносу, т.е.

$$\partial \widetilde{T}_1 / \partial y_1 = 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0$$

или в безразмерном виде

$$\partial T_1 / \partial \eta_1 = 0 \quad \text{при} \quad \eta_1 = 0. \qquad (11.3.24)$$

Такой закон изменения температуры на стенке аппарата подразумевает возможность накопления тепла в жидкой фазе, увеличения ее температуры и, следовательно, воздействия на равновесные и реальные значения концентраций в фазах.

Исследование результатов расчета неизотермической абсорбции показало, что тепловое влияние на массообмен проявляется в основном в зависимости от двух параметров $-B^*$ и φ_2 (см. (11.3.20), (11.33.22)). Первый из них, как это следует из (11.3.18), характеризует величину температурного вклада в равновесную зависимость. При его увеличении влияние температуры границы раздела на поверхностные концентрации жидкой и газовой фаз возрастает.

Другим параметром, характеризующим влияние теплопереноса на массообмен при абсорбции, является параметр φ_2, пропорциональный выделяющейся в жидкой фазе теплоте абсорбции (11.3.22). Увеличение φ_2 приводит к росту потока тепла в жидкую фазу и при наличии граничного условия (11.3.24) – к разогреву жидкой пленки.

Два рассмотренных эффекта влияния температуры на концентрации в зависимости от параметров B^* и φ_2 имеют различную физическую природу. Поэтому одновременное увеличение φ_2 и абсолютного значения B^* приводит к ощутимому изменению температурных профилей по сечению и длине контактного устройства.

Из анализа решения задачи следует, что влияние теплоты абсорбции на концентрационные зависимости проявляется в области выполнения неравенства $\beta\sqrt[3]{\epsilon} = 1$. Если же выполняется неравенство $\beta\sqrt[3]{\epsilon} < 1$, то влиянием теплоты абсорбции на массообмен можно пренебречь.

§ 11.4. МАССОПЕРЕНОС, ОСЛОЖНЕННЫЙ ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ

На практике часто встречаются случаи, когда многокомпонентный перенос вещества происходит в смеси, компоненты которой могут вступать один с другим в химические взаимодействия. И если при отсутствии химических реакций перекрестные эффекты имеют диффузионную природу, то в подобных диффузионно-реакционных процессах приходится сталкиваться уже с двумя видами перекрестных взаимодействий компонентов смеси: диффузионным, который зависит от соотношения локальных градиентов концентраций, и химическим, который возникает в результате химических реакций и зависит от соотношения локальных концентраций компонентов. Если же совмещенный диффузионно-реакционный процесс происходит в движущейся среде, то на описанные выше явления накладывается еще и конвективный перенос массы вследствие движения.

Создание наиболее точных, научно обоснованных методов расчета массообменных процессов связано с использованием аппарата дифференциальных уравнений математической физики. Для многокомпонентных систем эти уравнения имеют матрично-векторную форму и являются связанными, что делает их решение трудноосуществимым. В то же время именно матричный характер уравнений позволяет учесть взаимное влияние различных явлений переноса одного на другой.

С этой точки зрения наиболее точное описание массопереноса, происходящего в химически реагирующей движущейся многокомпонентной системе, дает матрично-векторное уравнение конвективной диффузии с источниковым членом:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}) = \nabla([D]\nabla \mathbf{c}) + \mathbf{r}, \qquad (11.4.1)$$

где $\mathbf{c}$ – вектор-столбец, содержащий мольные концентрации компонентов смеси; $\mathbf{U}$ – вектор скорости движения многокомпонентной смеси; $\mathbf{r}$ – вектор-столбец, содержащий скорости образования компонентов вследствие химических взаимодействий; $[D]$ – матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии.

В предположении, что матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии $[D]$ не зависит от диффузии [254, 255], а скорость движения смеси постоянна ($U = \text{const}$), уравнение (11.4.1) несколько упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + U \cdot \nabla \mathbf{c} = [D]\nabla^2 \mathbf{c} + \mathbf{r}. \qquad (11.4.2)$$

Решение уравнения конвективной диффузии (11.4.2) в полной постановке даже для бинарных смесей (т.е. в скалярном случае) трудноосуществимо. Поэтому попытки различных исследователей решить его в матричном виде ограничивались случаем линейной кинетики, одновременным переносом вещества и рамками пленочной теории:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} = [D]\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial y^2} - [k]\mathbf{c}, \qquad (11.4.3)$$

где $[k]$ – матрица констант скоростей химических реакций. И все же, несмотря на довольно существенные упрощения, при решении уравнения (11.4.3) потребовались дальнейшие допущения. Так, в [268, 269] исследовалась одновременная многокомпонентная диффузия при отсутствии конвективного члена ($U = 0$) и симметричных граничных условий. Ряд работ связан с попытками использовать вместо матрицы коэффициентов многокомпонентной диффузии так называемые эффективные коэффициенты. Однако, как показано в [270], это упрощение является слишком грубым и не позволяет учесть характерные для многокомпонентных смесей явления.

В настоящем параграфе рассматривается гравитационное стекание по гладкой стенке контактного устройства многокомпонентной изотермической жидкой пленки, в которой происходят многокомпонентная диффузия и химические реакции между компонентами [268]. Такое явление при обычных допущениях может быть описано двумерным уравнением

конвективной диффузии в матрично-векторном виде:

$$u\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} = [D]\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial y^2} - [k]\mathbf{c}, \qquad (11.4.4.)$$

где u – проекция скорости на ось x.

Если смесь состоит из n компонентов, то порядок входящих в уравнение (11.4.4) величин равен $n-1$.

Источниковый член (11.4.4) взят в линейной форме, поскольку в работе [269] показано, что кинетика химических реакций любого порядка может быть сведена к линейной относительно состава, а также предложен один из возможных способов такого сведения.

Граничные условия к уравнению (11.4.4), описывающие процесс, выглядят следующим образом:

на входе в контактное устройство

$$x = 0 \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_0(y); \qquad (11.4.5)$$

на стенке устройства (условие непроницаемости)

$$y = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} = 0; \qquad (11.4.6)$$

на поверхности пленки (условие равновесия)

$$y = h_0 \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_l, \qquad (11.4.7)$$

где h_0 – толщина пленки; $\mathbf{c}_l$ – вектор-столбец, содержащий мольные равновесные концентрации многокомпонентной смеси. Таким образом, поставленная задача сводится к решению матрично-векторного уравнения (11.4.4) с граничными условиями (11.4.5)–(11.4.7).

В работах [268, 269] матричным методом разделения переменных решено уравнение нестационарной одномерной многокомпонентной диффузии с линейным источниковым членом при симметричных краевых условиях. Поскольку уравнение (11.4.4) по своей структуре сходно с уравнением нестационарной одномерной диффузии, можно воспользоваться этим методом для аналитического решения, учитывая при этом, что граничные условия (11.4.5)–(11.4.) приводят к несколько иной формулировке краевой задачи.

Чтобы упростить граничное условие (11.4.7), сделаем замену

$$\mathbf{B} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_l \qquad (11.4.8)$$

и учтем, что на поверхности пленки химические реакции отсутствуют. Тогда задача (11.4.4)–(11.4.7) преобразуется к виду

$$u\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = [D]\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} - [k]\mathbf{B}, \qquad (11.4.9)$$

$$x = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(y) = \mathbf{c}_0(y) - \mathbf{c}_l, \qquad (11.4.10)$$

$$y = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = 0; \quad y = h_0 \quad \mathbf{B} = 0. \qquad (11.4.11)$$

Следуя методу разделения переменных, запишем

$$\mathbf{B} = [X(x)]\,[Y(y)]\,\mathbf{b}', \tag{11.4.12}$$

где $[X(x)]$, $[Y(y)]$ – переменные квадратные матрицы порядка $n-1$; $\mathbf{b}'$ – вектор произвольных констант того же порядка.

Подставим (11.4.12) в (11.4.9):

$$u\frac{\partial[X(x)]}{\partial x}[Y(y)]\,\mathbf{b}' = [D]\,[X(x)]\frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2}\,\mathbf{b}' - [k]\,[X(x)]\,[Y(y)]\,\mathbf{b}'. \tag{11.4.13}$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{b}'$ его можно сократить. Тогда в (11.4.13) останутся только матрицы, и, умножая его слева на $[X(x)]^{-1}[D]^{-1}$, а справа на $[Y(y)]^{-1}$, получим

$$u[X(x)]^{-1}[D]^{-1}\frac{\partial[X(x)]}{\partial x} = \frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2}[Y(y)]^{-1} - [X(x)][D]^{-1}[k][X(x)],$$

откуда

$$[X(x)]^{-1}[D]^{-1}\left\{u\frac{\partial[X(x)]}{\partial x} + [k]\,[X(x)]\right\} = \frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2}[Y(y)]^{-1} = -[A]. \tag{11.4.14}$$

Матричное уравнение (11.4.14) представляет собой уравнение с разделенными переменными, поэтому обе его части равны постоянной матрице $-[A]$, в результате чего (11.4.14) распадается на два уравнения:

$$\frac{d^2[Y(y)]}{dy^2} + [A]\,[Y(y)] = 0; \tag{11.4.15}$$

$$u\frac{d[X(x)]}{dx} + [k]\,[X(x)] + [D]\,[X(x)]\,[A] = 0. \tag{11.4.16}$$

Подстановка (11.4.12) в граничные условия (11.4.11) дает краевые условия для уравнения (11.4.15)

$$y = 0 \quad \frac{d[Y(y)]}{dy} = 0; \quad y = h_0 \quad [Y(y)] = 0. \tag{11.4.17}$$

Таким образом, мы приходим к задаче о собственных значениях (11.4.15), (11.4.17). Несмотря на матричную форму этой задачи, можно показать, что удовлетворяющие (11.4.15) характеристические матрицы $[A]_k$ будут иметь относительно простой вид:

$$[A]_k = A_k \lceil I \rfloor, \tag{11.4.18}$$

где A_k соответствуют собственным значениям аналогичной скалярной задачи:

$$A_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \frac{\pi^2}{h_0^2}. \tag{11.4.19}$$

Следовательно, частные уравнения (11.4.15), удовлетворяющие краевым

условиям (11.4.17), выглядят следующим образом:

$$[Y(y)]_k = \cos(\sqrt{A_k}\,y)[P]_k, \tag{11.4.20}$$

где $[P]_k$ — произвольные постоянные матрицы порядка $n-1$.

С учетом полученных соотношений (11.4.18), (11.4.19) уравнение (11.4.16) преобразуется к виду

$$u\frac{d[X(x)]}{dx} + \{[k] + A_k[D]\}[X(x)] = 0, \tag{11.4.21}$$

решение которого для каждого значения k

$$[X(x)]_k = \exp\left\{-([k] + A_k[D]\frac{x}{u}\right\}[Q]_k, \tag{11.4.22}$$

где $[Q]_k$ — произвольные постоянные матрицы.

Объединяя полученные частные решения (11.4.20) и (11.4.22) в соответствии с (11.4.12) и суммируя по всем k, получаем общее решение задачи (11.4.9)–(11.4.11)

$$\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\sqrt{A_k}\,y)\exp\left\{-[k] + A_k[D]\frac{x}{u}\right\}\mathbf{b}_k, \tag{11.4.23}$$

в котором постоянные векторы определяются при помощи условия (11.4.10):

$$\mathbf{B}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\sqrt{A_k}\,y)\mathbf{b}_k. \tag{11.4.24}$$

Умножая (11.4.24) на $\cos(\sqrt{A_m}y)$ и интегрируя от 0 до h_0, находим

$$\mathbf{b}_k = \frac{2}{h_0}\int_0^{h_0} \mathbf{B}_0(y)\cos(\sqrt{A_k}y)\,dy. \tag{11.4.25}$$

При выводе формулы (11.4.25) использовано свойство ортогональности системы собственных функций $\cos(\sqrt{A_k}y)$, $k = 0, 1, \ldots$ на интервале $[0, h_0]$.

Переходя при помощи (11.4.8) к первоначальной задаче (11.4.4)–(11.4.7), получим ее общее решение [268]

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_l + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\cos(\sqrt{A_k}y)\exp\left\{-([k] + A_k[D]\frac{x}{u}\right\}\frac{2}{h_0}\int_0^{h_0}(\mathbf{c}_0(y') - \right.$$

$$\left. - \mathbf{c}_l)\cos(\sqrt{A_k}y')\,dy'\right], \tag{11.4.26}$$

где A_k определены формулой (11.4.19). Отметим, что в наиболее распространенном на практике случае, когда распределение концентраций на входе в контактное устройство представляет собой постоянную величину ($\mathbf{c}_0(y) = \bar{\mathbf{c}}_0$), соотношение (11.4.26) упрощается:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_l + \frac{2}{h_0}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\sqrt{A_k}y)}{\sqrt{A_k}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-([k] + A_k[D])\frac{x}{u}\right\}\right](\bar{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l). \tag{11.4.27}$$

Полученные решения (11.4.26), (11.4.27) являются прямым матричным обобщением аналогичных результатов для бинарных систем, т.е. для скалярного уравнения диффузии с соответствующими (11.4.5)–(11.4.7) скалярными граничными условиями. Нетрудно убедиться, что эти решения удовлетворяют исходной задаче (11.4.4)–(11.4.7).

