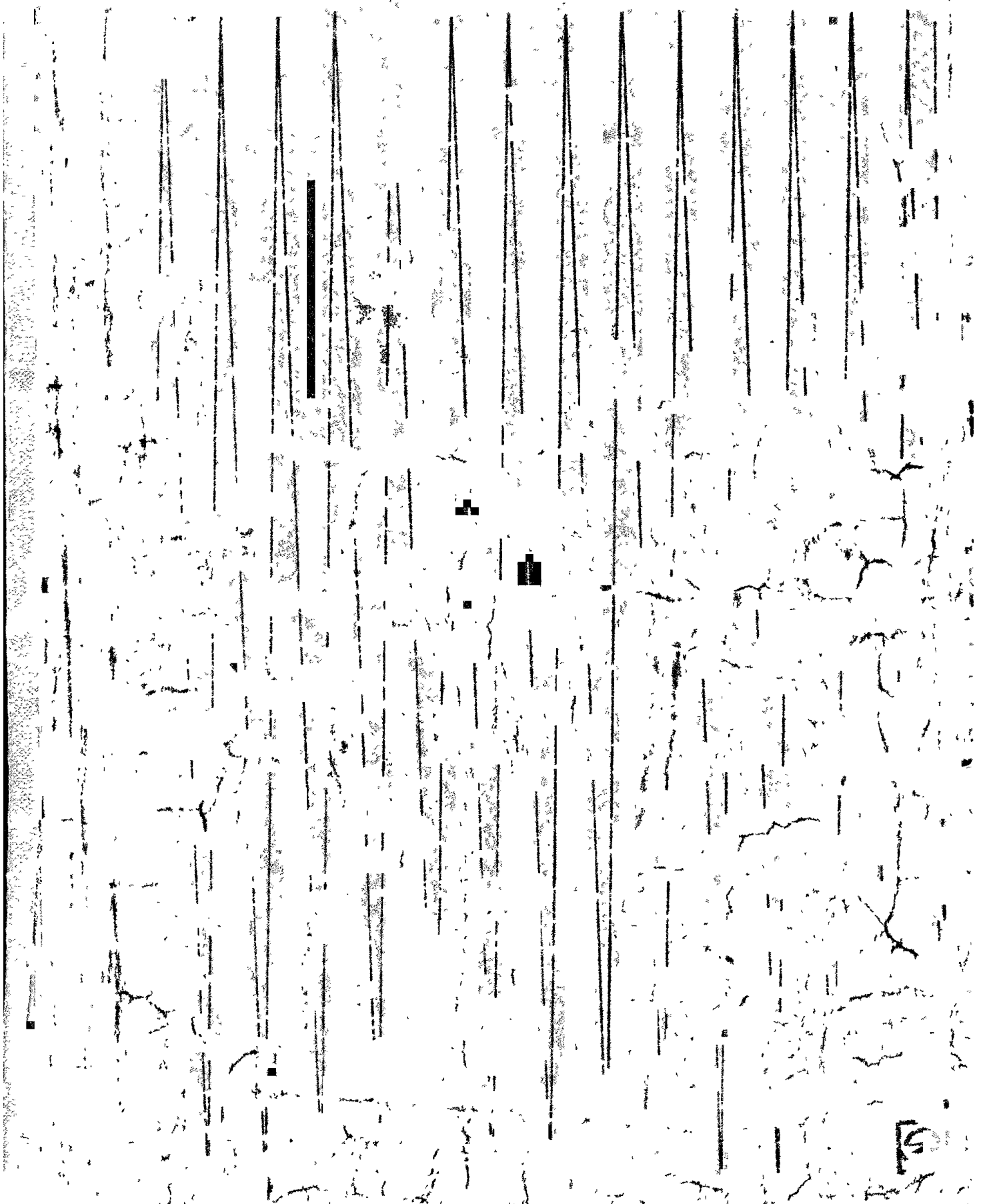
Библиотека СОК

Чит зал

Г. АТАНКАР, Д. СПОЛДИНГ

П-20



С. ПАТАНКАР, Д. СПОЛДИНГ

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Перевод с английского канд. техн. наук *З. П. Шульмана*
и канд. техн. наук *Г. Н. Пустынцева*

Под редакцией
акад. АН БССР *А. В. Лыкова*

82280

«ЭНЕРГИЯ»
МОСКВА, 1971

6П2.2
П 20
УДК 536.24

С. Патанкар, Д. Сполдинг

П 20 Тепло- и массообмен в пограничных слоях. Пер. с англ. М., «Энергия», 1971.

128 с. с ил.

В книге излагается сравнительно простой и эффективный инженерный метод численного решения полной системы уравнений пограничного слоя, позволяющий достаточно точно рассчитывать сопротивление и теплообмен поверхности, обтекаемой ламинарным или турбулентным высокоскоростным потоком газа при учете вдува и отсоса. Дается обширный справочный материал и программа машинного счета.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся аэродинамикой и конвективным тепломассопереносом.

3-3-2
357-70

6П2.2

Heat and Mass Transfer in Boundary Layers
S. V. Patankar, D. B. Spalding
Morgan-Grampian,
London, 1967

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагаемая советскому читателю монография С. В. Патанкара и Д. Б. Сполдинга «Тепло- и массообмен в пограничных слоях» продолжает и развивает научные идеи выдающегося английского ученого в этой области знаний Д. Б. Сполдинга, знакомые советскому читателю по двум его предыдущим книгам, переводы которых на русский язык вышли в СССР сравнительно недавно («Основы теории горения», Госэнергоиздат, 1959 г.; «Конвективный массоперенос», изд-во «Энергия», 1965 г.)

Отличительной чертой творческих поисков этого талантливого и эрудированного исследователя является стремление создать достаточно точный и надежный, универсальный метод расчета самого обширного круга задач конвективного переноса импульса тепла и массы, одинаково приемлемый как для научных работников, так и для инженеров, работающих в различных отраслях техники и производства (авиация, энергетика, химическая и пищевая технология и др.). В прошлом Д. Б. Сполдингу удалось разработать такой унифицированный инженерный расчетный метод, опирающийся на несложную модель потока Рейнольдса. Метод был по необходимости предельно упрощенным, поскольку его автор задался целью обойтись только средствами и приемами элементарной математики, отказавшись от привлечения аппарата математической физики и численного анализа. Вследствие этого Д. Б. Сполдингу тогда пришлось отказаться от решения сложных дифференциальных уравнений переноса и использования эффективной теории пограничного слоя. Расчеты базировались на алгебраических соотношениях интегральных балансов сохранения. Естественно, такой подход, несмотря на его универсальность, простоту и доступность для инженера, был все же ограниченным в своих возможностях и не позволял решать некоторые задачи совместного вынужденного тепло- и массообмена, представляющие интерес для новой техники.

Разработка общей теории и унифицированого расчетного метода, пригодного для решения плоских и пространственных задач ламинарного и турбулентного пограничных слоев, свободных и пристенных струй — дело исключительно трудное, как в математическом, так и в физическом отношениях. Создание такого метода и внедрение его в расчетную практику — несомненный успех и большая заслуга Д. Б. Сполдинга и его ученика С. В. Патанкара. Важно отметить исключительные ясность, полноту и четкую продуманность отдельных деталей метода и расчетной схемы: как ее математических формулировок, так и физических гипотез, вплоть до подробной и отработанной вычислительной программы. Авторы не ограничились одним лишь разбором и описанием отдельных этапов и операций расчета и всей процедуры в целом. В монографию включены решения новых и интересных задач, приведены обстоятельные сопоставления с самыми свежими экспериментальными исследованиями и фактами.

Мы полагаем, что книга явится весьма интересной, полезной и ценной для специалистов, интересующихся процессами конвективного тепло- и массопереноса, а также для широкого круга научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов теплофизического и теплоэнергетического профилей.

Язык и стиль оригинала нелегки для перевода на русский язык, и переводчикам З. П. Шульману и Г. Н. Пустынцеву пришлось преодолеть немало трудностей, чтобы с максимальной точностью изложить материал книги.

А. В. Лыков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью данной книги является более широкое ознакомление специалистов с недавно разработанным ее авторами методом расчета процессов переноса в пограничном слое. Метод применим ко многим другим задачам, описываемым уравнениями параболического типа. В настоящей книге он используется для расчета установившихся двумерных пограничных слоев. Большая часть книги посвящена турбулентным течениям, однако с равным и даже большим успехом методом можно пользоваться для расчета ламинарных пограничных слоев.

Новый метод основан на результатах многолетних исследований и разработок, выполненных авторами в отделе термодинамики и механики жидкости инженерного факультета Имперского колледжа Лондонского университета.

Основные принципы, положенные в основу этих разработок, и схема построения предлагаемого метода обсуждаются в § 0.3 введения.

Мы выражаем благодарность тем нашим коллегам, чьи имена упоминаются в книге, к опыту и помощи которых мы прибегали. Нам также приятно выразить признательность господину П. Дэйлу за помощь, оказанную им при выполнении расчетов, и мисс М. П. Стилл за проведенную ею техническую работу при подготовке рукописей и публикации данной книги.

В процессе создания нового расчетного метода авторам пришлось преодолеть многочисленные трудности и ошибки. Справедливости ради отметим, что порядок изложения материала в книге и основное ее содержание заимствованы непосредственно из докторской диссертации одного из нас (С. В. Патанкара) и лишь введение было написано заново. Остальная часть текста претерпела лишь незначительные изменения, а программа машинного счета не изменялась вообще.

Авторы

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Символ	Смысл	Номер формулы
a	Группа коэффициентов при конвективном члене	2.2-4
A	Коэффициент в общей записи конечно-разностного уравнения	2.4-31
A_u	Коэффициент разностного уравнения для величины u	2.4-35
A_+	Коэффициент затухания в формуле Ван-Дриста	1.3-7
A_*	Трансформированный коэффициент затухания	1.4-18
A'	Трансформированный коэффициент	2.7-2
b	Группа коэффициентов при конвективном члене	2.2-4
B	Коэффициент разностного уравнения	2.4-31
B_u	Коэффициент разностного уравнения для величины u	2.4-35
B'	Трансформированный коэффициент	2.7-2
c	Группа коэффициентов при члене диффузии	2.2-4
c_f	Коэффициент сопротивления трения ($\equiv 2\tau_s\ \rho_G u_G^2$)	
$\bar{c}_f$	Осредненный коэффициент сопротивления трения	
C	Коэффициент разностного уравнения	2.4-31
C_u	Коэффициент разностного уравнения для скорости u	2.4-35
d	Член, обозначающий источник	2.2-4
E	Постоянная интегрирования	4.1-1
E_*	Постоянная интегрирования	1.4-62
F	Параметр профильного градиента давления	1.4-77
F'	Группа коэффициентов, включающих F_*	4.3-17
g_1, g_2, g_3, g_4	Коэффициенты в разностной записи конвективного члена	2.4-13
g_5, g_6	Коэффициенты разностного выражения для члена диффузии	2.4-20
G	Параметр в формуле для величины скольжения на свободной границе для динамической задачи	2.5-20
G_Φ	Параметр в формуле для Ф-величины скольжения на свободной границе в тепловой и диффузионной задачах	2.5-24
h	Удельная энтальпия	1.3-1
h_+	Безразмерная энтальпия	1.4-44
$\bar{h}$	Энтальпия торможения	1.1-5
$\bar{h}_{+\text{ад}}$	Безразмерная энтальпия в адиабатических условиях	1.4-37
h	Энтальпия адиабатической стенки	1.4-42
H	Коэффициент восстановления для пристеночной области	1.4-40
I	Интеграл $\left\{\equiv (\psi_E - \psi_I)\int_0^\omega (\rho u)^{-1} d\omega\right\}$	2.8-9
J	Диффузионный поток в положительном y-направлении	1.4-2
J_+	Безразмерный поток	1.4-8
$J_{\text{полн}}$	Полный поток через стенку	2.6-1
k_1, k_2, k_3	Группа коэффициентов в выражении для линии симметрии	2.6-9
K	Константа пути перемещения	1.3-6
l	Длина пути перемешивания	1.3-5
m_j	Массовая доля химического j-компонента	1.1-4
m_+	Безразмерная скорость массопереноса (удельная плотность массового потока)	1.4-7
$\dot{m}''$	Массовый поток через границу	1.4-1
M	Параметр массопереноса	1.4-78
m_*	$\equiv m_+/K$	1.4-22
M_*	$\equiv M/K^2$	1.4-83
M_b	Трансформированный параметр массопереноса	2.6-4
h	Показатель степени Ф-профиля вблизи свободной границы	2.5-22
N	Число полос сетки поперек слоя	
P	Давление	1.1-3
P_+	Безразмерный градиент давления	1.4-6
P_*	$\equiv P_+/K$	1.4-24
P	Сопротивление ламинарного подслоя	4.1-2
P_*	Постоянная интегрирования	1.4-66
P_1, P_2, P_3	Коэффициенты конечно-разностного выражения конвективного члена	2.4-3
Q	Коэффициент конечно-разностного выражения конвективного члена	2.4-7
R_1, R_2, R_3	Коэффициенты конечно-разностного выражения конвективного члена	2.4-9
r	Расстояние от точки пограничного слоя до оси симметрии	1.1-1
R	Число Рейнольдса для пристеночной области	1.4-76
R_*	$\equiv RK^2$	1.4-81
R_j	Скорость генерирования (обильность источника) химического j-вещества	1.4-1

R_x	Число Рейнольдса ($\equiv \rho_G u_G x/\mu_G$)	
s	Безразмерное напряжение трения на стенке	1.4-79
s_*	$\equiv s/K^2$	1.4-84
s_1, s_2, s_3, s_4	Коэффициенты в конечно-разностном выражении члена источника в уравнении движения	2.4-25
S	Безразмерный диффузионный поток	1.4-80
S_*	$\equiv S/K^2$	1.4-85
$S_{*(1)}$	Величина S_* для $\sigma_t = 1$ и одинаковых значений σ/σ_t	1.4-90
St	Число Стантона	
T	Абсолютная температура	3.2-2
u	Продольная составляющая скорости	1.1-2
u_+	Безразмерная скорость	1.4-5
u_*	$\equiv Ku_+$	1.4-17
u_B	Скорость в узлах сетки, расположенных вниз по течению	2.8-5
u_s	Составляющие скорости на стенке в положительном y-направлении	
V	Группа символов в выражениях для граничных условий потоков	2.6-3
x	Расстояние вдоль течения	1.1-2
y	Расстояние, отсчитываемое от I-границы поперек линий тока	1.1-1
y_+	Безразмерная ордината	1.4-4
y_+	$\equiv Ky_+$	1.4-16
y_i	Характеристическая толщина пограничного слоя	1.3-6
α	Угол между направлением x и осью симметрии	1.1-1
β	Показатель степени профиля скорости в пристенной области	2.5-1
γ	Показатель степени Ф-профиля в пристенной области	2.5-1
Λ	Константа в законе пути перемешивания	1.3-6
μ	Молекулярная (ламинарная) вязкость жидкости	1.3-7
$\mu_{эф}$	Эффективная вязкость	1.3-2
ρ	Плотность среды	1.1-2
σ	Молекулярное (ламинарное) число Прандтля или Шмидта	1.3-8
$\sigma_{эфф}$	Эффективное число Прандтля или Шмидта	1.3-8
σ_t	Турбулентное число Прандтля или Шмидта	1.3-8
τ	Местное напряжение трения	1.3-3
τ_+	Безразмерное напряжение трения	1.4-3
Φ	Обобщенный символ зависимой переменной	1.4-2
Φ_+	Безразмерная величина Φ	1.4-9
Φ_*	$\equiv K\Phi_+$	1.4-23
$\Phi_{*(1)}$	Величина Φ_* для $\sigma_t = 1$ и одинаковых значений σ/σ_t	1.4-57
ψ	Функция тока	1.1-2
ω	Безразмерная функция тока	2.1-1

Подстрочные индексы [1]

ад	Условия адиабатической стенки	1.4-34
B	Граница, используемая в сеточных формулах	2.3-4
D	Точка ячейки сетки, расположенная ниже по течению	2.4-1
D_+, D_-, DD_+, DD_-	Точки сетки, расположенные на той же ординате, что и D-точка при фиксированной абсциссе $x = x_0$	2.4-3, 2.4-1
E	Внешняя граница слоя	2.1-1
G	Свободная граница, условия во внешнем течении	2.3-1
h	Указывает отношение к энтальпии	1.1-5
J	Внутренняя граница слоя	1.1-1
j	Относится к j-компоненте химического вещества	1.1-4
отр	Относится к отрыву пограничного слоя	4.3-8
s	Стенка	1.4-1
t	Условия развитой турбулентности	1.3-8
U	Точка сетки, расположенная выше по течению, нежели D-точка	2.4-1
U_+, U_-, UU_+, UU_-	Точки сетки, расположенные на той же ординате, что и U-точка при фиксированной абсциссе $x = x_0$	2.4-18, 2.4-18
0	Условия безградиентного протекания или отсутствия массопереноса; условия постоянства физических свойств	4.3-6

[1] Дополнительный перечень индексов содержится в разд. 2.5-1.

ВВЕДЕНИЕ

ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

0.1. РАССМАТРИВАЕМАЯ ЗАДАЧА

Определение области явления. Пограничный слой в грубом приближении можно охарактеризовать как область в движущейся жидкости, где преобладает одно преимущественное направление движения. Касательные напряжения, тепловые и диффузионные потоки в этой области существенно изменяются лишь в направлении, перпендикулярном этому преимущественному направлению. Приведем несколько примеров, поясняющих такое определение.

Струя, образовавшаяся при вдуве горячего воздуха через отверстие в резервуар с покоящейся в нем воздушной средой или в сопутствующий поток холодного воздуха, дает пример пограничного слоя. Основное направление движения жидкости в струе совпадает с осью отверстия; градиенты скорости и температуры, порождающие касательные напряжения и тепловые потоки, значительны главным образом в радиальном направлении. Даже если заменить горячий воздух химически реагирующим подогретым водородом, то и тогда результирующий процесс все-таки происходит в пограничном слое, поскольку теплопроводность и диффузия в осевом направлении незначительно влияют на стабилизацию пламени.

При нормальном соударении струи горячего воздуха с твердой поверхностью, например охлаждаемым воздухом днищем сосуда, возникает течение, которое нельзя полностью отнести к разряду потоков с пограничными слоями. В этом случае существуют два основных направление течения: одно — вблизи отверстия, перпендикулярное плоскости днища резервуара, другое — радиальное в плоскости днища от центра в периферии в сторону возрастания радиуса. В месте соударения струи с поверхностью оба направления течения равноправны. Поэтому, хотя области пограничного слоя существуют у отверстия и на большом радиальном расстоянии от него вдоль поверхности, течение в целом нельзя отнести к пограничному слою. Течение в длинной прямой трубе постоянного сечения обычно подходит под схему пограничного слоя (исключая случай движения, закрученного настолько, что в приосевой области образуется возвратное движение). В этом случае основным направлением движения является осевое; касательные напряжения и тепловые потоки действуют на цилиндрические поверхности с образующими, параллельными этой оси. Однако если в каком-либо месте труба внезапно расширяется, то сразу же за этим сечением образуется обратный ток жидкости, который не относится к течениям с пограничным слоем.

При стационарном обтекании воздухом крылового профиля на лобовой его части обычно формируется пограничный слой; в данном случае преимущественным направлением движения является направление вдоль поверхности. В непосредственной близости от обтекаемой стенки возникают касательные напряжения и тепловые потоки, осуще-

ствляющие перенос количества движения и энергии по нормали к поверхности профиля. При больших углах атаки линии тока резко отклоняются от поверхности профиля вблизи его хвостовой части. Вниз по течению от этого места, называемого точкой отрыва пограничного слоя, не существует какого-либо явно выраженного преимущественного направления движения жидкости. В действительности у поверхности профиля в заотрывной области возникает возвратное движение, т. е. течение в направлении, противоположном основному потоку.

В настоящей работе нас будут интересовать лишь задачи пограничного слоя, не обязательно пристеночного. Мы ограничимся анализом только двумерных пограничных слоев, главным образом турбулентных. Сделаем некоторые замечания по поводу этих ограничений.

Двумерным назовем такое течение, для которого интересующие нас зависимые переменные, например скорость, температура, касательные напряжения и т. д., являются функциями двух независимых переменных. Различают два типа двумерных течений: осесимметричное и плоское. Последнее может рассматриваться как частный случай первого, когда расстояние до оси симметрии во много раз больше радиальных размеров интересующей нас области пограничного слоя.

Двумерный осесимметричный пограничный слой образуется, например, при выходе струи из круглого профилирующего насадка в спутный поток. Если этот поток направлен наклонно к оси насадка, то результирующее течение становится трехмерным. Тогда скорость течения будет уже функцией удаления от среза насадка, расстояния до оси насадка и угла между нормалью к этой оси и направлением спутного потока. В нашей работе рассматривается только первый из приведенных случаев осесимметричного течения.

При истечении струи из широкой щели постоянной высоты в резервуар с покоящейся средой или в спутный поток, движущийся параллельно продольной оси щели, результирующий пограничный слой будет двумерным и плоским, если скорости движения жидкости в спутной струе и в резервуаре не будут зависеть от расстояния до устья щели. В данном случае даже при наличии у жидкости в резервуаре постоянной составляющей скорости в направлении, параллельном плоскости выходного сечения щели, течение не будет трехмерным. Отсюда следует, что течение может быть двумерным и тогда, когда существуют не равные нулю составляющие скорости по трем направлениям.

Другим примером подобной двумерной задачи может служить течение вблизи диска, вращающегося в покоящейся среде. Радиальная, нормальная и окружная составляющие скорости являются самостоятельными зависимыми переменными. Однако двумерность такого сечения обусловлена числом независимых переменных; в данном случае ими могут быть радиус диска и расстояние по нормали от его поверхности.

Закрученные потоки в общих чертах будут рассмотрены нами в конце данной книги.

Особое внимание, уделяемое в нашей работе турбулентным пограничным слоям, объясняется следующим: во-первых, большинство пограничных слоев, встречающихся в инженерной практике и в природе, по своей структуре являются турбулентными; во-вторых, интерес к явлениям переноса в турбулентной жидкости в настоящее время гораздо больший, нежели для ламинарной.

Вместе с тем предлагаемые в книге методы в равной степени приемлемы для расчета ламинарного и турбулентного течений жидкости, причем для первых получаются даже более надежные результаты.

Хотя большинство примеров относилось к газам, разработанная теория в одинаковой мере применима и к жидкостям при обязательном условии однофазности пограничного слоя. Она не содержит допу-

щений о постоянстве величин плотности и вязкости жидкости, о малости чисел Маха и не ограничивает количества зависимых переменных, подлежащих совместному определению.

Предлагаемую теорию можно применять к задачам, включающим экзотермические химические реакции, шероховатость и проницаемость стенок, а также влияние гравитационных сил.

Мы, конечно, лишены возможности непосредственно рассмотреть все вышеупомянутые случаи в столь краткой работе. Они, однако, вписываются в рамки предлагаемой теории.

Прикладная значимость. Двумерные пограничные слои, или близкие им, встречаются во многих инженерных приложениях, например на лопатках турбины, охлаждаемых стенках камер сгорания, в струесмесительных устройствах химической промышленности, на внутренних стенках газопроводов, на поверхностях теплообменников и крыльев самолетов и т. д.

Множество примеров можно привести из области метеорологии и физиологии.

Отметим в то же время, что трехмерные пограничные слои на практике встречаются чаще, чем двумерные, поэтому исключение их из рассмотрения в данной работе вызывает сожаление, хотя все же является неизбежным. Теория трехмерного пограничного слоя все еще находится в эмбриональном состоянии, тем не менее есть основание верить в то, что ее развитие может быть ускорено только путем усовершенствования и более полной разработки теории двумерного пограничного слоя. Поэтому данная монография имеет двойное значение: во-первых, как исследование само по себе, и, во-вторых, как предпосылка для будущих разработок.

Конструктору еще до изготовления важно знать, как будет действовать проектируемое им оборудование, и в этом ему неоценимую помощь оказывает расчет. Создание расчетных методов является одной из основных задач специалистов, работающих в области прикладных наук. В данной книге мы приводим метод расчета двумерных турбулентных пограничных слоев. Его назначение состоит в предвычислении любых представляющих для нас практический интерес характеристик или свойств потока на основе информации о заданных условиях эксперимента. К примеру, чаще всего мы стремимся предсказать распределения скоростей, толщины пограничного слоя, тепловые потоки через стенки для всех возможных случаев, существующих либо реально, либо в воображении конструктора.

Имеются самые разнообразные теории; их формы диктуются назначением. Некоторые теории описывают качественную сторону явлений, другие — количественную; в одних упор делается на описание, в других — на интерпретацию; целью некоторых теоретиков является определение различий между внешне подобными явлениями, другие же изучают их сходство.

Наша теория создана для прогнозирования, поэтому она количественная; мы делаем упор на наиболее общие физические ситуации и избегаем введения нетипичного, возможного лишь в каких-то особых случаях. Исключение в этом смысле делается лишь тогда, когда это нетипичное может быть охвачено более общей схемой.

Трудности в развитии теории. Важность теории двумерных пограничных слоев и то время, в течение которого они изучались, настолько велики, что будь это определяющим, то не было бы больше необходимости говорить о дальнейшем совершенствовании теории. Тот факт, что на ее создание ушло столь много времени, может быть объяснен двумя серьезными трудностями: одна из них математического характера, а другая может быть отнесена к разряду физических.

Математическая сложность заключалась в отсутствии эффективных методов решения дифференциальных уравнений. До тех пор, пока не были созданы цифровые вычислительные машины, отсутствовали возможности для численного решения краевых задач теории пограничного слоя. И хотя эти машины уже существуют 15 лет, поиски наиболее рациональных и экономичных вычислительных средств и оперативных приемов до сих пор не всегда успешны. Как мы полагаем, способ, описываемый ниже, явится первым достаточно простым, общим и недорогим в осуществлении. Он не создает сколько-нибудь серьезных ограничений как для исследователей, так и для конструкторов.

Второе препятствие, физического характера, не столь просто устранимо. Оно состоит в недостатке знаний законов переноса массы количества движения и энергии в турбулентном потоке жидкости. Все же есть и на этот счет некоторые полезные сведения. В последующих главах книги будет показано, что благодаря им возможны вполне успешные и надежные предсказания. До устранения вычислительных трудностей нельзя было определить, которая из многочисленных гипотез является наилучшей. Теперь мы полагаем, что благодаря преодолению препятствий, стоящих на пути быстрого обследования различных гипотез, появилась надежда на устранение трудностей физического характера, более быстрое, чем это имело место до сих пор.

0.2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Классификация расчетных методов. За последние 40 лет в литературе появились новые теории турбулентного пограничного слоя, сильно различающиеся по содержанию, форме, назначению и эффективности. Для обобщения всех этих теорий и анализа их сходства и существенных различий потребовалась бы целая глава книги. Вместо этого мы попытаемся пояснить существо большинства теорий в виде классификационной схемы, определяющей главные признаки, характерные черты и основу этих теорий.

Таблица 0.2-1 будет исходным пунктом нашего анализа.

Вертикальная разграничивающая линия указывает на то, что все теории включают в себя два аспекта: физический и математический. Первый содержит как хорошо обоснованные законы сохранения, так и менее надежные эмпирические соотношения, описывающие явления пе-

Таблица 0.2-1

Классификационная схема теорий турбулентного пограничного слоя

Физические предпосылки	Математические особенности
Полные теории	
Основанные на эмпирических данных выражения для локальных свойств, таких, как: эффективная вязкость эффективное число Прандтля эффективное число Шмидта	Вычислительные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных переноса массы, количества движений, энергии, химических и других субстанций
Явно интегральные теории	
Эмпирические соотношения, связывающие интегральные характеристики, такие, как: коэффициент поверхностного трения, толщина потери импульса и толщина вытеснения	Вычислительный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих интегральные свойства пограничного слоя

реноса в турбулентных потоках; второй аспект охватывает все те аналитические и вычислительные операции, благодаря которым действие общих физических законов, проявляющихся в конкретных условиях, может быть предсказано количественно.

Горизонтальная линия, разделяющая таблицу надвое, подчеркивает важное различие вычислительных методов. Выше нее помещены теории, построенные на дифференциальных уравнениях в частных производных, куда вводятся эмпирические данные для зависимостей «эффективных» коэффициентов переноса (вязкость, теплопроводность и т. д.) в турбулентно движущейся жидкости. Мы называем их «полными» теориями.

Методы, расположенные ниже горизонтальной линии, наоборот, исходят из менее общих уравнений и, естественно, опираются на эмпирическую информацию, более значительную по объему и разнообразную по своему характеру.

Эти теории названы нами «явно интегральными» по причинам, приведенным ниже.

Структура теорий, помещенных над горизонтальной чертой и под ней, характеризуется выбором различного рода. С математической точки зрения расчетные методы, расположенные выше черты в табл. 0.2-1, должны включать тот или иной из известных способов решения параболической системы дифференциальных уравнений в частных производных. Теории, помещенные ниже линии, опираются на конечную совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений, выбранных расчетчиком из множества уже используемых и тех, которые можно использовать. Выбор физических предпосылок в одинаковой мере обширен. Теории, находящиеся над линией, позволяют сделать выбор из нескольких выражений для эффективной вязкости, а для явно интегральных теорий выбор должен быть сделан из соответствующих соотношений, полученных обобщением экспериментальных данных, которые связывают различные интегральные характеристики пограничного слоя.

Приведем несколько примеров подобного выбора.

Существующие гипотезы об эффективных свойствах переноса турбулентной жидкости. Возможность рассматривать турбулентное движение жидкости как подчиняющееся ньютоновскому закону вязкости связана с концепцией Буссинеска [Л. 9], выдвинутой им в 1877 г. При таком подходе внимание фиксируется на эффективной вязкости $\mu_{эф}$, определяемой равенством

$$\mu_{эф} \equiv \tau/(du/dy), \tag{0.2-1}$$

где τ — эффективное касательное напряжение; u — скорость и y — расстояние.

Однако дать определение — одно дело, а вычислить — совсем другое.

Впервые определение величины $\mu_{эф}$ предложил Прандтль [Л. 83]. Исходя, несомненно, из представлений кинетической теории газов, он предположил, что величина $\mu_{эф}$ пропорциональна локальной плотности, некоторой длине l, типичной для структуры турбулентности, и характерной скорости флуктуационного движения. За последнюю Прандтль принял произведение l на $|du/dy|$, что привело к формуле

$$\mu_{эф} = \rho l^2 |du/dy|. \tag{0.2-2}$$

Величина l, получившая название «пути смешения», по мнению Прандтля, прежде всего определяется геометрией рассматриваемой системы течения, например она может быть пропорциональна расстоянию по нормали к поверхности в пристенной области.

Другие гипотезы исходили из предпосылки о неизменности величин $\mu_{эф}$ или $\mu_{эф}/\rho$, остающихся постоянными поперек пограничного слоя. Например, Трубчиков [Л. 123] и Прандтль [Л. 84] полагали, что в любом

поперечном сечении струи эффективная вязкость может быть вычислена по формуле

$$\mu_{эф} = \text{const}\, \rho\delta\,(u_{макс} - u_{мин}), \tag{0.2-3}$$

где δ — некоторая характеристика ширины струи, а $u_{макс}$ и $u_{мин}$ являются соответственно наибольшей и наименьшей скоростями в каждом поперечном сечении.

Клаузер [Л. 15] предложил сходное соотношение для внешней области пристеночного турбулентного пограничного слоя; постулируется, что эффективная вязкость постоянна и выражается формулой

$$\mu_{эф} = 0{,}018\rho u_G \delta_1, \tag{0.2-4}$$

где u_G — локальная скорость в ядре потока, а δ_1 — толщина вытеснения пограничного слоя.

Некоторые другие исследователи, придерживающиеся этой гипотезы, предлагают несколько отличные значения констант.

Колмогоров [Л. 52], Прандтль [Л. 85] и другие авторы независимо друг от друга связали вязкость с кинетической энергией турбулентного движения k:

$$k \equiv \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2), \tag{0.2-5}$$

где u', v', w' — пульсационные составляющие мгновенной скорости.

Выражение для $\mu_{эф}$ имеет вид:

$$\mu_{эф} = \rho k^{1/2} l f\,(\rho k^{1/2} l/\mu), \tag{0.2-6}$$

где l — снова локальный линейный масштаб турбулентности и μ — ламинарная вязкость.

Аргумент функции $f(\ldots)$ представляет собой локальное число Рейнольдса турбулентности. Сама функция с возрастанием ее аргумента должна стремиться к постоянной величине, чтобы ламинарная вязкость исчезла из соотношения (0.2-6) При малых значениях локального числа Рейнольдса величина f должна быть равной $\mu/(\rho k^{1/2} l)$; тогда $\mu_{эф}$ просто совпадает с μ. Поведение функции между этими предельными значениями неизвестно; в настоящее время оно должно определяться экспериментальным путем.

Модель Колмогорова — Прандтля, конечно, не единственная модель, учитывающая влияние μ на $\mu_{эф}$ при малых локальных числах Рейнольдса. Каждый реалистический метод расчета должен учитывать тот факт, что в непосредственной близости гладкой стенки вклад турбулентности в эффективную вязкость снижается до нуля. Например, те, кто для основной части пограничного слоя используют гипотезу Клаузера (0.2-4), обычно в пристеночной области применяют одну из разновидностей гипотезы о «пути смешения». Она имеет следующий вид:

$$\mu_{эф} = \rho y^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| f\left(\frac{\rho y^2}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{0.2-7}$$

Здесь роль локального числа Рейнольдса играет комплекс $(\rho y^2/\mu)\,|\partial u/\partial y|$. При больших его значениях функция f стремится к константе (обозначаемой обычно через K^2 и имеющей величину порядка 0,4). Кроме того, при малых значениях упомянутого комплекса функция f становится равной обратной величине аргумента, так что $\mu_{эф}$ совпадает с μ. Многие авторы предлагали различные формы этой функции; в настоящее время появилась некоторая уверенность в определении наиболее реалистической из них.

Эмпирические предпосылки явно интегральных расчетных методов. Теории, не опирающиеся на решения дифференциальных уравнений в частных производных, не нуждаются в формулах для эффективной вязкости. Вместо этого для них требуются соотношения, связывающие друг с другом интегральные величины, которые появляются независимо от выбора типа обыкновенных дифференциальных уравнений и выражают закономерности, наблюдаемые в опытах. Здесь мы имеем возможность коснуться лишь некоторых из многих предположений или использованных соотношений такого рода.

Были найдены закономерности в изменениях формфакторов пристеночных пограничных слоев. Эти формфакторы обычно являются отношениями различным путем определяемых толщин пограничного слоя, например толщины потери импульса, толщины вытеснения, толщины потери кинетической энергии и т. д. Вигхард [Л. 130], Хэд [Л. 45], Вальц [Л. 129], Фернхольд [Л. 30], Николл и Эскудиер [Л. 67] предложили формулы, позволяющие выражать один формфактор через другой.

Многие исследователи получили соотношения, связывающие коэффициенты сопротивления трения и теплообмена на стенке с интегральными характеристиками пограничного слоя, такими, как толщина потери импульса, толщины вытеснения и энтальпии. Примеры таких соотношений могут быть найдены в работах Людвига и Тиллманна [Л. 58], Эскудиера, Николла и Сполдинга [Л. 28] и Амброка [Л. 3].

Другие функции, используемые в явно интегральных расчетных методах, обобщают экспериментальные данные с помощью выражения для диссипативного интеграла Трукенбродта [Л. 124], Эскудиера и Сполдинга [Л. 29] и Вальца [Л. 129] или закона увлечения Хэда [Л. 45]. По мере возрастания объема и достоверности экспериментальных данных формулы усложняются и уточняются. Однако число факторов, оказывающих практическое влияние, настолько велико, что эти функции еще далеки от своей законченной формы, удобной для практических целей. Большинство из них ограничивается однородностью свойств потока вблизи гладкой непроницаемой стенки и монотонными профилями скоростей без максимумов.

Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных полных теорий. Из-за нелинейности и строгой взаимосвязанности параболических уравнений они не могут быть успешно решены аналитическими приемами, и только численные методы дают некоторую надежду на успех. Известны три таких основных метода.

Первый может быть назван методом последовательности интегрирования (метод прогонки), поскольку основное внимание вычислителя сосредоточено на фронтальной линии, расположенной поперек всего слоя и постепенно перемещающейся вниз по потоку. Этот «фронт вычислений» неизменно увеличивает область уже известного и уменьшает площадь того, что еще не известно, до тех пор, пока все поле внутри пограничного слоя не будет «обсчитано». Впервые этот метод был использован для решения задач неустановившейся теплопроводности Биндером [Л. 7], Шмидтом [Л. 95], Кранком и Никольсоном [Л. 21], при этом два первых метода «явные»; третий — «неявный» — имел преимущество полной свободы выбора величины шага интегрирования. К числу чисто гидродинамических методов относятся методы Гертлера [Л. 37], Флюгге-Лотца [Л. 31], Фюсселла и Хеллумса [Л. 33], Глушко [Л. 36], Посконова [Л. 73], а также Брэдшоу, Феррисса и Атвелла [Л. 10]. Метод, описываемый в настоящей книге, является разновидностью метода последовательного интегрирования.

Другой метод решения параболических уравнений был определен Хартри и Вомерсли [Л. 42] как метод интегрирования поперек течения. Вначале с помощью конечных разностей параболические уравнения приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для

совокупности последовательно взятых сечений пограничного слоя, расположенных по нормали к основному (преимущественному) направлению течения. Независимой переменной в каждом сечении служит расстояние поперек слоя (возможно, в трансформированном виде); зависимыми переменными являются: скорость, температура и т. д. После этого обыкновенные дифференциальные уравнения интегрируют численно. Поскольку граничные условия для них задаются на любом из двух концов области интегрирования, то необходимо применять метод последовательных приближений. Методы этого типа применялись Ли [Л. 55], Смитом и Клаттером [Л. 99] для ламинарных пограничных слоев; Смитом, Джаффе и Линдом [Л. 101], а также Меллером [Л. 61] для турбулентных пограничных слоев.

Третий метод решения носит название интегрального параметрического метода. Известны и другие его названия, например: «профильный» или просто «интегральный». Метод состоит в следующем:

1. Предполагается, что в любом сечении пограничного слоя профили скоростей, температуры и т. д. описываются простыми алгебраическими выражениями (например, полиномами относительно расстояния от стенки), содержащими свободные параметры (например, коэффициенты полинома).

2. Дифференциальные уравнения в частных производных последовательно умножаются на некоторые функции зависимых и независимых или только независимых переменных, названных «весовыми функциями». Далее уравнения интегрируются поперек слоя. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с расстоянием вниз по потоку в качестве независимой переменной, и свободными параметрами в качестве зависимых переменных.

3. Поскольку производные первого порядка от некоторых свободных параметров входят в каждое из уравнений линейно, то для того, чтобы выразить каждую производную исключительно через величины, известные в соответствующих сечениях, до которых произведено интегрирование по длине, необходимо обращение матрицы.

4. Четвертым этапом является совместное интегрирование уравнений по продольной координате (в направлении движения потока) с помощью любого общепринятого метода, например Рунге — Кутта. В результате интересующая нас характеристика как, например, толщина потери импульса или коэффициент теплопереноса, может быть получена алгебраическими и арифметическими приемами.

В первоначальных исследованиях, основанных на интегрально-параметрическом методе, определялись лишь один или два параметра из дифференциальных уравнений. Вероятно, по этой причине метод иногда ошибочно рассматривался как приближенный. В принципе по точности он не уступает методу конечных разностей, использующему последовательное интегрирование или интегрирование поперек слоя. Точность этого метода может быть повышена неограниченно за счет увеличения числа свободных параметров. Этот метод применяли фон-Карман [Л. 128], Польгаузен [Л. 82], Вигхард [Л. 131], Паллоне [Л. 72], Либби и Фокс [Л. 57] к ламинарному пограничному слою, а Сквайр и Троунсер [Л. 116], Мозес [Л. 64], Харис [Л. 39], Гартшоре [Л. 35], Патанкар и Сполдинг [Л. 78] и Кендалл и Бартлетт [Л. 44] — к турбулентному.

Математические аспекты явно интегральных методов. В методах, расположенных ниже горизонтальной линии в табл. 0.2-1, часто используются уравнения, применяемые в интегрально-параметрических расчетах, т. е. обыкновенные дифференциальные уравнения, образованные умножением параболических уравнений на весовые функции с последующим интегрированием их поперек сечения слоя. Однако явные методы в отличие от параметрических не требуют задания формы

профиля, вследствие чего в них отсутствуют формпараметры; поэтому они обычно не требуют обращения матриц. Вместо этого дифференциальные уравнения преобразуются таким образом, чтобы такие интегральные характеристики, как толщина потери импульса, стали бы зависимыми переменными. Тогда вспомогательные величины, появляющиеся в уравнениях, такие, как коэффициент поверхностного трения, должны явно выражаться через интегральные величины.

Явно интегральные методы расчета турбулентных слоев в настоящее время, по-видимому, наиболее широко распространены по сравнению с другими. Различия между методами в основном связаны с весовыми функциями, используемыми для образования дифференциальных уравнений, а также с источниками и формами вспомогательных соотношений, обобщающих эмпирическую информацию. Трукенбродт [Л. 124] использовал интегральные уравнения движения и кинетической энергии совместно с алгебраическим соотношением между диссипативным интегралом и числом Рейнольдса, построенным на толщине потери импульса; Эскудиер и Сполдинг [Л. 29], а также Вальц [Л. 129] брали те же дифференциальные уравнения, но привлекали к расчету другие вспомогательные соотношения.

С другой стороны, Хэд [Л. 45] использовал интегральные уравнения движения и неразрывности вместе с эмпирическим соотношением, связывающим формфактор со степенью увлечения жидкости из потенциального ядра потока в пограничный слой.

Другие расчетные методы. В литературе имеется много методов, которые нельзя подвести под приведенную нами здесь классификацию. Например, метод Кутателадзе и Леонтьева [Л. 53] в основном является явно интегральным, тем не менее вспомогательные функции частично выведены из гипотезы о пути смешения. Далее, имеется несколько методов, которые позволяют вычислить формфактор из обыкновенного дифференциального уравнения, полученного скорее эмпирическим и интуитивным путем, чем интегрированием дифференциального уравнения в частных производных. Однако эти последние методы в наши дни не представляют большой ценности.

Какой метод лучше? Когда имеется такой обширный выбор и когда интересы практики преобладают над теоретическими, то поиск наилучшего метода естествен, и долг автора обзора дать такую рекомендацию, если это в его силах.

Данная книга как раз и является более полной попыткой описания и рекомендации метода, которому авторы отдают предпочтение. При подобном положении дел мы, однако, не сделаем ничего больше перечисления критериев, положенных в основу нашего выбора. Затем в § 0.3 будут изложены соображения, приведшие нас к отказу от всех, кроме одной из основных теорий турбулентного пограничного слоя.

Прежде всего мы стремились выработать такой метод, который один применим с минимальным числом возможных модификаций ко всем случаям и задачам, поставленным теорией и практикой.

Насколько трудно приобретать, сохранять в памяти и совершенствовать знания, настолько единая универсальная теория лучше множества частных теорий узкоспециального назначения. ,

Во-вторых, важна экономичность метода и простота обращения с ним. Иначе трудоемкость подготовительных операций либо дороговизна машинного времени вынуждают конструктора обращаться к эксперименту. Научному работнику в этом случае приходится воздерживаться от исследования внутренней сущности своих гипотез в их полном виде.

В-третьих, предсказания теории должны подтверждаться опытом. Это означает прежде всего, что эмпирические данные, используемые в расчете, относятся ли они к эффективной вязкости или к взаимосвя-

зям между интегральными характеристиками, должны правильно отражать наиболее существенные черты и особенности турбулентного движения. Кроме того, вычислительный аппарат теории должен обеспечивать точные результаты, не внося дополнительных ошибок.

Как мы в этом убедимся ниже, при соблюдении перечисленных принципов не представляет труда определение основных требований к методу. Выводы и рекомендации будут приведены в конце § 0.3 после обсуждения приведшего к ним накопленного опыта.

0.3. ПОСЛЕДНИЕ РАЗРАБОТКИ АВТОРОВ

Теплоперенос в турбулентных пограничных слоях (область постоянных касательных напряжений). Первоисточником настоящей работы можно считать публикацию одного из авторов [Л. 104], где был предложен метод расчета теплообмена в турбулентных пограничных слоях с известными и простыми гидродинамическими свойствами. Он базировался на заданном распределении касательных напряжений вдоль обтекаемой стенки и допущении однородности касательных напряжений во всей области теплового пограничного слоя, т. е. их независимости от расстояния по нормали к стенке. Кроме того, стенка принималась гладкой и непроницаемой; предполагалась однородность плотности и вязкости среды.

Было показано, что для этих условий дифференциальные уравнения теплового пограничного слоя в частных производных для неограниченного числа вариаций температур стенки и касательных напряжений могут быть решены по методу суперпозиции небольшого числа основных функций, которые были вычислены раз и навсегда Кестином и Персеном [Л. 50], Граднером и Кестином [Л. 34], Смитом и Шахом [Л. 103]. Полученные ими результаты были обобщены позже одним из авторов [Л. 105].

Появление этой теории мотивировалось неудовлетворительностью существовавших тогда методов расчета теплопереноса в пограничных слоях, которые и поныне приводятся во многих учебниках.

Указанные методы основывались на гипотезе куэттовского течения в пограничном слое, что позволяло опускать в дифференциальном уравнении конвективный член, выражающий перенос в продольном направлении. Это допущение удобно, так как позволяет свести дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным уравнениям со всеми вытекающими отсюда математическими упрощениями.