Для физически обоснованных граничных условий, замыкающих уравнение конвективной диффузии с источниковым членом, подобные обобщения, к сожалению, возможны лишь в исключительных случаях. Основной причиной этого является необходимость выражать матричные решения через сумму матриц вида $\alpha[D] + \beta[k]$, где α и β – скалярные величины. Действительно, матрицы $[D]$ и $[k]$ в общем случае не обладают свойством коммутативности:

$$[D][k] \neq [k][D]. \tag{11.4.28}$$

Следовательно, этим свойством не обладают и функции от них, в частности, экспоненты, т.е.

$$\exp\{\alpha[D]\}\exp\{\beta[k]\} \neq \exp\{\beta[k]\}\exp\{\alpha[D]\},$$
$$\exp\{\alpha[D]\}\exp\{\beta[k]\} \neq \exp\{\alpha[D] + \beta[k]\}. \tag{11.4.29}$$

Поэтому присутствие в обобщающем выражении произведений матрицы $[D]$ и $[k]$ или произведений различных функций от них в большинстве случаев делает его непригодным в качестве решения уравнения (11.4.4). Как известно, все решения скалярных уравнений диффузии с линейным источником являются сложными функциями исходных параметров, содержащими ряды и интегралы от экспоненциальных и тригонометрических функций. Выразить эти решения через сумму $\alpha D + \beta k$, где D и k – скалярные аналоги матриц $[D]$ и $[k]$ (коэффициент бинарной диффузии и константа скорости химической реакции), крайне затруднительно. Дополнительную сложность вносит и "несимметричность" граничных условий задачи для массопереноса в стекающей пленке жидкости: на стенке контактного устройства всегда граничное условие второго рода (непроницаемость стенки), а на поверхности – граничное условие первого рода (значения поверхностных концентраций компонентов).

Все же в отдельных случаях указанные трудности удается преодолеть. Например, если на поверхности пленки условие равновесия не достигается, то вместо c_l задается некоторое неравновесное (в химическом отношении) значение

$$y = h_0, \quad c = c_s \neq c_l \tag{11.4.30}$$

и уже не удается при помощи подстановки (11.4.8) преобразовать задачу к однородным краевым условиям вида (11.4.11). В этом случае общее решение можно получить, используя принцип суперпозиции решений двух задач более простого вида, аналогично тому, как это делается в теории параболических уравнений при наличии так называемых стационарных неоднородностей. В результате для задачи (11.4.4)–(11.4.6) с условием

на поверхности (11.4.30) получим

$$\mathbf{c} = \mathrm{ch}\{([D]^{-1}[k]^{0,5}y\}\,\mathrm{ch}^{-1}\{([D]^{-1}[k]^{0,5}h_0\}\,\mathbf{c}_s +$$

$$+\frac{2}{h_0}\sum_{k=0}^{\infty}\cos(\sqrt{A_k}y)\exp\{-(A_k[D]+[k]\frac{x}{u}\}\times$$

$$\times\int_0^{h_0}\mathbf{c}_0(y')\cos(\sqrt{A_k}y')\,dy' - \frac{2}{h_0}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\sqrt{A_k}y)}{\sqrt{A_k}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{-(A_k[D]+[k])\frac{x}{u}\}\left(\Gamma_{I_}+\frac{[D]^{-1}[k]}{A_k}\right)^{-1}\right]\mathbf{c}_s. \qquad (11.4.31)$$

Еще один случай, позволяющий обобщить скалярное решение для многокомпонентных систем, массоперенос, осложненный химическими реакциями, в очень тонком слое вблизи поверхности пленки. Уравнение (11.4.4) сохраняется неизменным, а граничные условия преобразуются к виду

$$x = 0,\ y < h_0\quad \mathbf{c} = \overline{\mathbf{c}}_0, \qquad (11.4.32)$$

$$y = h_0,\ x > 0\quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_l. \qquad (11.4.33)$$

При помощи замены переменных (11.4.8) граничное условие на поверхности пленки преобразуется к однородному. Решение этой задачи для скалярного случая можно получить, используя экспоненциальную подстановку, исключающую источниковый член, и известное решение уравнения теплопроводности в полубесконечном стержне. После преобразований получим:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_l + (\overline{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l)\exp\left\{-\frac{x}{u}k\right\}\mathrm{erf}\left\{\frac{\sqrt{u}(h_0-y)}{2\sqrt{Dx}}\right\}. \qquad (11.4.34)$$

В соотношении (11.4.34) обозначения скалярных величин такие же, как у соответствующих векторов и матриц.

Очевидно, что даже для такого относительно несложного выражения матричное обобщение неосуществимо. Причина опять-таки заключается в том, что решение представляет собой произведение двух сомножителей, первый из которых зависит от k, а второй – от D, и, следовательно, при матричном обобщении они не коммутируют.

Чтобы все-таки решить задачу, следует воспользоваться интегральным равенством

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega(h_0-y)}{\omega}\exp\{-\omega^2 Dx\}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{erf}\left\{\frac{\sqrt{u}(h_0-y)}{2\sqrt{Dx}}\right\}. \qquad (11.4.35)$$

Подставив (11.4.35) в (11.4.34), получим

$$c = c_l + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\sqrt{u}(h_0-y)}{\omega}\exp\left\{-\left(\omega^2 D + \frac{k}{u}\right)x\right\}d\omega\right]\times$$

$$\times(\overline{c}_0 - c_l), \qquad (11.4.36)$$

так как это выражение, в котором некоммутирующие сомножители отсутствуют. Используя (11.4.36), переходим к матричному решению:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_l + \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin\omega\sqrt{u}(h_0 - y)}{\omega} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{-(\omega^2[D] + \frac{1}{u}[k])x\right\} d\omega\right](\bar{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l). \qquad (11.4.47)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (11.4.37) удовлетворяет исходной задаче (11.4.4), (11.4.32) и (11.4.33).

При малых длинах контактного устройства формула (11.4.37) представляется более удобной, чем соответствующее решение (11.4.27).

Рассмотрим теперь иной подход к решению задачи (11.4.4) – (11.4.7) [268]. Сделаем замены переменных

$$\mathbf{c} = [A(x)]\mathbf{S}, \quad [A(x)] = \exp\left\{-\frac{1}{u}[k]x\right\}, \qquad (11.4.38)$$

$$y = h_0\eta. \qquad (11.4.39)$$

Тогда уравнение (11.4.4) примет вид

$$u\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} = [\mathbf{B}(x)]\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \eta^2}\frac{1}{h_0^2}, \qquad (11.4.40)$$

где $[\mathbf{B}(x)] = [A(x)]^{-1}[D][A(x)]$,

с граничными условиями

$$x = 0 \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_0(\eta) = [A(0)]^{-1}\mathbf{c}_0(\eta) = \mathbf{c}_0(\eta); \qquad (11.4.41)$$

$$\eta = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} = 0; \quad \eta = 1 \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_l = [A(x)]^{-1}\mathbf{c}_l. \qquad (11.4.42)$$

Поскольку матрицы $[A(x)]$ и $[D]$ не коммутируют (см. (11.4.28)), диагонализация матрицы $[B(x)]$ неосуществима и уравнение (11.4.40) не приводится к несвязанному виду.

Можно, однако, доказать, что для любого фиксированного значения x_a матрица $[B(x_a)]$ диагонализуема, причем ее собственные значения совпадают с собственными значениями матрицы $[D]$.

Действительно, пусть $[L]$ – фундаментальная матрица для $[D]$, т.е.

$$[L]^{-1}[D][L] = \ulcorner D' \urcorner, \qquad (11.4.43)$$

где $\ulcorner D' \urcorner$ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений $[D]$. Рассмотрим произвольную точку x_a. Тогда

$$[B(x_a)] = [A(x_a)]^{-1}[D][A(x_a)]. \qquad (11.4.44)$$

Возьмем в качестве фундаментальной матрицы для $[B(x_a)]$ матрицу

$$[M(x_a)] = [A(x_a)]^{-1}[L]. \qquad (11.4.45)$$

Тогда из (11.4.43) – (11.4.45) получим

$$[M(x_a)]^{-1}[B(x_a)][M(x_a)] = [L]^{-1}[D][L] = \ulcorner\lambda\lrcorner, \tag{11.4.46}$$

что и требовалось.

Чтобы при решении использовать свойство (11.4.46), заменим производную $\partial \mathbf{S}/\partial x$ ее конечно-разностным аналогом:

$$uh_0^2 \frac{\mathbf{S}(x_a + \Delta x, \eta) - \mathbf{S}(x_a, \eta)}{\Delta x} = [B(x_a)] \frac{d^2\mathbf{S}(x_a + \Delta x, \eta)}{d\eta^2}. \tag{11.4.47}$$

При $\Delta x \to 0$ уравнение (11.4.47) переходит в уравнение (11.4.40).

Теперь можно воспользоваться свойством (11.4.46) и, умножив уравнение (11.4.47) слева на матрицу $[M(x_a)]^{-1}$, привести его к несвязанному виду

$$\frac{uh_0^2}{\Delta x}\{\mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta) - \mathbf{S}'(x_a, \eta)\} = \ulcorner\lambda\lrcorner \frac{d^2\mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta)}{d\eta^2}, \tag{11.4.48}$$

где

$$\mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta) = [M(x_a)]^{-1}\mathbf{S}(x_a + \Delta x, \eta). \tag{11.4.49}$$

Граничные условия (11.4.42) преобразуются следующим образом:

$$\eta = 0 \quad \frac{d\mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta)}{d\eta} = 0; \tag{11.4.50}$$

$$\eta = 1 \quad \mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta) = \mathbf{S}'_l = [M(x_a)]^{-1}[A(x_a)]^{-1}\mathbf{c}_l = [L]^{-1}\mathbf{c}_l.$$

Записав уравнение (11.4.48) для i-го компонента и учитывая, что $\lambda_i > 0$, получим

$$\frac{d^2S'_i}{d\eta^2} - a_i^2 S'_i = f_1(\eta), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{11.4.51}$$

где

$$a_i^2 = uh_0^2/\lambda_i\Delta x; \quad f_i(\eta) = -uh_0^2\, S'_i(x_a, \eta)/\lambda_i\Delta x \tag{11.4.52}$$

с граничными условиями

$$\eta = 0 \quad dS'_i/d\eta = 0; \quad \eta = 1 \quad S'_i = S'_{li}. \tag{11.4.53}$$

Таким образом, решение уравнения (11.4.47) сводится к независимому решению для каждого компонента краевой задачи вида (11.4.51) – (11.4.53).

Эта задача решена в настоящей работе с помощью построения функции Грина соответствующей однородной краевой задачи

$$G_i(\eta, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(a_i(\theta - 1))}{a_i\mathrm{ch}(a_i)}\mathrm{ch}(a_i\eta), & 0 \leqslant \eta \leqslant \theta \leqslant 1, \\ \dfrac{\mathrm{ch}(a_i\theta)}{a_i\mathrm{ch}(a_i)}\mathrm{sh}(a_i(\eta - 1)), & 0 \leqslant \theta \leqslant \eta \leqslant 1. \end{cases} \tag{11.4.54}$$

Функция, определенная соотношением (11.4.54), при любом фиксированном значении θ является непрерывной функцией от η и удовлетворяет соответствующим (11.4.53) однородным краевым условиям, т.е.

$$\partial G_i\ (\eta,\ \theta)/\partial\eta|_{\eta\,=\,0} = 0;\quad G_i(\eta, \theta)|_{\eta\,=\,1} = 0.$$

Кроме того, первая производная $G_i\,(\eta, \theta)$ в точке $\eta = \theta$ имеет разрыв первого рода с единичным скачком:

$$\left.\frac{\partial G_i(\eta,\ \theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta\,=\,\theta\,+\,0} = \left.\frac{\partial G_i(\eta,\ \theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta\,=\,\theta\,-\,0} + 1.$$

В точках $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \neq \theta$ первая и вторая производные по η непрерывны.

Наконец, $G_i\,(\eta, \theta)$ как функция от η всюду в $[0, 1]$, за исключением точки $\eta = \theta$, удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 G_i(\eta,\ \theta)}{\partial\eta^2} - a_i^2\, G_i(\eta, \theta) = 0.$$

Таким образом, функция $G_i(\eta, \theta)$, определенная соотношениями (11.4.54), является функцией Грина соответствующей (11.4.51)–(11.4.53) однородной краевой задачи [268], и

$$\frac{\partial^2 G_i(\eta, \theta)}{\partial\eta^2} - a^2_i\, G_i(\eta, \theta) = \delta(\eta - \theta),$$

где $\delta\,(t)$ – дельта-функция Дирака.

Вследствие этого общее решение задачи (11.4.51)–(11.4.53) записывается в виде

$$S'_i(\eta) = \int_0^1 G_i(\eta, \theta)\, f_i(\theta)\, d\theta + S'_{li}\,\frac{\mathrm{ch}(a_i\eta)}{\mathrm{ch}(a_i)}\ ; \qquad (11.4.55)$$

$i = 1, 2, ..., n - 1.$

Получив, таким образом, вектор решений $\mathbf{S}'(x_a + \Delta x, \eta)$, можно определить новые значения $f_i(\eta)$, соответствующие $x = x_a + \Delta x$, и перейти к определению решения задачи для $x = x_a + 2\Delta x$,

Общая схема метода решения выглядит следующим образом.

1. Находим матрицы $[L]$, $\lceil\Lambda\rfloor$, задаем шаг по вертикали и рассчитываем $a_i^2 = (uh_0^2/\Delta x \cdot \lambda_i)$; $i = 1, 2, ..., n - 1$.

2. Начальное распределение концентраций $\mathbf{c}_0(\eta)$ известно (см. (11.4.5), (11.4.41)). Вычисляем $\mathbf{S}'(0, \eta) = [L]^{-1}\mathbf{c}_0(\eta)$;

$$f(\eta) = -(uh_0^2/\Delta x)\lceil\Lambda^{-1}\rfloor\ \mathbf{S}'(0,\ \eta).$$

3. В соответствии с формулами (11.4.54), (11.4.55) получаем распределение в сечении $x_1 = \Delta x$ $\mathbf{S}'(x_1\,\eta)$.

4. Затем задаемся полученным распределением $\mathbf{S}'(x_1, \eta)$ как исходным и рассчитываем новые значения $\mathbf{f}(\eta) = -(uh_0^2/\Delta x)\lceil\Lambda\rfloor^{-1}\mathbf{S}'(x_1, \eta)$.

5. По формулам (11.4.54), (11.4.55) получаем распределение в сечении $x_2 = 2\Delta x$ $\mathbf{S}'(x_2, \eta)$ и т.д.

Таким образом, для каждого сечения x_a контактного устройства имеем непрерывное распределение преобразованных концентраций $\mathbf{S}'(x_a, \eta)$, задаваемое формулами (11.4.54), (11.4.55).

Переход к реальным значениям концентраций компонентов осуществляется с помощью соотношений (11.4.38), (11.4.49).

Таким образом, методы решения матрично-векторной задачи (11.4.4)–(11.4.7) [268] дают математическое описание массопереноса в многокомпонентной химически реагирующей движущейся жидкой пленке. Аналитическое решение (11.4.26) определяет непрерывное поле концентраций компонентов в жидкой фазе, т.е. значения вектора $\mathbf{c}$ для любой точки (x, y), $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant h_0$. Зная распределения концентраций и применяя операции дифференцирования или интегрирования, можно получить различные массообменные характеристики процесса.

Например, продифференцируем (11.4.26) по y в точке $y = h_0$:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}\right|_{y=h_0} = -\sum_k^{\infty} [(-1)^k \sqrt{A_k} \exp\left\{-(A_k[D] + [k])\frac{x}{u}\right\} \times$$

$$\times \frac{2}{h_0} \int_0^{h_0} (\mathbf{c}_0(y') - \mathbf{c}_l)\cos(\sqrt{A_k}y')\,dy'. \qquad (11.4.56)$$

Используя обобщенный закон Фика, получим из (11.4.56) потоки компонентов смеси на поверхности пленки:

$$\mathbf{J} = \frac{2}{h_0}[D] \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k \sqrt{A_k} \exp\left\{-(A_k[D] + [k])\frac{x}{u}\right\} \times$$

$$\times \int_0^{h_0} (\mathbf{c}_0(y') - \mathbf{c}_l)\cos(\sqrt{A_k}y')\,dy'. \qquad (11.4.57)$$

При постоянной начальной концентрации (11.4.57) упрощается:

$$\mathbf{J} = \frac{2}{h_0}[D]\left[\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-(A_k[D] + [k])\frac{x}{u}\right\}\right](\overline{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l). \qquad (11.4.58)$$

Отметим, что последнее выражение можно получить и непосредственным дифференцированием формулы (11.4.27).

Если характерная длина массопереноса равна L, то, интегрируя выражение для вектора потоков от 0 до L, можно найти его среднее значение. Например, для (11.4.58) получим:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathbf{J}dx = \frac{2u}{Lh_0}[D] \sum_{k=0}^{\infty} (A_k[D] + [k])^{-1} \times$$

$$\times\left[\ulcorner I \urcorner - \exp\left\{-(A_k[D] + [k]\frac{L}{u}\right\}\right](\overline{\mathbf{c}} - \mathbf{c}_l). \qquad (11.4.59)$$

Непосредственное интегрирование формул (11.4.26) и (11.4.27) позволяет найти зависимость средних по сечению концентраций компонентов

от длины участка активного массопереноса x. Если $\mathbf{c}_0(y) = \bar{\mathbf{c}}_0$, то

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_l + \frac{2}{h_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{A_k} \exp\left\{ -(A_k[D] + [k]) \frac{x}{u} \right\} (\bar{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l). \qquad (11.4.60)$$

Выражения для потоков массы компонентов можно вывести и для решения (11.4.37) задачи (11.4.4), (11.4.32) и (11.4.33). Эти потоки имеют вид

$$\mathbf{J} = \frac{2\sqrt{u}}{\pi} [D][\int_0^{\infty} \exp\left\{ -(\omega^2 [D] + \frac{1}{u} [k]) x \right\} d\omega](\bar{\mathbf{c}}_0 - \mathbf{c}_l). \qquad (11.4.61)$$

Более сложные аналитические выражения получаются для случая переноса при неравновесной поверхности пленки, когда используется решение (11.4.31).

Особенность квазианалитического метода решения задачи (11.4.4)–(11.4.7) состоит в том, что решение, полученное этим методом, дает непрерывное распределение компонентов по координате y, в то время как изменение их по координате x будет дискретным, зависящим от сечения к сечению. Дифференцирование соотношения (11.4.55) в точке $y = h_0$ ($\eta = 1$) для каждого i-го компонента и использование формул перехода к реальным концентрациям (11.4.38), (11.4.49) позволяет определить потоки массы компонентов смеси в аналитическом виде. Если же проинтегрировать (11.4.55) по толщине пленки ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$), то можно аналогично получить аналитические выражения для средних по сечению концентраций компонентов.

Для расчета средних параметров по длине активного участка необходимо проводить численное интегрирование.

Анализ методов решения многокомпонентного массопереноса, рассмотренный в настоящем параграфе, позволяет сделать следующие заключения.

С помощью аналитических методов решения задач многокомпонентного массопереноса можно находить распределения концентраций и потоки массы компонентов при условии, что матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии $[D]$ не зависит от пути диффузии, а сами уравнения допускают аналитическое решение.

Квазианалитический метод дает приближенное решение задачи, причем для каждого сечения аппарата распределения концентраций компонентов выражаются аналитической зависимостью, связывающей значения последующего сечения с предыдущим. Этим методом можно определить различные характеристики процесса. Существенным достоинством квазианалитического метода является то обстоятельство, что он дает возможность рассматривать вектор граничных значений $\mathbf{c}_l$ как вектор параметров, зависящих от координаты x. Поэтому элементы вектора $\mathbf{c}_l$ могут быть связаны с аналогичными параметрами различных сопряженных задач, причем уравнения связи включают как концентрации компонентов, так и потоки массы (граничные условия третьего или четвертого рода). Это свойство позволяет рассматривать квазианалитический метод как основу для решения более сложных сопряженных задач [268].

§ 11.5. СОВМЕСТНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС

Совместный тепломассоперенос в ламинарной и волновой пленках жидкости, в пленке жидкости, текущей по поверхности с регулярной шероховатостью, в системах, состоящих из совокупности капель или пузырей, позволил установить единую функциональную зависимость для коэффициентов массообмена (теплообмена) (см. гл. 6). Эта зависимость представлена в виде произведения, один из членов которого равен коэффициенту массообмена (теплообмена) при отсутствии взаимного влияния тепла и массы и, естественно, меняется от модели к модели, а другой член учитывает взаимное влияние тепла и массы, не зависит от типа рассмотренной модели и является общим для всех моделей.

Это обстоятельство указывает на общую закономерность, лежащую в основе тепломассопереноса с учетом взаимного влияния тепла и массы.

Существование единой закономерности в рамках рассмотренной постановки задачи облегчает методику инженерных расчетов совместного тепломассопереноса: нет необходимости проводить решение совместных уравнений переноса энергии и массы, а достаточно найти решение одного из них. Совместное влияние переноса энергии и массы в этом случае можно учесть, умножив полученную из решения формулу на единую функциональную зависимость.

Следует сразу оговориться, что такая единая зависимость, учитывающая взаимное влияние тепла и массы, получена из решения уравнений переноса энергии и массы применительно к бинарным системам.

В настоящем параграфе предложен метод расчета параметров совместного тепломассопереноса в многокомпонентной турбулентной жидкой пленке. Этот метод основан на решении системы дифференциальных уравнений конвективной теплопроводности и многокомпонентной конвективной диффузии, включая условия сопряжения на границе раздела [274]. Помимо важности решения этой задачи с точки зрения широкого распространения процесса тепломассопереноса в современной промышленной практике, решение этой задачи для многокомпонентного тепломассопереноса имеет и научный интерес: сохранится ли общая закономерность, установленная для бинарных систем, в случае многокомпонентного тепломассопереноса и каковы эти условия?

Пусть пленка жидкости гравитационно стекает по вертикальной стенке. Направим ось x сверху вниз вдоль стенки, а ось y – перпендикулярно ей. Примем, как обычно, что физические свойства жидкой фазы постоянны, суммарный диффузионный перенос энтальпии в объеме фазы пренебрежимо мал, на поверхности пленки соблюдаются условия фазового равновесия, а толщина пленки остается постоянной. Предположим, что диссипативным членом в уравнении теплообмена и переносом вещества за счет термодиффузии можно пренебречь. Тогда уравнения стационарного конвективного тепломассопереноса в турбулентной многокомпонентной жидкой пленке имеют вид [274]

$$u(y)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(y)\frac{\partial T}{\partial y}\right); \qquad (11.5.1)$$

$$u(y)\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left([E(y)]\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}\right), \qquad (11.5.2)$$

где $\sigma(y)$ – турбулентная температуропроводность; $[E(y)]$ – матрица коэффициентов турбулентной диффузии. Эти величины зависят как от физико-химических свойств жидкой смеси, так и от гидродинамических параметров. Вектор-столбец **c** состоит из мольных концентраций компонентов c_i и имеет размерность $n-1$.

Граничные условия:

при $x = 0$ $\quad T = T_0, \mathbf{c} = \mathbf{c}_0,$ (11.5.3)

при $y = 0$ $\quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} = 0,$ (11.5.4)

при $y = h_0$ $\quad \mathbf{c} = \mathbf{V}T + \mathbf{W},$ (11.5.5)

$$q = \sum_k^n N_k \Delta H_k, \qquad (11.5.6)$$

где **V**, **W** – векторы, характеризующие параметры равновесной зависимости; N_k – мольный поток k-го компонента; ΔH_k – разность мольных энтальпий k-го компонента в газовой и жидкой фазах, переносимая потоком его массы через поверхность раздела; q – тепловой поток.

Чтобы выразить потоки тепла и массы через градиенты температуры и концентраций компонентов, надо воспользоваться законом Фурье и обобщенным законом Фика. Кроме того, на систему накладывается дополнительное условие связи потоков массы, которое имеет различную форму для разных процессов.