Для полностью развитых (стабилизированных) течений в трубах и пограничных слоев на плоских пластинках осторожное использование результатов такого анализа позволило обобщить экспериментальные данные и сделать новые предсказания. Однако игнорирование члена продольной конвекции допустимо лишь для внутренней, расположенной в непосредственной близости к стенке области теплового слоя. Такие теории оказались непригодными для расчета задач теплообмена, где тепловой слой начинает развиваться с сечения, в котором уже существует достаточно толстый динамический пограничный слой.

Новый метод позволял по крайней мере решить вышеупомянутую задачу и обладал другими преимуществами. Все же его популярность была непродолжительной по следующим причинам:

а) метод не позволяет вычислить касательные напряжения у стенки;

б) допущение об однородности свойств жидкости ограничивает применимость метода;

в) опыт в конечном счете показывает, что на практике редко встречаются задачи, где требование постоянства касательных напряжений в пристеночной области выполнялось бы удовлетворительно.

Как показано в работах Бэка и Себана [Л. 4], Маккарти и Хартнетта [Л. 59], для ряда практических задач теория давала предсказания не лучше предсказаний, даваемых другими, гораздо менее сложными теориями.

Попытка освободить теорию от одного из ее ограничений, а именно от допущения однородности касательных напряжений поперек слоя, была сделана Хаттоном [Л. 43, 44]. Вместе с этим, однако, исчезла возможность строить сложные решения наложением нескольких основных простых функций, и дифференциальное уравнение в частных производных необходимо было решать численно для каждой конкретной задачи.

Сам Хаттон не располагал вполне удовлетворительным методом расчета характеристик гидродинамической части слоя. Позднее расчет был усовершенствован Двораком и Хэдом [Л. 23], которые объединили ранние методы расчета гидродинамического слоя Хэда с методом Хаттона для температурного слоя.

Первый вариант «унифицированной теории». Следующим шагом на пути усовершенствования метода явилась теория, опубликованная в 1964 г. [Л. 106]. К этому времени идея универсальности укрепилась у одного из авторов данной книги и всецело завладела им в процессе перевода книги Кутателадзе и Леонтьева [Л. 53]. Цель состояла в создании метода, позволяющего предсказать развитие гидродинамического и теплового слоев на стенках, шероховатых и проницаемых, при наличии максимумов у профилей скорости и температуры с учетом переменных физических свойств среды.

Метод должен сочетать достоинства интегрально-параметрического и явно интегрального методов.

Были заимствованы и обобщены двухпараметрические профили, предложенные Ротта [Л. 91], Россом и Робертсоном [Л. 92] и Коулсом [Л. 19]; параметры профилей вычислялись из весовых интегральных уравнений после обращения матрицы. Гипотезу эффективной вязкости заменил эмпирический закон увлечения через границу слоя. Его отличает от закона Хэда то, что скорость увлечения через границу слоя связана с одним из параметров профиля, а не с формфактором.

Профили выражаются в виде суммы двух составляющих, одна из которых описывает движение в пограничном слое в куэттовском приближении, а другая характеризует течение жидкости в следе или струе. Первая составляющая включает учет таких факторов, как шероховатость, массоперенос через стенку и конвективный теплоперенос при различных числах Прандтля. Это стало возможным благодаря знаниям, приобретенным в процессе создания предшествующих расчетов, которые, хотя и были непригодны для обширных теоретических исследований, все же расчищали путь для многих последующих разработок. Несколько дополнительных примеров этого скачкообразного процесса развития будет приведено ниже.

На этой теоретической основе удалось выполнить удовлетворительные расчеты многих задач гидродинамического и теплового пристеночных пограничных слоев.

Николл и Эскудиер [Л. 68] усовершенствовали функцию увлечения для слоев с профилями скорости монотонными (без экстремума) и немонотонными (с максимумом). Данхэм [Л. 22] нашел интересное приложение метода к обтеканию цилиндра при наличии пристеночной струи, направленной вдоль поверхности цилиндра.

Однако и этой теории были присущи некоторые дефекты: недостаточная гибкость профилей и плохая их приспособляемость по всем представляющим интерес термическим граничным условиям, отсутствие экспериментальных данных относительно влияния на функцию увлечения переменной плотности; закон увлечения, очевидно, несправедлив

для пограничных слоев, смыкающихся, например, на оси трубы в конце входного участка. В то же время концепция увлечения через границу слоя еще не настолько прочно укоренилась в гидромеханике, чтобы привлечь широкий интерес специалистов и создать у них необходимую уверенность в ней.

Применение уравнения дефицита кинетической энергии. Попытка связать закон увлечения жидкости через границу слоя с хорошо апробированной концепцией гидромеханики ознаменовала новый поворот в развитии теории.

В качестве первого шага на этом пути, пусть с помощью косвенных аргументов, предстояло установить количественную связь безразмерной скорости увлечения через границу слоя с безразмерным диссипативным интегралом, введенным впервые Трукенбродтом [Л. 124] и др. Как было показано в работе [Л. 107], эта зависимость весьма близка к линейной.

Попутно удалось выяснить причины неудовлетворительности явно интегральных методов, базирующихся на уравнении кинетической энергии; использовавшаяся до тех пор эмпирическая функция основывалась на недостаточном количестве экспериментальных данных, которые к тому же были обобщены неверным образом.

В итоге метод стал базироваться на уравнении кинетической энергии вместо проинтегрированного уравнения неразрывности и на усовершенствованном выражении для диссипативного интеграла вместо функции увлечения жидкости через границу слоя при сохранении в то же время двухпараметричности профилей. Это позволило развить теорию, свободную от некоторых недостатков, присущих первому варианту «унифицированной теории». Все же не удалось устранить другие недостатки, а методика вычислений по-прежнему оставалась гибридом интегрально-параметрической и явно интегральной процедур.

Следующий шаг состоял в устранении гибридного характера теории: фактически с этого момента произошло раздвоение пути совершенствования теории. Строгим явно интегральному и интегрально-параметрическому методам было представлено право на самостоятельное существование.

Явно интегральный метод. Если функция диссипативного интеграла получена из опытов и задача ограничена главным образом гидродинамическим пограничным слоем с постоянными свойствами, то отпадает необходимость в сохранении неудобств, связанных с допущением относительно профиля. В этом случае легче идти по пути непосредственного применения явно интегрального метода, основываясь на интегральных условиях движения и кинетической энергии пограничного слоя. Тогда потребовались бы три эмпирические функции, связывающие между собой два соответствующих формфактора, коэффициент сопротивления трения на стенке, диссипативный интеграл и число Рейнольдса, составленное из локальных величин.

Эскудиер и Сполдинг [Л. 29] показали, что даже простейшие математические выражения для этих функций позволяют удовлетворительным образом предсказывать поведение большого числа экспериментально изучаемых пограничных слоев. Кармайкл и Пустынцев [Л. 12] успешно продемонстрировали возможности метода применительно к течениям в диффузорах. Затем Эскудиер и Николл в различных публикациях [Л. 26, 28, 67] представили улучшенные и более универсальные формулы для эмпирических функций. Эскудиер, Николл, Сполдинг и Уайтло [Л. 27] применили их к расчетам весьма трудного и на сегодня класса задач, в которых пограничный слой с максимумом на профиле скорости при своем развитии переходит в пограничный слой, типичный для плоской продольно обтекаемой пластины.

Николл и Уайтло [Л. 69] и Николл [Л. 66] показали возможность приспособления этой вычислительной процедуры к расчету температу-

ры адиабатической стенки при пленочном охлаждении. Но уже в их попытках отчетливо выявились ограниченные потенциальные возможности теорий подобного типа. Каждый раз при добавлении к перечню существенных для расчета факторов, хотя бы еще одного, требуются новые эмпирические функции. Таким образом, даже для течения с однородными свойствами число Стантона необходимо выражать в виде зависимости от числа Рейнольдса, формфактора гидродинамического слоя, отношения толщин гидродинамического и теплового слоев и некоторого параметра, определяющего форму температурного профиля. Если перепады температур достаточно велики и влияют на плотность, то в эмпирическую функцию необходимо ввести добавочный аргумент.

Таким образом, для получения вводимых в расчет эмпирических функций в явно интегральном методе требуется весьма обширная экспериментальная подготовительная работа, что не может удовлетворить расчетчика. Для подведения под этот метод прочного фундамента нужно израсходовать много сил и ресурсов, которые почти наверняка целесообразнее направить на другие разработки.

Интегрально-параметрический метод. Другое направление теории, определившееся к середине 1965 г., исходило из предположения Хадимото [Л. 47] о возможности представления единой кривой профиля прандтлевского пути смешения по сечению турбулентного пограничного слоя, нормализованного по толщине пограничного слоя. Хадимото построил этот обобщенный профиль по результатам опытов Шульц-Грунова [Л. 96] с плоской пластиной. Беглый взгляд на экспериментальные данные для пограничных слоев с положительным продольным градиентом давления и для пристенных струй подтвердил правильность предположения Хадимото. Более обстоятельный обзор Эскудиера [Л. 25] показал, что, несмотря на разброс опытных данных, большинство результатов все же хорошо коррелируется формулой, фигурирующей ниже под номером (1.3-6).

Наличие апробированной гипотезы эффективной вязкости позволило Патанкару и Сполдингу [Л. 78] усовершенствовать расчетную схему явно интегрально-параметрического метода и расширить его применимость на все задачи пограничного слоя, не увеличивая потребности в дополнительных экспериментальных данных. Метод оказался удачным для решения многих задач конвективного теплообмена гладких поверхностей.

Джаятилака [Л. 48] распространил его на шероховатые поверхности, а Бейкер [Л. 5] — на стенки с массопереносом. При этом сохранялась двухпараметричность профилей, а член, выражающий «закон стенки», выводился из анализа куэттовской задачи.

Однако уже в работе [Л. 78] отмечались некоторые трудности, которые со временем приобрели угрожающе большой вес; способ обращения матрицы зачастую приводил к неоднозначности результатов; уравнения оказались нечувствительными к изменениям параметров профиля, и по этой причине пришлось отказаться от операций интегрирования.

Таким образом, понадобилось обстоятельное изучение причин «матричной сингулярности», отдельные аспекты которой были изложены в работе [Л. 110]. Удалось выявить, а затем устранить две наиболее существенные причины сингулярности.

Во-первых, оказалось, что уравнение кинетической энергии, а также все уравнения, базирующиеся на весовых функциях, составленных из *зависимых переменных,* совершенно неприменимы при наличии на профилях максимума. Можно показать, что в таких случаях независимо от того, какое количество интегральных соотношений используется, из всего набора возможных профилей нельзя выбрать правильный.

Во-вторых, в качестве одного из параметров профилей была выбрана толщина пограничного слоя, т. е. расстояние от стенки до точки, где скорость достигла соответствующего значения в ядре течения. Однако эта характеристика в общем произвольна по величине и искусственна, и интегральные уравнения оказываются непригодными для нахождения «наилучшей» ее величины.

После того как все это стало очевидным (к осени 1965 г), открылся путь к быстрому развитию и усовершенствованию метода, изложенного в данной монографии.

Первую причину сингулярности удалось устранить введением в дифференциальное уравнение в качестве весовых функций *независимых переменных,* т. е. ординаты y либо «трансформированной» ординаты $\int \rho dy$; сами функции были главным образом ступенчатыми. Таким образом, дифференциальное уравнение движения в частных производных сводилось к совокупности интегральных соотношений пограничного слоя конечной толщины.

Вторая причина была устранена более тонким приемом, а именно заменой (смещением) толщины пограничного слоя при обращении матрицы. Эта толщина в общем рассматривалась как величина произвольная и определяемая расчетчиком исходя из требования наибольшей эффективности вычислений.

Так была возрождена на новой основе концепция «закона увлечения». Теперь, однако, ей отведена роль контрольной схемы при выборе масштабной длины; она больше не рассматривается как закон, природу которого надлежит установить из опыта.

Дальнейшее развитие метода. Разработка приведенных выше идей заняла первую половину 1966 г. К этому времени для описания профилей применялись в основном полиномиальные зависимости; дробный показатель степени использовался для первого члена лишь для пристеночного пограничного слоя. Методика была обобщена таким способом, чтобы оставлять возможность увеличивать число свободных параметров каждого профиля; при этом, конечно, соответственно возрастают размеры матриц, подлежащих обращению.

Тогда же были выполнены численные эксперименты с применением различных независимых переменных поперек слоя. Предпочтение отдавалось переменной $\int_0^y \rho dy$, а не ординате y, поскольку первая учитывала непостоянство плотности [Л.17].

Безразмерная функция тока ω также рассматривалась, но за ней не предполагались какие-либо решающие преимущества. Для пристеночных течений первый член в выражении профиля все еще выбирался исходя из ограниченной формы уравнений, игнорирующих продольную конвекцию. От использованных ранее безразмерных зависимых переменных пришлось отказаться как от ненужных, а подчас даже наносящих ущерб. Небольшая часть этой работы была опубликована, а ее приложение к задаче распространения турбулентного фронта пламени в трубе было дано одним из авторов в [Л. 115].

В основном можно было констатировать следующее.

Во-первых, метод функционирования; действительно, он был пригоден для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные решения приближались к точному решению с возрастанием числа параметров.

Во-вторых, и сложность выкладок, и вычислительное время нарастают, однако резко непропорционально числу свободных параметров. В то время как приемлемые по точности решения можно получить при весьма умеренных затратах труда и машинного времени, повышение

точности до 99% оказывалось во многих случаях весьма не экономичным.

Наконец, иногда возникали помехи из-за матричной сингулярности. Чем больше число свободных параметров, тем вероятнее ее появление и тем труднее интерпретировать и контролировать расчет. Несмотря на множество уже преодоленных трудностей, дорога вперед все еще оставалась тернистой и крутой.

Одновременно были проведены также расчеты с профилями, состоящими из сочлененных прямолинейных сегментов. В этом случае процедура обращения матрицы несколько упрощается. Такие профили в силу их чрезвычайной гибкости легко приспособить к обширному набору различных условий. Для пристеночной области используются различные аппроксимации: приближенное соответствие профилей их куэттовским аналогам и точное соответствие этой модели для касательных напряжений и тепловых потоков. Использование в расчете большого числа (порядка 20) сегментов обеспечивает получение достаточно надежных и близких к точным решений. Однако в силу явного характера метода интегрирования Рунге — Кутта дальнейшее уменьшение интервалов поперек слоя неизбежно потребует еще большего сокращения шага в направлении вниз по течению, чтобы избежать неустойчивости счета. Затраты машинного времени тогда резко возрастают, несмотря на относительные алгебраические упрощения.

К этому времени все же была подготовлена основа для перестройки и усовершенствования всей теории — работы, начатой авторами в июле 1966 г. Применение кусочно-прямолинейных профилей настолько сближает метод параметрических профилей с конечно-разностной формой метода прогонки, что любое название оказывается для обоих методов в равной степени приемлемыми. Таким образом, подошло время для сочетания концептуальной простоты метода прогонки с обладающим многими достоинствами методом профилей при ограничении лишь той областью течения, где потоки импульса, тепла и вещества существенны.

Данная книга в основном посвящена описанию метода в том виде, к которому авторы в конце концов пришли. Для связи с предшествующим историческим обзором здесь достаточно указать на то, что:

а) метод является конечно-разностным с использованием ломаных профилей, составленных из прямолинейных отрезков;

б) конечно-разностные управления получаются путем интегрирования частных дифференциалов в микрообласти, определяемой ячейкой сетки;

в) совпадение ширины сетки с толщиной пограничного слоя достигается использованием закона увлечения;

г) неявная формулировка уравнений позволяет избежать неустойчивости счета, связанной в методе Рунге — Кутта с предельным размером шага;

д) независимой переменной поперек слоя служит безразмерная функция тока;

е) в области интегрирования, непосредственно примыкающей к стенке, используются профили и потоки, полученные из анализа соответствующей куэттовской задачи. Таким образом, хотя теория к этому времени радикальным образом изменилась, многое в ней напоминает о предшествующих теориях; ее происхождение четко прослеживается.

Краткая аргументация в пользу выбранной теории турбулентного пограничного слоя. Опыт использования явно интегральных методов, характеристики которых приведены ниже горизонтальной черты в табл. 0.2-1, позволяет сделать заключение об их неконкурентоспособности. Для сложных условий течения они потребляют больше информации в виде эмпирических и вспомогательных соотношений, нежели сами

производят в результате расчета. Это положение, по-видимому, вряд ли скоро изменится.

При наличии обширной экспериментальной информации эти методы в лучшем случае могут быть использованы как интерполяционные. Однако нам представляется сомнительной оправданность затрат времени и усилий на совершенствование явно интегральных методов.

После выбора теории, характеристика которой дана выше горизонтальной черты в табл. 0.2-1, предстоит еще решить вопрос о том, каким расчетным методом следует пользоваться. Из приведенного ранее очерка развития методов параметрических профилей ясно, что по крайней мере в точности расчетов они уступают нашему конечно-разностному методу, описанному в данной книге. Мы не входим здесь в причины преимуществ конечно-разностного метода перед обычными методами прогонки или интегрирования поперек линий тока. Мы приводим только основной довод: этот метод намного быстрее и экономичнее. Как будет показано ниже, новый метод дает результаты в 100—1 000 раз быстрее, чем метод интегрирования поперек линий тока. Что касается метода прогонки, то он настолько медлен и громоздок, что вообще не выдерживает никакого сравнения с нашим методом.

При выборе гипотезы об эффективной вязкости, являющейся необходимой составной частью любой законченной теории пограничного слоя, догматизм не только неразумен, но и вреден.

В данной книге широко используется модифицированная гипотеза Прандтля о пути смешения. Мы полагаем, что на сегодня она является наилучшим фундаментом для построения общего расчетного метода. Однако несомненно и то, что прогрессивное развитие исследований в данной области, которому, как мы надеемся, наш расчетный метод будет как-то способствовать, скоро приведет к установлению более реалистических формулировок законов переноса в турбулентных течениях.

Уже приобретен также некоторый опыт решения описанным методом уравнений, основанных на модели турбулентности Колмогорова — Прандтля, описание которой было приведено выше в § 0.2. В этом случае к системе дифференциальных уравнений в частных производных добавляется уравнение кинетической энергии флуктуационного движения. При этом не возникло никаких трудностей. Пока нет и вряд ли предвидится в перспективе что-либо лучшее гипотезы об эффективной вязкости, чем можно было бы так легко оперировать в общих методах.

0.4. О СТРУКТУРЕ КНИГИ

Подчеркнутое выше единство физического и математического аспектов теории последовательно отражено в структуре данной книги. Она состоит из двух частей — первая из них преимущественно посвящена математическому аспекту, тогда как во второй части трактуется физическая сторона рассматриваемой проблемы. Первая часть книги посвящена описанию назначения, вывода и свойств разработанного нами общего метода решения параболических уравнений. Во второй части книги содержатся иллюстрации имеющих практический интерес расчетов, выполненных на основе метода. В ней содержатся также те исследования физики течения, которые оказалось возможным проделать.

При общей применимости метода к параболическим уравнениям любого типа анализ, приведенный в первой части, все же ограничивается уравнениями гидродинамического, теплового и диффузионного ламинарного или турбулентных пограничных слоев. Это придает анализу большую конкретность.

Помимо того, обсуждение физики явлений способствует внесению ясности в обоснование математических операций.

Первая часть состоит из трех глав. Первая из них посвящена общим уравнениям и граничным условиям. Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие законы сохранения, приведены в § 1.1. Для математического анализа задачи необходимо использовать различные дополнительные соотношения. Поэтому в § 1.2 приводится описание начальных и граничных условий, а в § 1.3 рассматриваются соотношения для потоков и выражения для коэффициентов обмена.

В данной работе особое внимание уделено исследованию пристеночной области, поскольку пренебрежение здесь членами продольной конвекции позволяет трактовать течение как одномерное. В результате экономятся усилия, затрачиваемые на вычисления. Данному вопросу посвящен § 1.4.

Глава 2 содержит детальное описание конечно-разностного метода решения. Сначала разбирается новое положение данного метода (§ 2.1), а именно согласование выбора системы координат с требованием, чтобы размеры сетки всегда были скоррелированы с нарастанием или убыванием толщины пограничного слоя. В этом случае возможна удобная трансформация дифференциальных уравнений (§ 2.2). В § 2.3 выводится важная формула для степени увлечения жидкости через границу слоя, с помощью которой регулируется и контролируется ширина сетки. Остальная часть главы посвящена разбору различных деталей конечно-разностного метода: составлению разностных уравнений, обсуждению граничных условий, решению результирующих алгебраических уравнений и т. д.

В гл. 3 помещено несколько примеров, где результаты расчета по данному методу сравниваются с точными решениями, полученными с помощью других методов. Таким образом, демонстрируются возможности метода, и прежде всего получается подтверждение его точности. Вторая часть, состоящая из двух глав, ставит своей целью указать некоторые направления дальнейшего развития.

В гл. 4 рассматривается пристеночная область слоя, получены некоторые алгебраические соотношения, отвечающие куэттовской модели течения, подробно рассмотренной в § 1.4. Справедливость этих соотношений проверяется на экспериментальных данных, в том числе на результатах опытов, выполненных одним из авторов. Имеется в виду исследование влияний массопереноса через стенку на диффузионный перенос индикаторного газа в радиальную пристенную струю. Детали опытов приведены в приложении II.

Глава 5 посвящена приложениям модифицированной прандтлевской гипотезы о пути смешения. Наряду с иллюстрацией многогранности вычислительного метода сравнение с экспериментальными данными позволяет нам дать оценку удовлетворительности гипотезы о пути смешения и фактически нацеливает на некоторые возможные ее усовершенствования. Эту главу следует рассматривать как указание на направления дальнейшей полезной работы.

Приложение I содержит, быть может, наиболее ценный для многих читателей материал, а именно вычислительную программу, составленную на машинном языке «Фортран IV», т. е. обобщенный вычислительный инструмент метода. Прилагаемые пояснения к программе связывают ее с основным содержанием книги.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава первая

УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

1.1-1. Предпосылки

В этой главе рассматриваются дифференциальные уравнения, выражающие законы сохранения для устойчивых осесимметричных течений. Их трактовка в то же время остается справедливой и для плоских движений, которые могут рассматриваться как частные случаи осесимметричных течений.

Мы исходили из того допущения, что существующие в движущейся среде касательные напряжения, тепловые и диффузионные потоки порождены лишь градиентами соответствующих величин, нормальными направлению линий тока; это обычное допущение теории пограничного слоя. Другое, однако менее распространенное допущение состоит в требовании отсутствия возвратных течений внутри пограничного слоя. Только тогда можно перейти от общих уравнений эллиптического типа к параболическим. Допущение об отсутствии возвратного течения остается в силе и в дальнейшем, когда мы будем пользоваться функцией тока или безразмерной ее величиной в качестве независимой переменной, отсчитываемой поперек слоя. При наличии возвратного течения функция тока в сечении пограничного слоя дважды примет одно и то же значение, что обусловит появление двух одинаковых величин скорости, температуры и т. д.

Мы в дальнейшем будем иметь дело с турбулентными течениями. В своем анализе мы будем пользоваться лишь осредненными во времени величинами. Перемешивание, обусловленное пульсациями скорости, будет фигурировать в членах, выражающих эффективные касательные напряжения и потоки; они же в свою очередь представляются в виде произведений эффективных коэффициентов обмена на поперечные градиенты соответствующих величин. Достоинством такой формулировки является возможность использовать уравнения в форме, такой же, как для ламинарного пограничного слоя. Поэтому способ решения, излагаемый в книге (гл. 2), одинаково хорошо применим как к ламинарным, так и к турбулентным течениям. Мы будем опираться на этот факт в исследованиях математической точности численного метода.

В целях сохранения умеренного объема нашей книги введем ряд дополнительных ограничений, хотя какой-либо иной необходимости в этом не существует. Будем полагать наклон линий тока к оси симметрии слабо изменяющимся в зависимости от расстояния в направ-

лении течения. Считаем также, что азимутальная составляющая скорости (т. е. компонента скорости в плоскости, перпендикулярной оси симметрии), гравитационные силы и тепловая радиация отсутствуют. (Читателю, интересующемуся влиянием сильного искривления линий тока или закрутки потока, мы рекомендуем обратиться к работе [Л. 79], где он найдет полезное для себя описание метода решения соответствующим образом модифицированных уравнений.) Существо принятых ограничений состоит в обосновании постоянства давления поперек пограничного слоя.

1.1-2. Система координат

На рис. 1.1-1 представлена система координат, которой мы будем в дальнейшем пользоваться. Интересующая нас область течения заключена между двумя воображаемыми поверхностями, обозначаемыми нами подстрочными индексами I (внутренняя) и E (внешняя). Отсчитываемая вдоль направления движения координатная x-линия будет приблизительно параллельна линиям тока. Координатная x-линия образует с осью симметрии угол α, слабо изменяющийся с величиной x.

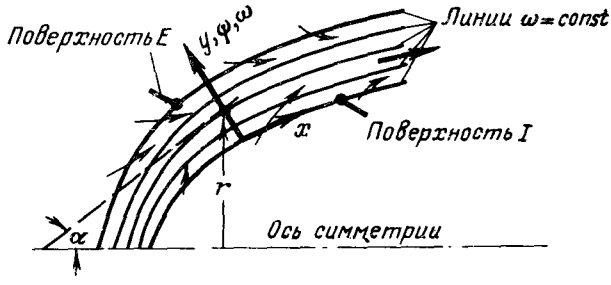


Рис. 1.1-1. Система координат пограничного слоя.

Отсчет переменной y производится от I-поверхности по нормали к координатной x-линии. Расстояние от оси симметрии, т. е. r — радиальное положение любой точки в пограничном слое, определяется равенством

$$r = r_1 + y \cos \alpha. \tag{1.1-1}$$

Уравнения пограничного слоя допускают преобразование к новой, удобной форме с использованием функции тока ψ в качестве поперечной переменной, т. е.

$$x = \text{idem}; \quad d\psi = \rho u r dy, \tag{1.1-2}$$

где ρ и u — соответственно плотность и составляющая скорости в направлении x. Система координат $x \sim \psi$ известна под названием системы переменных Мизеса.

1.1-3. Уравнения сохранения

Приведенные ниже уравнения отнесены к системе отсчета $x \sim \psi$. Остальные обозначения приведены в перечне на стр. 5.

Уравнение сохранения количества движения в направлении координаты x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}(\tau r) - \frac{1}{\rho u}\frac{dp}{dx}. \tag{1.1-3}$$

Уравнение сохранения химических компонентов j:

$$\frac{\partial m_j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}(J_j r) + \frac{R_j}{\rho u}. \tag{1.1-4}$$

Уравнение сохранения энтальпии торможения:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \Psi}\{(J_h - u\tau)\, r\}. \qquad (1.1\text{-}5)$$

До решения системы (1.1-3)—(1.1-5) необходимо установить связи величин τ, J_j, J_h с зависимыми переменными. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен § 1.3.

Прежде, однако, ознакомимся с некоторыми типами начальных и граничных условий для задач, представляющих практический интерес.

1.2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1.2-1. Начальные профили зависимых переменных

Для решения системы уравнений пограничного слоя параболического типа необходимо знать величины всех переменных в сечении, предшествующем интересующей нас области. Эти начальные профили могут быть получены из экспериментов, эмпирических соотношений, приближенных теорий или из интуитивных соображений. Протекающие в турбулентных пограничных слоях процессы обычно мало чувствительны к характеру и особенностям предыстории; это обстоятельство облегчает задачу выбора начальных профилей. Все же соответствие начальных профилей реальным течениям в известных общих чертах крайне желательно. Например, потоки массы, количества движения и энтальпии, закладываемые в исходные профили, должны быть приблизительно равны существующим в реальных потоках.

1.2-2. Граничные условия

Три типа граничных поверхностей. Как упоминалось ранее, интересующая нас область течения ограничена двумя воображаемыми поверхностями I и E.

Их пространственное положение в принципе может быть выбрано произвольно. Однако лишь три типа граничных поверхностей имеют практическое значение и интерес.

1. Ограничивающая поверхность совпадает со стенкой; это отвечает случаю «обычных» пограничных слоев, образующихся при обтекании твердых тел.

2. Ограничивающая поверхность располагается вблизи области невязкого течения. Это так называемая «свободная граница». Примерами могут служить внешняя граница турбулентной струи и внешний край пограничного слоя, образованного на твердом теле.

3. Ограничивающая поверхность совпадает с линией симметрии. Типичным примером является центральная линия струи. Не следует смешивать упомянутую нами линию с осью симметрии. Для плоской струи центральная линия совпадает с линией симметрии, тогда как ось симметрии, по определению, лежит в бесконечности.

Граничные условия. Для решения уравнений пограничного слоя, кроме начальных профилей, необходимо знать условия на граничных поверхностях I и E. Обычно задают изменения величин зависимых переменных вдоль граничной поверхности; иногда задаются градиенты этих переменных. В частном случае совпадения границы с линией симметрии градиенты на ней в направлении, перпендикулярном линии симметрии, равны нулю. Если граница совпадает с неподвижной стенкой, скорость жидкости на самой стенке всегда равна нулю. Для пористой стенки необходимо указать интенсивность массопереноса (вдува — отсоса) сквозь нее. При обсуждении метода решения мы

покажем его применение для различных граничных условий. Более сложные граничные условия могут рассматриваться с помощью сочетания приведенных ниже методов.

Распределение давления. Уравнение сохранения количества движения содержит продольный градиент давления. Следовательно, необходимо знать изменение давления с расстоянием в направлении течения. В условиях внешней задачи скорость вдоль свободной границы известна; она может быть найдена по градиенту давления в уравнении Эйлера, т. е. вычисляется из уравнения (1.1-3), примененного к невязкому течению. В случае внутренней задачи давление нельзя определить до решения уравнений пограничного слоя. Для этих условий давление оказывается неизвестной величиной, и к решению задачи необходимо привлекать дополнительное соотношение неразрывности течения в канале.

1.3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1.3-1. Термодинамические зависимости

Зависимые переменные и величины, характеризующие физические свойства жидкости, связаны многими термодинамическими соотношениями. Например, энтальпия торможения выражается в виде

$$\tilde{h}=h+u^2/2, \tag{1.3-1}$$

где h — удельная энтальпия; здесь не учтены как кинетическая энергия составляющей движения в направлении координаты y, так и энергия турбулентных пульсаций.

Связь плотности жидкости с энтальпией и концентрацией также потребуется для последующих расчетов. Считая ее хорошо известной, мы здесь ее рассматривать не будем.

1.3-2. Законы переноса (обмена)

В уравнениях сохранения фигурируют такие величины, как касательное напряжение, тепловой и диффузионный потоки. В случае ламинарного пограничного слоя эти величины выражаются через закон вязкости Ньютона, закон теплопроводности Фурье и закон диффузии Фика. Представляется удобным принимать, что и для турбулентных течений эффективные касательные напряжения, тепловой поток и т. д. также следуют этим законам с заменой коэффициентов ламинарного переноса на эффективные коэффициенты обмена, которые обычно гораздо больше первых.

Таким образом, придерживаясь принятых нами условных обозначений, запишем следующие законы переноса:

$$\tau=\mu_{эф}\,(\partial u/\partial y); \tag{1.3-2}$$

$$J_j=-\,(\mu_{эф}/\sigma_{jэф})\,(\partial m_j/\partial y); \tag{1.3-3}$$

$$J_h=-\,(\mu_{эф}/\sigma_{hэф})\,(\partial h/\partial y). \tag{1.3-4}$$

1.3-3. Выражение для эффективной вязкости

Для ламинарного течения величина $\mu_{эф}$ совпадает с молекулярной вязкостью и может быть легко подсчитана. В случае турбулентного течения необходима точная инормация об эффективной вязкости; в этом состоит главная слабость теории турбулентного пограничного слоя. Существует несколько гипотез, пригодных для вычисления $\mu_{эф}$.

Большая часть их уже упоминалась выше в § 0.2. Здесь мы уделим основное внимание гипотезе Прандтля о пути смешения (перемешивания) [Л. 85].

Отметим, что использование в данной книге гипотезы о пути смешения носит преимущественно иллюстративный характер.

В методе решения, излагаемом ниже, в гл. 2, с одинаковым успехом может быть использована любая гипотеза. Например, дифференциальное уравнение турбулентной кинетической энергии в частных производных параболического типа может быть решено одновременно с уравнениями количества движения, концентрации и другими уравнениями.

Гипотеза Прандтля о пути смешения может быть выражена в виде

$$\mu_{эф}=\rho l^2\left|\partial u/\partial y\right|, \tag{1.3-5}$$

где l — длина пути смешения. Для течений непристеночного типа величина l обычно принимается постоянной и пропорциональной толщине пограничного слоя. Коэффициент пропорциональности лежит между 0,07 и 0,1 для различных видов свободных турбулентных течений [Л. 1]. Для пристеночного пограничного слоя изменение l во внешней области такое же, как в свободном турбулентном потоке, а вблизи стенки величина l пропорциональна расстоянию от стенки. Такой характер изменения пути смешения впервые предложил Хадимото [Л. 47]. Эскудиер [Л. 25] на основе собранных им экспериментальных данных рекомендовал следующие зависимости:

$$\left.\begin{array}{ll} 0<y\leqslant \lambda y_l/K: & l=Ky; \\ \lambda y_l/K<y: & l=\lambda y_l, \end{array}\right\} \tag{1.3-6}$$

где λ и K — константы, y — расстояние от стенки и y_l — характерная толщина слоя. Экспериментальные данные, обобщенные Эскудиером, относятся к различным типам пограничных слоев: с нулевым, отрицательным и положительным продольными градиентами давления, с максимумом скорости внутри слоя и без него. Интересен тот факт, что все данные обнаруживают примерно одинаковое количественное соотношение между длиной пути смешения и расстоянием от стенки. Это демонстрирует широкую совместную применимость уравнений (1.3-5) и (1.3-6).

Анализ собственных экспериментальных данных, проведенный для пограничного слоя сжимаемой жидкости Майсом и Мак Дональдом [Л. 60], выявил незначительное влияние сжимаемости на длину пути смешения вплоть до чисел Маха, равных 5. Удачным оказалось сравнение с экспериментальными данными, представленными в работах [Л. 12 и 78]. Будучи основано на зависимостях (1.3-5) и (1.3-6), это сравнение дает также еще одно, хотя и косвенное, подтверждение справедливости этих зависимостей.

Тем не менее гипотезу о пути смешения следует рассматривать лишь как модель, которая постепенно изживет себя по мере накопления знаний в исследуемой области. Одним из недостатков этой гипотезы является вывод об исчезновении эффективной вязкости в точке с нулевым градиентом скорости. Отсюда, в частности, при конечных величинах эффективного числа Прандтля приходим к нереальному заключению об отсутствии теплового потока в точке с нулевым градиентом скорости. Однако отмеченный недостаток гипотезы вряд ли может играть существенную роль (за исключением некоторых особых обстоятельств). К тому же это затруднение легко можно обойти.

1.3-4. Эффективные числа Прандтля и Шмидта

В разд. 1.3-2 были введены определения коэффициентов обмена $\sigma_{j\,эф}$ и $\sigma_{h\,эф}$, являющихся соответственно эффективными числами Шмидта и Прандтля. Доступные из литературы экспериментальные данные по $\sigma_{h\,эф}$ для турбулентных течений в трубах обобщены Кестином и Ричардсоном в обзоре [Л. 51]. Анализ этих данных позволяет заключить, что величина $\sigma_{h\,эф}$ почти не изменяется по сечению трубы и равна приблизительно 0,8.

Однако для свободной турбулентности величины $\sigma_{j\,эф}$ и $\sigma_{h\,эф}$ оказываются несколько меньшими. Для осесимметричных струй ряд авторов устанавливает величину 0,7 (см. [Л. 32, 46]); для плоских струй, следа за телом и перемешивающихся слоев эта величина составляет 0,5 [Л. 1, 86 и 127].

1.3-5. Пристеночная область

Необходимость специального рассмотрения. Приведенные выше формулы для эффективной вязкости и других обменных характеристик учитывают только вклад турбулентности. Игнорирование ламинарных процессов обмена вполне приемлемо для большей части слоя, поскольку турбулентная область гораздо шире ламинарной. Однако в непосредственной близости стенки величина турбулентной вязкости уменьшается [как это можно видеть из уравнений (1.3-5) и (1.3-6)] и становится сравнимой с ламинарной вязкостью. Эффективные числа Прандтля и Шмидта в пристеночной области также достигают своих ламинарных значений. Таким образом, необходимо опираться на более точную гипотезу для $\mu_{эф}$, учитывающую роль и вклад турбулентной и молекулярной вязкости в пристеночной области. Действительно, гипотеза для пристеночной области исключительно важна, так как именно здесь имеют место наибольшие градиенты скорости и других переменных, а величины касательных напряжений и потоков переноса представляют главный интерес для практики.

Выражение для $\mu_{эф}$ вблизи стенки. В литературе имеется много различных предложений и формул для эффективной вязкости в пристеночной области. Большинство из них опирается на «универсальный закон стенки» и на допущение постоянства касательного напряжения. Сводка таких предложений содержится в работах [Л. 48 и 51].

Все соотношения подобного рода фактически согласованы с данными тех экспериментов, где отсутствовали продольные градиенты давления, неоднородности свойств жидкости и массоперенос у стенки. Чтобы устранить эти ограничения, необходимы более общие выражения. Для целей рационального обобщения наиболее подходящей нам представляется гипотеза Ван-Дриста [Л. 126]. Предлагаемая нами ее модификация почти говорит сама за себя. Мы будем использовать эту гипотезу в следующей форме:

$$\mu_{эф} = \mu + \rho K^2 y^2 \left[1 - \exp\left\{-y\sqrt{\tau\rho}/(\mu A_+)\right\}\right]^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|. \qquad (1.3\text{-}7)$$

Здесь A_+ — постоянная величина. Согласно (1.3-7) величина $\mu_{эф}$ составлена из молекулярной вязкости μ и ее турбулентного аналога $\rho K^2 y^2 |\partial u/\partial y|$. При этом вторая составляющая вблизи стенки «затухает» по экспоненте. Ван-Дрист рассматривал слой, где касательное напряжение в любой точке было равно его значению на стенке. Поэтому он использовал величину касательного напряжения на стенке в экспоненциальном члене. Полагая, что локальное уменьшение турбулентной вязкости вблизи стенки, по всей вероятности, обусловлено влиянием местного касательного напряжения, а не его величиной на одной из границ слоя, мы в (1.3-7) вводим локальное значение τ.

Соотношение (1.3-7) будет использоваться нами в настоящей книге для пристеночной области. Оно, как мы считаем, не противоречит применению нами уравнений (1.3-5) и (1.3-6) и к полностью турбулентной части пограничного слоя.

Пользование этой частной гипотезой преследует цель придать нашему анализу большую конкретность. В то же время возможности предлагаемого ниже метода решения нисколько не сужаются.

Выражения для $\sigma_{j\,эф}$ *и* $\sigma_{h\,эф}$. Эффективное число Шмидта или Прандтля у стенки может быть вычислено с помощью формулы

$$\frac{\mu_{эф}}{\sigma_{эф}} = \frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_t}(\mu_{эф} - \mu), \tag{1.3-8}$$

где σ и σ_t — соответственно ламинарные и турбулентные числа Шмидта и Прандтля. Для полностью турбулентной области значение σ_t будет таким же, как и $\sigma_{эф}$. Следовательно, рассуждения, приведенные в разд. 1.3-4, относятся также и к σ_t. Идея, заложенная в зависимости (1.3-8), заключается в допущении аддитивности ламинарной и турбулентной составляющих эффективного коэффициента обмена. Каждая составляющая обладает своей собственной постоянной величиной отношения числа Прандтля к числу Шмидта.

Роль анализа, основанного на куэттовской модели течения. Нами дана достаточная информация относительно начальных и граничных условий и законов переноса для решения (хотя бы в принципе) уравнений сохранения, приведенных в разд. 1.1-3. До обсуждения в § 1.5 решения этих уравнений мы остановимся на трудностях исследования пристенной области течения. Как уже упоминалось ранее, зависимые переменные и коэффициенты эффективного обмена в этой области резко изменяются, поэтому, какой бы численный метод решения мы не использовали, хорошая точность для этой узкой области обычно может быть достигнута лишь при больших затратах труда вычислителя.

Расчетный метод, излагаемый в данной работе, позволяет преодолеть эти трудности. За счет чего это удалось достичь, поясним сейчас кратко в общих чертах. Вблизи самой стенки скорость u мала, и потому местной конвекцией в направлении x можно пренебречь. Таким образом, движение у стенки имеет характер куэттовского течения, т. е. одномерного течения, который определяется прежде всего потоками массы, количества движения и энергии через слой. Математическая задача для этой области тогда сводится к решению совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений, что проще, нежели решение дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее привлекательным является то, что решение уравнений для куэттовской модели течения можно выполнить раз и навсегда, а затем они могут быть использованы как асимптоты или граничные условия при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее удобно выразить результаты данного анализа куэттовского течения в форме алгебраических соотношений, тем более что доказана возможность вывода таких соотношений. Некоторые примеры будут приведены в гл. 4.

Таким образом, представление течения в пристеночной области пограничного слоя как одновременного составляет важную часть нашего теоретического метода. Такое толкование пристеночной области приведено нами в § 1.4.

Обращаем внимание читателя, желающего пропустить этот довольно большой раздел, что распространение нами на пристеночную область решений куэттовского типа значительно облегчает последующие решения дифференциальных уравнений в частных производных

для конкретных задач. Анализ, содержащийся в § 1.4, приводит к зависимостям типа (1.4-92)—(1.4-94), которые мы используем позже в нашем методе расчета.

1-4. УРАВНЕНИЯ ПРИСТЕНОЧНОГО ОДНОМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Цель данного раздела — дать общую трактовку одномерного пограничного слоя у стенки. Однако основные особенности метода могут быть развиты без использования полных уравнений в их общей записи. Это делает метод более доступным для понимания. Поэтому мы ограничимся пока химически инертными жидкостями с однородными свойствами. Это ограничение не является принципиальным и при желании легко устранимо. Мы будем иметь дело с распределением скорости и представленной в общем виде зависимой переменной Φ; последняя может замещать m_j при отсутствии химической реакции и $\bar{h}$ в случае, когда мы либо пренебрегаем кинетическим теплом (т. е. диссипацией механической энергии), либо принимаем эффективное число Прандтля повсюду равным единице. Дальше будет показано, что почти то же самое рассуждение может быть применено для случая, когда кинетическое тепло является конечной величиной, а $\sigma_{h\,эф}$ по определению энтальпии адиабатической стенки не равняется единице.

1.4-1. Допущения, используемые в куэттовской модели течения

Если конвекция в направлении x пренебрежимо мала, то первая интерпретация результирующих одномерных уравнений сохранения дает[1]:

$$\tau = \tau_s + \frac{dp}{dx}\, y + \dot{m}''_s u; \tag{1.4-1}$$

$$J = J_s + \dot{m}''_s (\Phi_s - \Phi). \tag{1.4-2}$$

Здесь подстрочный индекс означает условия на стенке. Эти соотношения могут быть приведены к безразмерному виду с помощью подстановок:

$$\tau_+ \equiv \tau/\tau_s; \tag{1.4-3}$$

$$y_+ \equiv y\sqrt{\tau_s \rho}/\mu; \tag{1.4-4}$$

$$u_+ \equiv u/\sqrt{\tau_s/\rho}; \tag{1.4-5}$$

$$p_+ \equiv \mu\,(dp/dx)/(\tau_s^{3/2}\rho^{1/2}); \tag{1.4-6}$$

$$m_+ \equiv \dot{m}'''_s/\sqrt{\tau_s \rho}; \tag{1.4-7}$$

$$J_+ \equiv J/J_s; \tag{1.4-8}$$

$$\Phi_+ \equiv (\Phi_s - \Phi)\sqrt{\tau_s \rho}/J_s. \tag{1.4-9}$$

Тогда

$$\tau_+ = 1 + p_+ y_+ + m_+ u_+; \tag{1.4-10}$$

$$J_+ = 1 + m_+ \Phi_+. \tag{1.4-11}$$

Законы переноса, приведенные в разд. 1.3-2, преобразуются к виду

$$\tau_+ = (\mu_{эф}/\mu)/(du_+/dy_+); \tag{1.4-12}$$

$$J_+ = (\mu_{эф}/\mu\sigma_{эф})/(d\Phi_+/dy_+). \tag{1.4-13}$$

[1] Эти выражения приводятся здесь без доказательств, так как они хорошо известны и их легко вывести. Изменение радиуса r не принимается во внимание ввиду малой толщины рассматриваемой области.

Здесь частные производные могут быть заменены на обыкновенные, так как задача одномерна.