Например, для процесса многокомпонентного тепломассопереноса при ректификации с учетом условия эквимолярности $\left(\sum_{k=1}^{n} N_k = 0\right)$ соотношение (11.5.6) приобретает вид

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = \mathbf{r}_p^{(T)}[D]\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}, \qquad (11.5.7)$$

где $r_{pi} = \Delta H_i - \Delta H_n$, $i = 1, 2, ..., n-1$,

а для многокомпонентной абсорбции с инертным компонентом ($N_n = 0$) соотношение (11.5.6) выглядит следующим образом:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = \mathbf{r}_A^{(T)}[D]\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}, \qquad (11.5.8)$$

где $\mathbf{r}_{Ai} = \Delta H_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Поэтому в общем случае запишем условие (11.5.6) в виде

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = \tau^{(T)}[D]\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}, \qquad (11.5.9)$$

где $r_i = r_{pi}$ для многокомпонентной ректификации; $r_i = r_{Ai}$ для многокомпонентной абсорбции с инертным компонентом и т.д.

Входящая в уравнение (11.5.2) матрица коэффициентов турбулентной диффузии имеет следующую структуру:

$$[E(y)] = [D] + \epsilon_D(y)\lceil I \rfloor, \tag{11.5.10}$$

где ϵ_D – определяемый гидродинамическими условиями коэффициент турбулентной диффузии, который можно получить из результатов исследований турбулентности в бинарных смесях.

Матрица $[D]$ выражается через коэффициенты молекулярной диффузии бинарных пар компонентов, составляющих данную смесь. Формулы для вычисления $[D]$ можно получить с помощью молекулярной теории газов и жидкостей [263, 264]. Важными свойствами матрицы $[D]$ являются приводимость к диагональному виду, а также вещественность и положительность ее собственных значений [264].

Покажем, что матрица $[E]$, определяемая формулой (11.5.10), обладает теми же свойствами.

Действительно, пусть $[L]$ является фундаментальной матрицей для $[D]$, т.е.

$$[L]^{-1}[D][L] = \lceil D' \rfloor.$$

Тогда

$$[L]^{-1}[E(y)][L] = [L]^{-1}[D][L] + [L]^{-1}\epsilon_D(y)\lceil I \rfloor [L] =$$
$$= \lceil D' \rfloor + \epsilon_D(y)\lceil I \rfloor = \lceil E' \rfloor,$$

где $E'_i = D'_i + \epsilon_D$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Поскольку $D'_i > 0$ и $\epsilon_D > 0$, то и $E'_i > 0$ для всех i. Следовательно, матрица $[E(y)]$ приводится к диагональному виду, причем с помощью той же фундаментальной матрицы, что и $[D]$, и имеет вещественные положительные собственные значения.

Коэффициент турбулентной температуропроводности, входящий в уравнение (11.5.1), аналогично матрице $[E(y)]$ состоит из двух слагаемых:

$$\sigma(y) = \kappa + \epsilon_T(y), \tag{11.5.11}$$

где $\epsilon_T(y)$ – тепловой аналог коэффициента турбулентной диффузии $\epsilon_D(y)$; κ – коэффициент температуропроводности.

Система уравнений (11.5.1), (11.5.2) с граничными условиями (11.5.3)–(11.5.5), (11.5.9) является связанной системой уравнений параболического типа с граничными условиями четвертого рода, что создает существенные трудности при ее решении.

Поэтому, используя свойство диагонализуемости матриц $[D]$, $[E]$, применим метод, предложенный в [261], позволяющий преобразовать исходную систему к несвязанному виду (см. § 11.1):

$$u(y)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(y)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{11.5.12}$$

$$u(y)\frac{\partial \mathbf{c}'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lceil E' \rfloor \frac{\partial \mathbf{c}'}{\partial y}\right). \tag{11.5.13}$$

Граничные условия:

при $x = 0$ $T = T_0, \mathbf{c}' = \mathbf{c}'_0$; (11.5.14)

при $y = 0$ $\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial \mathbf{c}'}{\partial y} = 0$; (11.5.15)

при $y = h_0$ $\mathbf{c}' = \mathbf{v}'T + \mathbf{w}'$, $\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y} = \mathbf{r}_1^{(T)} \dfrac{\partial \mathbf{c}'}{\partial y}$, (11.5.16)

где $\mathbf{c}' = [L]^{-1}\mathbf{c}$; $\mathbf{c}'_0 = [L]^{-1}\mathbf{c}_0$; (11.5.17)

$\mathbf{v}' = [L]^{-1}\mathbf{v}$; $\mathbf{w}' = [L]^{-1}\mathbf{w}$; $\mathbf{r}_1^{(T)} = \mathbf{r}^T [D] [L]$ (11.5.18)

Введем безразмерные переменные с помощью соотношений

$\xi = 4x/\mathrm{Re}h_0$, $\eta = y/h_0$, $\upsilon = u/\bar{u}$, $t = (T - T_0)/(T_l - T_0)$, (11.5.19)

$c_i = (c'_i - c'_{0i})/(c'_{li} - c'_{0i})$, $i = 1, 2, ..., n - 1$, (11.5.20)

где

$c'_{li} = V'_i T_0 + W'_i$; $T_l = (c_{01} - W_1)/V_1$; $\mathrm{Re} = 4\bar{u}h_0/\nu$; (11.5.21)

$\bar{u}$ – средняя скорость течения пленки; T_0, T_l – температура на входе в контактное устройство и равновесная соответственно.

Тогда система (11.5.12) – (11.5.16) примет окончательный вид:

$$\upsilon(\eta)\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left(\mathrm{Pr}^{-1} + \frac{\epsilon_T}{\nu}\right)\frac{\partial t}{\partial \eta}\right\}$$

(11.5.22)

$$\upsilon(\eta)\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{(\ulcorner \mathrm{Sc}' \urcorner^{-1} + \frac{\epsilon_D}{\nu}\ulcorner I \urcorner)\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \eta}\right\};$$

$\xi = 0$ $t = 0, \mathbf{c} = 0$;

$\eta = 0$ $\dfrac{\partial t}{\partial \eta} = 0$, $\dfrac{\partial \mathbf{c}}{\partial \eta} = 0$; (11.5.23)

$\eta = 1$ $c_i + a_i t = 1$;

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{\partial c_k}{\partial \eta}, \quad i = 1, 2, ..., n - 1,$$

где

$$a_i = V_i \frac{T_0 - T_l}{c'_{li} - c'_{0i}}; \quad b_i = \frac{r_{1i}(c'_{li} - c'_{0i})}{\lambda(T_l - T_0)}; \tag{11.5.24}$$

$\mathrm{Sc}'_i = \nu/D'_i$; $\mathrm{Pr} = \nu/\kappa$.

Рассмотрим движение жидкости со среднерасходовой скоростью ($\upsilon = 1$) и примем допущение о равенстве коэффициентов турбулентной диффузии и турбулентной температуропроводности:

$$\epsilon_D(\eta) = \epsilon_T(\eta) = \epsilon(\eta). \tag{11.5.25}$$

Зависимость (11.5.25) является достаточно сложной функцией, поскольку характер изменения коэффициента турбулентного переноса неодинаков вблизи стенки, в ядре потока и вблизи границы раздела фаз. Существует множество исследований, посвященных определению функциональной зависимости (11.5.25) для различных слоев пленочного течения. В работе [274] содержится подробный анализ этих исследований и рекомендуются для использования следующие три выражения.

Для пристеночной области – формула Ван Дриста:

$$\frac{\epsilon}{\nu} = \frac{1}{2}\left\{-1+\left[1+0{,}04\,\frac{\mathrm{Re}^2\eta^2}{\mathrm{Fr}}\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,\eta}{104\sqrt{\mathrm{Fr}}}\right)\right)^2\right]^{1/2}\right\}, \qquad (11.5.26)$$

где $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$, $\eta_1 = 120\sqrt{\mathrm{Fr}}/\mathrm{Re}$. (11.5.27)

Для ядра турбулентного течения – формула Ричардта:

$$\frac{\epsilon}{\nu} = k\frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{\mathrm{Fr}}}(2\eta - \eta^2)(3 - 4\eta + 2\eta^2), \qquad (11.5.28)$$

в которой константа k определяется из условия совпадения результатов вычисления по формулам (11.5.26) и (11.5.28) в точке $\eta = \eta_1$, определяемой из (11.5.27).

Для пограничной области рекомендуется модификация формулы Ламурелла и Сандала:

$$\frac{\epsilon}{\nu} = 3{,}153 \cdot 10^{-1} \cdot \mathrm{Fr}^{-2/3} \cdot \mathrm{Re}^{2{,}758}(1-\eta)^2, \qquad (11.5.29)$$

где $\mathrm{Fr} = u^2/h_0 g$. Эта формула используется в интервале изменения безразмерной толщины от $\eta = 1$ до значения $\eta = \eta_2$, при котором результаты вычисления по формулам (11.5.28) и (11.5.29) совпадают.

Для определения профиля коэффициента турбулентной диффузии по соотношениям (11.5.26)–(11.5.29) необходимо построить две вычислительные процедуры. Первая из них предназначена для расчета константы k в соотношении (11.5.28) по известным значениям Re, Fr и при $\eta = \eta_1$. Вторая процедура определяет значение безразмерной толщины η_2 по известным Re, Fr и вычисленному в первой процедуре значению k. Обе процедуры реализованы с помощью метода Ньютона [244].

Таким образом, решение безразмерной задачи (11.5.22), (11.5.23) с учетом (11.5.25)–(11.5.29) определяется безразмерными параметрами Re, Fe, Pr, Sc_i', a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, т.е. зависит от $3n$ величины.

Решение осуществляется методом прогонки с использованием конечно-разностных операторов [274]:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{W(k,j) - W(k,j-1)}{\Delta\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\theta(\eta)\,\frac{\partial W}{\partial\eta}\right\} = \frac{1}{(\Delta\eta)^2}\left\{\frac{\theta(j+1)+\theta(j)}{2}\,[W(k,j+1) - W(k,j)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\theta(j)+\theta(j-1)}{2}\,[W(k,j) - W(k,j+1)]\right\}, \qquad (11.5.30)$$

где k, j – номера шагов по вертикали и горизонтали; $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ – соответствующие величины шагов, а W и θ представляют собой соответственно либо t и σ, либо c_i и E_i, $i = 1, 2, ..., n - 1$.

Для увеличения точности приближения производных на поверхности раздела фаз (формула (11.5.23)) используются конечно-разностные аналоги, дающие возможность аппроксимации с точностью до третьего порядка малости:

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \eta}\right|_{\eta = 1} = \frac{1}{12(\Delta\eta)}\{8f(k) - 18W(k, k-1) + W(k, N-2) + 9W(k, N)\},$$

где N – число шагов по горизонтали, а $f(k)$ – значение соответственной функции на границе раздела, определяемой для любого k формулой

$$f(k) = \frac{W(k, N-1) + W(k, N)}{2}.$$

Найдя с помощью метода прогонки поля безразмерных концентраций компонентов и температур, можно вычислить значения пристеночных, поверхностных и средних концентраций и температур, потоков массы компонентов и тепла на границе раздела, коэффициентов массо- и теплопереноса и т.д. [274].

С использованием соотношений (11.5.19)–(11.5.21) осуществляется переход от безразмерных к размерным параметрам задачи, а затем с помощью формул (11.5.17) – к реальным значениям концентраций компонентов и температур в турбулентной жидкой пленке.

Предложенный метод решения задачи дает возможность, во-первых, при заданных начальных значениях параметров определить профили концентраций компонентов и температур в каждом сечении контактного устройства, найти их поверхностные, среднеинтегральные и другие значения; во-вторых, определить искомую длину аппарата; в-третьих, теоретически исследовать влияние параметров турбулентного многокомпонентного тепломассообмена на решение.

На основании численного решения уравнений многокомпонентного переноса вещества и энергии трудно установить аналитически закономерность взаимного влияния тепла и переноса вещества, как для бинарных смесей.

Однако, если упростить постановку задачи и сделать допущение о том, что $[E]$ и σ в пределах рассматриваемой области их изменения можно использовать как средние величины, система уравнений (11.5.12)–(11.5.13) с начальными и граничными условиями (11.5.14)–(11.5.18) допускает аналитическое решение. Например, выражения для потока массы и тепла имеют вид [276]

$$\mathbf{J} = \sqrt{\frac{\overline{u}}{\pi x}}\,[D][E]^{-0,5}\left(\mathbf{c}_0 - \mathbf{v}T_0 + \mathbf{v}\frac{\sqrt{\pi}}{2}b - \mathbf{w}\right) = \sqrt{\frac{\overline{u}}{\pi x}}\,[D][E]^{-0,5}\mathbf{K}; \qquad (11.5.31)$$

$$q = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\overline{u}}{\pi x}}\,b, \qquad (11.5.32)$$

где b – параметр, являющийся аналитической функцией гидродинамических, физико-химических и начальных условий.

Вектор **K** и параметр b является общим для всех моделей, рассмотренных в главе 6, при сделанных выше приближениях о средних значениях $[E]$ и σ на выбранном интервале их изменения.

Данное приближение не лишено физического смысла: на каждом из интервалов изменения турбулентного обмена (11.5.26) – (11.5.29) перенос вещества и энергии происходит со средними характеристиками. Такое приближение несколько искажает локальные характеристики переноса, но поскольку при расчете коэффициентов массоотдачи или теплоотдачи используются интегральные по сечению характеристики, то окончательное решение сохраняет основные функциональные зависимости. Изложенное выше дает основание утверждать о существовании при турбулентном тепломассопереносе (11.5.31), (11.5.32) закономерности, аналогичной бинарному тепломассопереносу: коэффициент при совместном переносе энергии и вещества состоит из произведения, один член которого ответствен за перенос субстанции без учета взаимного влияния тепла и массы, а другой является общим для различных типов моделей, отображающих конкретную геометрию контактного устройства или физическую картину, т.е. так, как было указано для бинарного тепломассопереноса (см. гл. 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rotstein E., Laurencena B.R., Elustondo H.P., Zanotto O.R.* Turbulent film reactor // Chem. and Proc. Eng. 1968. Vol. 49, N 5. P. 94.
2. *Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости: Препр. Ин-та теплофизики АН СССР № 36–79. Новосибирск, 1979.
3. *Knuth E.J.* The mechanics of film cooling // Jet Propulsion. 1954. Vol. 24, N 6. P. 359.
4. *Kinney G.R., Abramson A.E., Sloop J.L.* Internal–liquid–filmcooling // Rep. Advisory Committee for Aero Nautice. 1952. P. 1087.
5. *Hausmann E.* High temperature heat exchange // Chem. Age India. 1965. Vol. 16, N 8. P. 695.
6. *Michalicka F., Jasansky J.* Blanova odparka kzahustovany velmi viskoznich latek // Chem. prum. 1960. Sv. 10/35, №9. S. 466.
7. *Кутателадзе С.С.* Основы теплообмена. Новосибирск: Наука, 1970. 659 с.
8. *Рамм В.М.* Абсорбция газов. М.: Химия, 1966. 767 с.
9. *Данквертс П.В.* Газожидкостные реакции. М.: Химия, 1973. 296 с.
10. *Астарита Дж.* Массообмен с химической реакцией. Л.: Химия, 1971. 223 с.
11. *Жаворонков Н.М., Малюсов В.А.* Исследование гидродинамики и массопередачи в процессах абсорбции и ректификации при высоких скоростях потока // Теорет. основы хим. технологии. 1967. Т. 1, № 5. С. 562.
12. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании // Там же. № 1. С. 73.
13. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О массообмене в пленке при волнообразовании (линейное распределение скорости) // Там же. 1969. Т. 3, № 3. С. 465.
14. *Шкадов В.Я.* Стационарное течение вязкой жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами после потери устойчивости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 3. С. 81.
15. *Капица П.Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3.
16. *Капица П.Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Там же. 1949. Т. 19, № 2. С. 105.
17. *Benjamin T.J.* Wave fermation in laminar flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 2, N 6. P. 554.
18. *Бушманов В.К.* Гидродинамическая устойчивость жидкого слоя на вертикальной стенке // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1960. Т. 39, № 4. С. 1251.
19. *Hanratty T.J., Hershman A.* Initiation of Roll Waves // AIChE Journal. 1963. Vol. 7, N 3. P. 488.
20. *Маурин Л.М., Сорокин В.С.* О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1962. № 4. С. 60.
21. *Андреев А.Ф.* Об устойчивости ламинарного течения тонких слоев жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 45, № 2. С. 755.
22. *Yih C.-S.* Stability of liquid flow down on inclined plane // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, N 3. P. 321.
23. *Massot C., Jrani F., Lightfool E.N.* Modified description of wave motion in a falling film // AIChE Journal. 1966. Vol. 12, N 3. P. 445.
24. *Крылов В.С., Воротилин В.П., Левич В.Г.* К теории волнового движения тонких пленок жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1969. Т. 3, № 4. С. 499.
25. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1, С. 43.

26. *Шкадов В.Я.* К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Там же. 1968. № 2, С. 20.
27. *Lee J.* Kapitra's method of film description // Chem. Eng. Sci. 1969. Vol. 24, N 8. P. 1309.
28. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953. 788 с.
29. *Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р.* Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1973. № 2. С. 109.
30. *Шкадов В.Я., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1970. Т. 4, № 6. С. 859.
31. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К теоретическому исследованию гравитационного стекания тонких слоев жидкости при волнообразовании // Тепло- и массоперенос. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1972. Т. 1, ч. 1. С. 186.
32. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О расчете волновых характеристик стекающей пленки жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1971. Т. 5, № 4. С. 559.
33. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Определение толщины пленки, скорости на поверхности и касательного напряжения // Там же. 1974. Т. 8, № 3, С. 402.
34. *Холпанов Л.П., Квурт Ю.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Волновые характеристики стекающей пленки жидкости с различными физико-химическими свойствами // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 5. С. 1203.
35. *Роговая И.А., Олевский В.М., Рунова Н.Г.* Измерение параметров пленочного волнового течения на вертикальной пластине // Теорет. основы хим. технологии. 1969. Т. 3, № 2. С. 200.
36. *Жаворонков Н.М., Малюсов В.А.* Исследование гидродинамики и массопередачи при пленочном течении жидкости // Изв. Отд-ния хим. наук Болг. акад. наук. 1971. Т. 4, кн. 2. С. 223.
37. *Brauer H.* Strömung und Warmeübergang bei Rieselfilmen // VDI-Forschungsh. 1956. Bd. 457. S. 180.
38. *Strobel W.J., Whitaker S.* The effect of surfactants on the flow characteristics of falling liquid films // AIChE Journal. 1969. Vol. 15, N 4. P. 527.
39. *Холпанов Л.П., Федоров Г.Г., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Экспериментальное определение некоторых волновых харктеристик в пленке жидкости в аппаратах с орошаемой стенкой // Тепло- и массоперенос: Тепло- и массоперенос в технологических процессах и аппаратах химических производств. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1972. Т. 4. С. 39.
40. *Brauer H.* Stoffaustausch beim Rieselfilm // Chem.-Ing.-Techn. 1958. Bd. 30, N 9. S. 274.
41. *Brauer H.* Warmeübergang bei der Filmkondensation // Kaltetechnik. 1957. Bd. 9, N 9. S. 274.
42. *Thomas W. J., Portalski S.* Countercurrent flow in wettedwallcolumns // Ind. and Eng. Chem. 1958. Vol. 5, N 7. P. 1081.
43. *Мясников С.К., Кулов Н.Н., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Эффективная скорость движения свободной поверхности стекающей пленки жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1972. Т. 6, № 6. С. 893.
44. *Хлопанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К вопросу тепломассообмена в пленке жидкости с волновой поверхностью // Тепло- и массообмен. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР. 1969. Т. 11. С. 321.
45. *Mayer P.G.* Roll waves and slug flows in inclined open channels // J. Hydr. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1959. Vol. 89. P. 99.
46. *Hirshburg R.I., Florschuete L.W.* Laminar wavy-film flow. Pt 1. Hydrodynamic analysis // Trans. ASME: J. Heat Transfer. 1982. Vol. 104, N 8. P. 459–464.
47. *Stockar V.U., Cevey P.F.* Influence of the physical properties of the liguic on axial dispersion in packed columns // Ind. and Eng. Chem. Process Des. and Develop. 1984. Vol. 23, N 4, P. 717–724.
48. *Javdani K., Goren S.L.* Finite-amplitude wavy flow of thin films // Progr. Heat and Mass Transfer. 1972. Vol. 6. P. 253–262.

49. *Hoffman M.A., Potts W.W.* Experimental behaviour of falling liquid film at high surface tension numbers // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1979. Vol. 18, N 1. P. 27–33.
50. *Жукаускас А.А., Макарявичус В.-В.Ю.* Теплообмен при переменных физических свойствах в однофазных потоках // Современные проблемы теплообмена и физической гидродинамики. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1984. С. 68–80.
51. *Kholpanov L.P.* The wavy flow of thin liquid films on vertical planes // Intern. Chem. Eng. 1965. Vol. 5, N 4. P. 633.
52. *Kholpanov L.P.* The theory of the two-phase film mass transfer in the absence of body forces // Ibid. P. 720.
53. *Холпанов Л.П.* К вопросу волнового течения тонких слоев жидкости по вертикальной плоскости // Инж.-физ. журн. 1965. Т. 8, № 4. С. 488.
54. *Соколов В.Г.* Некоторые вопросы движения и тепломассообмена в тонком слое вязкой жидкости, граничащем с газовым потоком: Автореф. дис ... канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1970. 23 с.
55. *Коротаев Ю.П., Точигин А.А.* Влияние газового потока на волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Инж.-физ. журн. 1969. Т. 17, № 6. С. 989.
56. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К учету касательных сил при нелинейном расчете волновых течений пленки жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1972. Т. 6, № 2. С. 204.
57. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Влияние газового потока на течение тонких слоев жидкости при волнообразовании // Там же. 1973. Т. 7, № 5. С. 788.
58. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет волновых параметров волновой пленки жидкости в режиме нисходящего течения фаз // Там же. 1975. Т. 9, № 6. С. 877.
59. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование течения волновой пленки жидкости, взаимодействующей с газовым потоком, в нелинейной постановке // Тр. Всесоюз. совещ. "Мат. методы в химии". Новосибирск, 1973. Т.1. С. 199
60. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.А.* О расчете некоторых волновых характеристик // Теорет. основы хим. технологии. 1971. Т. 4, № 4. С. 559.
61. *Ruckenstein E., Berbente C.* Mass Transfer in wave flow // Chem. Eng. Sci. 1965. Vol. 20, N 9. P. 795.
62. *Жаворонков Н.М., Холпанов Л.П., Малюсов В.А.* Массообмен в пленке жидкости с волновой поверхностью // Массообменные процессы химической технологии. М.; Л.: Химия, 1965. № 1. С. 7.
63. *Холпанов Л.П.* Тепломассообмен и гидродинамика пленочного течения жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1987. Т. 21, № 1. С. 86.
64. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование гидродинамики и массообмена при турбулентном течении пленки жидкости с учетом входного участка // Теорет. основы хим. технологии. 1978. Т. 12, № 3. С. 438.
65. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование гидродинамики и массообмена в пленке жидкости с учетом входного участка // Там же. 1976. Т. 10, № 5. С. 659.
66. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
67. *Higbie R.* The rate of absorption of a pure gas into a still liquid during short periods of exposure // Trans. Amer. Inst. Chem. Eng. 1934–1935. Vol. 31. P. 365.
68. *Вязовов В.В.* Теория абсорбции малорастворимых газов жидкими пленками // Журн. техн. физики. 1940. Т. 10, № 18. С. 1519.
69. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
70. *Забрудский В.Т., Квурт Ю.П., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование волновых параметров пленочного течения // Теорет. основы хим. технологии. 1979. Т. 13, № 2. С. 195.
71. *Квурт Ю.П., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О статистической природе волновых характеристик восходящего двухфазного пленочного течения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 246, № 6. С. 1510.