1.4-2. Обобщенная гипотеза Ван-Дриста

Гипотеза. Приведенные выше уравнения позволяют получить решения для u и Φ только после подстановки в них зависимостей для $\mu_{эф}$ и $\sigma_{эф}$. Чтобы вывести эти зависимости, мы воспользуемся гипотезой Ван-Дриста (1.3-7) в безразмерной форме:

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu} = 1 + K^2 y_+^2 [1 - \exp(-y_+ \sqrt{\tau_+}/A_+)]^2 (du_+/dy_+). \qquad (1.4\text{-}14)$$

Здесь знак модуля производной (du_+/dy_+) опущен по вполне очевидным причинам. Аналогично уравнение (1.3-8) может быть представлено в записи

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu\sigma_{эф}} = \frac{1}{\sigma} + \frac{K^2 y_+^2}{\sigma_t} [1 - \exp(-y_+ \sqrt{\tau_+}/A_+)]^2 (du_+/dy_+). \qquad (1.4\text{-}15)$$

В этих выражениях содержатся две константы: K и A_+; одну из них можно устранить в целях большей общности. Это упрощение достигается с помощью следующих подстановок:

$$y_* \equiv K y_+; \qquad (1.4\text{-}16)$$

$$u_* \equiv K u_+; \qquad (1.4\text{-}17)$$

$$A_* \equiv K A_+. \qquad (1.4\text{-}18)$$

Тогда

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu} = 1 + y_*^2 [1 - \exp(-y_* \sqrt{\tau_+}/A_*)]^2 (du_*/dy_*); \qquad (1.4\text{-}19)$$

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu\sigma_{эф}} = \frac{1}{\sigma} + \frac{y_*^2}{\sigma_t} [1 - \exp(-y_* \sqrt{\tau_+}/A_*)]^2 (du_*/dy_*). \qquad (1.4\text{-}20)$$

Введем обозначения:

$$p_* \equiv p_+/K; \qquad (1.4\text{-}21)$$

$$m_* = m_+/K; \qquad (1.4\text{-}22)$$

$$\Phi_* \equiv K\Phi_+. \qquad (1.4\text{-}23)$$

Тогда уравнения (1.4-10) и (1.4-11) преобразуются к виду

$$\tau_+ = 1 + p_* y_* + m_* u_*; \qquad (1.4\text{-}24)$$

$$J_+ = 1 + m_* \Phi_*. \qquad (1.4\text{-}25)$$

Профили u_* и Φ_*. Уравнение (1.4-12) можно представить в виде

$$\tau_+ = \frac{\mu_{эф}}{\mu} \frac{du_*}{dy_*}. \qquad (1.4\text{-}26)$$

Совместное решение уравнений (1.4-19), (1.4-24) и (1.4-26) с последующими несложными алгебраическими преобразованиями приводит к равенству

$$\frac{du_*}{dy_*} = \frac{2(1 + p_* y_* + m_* u_*)}{1 + \sqrt{1 + 4y_*^2 (1 + p_* y_* + m_* u_*) [1 - \exp(-y_* \sqrt{(1 + p_* y_* + m_* u_*)}/A_*)]^2}}. \qquad (1.4\text{-}27)$$

Аналогично для безразмерного потока J_+ исходим из следующего выражения:

$$J_+ = \frac{\mu_{эф} d\Phi_*}{\mu\sigma_{эф} dy_*}, \tag{1.4-28}$$

которое в сочетании с уравнениями (1.4-20) и (1.4-25) приводит к равенству

$$\frac{d\Phi_*}{dy_*} = \frac{(1 + m_*\Phi_*)\,\sigma_t}{\frac{1}{\sigma\,\sigma_t} + y_*^2\,[1 - \exp(-y_*\sqrt{1 + p_* y_* + m_* u_*/A_*})]^2\,(du_*/dy)}. \tag{1.4-29}$$

Для заданной величины A_* и при очевидных граничных условиях

$$y_* = 0 : u_* = 0, \quad \Phi_* = 0 \tag{1.4-30}$$

решение уравнений (1.4-27) и (1.4-29) позволит получить профили u_* и Φ_* в следующей форме [1]:

$$u_* = u_*(y_*,\ p_*,\ m_*); \tag{1.4-31}$$

$$\Phi_* = \Phi_*(y_*,\ p_*,\ m_*,\ \sigma/\sigma_t,\ \sigma_l). \tag{1.4-32}$$

Некоторые из этих решений получены численно и будут позднее представлены в гл. 4. Аналитические решения возможны лишь для специфических условий; некоторые из них мы получим ниже в разд. 1.4-4.

Вернемся теперь к уравнению для энтальпии торможения с тем, чтобы обсудить вопрос об учете кинетического тепла в куэттовском течении.

1.4-3. Использование энтальпии адиабатической стенки

Выясним, как с помощью развитого выше анализа для обобщенной переменной Φ вычислить величину $\tilde{h}$ в случае, когда кинетический нагрев не пренебрежимо мал и эффективное число Прандтля отлично от единицы.

Адиабатическая стенка. Пренебрегая конвективной составляющей потока в x-направлении, из уравнения (1.1-5) получаем:

$$J_h = J_{hs} + \dot{m}''_s(\tilde{h}_s - \tilde{h}) + u\tau. \tag{1.4-33}$$

Для адиабатической стенки $J_{hs} = 0$. Следовательно,

$$J_{hад} = \dot{m}''_s(\tilde{h}_{адs} - \tilde{h}_{ад}) + u\tau. \tag{1.4-34}$$

Здесь подстрочный индекс «ад» напоминает об адиабатических условиях на стенке. Привлекая (1.3-1), (1.3-2) и (1.3-4), преобразуем (1.4-34) к виду

$$\frac{\mu_{эф}}{\sigma_{hэф}}\frac{d\tilde{h}_{ад}}{dy} + \left(1 - \frac{1}{\sigma_{hэф}}\right)\mu_{эф}\frac{d\,(u^2/2)}{dy} + \dot{m}''_s(\tilde{h}_{адs} - \tilde{h}_{ад}) = 0 \tag{1.4-35}$$

или в безразмерной форме

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu\sigma_{hэф}}\frac{d\tilde{h}_{*ад}}{dy_*} = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{hэф}}\right)\frac{\mu_{эф}}{\mu}\frac{d\,(u^2/2)}{dy_*} + m_*\tilde{h}_{*ад}, \tag{1.4-36}$$

[1] Скобки используются здесь для заключения в них аргументов функции.

здесь

$$\tilde{h}_{*\text{ад}} \equiv K^2 \tilde{h}_{+\text{ад}}; \tag{1.4-37}$$

$$\tilde{h}_{+\text{ад}} \equiv \frac{\rho\,(\tilde{h}_{\text{адs}} - \tilde{h}_{\text{ад}})}{\tau_s}. \tag{1.4-38}$$

Решение уравнения (1.4-36) с использованием зависимостей (1.4-19), (1.4-20) и (1.4-27) позволяет найти искомую связь

$$\tilde{h}_{*\text{ад}} = \tilde{h}_{*\text{ад}}(y_*,\ p_*,\ m_*,\ \sigma_n/\sigma_{nt},\ \sigma_{nt}). \tag{1.4-39}$$

Для коэффициента восстановления H, определяемого в виде

$$H \equiv 1 + \frac{(\tilde{h}_{\text{адs}} - \tilde{h}_{\text{ад}})}{u^2/2}, \tag{1.4-40}$$

получается простая формула

$$H = 1 + 2\tilde{h}_{*\text{ад}}/u_*^2. \tag{1.4-41}$$

Случай неадиабатических условий на стенке. Определим теперь новую величину $\tilde{\tilde{h}}$

$$\tilde{\tilde{h}} \equiv \tilde{h} + (H - 1)\,u^2/2. \tag{1.4-42}$$

Величина коэффициента восстановления H подставляется из уравнений (1.4-39) и (1.4-41). Для адиабатической стенки величина $\tilde{\tilde{h}}$ будет такой же, как $\tilde{h}_{\text{адs}}$. После подстановки величины $\tilde{\tilde{h}}$ из (1.4-42) в (1.4-33) и исключения H с помощью равенства (1.4-40), а $(\tilde{h}_{\text{адs}} - \tilde{h}_{\text{ад}})$ с помощью (1.4-34) получим соотношение

$$J_h - J_{h\text{ад}} = J_{hs} + \dot{m}''_s\,(\tilde{h}_s - \tilde{\tilde{h}}), \tag{1.4-43}$$

или в сокращенной записи

$$J_{+h} = 1 + m_+ h_+, \tag{1.4-44}$$

где

$$J_{+h} \equiv \frac{J_h - J_{h\text{ад}}}{J_{hs}} \tag{1.4-45}$$

и

$$h_+ \equiv \frac{(\tilde{h}_s - \tilde{\tilde{h}})\sqrt{\tau_s \rho}}{J_{hs}}. \tag{1.4-46}$$

Уравнение (1.4-44) идентично по форме (1.4-11). Остается показать, что J_{+h} подчиняется зависимости, аналогичной (1.4-13).

Поскольку

$$J_h - J_{h\text{ад}} = -\frac{\mu_{\text{эф}}}{\sigma_{h\text{эф}}}\left\{\frac{d\tilde{h}}{dy} - \left(\frac{d\tilde{h}}{dy}\right)_{\text{ад}}\right\}, \tag{1.4-47}$$

то после подстановки (1.4-42) получаем:

$$J_h - J_{h\text{ад}} = -\frac{\mu_{\text{эф}}}{\sigma_{h\text{эф}}}\left\{\frac{d\tilde{\tilde{h}}}{dy} - \left(\frac{d\tilde{\tilde{h}}}{dy}\right)_{\text{ад}}\right\}. \tag{1.4-48}$$

Теперь величина $\tilde{\tilde{h}}$ согласно определению (1.4-42) окажется такой же, как $\tilde{h}_{\text{адs}}$ (отсюда независимость от y) при адиабатических условиях на стенке.

Следовательно, второй член в фигурных скобках (1.4-48) можно приравнять нулю. Результирующее безразмерное уравнение

$$J_{+h} = \frac{\nu_{эф}}{\mu\sigma_{h\,эф}} \frac{dh_+}{dy_+} \tag{1.4-49}$$

теперь аналогично уравнению (1.4-13).

Принимая во внимание соответствие между величинами J_{+h}, h_+, $\sigma_{h\,эф}$ и $\tilde{h}$, с одной стороны, и J_+, Φ_+, $\sigma_{эф}$, $\Phi - c^*$ другой стороны, приходим к выводу, что все рассуждения относительно уравнения для Φ_+ будут справедливы и для h_+. Тогда связь с локальным значением $\tilde{h}$ может быть установлена с помощью равенства (1.4-42). Величина H находится из приведенных выше соотношений.

1.4-4. Некоторые аналитические решения

Как уже отмечалось, решение уравнений (1.4-27) и (1.4-29) в общем виде возможно лишь с помощью численного интегрирования. Однако к определенному пониманию смысла этих полных решений можно прийти после рассмотрения нескольких простых случаев.

Асимптотические решения для ламинарного слоя. Ограничиваясь случаем весьма малых значений y_*, в пределе придем к условиям ламинарного течения. Тогда уравнение (1.4-27) упростится до вида

$$\frac{du_*}{dy_*} = 1 + p_* y_* + m_* u_*. \tag{1.4-50}$$

Отсюда следует:

$$p_* = m_* = 0 : u_* = y_*; \tag{1.4-51}$$

$$p_* \neq 0,\ m_* = 0 : u_* = y_* + p_* y_*^2/2; \tag{1.4-52}$$

$$p_* = 0,\ m_* \neq 0 : u_* = \{\exp(m_* y_*) - 1\}/m_*. \tag{1.4-53}$$

Аналогично (1.4-29) сводится к уравнению

$$\frac{d\Phi_*}{dy_*} = \sigma(1 + m_* \Phi_*), \tag{1.4-54}$$

которое имеет решение

$$\Phi_* = \sigma\{\exp(m_* y_*) - 1\}/m_*. \tag{1.4-55}$$

При

$$m_* \to 0 \quad \Phi_* = \sigma y_*. \tag{1.4-56}$$

Числа Прандтля и Шмидта равны единице. Может показаться излишним дополнительно к отношению σ/σ_t в перечень аргументов уравнения (1.4-32) включать еще и σ_t.

Обсудим возможность распространения решения, полученного для $\sigma_t = 1$, на произвольное значение σ_t. Пусть $\Phi_{*(1)}$ соответствует величине Φ_* при тех же самых значениях y_* σ/σ_t, но при σ_t, равном единице. Тогда из уравнения (1.4-29) получим:

$$\frac{d\Phi_*}{d\Phi_{*(1)}} = \frac{(1 + m_* \Phi_*)\,\sigma_t}{1 + m_* \Phi_{*(1)}}. \tag{1.4-57}$$

Необходимо подчеркнуть, что Φ_* и $\Phi_{*(1)}$ относятся к одному и тому же значению σ/σ_t, но к различным величинам σ. Интегрирование уравнения (1.4-57) дает:

$$\Phi_* = \frac{(1 + m_* \Phi_{*(1)})\,\sigma_t - 1}{m_*}. \tag{1.4-58}$$

Существует предельная форма выражения (1.4-58), а именно:

$$m_* \to 0, \quad \Phi_* = \sigma_t \Phi_{*(1)}. \tag{1.4-59}$$

Таким образом, вместо зависимости (1.4-32) можно использовать

$$\Phi_{*(1)} = \Phi_{*(1)}(y_*, \ p_*, \ m_*, \ \sigma/\sigma_t) \tag{1.4-60}$$

с последующим переходом к Φ_* по формуле (1.4-58).

Асимптотическое решение для полностью турбулентной части слоя. Для больших значений y_* вклад ламинарной вязкости и член экспоненциального затухания в (1.4-15) пренебрежимо малы. Тогда из (1.4-27)

$$\frac{du_*}{dy_*} = \frac{(1 + p_* y_* + m_* u_*)^{1/2}}{y_*}. \tag{1.4-61}$$

Для $p_* = m_* = 0$ получается

$$u_* = \ln(E_* y_*), \tag{1.4-62}$$

где E — постоянная интегрирования.

Для $p_* \neq 0$, $m_* = 0$ имеем:

$$u_* = 2(\sqrt{1 + p_* y_*} - 1) + \ln\left\{\frac{4E_* y_*}{2 + p_* y_* + 2\sqrt{1 + p_* y_*}}\right\}. \tag{1.4-63}$$

Здесь постоянная интегрирования E_* будет теперь зависеть от p. (Этот результат совпадает с полученным ранее Таунсендом [Л. 87] из рассмотрения баланса турбулентной кинетической энергии.)

Для $p_* = 0$, $m \neq 0$ имеем:

$$u_* = \ln(E_* y_*) + \frac{m_*}{4}\{\ln(E_* y_*)\}^2, \tag{1.4-64}$$

константа интегрирования E_* является функцией m_* (сходный результат был получен в работах [Л. 8, 14, 62 и 118]).

Для полностью турбулентной области и $p_* = 0$ с помощью уравнения (1.4-27) и зависимости для $\Phi_{*(1)}$, выведенной из (1.4-29), получим соотношение

$$\frac{d\Phi_{*(1)}}{du_*} = \frac{1 + m_* \Phi_{*(1)}}{1 + m_* u_*}. \tag{1.4-65}$$

Его интегрирование дает

$$\frac{\ln(1 + m_* \Phi_{*(1)})}{m_*} = \frac{\ln(1 + m_* u_*)}{m_*} + P_*. \tag{1.4-66}$$

Здесь постоянная интегрирования P_* будет в общем функцией m_* и σ/σ_t. Предельная форма уравнения (1.4-66) для $m_* \to 0$ имеет вид:

$$\Phi_{*(1)} = u_* + P_*. \tag{1.4-67}$$

{Сполдинг и Джаятилака [Л. 114] пользовались в своих расчетах формулой (1.4-67); позже Сполдинг [Л. 106] обобщил ее на основе соотношения, сходного с уравнением (1.4-66)}.

Случай больших значений σ/σ_t, $p_* = m_* = 0$. Легко показать, что соотношение (1.4-67) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\Phi_{*(1)}}{du_*} = \sigma_{эф}, \tag{1.4-68}$$

справедливо при $p_* = m_* = 0$. Интегрирование (1.4-68) дает:

$$\Phi_{*(1)} = u_* + \int_0^{u_*} (\sigma_{эф} - 1)\, du_*. \tag{1.4-69}$$

Для больших величин y_* (следовательно, для больших значений u_*) подынтегральное выражение во втором члене правой части (1.4-69) обращается в нуль; тогда верхний предел может быть заменен на бесконечность. Таким образом, приходим к следующему выражению для P_* в уравнении (1.4-67):

$$P_* = \int_0^\infty (\sigma_{эф} - 1)\, du_*. \tag{1.4-70}$$

При весьма больших σ/σ_t значительный вклад в P_* вносится областью малых величин u_*. Асимптотическое значение поэтому может быть найдено при сохранении лишь первого члена в разложении в ряд экспоненциального члена уравнения (1.4-20) в допущении приблизительного равенства между собой величин y_* и u_* в этой области. Тогда выражение

$$P_* \approx \int_0^\infty \left\{ \frac{1 + (u_*^4/A_*^2)}{(\sigma_t/\sigma) + (u_*^4/A_*^2)} \right\} du_* \tag{1.4-71}$$

и есть искомая асимптотическая формула. В случае больших величин σ/σ_t

$$P_* = \frac{\pi}{4 \sin(\pi/4)} A_*^{1/2} (\sigma/\sigma_t)^{-1/4} (\sigma/\sigma_t - 1). \tag{1.4-72}$$

Коэффициент восстановления для $m_* = 0$. Если положить $m_* = 0$ в уравнение (1.4-36), то после интегрирования найдем:

$$\tilde{h}_{*ад} = \int_0^{u_*^2/2} (\sigma_{h\,эф} - 1)\, du_*^2/2. \tag{1.4-73}$$

Если же σ_h и $\sigma_{h,t}$ равны между собой, то $\sigma_{h\,эф}$ есть величина постоянная.

Тогда

$$\tilde{h}_{*ад} = (\sigma_{h,t} - 1) u_*^2/2. \tag{1.4-74}$$

Следовало бы отметить, что даже при неравных друг другу числах σ_h и $\sigma_{h,t}$ величина $\sigma_{h\,эф}$ значительно отличается от $\sigma_{h,t}$ только в области малых u_*, где величина интеграла в уравнении (1.4-73) в любом случае невелика. Таким образом, уравнение (1.4-74) окажется достаточно точным для больших значений u_*, даже когда $\sigma_h \neq \sigma_{h,t}$. Подстановка уравнения (1.4-74) в (1.4-41) приводит к простому результату:

$$H = \sigma_{h,t}. \tag{1.4-75}$$

1.4-5. Явные формы зависимостей

Соотношения типа (1.4-31) или (1.4-60) представляют главный результат нашего анализа куэттовской модели течения. Позднее мы воспользуемся ими для установления связи между величинами y, u, Φ, dp/dx, m''_s, с одной стороны, и τ_s, J_s — с другой. Поскольку почти каждая безразмерная величина содержит τ_s, то процесс обязательно будет итерационным, т. е. повторяющимся. Эту особенность можно устранить преобразованием соотношений типа (1.4-31) к удобным явным формам. Мы определим новые безразмерные группы и классифицируем их таким образом, чтобы представить касательные напряжения на стенке, тепловой поток и т. д. как функции известных величин.

Здесь будут введены новые обозначения и показана их связь с прежними нашими обозначениями.

В гл. 2 будет сделано допущение, что предложенные алгебраические соотношения, связывающие эти новые обозначения, можно получить из анализа куэттовского течения, проведенного в данном разделе. Примеры действительных зависимостей будут представлены в гл. 4.

Введем определения:

$$R \equiv \frac{\rho u y}{\mu}; \tag{1.4-76}$$

$$F \equiv \frac{y}{\rho u^2}\frac{dp}{dx}; \tag{1.4-77}$$

$$M \equiv \frac{\dot{m}''_s}{\rho u}; \tag{1.4-78}$$

$$s \equiv \frac{\tau_s}{\rho u^2}; \tag{1.4-79}$$

$$S \equiv \frac{J_s}{\rho u\,(\Phi_s - \Phi)} \tag{1.4-80}$$

и далее

$$R_* \equiv K^2 R; \tag{1.4-81}$$

$$F_* \equiv F/K^2; \tag{1.4-82}$$

$$M_* \equiv M/K^2; \tag{1.4-83}$$

$$s_* \equiv s/K^2; \tag{1.4-84}$$

$$S_* = S/K^2. \tag{1.4-85}$$

Заметим теперь, что

$$R_* = u_* y_*; \tag{1.4-86}$$

$$F_* = p_* y_*/u_*^2; \tag{1.4-87}$$

$$M_* = m_*/u_*; \tag{1.4-88}$$

$$s_* = 1/u_*^2; \tag{1.4-89}$$

$$S_{*(1)} = 1/(u_* \Phi_{*(1)}); \tag{1.4-90}$$

$$S_* = 1/(u_* \Phi_*). \tag{1.4-91}$$

Легко видеть, что информация, содержащаяся в соотношениях для профилей (1.4-31), (1.4-60) и (1.4-39), может быть представлена в следующих удобных формах:

$$s_* = s_* \in R_*, F_*, M_* \ni; \tag{1.4-92}$$

$$S_{*(1)} = S_{*(1)} \in R_*, F_*, M_*, \sigma/\sigma_t \ni; \tag{1.4-93}$$

$$H = H \in R_*, F_*, M_*, \sigma_h/\sigma_{ht},\ \sigma_{ht} \ni. \tag{1.4-94}$$

Смысл параметра $S_{*(1)}$ легко поддается трактовке. Действительно, уравнение (1.4-58) позволяет нам отнести S_* к $S_{*(1)}$ следующим образом:

$$S = \frac{M_*}{(1 + M_*/S_{*(1)})^{\sigma_t} - 1}. \tag{1.4-95}$$

Соотношение (1.4-95) имеет предельную форму:

$$M_* \to 0\colon\ S_* = S_{*(1)}/\sigma_t. \tag{1.4-96}$$

На этом мы заканчиваем построение основ теории для одномерной пристеночной области. Была показана представимость результатов анализа для этой области через общепринятые термины и обо-

значения. Однако одномерная схема неприменима к внешней части пограничного слоя. Для этой области необходимо решать дифференциальные уравнения в частных производных, приведенные в разд. 1.1-3.

В следующей главе дается описание нашего нового метода их решения.

Глава вторая

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

2.1. ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Используемая система отсчета имеет важное значение в методе конечных разностей, поскольку принимаются во внимание величины зависимых переменных только для определенного числа точек, располагаемых в виде сетки в выбранной системе координат. На практике наиболее распространенным является применение прямоугольной сетки в координатах $x \sim y$. Легко видеть неудобство такого выбора в применении к задачам пограничного слоя, толщина которого обычно растет в направлении течения. Если выбранная сетка такова, что определенный минимум ее узловых точек размещается поперек слоя, то тогда сетка окажется слишком мелкой в начальном сечении слоя и чересчур крупной в конечном сечении слоя, если продвигаться в направлении течения. Аналогично ячейки сетки, выбранные для нижнего ее сечения, окажутся слишком крупными для области слоя, расположенной вверх по потоку, и, таким образом, точность расчета будет неудовлетворительной.

Не исправляет положения использование функции тока ψ вместо y в качестве переменной поперек слоя, хотя такая замена может оказаться полезной в других отношениях. Узловые точки сетки и в этом случае все еще распределяются неэффективно, и эта неэффективность создает методу конечных разностей репутацию дорогостоящего.

Конечно, в процессе интегрирования можно перейти от мелкой сетки к более крупной, но такая процедура груба, трудоемка и неприемлема для общего применения.

Идеальной была бы сетка, всегда совпадающая с областью пограничного слоя. Имеются различные способы обеспечения этого требования. Лю [Л. 36], например, при решении задачи о ламинарном перемешивании химически реагирующих сред использовал безразмерную переменную типа скорости течения как поперечную координату. Это принесло желаемый эффект, так как не имеет значения, как сильно утолщился перемешивающийся слой; скорость изменилась в сечении слоя между фиксированными пределами. Заметим, однако, что в общем случае скорость не является удобной поперечной переменной, поскольку требуется, чтобы независимая переменная менялась монотонно по толщине пограничного слоя. При наличии на профиле скорости отчетливо выраженного максимума это условие нарушается, и скорость тогда перестает удовлетворять требованиям, предъявляемым к независимой переменной.

В наших расчетах в качестве поперечной переменной используется безразмерная функция тока ω. Как будет показано, при таком подходе удается объединить преимущества координат, выражаемых функцией тока, с достоинством ограничения пограничного слоя конечным диапазоном значений ω.

Определим переменную ω в виде

$$\omega \equiv (\psi - \psi_I)/(\psi_E - \psi_I). \qquad (2.1\text{-}1)$$

Здесь ψ_I и ψ_E — значения функции тока на границах слоя I и E; таким образом, ω равно нулю на границе I и единице на границе E. Зависимости переменных ψ_I и ψ_E от x выберем так, чтобы гарантировать наибольшую эффективность счета. Это означает, что все существенные изменения зависимых переменных должны иметь место при значениях ω между нулем и единицей.

Из определения ψ имеем:

$$\frac{d\psi_I}{dx} = -r_I \dot{m}''_I \tag{2.1-2}$$

и

$$\frac{d\psi_E}{dx} = -r_E \dot{m}''_E. \tag{2.1-3}$$

Здесь $\dot{m}''_I$ и $\dot{m}''_E$ — плотности массовых потоков через поверхности I и E. Мы будем вычислять изменения величин ψ_I и ψ_E интегрированием уравнений (2.1-2) и (2.1-3). Это позволит нам решить вопрос о выборе $\dot{m}''_I$ и $\dot{m}''_E$, обеспечивающем наибольшую эффективность вычислений.

Этой цели мы достигнем в § 2-3. Вначале, однако, необходимо привести дифференциальные уравнения к удобной форме.

2.2. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ В КООРДИНАТАХ $x \sim \omega$

Уравнения разд. 1.1-3 трансформируем к координатам $x \sim \omega$. Одновременно произведем подстановку законов сохранения из разд. 1.3-2. В результате получим:

Уравнение сохранения количества движения:

$$\frac{du}{dx} + \frac{\{r_I \dot{m}''_I + \omega (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}''_I)\}}{(\psi_E - \psi_I)} \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^2 \rho u \mu_{эф} \partial u}{(\psi_E - \psi_I)^2 \partial \omega} \right\} - \frac{1}{\rho u} \frac{dp}{dx}. \tag{2.2-1}$$

Уравнение сохранения химической компоненты j:

$$\frac{\partial m_j}{\partial x} + \frac{\{r_I \dot{m}''_I + \omega (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}''_I)\}}{(\psi_E - \psi_I)} \frac{\partial m_j}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\mu_{эф} r^2 \rho u}{(\psi_E - \psi_I)^2 \sigma_{j эф}} \frac{\partial m_j}{\partial \omega} \right\} + \frac{R_j}{\rho u}. \tag{2.2-2}$$

Уравнение сохранения энтальпии торможения:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\{r_I \dot{m}''_I + \omega (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}''_I)\}}{(\psi_E - \psi_I)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \omega} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^2 \rho u \mu_{эф}}{(\psi_E - \psi_I)^2 \sigma_{h эф}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \omega} \right\} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^2 \rho u \mu_{эф}}{(\psi_E - \psi_I)^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma_{h эф}} \right) \frac{\partial (u^2/2)}{\partial \omega} \right\}. \tag{2.2-3}$$

Эти уравнения можно представить обобщенной записью

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d, \tag{2.2-4}$$

где

$$a \equiv r_I \dot{m}''_I / (\psi_E - \psi_I); \tag{2.2-5}$$

$$b \equiv (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}''_I)/(\psi_E - \psi_I) \tag{2.2-6}$$

и

$$c \equiv r^2 \rho u \mu_{эф} / \{(\psi_E - \psi_I)^2 \sigma_{эф}\}. \tag{2.2-7}$$

Здесь Φ означает зависимую переменную, а символом d обозначен член в правой части уравнения, не содержащий $\partial\Phi/\partial\omega$. Таблица 2.2-1 дает конкретные выражения для d.

Таблица 2.2-1

Выражения для обобщенного символа d

Зависимая переменная	Выражение для d
u	$-\frac{1}{\rho u}\frac{\partial p}{\partial x}$
m_j	$R_j\ (\rho u)$
$\widetilde{u}$	$\frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{r^2 \rho u \mu_{эф}}{(\psi_E-\psi_I)^2}\left(1-\frac{1}{\sigma_{h\,эф}}\right)\frac{\partial (u^2/2)}{\partial \omega}\right\}$

2.3. СКОРОСТЬ ОБМЕНА ЧЕРЕЗ ВНЕШНЮЮ ГРАНИЦУ СЛОЯ

В данном параграфе обсуждается вопрос о скоростях переноса массы через граничные поверхности I и E, косвенно определяющие границы слоя.

Наше требование состоит в том, чтобы область $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ включала все точки с существенными градиентами зависимых переменных. Если граница совпадает с линией симметрии или стенкой, величины $\dot{m}'_I$ и $\dot{m}''_E$ поддаются непосредственному определению: скорость массопереноса через линию симметрии равна нулю; на стенке поток массы либо задается, либо выводится из исходных данных.

Если граница примыкает к свободному потоку, то для определения скорости массопереноса через нее, известной под названием скорости увлечения обмена с внешним потоком, требуется большое искусство. Следует различать два подхода к данному вопросу. В одном случае граница слоя может устанавливаться точно, поскольку в турбулентном потоке, который предположительно подчиняется гипотезе о пути смешения, эффективная вязкость исчезает вдоль определенного его края. Этот случай в основном и будет рассматриваться нами в данной работе. В другом случае граница слоя на самом деле устанавливается приближенно, так как эффективная вязкость не исчезает вдоль какой-то определенной граничной линии и достигает условий свободного потока асимптотически: ламинарные течения имеют такой характер. В таком случае граница должна быть установлена исключительно для удовлетворения требований нашего расчета об ограниченности изменений Φ конечным диапазоном значений ω.

Непосредственный способ получения зависимости для обмена на свободной границе (для обозначения которой мы используем подстрочный индекс G) состоит в использовании дифференциальных уравнений в частных производных (2.2-1) для этой границы. Вне границы должно соблюдаться условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_G = -\left(\frac{1}{\rho u}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_G. \tag{2.3-1}$$

Такое же равенство должно быть справедливым при подходе к границе G снизу. Следовательно (независимо от того, равняется ω нулю или единице на рассматриваемой границе), справедливо выражение

$$r_G \dot{m}''_G = \lim_{\omega \to \omega_G}\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial \omega}\left\{\dfrac{r^2 \rho u \mu_{эф}}{(\psi_E-\psi_I)}\dfrac{\partial u}{\partial \omega}\right\}}{\partial u / \partial \omega}\right] \tag{2.3-2}$$

или в другой записи

$$r_G \dot{m}''_G = \lim_{y \to y_G} \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ r \mu_{эф} \dfrac{\partial u}{\partial y} \right\}}{\partial u / \partial y} \right]. \qquad (2.3\text{-}3)$$

Теперь нетрудно высказать суждение о достаточности этого уравнения для определения $\dot{m}''_G$. Предел конечен, если величина $\mu_{эф}$ пропорциональна $\partial u/\partial y$; значит, принятое определение является удовлетворительным. Использование гипотезы о пути смешения [выражаемой уравнением (1.3-5), где такая пропорциональность существует] позволяет нам использовать уравнение (2.3-3) как выражение закона обмена через внешнюю границу. Напротив, при ламинарном течении $\mu_{эф}$ не исчезает с $\partial u/\partial y$; тогда уравнение (2.3-3) заключает в себе бесконечно большую величину скорости обмена через внешнюю границу, и это не позволяет его использовать.

Опишем в общих чертах метод, принятый для таких случаев. Поскольку неудовлетворительность уравнения (2.3-3) обусловлена исчезновением $\partial u/\partial y$ на G-границе, то может оказаться полезным применять уравнение (2.2-1) вдоль какой-то линии постоянных значений ω, несколько удаленной от границы G. Пусть ω_B будет этим значением ω; ее величина должна лежать между нулем и единицей. Тогда

$$r_I \dot{m}''_I + \omega_B (r_E \dot{m}''_E - r_I \dot{m}''_I) = \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \dfrac{r^2 \rho u \mu_{эф}}{(\psi_E - \psi_I)} \dfrac{\partial u}{\partial \omega} \right\}}{(\partial u / \partial \omega)} \right]_B -$$

$$- \frac{(\psi_E - \psi_I)}{(\partial u \, \partial \omega)_B} \left(\frac{du_B}{\partial x} + \frac{1}{\rho_B u_B} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \qquad (2.3\text{-}4)$$

Для достижения большей эффективности численного расчета необходимо так расположить границу, чтобы скорость u_B вдоль линии ω_B, скажем, была бы близка к предписанной ее величине $\tilde{u}_B$. Значения ω_B и $\tilde{u}_B$ могут быть выбраны таким образом, что никакая существенная ошибка не возникнет по причине нарушения истинного смысла уравнений из-за принятия u равным скорости свободного потока, где $\omega = 1$. Например, можно принять $\omega_B = 0{,}9$, $\tilde{u}_B = 0{,}99 u_E$; тогда все величины в правой части уравнения (2.3-4), кроме du_B/dx, могут быть вычислены исходя из переменных величин, соответствующих конкретному значению x. Величина этой производной может быть найдена из текущего значения u_B и значения $\tilde{u}_B$ в желаемом сечении вниз по течению.

Если только одна из границ примыкает к свободному потоку, то обмен через эту границу находится из уравнения (2.3-4) подстановкой в него значения $\dot{m}''$ для другой границы. Когда обе границы свободны, то используются два уравнения вида (2.3-4); их одновременное решение дает значения $\dot{m}''_I$ и $\dot{m}''_E$.

Формула конечных разностей для вычисления массовых скоростей обмена через свободную границу будет рассмотрена ниже в § 2.8.

Сделаем последнее замечание, касающееся массовых скоростей переноса через свободную границу. Вышеупомянутый подход будет использован в настоящей работе. Он представляется нам в настоящее время наилучшим, но не единственно возможным.

Выражение для $\dot{m}''_G$ с одинаковым успехом может быть выведено из любого другого условия сохранения или может основываться на другом принципе. Необходимо напомнить, что массовая скорость через свободную границу является по существу произвольной, поскольку определение границы само по себе произвольно, а все формулировки

удовлетворительны до тех пор, пока отвечают требованиям, обеспечивающим эффективность вычислений.

Выводом дифференциальных уравнений в системе координат $x \sim \omega$ и получением выражений для массовых скоростей обмена через внешнюю границу завершается подготовка разработки метода конечных разностей, детали которого будут нами сейчас описаны.

2.4. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Общее описание. В этом разделе дифференциальное уравнение общего вида (2.2-4) в частных производных мы представим в конечно-разностной форме. Это уравнение решается методом поступательного интегрирования. Поэтому каждому шагу интегрирования будут соответствовать известные величины Ф при дискретных значениях ω для одного значения x. Задача будет состоять в том, чтобы получить величины Ф при тех же самых значениях ω, но для несколько большей величины. Повторение этой основной операции для каждого шага интегрирования позволяет охватить все интересующее нас поле.

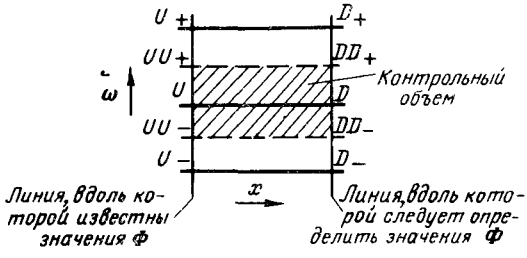


Рис. 2.4-1. Расположение точек сетки конечно-разностной схемы.

Дискретные значения ω, которые мы выбирали заранее, определяют сетку; на рис. 2.4-1 показана часть этой сетки. Точки U и D представляют узловые точки в направлении течения потока при заданной ω; узловые точки в непосредственной близости ω будем обозначать через U_+, U_-, D_+, D_-. Точки, лежащие посередине между U и U_+, обозначим через UU_+; аналогично точки UU_-, DD_-, DD_+ расположены посередине между соответствующими точками. Эти четыре промежуточные точки определяют контрольный объем (на рисунке заштрихован). Его мы используем для образования разностного уравнения. Частные производные по ω в уравнении (2.2-4) могут быть выражены через значения Ф при x_U или x_D. Может быть использовано также средневзвешенное значение двух этих величин.

Вычисление при x_U было бы распространением на пограничный слой явного метода Биндера — Шмидта (работы [Л. 7, 95]) для задач неустановившейся теплопроводности. Этот метод не подходит к задачам пограничного слоя, так как требования устойчивости для данного метода накладывают ограничения на длину шага в направлении координаты x; максимальный шаг пропорционален скорости жидкости, которая иногда очень мала. Использование среднеарифметических значений в членах $\partial/\partial\omega$ для x_U и x_D аналогично методу Кранка и Николсона [Л. 21], свободному от ограничений на длину шага. Однако, как будет показано на простых примерах, использование значения для абсциссы, расположенной ниже по потоку, может дать более точный результат при больших величинах последующего шага и обеспечивает стабильность, что также весьма удобно.

Поэтому мы будем вычислять производные $\partial/\partial\omega$ от членов, содержащих величину Ф, для x_D.

Желательно, опять-таки в интересах удобства, чтобы конечно разностные уравнения были линейными относительно Ф. Поэтому коэффициенты типа a, b, c вседа будут вычисляться из известных (т. е. расположенных вверх по потоку от рассматриваемого сечения) значений Ф.

Обычный путь получения уравнения в конечных разностях из дифференциального уравнения в частных производных состоит в подстановке вместо отдельных членов соответствующих разложений их в ряд Тейлора.

Существует, однако, и другая возможность, используемая в данной работе. Мы можем составить интегральное уравнение для контрольного объема, показанного на рис. 2.4-1. Взятое совместно с допущением относительно характера изменения Ф между узлами сетки, оно дает требуемое уравнение в конечных разностях. Другими словами, уравнение в конечных разностях получается посредством выражения каждого члена исходного дифференциального уравнения в частных производных в виде среднеинтегрального значения в выбранном небольшом контрольном объеме. Достоинством такого приема является то, что в отличие от обычного метода гарантируется удовлетворение уравнения сохранения в любой части пограничного слоя. Мы сделаем допущение о линейной связи Ф и ω между узловыми точками сетки в направлении изменения координаты ω. В направлении координаты x зависимая переменная изменяется ступенчато. Величины Ф во всем интервале от x_U до x_D, кроме точки x_U, постоянны и равны их значениям в точке x_D; это согласуется с ранее упомянутым нашим предположением вычислять члены, содержащие $\partial/\partial\omega$, в точке x_D. Линейный характер изменения в направлении x согласуется с методом Кранка — Николсона.

Следуя этим общим принципам, мы можем теперь представить различные члены уравнения (2.2-4) в конечно-разностной форме.

Читатель, не желающий вникать в приведенные ниже алгебраические выкладки, может сразу же перейти к замечаниям относительно члена, выражающего градиент давления, помещенным в конце § 2.4. Надо только принять во внимание, что уравнения (2.4-31) и (2.4-35) представляют результаты этих преобразований.

Конвективные члены. Члены в левой части уравнения (2.2-4) могут быть представлены в виде

$$\partial\Phi/\partial x \approx \left\{\int_{x_U}^{x_D}\int_{\omega_{DD-}}^{\omega_{DD+}} (\partial\Phi/\partial x)\, d\omega dx\right\} \Big/ \{(x_D - x_U)(\omega_{DD+} - \omega_{DD-})\}; \quad (2.4\text{-}1)$$

$$(a + b\omega)(\partial\Phi/\partial\omega) \approx \left\{\int_{\omega_{DD-}}^{\omega_{DD+}} (a + b\omega)\,(\partial\Phi/\partial\omega)_{x=x_D} d\omega\right\} \Big/ (\omega_{DD+} - \omega_{DD-}). \quad (2.4\text{-}2)$$

Подстановка линейного между узловыми точками сетки $\Phi \sim \omega$ профиля после некоторых алгебраических преобразований приводит к

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \approx P_1(\Phi_{D+} - \Phi_{U+}) + P_2(\Phi_D - \Phi_U) + P_3(\Phi_{D-} - \Phi_{U-}), \quad (2.4\text{-}3)$$

где

$$P_1 \equiv \frac{\omega_{D+} - \omega_{D-}}{4(x_D - x_U)(\omega_{D+} - \omega_{D-})}; \quad (2.4\text{-}4)$$

$$P_2 \equiv \frac{3}{4(x_D - x_U)} \quad (2.4\text{-}5)$$

и

$$P_3 \equiv \frac{\omega_D - \omega_{D-}}{4(x_D - x_U)(\omega_{D+} - \omega_{D-})}; \quad (2.4\text{-}6)$$

$$a\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \approx Q(\Phi_{D+} - \Phi_{D-}), \quad (2.4\text{-}7)$$

где

$$Q \equiv \frac{a}{\omega_{D+} - \omega_{D-}} \tag{2.4-8}$$

и

$$b\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \approx R_1 \Phi_{D+} + R_2 \Phi_D + R_3 \Phi_{D-}, \tag{2.4-9}$$

где

$$R_1 \equiv \frac{b}{4} \left(\frac{\omega_{D+} + 3\omega_D}{\omega_{D+} - \omega_{D-}} \right); \tag{2.4-10}$$

$$R_2 \equiv -\frac{b}{4} \tag{2.4-11}$$

и

$$R_3 \equiv -\frac{b}{4} \left(\frac{\omega_{D-} + 3\omega_D}{\omega_{D+} + \omega_{D-}} \right). \tag{2.4-12}$$

Конвективные члены в сумме дают:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \approx g_1 \Phi_{D+} + g_2 \Phi_D + g_3 \Phi_{D-} + g_4, \tag{2.4-13}$$

где

$$g_1 \equiv P_1 + Q + R_1; \tag{2.4-14}$$

$$g_2 \equiv P_2 + R_2; \tag{2.4-15}$$

$$g_3 \equiv P_3 - Q + R_3 \tag{2.4-16}$$

и

$$g_4 \equiv -P_1 \Phi_{U+} - P_2 \Phi_U - P_3 \Phi_{U-}. \tag{2.4-17}$$

Важно отметить, что коэффициенты g_1, g_2, g_3, g_4 могут быть выражены через известные величины Φ при $x = x_U$.

Выражение для потока. В соответствии с уже упомянутыми принципами выражение для члена, представляющего поток, будет:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) \approx \frac{2}{\omega_{D+} - \omega_{D-}} \left\{ c_{UU+} \left(\frac{\Phi_{D+} - \Phi_D}{\omega_{D+} - \omega_D} \right) - \right.$$

$$\left. - c_{UU-} \left(\frac{\Phi_D - \Phi_{D-}}{\omega_D - \omega_{D-}} \right) \right\}. \tag{2.4-18}$$

Здесь подстрочные обозначения UU_+ и UU_- означают, что g-коэффициенты, вычисляются в сечении, расположенном вверх по потоку, посередине между соответствующими узловыми точками сетки. Введем обозначения:

$$g_5 \equiv \frac{2c_{UU+}}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})(\omega_{D+} - \omega_D)} \tag{2.4-19}$$

и

$$g_6 \equiv \frac{2c_{UU-}}{(\omega_{D+} - \omega_D)(\omega_D - \omega_{D-})}, \tag{2.4-20}$$

тогда член, описывающий поток, может быть представлен в виде

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) \approx g_5 (\Phi_{D+} - \Phi_D) - g_6 (\Phi_D - \Phi_{D-}). \tag{2.4-21}$$

Выражение для источника. Теперь остается выразить в конечно-разностной форме d-член, представляющий источник.

Как видно из табл. 2.2-1, выражение для d порою может быть довольно сложным. Поэтому мы будем рассматривать величину d, отнесенную ко всему контрольному объему, постоянной и равной ее значению в D; но поскольку d может нелинейно зависеть от Φ, то для d_D будет использована следующая линеаризованная формула:

$$d_D \approx d_U + \left(\frac{\partial d}{\partial \Phi}\right)_U (\Phi_D - \Phi_U). \tag{2.4-22}$$

Мы сделаем одно исключение в толковании члена, описывающего источник. В уравнении для скорости u смысл члена, описывающего источник, довольно прост. В то же время решение этого уравнения является наиболее важным в силу своего влияния на решения всех других уравнений. Выразим поэтому член, представляющий источник, в уравнении скорости, исходя из допущения линейного изменения по ω между узловыми точками сетки.

Таким образом,

$$d \approx \frac{\int_{\omega_{DD-}}^{\omega_{DD+}} (d)_{x=x_D}\, d\omega}{(\omega_{DD+} - \omega_{DD-})} \tag{2.4-23}$$

и

$$(d)_{x=x_D} \approx (d)_{x=x_U} + \left(\frac{\partial d}{\partial u}\right)_{x=x_U} \{(u)_{x=x_D} - (u)_{x=x_U}\}. \tag{2.4-24}$$

После подстановки действительного выражения для d как $-(dp/dx)/\rho u$ получим:

$$d \approx s_1 u_{D+} + s_2 u_D + s_3 u_{D-} + s_4; \tag{2.4-25}$$

здесь

$$s_1 \equiv \frac{P_1}{\rho_{U+} u_{U+}^2} \frac{dp}{dx} (x_D - x_U); \tag{2.4-26}$$

$$s_2 \equiv \frac{P_2}{\rho_U u_U^2} \frac{dp}{dx} (x_D - x_U); \tag{2.4-27}$$

$$s_3 \equiv \frac{P_3}{\rho_{U-} u_{U-}^2} \frac{dp}{dx} (x_D - x_U); \tag{2.4-28}$$

$$s_4 \equiv -2 \frac{\partial p}{\partial x} (x_D - x_U) \left\{ \frac{P_1}{\rho_{U+} u_{U+}} + \frac{P_2}{\rho_U u_U} + \frac{P_3}{\rho_{U-} u_{U-}} \right\}. \tag{2.4-29}$$

Полное разностное уравнение. Выяснив, каким образом отдельные члены могут быть выражены в форме конечных разностей, мы теперь можем представить полное разностное уравнение в следующем виде:

$$g_1 \Phi_{D+} + g_2 \Phi_D + g_3 \Phi_{D-} + g_4 = g_5 (\Phi_{D+} - \Phi_D) - g_6 (\Phi_D - \Phi_{D-}) + d_U + \left(\frac{\partial d}{\partial \Phi}\right)_U (\Phi_D - \Phi_U) \tag{2.4-30}$$

или в другой равносильной записи:

$$\Phi_D = A \Phi_{D+} + B \Phi_{D-} + C, \tag{2.4-31}$$

где

$$A \equiv \frac{g_5 - g_1}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d/\partial \Phi)_U}; \tag{2.4-32}$$

$$B \equiv \frac{g_6 - g_3}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d/\partial \Phi)_U}; \tag{2.4-33}$$

$$C \equiv \frac{d_U - (\partial d/\partial \Phi)_U \Phi_U - g_4}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d/\partial \Phi)_U}. \qquad (2.4\text{-}34)$$

Эти выражения справедливы также для уравнения скорости в случае, если член, выражающий градиент давления, вычисляется из соотношения (2.4-22). Использование уравнения (2.4-25) приведет, однако, к следующим, несколько отличным от предыдущих, выражениям:

$$u_D = A_u u_{D+} + B_u u_{D-} + C_u, \qquad (2.4\text{-}35)$$

где

$$A_u \equiv \frac{g_5 - g_1 + s_1}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}; \qquad (2.4\text{-}36)$$

$$B_u \equiv \frac{g_6 + s_3 - g_3}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}; \qquad (2.4\text{-}37)$$

$$C_u \equiv \frac{s_4 - g_4}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}, \qquad (2.4\text{-}38)$$

Здесь подстрочный индекс u указывает на то, что эти выражения относятся к уравнению скорости u. Уравнения (2.4-31) и (2.4-35) представляют собой окончательный результат нашей интерпретации и будут обсуждены в § 2.7.