72. *Олевский В.М., Ручинский В.Р.* Роторно-пленочные тепло- и массообменные аппараты. М.: Химия, 1977. 207 с.
73. *Dukler A.E., Bergelin O.P.* Characteristics of flow in falling liquid films // Chem. Eng. Progr. 1952. Vol. 48, N 11.P. 557.
74. *Telles A.S., Dukler A.E.* Statistical characteristics of thin, vertical, wavy, liqud films// Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1970. Vol. 9, N 3. P. 411.
75. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О статистической природе массообмена в волновой пленке жидкости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, №4. С. 928.
76. *Дытнерский Ю.И., Бреховских Н.С.* О некоторых вопросах абсорбции CO_2 водой при пленочном течении // Теорет. основы хим. технологии. 1968. Т. 2, № 6. С. 845.
77. *Борисов Г.С.* Исследование массообмена в пленке жидкости: Автореф: дис..... канд. техн. наук. М., 1964. 27 с.
78. *Дытнерский Ю.И., Борисов Г.С.* Исследование теплообмена в жидкой фазе // Процессы химической технологии: Гидродинамика, тепло- и массопередача. М.: Наука, 1965. С. 266.
79. *Кулов Н.Н., Максимов В.В., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Массоотдача в стекающих пленках жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1983. Т. 17, № 3. С. 291.
80. *Николаев Н.А., Сергеев А.Д., Холпанов Л.П., Забрудский В.Т., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование волновых характеристик восходящего прямоточного течения в системе воздух–вода // Там же. 1975. Т. 9, № 3. С. 406.
81. *Кабанов Г.П., Николаев Н.А., Николаев А.М.* К расчету коэффициентов массоотдачи в турбулентной пленке жидкости // Тр. Казан. хим.-технол. ин-та им. С.М. Кирова. 1974. № 53. С. 24.
82. *Сергеев А.Д., Николаев Н.А., Николаев А.М.* О влиянии молекулярной диффузии на массоотдачу в пленке жидкости // Там же. 1972. № 48. С. 39.
83. *Конобеев Б.И., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Изучение пленочной абсорбции при высоких скоростях газа // Хим. пром-ть. 1961. № 1. С. 475.
84. *Николаев Н.А., Булкин В.А., Жаворонков Н.М.* Массоперенос в жидкой фазе при прямоточном движении газа и жидкости в трубке // Теорет. основы хим. технологии. 1970. Т. 4, № 3. С. 418.
85. *Николаев Н.А., Жаворонков Н.М.* Пленочная абсорбция двуокиси углерода при высоких скоростях газа в режиме нисходящего прямотока // Хим. пром-ть. 1965. № 4. С. 290.
86. *Кулов Н.Н., Малюсов В.А.* Массопередача в трубке с орошаемой стенкой при перемешивании жидкой пленки // Теорет. основы хим. технологии. Т. 1, № 2. С. 213.
87. *Холпанов Л.П., Ратнов А.Г., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Массобмен в волновой пленке жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // Теорет. основы. хим. технологии. 1977. Т. 11, № 5. С. 643.
88. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. 924 с.
89. *Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А.* Шероховатость поверхностей: Теоретико-вероятностный подход. М.: Наука, 1975. 344 с.
90. *Селезнев А.А.* Влияние шероховатости на теплоотдачу при вынужденном движении воздуха в трубах // Теплоэнергетика. 1955. № 7. С. 45.
91. *Тевердовский Б.М.* К вопросу о влиянии шероховатости поверхности на гидравлическое сопротивление и конвективный теплообмен // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1958. № 7. С. 84.
92. *Антуфьев В.М.* Сравнительные исследования конвективных поверхностей на основе энергетических характеристик // Энергомашиностроение. 1964. № 9. С. 9.
93. *Мигай В.К.* Искусственная турбулизация потока в пучке труб // Инж.-физ. журн. 1966. Т. 10, № 5. С. 600.
94. *Зозуля Н.В., Шкуратов И.Я.* Теплоотдача и гидравлическое сопротивление внутри труб с кольцевыми выступами // Конвективный теплообмен. Киев: Наук. думка, 1968. С. 106.
95. *Savage D.W., Myers J.E.* The effect of artificial surface roughness on heat and momentum transfer // AIChE Journal. 1963. Vol. 9, N 5. P. 694.
96. *Davies J.T., Warner K.V.* The effect of large-scale roughness in promoting gas absorption // Chem. Eng. Sci. 1969. Vol. 24, N 2. P. 231.

97. *Grass G.* Einfluß von Einlaufstörungen sowie von natürlichen und kunstlichen oberflacheurauhigkeiten auf den Warmeübergang an Wasser // Chem.-Ing.-Techn. 1959. Bd. 31, N 3. S. 163.
98. *Ластовцев М.А., Пивоваров В.Е., Семенов П.А., Чехов О.С.* Исследование брызгоуноса в условиях восходящего прямотока газа и жидкости // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1965. Т. 8, № 5. С. 864.
99. *Воронцов Е.Г.* Течение жидкостных пленок по вертикальной стенке с шероховатой поверхностью // Журн. прикл. химии. 1969. Т. 42. № 9. С. 2037.
100. *Полуэктов Н.Г., Свинухов А.Г., Кафаров В.В.* К вопросу о влиянии регулярной шероховатости твердой поверхности на процесс массопередачи в пленке жидкости // Там же. 1978. Т. 51, № 5. С. 1078.
101. *Кафаров В.В., Полуэктов Н.Г., Свинухов А.Г.* Исследование гидродинамики течения пленки по шероховатой поверхности // Там же. С. 1087.
102. *Харин В.Ф., Николаев Н.А., Николаев А.М.* Некоторые гидродинамические закономерности восходящего двухфазного потока в шероховатой трубке // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1972. Т. 15, № 7. С. 1086.
103. *Николаев Н.А., Харин В.Ф.* Гидродинамические закономерности пленочного течения жидкости на шероховатой поверхности // Теорет. основы хим. технологии. 1974. Т. 8, № 5. С. 712.
104. *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1984. 715 с.
105. *Бай Ши-и.* Теория струй. М.: Физматгиз, 1960. 327 с.
106. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 672 с.
107. *Воронцов Е.Г.* Течение жидкостных пленок по вертикальной стенке с шероховатой поверхностью // Журн. прикл. химии. 1969. Т. 42, № 9. С. 2037.
108. *Nishikawa K., Sekoguchi K., Nakasatomi M., Kaneuzi S.* Two-phase annular fow inasmooth tube and grooved tubes. Cocurrent gas-liquid flow. N.Y., 1969.
109. *Харин В.Ф., Николаев Н.А., Николаев А.М.* Интенсификация массопередачи в жидкой фазе при искусственной шероховатости // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1971. Т. 14, № 7. С. 100.
110. *Карасев Э.К.* Исследование гидродинамики и теплообмена в канале с турбулизаторами на теплоотдающей поверхности // Тепло- и массоперенос. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1965. Т. 1. С. 221.
111. *Зозуля Н.В., Калинин Б.Л.* Влияние турбулизующего элемента на локальную теплоотдачу пластины в переходной области течения // Теплофизика и теплотехника. Киев: Наук. думка. 1970. № 17. С. 55.
112. *Кольер Д.* Обзор работ по теплообмену к двухфазным системам. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
113. *Grass G.* Verbesserung der Warmeübertragung an Wasser durch künstliche Aufräuhung der Oberflächen in Reactoren oder Warmeaustauschern // Atomkern Energie. 1958. Bd. 3, N 8/9. S. 328.
114. *Холпанов Л.П., Николаев Н.А., Харин В.Ф., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет коэффициентов массоотдачи в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью // Теорет. основы хим. технологии. 1975. Т. 9, № 4. С. 590.
115. *Kholpanov L.P., Shkadov V.Ya., Malyusov V.A., Zhavoronkov N.M.* The effect of gas flow rate on the flow of thin liquid films at wave formation // IV Intern. Congr. Chem. Eng. Chem. Equipment Design and Automation. CHISA. Csechoslovac, 1972. P. 18.
116. *Холпанов Л.П., Ратнов А.Г., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет коэффициентов массоотдачи в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью // Журн. прикл. химии. 1980. Т. 53, № 7. С. 1557.
117. *Харин В.Ф.* Гидродинамические закономерности и массообмен при пленочном течении жидкости по шероховатой поверхности: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Казань, 1972. 24 с.
118. *Bruley D.F.* Predicting vertical film flow characteristics in the entrance region // AIChE Journal. 1965. Vol. 11, N 5. P. 945.
119. *Jones W.P., Launder B.E.* The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1972. Vol. 15, N 2. P. 301.
120. *Whitaker S., Cerro R.L.* Some comments on the hydrodynamics of thin liquid films // Chem. Eng. Sci. 1971. Vol. 29, N 4. P. 963.

121. *Cerro R.L., Whitaker S.* Stability of falling liquid films // Ibid. 1971. Vol. 26, N 5. P. 745.
122. *Hassan N.A.* Laminar fow along a vertical wall // J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E. 1967. Vol. 34, N 3. P. 535.
123. *Haugen R.* Laminar flow along a vertical wall // Ibid. 1968. Vol. 35, N 4. P. 631.
124. *Воронцов Е.Г., Яхно О.М.* Локальная толщина орошающей пленки на входном участке // Прикл. механика и техн. физика. 1974. № 4. С. 64.
125. *Murty N.S., Sastri V.M.K.* Accelerating laminar liquid film along an inclined wall // Chem. Eng. Sci. 1973. Vol. 28, N 3. P. 869.
126. *Scriven L.E., Pigford R.L.* Absorption into an accelerating film // AIChE Journal. 1958. Vol. 4, N 3. P. 382.
127. *Whitaker S.* The effect of surfactants on the flow characteristics of falling liquid films // Ibid. 1971. Vol. 17, N 4. P. 997.
128. *Yilmas T., Brauer H.* Beschleunigte Stromung von Flussigkeit sfilmen an ebenen Wanden und in Fullkorperschichten // Chem.-Ing.-Techn. 1973. Vol. 45, N 14. C. 928.
129. *Шкадов В.Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // М., 1973. 160 с. (Науч. тр. Ин-та механики; № 25).
130. *Kholpanov L.P., Malyusov V.A., Zhavoronkov N.M.* Hydrodynamics and mass transfer in turbulent liquid film flow involving the inlet // Collect. Csech. Chem. Commun. 1981. Vol. 46, N 46 (2). P. 467.
131. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Влияние входного участка на абсорбцию в падающей пленке жидкости при ламинарном, волновом и турбулентном режимах // Тр. I Всесоюз. совещ. "Абсорбция газов". Чирчик, 1979. С. 82.
132. *Епихин В.Е., Жаворонков Н.М., Малюсов В.А., Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика с поверхностью раздела // Аннот. докл. IV Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Киев: Наук. думка, 1976. С. 56.
133. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование гидродинамики и массообмена в пленке жидкости с учетом входного участка для ламинарного и турбулентного течения // Тр. I Всесоюз. науч. конф. Чимкент, 1977. Т. 1. С. 445.
134. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и массообмен в слое жидкости на вращающейся поверхности // Инж.-физ. журн. 1973. Т. 25. № 4. С. 648.
135. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и теплообмен в слое жидкости на вращающейся поверхности с учетом взаимодействия с газовым потоком // Там же. 1976. Т. 31. № 4. С. 684.
136. *Холпанов Л.П., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Теплообмен в слое жидкости на вращающейся спирали Архимеда с учетом входного участка // Там же. 1977. Т. 23, № 5. С. 807.
137. *Жаворонков Н.М., Малюсов В.А., Мочалова Н.С., Холпанов Л.П.* Массообмен в слое жидкости переменной толщины на вращающейся спирали Архимеда с учетом входного участка // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 6. С. 91.
138. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Шкадов В.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование гидродинамики и массообмена в слое жидкости на вращающейся спирали с учетом взаимодействия газового потока с пленкой жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1977. Т. 11, № 3. С. 325.
139. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Гидродинамика и массообмен в пленке жидкости на входном участке с учетом сил трения на поверхности // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 3. С. 657.
140. *Холпанов Л.П., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование массоотдачи осесимметричной струи жидкости, вытекающей из отверстия под действием силы тяжести, с учетом входного участка // Теорет. основы хим. технологии. 1978. Т. 12, № 5. С. 649.
141. *Холпанов Л.П., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет коэффициента массоотдачи турбулентной газовой струи // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 3. С. 669.
142. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование массоотдачи на входном участке ламинарной струи жидкости и турбулентной струи газа с учетом сил трения на межфазной поверхности // Журн. прикл. химии. 1984. Т. 57, № 3. С. 715.