Случай, когда градиент давления неизвестен. Все алгебраические преобразования до сих пор делались с одним намерением: свести вместе группы условных обозначений, поддающиеся вычислению через известные величины, сохраняя в качестве неизвестных в уравнении величины Ф при $x = x_D$. Таким образом, коэффициенты Ф, A, B, C могут быть известны до получения значений при $x = x_D$. Это замечание, однако, нельзя отнести к величинам A_u, B_u, C_u, если неизвестен градиент давления dp/dx. В случае ограниченного течения величину dp/dx заранее дать невозможно. Поэтому алгебраическими преобразованиями приходится выделять dp/dx как неизвестную величину, и тогда метод решения конечно-разностных уравнений будет несколько другим. Мы не станем обсуждать его здесь, поскольку метод решения в общих чертах описан в работе [Л. 79], в настоящее время разрабатываются и другие методы.

2.5. СКОЛЬЗЯЩИЕ ВЕЛИЧИНЫ НА ГРАНИЦАХ

2.5-1. Что такое скользящие величины?

При формулировании конечно-разностного уравнения предполагалась линейная зависимость Ф от ω между узловыми точками сетки. Такое допущение пригодно везде (обеспечивается выбором достаточного числа узловых точек сетки поперек слоя), за исключением границы. Вблизи стенки, например, отрезок прямолинейной зависимости $u \sim \omega$, проведенный через действительное значение u у стенки, не отражал бы действительной картины, поскольку фактические изменения гораздо круче.

С другой стороны, эти пограничные области весьма важны, так как обусловливают пристеночные потоки, скорости смежного обмена и величины на линии симметрии. По этой причине мы используем в формуле линейной интерполяции «ложную» или «скользящую» величину Ф на границе, выбранную таким образом, чтобы обеспечить наилучшее точное решение дифференциального уравнения. Между прочим, ввод скользящих величин также облегчает анализ тех задач, где в качестве граничных условий заданы градиенты Ф, а не сами величины, но об этом речь пойдет несколько ниже, в § 2.6.

Определение скользящей величины должно быть согласовано с вышеприведенными требованиями. На рис. 2.5-1 схематически показаны обозначения, используемые в дальнейшем. Весь интервал от $\omega=0$ до $\omega=1$ разбит сеткой на N полос. Подстрочные индексы 1 и 2 означают соответственно истинные и скользящие величины на границе I; подстрочные индексы 3, 4, ..., $N+1$ применены для последующих линий сетки вплоть до границы E; истинная и скользящая величины на границе E обозначены подстрочными индексами $N+2$ и $N+3$ соответственно. Величины ω_2 и ω_{N+2} там, где они используются, идентичны ω_1 и ω_{N+3} соответственно. Подстрочный индекс 2,5 относится к линии, проходящей посередине между границей и линией 3 сетки; аналогично $N+1{,}5$ используется для линии, проходящей посередине между $N+1$ и границей E. Линии с подстрочными индексами 2,5 и $N+1{,}5$ имеют особое значение, так как они ограничивают все контрольные объемы, использованные при составлении разностных уравнений.

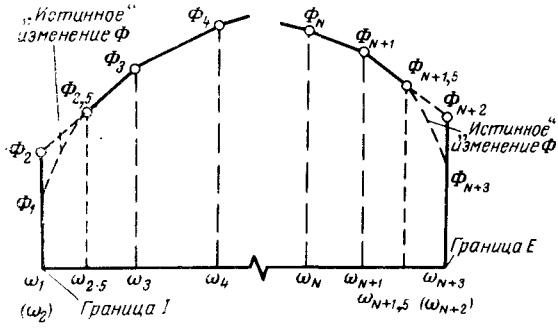


Рис. 2.5-1. Схема индексации действительных значений и величин скольжения переменной Ф.

Таким образом, роль функции скольжения состоит в таком ориентировании отрезка прямой $\Phi_2 \sim \Phi_3$, которое обеспечивает в промежутке $(\omega_{0,5}—\omega_3)$ лучшее представление, чем даваемое линией $\Phi_1 \sim \Phi_3$.

Величину Φ_2 будем определять из требования получения правильного наклона и величины Ф в точке 2,5 на основе линейной интерполяции $\Phi \sim \omega$ между точками 2 и 3.

Аналогичные замечания относятся к величине скольжения Φ_{N+2}. При таком подходе даже поперечная координата может рассматриваться как Ф.

Правильный наклон и величина Ф в точке 2,5 зависят от вида границы и наших допущений относительно характера потока вблизи нее. В последующих параграфах соответствующие зависимости будут рассмотрены. При их выводе плотность среды и радиус кривизны принимались постоянными повсюду, исключая область вблизи оси симметрии.

Эти допущения вряд ли создадут значительные погрешности расчета. Приведенные ниже зависимости даны только для границы I; аналогичные соотношения справедливы и для границы E.

В целях упрощения выражений для границы E мы сохраним в последующих выкладках члены ω_1 и y_1, хотя они и равны нулю на границе I. Заметим, что y_2 не равняется y_1. Переменная y интерпретируется так же, как Ф-функция, и обладает величиной скольжения.

2.5-2. Отношения величин скольжения для ограничивающей стенки

Распределение скорости вблизи стенки будем принимать в виде степенного закона:

$$u \propto |(y-y_1)|^{\beta}. \tag{2.5-1}$$

Вопрос о подборе величины β будет рассмотрен позже. Из определения

$$(\omega-\omega_1) \propto \int_{y_1}^{y} u\,dy \tag{2.5-2}$$

получаем:

$$u \propto |(\omega - \omega_1)|^{\beta/(1+\beta)}. \qquad (2.5\text{-}3)$$

Отсюда после согласования с наклоном и ординатой в точке 2,5 приходим к соотношению

$$u_2 = \frac{1}{1+2\beta} u_3. \qquad (2.5\text{-}4)$$

Принимая в качестве зависимой переменной Ф-функцию, отличную от u, мы снова вводим допущение степенного профиля, но с другим показателем степени.

Тогда

$$(\Phi - \Phi_1) \propto |(y - y_1)|^{\gamma}. \qquad (2.5\text{-}5)$$

После использования равенств (2.5-1) и (2.5-3) приходим к выражению

$$(\Phi - \Phi_1) \propto |\omega - \omega_1|^{\gamma/(1+\beta)}. \qquad (2.5\text{-}6)$$

Введение величин скольжения дает:

$$\Phi_2 = \Phi_3\left(\frac{1+\beta-\gamma}{1+\beta+\gamma}\right) + \Phi_1\left(\frac{2\gamma}{1+\beta+\gamma}\cdot\right) \qquad (2.5\text{-}7)$$

В этом случае величина скольжения y, как легко убедиться, может быть получена заменой Ф на y при $\gamma = 1$.

Следовательно,

$$y_2 = y_3\left(\frac{\beta}{2+\beta}\right) + y_1\left(\frac{2}{2+\beta}\right). \qquad (2.5\text{-}8)$$

Определение β *и* γ. Параметы β и γ пристеночных профилей будут выбраны так, чтобы их наклоны в точке 2,5 были согласованы с величинами касательного напряжения или потоков в этой точке, полученными из анализа куэттовского течения. Тогда

$$\beta = \left[\frac{(y-y_1)}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{2,5}; \qquad (2.5\text{-}9)$$

$$\gamma = \left[\frac{(y-y_1)}{(\Phi-\Phi_1)}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{2,5}. \qquad (2.5\text{-}10)$$

Приведенные в § 1.4 определения позволяют преобразовать соотношения (2.5-9) и (2.5-10) к виду [1]

$$\beta = \left[\frac{(s+F+M)R}{\mu_{эф}/\mu}\right]_{2,5}; \qquad (2.5\text{-}11)$$

$$\gamma = \left[\frac{(S+M)R}{\mu_{эф}/\mu\sigma_{эф}}\right]_{2,5}. \qquad (2.5\text{-}12)$$

До сих пор мы обходились без привлечения к расчету какой-либо конкретной гипотезы для эффективной вязкости. Турбулентное течение

[1] Уравнение (2.5-12) для γ справедливо только тогда, когда Ф-функция удовлетворяет условиям, приведенным в § 1.4, т. е. когда оно представляет величину m_j при отсутствии химической реакции и кинетического нагрева либо при его пренебрежимой малости, либо в случае равенства $\sigma_{h\,эф}$ единице. Для конечной величины кинетического нагрева и $\sigma_{эф}$, не равного единице, следует пользоваться соотношением

$$\gamma = \left[\frac{(S_h+M)R}{\mu_{эф}\,(\mu\sigma_{h\,эф})} - \frac{u^2/2}{\bar{h}-\bar{h}_s}\left\{\frac{(1-H)S_h R}{\mu_{эф}/(\mu\sigma_{h\,эф})} - 2\beta(1-\sigma_{h\,эф})\right\}\right]_{2,5}. \qquad (2.5\text{-}12а)$$

в пристеночной области, исходя из теории пути смещения, можно охарактеризовать зависимостью

$$\mu_{эф} = \rho K^2 (y - y_1)^2 \left| \partial u / \partial y \right|, \tag{2.5-13}$$

или в равносильной записи

$$\left(\frac{\mu_{эф}}{\mu} \right)_{2,5} = K^2 \beta R_{2,5}. \tag{2.5-14}$$

Таким образом,

$$\beta = [(s + F + M)_{2,5}]^{1/2} / K \tag{2.5-15}$$

и

$$\gamma = (S + M)_{2,5} \sigma_{эф} / (K^2 \beta). \tag{2.5-16}$$

При дальнейшем использовании уравнения (2.5-14) неявно принимается достаточная удаленность от стенки точки 2,5, оправдывающая игнорирование молекулярной вязкости.

Фактически наши усилия направлены на ограничение области больших градиентов и влияния молекулярной вязкости в промежутке между стенкой и точкой 2,5.

2.5-3. Величины скольжения для свободной границы

Турбулентное течение вблизи свободной границы, как это может быть показано на основании гипотезы о пути смешения, должно обладать параболическим профилем скорости [Л. 1]. Такое допущение представляется правдоподобным также и для течений с другими законами эффективной вязкости, нежели принятые в данной книге.

Следовательно, отправляясь от допущения

$$(u - u_1) \propto (y - y_1)^2, \tag{2.5-17}$$

получаем:

$$(\omega - \omega_1) \propto |u - u_1|^{1/2} (2u_1 + u). \tag{2.5-18}$$

Использование определения величин скольжения после некоторых алгебраических преобразований приводит к соотношению

$$u_2 = \frac{16u_1^2 - 4u_1 u_3 + u_3^2}{2(u_1 + u_3) + (84u_1^2 - 12u_1 u_3 + 9u_3^2)^{1/2}}. \tag{2.5-19}$$

Равенство (2.5-19) вполне удовлетворительно во всех отношениях, кроме одного: оно нелинейно. Его совместное решение без применения итерации с разностными уравнениями § 2.4 возможно при наличии линейной зависимости между величинами u_1, u_2 и u_3. Ее можно получить из уравнения (2.5-19) в виде

$$u_2 = u_3 G + u_1 (1 - G), \tag{2.5-20}$$

где

$$G \equiv \frac{u_2 + u_3 - 8u_1}{5u_2 + 5u_3 + 8u_1}. \tag{2.5-21}$$

G-функция, зависящая лишь от величины u, должна изменяться медленно. Поэтому ошибка, внесенная при вычислении G по величинам u, взятым в области, расположенной вверх по течению, будет невелика.

Профиль зависимой переменной Ф, отличной от u, также аппроксимируется степенным выражением, т. е.

$$(\Phi - \Phi_1) \propto |y - y_1|^n. \tag{2.5-22}$$

Показатель n связан с $\sigma_{эф}$ соотношением [1]

$$n = 2\sigma_{эф}, \tag{2.5-23}$$

полученным с помощью гипотезы о пути смешения. Использование определения величины скольжения и уравнения (2.5-22) дает:

$$\Phi_2 = \Phi_3 G_\Phi + \Phi_1 (1 - G_\Phi), \tag{2.5-24}$$

где

$$G_\Phi \equiv \frac{G + (2-n)\ (2+n)}{1 + G\ (2-n)\ (2+n)}. \tag{2.5-25}$$

Величина скольжения y может быть получена из этого уравнения подстановкой $n = 1$. Таким образом,

$$y_2 = y_3 \left(\frac{3G+1}{3+G}\right) + y_1 \left(\frac{2\ (G-1)}{3+G}\right). \tag{2.5-26}$$

2.5-4. Граничные величины скольжения на линии симметрии

Вблизи линии симметрии величина a в уравнении (2.2-4) равна нулю, величина ω должна быть малой, а члены $\partial\Phi/\partial x$ и d не сильно отличаются от их же значений на линии симметрии. Тогда дифференциальное уравнение сводится к предельной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\right) = \frac{d\Phi_1}{dx} - d_1. \tag{2.5-27}$$

Далее полагаем величину $\mu_{эф}$ постоянной вблизи линии симметрии. Это допущение фактически расходится с гипотезой о пути смешения, однако лучше согласуется с действительностью и имеет единообразную применимость как к ламинарному, так и к турбулентному течениям. Разница между результатами этого и других приближений всегда невелика и уменьшается с укорочением интервала ω.

Рассмотрим случаи плоского и осесимметричного течения вблизи линии симметрии.

В случае плоского движения величина c должна быть постоянной во всей рассматриваемой области. Тогда интегрирование уравнения (2.5-27) дает:

$$(\Phi - \Phi_1) \propto (\omega - \omega_1)^2. \tag{2.5-28}$$

Отсюда легко вывести соотношение

$$\Phi_2 = (4\Phi_1 - \Phi_3)/3. \tag{2.5-29}$$

Очевидно, соотношение для скорости u будет аналогичным:

$$u_2 = (4u_1 - u_3)/3. \tag{2.5-30}$$

Для этих условий имеет место связь

$$(\omega - \omega_1) \propto (y - y_1). \tag{2.5-31}$$

Следовательно,

$$y_2 = y_1. \tag{2.5-32}$$

---

[1] Читатель может получить это соотношение, во-первых, из общего уравнения (2.2-4) для скорости смежного переноса m''_G и, во-вторых, из требований независимости этой последней величины от $\sigma_{эф}$ совместно с гипотезой о пути смешения.

Для осесимметричного течения радиус r аналогичен расстоянию y и поэтому

$$(\omega - \omega_1) \propto (y - y_1)^2; \tag{2.5-33}$$

$$c \propto (y - y_1)^2. \tag{2.5-34}$$

Подстановкой в уравнение (2.5-27) и интегрированием находим:

$$(\Phi - \Phi_1) \propto (\omega - \omega_1). \tag{2.5-35}$$

Таким образом, профиль $\Phi \sim \omega$ линейный и Ф-величина скольжения, равная своему действительному значению, т. е.

$$\Phi_2 = \Phi_1; \tag{2.5-36}$$

$$u_2 = u_1. \tag{2.5-37}$$

Величина скольжения для y подсчитывается по формуле

$$y_2 = \frac{1}{3} y_3 + \frac{2}{3} y_1. \tag{2.5-38}$$

2-6. ФОРМУЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Разностные уравнения из § 2.4 совместно с соотношениями для величин скольжения, приведенными в § 2.5, образуют разрешимую систему алгебраических уравнений, если известны из граничных условий действительные значения Ф на границах. Однако иногда вместо значения Ф на границе задается градиент Ф или обусловленный им поток. В этом случае возникает необходимость в получении соотношений для величин скольжения путем исключения неизвестных теперь величин Ф на границе с помощью заданных градиентных условий. Нами будут рассмотрены два таких случая.

2.6-1. Полный поток через стенку известен

Заданный полный поток $J_{\text{полн}}$ через стенку можно связать с диффузионным потоком следующим соотношением:

$$J_{\text{полн}} = J_s + \dot{m}''_s \Phi_1 \tag{2.6-1}$$

или в безразмерной записи

$$\frac{J_{\text{полн}}}{\rho u (\Phi_1 - \Phi)} = S + M + \frac{\Phi}{\Phi_1 - \Phi} M. \tag{2.6-2}$$

Применение уравнения (2.6-2) к точке 2,5 с последующим исключением Φ_1 при помощи уравнения (2.5-7) приводит к результату [1]:

$$\Phi_2 = \Phi_3 \left(\frac{1 - VM}{1 + VM} \right)_{2,5} + 2 J_{\text{полн}} \left(\frac{V}{\rho u (1 + VM)} \right)_{2,5}, \tag{2.6-3}$$

---

[1] Замечания, аналогичные высказанным в отношении уравнения (2.5-12), сохраняют силу и для уравнения (2.6-3). Для $\tilde{h}$ соответствующее уравнение имеет вид:

$$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 \left(\frac{1 - V_h M_h}{1 + V_h M_h} \right)_{2,5} + 2 J_{h\,\text{полн}} \left(\frac{V_h}{\rho u (1 + V_h M_h)} \right)_{2,5}; \tag{2.6-3а}$$

$$V_h \equiv \frac{\gamma}{(1 + \beta)(S_h + M)}; \tag{2.6-4а}$$

$$M_h \equiv M + (1 - H) S_h \frac{u^2/2}{\tilde{h}}. \tag{2.6-4б}$$

где

$$V \equiv \frac{\gamma}{(1+\beta)(S+M)} . \qquad (2.6\text{-}4)$$

Опираясь на гипотезу о пути смешения и уравнение (2.5-16), придем к формуле

$$V = \frac{\sigma_{эф}}{K^2 \zeta (1+\beta)} . \qquad (2.6\text{-}5)$$

2.6-2. Граница расположена на линии симметрии

Здесь мы выведем соотношения для обобщенной зависимой переменной Ф, включающей в себя и скорость u. Ввиду различия случаев плоского и осесимметричного течений они снова будут рассмотрены отдельно.

Плоское течение. Решением уравнения (2.5-27) для плоского течения будет:

$$\Phi - \Phi_1 = \left(\frac{d\Phi_1}{dx} - d_1\right) \frac{\rho_1 u_1 \sigma_{эф} (y - y_1)^2}{2\mu_{эф}} . \qquad (2.6\text{-}6)$$

Воспользуемся конечно-разностной записью

$$\frac{d\Phi_1}{dx} - d_1 \approx \frac{\Phi_{1D} - \Phi_{1U}}{x_D - x_U} - d_{1U} - \left(\frac{\partial d_1}{\partial \Phi}\right)_U (\Phi_{1D} - \Phi_{1U}) \qquad (2.6\text{-}7)$$

и удовлетворим уравнение (2.6-6) в точке 2,5, так что

$$\Phi_{2,5D} - \Phi_{1D} = \left\{ \frac{\Phi_{1D} - \Phi_{1U}}{x_D - x_U} - d_{1U} - \left(\frac{\partial d_1}{\partial \Phi}\right)_U (\Phi_{1D} - \Phi_{1U}) \right\} \times$$

$$\times \frac{\rho_1 u_1 \sigma_{эф}}{2\mu_{эф}} (y_{2,5} - y_1)^2 . \qquad (2.6\text{-}8)$$

Здесь в членах с подстрочными индексами U либо D используются величины, относящиеся к области, расположенной вверх по течению. Теперь необходимо исключить Φ_{1D} из уравнений (2.6-8) и (2.5-29).

В результате приходим к следующему выражению:

$$\Phi_{2D} = \Phi_{3D} \left(\frac{2 - k_1 k_3}{2 + 3 k_1 k_3}\right) - \frac{4 k_2 k_3}{2 + 3 k_1 k_3} ; \qquad (2.6\text{-}9)$$

$$k_1 \equiv - \frac{1}{x_D - x_U} - \left(\frac{\partial d_1}{\partial \Phi}\right)_U ; \qquad (2.6\text{-}10)$$

$$k_2 \equiv - (k_1 \Phi_{1U} + d_{1U}) ; \qquad (2.6\text{-}11)$$

$$k_3 \equiv \frac{\rho_1 u_1 \sigma_{эф} (y_{2,5} - y_1)^2}{\mu_{эф}} . \qquad (2.6\text{-}12)$$

Осесимметричное течение. Весьма сходным будет вывод нужного соотношения в случае осесимметричного потока. Исходным уравнением служит:

$$\Phi - \Phi_1 = \left(\frac{d\Phi_1}{dx} - d_1\right) \frac{\rho_1 u_1 \sigma_{эф} (y - y_1)^2}{4\mu_{эф}} . \qquad (2.6\text{-}13)$$

Подстановка $(d\Phi_1/dx - d_1)$ из уравнения (2.6-7) с последующим исключением Φ_{1D} с помощью уравнения (2.5-36) приводит к формуле

$$\Phi_{2D} = \Phi_{3D} \left(\frac{2}{2 + k_1 k_3}\right) - \frac{k_2 k_3}{2 + k_1 k_3} , \qquad (2.6\text{-}14)$$

где величины k определяются, как и прежде.

2-7. РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Давайте поэтапно проследим все проделанное нами до сих пор. Мы составили дифференциальные уравнения в частных производных в удобной системе координат. Они записаны нами в форме конечных разностей (в § 2.4), которая удовлетворяет интегральное уравнение для контрольного объема, распространяющегося более чем на половину ω интервала на каждую сторону от линии сетки; таким образом, мы получили одно разностное уравнение для каждой линии сетки, за исключением тех, которые совпадают с граничными.

В разностных уравнениях для линий сетки 3 и $N+1$ используются величины скольжения Φ_2 и Φ_{N+2}, а не истинное значение Φ_1 и Φ_{N+3}, так как только тогда допущение о линейности профиля имеет смысл. Отношения для величин скольжения были получены в линейном виде в § 2.5, а в § 2.6 они представлены независимыми от граничных значений, в тех случаях, когда последние не были заданы.

Таким образом, сейчас у нас имеется система линейных алгебраических уравнений, которая всегда может быть решена; более того, эта система имеет специфическую особенность: только три неизвестные величины появляются в особом порядке в каждом уравнении. Это позволяет нам решать эти уравнения с помощью простой формулы последовательных подстановок, что предпочтительнее стандартного обращения матриц.

Способ решения состоит в следующем. Используя схему подстрочных обозначений, приведенную в разд. 1.5-1, мы можем записать алгебраическое уравнение как

$$\Phi_i = A_i\Phi_{i+1} + B_i\Phi_{i-1} + C_i, \tag{2.7-1}$$

где $i = 2,3,4,5, \ldots, N+2$. Когда величины Φ_1 и Φ_{N+3} неизвестны, их коэффициенты равны нулю.

Уравнение (2.7-1) может быть преобразовано в более простую форму

$$\Phi_i = A'_i\Phi_{i+1} + B'_i, \tag{2.7-2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A'_i &\equiv \frac{A_i}{1 - B_iA'_{i-1}}; \\ B'_i &\equiv \frac{B_iB'_{i-1} + C_i}{1 - B_iA'_{i-1}}; \\ A'_2 &\equiv A_2; \\ B'_2 &\equiv B_2\Phi_1 + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.7-3}$$

После вычислений A' и B' для $i = 2, 3, \ldots, N+2$ получить значения Φ_i, Φ_{i+1} последовательной подстановкой, начиная с Φ_{N+3}, используя уравнение (2.7-2), становится простым делом. Очевидно, что расчетное время, необходимое для этих вычислений, прямо пропорционально определяемому числу величин Φ; расчетное время, требующееся при пользовании стандартным методом матричного обращения, пропорционально N^2 или N^3.

2.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.8-1. Формулы расчетной сетки

Общие соображения относительно нахождения скоростей увлечения через свободную границу, контролирующих физическую ширину сетки, уже обсуждались нами в § 2.3. Согласование вычисленных из формул значений $\dot{m}''_I$ и $\dot{m}''_E$ с действительными величинами зависит от вида

используемой гипотезы об эффективной вязкости. Ниже будут разобраны два случая.

Свободная граница, подчиняющаяся гипотезе о пути смешения. Если принять гипотезу о пути смешения справедливой для данного течения, то увлечение через свободную границу можно вычислить без какого-либо произвола. В этом случае уравнение (2.3-3) сходится в пределе к конечной величине. Подстановка зависимости (1.3-5) в (2.3-3) с использованием допущения о равенстве нулю градиента скорости на свободной границе (принимая за нее I- или E-линии) приводит к соотношениям:

$$\dot{m}''_I = 2\rho_I l_I^2 \left| \partial^2 u/\partial y^2 \right|_I; \tag{2.8-1}$$

$$\dot{m}''_E = -2\rho_E l_E^2 \left| \partial^2 u/\partial y^2 \right|_E. \tag{2.8-2}$$

Использование параболического профиля скорости в промежутке между I-линией и точкой 2,5 позволяет нам подсчитать величину $|\partial^2 u/\partial y^2|$. Конечным результатом выкладок будет формула для $\dot{m}''_I$:

$$\dot{m}''_I = 8\rho_I l_I^2 \frac{|u_2 + u_3 - 2u_1|}{(y_2 + y_3 - 2y_1)^2} \tag{2.8-3}$$

либо для $\dot{m}''_E$:

$$\dot{m}''_E = -8\rho_E l_E^2 \frac{|u_{N+1} + u_{N+2} - 2u_{N+3}|}{(y_{N+1} + y_{N+2} - 2y_{N+3})^2}. \tag{2.8-4}$$

Свободная граница с неисчезающей эффективной вязкостью. Рассмотрим в общих чертах преобразование различных членов уравнения (2.3-4) к конечно-разностной форме.

Для играющего важную роль члена du_B/dx справедлива следующая запись:

$$\frac{du_B}{dx} \approx \frac{\tilde{u}_B - u_B}{x_D - x_U}. \tag{2.8-5}$$

Здесь $\tilde{u}_B$ — значение u, достигаемое при $\omega = \omega_B$, $x = x$. Члены $\partial u/\partial\omega$ и $(\partial/\partial\omega)\,[r^2\rho u\mu_{эф}\,(\partial u/\partial\omega)/(\psi_E - \psi_I)]$ могут быть рассчитаны по формулам, аналогичным (2.4-7) и (2.4-8). При этом необходимо использовать значение u из предыдущего сечения, поскольку величины скорости вниз по потоку неизвестны.

2.8-2. Вычисление нормального расстояния

Метод конечных разностей позволяет получить $\Phi \sim \omega$ профили. Соответствующие интервалам изменения переменной ω физические расстояния, однако, изменяются в процессе последовательного интегрирования. Поэтому необходимо вычислить расстояние y для каждой точки сетки после очередного шага интегрирования. Для этого необходимо знать разность $(\psi_E - \psi_I)$; ее можно получить из равенств (2.1-2) и (2.1-3), представленных в конечно-разностной форме

$$(\psi_E - \psi_I)_D = (\psi_E - \psi_I)_U + (r_I \dot{m}''_I - r_E \dot{m}''_E)_U (x_D - x_U). \tag{2.8-6}$$

Далее согласно определению

$$x = \text{idem}; \quad r\,dy = (\psi_E - \psi_I)\,(\rho u)^{-1}\,d\omega. \tag{2.8-7}$$

$$r = r_I + y\cos\alpha. \tag{2.8-8}$$

После интегрирования (2.8-7) получаем:

$$y = \frac{2I}{\{r_I + (r_I^2 + 2I\cos\alpha)^{1/2}\}}, \tag{2.8-9}$$

где

$$I \equiv (\psi_E - \psi_I) \int_0^{\omega} (\rho u)^{-1}\, d\omega. \tag{2.8-10}$$

Интеграл I можно вычислить по правилу трапеций. В общепринятых обозначениях

$$I_{i+1} - I_i = \frac{1}{2}(\psi_E - \psi_I)\{(\rho_{i+1}u_{i+1})^{-1} + (\rho_i u_i)^{-1}\}(\omega_{i+1} - \omega_i). \tag{2.8-11}$$

Формула (2.8-11) все же не обеспечивает хорошей аппроксимации у границ. Может показаться удовлетворительной возможность использования величин скольжения вместо истинных значений на границе. Однако величины скольжения были нами введены для получения правильных значений ординаты и наклона в точке посередине крайнего интервала, но не для точного вычисления интегралов в этом промежутке. Поэтому для полуинтервалов, примыкающих к границам, будут использованы «точные» выражения для интеграла I, согласованные с принятыми выше профилями. Такие выражения для I-границы даны ниже; выражения для E-границы могут быть получены сходным образом. Для твердой границы, совпадающей со стенкой, имеем:

$$I_{2,5} = \frac{(\psi_E - \psi_I)(1+\beta)(\omega_3 - \omega_1)}{\rho(u_2 + u_3)}. \tag{2.8-12}$$

Для свободной границы

$$I_{2,5} = \frac{3(\psi_E - \psi_I)(\omega_3 - \omega_1)}{\rho(u_2 + u_3 + 4u_1)}. \tag{2.8-13}$$

Для границы, расположенной на линии симметрии,

$$I_{2,5} = \frac{(\psi_E - \psi_I)(\omega_3 - \omega_1)}{\rho_1 u_1}. \tag{2.8-14}$$

Как видно из уравнений (2.8-12), для вычисления $y_{2,5}$ требуется знание величины β; напомним, что параметр β получается из выражения для $R_{2,5}$, которое в свою очередь содержит $y_{2,5}$. Однако, поскольку величина β обычно изменяется медленно, итераций можно избежать подстановкой предыдущего значения β в равенство (2.8-12).

2.8-3. Характерная толщина слоя

Умение вычислять нормальные расстояния y позволяет определить физическую толщину слоя между границами I и E. Эта толщина ограничивает эффективность наших расчетов.

До тех пор, пока требование эффективности счета серьезно не нарушается, изменения в этой номинальной толщине, обусловленные незначительными различиями в определениях скорости увлечения или выбранной пространственной сетки, будут вполне приемлемы.

Напомним теперь, что за исключением пристеночной области величина пути перемешивания пропорциональна характерной толщине слоя y_l. Конечно, такую произвольную номинальную толщину нежелательно использовать в качестве характерной толщины слоя. Поэтому нужно определить характерную толщину, которую можно использовать для расчета пути смешения. Характерная толщина слоя y_l определяется как

расстояние между двумя, определенным образом выбранными, характерными точками. Одну из них расположим у границы I, а другую — возле границы E. В случае совпадения границ со стенкой или линией симметрии характерная точка выбирается на самой границе. У свободной границы точка располагается так, чтобы скорость в ней отличалась от скорости свободного потока на определенную долю максимальной разности скоростей поперек слоя. Положение такой точки вблизи свободной границы можно установить с помощью линейной интерполяции скорости с расстоянием между точками сетки.

В полуинтервале, примыкающем к границе, однако, необходимо использовать параболическое изменение скорости с расстоянием.

2.8-4. Выбор последующего шага интегрирования

Метод последовательного интегрирования предполагает известной величину последующего шага интегрирования (x_D—x_U). Неявный[1] характер выбранной нами конечно-разностной схемы обеспечивает устойчивый счет даже для больших шагов. Однако для повышения точности вычислений желательно пользоваться разумно выбранными малыми шагами. Наиболее экономичный размер шага для определенного (частного) класса задач можно определить из численного эксперимента. Весьма простой прием состоит в задании шага пропорционально толщине слоя, т. е.

$$x_D - x_U = \text{const} \times y_E. \tag{2.8-15}$$

Здесь постоянный коэффициент приблизительно равен 0,5.

Такое определение оказывается удовлетворительным для большинства турбулентных течений, где толщина слоя изменяется примерно по линейному закону с продольным расстоянием. Для ламинарного обтекания плоской пластины длину шага следует принимать пропорциональной квадрату толщины слоя.

В некоторых случаях имеет место весьма медленное нарастание толщины слоя, например, в области смешения между двумя потоками с близкими по величине скоростями. Для таких задач размер шага можно выбирать таким, чтобы на его длине вовлекалось дополнительное количество жидкости, равное определенной части ее объемного расхода через слой, т. е.

$$x_D - x_U = \text{const} \times (\psi_E - \psi_I)_U / (r_I \dot{m}''_I - r_E \dot{m}''_E). \tag{2.8-16}$$

Здесь величина постоянной составляет примерно 0,05.

---

[1] Строго говоря, наш метод нельзя рассматривать как неявный. При вычислении степени увлечения по величинам переменных, взятых вверх по течению, если шаг очень велик, могут возникнуть осцилляции в изменении ширины сетки (y_E—y_I) с расстоянием. Применение итерационных схем предотвращает возникновение нестабильности такого типа. Однако нестабильность появляется столь редко и так легко преодолима незначительным уменьшением шага либо введением демпфирующего члена в формулу для степени увлечения, что авторы считают излишним более серьезное обсуждение этого вопроса в данной книге.

Глава третья

ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ: ДЕМОНСТРАЦИИ ПРИМЕНЕНИЯ И ОЦЕНКИ

3.1. ЦЕЛЬ ГЛАВЫ

Разработку теоретической структуры и описание удобного расчетного метода мы полагаем теперь законченными. В предыдущих главах мы пояснили причины сделанного нами предпочтительного выбора расчетного метода и обсудили различные его особенности. Однако утверждения о достоинствах и преимуществах метода требуют обоснования и доказательства.

На данном этапе следует показать читателю примеры вычислений на основе метода. Тогда можно также установить, что решения, полученные нами при умеренных затратах вычислительного времени, удовлетворительно согласуются с имеющимися в литературе точными решениями.

Цель данной главы состоит поэтому в проведении вычислений и сравнении их с точными решениями.

Сопоставление с экспериментом также весьма важно. Мы займемся ими в соответствующем месте (часть вторая, гл. 5), где обсуждаются физические аспекты проблемы. Мы также просуммируем достижения метода решения и в общем обсудим направление дальнейшего его развития и усовершенствования.

3.2. НЕКОТОРЫЕ РАСЧЕТЫ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

3.2-1. Плоский турбулентный слой смешения

Задача. Физическая обстановка, характеризующая рассматриваемую в качестве первого примера задачу, ранее обсуждалась Толлмином [Л. 121], получившим ее точное аналитическое решение.

На рис. 3.2-1 представлены в схематическом виде наиболее существенные особенности этой задачи. Интересующей нас областью является слой смешения между средой, движущейся с однородными скоростями u_1 и температурой T_1, и заторможенной ($u=0$) жидкостью с температурой T_E. Плотность жидкости полагаем однородной; эффективная вязкость задана формулой для пути перемешивания (1.3-5). Сама величина пути перемешивания l принимается пропорциональной характеристической толщине слоя y_t; эффективное число Прандтля постоянно и равно 0,5. Задача состоит в том, чтобы рассчитать профили скорости и температуры, угол факела смешения и т. д.

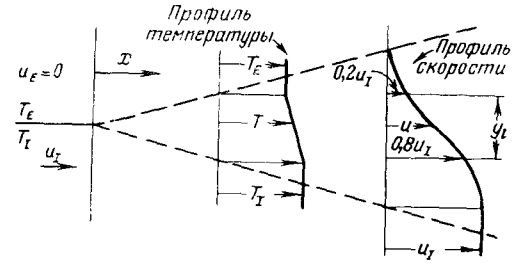


Рис. 3.2-1. Плоский слой смешения.

Предстоит решить систему дифференциальных уравнений в частных производных для скорости и температуры: кинетический нагрев в расчете не учитывается. За характеристическую толщину y_t возьмем расстояние между двумя точками, где скорости равны соответственно $0{,}2\,u_1$ и $0{,}8\,u_1$. Расчеты выполнены для трех сеток: с использованием 11, 16 и 21 линий поперек слоя. Интегрирование продолжалось до тех пор, пока профили скорости и температуры переставали изменяться сколько-нибудь существенно. Как показал расчет, это равновесное состояние ха-

рактеризуется линейным нарастанием толщины слоя с расстоянием x вниз по течению.

Результаты. На рис. 3.2-2 представлены профили скорости, полученные настоящим методом, и проведено сравнение с точным решением Толлмина. Согласование, действительно, вполне удовлетворительное, хотя его еще нельзя считать совершенным. Для эффективного числа Прандтля, равного 0,5, точный температурный профиль изменяется линейным образом поперек слоя. Как в этом можно убедиться из

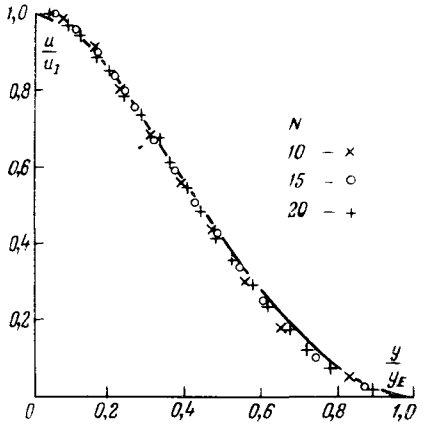


Рис. 3.2-2. Профиль скорости плоского слоя смешения

Кривая — точное решение Толлмина; значками отмечены данные, полученные расчетом по методу авторов для различных N.

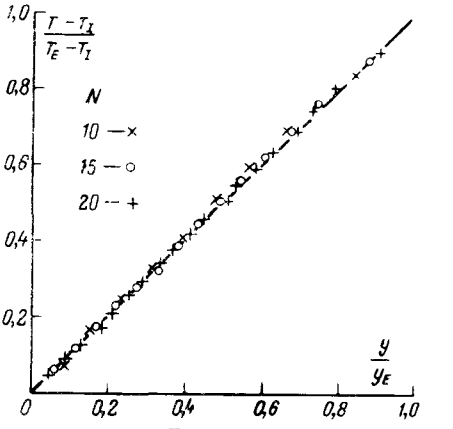


Рис. 3.2-3. Температурные профили слоя смешения.

Прямая — точное решение Толлмина, остальные условные обозначения те же, что на рис. 3.2-2.

рис. 3.2-3, наши решения и в этом случае вполне согласуются с точным решением. Из решения Толлмина следует, что

$$\frac{y_1' x}{\Lambda^2} = 3{,}94. \qquad (3.2\text{-}1)$$

Наши решения дают величины 4,01; 3,96 и 3,92 соответственно для 11,16 и 21 линии сетки. Заключаем отсюда, что использование сетки с 16 линиями обеспечивает достаточную точность, по крайней мере, для рассматриваемой задачи.

3.2-2. Сжимаемый ламинарный пограничный слой на плоской пластине

Задача. Ван-Дрист [Л. 125] представил некоторые точные численные решения для ламинарного пограничного слоя на непроницаемой изотермической плоской пластине. Относительно физических свойств жидкости сделаны следующие допущения: постоянство удельных теплоемкостей (их отношение равно 1,4) и неизменность числа Прандтля (равного 0,75); плотность обратно пропорциональна абсолютной температуре; зависимость вязкости от температуры выражается формулой

$$\frac{\mu}{\mu_G} = \left(\frac{T}{T_G}\right)^{1/2} \frac{1{,}505}{1 + 0{,}505\,(T_G/T)}. \qquad (3.2\text{-}2)$$

Здесь μ и T означают соответственно вязкость и абсолютную температуру, а подстрочный индекс G указывает на условие в основном потоке. К этой задаче применен метод решения, изложенный в гл. 2. Наши результаты сравнены с решением Ван-Дриста. Следовательно, необходимо вычислить коэффициент поверхностного трения и критерий Стантона для разных значений числа Маха и при различных отношениях температуры стенки к температуре основного потока.

Детали расчетного метода. Необходимо решить совместно дифференциальные уравнения в частных производных (2.2-1) и (2.2-3). Число линий сетки в каждом сечении слоя выбирается равным 16. Конечно-разностная схема выбрана такой же, как для границы с неисчезающей вязкостью. Сама граница располагается таким образом, что на линии сетки, соседней со свободной границей, скорость должна составлять 0,999 величины скорости свободного потока u_G. Зависимости для потоков на стенке могут быть получены из предельных соотношений для ламинарного слоя, представленных в разд. 1.4-4; формулы, используемые в действительности, будут представлены ниже, в гл. 4. Интегрирование продолжается до тех пор, пока профили скорости и температуры не перестанут изменяться.

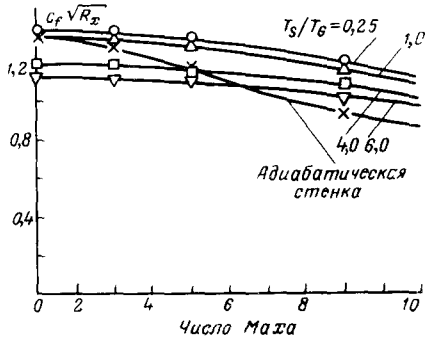


Рис. 3.2-4. Зависимость среднего по поверхности коэффициента трения от числа Маха.

—— — — точное решение [Л. 125]. Значками отмечены данные, полученные расчетом по методу авторов для различных T_S/T_G.

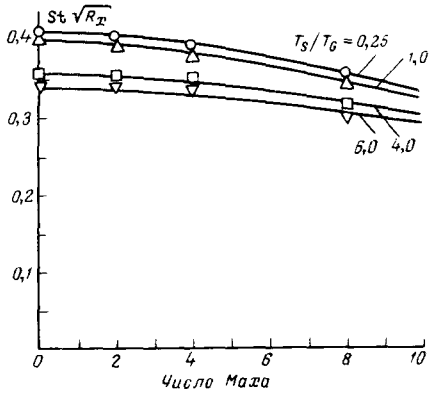


Рис. 3.2-5. Зависимость среднего по поверхности числа Стантона от числа Маха.

Условные обозначения те же, что и на рис. 3.2-4.

Результаты, На рис. 3.2-4 и 3.2-5 показаны соответственно изменения $\tilde{c}_f\sqrt{R_x}$ и $St\sqrt{R_x}$ в зависимости от числа Маха, для разных величин температурного фактора T_S/T_G. Сплошные линии представляют точные решения, заимствованные из работы [Л. 125], а точки соответствуют нашему численному решению. Снова убеждаемся в том, что данный метод расчета обладает способностью давать достаточно точные решения уравнений с малым количеством линий в сетке. Поскольку степень увлечения остается произвольной и используется лишь для обеспечения эффективного счета, мы можем ожидать нечувствительность результатов к точному способу контроля сетки.

Действительно, было найдено, что результаты расчета изменялись довольно слабо при изменении величины скорости на линии сетки, расположенной по соседству со свободной границей от $0{,}999\,u_G$ до $0{,}95\,u_G$.

3.2-3. Сжимаемый турбулентный пограничный слой на плоской пластине

Итак, было продемонстрировано удовлетворительное согласие численных решений, полученных по данному методу, с некоторыми известными точными решениями. Теперь мы проведем сравнение с численным экспериментом, т. е. с расчетом турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. В результате этого расчета установлена зависимость числа Стантона для разных значений чисел Прандтля, Маха и отношений температуры стенки к температуре основного потока (температурного фактора).

Использование гипотезы относительно изменения свойств жидкости. Для расчетов, представленных в этом разделе, выбрана обратная пропорциональность плотности от абсолютной температуры; температурная зависимость коэффициента молекулярной вязкости задавалась параболой:

$$\frac{\mu}{\mu_G} = \left(\frac{T}{T_G}\right)^{0,76}. \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

Подстрочный индекс G означает условия в свободном потоке. Эффективная вязкость подсчитывалась из определения (1.3-5) с привлечением формулы (1.3-6). Толщина y_l выбирается как расстояние от стенки до точки, где скорость равна $0{,}99\,u_G$. Величины констант профиля пути смешения (1.3-6) составляют $K=0{,}435$; $\lambda=0{,}09$. Эти значения достаточно хорошо удовлетворяют всем плоским пограничным слоям пристеночного типа. Эффективное число Прандтля задано постоянным и равным 0,9 повсюду, за исключением области в непосредственной близости к стенке, где следует применять соотношения для потоков на стенке. Эти соотношения опираются на гипотезу Ван-Дриста, обсуждавшуюся в § 1.4. Используемые алгебраические выражения помещены ниже, в гл. 4. Вычисления проведены в диапазоне чисел Рейнольдса R_x от $5\cdot10^5$ до 10^8. К расчету привлекались также корреляция Сполдинга и Чи [Л. 113] для нахождения соответствующих исходных величин толщины потери импульса в начале интегрирования.

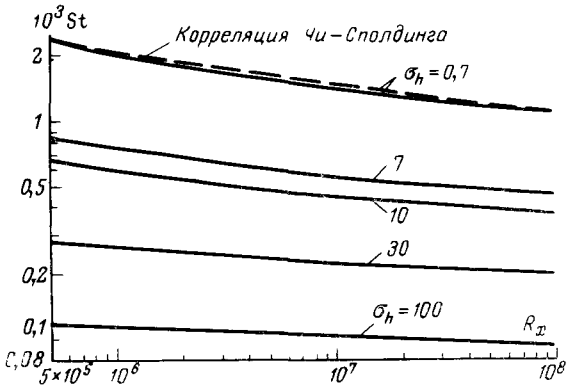


Рис. 3.2-6. Зависимость числа Стантона от числа Рейнольдса для продольно обтекаемой пластины при различных величинах числа Прандтля.

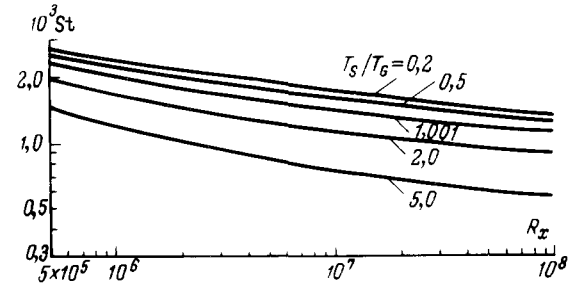


Рис. 3.2-7. Зависимость числа Стантона от числа Рейнольдса для продольно обтекаемой пластины при различных величинах температурного фактора $\sigma_h=0{,}7$.

Влияние числа Прандтля. На рис. 3.2-6 приведены расчетные кривые зависимости числа Стантона от числа Рейнольдса для различных величин молекулярного числа Прандтля.

Перепады температур в сечении слоя и числа Маха при этом предполагались малыми по величине.

Пунктирная линия представляет экспериментально обоснованную корреляцию Чи и Сполдинга [Л. 13] для воздуха ($\sigma_h=0{,}7$). Наши расчеты удовлетворительно согласуются с этой корреляцией. Заметим, что влияние числа Рейнольдса ослабляется с ростом числа Прандтля. Такое предсказание вполне правдоподобно, но имеющихся экспериментальных данных недостаточно для его обоснования.

Влияние температурного фактора. Влияние отношения температуры стенки к температуре основного потока на число Стантона показано

на рис. 3.2-7, где молекулярное число Прандтля равно 0,7, а число Маха мало. Можно видеть, что стенка, более холодная, чем свободный поток, гораздо менее эффективно влияет на увеличение числа Стантона, нежели стенка, нагретая до более высокой температуры, чем свободный поток ($T_S/T_G > 1$). В последнем случае изменение температурного фактора гораздо интенсивнее влияет на снижение St.

Комбинированное (совместное) влияние числа Маха и температурного фактора. На рис. 3.2-8 представлены графики зависимости отношения действительного значения числа Стантона к своему аналогу, взятому при условиях с постоянными физическими свойствами для одних и тех же фиксированных значений R_x и различных величин температурного фактора. Пунктирные кривые, относящиеся к корреляции Чи — Сполдинга [Л. 13], показаны лишь для тех условий, для которых корреляция была получена из экспериментальных данных.

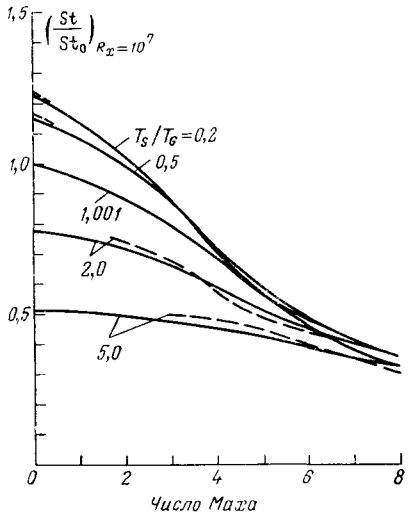


Рис. 3.2-8. Влияние числа Маха и температурного фактора на число Стантона плоской продольно обтекаемой пластины.

St_0 — число Стантона для постепенных физических свойств среды $\sigma_h=0,7$.

——— — полученные расчетом по методу авторов; — — — — корреляция Чи—Сполдинга.

Сопоставление с результатами ряда экспериментов мы проведем позже, в гл. 5.

Пока нашей целью является демонстрирование возможностей расчетного метода. Однако уже сейчас можно утверждать реалистичность предсказаний, полученных с помощью нашего метода. Об этом свидетельствует удовлетворительное совпадение решений с корреляцией Чи — Сполдинга. В частности, для числа Прандтля 0,7 расчетное отношение числа Стантона к коэффициенту поверхностного трения оказалось близким к 0,58. Именно такая величина рекомендована Чи и Сполдингом на основании обработки большого числа экспериментальных данных.

Для коэффициента восстановления расчет дал величину порядка 0,93, тогда как из опыта следует величина, равная 0,9. Напомним, что величина коэффициента восстановления зависит главным образом от эффективного числа Прандтля. Как было показано в работе [Л. 117], коэффициент восстановления должен быть численно больше эффективного числа Прандтля. Поэтому сделанный нами выбор $\sigma_{эф}=0,9$, очевидно, завышен.

3.2-4. Общие замечания

Все обсуждавшиеся в этой главе расчеты были выполнены с помощью вычислительной программы, детали которой приведены в приложении I. Здесь как раз выявляются удобства и преимущества, которые обусловлены теоретической структурой метода, обладающего высокой степенью общности и позволяющего использовать единую вычислительную программу для широкого класса разнообразных задач. Учет эффектов неоднородной плотности или числа Маха не создает особых осложнений.

Затраты машинного времени для каждого из приведенных выше расчетов вполне умеренны. На вычислительной машине IBM-7090 удается выполнить за минуту 1 000 операций интегрирования в случае

выбора сетки с 16 линиями по сечению слоя при решении системы из двух дифференциальных уравнений в частных производных, например, уравнений для скорости и энтальпии торможения. Машинное время, потребное для расчета пристеночного течения, несколько больше, нежели для свободных струй, следов и слоев перемешивания, поскольку при решении первой задачи необходимо использовать соотношение для потоков на стенке, на что требуется дополнительное время. Затраты машинного времени примерно пропорциональны количеству линий сетки. Они возрастают с числом дифференциальных уравнений, но не в прямой пропорции, а слабее, так как многие операции являются общими для всех уравнений.

3.3. ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА

Данный метод вобрал в себя преимущества ранних методов без заимствования их недостатков. Использование конечных разностей обладает простотой концепции: применение неявных схем обеспечивает стабильность счета; линеаризация разностных уравнений устраняет необходимость в итерациях, а конечная система алгебраических уравнений решается с помощью простой техники подстановок.

Контроль ширины сетки, гарантирующий удержание в процессе счета всех точек сетки, расположенных в областях слоя с существенными касательными напряжениями, во многом обеспечивает высокую скорость счета при небольшой памяти вычислительной программы. Использование безразмерной функции тока ω в качестве поперечной переменной слоя приводит к существенному упрощению уравнений и тем самым служит той же цели.

Как было показано выше, сетка с 16 шагами поперек слоя обеспечивает хорошую точность. Проверка путем увеличения числа линий сетки всегда позволяет установить, получены ли достаточно точные решения уравнений.

Аналогично можно установить размер шага в продольном направлении путем его уменьшения до тех пор, пока не наступят заметные изменения в решении. Включение в расчет раз и навсегда выполненного интегрирования для одномерной области слоя, прилегающей к стенке, позволяет использовать точные решения для этой области без дополнительной вычислительной работы.

Подобно всем конечно-разностным методам наш метод обладает достоинством широкой применимости; профили скорости и другие переменные могут быть легко выражены в различных формах соответственно различным физическим ситуациям. Так как алгебра, используемая при выводе конечно-разностного уравнения, является общей, следовательно, не возникает дополнительных усложнений из-за использования вспомогательных соотношений для свойств жидкости и переменности радиуса в поперечном направлении.

Имеется класс задач, для которых данный метод уступает в эффективности ранним методам. В случаях, когда тепловой пограничный слой намного тоньше динамического, лишь небольшая часть общего числа точек сетки будет располагаться в пределах теплового слоя, поскольку в основу построения нашей сетки положено соответствие со скоростным полем. Интегральные методы, предложенные в работах [Л. 75, 78 и 110], напротив, опираются на схемы, заранее согласованные с размерами тонких тепловых слоев. Для таких задач, если их решать нашим методом, нужна весьма точная, узкая сетка. Однако такая необходимость возникает лишь для физических ситуаций, включающих внезапные разрывы температурных граничных условий на стенке. Но тогда, чтобы достичь высокой точности, достаточно выбрать мелкую сетку лишь в пристеночной части слоя.

3.4. НАПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНЕЙШИХ РАЗРАБОТОК

Применение данного метода. В этой главе даны некоторые иллюстрации нашего метода, другие содержатся в гл. 5. Однако мы не пытались исчерпать типы физических ситуаций, которые могут быть решены этим методом. Использование данного расчетного метода для решения различных задач является одной из наших целей на будущее. В этой связи важно отметить, что метод (при использовании вычислительной программы, помещенной в приложении I) открывает много новых возможностей.

Так, например, для предсказания распределения температуры стенки в задачах пленочного охлаждения нет больше необходимости применять, как это сделано в работе [Л. 70], эмпирические соотношения между параметрами вблизи щели и характеристиками профилей скорости и температуры на некотором расстоянии от щели вниз по течению. Теперь нужные характеристики в области смешения за щелью могут быть вычислены для каждого сечения вплоть до касания струи со стенкой. Начиная с этого сечения, автоматически может быть использована вычислительная программа для пристеночного пограничного слоя. Такой расчет, базирующийся на вычислительной программе, помещенной в приложении I, выполнен в работе [Л. 18]. Применение программы к потокам с горением, с закруткой, с массовыми силами и т. д. несомненно целесообразно.

Особый интерес, проявляемый главным образом научными работниками к «равновесным» или автомодельным турбулентным пограничным слоям, вызван тем обстоятельством, что для этих условий дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным. Для них были развиты специальные приемы численного интегрирования. Отметим, что данный метод и вычислительная программа хорошо приспособлены для предсказания профилей и интегральных характеристик таких пограничных слоев. Действительно, наши расчеты свободного слоя смешения, приведенные в этой главе, представляют собой анализ автомодельной задачи в виде асимптотического решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Ограниченные потоки. Использование данного метода применительно к условиям внутренней задачи, т. е. к ограниченным потокам, обсуждается в общих чертах в работе [Л. 79]. До сих пор, однако, не было проведено проверочных расчетов по этому методу. В настоящее время для этого класса задач развиваются другие методы. В будущем необходимо также разрабатывать методы и вычислительные программы для более сложных внутренних задач, в которых несколько струй движется параллельно друг другу в одной трубе, и пограничные слои на ограничивающих стенках рассматриваются совместно.

Уточнение и усовершенствование физических гипотез. Основное достоинство вычислительного метода, развитого в данной книге, состоит в том, что он открывает путь к исследованию гипотез о турбулентном обмене. Некоторые иллюстрации такого исследования представлены во второй части книги. Из них видно, как с помощью данного метода выражен точный смысл гипотез и как сопоставление с экспериментальными данными указывает направление их модификации. Значительный объем таких исследований физических гипотез предстоит еще сделать. Математический аппарат метода позволяет проводить исследования быстро, удобно и экономно.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Глава четвертая

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОТОКОВ СТЕНКИ

4.1. ОБОСНОВАНИЕ

Одно из новшеств расчетного метода, описанного в первой части, состоит в интегрировании раз и навсегда уравнений одномерного пограничного слоя в непосредственной близости стенки.

В § 1.4 была проведена эта операция с использованием гипотезы Ван-Дриста [Л. 126]. Там же показано, что в случаях, когда результаты такого интегрирования выражаются в виде алгебраических формул, последние можно с успехом применить затем для решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей.

Эти формулы впредь будут называться соотношениями для потока стенки, так как они связывают потоки количества движения, массы вещества или энтальпии вблизи стенки с величинами скорости, концентрации, температуры и т. д. на соответствующих внешних границах одномерного слоя.

Напомним, что величины скольжения для границы, совпадающей со стенкой (см. разд. 2.5-2), включают безразмерные трение и потоки (s и S), а они в свою очередь получаются из соотношений для потока стенки. Поэтому до проведения расчетов в гл. 5 и сопоставления их с экспериментальными данными необходимо получить эти соотношения.

Формулы для потока стенки в настоящей работе даны в новой обобщенной форме. Однако они, хотя и косвенно, применялись еще в ранних работах. Например, в статье [Л. 78] использованы зависимости

$$u_+ = \frac{1}{K} \lg (Ey_+) \tag{4.1-1}$$

и

$$\Phi_+ = \sigma_t (u_+ + P) \tag{4.1-2}$$

как неявные формы законов для потоков стенки (обозначения, фигурирующие в этих формулах, уже использовались нами в § 1.4, за исключением символов E и P, которые следует рассматривать как постоянные интегрирования). Независимо от их дальнейшего использования в расчетных методах представленные здесь соотношения для потоков стенки могут быть применены для вычисления касательного напряжения трения и потоков стенки по измерениям профилей скорости и других зависимых переменных. Таким образом, они, так же как и известный график Клаузера [Л. 15], служат для определения касательных напряжений на стенке, обладая по сравнению с ним достоинством более широкой применимости.

Ниже результаты численного интегрирования одномерного слоя трансформируются в алгебраические формулы. Это оказывается не

всегда просто, а полученные формулы не обладают однозначностью. Анализ, выполненный в этой главе, следует рассматривать не более как иллюстрацию. Однако его вполне достаточно для большинства экспериментальных задач, которые обсуждаются в гл. 5.

Краткая сводка формул турбулентного течения приведена в § 4.6.

4.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Выбор постоянной A_*. В § 1.4 отмечалось, что для интегрирования уравнений (1.4-27) и (1.4-29) нужно знать величину A_*.

Хорошее согласование с некоторыми экспериментальными данными Ван-Дриста [Л. 126] достигается при $A_*=26$ и $K=0{,}4$; отсюда приходим к величине A_*, равной 10,4.

Попробуем согласовать значение A_* со следующими хорошо известными экспериментальными результатами для гладких стенок:

1) с константами логарифмического закона стенки [4.1-1], а именно $K=0{,}4$; $E=9{,}025$;

2) с формулой Сполдинга—Джаятилака [Л. 114], которая для величины P в (4.1-2) при больших отношениях σ/σ_t обладает асимптотой

$$P=9{,}24\,(\sigma/\sigma_t)^{3/4}. \qquad (4.2\text{-}1)$$

Можно показать, что при $A_*=11$ оба этих результата удовлетворяются с хорошей точностью. Тогда численное интегрирование уравнения (1.4-27) при нулевых значениях p_* и m_* дает для фигурирующей в уравнении (1.4-62) постоянной интегрирования E_* величину, равную 22,74.

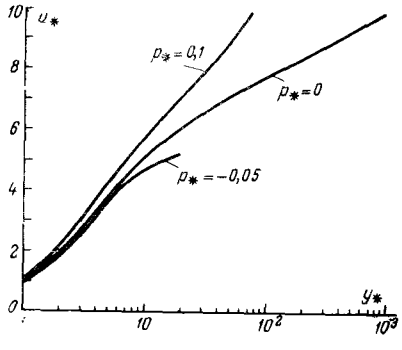


Рис. 4.2-1. Безразмерные профили скорости для различных значений p_* при $m_*=0$.

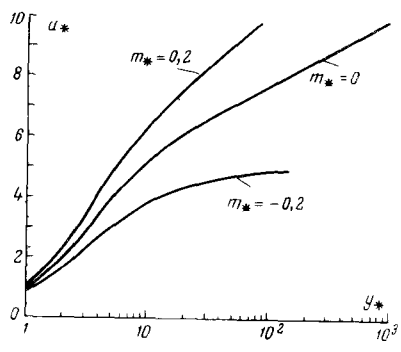


Рис. 4.2-2. Безразмерные профили скорости для различных значений m_* при $p_*=0$.

Это равенство $E=9{,}026$ для $K=0{,}4$. Далее подстановка $A_*=11$ и $K=0{,}4$ в уравнение (1.4-72) приводит к асимптотической формуле $P\longrightarrow 9{,}2\,(\sigma/\sigma_t)^{3/4}$, при больших значениях σ/σ_t (4.2-2) весьма близкой к (4.2-1).

В данной главе величина A_* будет везде приниматься равной 11. Однако следует иметь в виду, что наш выбор A_* основан на данных для гладкой стенки. Поэтому получаемые нами в дальнейшем зависимости имеют силу лишь для условий на гладкой стенке.

В общем случае величина A_* зависит от высоты и геометрической формы шероховатости. Косвенная информация на этот счет содержится в работе [Л. 48].

Профили u_* и $\Phi_{*(1)}$. Используя выбранную выше величину A_*, мы можем численно проинтегрировать уравнение (1.4-27) для различных значений p_* и m_*. Некоторые наиболее характерные результаты такого расчета представлены на рис. 4.2-1 и 4.2-2. Заметим, что для отрица-

гельных значений p_* или m_* реальные решения не существуют в области, где локальное касательное напряжение достигает нулевого значения. Согласно уравнению (1.4-24) это получается тогда, когда сумма $p_*y_*+m_*u_*$ оказывается меньшей, чем -1.

Профили Φ_* или $\Phi_{*(1)}$ можно вычислить интегрированием уравнения (1.4-29) при $\sigma_t=1$. Интегрирование при $p_*=0$ позволяет определить постоянную интегрирования P_*, фигурирующую в уравнении (1.4-66).

Опираясь на условные обозначения и определения из разд. 1.4-5, путем вышеупомянутых интегрирований можно получить функциональную связь характеристик s_* и $S_{*(1)}$ с величинами R_*, F_*, M_* и σ/σ_t. Однако на данном этапе расчета эти зависимости имеют численный, а не алгебраический вид, что во многих отношениях неудовлетворительно. Поэтому мы сейчас обратимся к задаче трансформирования численных результатов в алгебраические формулы.

4.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

4.3-1. Соотношения для малых чисел Рейнольдса

Хотя формулы для потоков стенки связывались до сих пор с турбулентным движением (по причине больших градиентов в пристеночной области), но такие же формулы нам понадобятся для ламинарных течений, чтобы сохранить единообразие расчетов по нашему методу. Вывод формул для условий ламинарного течения довольно несложен. Поэтому удобно начинать именно с них. Одновременно достигается простая иллюстрация соотношений такого рода вообще.

В тех случаях, когда число Рейнольдса куэттовского течения мало, результирующие общие соотношения должны идеальным образом переходить в формулы для ламинарного течения, ибо в данном случае движение действительно имеет ламинарный характер.

Из определений различных безразмерных величин и аналитических решений, приведенных в разд. 1.4-4, можно синтезировать следующие формулы:

для $M=0$

$$s=\frac{1}{R}-\frac{F}{2}; \tag{4.3-1}$$

для $F=0$

$$s=\frac{M}{\exp(MR)-1}, \tag{4.3-2}$$

для любых значений F,M

$$S=\frac{M}{\sigma\{\exp(MR)-1\}}, \tag{4.3-3}$$

или в пределе при $M\to 0$

$$S=\frac{1}{\sigma R}. \tag{4.3-4}$$

Из уравнений (1.4-41) и (1.4-73) непосредственно следует формула для коэффициента восстановления при $M=0$:

$$H=\sigma_{tl}. \tag{4.3-5}$$

4.3-2. Закон сопротивления для любых чисел Рейнольдса

Плоская пластина без массообмена. В качестве основы для дальнейшего вывода других формул получим сначала зависимость $s_*\sim R_*$ для случая $F_*=0$, $M_*=0$.

На рис. 4.3-1 показана эта зависимость, построенная по результатам численного решения. Ее можно аппроксимировать эмпирической формулой

$$s_{*,0} = R_*^{-1} - 0{,}1561\, R_*^{-0,45} + 0{,}08723 R_*^{-0,3} + 0{,}03713 R_*^{-0,18}, \qquad (4.3\text{-}6)$$

максимальная погрешность которой в диапазоне $0 < R_* < 10^5$ не выходит за 3%. Подстрочный индекс 0 при s_* указывает на то, что данная величина относится к условиям: $F_* = M_* = 0$.

Влияние продольного градиента давления на сопротивление при отсутствии массопереноса. В случае нулевого градиента давления уравнение (1.4-63) справедливо лишь при больших числах R_*. В пределе, соответствующем отрыву пограничного слоя (т. е. $\tau_s \longrightarrow 0$), получаем для $p_* y_* \longrightarrow \infty$

$$u_* = 2\sqrt{p_* y_*}. \qquad (4.3\text{-}7)$$

Здесь постоянная интегрирования полагается пренебрежимо малой, что оправдано при больших величинах произведения $p_* y_*$ и подтверждается результатами численного интегрирования [1].

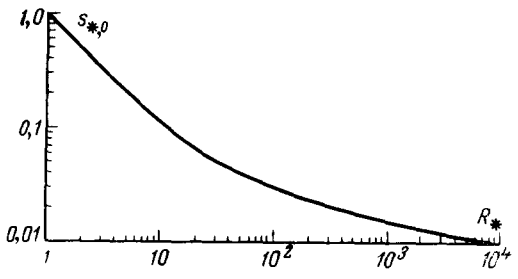


Рис. 4.3-1. Закон сопротивления для плоской пластины в отсутствие массопереноса и продольного градиента давления при $F_* = 0$ и $M_* = 0$.

Согласно (4.3-7)

$$F_{*,\text{отр}} \equiv \left(\frac{p_* y_*}{u_*^2}\right)_{\tau_s \to \infty} = \frac{1}{4}. \qquad (4.3\text{-}8)$$

Следовательно, для больших R_* величина F не превышает 1/4. Это значение $F_{*,\text{отр}}$ служит удобным масштабным множителем для F_*. На рис. 4.3-2 приведен график зависимости $s/s_{*,0}$ от $(1 - F_*/F_{*,\text{отр}})$. Из него видно, что точки, соответствующие большим значениям R_*, группируются около линии

$$s_*/s_{*,0} = (1 - 4F_*)^{1,6}. \qquad (4.3\text{-}9)$$

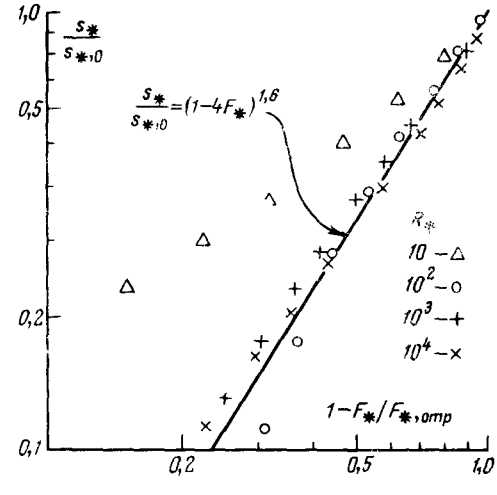


Рис. 4.3-2. Влияние продольного градиента давления на сопротивление при $M_* = 0$.

Модификацией этого соотношения получена формула, справедливая также и для меньших значений R_*:

$$\frac{s_*}{s_{*,0}} = \left[1 - \frac{4F_* R_*}{(12{,}8^{2,5} + R_*^{2,5})^{0,4}}\right]^{1,6}. \qquad (4.3\text{-}10)$$

На рис. 4.3-3 дано сравнение точных и вычисленных по формуле (4.3-10) значений $s_*/s_{*,0}$.

[1] Формула (4.3-7) представляет собой решение Таунсенда [Л. 122] и Сполдинга [Л. 111] и была получена ими с помощью различных допущений относительно диффузии турбулентной кинетической энергии. Профили скоростей, измеренные в опытах Стратфорда [Л. 119] для отрывного пограничного слоя, хорошо согласуются со степенным законом «$\frac{1}{2}$», выражением формулой (4.3-7).

Совпадение можно считать удовлетворительным. Погрешность, естественно, оказывается большей для малых отношений $s_*/s_{*,0}$, однако требования к точности в этой области, как правило, не столь велики.

Влияние массопереноса на сопротивление при отсутствии градиента давления. На рис. 4.3-4 представлен график зависимости точных значений $(s_*/s_{*,0})$ от M_* для различных R_*. Из графика видно, что расстояние

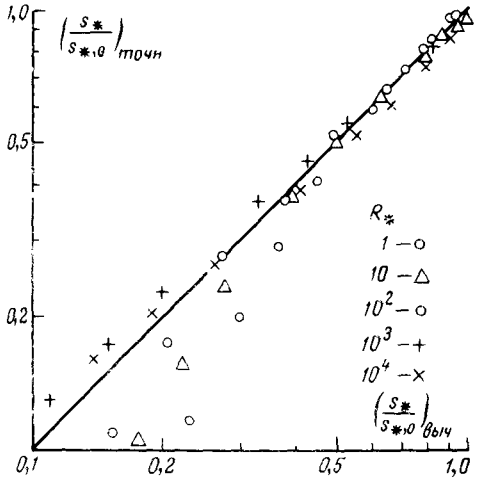


Рис. 4.3-3. Сравнение точных и вычисленных по уравнению (4.3-10) безразмерных величин сопротивления трения при $M_*=0$.

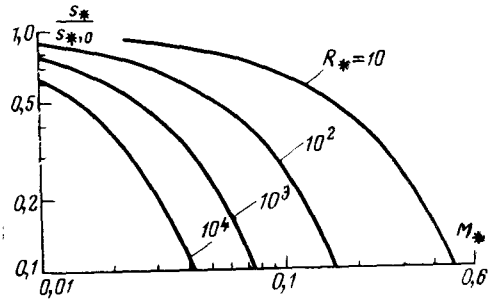


Рис. 4.3-4. Влияние массопереноса на сопротивление пластины при $F_*=0$.

по горизонтали между любыми двумя кривыми при фиксированных R_* почти одинаково для каждого значения $(s_*/s_{*,0})$. Следовательно, все кривые можно обобщить единой зависимостью, если абсциссу умножить на некоторую функцию R_*. Тем самым получим уравнение этой единственной кривой. Таким образом, была установлена следующая формула:

$$\frac{s_*}{s_{*,0}} = \left[1 - \frac{M_*}{7{,}74R_*^{-1{,}17} + 0{,}956R_*^{-0{,}25}}\right]^4. \qquad (4.3\text{-}11)$$

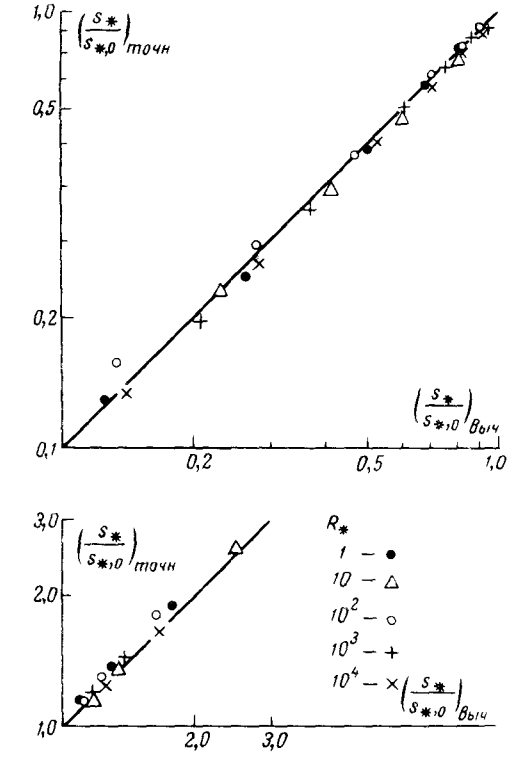


Рис. 4.3-5. Сравнение точных и вычисленных по уравнению (4.3-11) величин безразмерного сопротивления трения при $F_*=0$.

График на рис. 4.3-5 убеждает в хорошем согласии формулы (4.3-11) с точными расчетами как для положительных, так и для отрицательных значений M_*.

Общая формула. Нами пока еще не выведена такая формула для $s_*/s_{*,0}$, которая бы учитывала одновременное действие градиента давления и массопереноса. До вывода этой формулы будем полагать дробь $s_*/s_{*,0}$ равной произведению правых частей (4.3-10) и (4.3-11).

4.3-3. Законы теплового или диффузионного потоков для турбулентного течения

Плоская пластина без массопереноса. Целью нашего поиска будет установление формулы, связывающей безразмерный поток $S_{*(1)}$ с величинами R_* и σ/σ_t. Если исходить из уравнения (1.4-67), то приходим к соотношению

$$S_{*(1),0} = \frac{s_{*,0}}{1 + P_* (s_{*,0})^{1/2}}, \tag{4.3-12}$$

где индекс 0 означает отнесение к условиям $F_* = M_* = 0$, а величина $s_{*,0}$ заимствуется из уравнения (4.3-6). Теперь остается выразить P_* как функцию σ/σ_t. Аналитическое выражение (1.4-72) из разд. 1.4-4 (*d*) в случае больших отношений σ/σ_t после подстановки A_* можно представить в виде

$$P_* = 3{,}68\,(\sigma/\sigma_t)^{-0{,}25}\{(\sigma/\sigma_t) - 1\}. \tag{4.3-13}$$

На рис. 4.3-6 показан график зависимости комплекса $P_*/\{\sigma/\sigma_t) - 1\}$ от отношения (σ/σ_t). Линия, представляющая уравнение (4.3-13), хорошо согласуется с точными величинами не только при больших, но и при малых отношениях (σ/σ_t). Поэтому уравнение (4.3-13) будем рассматривать как общую формулу для P_*. Оно совместно с (4.3-12) составляет закон потока для нулевого градиента давления в отсутствие переноса массы [1].

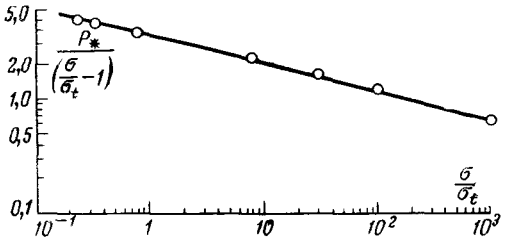


Рис. 4.3-6. Зависимость P_* от σ/σ_t. Точками отмечены точные данные численного интегрирования. Прямая — расчет по уравнению (4.3-13). Точные данные численного интегрирования.

Влияние градиента давления при отсутствии массопереноса. Вернемся еще раз к отрывному пограничному слою. При $p_* y_*$, стремящемся к бесконечности, из уравнений (1.4-29) и (4.3-7) следует:

$$\Phi_{*(1)} = \text{const}. \tag{4.3-14}$$

Сочетание этого результата с уравнением (4.3-7) дает:

$$S_{*(1)} \propto R_*^{-1/3}. \tag{4.3-15}$$

Из численных решений было найдено, что коэффициент пропорциональности зависит лишь от величины σ/σ_t. Для отрывного пограничного слоя решение можно выразить приближенной формулой

$$S_{*(1),\text{отр}} = \frac{1{,}725}{(P_* + 6{,}8)^{1{,}165}} R_*^{-1/3}. \tag{4.3-16}$$

Теперь можно построить формулу, обобщающую численные решения для всех промежуточных величин F_*. Например,

$$S_{*(1)} = S_{*(1),0}(1 - F') + F' S_{*(1),\text{отр}}, \tag{4.3-17}$$

где

$$F' \equiv \frac{0{,}25 F_* R_*}{1 + 0{,}0625 R_*}. \tag{4.3-18}$$

---

[1] Уравнение (4.3-12) неудовлетворительно при малых значениях R_*; формула, обладающая точной асимптотой при малых значениях R_*, содержится в работе [Л. 76] Однако эта формула, по нашему мнению, неоправданно сложна, поскольку, как упоминалось в разд. 2.5-3, мы всегда стремимся применить соотношение для потока стенки при достаточно больших значениях R_*.

Степень соответствия этой формулы точным численным решениям видна из рис. 4.3-7, где представлены точки для различных значений R_*, F_* и σ/σ_t.

Влияние массопереноса при отсутствии продольного градиента давления. Здесь мы не будем рассматривать вклад массопереноса в величину $S_{*(1)}$ для всего диапазона значений σ/σ_t. Если σ/σ_t равно единице, то при нулевом градиенте давления величины $S_{*(1)}$ и s_* совпадают друг с другом. Следовательно, уравнение (4.3-11) дает нам также значение S_*. Остается рассмотреть более общий случай, когда отношение σ/σ_t отлично от единицы при не равных нулю градиенте давления и интенсивности массопереноса через стенку.

4.4. ПРОВЕРКА СПРАВЕДЛИВОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Наше обобщение гипотезы Ван-Дриста следует рассматривать не более как правдоподобное предположение.

Необходимо выяснить степень соответствия действительности этой гипотезе (вернее, совокупности алгебраических соотношений, которые были выведены из нее). Это можно осуществить двумя путями. Если в нашем распоряжении имеются данные измерений в пристеночной области, то по ним возможна непосредственная проверка гипотезы. Когда же известны лишь некоторые основные свойства и характеристики течения, то их можно сравнить с расчетом, используя выведенные нами законы для потока стенки. Такая непрямая проверка проводится в следующей главе. В данной главе обсуждается вопрос о прямой, т. е. непосредственной, проверке гипотезы.

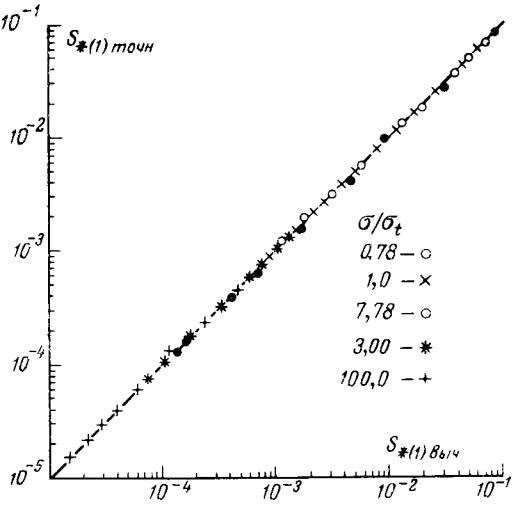


Рис. 4.3-7. Сравнение точных и вычислительных по уравнению (4.3-17) **величин $S_{*(1)}$.**

Гидродинамические характеристики. В опубликованной литературе немного надежных данных гидродинамических измерений, пригодных для убедительной проверки гипотезы. Непосредственные измерения касательного напряжения и распределения скорости у самой стенки весьма трудно осуществимы. Пай [Л. 71] в своем обзоре методов измерения поверхностного трения отмечает неудовлетворительность большинства из них. Помимо привлечения этой гипотезы к выводу достаточно обоснованного универсального закона стенки для условий непроницаемой пластины и степенного закона «одной второй» для отрывного пограничного слоя (согласно результатам опытов Стрэтфорда [Л. 119]), немногое можно сказать с уверенностью о гидродинамической стороне исследуемых процессов.

Влияние числа Прандтля на поток стенки. Можно утверждать, что гипотеза правильно отражает роль числа Прандтля или Шмидта в процессах переноса тепла или в диффузионном транспорте массы от гладкой стенки, вблизи которой поле касательных напряжений однородно. Рисунок 4.4-1 демонстрирует хорошее согласование нашей формулы

для P_* [уравнение (4.3-13)] с формулой Сполдинга — Джаятилака [Л. 114][1]:

$$P = 9{,}24\,[(\sigma/\sigma_t)^{3/4} - 1]\,[1 + 0{,}28\exp(-0{,}007\sigma/\sigma_t)], \qquad (4.4\text{-}1)$$

обобщающей большое число экспериментальных данных.

Влияние продольного градиента давления на поток стенки. Несмотря на многочисленность данных о влиянии градиента давления на теплообмен, лишь немногие авторы выполнили детальные измерения профилей скорости и температуры. Единственными полными данными для теплообмена от гладкой непроницаемой стенки с положительным градиентом давления в турбулентном пограничном слое являются измерения Перри [Л. 81]. Сравнив эти данные с представленными здесь соотношениями для потока стенки, Пай [Л. 71] делает вывод о согласовании по тепловым потокам[2] в пределах 20%.

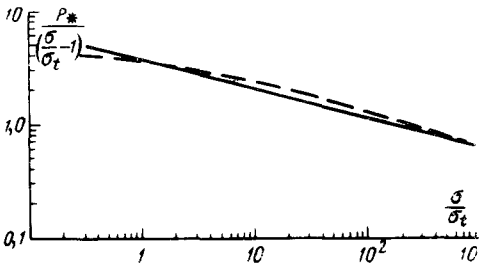


Рис. 4.4-1. Сравнение формул для функции P_*.

——— — формула авторов, уравнение (4.3-13);
— — — — формула Сполдинга—Джаятилака, уравнение (4.4-1).

Влияние массопереноса на поток стенки. И в данном случае лишь немногие исследователи выполнили и опубликовали детальные измерения массопереноса у стенки. Понимая потребность в таких данных, один из авторов настоящей книги (С. В. Патанкар) провел несколько опытов с радиальной пристеночной струей, развивающейся вдоль пористой поверхности, через которую в пограничный слой подавался воздух с примесью индикаторного газа — гелия. Подробное описание этих опытов приводится в приложении II. Здесь же мы представим лишь некоторые данные упомянутых опытов и сравним их с результатами расчетов по модифицированной гипотезе Ван-Дриста.

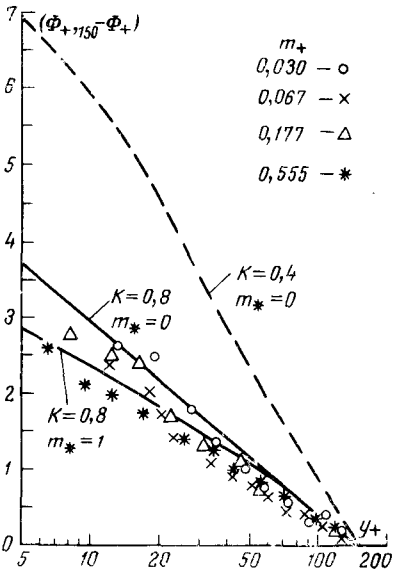


Рис. 4.4-2. Безразмерные профили концентрации: сравнение с расчетами по модифицированной гипотезе Ван-Дриста. Здесь через $\Phi_{+,150}$ обозначена величина Φ_+ при $y_+=150$, $\sigma=0{,}218$, $\sigma_t=0{,}9$.

Значками обозначены экспериментальные данные Пантанкара.

Обработка данных опытов. На рис. 4.4-2 представлены безразмерные профили концентраций гелия для разных скоростей вдува на расстоянии 30 *см* от щели. Наибольшая интенсивность поперечного потока вещества почти соответствовала условию «отдува», т. е. оттеснению пограничного слоя от обтекаемой поверхности. Величины напряжения поверхностного трения, необходимые для вычисления Φ_+ и y_+, были заимствованы из

[1] Здесь связь между P_* и P дается зависимостью $P_*=KP$; Сполдинг и Джаятилака [Л. 114] принимают $K=0{,}4$.

[2] Фактически Пай использовал соотношения, приведенные одним из авторов в работе [Л. 76]. Содержащиеся в данной книге формулы лишь незначительно отличаются от них.

опытов Бейкера [Л. 5][1], проведенных на той же экспериментальной установке. Профили были построены вплоть до $y=150$; эта ордината составляет примерно половину расстояния, на котором скорость достигает своей максимальной величины. Следовательно, есть основание полагать, что в этой области справедливы результаты анализа куэттовского течения.

Описание теоретических кривых. Как указывалось выше, интегрирование уравнения (1.4-29) дает профили $\Phi_* \sim y_*$ в виде (1.4-32). Величина молекулярного числа Шмидта для гелия в воздухе выбрана равной 0,218 (согласно формуле, приведенной в работе [Л. 87]), а величина турбулентного числа Шмидта — равной 0,9. Связь величин Φ_* и y_*, выводимых из уравнений (1.4-23) и (1.4-16) с Φ_+ и y_+, осуществляется через постоянную пути смешения K. Если использовать обычное значение K, а именно 0,4, то результирующий профиль $\Phi_+ \sim y_+$ (при отсутствии вдува) изобразится пунктирной кривой на рис. 4.4-2. Убеждаемся в значительном расхождении теории с экспериментом.

Следует отметить необычность условий рассматриваемых экспериментов.

Общепринятое и употребительное значение K к ним неприменимо. Действительно, в гл. 5 будет показано, что хорошее согласование с динамическим профилем пристеночной струи достигается при $K=0{,}8$. На рис. 4.4-2 приведены теоретические кривые для $K=0{,}8$ при $m_*=0$ и 1; значение $m_*=1$ соответствует величине $K=0{,}8$, превышающей максимальное значение m_+ в экспериментах.

Замечания. Вполне удовлетворительное совпадение с экспериментом обеспечивается величиной $K=0{,}8$, гарантирующей довольно точные предсказания влияния массопереноса. Использование величины турбулентного числа Шмидта, меньшей 0,9, улучшает это совпадение. Однако из-за неточностей в измерениях концентрации (упоминаемых в приложении II) и напряжения поверхностного трения мы воздержимся от окончательных выводов.

В целом применение нашего варианта гипотезы Ван-Дриста показало обнадеживающее согласие с экспериментом. Все же необходимы дальнейшие исследования до того, как ее можно будет рекомендовать к применению в расчетной практике.

4.5. ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗРАБОТКИ

В настоящей главе в силу ее иллюстративного характера рассматривается лишь несколько основных формул для сопротивления и теплового потока. Установление полной совокупности формул для потока стенки потребует некоторого времени.

Эта полная система формул будет учитывать влияние неоднородности плотности и переменной вязкости, одновременного действия продольного градиента давления и массопереноса, а в дальнейшем и шероховатости стенки.

Кроме того, могут быть получены формулы, обеспечивающие более близкое соответствие точному смыслу гипотезы.

Здесь отсутствуют какие-либо рекомендации относительно шероховатости. Как уже упоминалось, совместное действие градиента давления и массопереноса может быть учтено сочетанием уравнений (4.3-10) и (4.3-11). Однако необходимо еще детальное изучение этого вопроса.

---

[1] Бейкер ввел поправку, учитывающую влияние турбулентности на величину напряжения поверхностного трения. Хотя эта поправка носит предварительный характер, мы использовали скорректированные величины, так как в работе Бейкера не приводятся необработанные данные, за исключением случая отсутствия вдува. Результаты измерения поверхностного трения Бейкера отличаются значительным разбросом опытных точек. Взятые нами величины соответствуют кривой, определяющей данные Бейкера.

Для случая неоднородных свойств жидкости мы используем вышеупомянутые формулы, подставляя вместо плотности ее среднеарифметические величины на обоих границах, а вместо вязкости ее величину у стенки. Этот подход аналогичен методу характеристической температуры [Л. 24]. Их адекватность в настоящее время подтверждена сравнением с экспериментальными данными, приведенными в гл. 5. Коэффициент восстановления H принимается (вывод дан в разд. 1.4-4) равным турбулентному числу Прандтля.

Весьма важны систематические исследования справедливости соотношений для потока стенки путем сравнения с экспериментальными данными. Такое исследование должно быть совмещено с работой по улучшению и обобщению этих формул, поскольку слепая экстраполяция гипотезы может закончиться напрасной тратой сил.

4.6. КРАТКАЯ СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ

Здесь собраны все формулы для турбулентного течения, упомянутые в настоящей главе. Основные безразмерные величины определяются следующим образом:

$$R \equiv \frac{\rho u y}{\mu}; \quad F \equiv \frac{y}{\rho u^2}\frac{dp}{dx}; \quad M \equiv \frac{\dot{m}''_S}{\rho u};$$

$$s \equiv \frac{\tau_S}{\rho u^2}; \quad S \equiv \frac{J_S}{\rho u\,(\Phi_S - \Phi)},$$

где величина ρ есть среднеарифметическое значение плотностей на стенке и в рассматриваемой точке, а μ — ее значение вязкости на стенке.

Эти величины связаны с соответствующими характеристиками с индексом * соотношениями:

$$R_* \equiv RK^2; \quad F_* \equiv F/K^2; \quad M_* \equiv M/K^2;$$

$$s_* \equiv s/K^2; \quad S_* \equiv S'K^2.$$

Кроме того,

$$S_* = M_*/\{(1 + M_*/S_{*(1)})_t^{\sigma} - 1\}.$$

Закон сопротивления. Для $F_* = M_* = 0$ мы имеем:

$$s_{*,0} = R_*^{-1} - 0{,}1561R_*^{-0,45} + 0{,}08723R_*^{-0,3} + 0{,}03713R_*^{-0,18};$$

тогда для конечных величин F_* и при $M_* = 0$

$$\frac{s_*}{s_{*,0}} = \left[1 - \frac{4F_*R_*}{(12{,}8^{2,5} + R_*^{2,5})^{0,4}}\right]^{1,6},$$

а для конечных величин M_* и $F_* = 0$

$$\frac{s_*}{s_{*,0}} = \left[1 - \frac{M_*}{7{,}74R_*^{-1,17} + 0{,}956R_*^{-0,25}}\right]^4.$$

Закон потока. Для $F_* = M_* = 0$ имеем:

$$S_{*(1),0} = \frac{s_{*,0}}{1 + P_*\,(s_{*,0})^{1/2}},$$

где $P_* = 3{,}68\,(\sigma/\sigma_t)^{-0,25}\left(\frac{\sigma}{\sigma_t} - 1\right)$.

Для конечных F_* и $M_* = 0$

$$S_{*(1)} = S_{*(1),0}\,(1 - F') + F'S_{*(1),\text{отр}},$$

где

$$F' \equiv \frac{0{,}25F_*R_*}{1 + 0{,}0625R_*}$$

и

$$S_{*(1),\text{отр}} \equiv \frac{1{,}725}{(P_* + 6{,}8)^{1{,}165}} R_*^{-1/3}.$$

Для конечных величин M_* и $F_* = 0$

$$S_{*(1)} = s_*, \text{ если } \sigma/\sigma_t = 1.$$

Коэффициент восстановления. Для $M_* = 0$ имеем: $H = \sigma_{h,t}$.

Глава пятая

СМЫСЛ ГИПОТЕЗЫ О ПУТИ СМЕШЕНИЯ

5.1. ЦЕЛЬ ГЛАВЫ

Успех общей теории турбулентного пограничного слоя зависит от обоснованности используемых физических гипотез в широких диапазонах изменения условий. Уже отмечалось, что математический аппарат предлагаемого метода благоприятствует проникновению в физическую суть гипотез. Настоящая глава служит иллюстрацией такого исследования.

При этом будет использована гипотеза о пути смешения в прандтлевской формулировке в сочетании с вычислительным методом, описанным в гл. 2.

Результаты расчета будут сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

В некоторых отношениях эта глава сходна с гл. 3, где были продемонстрированы возможности метода.

В настоящей главе мы не намереваемся заниматься выявлением достоинств расчетного метода (хотя они и будут обнаруживаться сами по себе).