143. *Шкадов В.Я., Холпанов Л.П., Епихин В.Е., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет пленочных и струйных ламинарных течений капельной жидкости на начальном участке // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977. С. 213.
144. *Холпанов Л.П., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование массоотдачи осесимметричной турбулентной газовой струи // Теорет. основы хим. технологии. 1979. Т. 13, № 5. С. 650.
145. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Теплообмен при конденсации пара на ламинарной струе жидкости с учетом входного участка // Инж.-физ. журн. 1981. Т. 40, № 4. С. 581.
146. Исследование турбулентных течений двухфазных сред / Под ред. С.С. Кутателадзе. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1973. 315 с.
147. *Telles A.S., Dukler A.E.* Statistical characteristics of thin, vertical, wavy, liquid film // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1970. Vol. 9, N 3. P. 412.
148. *Жаворонков Н.М., Малюсов В.А., Малафеев Н.А.* Массопередача в процессе пленочной абсорбции // Хим. пром-ть. 1951. № 8. С. 16.
149. *Emmert R.E., Pigford R.L.* A study of gas absorption in falling liquid films // Chem. Eng. Progr. 1954. Vol. 50, N 2. P. 87.
150. *Brauer H.* Stoffaustausch beim Rieselfilm // Chem.-Ing.-Techn. 1958. Bd. 30. S. 75.
151. *Крашенинников С.А., Дурасова С.А.* Абсорбция углекислоты водой // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1958. № 5. С. 136.
152. *Kamei S., Oishi J.* Mass and heat transfer in a falling liquid film of wetted wall tower // Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ. 1955. Vol. 17. P. 277.
153. *Hikita H., Nakanishi K., Kataoka T.* Liquid-phase mass transfer in wetted-wall columns // Chem. Eng. (Jap.). 1955. N 7. P. 459.
154. *Крашенинников С.А., Сытник А.А.* Массопередача в процессе пленочной абсорбции // Тр. МХТИ им. Д.И. Менделеева. 1955. № 20. С. 220.
155. *Кулов Н.Н.* Исследование влияния перемешивания потоков контактирующих фаз на массообмен в процессах пленочной абсорбции: Автореф. дис. ... канд. хим. наук. М., 1966. 20 с.
156. *Lamourelle A.P., Sandall O.C.* Gas absorption into a turbulent liquid // Chem. Eng. Sci. 1972. Vol. 27, N 5. P. 1035.
157. *Хинце И.О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
158. *Prasher B.D., Fricke A.L.* Mass transfer at a free gasliguid interface in turbulent thin film // Ind. and Eng. Chem. Process Des. and Develop. 1974. Vol. 13, N 4. P. 336.
159. *Bin A.K.* Mass transfer into a turbulent liquid film // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26, N 7. P. 981.
160. *Турищев А.Ф., Логинов А.В.* Абсорбция газа турбулентной пленкой жидкости при большом времени контакта фаз // Теорет. основы хим. технологии. 1988. Т. 22, № 1. С. 3.
161. *Кулов Н.Н., Воротилин В.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Свободное стекание турбулентной пленки жидкости // Там же. 1973. Т. 7, № 5. С. 717.
162. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Гидродинамика и тепломассообмен в пленке жидкости при наличии газового потока или градиента поверхностного натяжения // Там же. 1982. Т. 16, № 3. С. 291.
163. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К расчету двухфазного пленочного тепломассообмена // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 402.
164. *Рукенштейн Э.* Влияние эффекта Марангони на массообмен в условиях пленочного течения // Инж.-физ.журн. 1964. Т. 7, № 7. С. 116.
165. *Дильман В.В., Рабинович Л.М.* Модель гидродинамики и массообмена в стекающей пленке жидкости в условиях поверхностной конвекции при наличии растворимых поверхностно-активных веществ // Теорет. основы хим.технологии. 1979. Т. 13, № 1. С. 54.
166. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Гидродинамика и тепломассообмен в турбулентной пленке жидкости при наличии газового потока или градиента поверхности натяжения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 1. С. 191.
167. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 333 с.
168. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

169. *Фабрикант Н.Я.* Аэродинамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. Ч. 1. 650 с.
170. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
171. *Керн Д., Краус А.* Развитие поверхности теплообмена. М.: Энергия, 1977. 472 с.
172. *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
173. *Холпанов Л.П., Ратнов А.Г.* Совместный тепломассообмен при испарительном охлаждении // Теорет. основы хим. технологии. 1986. Т. 20, № 4. С. 558.
174. *Холпанов Л.П.* Процессы тепломассообмена в системах с поверхностью раздела фаз // Гидродинамические проблемы технологических процессов: Тр. сектора механики неоднородных сред АН СССР / Под ред. акад. В.В. Струминского. М.: Наука, 1988. С. 93–101.
175. *Григорьева Н.И., Накоряков В.Е.* Точное решение задачи о совместном тепломассопереносе при пленочной абсорбции // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 23, № 5. С. 893.
176. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Совместный тепломассообмен в системах, состоящих из совокупности капель или пузырьков // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 4. С. 890.
177. *Galor B., Walo B.* // Chem. Eng. Sci. C. 1968. Vol. 23, N 12. P. 1431.
178. *Dytnerski J.I., Koczergin N.M., Kholpanov L.P.* O zagadnieniu wymiany ciepla przy barbotazu na polkach Gz. I // Chem. Stosow. B. 1964. Wol. 3. S. 363.
179. *Dytnerski J.I., Koczergin N.M., Kholpanov L.P.* Badanie wymiani ciepla przy barbotazu na polkach Gz. II // Ibid. Wol. 1. S. 93.
180. *Podbielniak W.J.* Apparatus and methods for precise fractional // Ind. and Eng. Chem. 1931. Vol. 3, N 2. P. 177.
181. *Обрядчиков С.Н., Яблонский В.С.* Основные принципы работы нового типа ректификационной колонны системы Подбильняка // Нефт. хоз-во. 1936. № 6. С. 37.
182. *Гельперин Н.Н., Пебалк В.Л.* Исследование ректификационной способности горизонтальных ротационных аппаратов // Журн. прикл. химии. 1953. Т. 26, № 4. С. 368.
183. *Филлиппосьянц Т.Т.* Исследование работы горизонтальных ротационных ректификационных аппаратов // Хим. пром-ть. 1953. № 9. С. 38.
184. *Герш С.Я., Архаров А.М.* Горизонтальный центробежный ректификатор // Кислород. 1958. Т. 11, № 5. С. 1.
185. *Герш С.Я., Архаров А.М.* Экспериментальное исследование центробежного ректификатора для разделения воздуха // Изв. вузов. Машиностроение. 1959. № 4. С. 125.
186. *Willingham Ch.B., Sedlak V.A., Rossini F.D., Westhaver J.W.* Rotary concetric-tube distilling column // Ind. and Eng. Chem. 1947. Vol. 39, N 6. P. 706.
187. *Архаров А.М.* Центробежный ректификатор для разделения воздуха // Изв. вузов. Машиностроение. 1959. № 4. С. 106.
188. *Архаров А.М.* О разделении воздуха в центробежных ректификационных аппаратах // Хим. машиностроение. 1961. № 3. С. 8.
189. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и массообмен в слое жидкости на вращающейся поверхности // Инж.-физ. журн. 1973. Т. 25, № 4. С. 648.
190. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Гидродинамика и теплообмен в пленке жидкости на входном участке с учетом сил трения на поверхности // Там же. 1978. Т. 34, № 4. С. 589.
191. *Scriven L.E., Pigford R.L.* On phase equilibrium at the gas-liquid interphase during absorption // AIChE Journal. 1958. Vol. 4, N 4. P. 439.
192. *Raimondi P., Toor H.L.* Interfaciel resistance in gas absorption // Ibid. 1959. Vol. 5, N 1. P. 86.
193. *Шейнман В.И., Александров И.А.* Новая конструкция тарелки для ректификационных колонн // Химия и технология топлив и масел. 1969. № 5. С. 54.
194. *Жаворонков Н.М., Малюсов В.А., Дытнерский Ю.И., Борисов Г.С., Гордзиевский А.Ф., Холпанов Л.П., Добровольский А.А.* Исследование массоотдачи на комбинированной тарелке (пластинчатая тарелка и сетчатая насадка) // Теорет. основы хим. технологии. 1977. Т. 11, № 4. С. 503.
195. *Вальцев В.Н., Басаргин Б.Н., Колобихин В.А.* Улавливание иодистого водорода из газового потока в скруббере Вентури при окислительном дегидрировании углеводородов // Хим. пром-ть. 1969. № 11. С. 26.

196. *Васильев А.С., Павлов В.П., Плановский А.Н.* Массоотдача в газовых струях, истекающих в жидкость // Теорет. основы хим. технологии. 1968. Т. 2, № 5. С. 677.
197. *Cullen E.J., Davidson J.F.* Absorption of gases of liquid jets // Trans. Faraday Soc. 1957. Vol. 53. P. 113.
198. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 454 с.
199. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй. М.: Машиностроение. 1974. 381 с.
200. *Илизарова Л.И.* Струйные течения // Пром. аэродинамика. 1966. № 27. С. 96.
201. *Шерстюк А.А.* Турбулентный пограничный слой. М.: Энергия, 1974. 272 с.
202. *Вулис Л.А., Кашкаров В.П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
203. *Соломаха Г.П.* Массопередача в газовой фазе на сетчатых тарелках: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1957. 28 с.
204. *Исаченко В.П.* Теплообмен при конденсации. М.: Энергия, 1977. 239 с.
205. *Исаченко В.П., Сотсков С.А., Якушева Е.В.* Теплообмен при конденсации водяного пара на ламинарной цилиндрической струе воды // Теплоэнергетика. 1967. № 8. С. 72.
206. *Дементьева К.В., Макаров А.М.* Исследование конденсации пара на свободных струях холодной жидкости // Тепломассоперенос. Т. 2. Тепломассоперенос при физико-химических превращениях. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1972. Ч. 1. С. 470.
207. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Теплообмен при конденсации пара на турбулентных струях жидкости с учетом входного участка // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 44, № 6. С. 901.
208. *Крашенинников С.Ю.* К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. 1972. № 3. С. 3.
209. *Мочалова Н.С., Холпанов Л.П., Малюсов В.А.* Теплообмен при конденсации на ламинарных и турбулентных струях жидкости с учетом входного участка и непостоянства расхода по сечению струи // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 5. С. 732.
210. *Mills A.F., Kim S., Leininger T., Ofer S., Pescran A.* Heat and mass transfer in turbulent liquid jets // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1982. Vol. 25, N 6. P. 889.
211. *Ян Жи-У.* Ламинарная пленочная конденсация на сфере // Теплопередача. 1973. № 2. С. 27.
212. *Холпанов Л.П., Мочалова Н.С., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Ламинарная пленочная конденсация на сфере с учетом начального участка // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47, № 2. С. 181.
213. *Lewis W.K., Whitman W.* Principles of gas absorption // Ind. and Eng. Chem. 1924. Vol. 16. P. 1215.
214. *Розен А.М., Крылов В.С.* Проблемы теории массопередачи // Хим. пром-ть. 1966. № 1. С. 51.
215. *Dankwerts P.V.* Unsteady-state diffusion or heat condaction with moving boundary // Trans. Faraday Soc. 1950. Vol. 46. P. 701.
216. *Кишиневский М.Х.* О теоретической работе Данквертса в области абсорбции // Журн. прикл. химии. 1954. Т. 27, № 4. С. 382.
217. *Кишиневский М.Х.* К теории абсорбционных процессов, сопровождающихся реакциями второго порядка // Там же. С. 450.
218. *Dankwerts P.V.* Gas absorption accompanied by chemical reaction // AIChE Journal. 1955. Vol. 1. P. 456.
219. *Данквертс П.В.* Абсорбция газов жидкостями // Теорет. основы хим. технологии. 1967. Т. 1, № 1. С. 31.
220. *Hatta S.* Absorption velocity of gases by liquids // J. Soc. Chem. Ind. (Jap.). 1928. Vol. 31. P. 869.
221. *Johnstone H.F., Pigford R.L.* Distillation in a wettedwall column // Trans. Amer. Inst. Chem. Eng. 1942. Vol. 38. P. 25.
222. *Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч.* Массопередача. М.: Химия, 1982. 695 с.
223. *Холпанов Л.П.* К теории пленочного двухфазного массообмена в отсутствие массовых сил // Инж.-физ. журн. 1965. Т. 8, № 5. С. 579.
224. *Холпанов Л.П.* Некоторые математические основы теории химико-технологи-