Наша основная цель заключается в установлении справедливости и обоснованности гипотезы. Поэтому расхождения между теорией и экспериментом, если они и обнаружатся, будут рассматриваться как недостатки гипотезы, а не как дефекты расчетного метода.

Вначале выберем константы, исходя из хорошо известных экспериментальных результатов. Затем будет произведено сравнение расчета с опытными данными в широком диапазоне их изменения. После этого можно указать пути усовершенствования гипотезы.

5.2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ВЫБОР

5.2-1. Применяемая гипотеза

Физическая постановка задач, рассматриваемых в этой главе, характеризуется наличием стенки. Поэтому будут использованы две схемы гипотезы: одна для полностью турбулентной области течения вдали от стенки, а другая для пристеночной области. В наших расчетах для большей части слоя будет использована гипотеза первого типа. Только для величин скольжения на границе, совпадающей со стенкой, потребуются соотношения для пристеночных потоков, основанные на куэттовской модели течения. Соотношения для пристенных потоков будут такими же, как представленные выше в § 4.6.

Таким образом, в результате для расчета в пристенной зоне применяется модифицированная гипотеза Ван-Дриста.

Для области полностью развитого турбулентного движения используется гипотеза о пути смешения, выраженная уравнением (1.3-5), распределением длины пути смешения (1.3-6). Эффективное число Прандтля принимается постоянным по сечению слоя.

5.2-2. Выбор констант

Обе закладываемые в расчет схемы гипотезы требуют знания трех констант: две из них входят в определение пути смешения, а третья — это эффективное число Прандтля $\sigma_{h\text{эф}}$ для области полностью развитой турбулентности.

Величина λ зависит от определения характеристической толщины слоя y_l. Мы будем принимать за величину y_l расстояние от стенки до

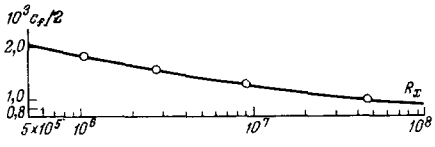


Рис. 5.2-1. Сравнение расчетных значений коэффициента сопротивления с корреляцией Чи—Сполдинга.

О — корреляция Чи—Сполдинга; ——— расчет авторов. $K=0{,}435$, $\lambda=0{,}09$.

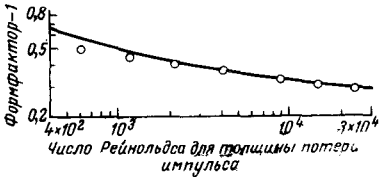


Рис. 5.2-2. Сравнение величин формфактора с корреляцией Коулса.

Здесь формфактор — отношение толщины вытеснения к толщине потери импульса; О — корреляция Коулса; ——— расчет авторов; $K=0{,}435$; $\lambda=0{,}09$.

точки (вблизи свободной границы), где скорость отличается от скорости внешнего течения на 1% от максимальной разности скоростей в сечении слоя. Выбор констант K и λ мы подчиним единственному требованию хорошего согласования с результатами следующих гидродинамических исследований с корреляцией Сполдинга и Чи [Л. 113] для коэффициента поверхностного трения на плоской пластине и с эмпирической формулой Коулса, устанавливающей связь между формфактором и числом Рейнольдса для плоской пластины.

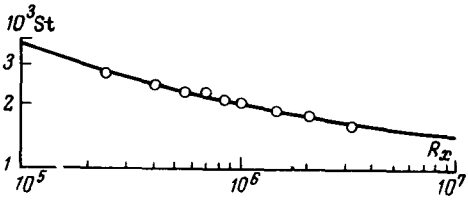


Рис. 5.2-3. Сравнение расчета с опытом по теплообмену продольно обтекаемой пластины.

— данные [Л. 88]; ——— расчет авторов $K=0{,}435$, $\lambda=0{,}09$, $\sigma_{h,t}=0{,}9$.

На рис. 5.2-1 и 5.2-2 дано сравнение нашего расчета с этими двумя корреляциями.

Хорошее их согласование достигалось при величинах $K=0{,}435$ $\lambda=0{,}09$. В последующих расчетах мы будем использовать именно эти значения.

Величину эффективного числа Прандтля выбраем, исходя из данных по теплопереносу Рейнольдса, Кейса и Клайна [Л. 88] (которые согласуются с корреляцией Чи — Сполдинга [Л. 13] при равенстве фактора рейнольдсовой аналогии 1,16). На рис. 5.2-3 дано сравнение нашего расчета с экспериментальными данными. При этом использовалась величина эффективного (или турбулентного) числа Прандтля, равная 0,9. Это значение будет фигурировать в приводимых ниже расчетах.

5.2-3. Краткая характеристика вычислительной процедуры

Вычисления выполнены по программе, помещенной в приложении I, и методу, описанному в гл. 2. Число линий сетки по сечению слоя составляло 16. Размер каждого последовательного шага вперед выбран таким, чтобы количество жидкости, вовлеченной на длине шага, составляло 5% от объемного расхода, текущего через слой в данном его сечении.

Время от времени необходимо удостоверяться в том, что выбранные размеры сетки обеспечивают достаточную точность счета. Для этой цели отдельные вычисления повторяются при увеличенном числе линий сетки и уменьшенном размере шага вперед. В этом случае разница в результатах должна быть невелика.

5.3. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА С ДАННЫМИ ОПЫТОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

Большинство опубликованных экспериментальных данных получено в условиях, когда плотность жидкости, вязкость и т. д. почти постоянны. Сначала будет проведено сравнение наших расчетов с такими данными при различных градиентах давления и различных типах температурных граничных условий. В каждом случае результаты будут представлены в форме зависимости числа Стантона от расстояния вниз по течению.

5.3-1. Случай заданной постоянной температуры стенки

Сравнение наших предсказаний с данными Рейнольдса, Кейса и Клайка [Л. 88] для плоской пластины было уже проведено на рис. 5.2-3. На рис. 5.3-1 представлено несколько случаев теплообмена плоской пластины с непостоянной температурой стенки. Согласование расчета с опытом, как в этом можно убедиться, вполне удовлетворительное. Отметим, что рис. 5.3-1 включает также случай ступенчатого изменения температуры стенки, но и в этих случаях согласование расчета с опытом хорошее, несмотря на замечания, сделанные в конце § 3.3.

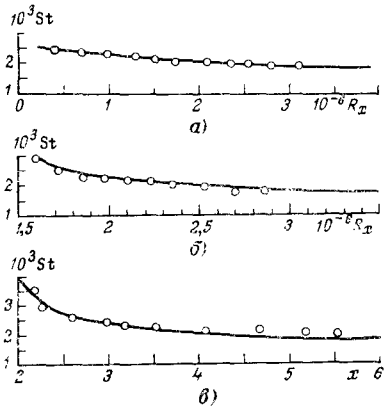


Рис. 5.3-1. Сравнение вычисленных и опытных величин числа Стантона для плоской пластины с заданной температурой стенки.

Сплошные линии — расчет авторов; точки — литературные данные: *а* — [Л. 90]; *б* — [Л. 89]; *в* — [Л. 63], опыт 1; *x* — расстояние вдоль пластины в футах. Данные Рейнольдса; ступенчатое распределение; данные Моретти и Кейса; расстояние вдоль пластины в сантиметрах.

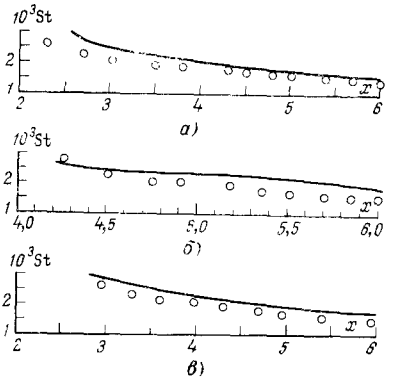


Рис. 5.3-2. Сравнение расчета с опытом: отрицательный продольный градиент давления, заданное ступенчатое распределение температуры стенки.

x — расстояние вдоль пластины в футах. Сплошные линии — расчет авторов, точки — данные опытов Моретти и Кейса [Л. 63], *а* — опыт 13; *б* — опыт 21; *в* — опыт 23.

Рисунки 5.3-2 и 5.3-3 относятся к теплообмену с положительным и отрицательным продольными градиентами давления. Совпадение расчета с опытом и в этих случаях вполне удовлетворительное. Однако имеют место систематические отклонения расчетной кривой от опытных точек. Завышенные числа Стантона получаются в случае течения с отрицатель-

ным продольным градиентом давления и заниженные — в случае положительного градиента давления.

Рисунок 5.3-4 относится к течениям, где имеются области сильного отрицательного градиента давления. В этих зонах экспериментальные значения числа Стантона располагаются заметно ниже расчетных. Это можно приписать так называемой «ламинаризации» слоя — явлению, которое изучалось Лондером [Л. 54], Моретти и Кейсом [Л. 63] и др.

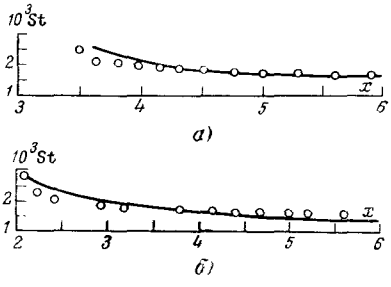


Рис. 5.3-3. Сравнение расчета с опытом; положительный продольный градиент давления, ступенчатое распределение температуры стенки.

x — расстояние вдоль пластины в футах. Сплошные линии — расчет авторов, точки — данные опытов Моретти и Кейса [Л. 63]; *а* — опыты 36; *б* — опыт 34.

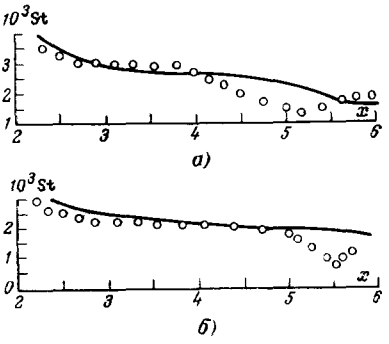


Рис. 5.3-4. Сравнение расчета с опытом: сильный отрицательный продольный градиент давления x — расстояние вдоль пластины в футах; ступенчатое распределение температуры стенки.

Точки — данные Моретти и Кейса [Л. 63]: *а* — опыт 42; *б* — опыт 10.

Причины завышения расчетных коэффициентов теплопереноса непонятны, поскольку принятая нами гипотеза об эффективной вязкости не учитывает влияния ламинарной вязкости везде, за исключением узкой области куэттовского течения.

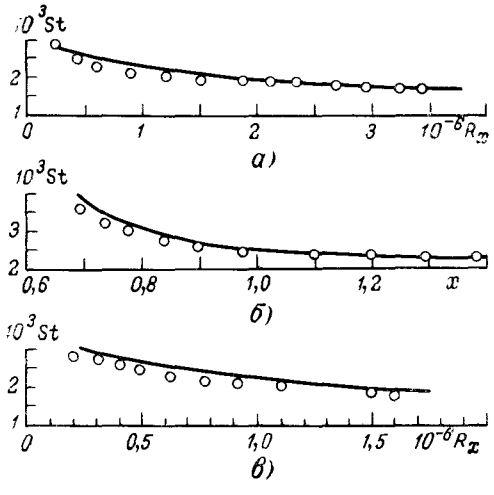


Рис. 5.3-5. Сравнение расчета с опытными данными для плоской пластины с различными законами распределения теплового потока стенки.

Сплошные линии — расчет авторов, точки — литературные данные; *а* — однородный тепловой поток [Л. 90]; *б* — изменяющийся тепловой поток [Л. 40]; x — расстояние от эффективного начала пограничного слоя в футах; *в* — однородный тепловой поток [Л. 98]

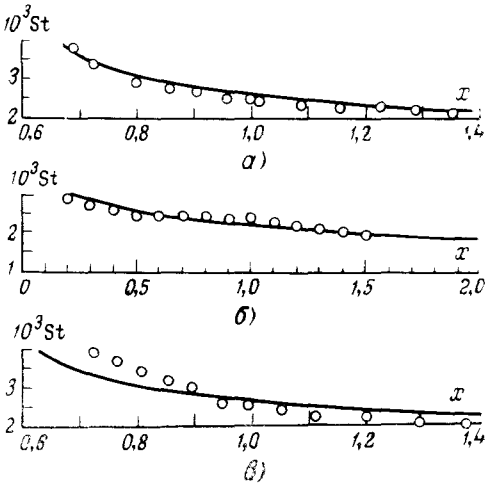


Рис. 5.3-6. Сравнение расчета с экспериментальными данными: отрицательный продольный градиент давления, ступенчатое распределение теплового потока.

Сплошные линии — расчет авторов, точки — литературные данные; *а* — [Л. 59], случай II, x — расстояние от эффективного начала пограничного слоя в футах; *б* — [Л. 63], x — расстояние вниз от щели в футах; *в* — [Л. 41], случай II, x — то же, что и в *а*.

5.3-2. Случай заданного теплового потока стенки

Другим общим типом граничных условий является задание локального теплового потока стенки. Метод решения такой задачи уже был разработан в разд. 2.6-1. Обсудим некоторые его приложения.

На рис. 5.3-5 приведено сопоставление расчета с опытом для плоской пластины. Рисунок 5.3-6 относится к течению с отрицательным градиентом давления, тогда как на рис. 5.3-7 представлены данные как для положительного, так и для отрицательного продольных градиентов давления, иногда достаточно сильных, чтобы вызывать так называемую «ламинаризацию». При отсутствии этого эффекта согласование нашего расчета с экспериментальными данными вполне удовлетворительно.

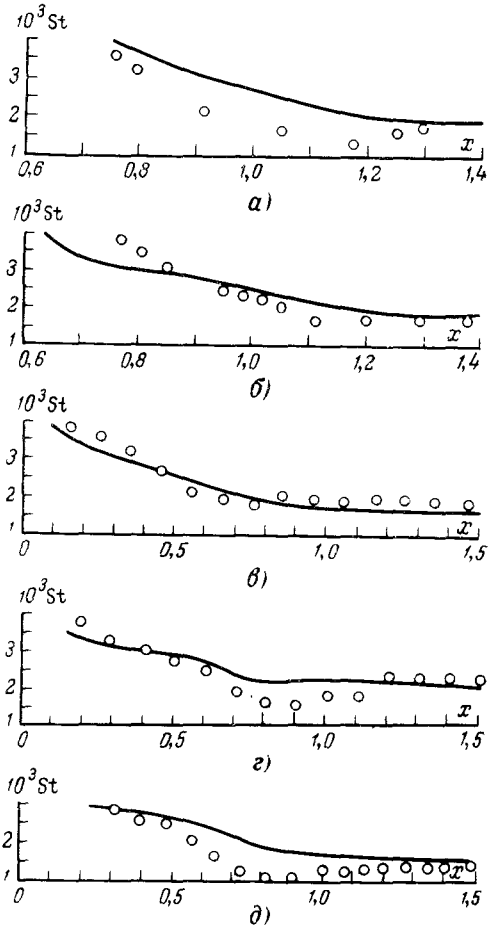


Рис. 5.3-7. Сравнение расчета с экспериментальными данными; сильный отрицательный и положительный градиенты давления, ступенчатое распределение температуры стенки.

Сплошные линии — расчет авторов, точки — литературные данные: *а* — [Л. 59], случай III, x — расстояние от эффективного начала пограничного слоя в футах; *б* — [Л. 41], x — то же, что и в *а*; *в* — [Л. 4], x — длина нагрева в футах; *г* — [Л. 97], x — расстояние вниз от щели в футах; *д* — [Л. 98], x — расстояние от передней кромки в футах.

5.4. СРАВНЕНИЕ С ДАННЫМИ ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим теперь сжимаемый турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Некоторые вычисления для этого случая уже были представлены в разд. 3.2-3, где детально разобран вопрос об изменениях свойств жидкости. Сравним результаты наших вычислений с некоторыми экспериментальными данными.

5.4-1. Гидродинамическое сопротивление плоской пластины

Рисунок 5.4-1 иллюстрирует влияние числа Маха и температурного фактора (отношение температуры стенки к температуре основного потока) на коэффициент поверхностного трения. На графике представлена зависимость от числа M отношения действительного коэффициента поверхностного трения к его значению при постоянных свойствах среды и одинаковых величинах числа Рейнольдса R_x. Пунктирной кривой показана корреляция Сполдинга и Чи [Л. 113], полученная путем обобщения большого количества экспериментальных данных. Далее на рис. 5.4-2

наши расчеты сравниваются с некоторыми экспериментальными величинами коэффициента поверхностного трения, заимствованными из книги Шлихтинга [Л. 94]. Как видно из обоих рисунков, согласование наших предсказаний с экспериментальными результатами вполне удовлетворительное. Лишь для малых величин T_S/T_G расчет дает завышенные значения c_f.

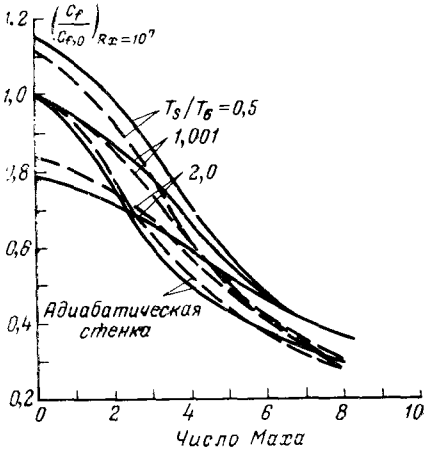


Рис. 5.4-1. Сопротивление трения плоской пластины в турбулентном сжимаемом потоке.
$c_{f,0}$ — коэффициент сопротивления трения для условий постоянных физических свойств среды
——— — расчет авторов; — — — — корреляция Чи—Сполдинга.

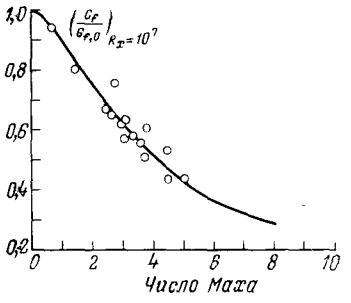


Рис. 5.4-2. Влияние числа Маха на сопротивление трения адиабатической стенки плоской пластины. Сравнение с опытом.
Сплошные линии — расчет авторов, точки — данные Шлихтера [Л. 94].

Возможно, это обусловлено тем обстоятельством, что в расчете использовалась вязкость у стенки, тогда как в действительности средняя по ламинарному подслою вязкость заметно выше.

5.4-2. Число Стантона для плоской пластины

В гл. 3 наши расчетные числа Стантона сопоставлены с корреляцией Чи и Сполдинга [Л. 13]. Согласование получилось достаточно хорошим. На рис. 5.4-3 наши расчеты сравниваются с экспериментальными дан-

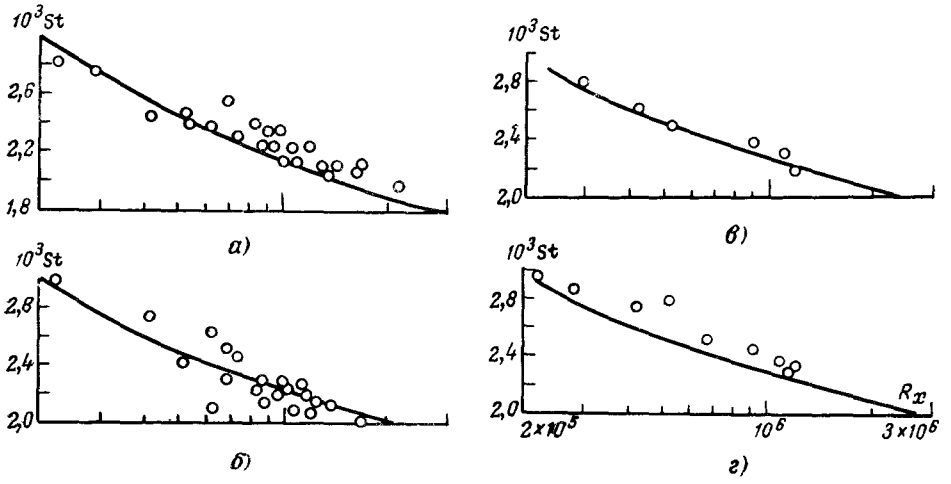


Рис. 5.4-3. Сравнение расчетных данных и опытных величин числа Стантона для больших значений температурного фактора.
Сплошные линии — расчет авторов; точки — данные Чи—Сполдинга [Л. 13]; значения T_G/T_S: *а* — 1,5; *б* — 2,0; *в* — 2,5; *г* — 2,7.

ными Чи и Сполдинга для малых чисел Маха и разных величин температурного характера. Снова убеждаемся в хорошем согласовании нашего расчета с экспериментальными результатами.

5.5. ГИДРОДИНАМИКА ПРИСТЕННОЙ СТРУИ

В этой главе сформулирована и рассмотрена совокупность гипотез, содержащих свободные константы, выбор которых согласован с хорошо известными экспериментальными данными. Затем эти же гипотезы и константы используются для других отличных от первоначальных физических ситуаций. Хотя мы далеко не исчерпали все доступные данные и хотя значения констант мы не считаем выбранными наилучшим образом, все же имеются основания полагать наш выбор (см. перечисление в § 5.2) вполне удовлетворительным и достаточно широким, за исключением области ламинаризации.

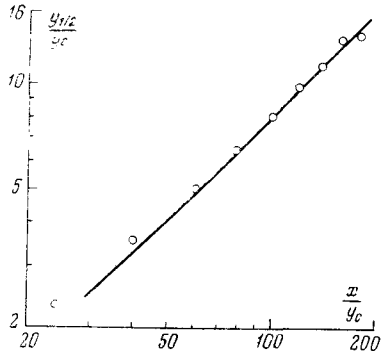


Рис. 5.5-1. Развитие плоской пристенной струи.

y_c — ширина щели; $y_{1/2}$ — ордината точки, где величина скорости составляет половину своего максимального значения в данном сечении. Сплошные линии — расчет при $K=0{,}435$, $\lambda=0{,}09$; точки — данные [Л. 65].

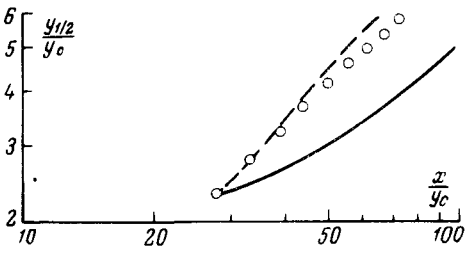


Рис. 5.5-2. Развитие радиальной пристенной струи.

y_c и $y_{1/2}$ — то же, что и на рис. 5.5-1. Сплошная линия — расчет авторов при $K=\sqrt{2}\cdot 0{,}435$ и $\lambda=\sqrt{2}\cdot 0{,}09$; пунктирная линия — расчет авторов при $K=0{,}435$ и $\lambda=0{,}09$, точки — данные [Л. 5].

Применим гипотезу о пути смешения к несколько отличному типу течения жидкости с постоянными свойствами в пристенной струе, распространяющейся через неподвижную среду.

Развитие пристенной струи. С помощью тех же гипотез и констант мы можем предсказать степень расширения плоской пристенной струи.

Результаты расчета представлены на рис. 5.5-1, где величина $y_{\frac{1}{2}}$ характеризует ширину пристенной струи, а x есть расстояние от щели вниз по течению. Согласование с данными Майера, Шауэра и Юстиса вполне удовлетворительное. Однако использование тех же констант для расчета радиальной пристенной струи дает неудовлетворительное согласование с опытом, как показано на рис. 5.5-2 (сплошная кривая). Такое расхождение нельзя считать неожиданным. Из опытов следует подобие профилей скорости и одинаковость углов распространения как для плоской, так и для радиальной пристенных струй. Простой баланс массы и количества движения позволяет заключить, что эффективная вязкость для радиальной пристенной струи должна быть в 2 раза выше, чем для плоской пристенной струи.

Следовательно, можно ожидать лучшего согласования с опытом в случае радиальной пристенной струи при использовании в расчете величин констант гипотезы пути смешения K и λ, которые в $\sqrt{2}$ раза больше значений этих же констант для плоской пристенной струи. В том, что это действительно так, можно убедиться из рис. 5.5-2, где пунктир-

ная кривая (расчет) довольно близка к экспериментальным точкам (опыты Бейкера [Л. 5]).

До сих пор мы интересовались лишь основными характеристиками течения. В общем эти характеристики представляют наибольший прикладной интерес. В то же время более глубокого понимания физической сущности гипотез можно достичь изучением деталей течения таких, например, как форма профиля скорости. Ниже будет показано, что использованные нами величины K и λ не обеспечивают хорошего согласования с профилями скорости ни для плоской, ни для радиальной пристенных струй.

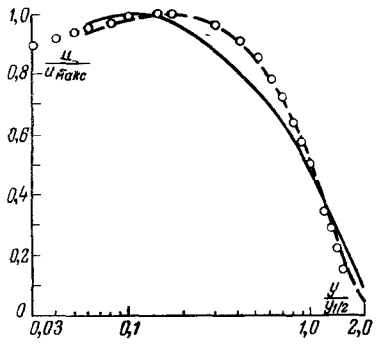


Рис. 5-5-3. **Профили скорости** в пристенной струе.

$u_{макс}$ — максимальная скорость. Сплошная линия — расчет авторов для $K/\lambda=4{,}83$, пунктирная линия — то же для $K/\lambda=8{,}0$; точки — данные [Л. 5].

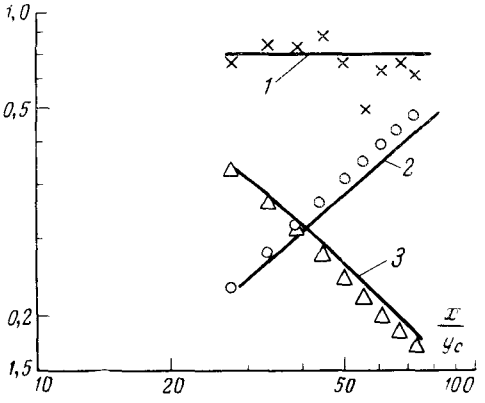


Рис. 5.5-4. Сравнение расчета (сплошные линии) с данными Бейкера [Л. 5] для радиальной пристенной струи.

$u_{макс}$ и u_C — скорости соответственно максимальная и на выходе из щели; $K=0{,}8$, $\lambda=0{,}1$; 1 — $H\,100\tau_s/\rho u^2_{макс}$; $2-0{,}1\,y_{1/2}/y_C$; $3-u_{макс}/u_C$; ×, ○, △ — данные Бейкера.

Профиль скорости. На рис. 5.5-3 представлен безразмерный профиль скорости для плоской пристенной струи. Точки на графике соответствуют данным опытов Бейкера [Л. 5]. На таком безразмерном графике измеренные в опытах профили скорости для плоской и радиальных пристенных струй совпадают и изображаются одной общей кривой. Форма расчетного профиля скорости зависит только от отношения величин K и λ, но не от их абсолютных значений.

Для $K=0{,}435$ и $\lambda=0{,}09$ и, естественно, для значений, в $\sqrt{2}$ раз бо́льших, расчетный профиль показан сплошной линией на рис. 5.5-3. Видно, что согласование с экспериментом нельзя назвать удовлетворительным.

Корректировка констант. Можно найти новые значения величин K и λ, обеспечивающие приемлемое согласование во многих отношениях с данными Бейкера для радиальной пристенной струи. На рис. 5.5-3 и 5.5-4 показаны результаты расчетов с использованием $K/\lambda=8{,}0$.

Пунктирная кривая на рис. 5.5-3, как в этом можно непосредственно убедиться, весьма близка к экспериментальным точкам.

На рис. 5.5-4 проведено соответствующее сравнение для расширения струи, а также для вырождения максимума скорости вниз по течению и для касательных напряжений[1] на стенке при $K=0{,}8$ и $\lambda=0{,}1$. Как можно заключить, для радиальной пристенной струи $K=0{,}8$ и $\lambda=0{,}1$ представляют пару величин, лучшую, нежели $K=0{,}435\sqrt{2}$ и $\lambda=0{,}09\sqrt{2}$.

[1] Некорректированные величины касательных напряжений Бейкера использовались из-за сомнений в надежности его метода корректирования.

Напомним, что в § 4.4 было получено хорошее согласование для профилей концентрации при использовании $K=0{,}8$.

Следовательно, имеется удовлетворительное согласие между двумя результатами, полученными различными путями.

Вопрос о величинах констант для пристенных струй, таким образом, требует дальнейшего исследования.

Обсуждением этого вопроса мы займемся в следующем параграфе.

5.6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Достоинства и недостатки гипотезы о пути смешения. В этой главе было показано, что использование гипотезы о пути смешения позволяет получать реалистические предсказания интенсивности теплопереноса для течений с различными продольными градиентами давления при разных типах температурных граничных условий с учетом эффектов сжимаемости. Хорошее согласование расчетов с опытами было также получено для некоторых гидродинамических характеристик, таких, как коэффициент поверхностного трения, формфактор и степень расширения пристенной струи. Важно подчеркнуть то обстоятельство, что все эти расчеты опирались на одни и те же системы уравнений и набор гипотез.

Использовалась единая вычислительная программа и большей частью те же самые константы гипотезы пути смешения. Такие единообразие и универсальность создают основу реального прогресса на пути создания общей теории. Можно также утверждать, что гипотеза о пути смешения окажется пригодной для многих целей.

При более глубоком исследовании окажется, что для нулевого продольного градиента давления расчет дает систематические отклонения от действительных величин интенсивности теплообмена. Возможно, что константы пути смешения на самом деле зависят от продольного градиента давления, возрастая при положительном его знаке и уменьшаясь при отрицательном.

Однако это утверждение требует дальнейшего изучения и проверки. Недостатком гипотезы является также ее неспособность обеспечивать правильные малые значения числа Стантона в зонах так называемой «ламинаризации». Для этих областей необходима более общая гипотеза.

Требует объяснения тот факт, что для правильного расчета различных характеристик радиальной пристенной струи нужны столь различные величины констант K и λ. Вполне возможно, что модель пути слишком груба для радиальных пристенных струй, которым присуща интенсивная диффузия турбулентной кинетической энергии из внешней области в направлении стенки.

Будущие разработки. Данная глава представляется нам только началом нового этапа поисков удовлетворительных физических гипотез. На будущее предстоит решить много задач. Ближайшая из них состоит в завершении сопоставления расчета *со всеми* доступными экспериментальными данными. Это позволит получить совокупность констант, обеспечивающих приемлемое согласование расчета с опытами в широком диапазоне. В этой связи следует учесть, что не все эти данные одинаково надежны. Поэтому не следует ожидать хорошего совпадения с ними в каждом случае.

Следующий этап исследований должен быть посвящен усовершенствованию гипотез. Величины констант K и λ, к примеру, могут быть выражены в виде функций градиента давления, числа Рейнольдса и вида профиля скорости. Это улучшает согласование с опытом и может даже позволить предсказать «ламинаризацию». Обе константы могут зависеть от угла между направлением течения и осью симметрии. Тогда мы долж-

ны получить непрерывное изменение констант при переходе от плоской задачи к радиальной.

Гипотеза потребует дальнейшей модификации при необходимости учесть конечную вихревую скорость. Почти определенно можно утверждать, что для проверки и усовершенствования этих модификаций потребуются новые экспериментальные данные.

После достижения полной разработки теории пути смешения мы получим более ясное представление о ее достоинствах и ограничениях.

Уже сейчас известно о существовании некоторых явлений, не поддающихся адекватному описанию с помощью модели о пути смешения, например, влияние турбулентности свободного потока. Чем полнее будут изучены расхождения, даваемые этой теорией, тем больше вероятность понимания той новой теории, которая должна заменить гипотезу о пути смешения.

До сих пор в познании законов турбулентного обмена хотя и наблюдался прогресс, но он был довольно медленным. Главная причина этого состояла в отсутствии у исследователя возможности обсчитать достаточно быстро, точно и полно свои догадки относительно существенных сторон этих законов.

Мы полагаем, что разработанная нами методика расчета полностью устранит это препятствие. Мы надеемся поэтому, что она окажется полезной и для научных работников, и для инженеров. При таких условиях законы турбулентного обмена будут надежно установлены в ближайшем будущем.

Литература

1. Abramovich G. N., The Theory of Turbulent Jets (English Transln.) M. I. T. Press.

2. Alpinieri L. J., An experimental investigation of the turbulent mixing of non-homogeneous co-axial jets, Poly. Inst. of Brooklyn, 1963, Pibal Rep., № 789.

3. Ambrok G. S., Approximate solution of equations for the thermal boundary layer with variations in boundary-layer structure, Sov. Phys. Tech. Phys., 1957, **2**, p. 1979.

4. Back L. H. an Seban R. A., On constant-property turbulent boundary layers with variable temperature or heat flow at the wall, 1965, J. Heat Transfer, **C87**, p. 151—156.

5. Baker E., Influence of mass transfer on surface friction at a porous surface, Ph. D. Thesis, University of London, 1967.

6. Bartz D. R., An approximate solution of compressible turbulent boundary-layer development and convective heat transfer in convergent divergent nozzles, ASME Paper, 1954, № 54-A-153.

7. Binder L., Doctoral Dissertation of the Technische Hochschule, München, 1911, Wilhelm Knapp, Halle.

8. Black T. J. and Sarnecki A. J., The turbulent boundary layer with suction or injection, 1958, ARC Report 20.501.F. M. 2745.

9. Boussinesq J., Theorie de l'ecoulement tourbillant, Mem. pres. Acad. Sci., 1877, XXIII, p. 46. Paris.

10. Bradshaw P., Ferriss D. H. and Atwell N. P., Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967, **28**, pt 3, p. 593—616.

11. British Standard Code, Flow measurement, 1943, B. S. 1042. Published by British Standards Institution, London, 1951.

12. Carmichael A. D. and Pustintsev G. N., Prediction of turbulent boundary-layer development in conical diffusers, J. Mech. Eng. Sci., 1966, **8**, № 4, p. 426—436.

13. Chi S. W. and Spalding D. B., Influence of temperature ratio on heat transfer to a flat plate through a turbulent boundary layer in air Proc. of 3rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago,1966. (AIChE), II, p. 41—49.

14. Clarke J. H., Menkes H. R. and Libby P. A., A provisional analysis of turbulent boundary layers with injection, J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, p. 255—260.

15. Clauser F. H., Turbulent boundary layers in adverse pressure gradiens, J. Aeronaut. Sci., 1954, **21** (2), p. 91—108.

16. Clauser F. H., The turbulent boundary layers, Advances in Applied Mechanics, 1956, p. 1—51.

17. Cole E. H., Spalding D. B. and Stollery J. L., A calculation procedure for film-cooling effectiveness valid for turbulent flow on a smooth wall, when the fluid density in non-uniform, Imperial College, Mechanical Engineering Dept., 1966, Report IC/HRJ/37.

18. Cole E. H., Spalding D. B. and Stollery J. L., Film-cooling effectiveness calculated by finite-difference procedure, Imperial College, Mech. Eng. Dept., 1967, Rep. EHT/TN/3.

19. Coles D., The law of the wake in the turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., 1956, **1**, p. 191—226.

20. Coles D. E., The turbulent boundary layer in a compressible fluid 1962, Rand Corp. Rept R-403-pr.

21. Crank J. and Nicholson P., A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type Proc. Cambridge Phil. Soc., 1947, **43**, 50.

22. Dunham J., A tentative theory of circulation control applied to a circular cylinder, British Ministry of Aviation, NGTE NT 567, August 1965.

23. Dvorak F. A. and Head M. R., Heat transfer in the constant-property turbulent boundary layer, Int. J. Heat Mass Tr., 1967, **10**, p. 61—68.

24. Eckert E. R., Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high-voltage flow, J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, p. 585—586.
25. Escudier M. P., The distribution of the mixing length in turbulent flows near walls, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rep., 1965, TWE/NT/1.
26. Escudier M. P. and Nicoll W. B., The shear-work-integral relation in calculations of turbulent boundary layers, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rep., TWF/TN/18.
27. Escudier M. P., Nicoll W. B., Spalding D. B. and Whitelaw J. H., Decay of a velocity maximum in a turbulent boundary layer, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rep., 1966, TWE/TH/13.
28. Escudier M. P., Nicoll W. B. and Spalding D. B., An explicit drag law for uniform-density turbulent boundary layers on smooth impermeable walls, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rep. TWF/TH/12, June 1966.
29. Escudier M. P. and Spalding D. B., A note on the turbulent uniform-property hydrodynamic boundary layer on a smooth impermeable wall; comparisons of theory with experiment, 1966, A. R. C. C. P., 875.
30. Fernholz H., Halbempirische Gesetze zur Berechnung turbulenter Grenzschichten nach der Methode der Integralbedingungen, Ing. Arch., 1964, **33**, p. 384—395.
31. Flügge-Lotz I., The computation of the laminar compressible boundary layer, Dept. Mech. Eng., Stanford Univ., 1954, Rep. R-352-30-7.
32. Forstall W. and Shapiro A. H., Momentum and mass transfer in coaxial gas jets, J. Appl. Mech., 1950, **17**, p. 399.
33. Fussell D. D. and Hellums J. D., The numerical solution of boundary layer problems, A. I. Ch. E. Journal, 1965, **11**, № 4, p. 733—739.
34. Gardner G. O. and Kestin J., Calculation of the Spalding function over a range of Prandtl numbers, Int. J. Heat Mass Tr., 1963, **6**, p. 289—299.
35. Gartshore I. S., The streamwise development of two-dimensional wall jets and other two-dimensional turbulent shear flows, Ph. D. thesis McGill University, Mech. Eng. Dept., 1965.
36. Glushko G. S., Turbulent bundary layer on plane plates incompressible fluid, Izv. Akad. Nauk Mech., 1965, № 4, p. 13—23.
37. Görtler H., Eine neue Reihenentwicklung für laminare Grenzschichten, ZAMM, 1952. 32. p. 270—271.
38. Gosman A. D., Iribarne A. and. Spalding D. B., A theoretical and experimental investigation of diffusion-controlled electrolytic mass transfer between a falling liquid film and a wall, To be published in Int. J. Heat Mass Transfer.
39. Harris G. L., The turbulent wall jet on plane and curved surfaces beneath an external stream von Karman Institute, Belgium, 1965, Tech. Note, v. 27.
40. Hartnett J. P., Birkebak R. C. and Eckert E. R., Velocity distributions and heat transfer for air injected through a tangential slot into a turbulent boundary layer, 1961, J. Heat Transfer, **C83**, p. 293.
41. Hartnett J. P., Birkebak R. C. and Eckert E. R. G., Velocity distributions, temperature distributions, effectiveness and heat transfer in cooling of a surface with a pressure gradient. Int. Development in Heat Transfer, 1961, pt IV, p. 682—689. Published by American Society of Mechanical Engineers.
42. Hartree D. R. and Womersley J. R., A method for the numerical or mechanical solution of certain types of partial differential equations, Proc. Roy. Soc. Lonson, 1937, Series A, **161**, p. 353.
43. Hatton A. P., Heat transfer through the turbulent incompressible boundary layer on a flat plate, Int. J. Heat Mass Transfer, 1964, **7**, p. 875.
44. Hatton A. P., Heat transfer through the turbulent incompressible boundary layer in the presence of moderate pressure gradient, Int. j. Heat Mass Transfer, 1965, **8**, p. 1469.
45. Head M. R., Entrainment in the turbulent boundary layer, 1960, A. R. C. R. and M., 3152.
46. Hinze J. O. and Van der Hegge Zijnen B. G., Transfer of hert and matter in the turbulent mixing zone of an axilly symmetric jet, Appl. Sci. Res. soc., 1949, **AA1**, p. 435—461.
47. Hudimoto B., Momentum equations of the boundary layer and their application to the turbulent boundary layer, Kyoto Univ. Memoirs of Fac. of Eng., 1951, XIII. № 4.
48. Jayatillaka C. L., The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer, 1966, Ph. D. Thesis, University of London.
49. Kendall R. M. and Bartlett E. P., Non-similar solution of the multi-component laminar boundary layer by an integral matrix method, A. I. A. A. Preprint, 1967, № 67-218.
50. Kestin J. and Persen L. N., Application of Schmidt's method to the calculation of Spalding's function and of the skin-friction coefficient in turbulent flow, Int. J. Heat Mass Transfer, 1962, **5**, p. 143—152
51. Kestin J. and Richardson P. D., Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers, Int J. Heat Mass Transfer, 1963, **6**, p. 147—189.

52. Kolmogorov A. N., Izv. Akad. Nauk SSSR ser. phys., 1942, № 1—2.
53. Kutateladze S. S. and Leontev A. I., Turbulent Boundary Layers in Compressible Gases, London, Arnold, 1964.
54. Launder B. E., The turbulent boundary layer in a strongly negative pressure gradient, Massachusetts Inst. of Tech., 1963, Gas Turbine Lab. Rep. № 71.
55. Leigh D. C., The laminar boundary layer equations; a method of solution by means of an automatic computer, Proc. Camb. Phil. Soc., 1955, 51, p. 320—332.
56. Lew H. G., Nonsimilar mixing of chemically reacting streams, Proc. of 3rd Internat. Heat Transfer Conference Chicago, 1966 (AOChE), II, p. 1—11.
57. Libby P. A. and Fox H., A moment method for compressible laminar boundary layers and some applications, Int. J. Heat Mass Transfer, 1965, 8, p. 1451—1467.
58. Ludwieg H. and Tillmann W., Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten, Ing. Arch., 1949, 17, p. 288—299; Translated as Investigations of the wall shearing stress in turbulent boundary layers, NACA TM 1285, 1950.
59. Macarthy T. F. and Hartnett J. P., Turbulentnye Pogranischnye Sloi s Prodol'nym Gradientom Davleniya i Teploobmenom, Vsesoyuznoe Soveshehanie po Teplo- i Massobmeny, Minsk, 1964.
60. Maise G. and McDonald H., Mixing length and kinematic eddy viscosity in a compressible boundary layer, United Aircraft Research Laboratories, East Hartford Connecticut, 1966.
61. Mellor G. L., Turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradients and divergent or convergent cross flows. Princeton University Dept. Aerospace Mech. Sci., 1966, Gas Dynamics Lab. Rep. 775.
62. Mickley H. S. and Davis R. S., Momentum transfer for flow over a flat plate with blowing, 1957, NACA TN 4017.
63. Moretti P. M. and Kays W. M., Heat transfer through an incompressible turbulent boundary layer with varying free-stream velocity and varying surface temperature, Stanford University, Mech. Eng. Dept. Rep., 1964, № PG-1.
64. Moses H. L., The behaviour of turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, M. I. T., 1964, Gas. Turbine Lab. Report № 73.
65. Myers G. E., Schauer J. J. and Eustis R. H., The plane turbulent wall jet, Pt 1: Jet development and friction factor'. Stanford University, 1961, Mech. Eng. Dept. Tech. Rep. № 1.
66. Nicoll W. B., The turbulent wall jet; its development and film-cooling effectivennes', Ph. D. Thesis, University of London, 1967.
67. Nicoll W. B and Escudier M. P., Empirical relationships between the shape factors H_{32} and H_{12} for uniform-density turbulent boundary layers and wall jets'. AIAA Journal, 1966, 4, № 5, p. 940—942.
68. Nicoll W. B. and Escudier M. P., The entrainment function in turbulent boundary-layer and wall-jet calculations, J. Fluid Mech., 1966, 25, Pt 2, p. 337—366.
69. Nicoll W. B. and Whitelaw J. H., The solution of the Unified-Theory equations and their application to problems involving heat transfer, Imperial College, 1965, Mech. Eng. Dept. Rep. IC/HRJ/24.
70. Nicoll W. B. and Whitelaw J. H., The effectiveness of the uniform density, two-dimensional wall jet, Int. J. Heat Mass Transfer, 1967, 10, p. 623—639.
71. Pai B. R., Heat and mass transfer through the turbulent boundary layer — A survey Imperial College, 1967, Mech. Eng. Dept. Rep. TWF/TN/23.
72. Pallone A., Non-similar solutions of the compressible-laminar-boundary layer equations with applications to the upstream-transpiration cooling problem, J. Aerospace Sci., 1961, 28, p. 449—456.
73. Paskonov V. M., A standard programme for the solution of boundary-layer problems, in G. R. Roslyakov and L. A. Chudov (Editors) Numerical methods in gas dynamics, NASA Washington, 1966, TTF-300, TT65-50138, p. 74—79.
74. Patankar S. V., An investigation to determine the best expression for the wake component of the Φ-profile. Imperial College, 1965, Mech. Eng. Dept., Rept. TWF/TN/2.
75. Patankar S. V., Heat transfer across a turbulent boundary layer: application of a profile method to the step-wall-temperature problem, Int. J. Heat Mass Transfer. 1966. 9, 829—834.
76. Patankar S. V., Wall-shear-stress and heat-flux laws for turbulent boundary layers with a pressure gradient: use of van Driest's eddy-viscosity hypothesis. Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rep. TWF/TN/14.
77. Patankar S. V., Heat and mass transfer in turbulent boundary layers, Ph. D. Thesis. University of London, 1967.
78. Patankar S. V. and Spalding D. B., A calculation procedure for heat transfer by forced convention through two-dimensional uniform-properly turbulent boundary layers on smooth impermeable walls, Proc. of 3rd Internat. Heat Transfer Conference, Chicago, A. I. Ch. E., II, p. 50—63.
79. Patankar S. V. and Spalding D. B., A finite-difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer, Imperial College, 1967,

Mech. Eng. Dept. Rep. TWF/TN/20. Also Int. J. Heat Mass Transfer, 1967, **10**, № 10. p. 1389—1412.

80. Patankar S. V. and Taylor R. G., Diffusion from a line source in a turbulent boundary layer: comparison of theory and experiment. Int. J. Heat Mass Transfer, 1965, **8**, 1172—1175.

81. Perry A. E., Bell J. B. and Joubert P. N., Velocity and temperature profiles in adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers, J. Fluid Mech., 1966, **25**(2), p. 299—320.

82. Pohlhausen K., Zur näherungsweisen Integration der Differential gleichungen der laminaren Reibungsschicht, 1921, ZAMM, **1**, p. 252—268.

83. Prandtl L., Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, ZAMM, 1925, **5**, S. 136.

84. Prandtl L., Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, ZAMM, 1942, **22**, S. 241—243.

85. Prandtl L., Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, Nachrichten der Akad. Wiss. Göttingen Mathphys., 1945, S. 6—19, Van den Loeck and Ruprecht, Göttingen.

86. Reichardt H., Gesetzmässigkeiten der freien Turbulentz, VDI-Forschungsheft, 1942, S. 414; 2nd ed., 1951.

87. Reid R. C. and Sherwood T. K., The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill, New York, 1958.

88. Reynolds W. C., Kays W. M. and Kline S. J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. I: Constant wall temperature, 1958, NASA Memo, № 12-1-58W.

89. Reynolds W. C., Kays W. M. and Kline S. J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer, II: Step wall-temperature distribution, 1958, NASA Memo. № 12-2-58W.

90. Reynols W. C., Kays W. M. and Kline S. J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer, III: Arbitrary wall temperature and heat flux. 1958, NASA Memo, № 12-3-58W.

91. Rotta J., Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten, Mitteilungen aus dem Max-Plank-Institut für Strömungsforschung (Göttingen), 1950, I: translated as «On the theory of the turbulent boundary layer». NACA TM 1344, 1953.

92. Ross D. and Robertson J. M., A superposition analysis of the turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient. J. App. Mech. 1951, **18**, p. 95—100.

93. Rotta J. C., Heat transfer and temperature distribution in turbulent boundary layers at supersonic and hypersonic flow, Aerodynamische Versuchsanstalt, 1965, Report 65A 07.

94. Schlichting H., Boundary Layer Theory, 4th Ed., Mc-Graw Hill, New York, 1960.

95. Schmidt E., Föppl's Festschrift, Julius Springer, Berlin, 1924, S. 179.

96. Schultz-Grunow F., Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten, 1940, **17**(8), S. 239—246. Trans. as «New frictional resistance law for smooth plates», NACA TM 986, 1941.

97. Seban R. A. and Back L. H., Effectiveness and heat transfer for a turbulent boundary layer with tangential injection and variable free-stream velocity, ASME paper, 1961, № 61-WA-156.

98. Seban R. A. and Doughty D. L., Heat transfer to turbulent boundary layers with variable free-stream velocity, Trans. ASME, 1956, **78**, p. 217.

99. Smith A. M. and Clutter D. W., Machine calculation of compressible laminar boundary layers, AIAA, 1965, **3**, № 4, p. 639—647.

100. Smith A. M. O. and Jaffe N. A., General method for solving the nonequilibrium boundary-layer equations of a dissociating gas, AIAA paper, 1965, № 65—129.

101. Smith A. M. O., Jaffe N. A. and Lind R. C., Study of a general method of solution of the incompressible turbulent boundary-layer equations, Bureau of Naval Weapons Fluid Mechanics and Flight Dynamics Branch, 1965, RRRE-4.

102. Smith A. G. and Shah V. L., The calculation of wall and fluid temperatures for the incompressible turbulent boundary layer, with arbitrary distribution of wall heat flux, Int. J. Heat Mass Tr., 1962, 5, p. 1179—1189.

103. Smith A. G. and Shah V. L., Study of heat and mass transfer from non-isothermal surfaces, The College of Aeronautics, Cranfield, 1962, Note № 135.

104. Spalding D. B., Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a step-wise discontinuity in wall temperature, Int. Developments in Heat Transfer, 1961, Pt II, p. 439—446.

105. Spalding D. B., Contribution to the theory of heat transfer across a turbulent boundary layer, Int. J. Heat Mass Tr., 1964, **7**, 743—761.

106. Spalding D. B., A unified theory of friction, heat transfer and mass transfer in the turbulent boundary layer and wall jet, A. R. C. C. P., 1965, № 829.

107. Spalding D. B., The kinetic-energy-deficit equation of the turbulent boundary layer, AGADograph, 1965, Pt 1, p. 191—244.

108. Spalding D. B., Lectures on turbulent jets, wakes and boundary layers, Imperial College, 1964/1965, Mech. Eng. Dept.

109. Spalding D. B., A relation between entrainment rate, shearstress gradient and velocity gradient, Imperial College, 1965, Mech. eng. Dept. Rep. TWF/TN/8.
110. Spalding D. B., Progress in the development of a unified theory of friction, heat transfer and mass transfer in boundary layer and jets, Imperial College, 1966, Mech. Eng. Dept. Rep. TWF/TN/10.
111. Spalding D. B., Heat transfer from turbulent separated flows, J. Fluid Mech., 1967, 27, Pt 1, p. 97—109.
112. Spalding D. B., Auslander D. M. and Sundaram T. R., The calculation of heat and mass transfer through the turbulent boundary layer on a flat plate at high Mach numbers, with and without chemical reaction, Supersonic Flow, Chemical Processes and Radiative Transfer, 1964, p. 211—276, Pergamon Press.
113. Spalding D. B. and Chi S. W., The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer, J. Fluid Mech., 1964, **18**, Pt 1, p. 117—143.
114. Spalding D. B. and Jayatillaka C. L., A survey of the theoretical and experimental information on the resistance of the laminar sub-layer to heat and mass transfer, Proc. 2nd All Soviet Union Conf. on Heat and Mass Transfer, Minsk, USSR, 1964, 2, p. 234—264 (in Russian); English translation ed. by C. Gayley J. P. Hartnett and E. R. G. Eckert,Rand.Corp., California, 1966—to be published.
115. Spalding D. B., The spread of turbulent flames confined in ducts, Eleventh International Symposium on Combustion, Combustion Institute, Pittsburg, Penn., U. S. A., 1967, p. 807—15.
116. Squire H. B. and Trouncer J., Round jets in a general stream, A. R. C. Tech. Rep. R. and M., 1944, № 1974.
117. Spence D. A., Velocity and enthalpy distributions in the compressible turbulent boundary layer on a flat plate, J. Fluid Mech., **8**, Pt 3, p. 368—387.
118. Stevenson T. N., Boundary layers with suction of injection, Ph. D. Thesis, University of London, 1964.
119. Stratford B. S., An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise, J. Fluid Mech., 1959, **5**, p. 17.
120. Thompson B. G. J., A critical review of existing methods of calculating the turbulent boundary layer, A. R. C., 1964, **26**, p. 109.
121. Tollmien W., Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAMM, 1926, **6**, B. 6, S. 468. Also translated as NACA TM 1085, 1945.
122. Townsend A. A., Equilibrium layers and wall turbulence, J. Fluid Mech., 1961, **11**, p. 97.
123. Trubchikov B. Ya., Thermal method of measuring turbulence in wind tunnels, Trudy Tsentr. Aerogidrodynam. Inst., 1938, 372.
124. Truckenbrodt E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. Ing. Arch. 20, 1952, p. 211—228.
125. Van-Driest E. R., Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco method, 1952, NACA TH 2597.
126. Van-Driest E. R., On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci., 1956, 23, p. 1007.
127. Van der Hegge Zijnen B. G.
127 a) Measurements of the velocity distribution in a plane turbulent jet of air, Appl. Sci. Res. Section A, 1958, 7, p. 256.
127 b) Measurements of the distribution of heat and matter in a plane turbulent jet of air, Appl. Sci. Res. Section A, 1958, 7, p. 277.
127 c) Measurement of turbulence in a plane jet of air by the diffusion method and by the hot-wire method, Appl. Sci.Res. Section A, 1958, 7, p. 293.
128. Von Karman T., Über laminare und turbulente Reibung, ZAMM, 1921. B. 1. S. 233—252.
129. Walz A., Strömungs- und Temperaturgrenzschichten, G. Braun, Karlsruhe, 1966.
130. Wieghardt K., Cited by H. Schlichtung in Boundary Layer Theory, Fourth Edition, McGraw Hill Book Co., New York, 1961, p. 574.
131. Wieghardt K., Über einen Energiesatz zur Berechnung laminare Grenzschichten, Ing. Arch., 1948, val. XVI, p. 231—242.
132. Whitelaw J. H., An experimental investigation of the two-dimensional wall jet, Imperial College, 1966, Mech. Eng. Dept., Rep. IC/HRJ/, 36.

ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ПI-1. ВВЕДЕНИЕ

ПI-1-1. Цель приложения

Создание точного, экономичного и обладающего широкой применимостью метода решения уравнений пограничного слоя составляет главную цель данной книги.

Вычислительная программа является необходимым связующим звеном между формальным описанием метода в буквенных символах и применяемыми на практике расчетами, выраженными языком цифр.

Приводимая ниже вычислительная программа, как и процедура решения, обладает достаточной общностью. Поэтому мы полагаем, что для пользы тех, кто в будущем пожелает применять наш метод, целесообразно предоставить в их распоряжение подробное описание программы. Этой цели служит приложение ПI.

ПI-1-2. Область применения и ограничения программы

Ограничения расчетного метода, отмеченные в основной части книги, присущи также и вычислительной программе. Она непосредственно применима к расчетам процессов переноса для течений с известным, т. е. заданным наперед, продольным градиентом давления. Использование ее для расчета ограниченных течений потребует модификаций аналогично тому, как это сделано в работе [Л. 79].

Программа составлена на машинном языке ФОРТРАН-IV применительно к вычислительным машинам IBM-7090 и IBM-360, но легко может быть приспособлена к другим вычислительным машинам.

Программа исходит из обязательного интегрирования дифференциального уравнения в частных производных для скорости u; дополнительно может быть решено любое количество уравнений типа (2.2-4), выражающих условия сохранения для других зависимых переменных.

Существование машинных команд «Размерность» и «Общий» ограничивает число дополнительных уравнений двумя, а количество полос N-разбиения области поперек слоя — до 40, однако при желании это легко изменить.

По отношению к зависимым переменным и другим вспомогательным величинам программа деструктивна, т. е. находящиеся в каждый данный момент времени в запоминающем устройстве величины относятся только к одному значению абсциссы x. В процессе машинного счета они, однако, вытесняются из ячеек памяти и заменяются аналогичными величинами, соответствующими следующему, расположенному ниже по течению, значению абсциссы x. Таким образом достигается уменьшение необходимого объема машинной памяти и удается избежать многих осложнений.

Область применения столь гибкой вычислительной программы в значительной мере зависит от изобретательности того, кто ею пользуется. Программа пригодна, например, для решения дифференциальных уравнений переноса завихренности (не приводится в данной книге, но содержится в работе [Л. 79] или кинетической энергии пульсационного движения. Нет оснований сомневаться в ее применимости (при известной осторожности) к решению задач нестационарной теплопроводности, распространения фронта ламинарных пламен или к интегрированию уравнений параболического типа независимо от их физического смысла.

Входящие в программу подпрограммы можно подразделить на три группы.

Первая из них включает наиболее общие данные, относящиеся к течениям любого типа. Подпрограммы второй группы содержат характеристики конкретного типа течения: ламинарного, турбулентного и т. д. В § ПI-5, где программа приводится целиком, помещены подпрограммы второй группы для турбулентного течения, использующие гипотезу о пути смешения и соотношения для потоков стенки, о которых шла речь в гл. 4.

Составление соответствующих подпрограмм для ламинарного или турбулентного течения с другой гипотезой не представляет больших трудностей.

В подпрограммах последней, т. е. третьей, группы содержится информация физического характера, а именно: начальные и граничные условия, физические свойства жидкости, материальные характеристики и другие данные, входящие в математическую формулировку задач.

В § ПI-5 мы ограничились приведением в качестве примеров нескольких подпрограмм. Нами, однако, дано подробное описание их возможностей и способов трансформации к новым задачам. Поэтому для желающего пользоваться нашей программой не будет трудным приспособить приведенные нами подпрограммы к собственным целям либо составить новые подпрограммы.

ПІ-2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОГРАММЕ

До обсуждения тонкостей различных подпрограмм необходимо составить общее представление о программе путем ознакомления с используемыми в ней символами и обозначениями. Условные обозначения машинного языка ФОРТРАН напечатаны латинским шрифтом.

Подстрочные индексы для линий сетки. Нумерация постоянных ω линий близка к используемой в гл. 2. Подстрочные индексы 1 и NP3 относятся соответственно к границам *I* и *E*, а 2 и NP2 — к соответствующим величинам скольжения. NP1, NP2, NP3 означают соответственно $N+1$, $N+2$ и $N+3$, где N — число линий поперек слоя.

Зависимые переменные. Запись U(I) используется для скоростей в узлах сетки. Зависимые переменные, фигурирующие во всех уравнениях, за исключением уравнения движения, обозначены F(J, I), где J — порядковый номер зависимой переменной, а I относится к линии сетки. Порядковый номер J, приписываемый различным величинам, связанным с F(J, I), может изменяться от 1 до NPH, где NPH — количество Ф-уравнений — задается равенством

$$NPH=NEQ-1. \qquad (П.2\text{-}1)$$

Здесь NEQ — число дифференциальных уравнений в частных производных, подлежащих решению; одним из них всегда является уравнение движения.

Обозначение типа границы. KIN и KEX представляют два числа, определяющих типы границ *I* и *E* соответственно. Каждое из этих двух чисел может принимать значения 1, 2 или 3 для стенки, свободной границы и линии симметрии соответственно. KASE — число, выведенное из KIN и KEX, KASE равно единице в случае, когда по крайней мере одной из границ служит стенка; в остальных случаях KASE равно 2. IND1(J) и INDE(J) относятся к Ф-граничному условию на стенке соответственно для поверхностей *I* и *E*. J обозначает порядковый номер Ф-уравнения. IND1(J) и INDE(J) принимает значения 1 или 2 в зависимости от того, задана ли на границе Ф-величина или соответствующий поток.

Влияние радиуса поперечной кривизны. KRAD представляет собой число, вводящее информацию относительно влияния радиуса поперечной кривизны. Равенство его нулю указывает на отсутствие радиальных изменений поперек слоя; во всех остальных случаях влияние радиуса поперечной кривизны должным образом учитывается. Это оказывается полезным главным образом для точного анализа плоских течений, так как позволяет избежать бесконечно больших значений радиуса поперечной кривизны. Следует отметить, что KRAD=0 устраняет влияние радиуса только поперек слоя: переменность радиуса продольной кривизны в направлении движения, если таковое изменение существует, всегда учитывается в расчетах.

Перечень условных обозначений машинного языка «ФОРТРАН». Ниже приведен перечень всех наиболее важных условных обозначений программы. Остальные условные обозначения не требуют специальных пояснений. Там, где это возможно, используются их алгебраические эквиваленты.

При необходимости указания на тесную связь условного обозначения с конкретной подпрограммой приводится название этой подпрограммы.

Символ языка «ФОРТРАН»	Значение	Подпрограмма
A (J, I)	A	COEFF, SLIP
AJE (J)	$J_{\text{полн}\,E}$	WALL, SLIP
AJI (J)	$J_{\text{полн}\,I}$	WALL, SLIP
AJFS	Φ_S или $J_{\text{полн}}$	FBC
AK	K	
AL	l	VEFF
ALMG	λ	VEFF, ENTRN
AM	$\dot{m}''_S$	MASS
AM	$\dot{m}''_S$ (ρu)	WF1, WF2
AME	$\dot{m}''_E$	
AMI	$\dot{m}''_I$	
AMU	μ (приведенная величина)	VISCO
AU (I)	A_u	COEFF, SLIP
B (J, I)	B	COEFF, SLIP
BETA	β	WALL
BU (I)	B_u	COEFF, SLIP
C (J, I)	C	COEFF, SLIP
CS	d_U	SOURCE
CSALFA	$\cos\alpha$	RAD, READY
CU (I)	C_u	COEFF, SLIP
D (J, I)	$(\partial d/\partial\Phi)_U$	COEFF
DEN	ρ (приведенное значение)	DENSITY
DPDX	$dp\ dx$	PRE
DS	$(\partial d\ \partial\Phi)_U$	SOURCE
DX	$(x_D - x_U)$	MAIN, COEFF
EMU	$\mu_{\text{эф}}$	VEFF, COEFF
F	$(ydp\ dx)$ (ρu^2)	WF1, WF2
F (J, I)	Φ	
FR	Дробь в определении y_I	LENGTH
G1 (I), G2(I), G3(I)	g_1, g_2, g_3	COEFF
GAMA (J)	γ	WALL
IND	Равняется 1 или 2 в зависимости от того, задано ли Φ_S или $J_{\text{полн}}$	FBC
INDE(J)	IND для границы E	WALL, SLIP
INDI(J)	IND для границы I	WALL, SLIP
INTG	Число выполненных интегрирований	MAIN
KASE	Равно 1 или 2 в зависимости от того, является ли стенка границей	
KEX	Задается граница E	
KIN	Задается граница I	
KRAD	При нулевом значении исключается влияние радиуса поперечной кривизны	READY
N	N	BEGIN

NEQ	Число дифференциальных уравнений, решаемых в частных производных	
NP1	$N+1$	
NP2	$N+2$	
NP3	$N+3$	
NPH	Число Ф уравнений	
OM (I)	ω	
P, P (J)	P_*	WF2, WALL
P1, P2, P3	P_1, P_2, P_3	COEFF
PEI	$(\psi_E - \psi_I)_U$	
PR, PR (J)	σ	WF2, WALL
PREF (J)	$\sigma_{эф}$, σ_t	COEFF, WALL
PRT	σ_t	WF2
Q	Q	COEFF
R	$\rho u y$	WF1, WF2
R (I)	r	
RI	r_I	RAD
R1, R2, R3	R_1, R_2, R_3	COEFF
RHO (I)	ρ	DENSTY
S	$\tau_S (\rho u^2)$	WF1
S	$J_S \{\rho u (\Phi_S - \Phi)\}$	WF2
S1 (I), S2 (I), S3 (I)	s_1, s_2, s_3	COEFF
SA	a	
SB	b	
SC (I)	c	
TAUE	τ_E	WALL
TAUI	τ_I	
U (I)	u	LENGTH
UMAX	Максимальное значение u	
UMIN	Минимальное значение u	FBC, RAD
X	x	
XD	x_D	MAIN
XL	Значение x, определяющее конец интегрирования	
XP	Значение x, предшествующее x_U	
XU	x_U	
Y (I)	y	READY
YEM	y для точки вблизи границы E	LENGTH
YIP	y для точки вблизи границы I	
YL	y_l	VEFF, LENGTH

ПІ-3. ОПИСАНИЕ ПОДПРОГРАММ

На рис. ПІ-3.1 представлена схема функционирующей вычислительной программы, поясняющая последовательность операций, внутреннюю соподчиненность различных частей программы и кратко их функции. Она создает общую карту, иллюстрирующую взаимосвязь отдельных подпрограмм, к описаниям которых мы сейчас приступаем. Сводка всех подпрограмм дана в § ПІ-5. Используемые ниже условные обозначения языка «ФОРТРАН» были пояснены нами выше.

ПІ-3-1. Подпрограммы общего назначения

Главная подпрограмма MAIN. Строго говоря, ее нельзя именовать «подпрограммой» в смысле терминологии языка ФОРТРАН, однако в нашем методе это не столь важно. С нее начинаются счет и контроль последовательности операций и выбор последующего шага интегрирования.

Подпрограммы, приведенные в перечне § ПІ-5, опираются на равенство (2.8-16), связывающее размер шага со степенью увлечения через границу слоя; вычислитель может изменить их по своему усмотрению.

Для установления скорости внешнего течения на свободных границах используется уравнение Эйлера.

При задании на границах специальных условий, перечисленных в § 2.6, испытанные значения соответствующих зависимых переменных устанавливаются после интегрирования с использованием соотношений для величин скольжения, приведенных в § 2.5. Использование команды SC(I) носит временный характер. Новые значения (ψ_E—ψ_I) получаются здесь с помощью уравнений (2.8-6).

В подпрограмме содержится условие автоматического прекращения счета в случае, когда x превышает предопределенное заранее значение XL; расчетчик может изменить по своему усмотрению это условие.

Подпрограмма COEFF. Является по существу сердцевиной программы. Она предназначена для введения коэффициентов A_u, B_u, C_u уравнений (2.4-35), а также коэффициентов A, B, C уравнений (2.4-31) для каждого Ф-уравнения и всех промежуточных точек сетки. Она начинается с вычисления g-коэффициентов уравнения скорости с последующим определением C-величин, входящих в конвективный член. Затем различные члены группируются согласно равенствам (2.4-36)—(2.4-38) и (2.4-32)—(2.4-34). Для этой цели используются различные накопительные устройства машинной памяти. Полученные такие образом совокупности величин дополняются коэффициентами с подстрочными индексами 2 и $N+2$, которые вырабатываются с помощью специальной подпрограммы SLIP. К ее рассмотрению мы сейчас и переходим.

Подпрограмма SLIP. Представленные в § 2.5 соотношения связывают величины скольжения с соседними истинными величинами и содержатся в виде соответствующих коэффициентов в подпрограмме SLIP. Эти коэффициенты вычисляются для обеих границ I и E в зависимости от характера границы. В случаях, когда границей является линия симметрии, расчеты плоского и осесимметричных течений различаются между собой. Если границей служит стенка, то граничное условие вводится подпрограммой FBC. Тогда для величин скольжения используются различные соотношения в зависимости от того, задается ли на стенке поток либо Ф-величина.

Подпрограмма SOLVE. Содержит математические операции (описанные в § 2.7) непосредственно решения системы уравнений типа (2.7-1). Подпрограмма вводится командой

CALL SOLVE (A, B, C, F, NP3),

где A, B, C — таблицы заданных коэффициентов, F — таблица Ф-величин, а NP3 определяет размер таблицы F, включающей известные значения на границах.

Подпрограмма READY. После каждого интегрирования мы получаем новые значения u и других Ф-величин для значений ω. Подпрограмма READY производит вычисление соответствующих расстояний по нормали ординат y и радиусов поперечной кривизны r для каждой точки сетки. Это позволяет осуществить переход к следующей операции интегрирования.

Подпрограмма READY требует введения величин плотности ρ во всех точках сетки и задания характеристик r_I и a. Они заимствуются из подпрограмм DENSTY и RAD. Формулы, используемые в подпрограмме READY, приведены в разд. 2.8-2.

ПІ-3-2. Подпрограммы ввода физических гипотез

Подпрограмма VEFF. Предназначена для ввода величины $\mu_{эф}$ в соответствии с используемой гипотезой.

Ввод осуществляется командой

CALL VEFF (I+1, EMU),

которая означает, что требуемое значение $\mu_{эф}$, EMU должно быть вычислено посередине между линиями сетки I, I+1.

В программе, приведенной в § ПІ-5, используется гипотеза о пути смешения в форме уравнения (1.3-5). Характерная длина y_l согласно определению разд. 2.8-3 вводится подпрограммой LENGTH.

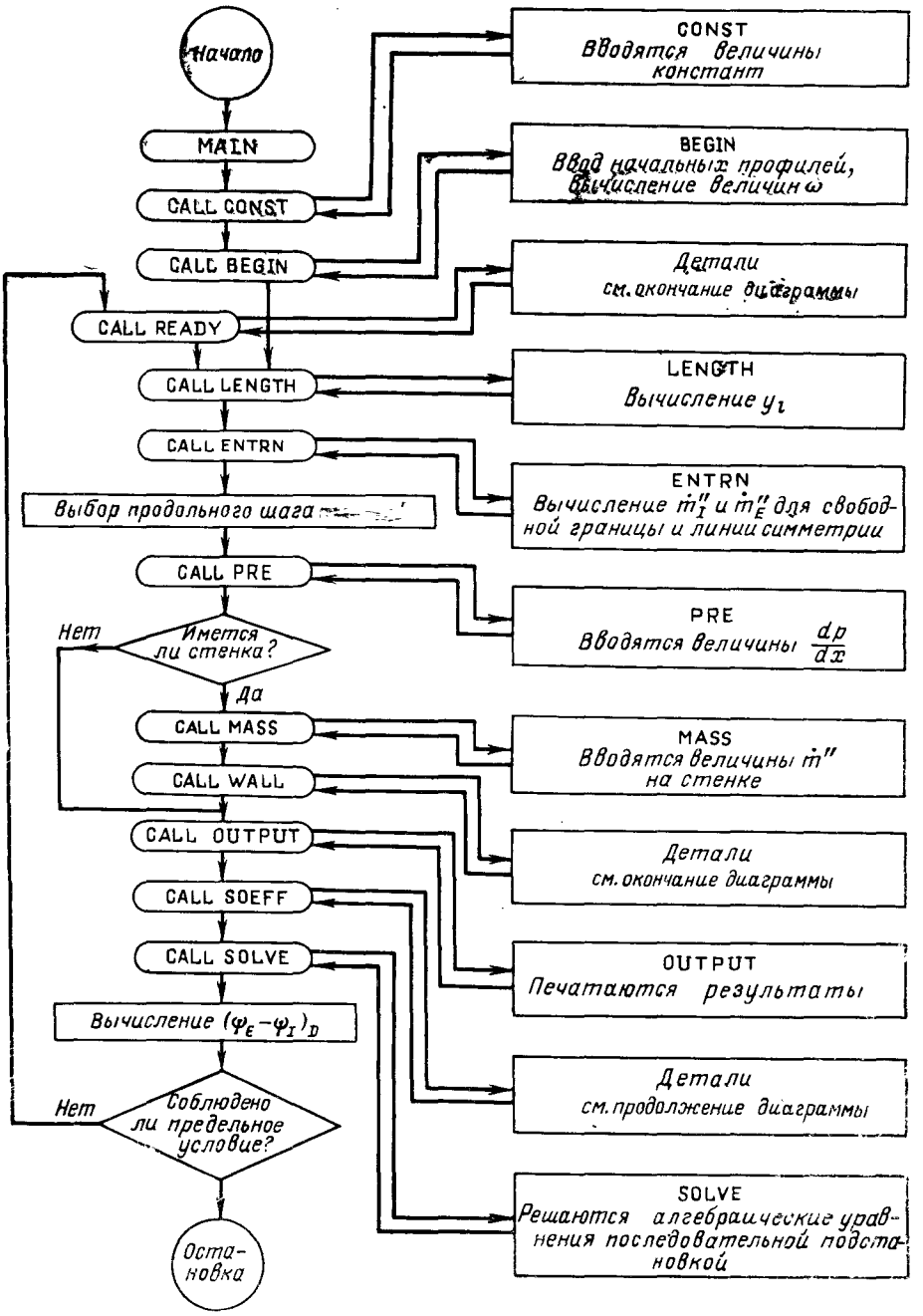


Рис. ПІ-3.1. Начало.

Подпрограмма LENGTH. Предназначена для вычисления характерной толщины слоя в соответствии с определением разд. 2.8-3. Вначале разыскиваются максимальное и минимальное значения скорости, затем обследуются области вблизи обеих границ. В задачах ламинарного движения можно обойтись без этой подпрограммы.

Данная подпрограмма, хотя и предназначена в первую очередь для получения линейного масштаба длины пути смешения, допускает использование в других целях.

Ее, например, можно применить для вычисления характерного размера $y_{1/2}$ в задачах о свободный или пристеночной струях. Величина $y_{1/2}$ представляет расстояние до точки, в которой скорость составляет половину максимальной скорости.

Подпрограмма ENTRN. Служит для вычисления интенсивностей увлечения m''_I и m''_E через свободную границу или границу, совпадающую с линией симметрии. На линии симметрии величина m'' принимается равной нулю. В тексте программы, помещенном в § П I-5, для свободных границ используются соотношения (2.8-3) и (2.8-4). Для ламинарных течений либо для задач, базирующихся на иных гипотезах относительно $\mu_{эф}$, используются другие подходящие выражения.

Даже для задач турбулентного движения, опирающихся на гипотезу о пути смешения, расчетчик сохраняет свободу вводить другие соотношения для потоков увлечения через границы слоя (естественно при соблюдении известной осторожности).

Подпрограмма WALL. Ее назначение — расчет показателей степени β и γ для пристеночной области. Эта подпрограмма, очевидно, используется лишь тогда, когда существует граница, совпадающая со стенкой. Подпрограмма, помимо этого, выдает величины касательных напряжений на стенке и различные потоки стенки, заимствуя основную информацию из двух других подпрограмм, WF1 и WF2, объединяющих соотношения для потоков стенки.

В программе, приведенной в § ПI-5 для вычисления β и γ, используются зависимости (2.5-15) и (2.5-16).

Подпрограмма WF1. Вводит соотношение для потока стенки, характеризующее перенос количества движения. Подпрограмма WF1 вводится командой

CALL WF1 (R, F, AM, S),

где R, F и AM — заданные величины, а S означает выход подпрограммы. Программа, приведенная в § ПI-5, в этой части базируется на соотношениях, приведенных в гл. 4.

Подпрограмма WF2. Аналогична подпрограмме WF1 и служит для введения в расчет Ф-величин, отличных от x.

Вводится командой

CALL WF2 (R, F, AM, PR, PRT, P, S).

Здесь S — выход подпрограммы, а все остальные аргументы — заданные величины.

Программа, помещенная в § ПI-5, также базируется в этой части на соотношениях гл. 4.

ПI-3-3. Подпрограммы для частных задач

Подпрограмма SOURCE. При использовании записи (2.2-4) для дифференциальных уравнений в частных производных главное отличие одного Ф-уравнения от другого связано с d-членом. В нашей формулировке уравнения движения d-член выражается вполне определенно комплексом, приведенным в табл. 2.2-1.

Подпрограмма SOURCE вводит в расчет d-члены для других Ф-уравнений.

Подпрограмма SOURCE вводится командой

CALL SOURCE (J, I, CS, DS),

где J — порядковый номер Ф-уравнения; I характеризует линию сетки, для которой требуется определить d-член, а символы CS и DS означают выход подпрограммы. Обычно d-член вводится только для промежуточных линий сетки, т. е. I может принимать значение от 3 до $N+1$. Однако если границей является линия симметрии, то подпрограмма SOURCE оказывается пригодной также и для такой границы.

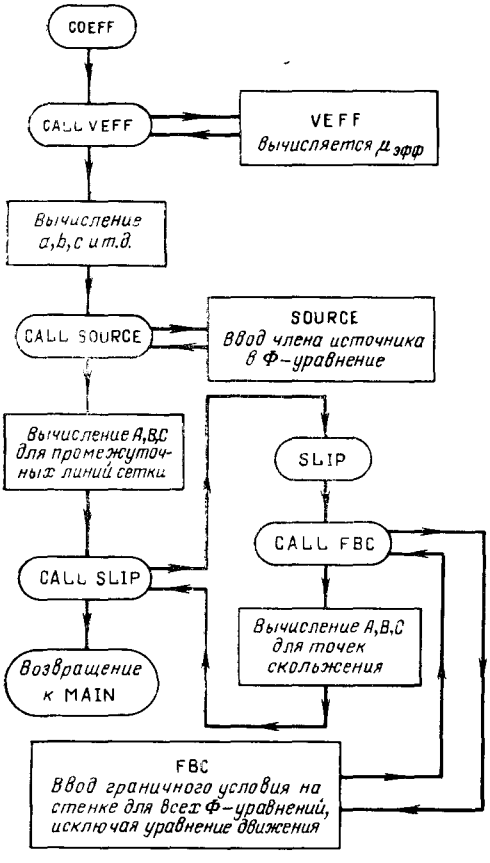
В § ПI-5 представлено два варианта этой подпрограммы. В одном из них d-член принимается равным нулю, это соответствует случаю, когда под Ф подразумевается m_j, а $R_j=0$. В другом примере приводится выражение для d-члена, когда под Ф подразумевается $\bar{h}$.

Подпрограмма CONST. Содержит величины различных постоянных, включая физические свойства жидкости, константы гипотезы пути смешения и др.

Существуют различные способы ввода этих чисел. Весьма целесообразным будет включить все необходимые константы в одну только эту подпрограмму и использовать соответствующие им условные обозначения в остальных подпрограммах. Константы, связанные функционально с другими постоянными, также поддаются вычислению с помощью этой подпрограммы. К примеру, величину P_* можно вычислить из соотношения (4.3-13) по величинам σ и σ_t. Образец подпрограммы, представленный в § ПI-5, иллюстрирует сказанное.

Подпрограмма DENSTY. Ее назначение — выразить плотность во всех точках сетки как функцию зависимых переменных. Фактические выражения будут варьировать соответственно типу задачи и природе жидкости. Символ DEN, величину которого можно включить в подпрограмму CONST, удобно использовать в качестве характеристического значения плотности. В примере, приведенном в § ПI-5, плотность представляется обратно пропорциональной абсолютной температуре. При этом $F(1, I)$ означает абсолютную температуру, а DEN — плотность на границе E.

Подпрограмма VISCO. Функциональная подпрограмма VISCO(I) применяется для определения величины ламинарной (молекулярной) вязкости в любой точке сетки I. В задачах турбулентного течения применение этой функции ограничивается в основном пристеночной областью. Для ламинарных течений эта функция может быть использована более интенсивно. В примере, включенном в § ПІ-5, ламинарная вязкость задается в виде некоторой функции абсолютной температуры F(1, I), где AMU представляет вязкость на границе *E*.



Рнс. ПІ-3.1. Продолжение.

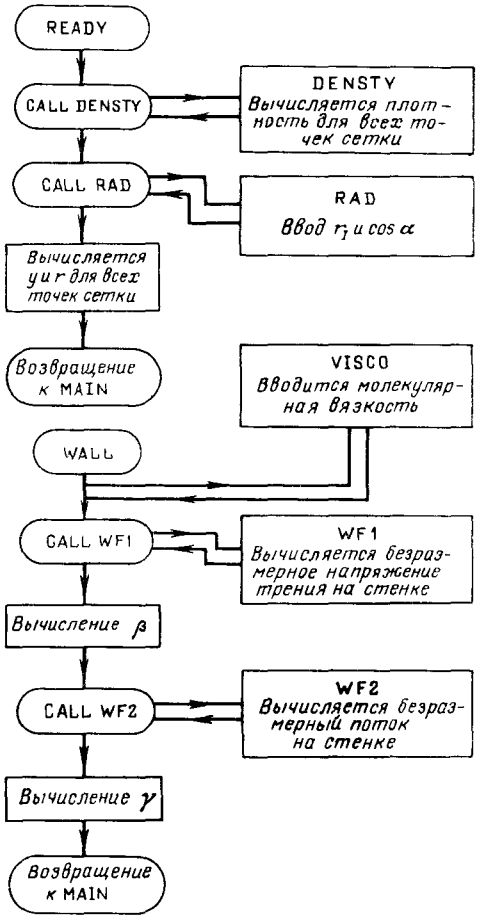


Рис. ПІ-3.1. Окончание.

Подпрограмма RAD. Охватывает информацию о геометрических особенностях рассматриваемой задачи. Назначение подпрограммы состоит в определении величин r_1 и $\cos\alpha$ для заданного значения x.

Подпрограмма вводится командой

CALL RAD (X, *R*1, CSALFA).

При анализе плоских течений рекомендуется символ *R*1 полагать постоянной величиной, разной, например, единице. Нет необходимости задавать очень большую величину; в данном случае она все же должна быть отличной от нуля.

Величина *R*1 для плоских течений лишена физического смысла и является фиктивной.

Три примера этой подпрограммы приведены в § ПІ-5. Первый пример относится к плоским течениям; второй — к радиальным пристеночным струям. Третий пример может быть отнесен к осесимметричному слою смешения, постепенно преобразующемуся в струю. При этом радиус r_1 вычислен с учетом эжекции в слой смешения.

Подпрограмма PRE. Вводит продольный градиент давления. Команда ввода

CALL PRE (XU, XD, DPDX),

где величина градиента давления DPDX является выходом подпрограммы, тогда как XU и XD соответствуют двум заданным значениям x, между которыми вычисляется величина градиента давления.

Существует много способов вычисления продольного градиента давления по данным, входящим в постановку задач. Пример в § П1-5 поясняет один такой способ: продольный градиент давления находится из совместного рассмотрения заданного распределения скорости на свободной границе и уравнения Эйлера.

Подпрограмма MASS. Предназначена для задач, где граница совпадает со стенкой, через которую осуществляется массоперенос. Подпрограмма вводится командой

CALL MASS (XU, XD, AM),

где XU и XD — два заданных значения x: подпрограмма призвана обеспечивать ввод величины интенсивности массопереноса AM между сечениями XU и XD.

Пример, приведенный в П1-5, дает несложный вариант подпрограммы для проницаемой стенки.

Подпрограмма FBC. Для границы, совпадающей со стенкой, скорость u (относительно стенки) всегда равна нулю. Однако нам нужно знать также граничные условия для других зависимых переменных. Их ввод предусматривается подпрограммой FBC (название подпрограммы происходит от английского сокращенного написания Ф-граничные условия). Подпрограмма вводится командой

CALL FBC (X, J, IND, AJFS).

Здесь X и J — заданные величины, которые означают абсциссу и порядковый номер рассматриваемого Ф-уравнения. IND и AJFS — результаты: IND принимает значение 1 или 2 в соответствии с тем, задается ли Ф-величина либо соответствующий ей поток: накопитель AJFS содержит тогда заданную величину. Два примера приводятся в § П1-5. В первом из них зависимость F(1, 1) выбрана в виде линейной функции от x, во-втором примере принимается постоянство потока стенки. Подпрограммы MASS и FBC не используются в случаях отсутствия границы на стенке.

Подпрограмма BEGIN. Служит для ввода начальных профилей и других вспомогательных величин. Несмотря на то, что расчетчик волен задавать начальные профили, как пожелает, все-таки большая часть этой подпрограммы, связанная с определением величин скольжения и вычислением ω-величин, должна оставаться без изменений.

В этой подпрограмме необходимо задать: величины

KRAD, NEQ, KIN, KEX, N,

начальное значение x, начальные профили $u \sim y$ и соответствующие распределения других зависимых переменных. При этом нет надобности задавать величины скольжения, соответствующие узлам сетки 2 и $N+2$, поскольку их вычисление предусмотрено подпрограммой. Расчетчику эта подпрограмма представляет удобную возможность для считывания данных задач, включая граничные условия величин, характеризующих физические свойства; эти данные могут быть перенесены в соответствующие подпрограммы посредством команды COMMON.

В примере, приведенном в § П1-5, все необходимые величины считываются с перфокарт. Это удобно, если имеются экспериментальные профили. С другой стороны для построения начальных профилей можно использовать алгебраические выражения. В этом случае для показателей β и γ принимаются одинаковые значения, равные 0,143 (профиль одной седьмой), т. е. хорошо известные степенные профили, характеризующие турбулентное пристеночное течение. Для ламинарного течения выбираются другие профили. Соотношения для величин скольжения, используемые в примере, взяты из § 2.5, а значения (ψ_E—ψ_I) и ω подсчитываются по формулам (1.1-2) и (2.1-1).

Подпрограмма OUTPUT. Содержит команды на печатание результатов. Остальная программа не нуждается в этой подпрограмме, и поэтому вычислитель обладает свободой выбора печатать по своему желанию любую информацию, относящуюся к расчету.

Целочисленную переменную INTG, учитывающую количество интегрирований, можно успешно использовать для команды на воспроизведение результатов после желаемого числа интегрирований. В примере, приведенном в П1-5, предусмотрено печатание величин абсциссы x и соответствующих профилей скорости и температуры через каждые пять интегрирований.

П1-4. КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ПРОГРАММЫ

Приведенное нами выше описание деталей вычислительной программы и сводка отдельных подпрограмм, представленная в § П1-5, составляет информацию, достаточную для самостоятельного выполнения машинного счета. Однако после приобретения общего понимания программы расчетчик может не пожелать использовать всю эту информацию целиком всякий раз при составлении заново вычислительной программы для решения конкретной задачи.

В этом случае нужна уверенность в том, что соблюдены следующие десять операций (они выражают ту же самую информацию в сжатой и удобной для использования форме).

1. Подпрограммы COEFF, SLIP, SOLVE и READY сохраняются без изменений.

2. В подпрограмме MAIN определение длины шага (x_D—x_U) и условия для окончания вычислений выбираются в соответствии с поставленными целями.

3. Выбирается формула для эффективной вязкости. В случае приемлемости гипотезы о пути смешения подпрограммы

VEFF, LENGTH, ENTRN, WALL, WF1, WF2

сохраняются неизменными. Для любой другой гипотезы течения эти подпрограммы модифицируются соответствующим образом.

4. Выбираются величины KRAD, NEQ, KIN, KEX, N и вводятся в подпрограмму BEGIN совместно с начальными значениями x и начальными профилями. Выясняется возможность согласования типа границы (т. е. KIN и KEX) с характером движения в рассматриваемой задаче. Если нужны изменения, то величины KIN или KEX вводятся в подходящем месте программы. Следует изменить величины β и γ BEGIN, если течение не турбулентно. Нужно, насколько это возможно, ограничить все команды READ, относящиеся к этой подпрограмме.

5. Подпрограмма SOURCE приводится в соответствие с используемыми Ф-уравнениями. Если граница совпадает со стенкой, то подпрограммы FBC и MASS рассматриваются таким образом, чтобы обеспечить задание желаемых Ф-граничных условий[1] и интенсивности массоперепоса через стенку.

6. Проводится подготовка для вычислений соответствующих свойств жидкости в подпрограммах DENSTY и VISCO.

7. Подготавливаются подпрограмма PRE для задания величины продольного градиента давления в соответствии с условиями задачи и подпрограмма RAD, вводящая информацию о геометрии I-границы.

8. Нужная для расчета информация о постоянных вводится в CONST.

9. Предусматривается вывод и воспроизведение (печатание) нужных результатов в OUTPUT.

10. Подготавливается перфокарта с данными с указанием последовательных команд READ по всей программе.