ческих процессов // Тр. науч.-техн. конф. Машиностроит. секция. Тула, 1965. С. 195.
225. *Воротилин В.П., Крылов В.С.* К теории массообмена между ламинарным потоком газа и стекающим ламинарным слоем жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1968. Т. 2, № 2. С. 373.
226. *Галиуллин М.Ф., Семенов П.А.* Массоотдача в тонких слоях жидкости при восходящем течении // Там же. С. 169.
227. *Позин М.Е.* Теория хемосорбции. Сообщ. IX. Теоретические основы скрубберной абсорбции // Журн. прикл. химии. 1948. Т. 21, № 1. С. 58.
228. *Бабак В.Н., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Установившийся массообмен при ламинарном течении пленки жидкости и газа в режиме нисходящего прямотока // Теорет. основы хим. технологии. 1971. Т. 5, № 1. С. 13.
229. *Бабак В.Н., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Установившийся массообмен в системе жидкость–газ в условиях ламинарного противоточного движения // Там же. № 2. С. 179.
230. *Бабак В.Н., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Сравнение результатов численного решения задачи двухфазного безволнового пленочного массообмена с экспериментальными данными // Там же. 1974. Т.7, № 1. С. 3.
231. *Бабак В.Н., Бабак Т.Б., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Численное решение задачи об установившемся двухфазном массообмене при ламинарном течении пленки жидкости и газа в режимах прямоточного и противоточного движения фаз // Тепло- и массоперенос: Тепло- и массоперенос в технологических процессах. Минск, 1972. Т. 4. С. 238.
232. *Гильденблат И.А., Лошаков А.Л., Крашенинников С.А., Родионов А.И.* О влиянии коэффициента диффузии на массоотдачу в пленке жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1969. Т. 3, № 2. С. 305.
233. *Терновская Н.Н., Белопольский А.П.* Абсорбция газа в присутствии поверхностно-активных веществ // Журн. физ. химии. 1952. Т. 26, № 8. С. 1090.
234. *Малюсов В.А.* Исследование массообмена в процессе пленочной абсорбции: Автореф. дис. ... канд. хим. наук. М., 1951. 23 с
235. *Авдонин Ю.А., Олевский В.М., Попов Д.М.* Исследование массообмена в трубках с орошаемыми стенками при противотоке газа // Хим. пром-ть. 1966. № 11. С. 59.
236. *Крашенинников С.А.* Исследование абсорбции аммиака соляным раствором в аппаратах скрубберного типа с насадками применительно к аммиачно-содовому процессу: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1950. 24 с.
237. *Sherwood T.K., Woerts B.B.* The role of eddy diffusion in masstransfer between phases / Ind. and Chem. 1939. Vol. 31. P. 1034.
238. *Лукач Ю.Е., Радченко Л.Б., Тананайко Ю.М.* Исследование теплоотдачи при охлаждении изделий из полимерных материалов стекающей пленкой воды // Хим. технология. 1972. Т. 1. С. 49.
239. *Chapman D.R., Rubesin M.W.* Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layes with arbitrary distribution of surface temperature // J. Aeronaut. Sci. 1949. Vol. 16, N 7. P. 547.
240. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк. 1967. 599 с.
241. *Baxter D.C., Reynolds W.C.* Fundamental solutions for heat transfer from nonithothermal flat plates // J. Aeronaut. Sci. 1958. Vol. 25, N 6. P. 403.
242. *Шеляг В.Р.* Расчет температурных полей в плоских щелевых каналах при ламинарном течении газа // Инж.-физ. журн. 1967. Т. 12, № 2. С. 227.
243. *Алексашенко В.А.* Сопряженная стационарная задача теплообмена в полубесконечной трубе с движущейся жидкостью с учетом диссипации механической энергии // Там же. 1968. Т. 14, № 1. С. 100.
244. *Холпанов Л.П., Бабак Т.Б., Бабак В.Н., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Сопряженный теплообмен между пленкой жидкости и твердой стенкой // Там же. 1977. Т. 32. № 6. С. 1091.
245. *Бабак Т.Б., Заблоцкая Н.С., Бабак В.Н., Холпанов Л.П., Малюсов В.А.* О применимости уравнения конвективной теплопередачи при расчете матричных теплообменников // Теорет. основы хим. технол. 1985. Т. 19, № 4. С. 488.
246. *Дилевская Е.В.* Криогенные микротеплообменники. М.: Машиностроение, 1978. С. 164.

247. *Кейс В.М., Лондон А.Л.* Компактные теплообменники. М.: Энергия, 1967. С. 222.
248. *Бабак В.Н., Бабак Т.Б., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* О применимости уравнения аддитивности фазовых диффузионных сопротивлений для средних коэффициентов теплоотдачи // Теорет. основы хим. технол. 1978. Т. 12, № 4. С. 483.
249. *Микулин Е.И., Шевич Ю.А., Потапов В.Н.* Исследование эффективности перфорированных пластин матричного теплообменника // Хим. машиностроение. 1979, № 5. С. 13.
250. *Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* К расчету двухфазного тепломассообмена при турбулентном течении пленки жидкости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1514.
251. *Холпанов Л.П., Бабак В.Н., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Исследование тепло- и массообмена при турбулентном течении пленки жидкости и газа в режимах прямотока // Теорет. основы хим. технологии. 1979. Т. 13, № 3. С. 323.
252. *Холпанов Л.П., Бабак Т.Б., Бабак В.Н., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Двухфазный тепломассообмен при турбулентном течении пленки жидкости и газа в режимах прямотока и противотока // Тепломассообмен: Материалы VI Всесоюз. конф. по тепломассообмену. Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1980. Т. 5. С. 3.
253. *Кафаров В.В.* Основы массопередачи. М.: Высш. шк. 1979. 439 с.
254. *Stewart W.E., Prober R.* Matrix calculation of multikomponent mass transfer in isotermal systems // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1964. Vol. 3, N 3. P. 224.
255. *Toor H.L.* Solution of linearized equation of mylticomponent mass transfer 11. Matrix methods // AIChE Journal. 1964. Vol. 10, N 4. P. 460.
256. *Александров И.А.* Массопередача при ректификации и абсорбции многокомпонентных смесей. М.: Химия, 1975. 320 с.
257. *Krishna R., Standart G.L.* Mass and energy transfer in multicomponent system // Chem. Eng. Commun. 1979. Vol. 3, N 4–5. P. 201.
258. *Smith L.W., Taylor R.* Film model for multicomponent mass transfer: a statistical comparison // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1983. Vol. 22, N 1. P. 97.
259. *Toor H.L.* Prediction of efficiencies and mass transfer on a stage with multicomponent systems // AIChE Journal. 1964. Vol. 10, N 4. P. 545.
260. *Мазаев В.Н., Каталов А.И., Плановский А.Н.* Расчет массопередачи при ректификации многокомпонентных смесей // Теорет. основы хим. технологии. 1980. Т. 14, № 1. С. 14.
261. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Новый метод расчета массопередачи в двухфазных многокомпонентных системах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 684.
262. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет двухфазного многокомпонентного массопереноса // Теорет. основы хим. технологии. 1985. Т. 19, № 5. С. 579.
263. *Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 930 с.
264. *Кениг Е.Я., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет многокомпонентного массообмена в присутствии инертных компонентов // Теорет. основы хим. технологии. 1982. Т. 16, № 6. С. 1519.
265. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я., Малюсов В.А.* Расчет сопряженного двухфазного совместного тепломассопереноса в многокомпонентных смесях // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49, № 3. С. 421.
266. *Кениг Е.Я., Холпанов Л.П., Малюсов В.А., Жаворонков Н.М.* Расчет тепломассопереноса в двухфазных многокомпонентных системах // Журн. прикл. химии. 1986. Т. 59, № 5. С. 1044.
267. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я., Малюсов В.А.* Расчет совместного тепломассообмена для пленочного противоточного течения жидкости и газа // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51, № 1. С. 26.
268. *Кениг Е.Я., Холпанов Л.П., Малюсов В.А.* Метод расчета многокомпонентного массопереноса, осложненного химическими реакциями // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 3. С. 662.

269. *Toor H.L.* Dual diffusion-reaction coupling in ferst order multicomponent systems // Chem. Eng. Sci. 1965. Vol. 20, N 11. P. 941.
270. *Delancey G.B., Chiang S.H.* Analysis of nonisothermal multicomponent diffusion with chemical reaction // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1970. Vol. 9, N 3. P. 344.
271. *Smith L.W., Taylor R.* Film model for multicomponent mass transter: a statistical comparison // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1983. Vol. 22, N 1. P. 97.
272. *Delancey G.B.* Multicomponent Film-penetration Thevey and flux expressions // Chem. Eng. Sci. 1974. Vol. 29, N 12. P. 2315.
273. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
274. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я., Малюсов В.А.* Многокомпонентный тепломассоперенос при турбулентном течении пленки жидкости // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57, № 1. С. 16.
275. *Grossman G., Heath M.T.* Simultaneous heat mass transfer in absorption of gases in turbulent liquid film // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol. 27, N 12. P. 2365.
276. *Холпанов Л.П., Кениг Е.Я.* Расчет многокомпонентной неизотермической абсорбции в турбулентной пленке жидкости // Тез. докл. III Всесоюз. совещания по проблеме "Абсорбция газов". М., 1987. Ч. 2. С. 142.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1. ГИДРОДИНАМИКА ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ СТЕКАНИИ 7

Глава 2. ГИДРОДИНАМИКА ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА 31

§ 2.1. Аналитический расчет волновых параметров пленки жидкости при заранее заданном профиле скорости 31

§ 2.2. Численный расчет волновых параметров пленки жидкости при взаимодействии с ней газового потока 36

Глава 3. МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ 43

§ 3.1. Механизм полного перемешивания (параболическое распределение скорости) 44

§ 3.2. Механизм непрерывного роста диффузионного слоя (параболическое распределение скорости) 50

§ 3.3. Механизм полного перемешивания (линейное распределение скорости) 52

§ 3.4. Механизм непрерывного роста диффузионного слоя (линейное распределение скорости) 54

§ 3.5. О статистической природе массообмена 55

§ 3.6. Сравнение теории с экспериментальными данными по массообмену 57

Глава 4. МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ НА КОНТАКТНЫХ УСТРОЙСТВАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ 62

§ 4.1. Массообмен на поверхности вращающегося цилиндра 62

§ 4.2. Массообмен в роторных аппаратах со скребками или нитями-турбулизаторами 67

§ 4.3. Массообмен на стенке с регулярной шероховатостью 69

Глава 5. ГИДРОДИНАМИКА И МАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА 78

§ 5.1. Ламинарный режим. Однофазная задача 78

§ 5.2. Турбулентный режим. Однофазная задача 91

§ 5.3. Ламинарный режим. Двухфазная задача (влияние градиента поверхностного натяжения) 99

§ 5.4. Турбулентный режим. Двухфазная задача 102

§ 5.5. Влияние градиента поверхностного натяжения на эффективность массообмена 106

Глава 6. СОВМЕСТНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АБСОРБЦИИ 107
§ 6.1. Пленка жидкости на гидродинамически стабилизированном участке. Двухфазная задача 107
§ 6.2. Обобщенная модель волнового пленочного тепломассообмена 111
§ 6.3. Тепломассообмен при испарительном охлаждении. Двухфазная задача 112
§ 6.4. Тепломассообмен в системах, состоящих из совокупности капель или пузырьков 115

Глава 7. ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СПИРАЛИ АРХИМЕДА 120
§ 7.1. Однофазный массообмен. Метод интегральных соотношений 122
§ 7.2. Двухфазный массообмен. Метод интегральных соотношений 127
§ 7.3. Однофазный массообмен. Метод поверхностей равных расходов . . 130
§ 7.4. Двухфазный массообмен. Метод поверхностей равных расходов . . 138
§ 7.5. Однофазный и двухфазный теплообмен (метод поверхностей равных расходов) 141

Глава 8. ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН В ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЯХ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА 142
§ 8.1. Ламинарная струя жидкости 142
§ 8.2. Турбулентная струя газа 152
§ 8.3. Конденсация на ламинарной струе 160
§ 8.4. Конденсация на турбулентной струе 165
§ 8.5. Влияние переменного расхода по сечению струи при конденсации на ламинарных и турбулентных струях 170

Глава 9. ЛАМИНАРНАЯ ПЛЕНОЧНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ НА СФЕРЕ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА 174

Глава 10. ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН КАК СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА 178
§ 10.1. Горизонтальный канал (отсутствие массовых сил). Ламинарный режим 178
§ 10.2. Вертикальный канал. Ламинарный режим 181
§ 10.3. Сравнение теории двухфазного безволнового пленочного массообмена с экспериментальными данными по абсорбции и десорбции газов 189
§ 10.4. Сопряженный теплообмен между пленкой жидкости и твердой стенкой 194
§ 10.5. Двухфазный тепломассообмен при турбулентном течении пленки жидкости и газа в режимах восходящего и нисходящего течений фаз 207

Глава 11. СОПРЯЖЕННЫЙ МАССОПЕРЕНОС И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ 218
§ 11.1. Двухфазный многокомпонентный массоперенос 219
§ 11.2. Двухфазный тепломассоперенос (нисходящий прямоток) 225
§ 11.3. Двухфазный тепломассоперенос (противоток) 235
§ 11.4. Массоперенос, осложненный химическими реакциями 239
§ 11.5. Совместный тепломассоперенос 251

ЛИТЕРАТУРА 258

Научное издание

Холпанов Леонид Петрович
Шкадов Виктор Яковлевич

ГИДРОДИНАМИКА
И ТЕПЛОМАССООБМЕН
С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

Утверждено к печати
Институтом новых химических проблем
АН СССР

Художник *В.Н. Тикунов*
Художественный редактор *И.Ю. Нестерова*
Технический редактор *И.И. Джиоева*
Корректор *Г.В. Дубовицкая*

Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 39627

Подписано к печати 11.12.89. Т – 18940
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 17,0. Усл.кр.-отт. 17,0. Уч.-изд.л. 17,7
Тираж 1600 экз. Тип. зак. 2174
Цена 3 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука" 117864 ГСП-7,
Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства "Наука"
199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12