ПI-4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

В этом параграфе мы приводим полный текст вычислительной программы. Подпрограммы, за исключением MAIN, которая приводится первой, расположены в алфавитном порядке.

```
      MAIN
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
     1U,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJI(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/C/SC(43),AU(43),BU(43),CU(43),A(2,43),B(2,43),C(2,43)
      COMMON/L/AK,ALMG
   16 Продолжение
      INTG=0
      XL=20.
      CALL CONST
      CALL BEGIN
  AMI=0.
  AME=0.
  Переход к 25
  15 CALL READY
  25 Продолжение
      INTG=INTG+1
      CALL LENGTH
      CALL ENTRN
C Выбор предыдущего шага
  FRA=.05
  DX=FRA*PEI/(R(1)*AMI—R(NP3)*AME)
  IF(DX.GT..5*Y(NP3))DX=.5*Y(NP3)
  XD=XU+DX
  77 Продолжение
     CALL PRE(XU,XD,DPDX)
     IF(KASE.EQ.2) Переход к 26
     IF(KIN.EQ.1)CALL MASS(XU,XD,AMI)
```

[1] Обычно трактовки граничных условий в подпрограмме SLIP оказывается достаточно, но при рассмотрении сложных граничных условий необходима некоторая модификация.

```
      IF(KEX.EQ.1)CALL MASS(XU,XD,AME)
      CALL WALL
   26 CALL OUTPUT
      CALL COEFF
C     Подстановка скоростей на свободных границах
      IF(KEX.EQ.2)U(NP3)=SQRT(U(NP3)*U(NP3)—2.*(XD—XU)*
      DPDX/RHO(NP3))
      IF(KIN.EQ.2)U(1)=SQRT(U(1)*U(1)—2.*(XD—XU)*DPDX/RHO(1))
      CALL SOLVE(AU,BU,CU,U,NP3)
C     Подстановка скоростей на линии симметрии
      IF(KIN.NE.3)
      Переход к 71
      U(1)=U(2)
      IF(KRAD.EQ.0)U(1)=.75*U(2)+.25*U(3)
   71 IF(KEX.EQ.3)U(NP3)=.75*U(NP2)+.25*U(NP1)
   72 U11=U(1)*U(1)
      U13=U(1)*U(3)
      U33=U(3)*U(3)
      SQ=84.*U11—12.*U13+9.*U33
      U(2)=(16.*U11—4.*U13+U33)/(2.*(U(1)+U(3))+SQRT(SQ))
      Y(2)=Y(3)*(U(2)+U(3)—2.*U(1))*.5/(U(2)+U(3)+U(1))
    Переход к 74
   73 IF(KRAD.NE.0)
    Переход к 89
      U(2)=(4.*U(1)—U(3))/3.
      Y(2)=0.
    Переход к 74
   89 U(2)=U(1)
      Y(2)=Y(3)/3.
   74 Переход к (75,76,77) KEX
   75 U(NP2)=U(NP1)/(1.+2.*BETA)
      Y(NP2)=Y(NP3)—(Y(NP3)—Y(NP1))*BETA/(2.+BETA)
    Переход к 78
   76 U11=U(NP1)*U(NP1)
      U13=U(NP1)*U(NP3)
      U33=U(NP3)*U(NP3)
      SQ=84.*U33—12.*U13+9.*U11
      U(NP2)=(16.*U33—4.*U13+U11)/(2.*(U(NP1)+U(NP3))+SQRT(SQ))
      Y(NP2)=Y(NP3)—(Y(NP3)—Y(NP1))*(U(NP2)+U(NP1)—2.*U(NP3))*.5/
      1(U(NP2)+U(NP1)+U(NP3)
      Переход к 78
   77 U(NP2)=(4.*U(NP3)—U(NP1))/3.
      Y(NP2)=Y(NP3)
   78 Продолжение
      IF(NEQ.EQ.1)  Переход к 45
      DO 88 J=1,NPH
C     Начальные профили других зависимых переменных
      READ(5,43)F(J,1),(F(J,1),1=3,NP1),F(J,NP3)
C     Вычисление соответствующих величин скольжения
      GAMA(J)=.143
      Переход к (81,82,83),KIN
   81 F(J,2)=F(J,1)+(F(J,3)—F(J,1))*(1.+BETA—GAMA(J))/(1.+
      +BETA+GAMA(J))
      Переход к 84
   82 G=(U(2)+U(3)—8.*U(1))/(5.*(U(2)+U(3))+8.*U(1))
      GF=(1.—PREF(J))/(1.+PREF(J))
      GF=(G+GF)/(1.+G*GF)
      F(J,2)=F(J,3)*GF+1.—GF)*F(J,1)
      Переход к 84
   83 F(J,2)=F(J,1)
      IF(KRAD.EQ.0)F(J,2)=(4.*F(J,1)—F(J,3))/3.
   84 Переход к (85,86,87) KEX
   85 F(J,NP2)=F(J,NP3)+(F(J,NP1)—F(J,NP3))*(1.+BETA—GAMA(J))/(1.+
      1BETA+GAMA(J))
      Переход к 88
   86 G=(U(NP2)+U(NP1)—8.*U(NP3))/(5.*(U(NP2)+U(NP1))+8.*U(NP3))
      GF=(1.—PREF(J))/(1.+PREF(J))
      GF=(G+GF)/(1+G*GF)
      F(J,NP2)=F(J,NP1)*GF+(1.—GF)*F(J,NP3)
      Переход к 88
   87 F(J,NP2)=(4.*F(J,NP3)—F(J,NP1))/3.
   88 Продолжение
```

```
   45  Продолжение
       CALL DENSTY
C      Вычисление радиусов
       CALL RAD(XU,R(1),CSALFA)
       IF(CSALFA.EQ.0.OR.KRAD.EQ.0) Переход к 27
       DO 28 I=2,NP3
   28  R(I)=R(I)+Y(I)*CSALFA
   72  Продолжение
       IF(NEQ.EQ.1) Переход к 30
       DO 45 J=1, NPH
       DO 46 I=2,NP2
       AU(I)=A(J,I)
       BU(I)=B(J,I)
   46  CU(I)=C(J,I)
       DO 47 I=1,NP3
   47  SC(I)=F(J,I)
       CALL SOLVE(AU,BU,CU,SC,NP3)
       DO 48 I=1,NP3
   48  F(J,I)=SC(I)
       IF(KASE.EQ.2) Переход к 81
C      Подстановка F-величин на стенке
       IF(KIN.EQ.1.AND.INDI(J).EQ.2)F(J,1)=((1.+BETA2+GAMA(J))*F
       1(J,2)—(1.+BETA—GAMA(J))*F(J,3))*5/GAMA(J)
       IF(KEX.EQ.1.AND.INDE(J).EQ.2)F(J,NP3)=((1.+BETA+GAMA(J))*F
       1(J,NP2)—(1.+BETA—GAMA(J))*F(FJ,NP1))*.5/GAMA(J)
C      Подстановка F-величин на линии симметрии
   81  IF(KIN.NE.3) Переход к 82
       F(J,1)=F(J,2)
       IF(KRAD.EQ.0)F(J,1)=.75*F(J,2)+.25*F(J,3)
   82  IF(KEX.EQ.3)F(J,NP3)=.75*F(J,NP2)+.25*F(J,NP1)
   45  Продолжение
   30  XP=XU
       XU=XD
       PEI=PEI+DX*(R(1)*AMI—R(NP3)*AME)
C      Предельное условие
       IF(XU.LT.XL)
       Переход к 15
       Переход к 16
       Окончание

       BEGIN
Подпрограмма BEGIN

       COMMON /GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
       1XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
       1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
       1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJ1(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
       1/V/U(43),F(2,43),R(43,RHO(43),OM(43),Y(43)
C      Характеристики задачи
       READ(5,42)KRAD,NEQ,KEX,KIN,N
   42  Формат 411, 12
       KASE=2
       IF(KIN.EQ.1.OR.KEX.EQ.1)KASE=1
       XU=0.
       NPH=NEQ—1
       NP1=N+1
       NP2=N+2
       NP3=N+3
C      Начальный профиль скорости
       READ(5,43)Y(1),U(1),Y(1),U(1),I=3,NP1),Y(NP3),U(NP3)
   43  Формат (6F10.0)
C      Вычисление скоростей скольжения и расстояний
       BETA=.143.
       Переход к (71,72,73) KIN
   71  U(2)=J(3)/(1.42.*BETA)
       Y(2)=Y(3)*BETA/(2.+BETA)
       Переход к 74
       Переход к 29
   27  DO 30 I=2.NP3
   30  R(1)=R(1)
   29  Продолжение
C      Вычисление ω-величин
```

```
      OM(1)=0.
      OM(2)=0.
   DO 49 I=3,NP2.
   49 OM(1)=OM(I—1)+.5*(PHO(I)*U(I)*R(I)+RHO(I—1)*
     1U(I—1)*R(I—1))*(Y(I)—Y(I—1))
      PEI=OM(NP2)
      DO 59 I=3,NP1
   59 OM(I)=OM(I)/PEI
      OM(NP2)=1.
      OM(NP3)=1.
      IF(NEC.EQ.1)RETURN
      DO 69 J=1, NPH
      IF(KEX.EQ.1)INDE(J)=1
      IF(KIN.EQ.1)  INDI(J)=1
   69 Продолжение
      Возврат
      Окончание

      COEFF
   Подпрограмма COEFF
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPOX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
     1XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJ1(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/C/SC(43),AU(43),BU(43),CU(43),A(2,43),B(2,43),C(2,43)
      COMMON /L/AK, ALMG
       Размерность G1(43),G2(43),G3(43),D(2,43),S1(43),S2(43),S3(43)
C    Вычисление малых С-величин
      DO 98 I=2,NP1
      RA=.5*(R(I+1)+R(I))
      PH=.5*(RHO(I+1)+RHO(I))
      UM=.5*(U(I+1)+U(I))
      CALL VEFF(I,I+1,EMU)
   98 SC(I)=RA*RA*RH*UM*EMU/(PEI*PEI)
C     Член конвекции
      SA=R(1)*AMI/PEI
      SB=(R(NP3)*AME—R(1)*AMI)/PEI
      DX=XD—XU
      DO 71 I=3,NP1
      OMD=OM(I+1)—OM(I—1)
      P2=.25/DX
      P3=P2/OMD
      P1=(OM(I+1)—OM(I))*P3
      P3=(OM(I)—OM(I—1))*P3
      P2=3.*P2
      Q=SA/OMD
      R2=—SBA.25
      R3=R2/OMD
      R1=—(OM(I+1)+3.*OM(I))*R3
      R3=(OM(I—1)+3.*OM(I))*R3
      G1(I)=P1+Q+R1
      G2(I)=P2+R2
      G3(I)=P3—Q+R3
      CU(I)=—P1*U(I+1)—P2*U(I)—P3*U(I—1)
C     Член диффузии
      AU(I)=2./OMD
      BU(I)=SC(I—1)*AU(I)/(OM(I)—OM(I—1))
      AU(I)=SC(I)*AU(I)/(OM(I+1)—OM(I)
      IF(NEQ.EQ.I) Переход к 33
      DO 34 J=1,NPH
      C(J,I)=—P1*F(J,I+1)—P2*F(J,I)—P3*F(J,I—1)
      CALL SOURCE(J.I,CS,D(J,I))
      C(J,I)=—C(J,I)+CS—F(J,I)*D(J,I)
      A(J,I)=AU(I)/PREF(J)
      B(J,I)=BU(I)/PREF(J)
   34 Продолжение
C     Член источника в уравнении движения
   33 S1(I)=DPDX*DX
      S2(I)=P2*S1(I)/(RHO(I)*U(I))
      S3(I)=P3*S1(I)/(RHO(I—1)*U(I—1))
```

```
      S1(I)=P1*S1(I)/(RHO(I+1)*U(I+1)
      CU(I)=-CU(I)-2.*(S1(I)+S2(I)+S3(I)
      S1(I)=S1(I)/(I+1)
      S2(I)=S2(I)/U(I)
      S3(I)=S3(I)/U(I-1)
   71 Продолжение
C     Коэффициенты в окончательном виде
      DO 91 I=3,NP1
      RL=1./(G2(I)+AU(I)+BU(I)-S2(I))
      AU(I)=(AU(I)+S1(I)-G1(I))*RL
      BU(I)=(BU(I)+S3(I)-G3(I))*RL
   91 CU(I)=CU(I)*RL
      IF(NEQ.EQ.1) Переход к 76
      DO 92 J=1,NPH
      DO 92 I=3,NP1
      RL=1./(G2(I)+A(J,I)+B(J,I)-D(J,I))
      A(J,I)=(A(J,I)-G1(I))*RL
      B(J,I)=(B(J,I)-G3(I))*RL
   92 C(J,I)=C(J,I)*RL
   76 CALL SLIP
      Возврат
      Окончание

      CONST
Подпрограмма CONST
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,XU,
     1XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
      COMMON/L/AK,ALMG
     1/LI/YL,UMAX,UMIN,FR,YIP,YEM
      AK=.435
      ALMG=.09
      FR=.01
      PREF(1)=.9
      PR(1)=.7
      PRRAT=PR(1)/PREF(1)
      P(1)=3.68*(PRRAT-1.)*PRRAT**(-.25)
      DEN=.075
      AMU=.000012
      Возврат
      Окончание

      DENSTY
      Подпрограмма DENSTY
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
     1XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
      DO 45 I=1,NP3
   45 RHO(I)=DEN*F(1,NP3)/F(1,1)
      Возврат
      Окончание

      ENTRN
      Подпрограмма ENTRN
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
     1XU,XD,XP,XL,DX,INTG CSALFA
      COMMON /L/AK,ALMG
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/L1/YL,UMAX,UMIN,FR,VIP,YEN
C     Эта подпрограмма использует гипотезу пути смешения
      Переход к (71,72,73),KIN
   71 Переход к 74
   72 AMI=8.*RHO(1)*((ALMG*YL)/(Y(2)+Y(3)))**2*ABS(U(2)+
     +U(3)-2.*U(1))
      Переход к 74
   73 AMI=0.
   74 Переход к (81,82,83)KEX
   81 Возврат
   82 AME=8.*RHO(NP3)*((ALMG*YL)/(Y(NP1)+Y(NP2)-
     12.*Y(NP3)))**2*ABS(U(NP1)+U(NP2)-2.*U(NP3))
```

```
      Возврат
   83 AME=0.
      Возврат
      Окончание

      FBC (Пример 1)
C     Предписывает ступенчатое изменение температуры стенки
      Подпрограмма FBC(X,J,IND,AJFS)
      IND=1
      AJFS=100.+5.*X
      Возврат
      Окончание

      FBC (Пример 2)
C     Предписывает однородный поток
      Подпрограмма FBC(X,J,IND,AJFS)
      IND=2
      AJFS=50.
      Возврат
      Окончание

      LENGTH
      Подпрограмма LENGTH
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),DEN,AMU,
     1XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/L1,YL,UMAX,UMIN,FR,YIP,YEM
C     Отыскание максимальной и минимальной скоростей
   40 UMAX=U(1)
      UMIN=U(1)
      DO 41 J=3,NP3
      IF(J.EQ.NP2) Переход к 41
      IF(U(J).GT.UMAX)UMAX=U(J)
      IF(U(J).LT.UMIN)UMIN=U(J)
   41 Продолжение
      DIF=ABS(UMAX—UMIN)*FR
C     Поиск вблизи I-границы
      IF(KIN.NE.2)
      Переход к 43
      U21=ABS(.5*(U(2)+U(3)—U(1))
      IF(U21.LT.DIF)
      Переход к 47
      YIP=SQRT(DIF/U21)*(Y(2)+Y(3))*.5
      Переход к 44
   47 J=2
   48 J=J+1
      YJI=U(J)—U(1)
      IF(ABS(UJI).GE.DIF)
      Переход к 49
      Переход к 48
   49 A1=1.
      IF(UJ1.LT.0.)A1=—1.
      YIP=Y(J—1)+(Y(J)—Y(J—1))*(U(I)+A1*DIF—U(J—1))/(U(J)—
     —U(J—1))
      Переход к 44
   43 YIP=0.
C     Поиск вблизи E-границы
   44 IF(KEX.NE.2)  Переход к 45
      U21=ABS(.5*(U(NP1)+U(UP2))—U(NP3))
      IF(U21.LT.DIF)  Переход к 50
      YEM=SQRT(DIF/U21)*(.5*(Y(NP1)+Y(NP2))—,(NP3))+Y(NP3)
      Переход к 46
   50 J=NP2
   51 J=J—1
      UJ1=U(J)—U(NP3)
      IF(ABS(UJ1).GE.DIF)  Переход к 52
      Переход к 51
   52 A1=1.
      IF(UJ1.LT.0.)A1=—1.
```

```
      YEM=Y(J+1)+(Y(J)—Y(J+1))*(U(NP3)+A1*DIF—U(J+1))/(U(J)—
     —U(J+1))
      Переход к 46
   45 YEM=Y(NP3)
   46 YL=YEM—YIP
      Возврат
      Окончание

      MASS
C     Применима к b в случае непроницаемой стенки
      Подпрограмма MASS(XU,XD,AM)

      AM=0.
      Возврат
      Окончание

      OUTPUT
      Подпрограмма OUTPUT

      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,
     1MU,XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/C/SC(43),AU(43),BU(43),CU(43),A(2,43),B(2,43),C(2,43)
      COMMON /L/AK,ALMG
     1/L1/YL,UMAX,UMIN,FR,YIP,YEM
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJI(2),AJE(2),IND1(2),INDE(2)
      IF(NTG.NE.1)  Переход к 15
      Запись (6,49)(OM(I),I=1,NP3
   49 Формат (24H1) величины ω есть/(11F10.4))
   15 Продолжение
      IF(FLOAT INTG—1)/5..NE.FLOAT((INTG—1)/5))RETURN
      Запись (6,51)XU
      Запись (6,51)(Y(1),I=1,NP3),(U(I),I=1,NP3),(F(1,I),I=1,NP3)
   51 Формат (1P12E10.2)
      Возврат
      Окончание

      PRE
      Подпрограмма PRE(XU,XD,DPDX)

      COMMON /PR/UGU,UGD
     1/V/U(43)F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
C     Здесь UGU и UGD обозначены скорости внешнего течения в
      сечениях XU и XD
      DPDX=(UGU+UGD)*(UGU—UGD)*.5*RHO(NP3)/(XD—XU)
      Возврат
      Окончание

      RAD (Пример 1)
C     Применима к плоским течениям
      Подпрограмма RAD(X,R1,CSALFA)

      CSALFA=1.
      R1=1.
      Возврат
      Окончание

      RAD (Пример 2)
C     Применима к радиальной пристеночной струе
      Подпрограмма RAD(X,R1,CSALFA)

      CSALFA=0.
      R1=Y
      Возврат
      Окончание

      RAD (Пример 3)
C     Применима к осесимметричным слою смешения и струе
      Подпрограмма RAD(X,R1,CSALFA)

      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,
     1AMU,XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
```

```
      CSALFA=1.
      IF(KIN.EQ.3)  Переход к 17
      IF(X.EQ.0.)  Переход к 15
      R1=R(1)*(R(1)—2.*AMI*(X—XP)/(RHO(1)*U(1)))
      IF(R1.LT.0.)R1=0.
      R1=SQRT(R1))
      Возврат
   15 R1=50.
      Возврат
   17 R1=0.
      Возврат
      Окончание

      READY
      Подпрограмма READY

      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,
     1XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/B/BETA,CAMA(2),TAUI,TAUE,AJI(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
      CALL DENSTY
      CALL RAD(XU,R(1),CSALFA)
C     Y  Вблизи I-границы
      Переход к (71,72,73),KIN
   71 Y(2)=(1.+BETA)*OM(3)*4./((3.*RHO(2)+RHO(3))*(U(2)+U(3)))
      Переход к 74
   72 Y(2)=12.*OM(3)/((3.*RHO(2)+RHO(3))*(U(2)+U(3)+4.*U(1)))
      Переход к 74
   73 Y(2)=.5*OM(3)/(RHO(1)*U(1))
   74 Y(3)=Y(2)+.25*OM(3)*(1./(RHO(3)*U(3))+2./(RHO(3)*U(3)+
     1+RHO(2)*U(22)))
C     Y. Для промежуточных точек сетки
      DO 50 I=4,NP1
   50 Y(I)=Y(I—1)+.5*(OM(I)—OM(I—1))*(1./(RHO(I)*U(I))+
     11./(RHO(I—1)*U(I—1)))
C     Y Вблизи E-границы
      Y(NP2)=Y(NP1)+.25*(OM(NP2)—OM(NP1))*(1./(RHO(NP1)*
     1U(NP1))+2./(RHO(NP1)*U(NP1)+RHO(NP2)*U(NP2)))
      Переход к (81,82,83), KEX
   81 Y(NP3)=Y(NP2)+(1.+BETA)*(OM(NP2)—OM(NP1))*
     14./((RHO(NP1)+3.*RHO(NP2))*(U(NP1)+U(NP2)))
      Переход к 84
   82 Y(NP3)=Y(NP2)+12.*(OM(NP2)—OM(NP1))/((RHO(NP1)+
     13.*RHO(NP2))*(U(NP2)+U(NP1)+4.*U(NP3)))
      Переход к 84
   83 Y(NP3)=Y(NP2)+.5*(OM(NP2)—OM(NP1))/(RHO(NP3)*U(NP3))
   84 IF(CSALFA.EQ.0..OR.KRAD.EQ.0)  Переход к 51
      DO 52 I=2,NP3
   52 Y(I)=2.*Y(I)*PEI/(R(1)+SQRT(R(1)*R(I)+2.*Y(I)*
      PEI*CSALFA))
      Переход к 56
   51 DO 54 I=2,NP3
   54 Y(1)=PEI*Y(1)/R(1)
   56 Y(2)=2.*Y(2)—Y(3)
      Y(NP2)=2.*Y(NP2)—Y(NP1)
C     Вычисление радиусов
      DO 57 I=2,NP3
      IF(KRAD.EQ.0)R(I)=R(1)
      IF(KRAD.NE.0)R(I)=R(1)+Y(I)*CSALFA
   57 Продолжение
      Возврат
      Окончание

      SLIP
      Подпрограмма SLIP

      COMMON/GEN,PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,
     1AMU,XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
     1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
     1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
     1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJI(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
      COMMON /L/AK,ALMG
```

```
      1/C/SC(43),AU(43),BU(43),CU(43),A(2,43),B(2,43),C(2,43)
C     Коэффициенты скольжения вблизи I-границы для уравнения
      движения
      CU(2)=0.
      CU(NP2)=0.
      Переход к (71,72,73),KIN
   71 BU(2)=0.
      AU(2)=1./(1.+2.*BETA)
      Переход к 74
   72 SQ=84.*U(1)*U(1)-12.*U(1)*U(3)+9.*U(3)*U(3)
      BU(2)=8.*(2.*U(1)+U(3))/(2.*U(1)+7.*U(3)+SQRT(SQ))
      AU(2)=1.-BU(2)
      Переход к 74
   73 BU(2)=0.
      CALL VEFF(2,3,EMU)
      AK1=1./DX-DPDX/(RHO(1)*U(1)*U(1))
      AK2=-U(1)*AK1+DPDX/(RHO(1)*U(1))
      AJ=RHO(1)*U(1)*.25*(Y(2)+Y(3))**2/EMU
      IF(KRAD.EQ.0)  Переход к 75
      AU(2)=2./(2.+AJ*AK1)
      CU(2)=-.5*AJ*AK2*AU(2)
      Переход к 74
   75 CU(2)=1./12.+3.*AJ*AK1)
      AU(2)=CU(2)*(2.-AJ*AK1)
      CU(2)=-CU(2)*4.*AJ*AK2
C     Коэффициенты скольжения вблизи E-границы для уравнения движения
   74 Переход к (81,82,83) KEX
   81 AU(NPL)=0.
      BU(NP2)=1./(1.+2.*BETA)
      Переход к 84
   82 SQ=84.*U(NP3)*U(NP3)-12.*U(NP3)*U(NP1)+9.*
      U(NP1)*U(NP1)
      AU(NP2)=8.*(2.*U(NP3)+U(NP1))/(2.*U(NP3)+7.*U(NP1)+
     +SQRT(SQ))
      BU(NP2)=1.-AU(NP2)
      Переход к 84
   83 AU(NP2)=0.
      CALL VEFF(NP1,NP2,EMU)
      BK1=1./DX-DPDX/(RHO(NP3)*U(NP3)*U(NP3))
      BK2=-U(NP3)*BK1+DPDX/(RHO(NP3)*U(NP3))
      BJ=RHO(NP3)*U(NP3)*.25*(2.*Y(NP3)-Y(NP1)-Y(NP2))**2/EMU
      CU(NP2)=1./(2.+3.*BJ*BK1)
      BU(NP2)=CU(NP2)*(2.-BJ*BK1)
      CU(NP2)=-CU(NP2)*4.*BJ*BK2
   84 IF(NEQ.EQ.1)
      Возврат
C     Коэффициенты скольжения вблизи I-границы для других уравнений
      DO 54 J=1, NPH
      C(J,2)=0.
      C(J,NP2)=0.
      Переход к (41,42,43),KIN
   41 CALL FBC(XD,J,INDI(J),QI)
      IF(INDI(J).EQ.1)  Переход к 61
      AJI(J)=QI
      A(J,2)=1.
      B(J,2)=0.
      C(J,2)=8.*(1.+2.*BETA)*PREF(J)*AJI(J)/(AK*AK*BETA*(1.+BETA)*
     1(1.+BETA)*(3.*RHO(2)+RHO(3))*U(3))
      Переход к 44
   61 F(J,1)=QI
      A(J,2)=(1.+BETA-GAMA(J))/(1.+BETA+GAMA(J))
      B(J,2)=1.-A(J,2)
      Переход к 44
   42 A(J,2)=(U(2)+U(3)-8.*U(1))/(5.*(U(2)+U(3))+8.*U(1))
      GF=(1.-PREF(J))/(1.+PREF(J))
      A(J,2)=(A(J,2)+GF)/(1.+A(J,2)*GF
      B(J,2)=1.-A(J,2)
      Переход к 44
   43 B(J,2)=0.
      CALL SOURCE(J,1,CD,DS)
```

```
      AK1=1./DX—DS
      AK2=—AK1*F(J,1)—CS
      AJF=AJ*PREF(J)
      IF(KRAD.EQ.0)  Переход к 45
      A(J,2)=2./(2.+AJF*AK1)
      C(J,2)=—.5*AJF*AK2*A(J,2)
      Переход к 44
   45 C(J,2)=1./(2.+3.*AJF*AK1)
      A(J,2)=C(J,2)*(2.—2JF*AK1)
      C(J,2)=—C(J,2)*4.*AJF*AK2
C     Коэффициенты скольжения вблизи Е-границы для других уравнений
   44 Переход к (51,52,53),KEX
   51 CALL FBC(XD,J,INDE(J),QE)
      IF(INDE(J).EG.1)  Переход к 31
      AJE(J)=QE
      B(J,NP2)=1.
      A(J,NP2)=0.
      C(J,NP2)=—8.*(1.+2.*BETA)*PREF(J)*AJE(J)/(AK*AK*BETA*(1.+
      1BETA)*(1.+BETA)*(RHO(NP1)+3.*RHO(NP2))*U(NP1))
      Переход к 54
   31 F(J,NP3)=QE
      B(J,NP2)=(1.+BETA—GAMA(J))/(1.+BETA+GAMA(J))
      A(J,NP2)=1.—B(J,NP2)
      Переход к 54
   52 B(J,NP2)=(U(NP2)+U(NP1)—8.*U(NP3))/(5.*(U(NP2)+U(NP1))+8.*
      U(NP3))
      GF=(1.—PREF(J))/(1.+PREF(J))
      B(J,NP2)=(B(J,NP2)+GF)/(1.+B(J,NP2)*GF)
      A(J,NP2)=1.—B(J,NP2)
      Переход к 54
   53 A(J,NP2)=0.
      CALL SOURCE(J,NP3,CS,DS)
      BK1=1./DX—DS
      BK2=—BK1*F(J,NP3)—CS
      BJF=BJ*PREF(J)
      C(J,NP2)=1./(2.+3.*BJF*BK1)
      B(J,NP2)=C(J,NP2)*(2.—BJF*BK1)
      C(J,NP2)=—C(J,NP2)*4.*BJF*BK2
   54 Продолжение
      Возврат
      Окончание

      SOLVE
      Подпрограмма SOLVE(A.B,C,F,NP3)
C     Решаются уравнения вида
C     F(I)=A(I)*F(I+1)+B(I)*F(I—1)+C(I)
C     Для I=2, NP2
      Размерность A(NP3),B(NP3),C(NP3),F(NP3)
      NP2=NP3—1
      B(2)=B(2)*F(1)+C(2)
      DO 48 I=3,NP2
      T=1./(1.—B(I)*A(I—1))
      A(I)=A(I)*T
   48 B(I)=(B(I)*B(I—1)+C(I))*T
      DO 50 I=2,NP2
      J=NP2—I+2
   50 F(J)=A(J)*F(J+1)+B(J)
      Возврат
      Окончание

      SOURCE (Пример 1)
C     Для сохранения массы химически инертного вещества
      Подпрограмма SOURCE(J,I,CS,DS)

      CS=0.
      DS=0.
      Возврат
      Окончание

      SOURCE (Пример 2)
C     Для сохранения энтальпии торможения
C     Предостережение — следует использовать согласованные между собой единицы
      Подпрограмма SOURCE(J),I,CS,DS)
```

```
      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,
     1AMU,XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
      1/V/J(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
      I/C/SC(43),AU(43),BU(43),CU(43),A(2,43),B(2,43),C(2,43)
      CS=SC(I)*(U(I+1)*U(I+1)—U(I)*U(I))/(OM(I+1)—OM(I))
      CS=CS—SO(I—1)*(U(I)*U(I)—U(I—1)*U(I—1))/(OM(I)—OM(I—1))
      SC=(1.—1./PREF(J))*CS/(OM(I+1)—OM(I—1))
      DS=0.
      Возврат
      Окончание

      VEFF
      Подпрограмма VEFF(I,IP1,EMU)

      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,
     1AMU,XU,XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
      1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
      1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
      COMMON /L/AK,ALMG
      1/LI/YL,UMAX,UMIN,FR,YIP,YEM
C     Эта подпрограмма использует гипотезу пути смешения
      AL=ALMG*YL
      IF(KASE.EQ.2)  Переход к 66
      IF(KIN,EQ.1)YM=(Y(I)+(IP1))*.5
      IF(KEX.EQ.1)YM=Y(NP3)—.5*(Y(I)+Y(IP1))
      IF(YM.LT.AL/AK)AL=AK*YM
66    EMU=.5*(RHO(I)+RHO(IP1))*AL*AL*ABS((U(I)—U(IP1))/(Y(I)—Y(IP1)))
      Возврат
      Окончание

      VISCO
      Функция VISCO(I)

      COMMON/GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,XU,XD,
     1XP,XL,DX,INTG,CSALFA
      1/V/U(43),F(2,43)R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
      1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
      VISCO=AMU*(F(1,I)/F(1,NP3))**.76
      Возврат

      Окончание

      WALL
      Подпрограмма WALL

      COMMON /GEN/PEI,AMI,AME,DPDX,PREF(2),PR(2),P(2),DEN,AMU,XU,
     1XD,XP,XL,DX,INTG,CSALFA
      1/V/U(43),F(2,43),R(43),RHO(43),OM(43),Y(43)
      1/I/N,NP1,NP2,NP3,NEQ,NPH,KEX,KIN,KASE,KRAD
      1/B/BETA,GAMA(2),TAUI,TAUE,AJI(2),AJE(2),INDI(2),INDE(2)
      COMMON L/AK,ALMG
C     Вычисление β для E-границы
      IF(KEX.NE.1)  Переход к 15
      YI=Y(NP3)—.5*(Y(NP1)+Y(NP2)
      UI=.5*(U(NP2)+U(NP1))
      PH=.25*(3.*RHO(NP2)+RHO(NP1))
      RE=RH*UI*YI/VISCO(NP3)
      FP=DPDX*YI(RH*UI*UI)
      AM=—AME/(RH*UI)
      CALL WF1(RE,FR,AM,S)
      BETA=SQRT(ABS(S+FP+AM))/AK
      TAUE=S*RH*UI*UI
      IF(NEQ.EQ.I)  Переход к 36
C     Вычисление величин γ для E-границы
      DO 35 J=1,NPH
      CALL WF2(RE,FP,AM,PR(J),PREF(J),P(J),SF)
      GAMA(J)=(SF+AM)*PREF(J)/(AK*AK*BETA)
      IF(INDE(J).EQ.1)AJE(J)=SF*RH*UI*(F(J,NP2)+F(J,NP1)—2.*
      F(J,NP3))*.5
35    Продолжение
36    IF(KIN.NE.1)
      Возврат
C     Вычисление β для I-границы
15YI=.5*(Y(2)+Y(3))
      UI=.5*(U(2)+U(3))
```

```
      RH=.25*(3.*RHO(2)+RHO(3))
      RE=RH*UI*YI/VISCO(1)
      FP=DPD*YI/(RH*UI*UI)
      AM=AMI/(RH*UI)
      CALL WF 1(RE,FP,AM,S)
      BETA=SQRT(ABS(S+FP+AM))/AK
      TAUI=S*RH*UI*UI
      IF(NEQ.EQ.1)
      Возврат
C     Вычисление величин β для I-границы
      DO 38 J=1,NP2
      CALL WF2(RE,FP,AM,PR,J),PREF(J),P(J),SF)
      GAMA(J)=(SF+AM)*PREF(J)/(AK*AK*BETA)
      IF(INDI(J).EQ.1)AJI(J)=SF*RH*UI*(2.*F(J,1)—F(J,2)—F(J,3))*.5
   38 Продолжение
      Возврат
      Окончание

      WF1
      Подпрограмма WF1(R,F,AM,S)

      COMMON /L/AK,ALMG
     1/WL/SYO,AKS,RT,FT,AMT
      AKS=AK*AK
      RT=R*AKS
      ST=1./RT—.1561*RT**(—.45)+.08723*RT**(—.3)+
     +.03713*RT**(—.18)
      STO=ST
      IF(F.EQ.0.)  Переход к 15
      FT=F/AKS
      FM=1.—4*FT*RT/(583.+RT**2.5)**.4
      IF(FM.LT.0)FM=0.
      ST=ST FM**1.6
      Переход к 16
   15 IF(AM.EQ.0.)  Переход к 16
      AMT=AM/AKS
      AMM=1.—AMT/(7.74*RT**(—1.17)+ .956**RT**(—.25))
      ST=ST*AMM**4
   16 S=ST*AKS
      Возврат
      Окончание

      WF2
      Подпрограмма WF2(R,F,AM,PR,PRT,P,S)

      COMMON /L/AK,ALMG
     1/WL/STO,AKS,RT,FT,AMT
      ST1=STO/(1.+P*SQRT(SAO))
      IF(F.EQ.0)  Переход к 15
      SSEP=1.725*RT**(—.3333)*(P+
     +6.8)**(—1.165)
      FD=.25*FT*RT/(1.+.0625*RT)
      ST1=ST1*(1.—FD)+FD*SSEP
   15 ST=ST1/PRT
      S=ST*AKS
      Возврат
      Окончание
```

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

ПII-1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ОПЫТОВ И ЦЕЛЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

На недостаток экспериментальных данных, пригодных для проверки справедливости соотношений для потоков стенки, указывалось в гл. 4. Основной целью выполненной нами экспериментальной работы является устранение в некоторой степени этого недостатка. В результате измерены диффузионные потоки на стенке, а также профили скорости и концентрации при конечной интенсивности массопереноса через стенку.

Исследовалась радиальная пристеночная струя. Схема опыта, приведенная на рис. ПII-1, аналогична использованной Бейкером [Л. 5]. На эту работу Бейкера, где содержится подробное описание экспериментального стенда, мы будем в дальнейшем ссылаться неоднократно. Течение в радиальной пристенной струе действительно двумерно и характеризуется нулевым продольным градиентом давления.

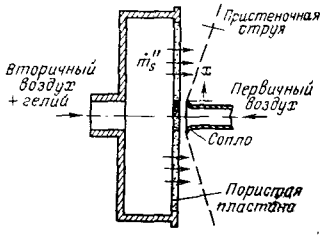


Рис. ПII-1.1. Схема опытной установки.

В данном случае радиальная пристенная струя формируется на пористой плоской поверхности, через которую возможен массоперенос с конечной скоростью. В наших опытах к вторичному воздуха, проходившему через пористую пластину, подмешивался газ-индикатор гелий. Поверхность пористой пластины была гидродинамически гладкой, и свойства движущейся среды оставались почти однородными.

ПII-2. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И АППАРАТУРЫ

ПII-2-1. Пористая пластина

Пористый материал пластины должен обладать однородной проницаемостью и достаточной прочностью во избежание выпучивания под действием перепада давления. Шероховатость может затенять эффект массопереноса.

В работе Бейкера [Л. 5] содержатся подробные сведения о различных пористых материалах, известных в настоящее время. В данном экспериментальном исследовании пористым материалом служил поросинт, получаемый спеканием бронзовых шариков. Образец пластины *Б* изготовлен из шарика с номинальным диаметром 0,076 *мм*. Бейкер проверил равномерность фильтрации через поросинтовую пластину, используя метод пузырей. Пористая структура материала оказалась вполне однородной.

Пластина размерами 610×711 *мм* была составлена из четырех поросинтовых секций размерами 305×355,6 *мм*, припаянных по боковым кромкам друг к другу. Участку обтекаемой поверхности пластины, расположенному напротив сопла, придавалась непроницаемость с помощью эпоксидной смолы. Вследствие этого поток первичного воздуха не мог проходить через пластину в месте соударения струи со стенкой. Была устроена отдельная массообменная камера для одной из поросинтовых секций, на которой проводились измерения. Таким образом стали возможны отдельные измерения массового потока воздуха, поступающего в эту камеру. Сама камера помещалась внутри другой камеры больших размеров, из которой воздух поступал в три другие секции. Такое устройство позволило производить точные измерения скорости массопереноса через контрольную секцию независимо от небольших индивидуальных различий в проницаемости четырех поросинтовых пластин. Гелий добавлялся в качестве индикаторного газа только в малую массообменную камеру. Такая методика позволяет уменьшить расход гелия в 4 раза; при этом отклонение от двумерности течения было небольшим.

ПII-2-2. Измерение скорости

В данном исследовании можно было обойтись без измерения профилей скорости, поскольку Бейкер [Л. 5] выполнил такие довольно обширные измерения на аналогичной установке. Тем не менее желательно провести эти измерения в случае высоты щели и скорости истечения из нее, отличных от имевших место в опытах Бейкера.

Измерение скорости у самой стенки оказалось невозможным, поскольку, как было сообщено Бейкером, эффекты турбулентных флуктуаций и влияние вязкости, обусловленные присутствием в этой области датчика и забиванием его приемного отверстия, ограничивают наименьшие размеры применяемой плоской микротрубки: для скоростей, больших 5 *м/сек*, минимальная высота ее приемного отверстия составляет 0,584 *мм*. Для измерения профиля скорости использовалась гребенка из пяти микротрубок полно-

го напора. У ближерасположенной к стенке микротрубки высота плоского носика была 0,584 *мм*, за ней расположена круглая микротрубка с диаметром приемного отверстия 0,762 *мм*, остальные три круглых насадка имели диаметр приемного отверстия, равный 1,27 *мм*. Расстояние между соседними микротрубками составляло приблизительно 5 *мм*. Гребенка микротрубок перемещалась в потоке с помощью специального устройства с микрометром, позволяющим определять ее пространственное положение. Момент касания микротрубки со стенкой фиксируется обычным электрическим контактом. Полный напор каждого насадка гребенки измерялся батарейным манометром, заполненным парафином. При измерениях профиля скорости в щели применялся вертикальный U-образный манометр.

ПП-2-3. Измерение концентрации

В опытах производились измерения концентраций двоякого рода: определялись содержание гелия в массообменной камере и профиль концентрации в пристенной струе. Для этих целей использовался метод отбора пробы гелиевоздушной смеси в соответствующей точке с последующим анализом на газовом хроматографе. Метод отбора проб, таким образом, является важной составной частью методики опытов. Ниже мы познакомимся с деталями этого метода более обстоятельно.

Анализ отобранной пробы. Производился газовым хроматографом марки Шандон KG-2 с двухметровой разделительной колонной с насадком из молекулярных сит Линде для сепарации газов, проходящих через теплопроводящую ячейку. Подключенный к ней самописец вычерчивает кривые, на которых имеются пики. Высота пиков соответствует содержанию данной компоненты в смеси. В качестве газа-носителя использовался азот, поэтому два значительных пика на хроматографической кривой принадлежали гелию и кислороду. Температура колонны поддерживалась на уровне примерно 60° С. Анализ отобранной порции смеси объемом 1 *мл* никогда не отнимал больше 3 *мин*. Она подавалась в хроматограф под давлением с помощью газового шприца емкостью 1 *мл*. Высота пика гелия при неизменном объеме пробы характеризует концентрацию гелия. Все же, чтобы исключить возможное непостоянство объема отобранной пробы, за меру концентрации принимается отношение высоты пиков гелия и кислорода. Для пропорциональности этого отношения массовой концентрации (доле) гелия необходима строгая линейность калибровочной кривой газового хроматографа.

Кривая, как это показано в работе [Л. 132], действительно линейна. Отклонения от линейной зависимости имеют место при отношениях высоты пиков кислорода, меньших 0,3.

В наших опытах во всех случаях концентрации не выходили из пределов линейной зависимости.

Метод отбора проб. Как оказалось, правильный отбор проб из массообменной камеры не составляет каких-либо затруднений. Однородность концентрационного поля во всем объеме камеры подтвердилась отборами и анализом проб из различных точек ее пространства. Влияние интенсивности засасывания контрольного объема смеси на точность измерений поэтому было незначительным.

Измерение профилей концентрации связано с большими трудностями. Решающая роль принадлежит измерениям концентрации у стенки, поскольку знание этой величины позволяет определить диффузионную составляющую полного потока массы у обтекаемой поверхности. Использование заборных трубок, вмонтированных в пористую пластину открытым концом заподлицо с ее наружной поверхностью, нежелательно. Кроме чисто конструктивных трудностей, основное возражение состоит в том, что на величине измеренной таким способом концентрации будут сильно сказываться присутствие заборной трубки и скорость всасывания пробы в направлении, противоположном массопереносу через стенку (вдув).

Другой подход состоит в замере концентрации в пристеночной области с последующей экстраполяцией полученного профиля на стенку. Для этой цели в принципе пригодны трубки Пито, аналогичные применяемым для измерений скорости. Пробы могут быть отобраны в сосуды с помощью вакуумного насоса, как это сделали в своих опытах Николл и Уайтло [Л. 70] при измерениях концентраций внутри проницаемой стенки. Скорость всасывания должна быть при этом настолько незначительной, чтобы не нарушалась структура потока в области малых скоростей вблизи стенки.

Это требование усиливается при использовании микротрубок малых размеров для измерения в непосредственной близости стенки. В этом случае микротрубка не только находится в области весьма малых скоростей, но и создает также более сильные возмущения скорости при той же объемной скорости всасывания.

Простой расчет показывает, что время заполнения соединительных трубок пробоотборного сосуда и последующего накопления пробы при весьма малой скорости всасывания оказывается недопустимо большим. Кроме того, возникают трудности в поддержании постоянства объемного расхода в течение столь большого периода времени.

Поэтому было решено отбирать нужный объем 1 *мл* смеси непосредственно через микротрубку, освободившись от пробоотборного сосуда и соединительных трубок. Тогда пробоотборником служит короткая микротрубка из пержавеющей стали, закрытая с одного конца толстой резиновой диафрагмой. Другой, открытый конец трубки помещается в пристенную струю навстречу потоку. Эту заборную трубку можно закрепить

на том же координатнике, что и микротрубку для измерения скорости. Смесь засасывалась с помощью газоуплотненного шприца после прокалывания его иглой резиновой диафрагмы. При этом время заполнения системы определялось лишь емкостью короткого отрезка заборной трубки, объем которого много меньше емкости шприца.

Для фиксации заборной трубки и рук экспериментатора применялись специальные подставки и упоры, исключающие смещения заборной трубки в процессе измерений.

Влияние скорости засасывания пробы. Таким образом, описанное выше устройство позволило практически реализовать допустимые скорости всасывания, отвечающие требованиям опытов. Тем не менее это не устраняет необходимости в установлении оптимальной величины допустимой скорости всасывания. Интенсивность всасывания можно изменять регулировкой скорости перемещения плунжера в шприце. Нужны определенные практические навыки для равномерного передвижения плунжера. Этот навык тем не менее приобрести не столь уж трудно. Влияние интенсивности всасывания исследовалось путем отбора проб (при различных скоростях движения плунжера) и хроматографического анализа. Время прохождения плунжером длины шприца принималось за меру скорости перемещения плунжера. Рисунок ПП2-1 иллюстрирует влияние скорости засасывания пробы на измеренную концентрацию для трех заборных трубок с различными размерами приемных отверстий. По оси ординат отложены отношения высот хроматографических пиков гелия и кислорода, а на оси абсцисс — время наполнения шприца емкостью 1 *мл*. Видно, что с уменьшением скорости всасывания (возрастанием времени заполнения шприца) измерение концентрации гелия сначала увеличивается и в дальнейшем остаются неизменными при всех малых скоростях всасывания. Для заборных трубок самых малых размеров этот эффект по вполне понятным причинам выражен более отчетливо. Для двух заборных трубок большего размера скорость всасывания не влияет на измерения концентрации до тех пор, пока время заполнения шприца не превышает 5 *сек*. В данном случае 5—10 *сек* — наиболее удобная и приемлемая с физической точки зрения продолжительность всасывания пробы. На рис. ПП2-1 представлены результаты одного типичного опыта. Такие же измерения были проведены в нескольких сечениях вдоль пластины при различных интенсивностях массопереноса. Все они подтверждают справедливость приведенного выше утверждения. Воспроизводимость результатов также была удовлетворительной (расхождения меньше 2%).

Влияние размера трубки. Для выявления влияния размеров насадка были изготовлены три геометрически подобные плоские заборные трубки. Высота устья прямоугольного приемного отверстия составляла для каждой из них соответственно 0,1; 0,075 и 0,05 *мм*. Измерения концентраций проводились в идентичных условиях при касании трубки со стенкой. Результаты приведены на рис. ПП2-1.

Заслуживает быть отмеченной близость асимптотических значений измеренных концентраций для всех трех зондов. Фактически различия между ними меньше погрешности хроматографа. Сходные результаты дали измерения концентраций в нескольких сечениях пластины при различных интенсивностях поперечного потока выдуваемой мас-

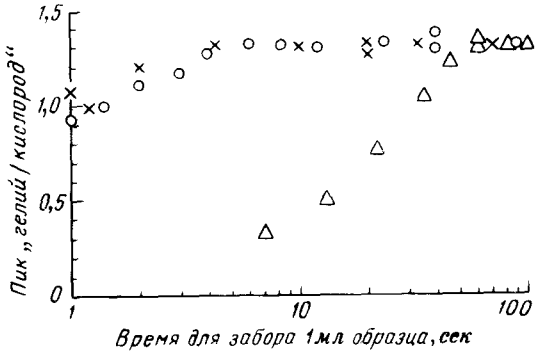


Рис. ПП-2.1. Влияние скорости забора порции и размеров приемного отверстия насадка на измеренные концентрации.

Высота устья зонда в дюймах; × — 0,004; ● — 0,003; △ — 0,002.

сы. На этом основании был сделан тот вывод, что содержание гелия, полученное с помощью пробоотборной трубки, касающейся стенки, может быть принято за величину концентрации на стенке.

Во всех последующих измерениях (как на стенке, так и в пограничном слое) использовался зонд-пробоотборник с высотой приемного отверстия 0,075 *мм*.

ПII-2-4. Измерение расхода

Суммарный расход вторичного воздуха и его секундное количество, подводимое отдельно в индивидуальную массообменную камеру, сообщающуюся с исследуемой пористой пластиной, измерялись диафрагмами, изготовленными в соответствии с техническими требованиями Британских стандартных условий [Л. 11]. Не было необходимости в специальных измерениях расхода гелия, поскольку его нетрудно вычислить по измерениям концентрации гелия в массообменной камере и расходу воздуха. Все же для контрольных измерений расхода гелия применялся ротаметр, с помощью которого затем обеспечивалось поддержание постоянства расхода в процессе отбора проб.

ПII-3. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ОПЫТОВ

До начала опытов пластина выставлялась таким образом, чтобы поток был строго осесимметричным. Эксперимент начинался с измерения профилей скорости на выходе из щели и в сечении струи, удаленном от нее на расстояние 178 *мм*. Затем в тех же сечениях определялись профили концентрации. Подача гелия не была непрерывной. После его пуска и выравнивания до постоянной величины отбиралась первая порция смеси, затем зонд немедленно вводился в поток для забора свежей пробы. С этого момента подача гелия прекращалась, проба водилась в хроматограф, зонд перемещался в другую точку, и лишь после этого вновь возобновлялась и регулировалась подача гелия.

Концентрация смеси в массообменной камере, сообщающейся с исследуемой пластиной, измерялась четырехкратно за время измерения профиля концентрации.

Расход гелия выбирался из расчета получения 1%-объемной концентрации на стенке. На удалениях от стенки, превышающих 12 *мм*, измерения концентрации не производились потому, что нас интересует информация только из пристеночной области. Кроме того, весьма малые концентрации в области течения, удаленной от стенки, не могут быть измерены хроматографом достаточно точно. Они выпадают из диапазона линейной характеристики прибора.

Профили скорости и концентрации измерялись в шести сечениях, удаленных на 178, 203, 254, 229, 279 и 305 *мм* от щели, при определенной интенсивности массопереноса через стенку (расстояние от щели до оси симметрии составляло 76 *мм*). Затем устанавливалась и поддерживалась на заданном уровне новая величина скорости массопереноса через проницаемую стенку, и все измерения повторялись заново. Эта величина варьировалась ступенями и составляла в опытах 3; 6; 12; 2; 25,4 *см/сек*.

ПII-4. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПЫТОВ

Измеренные в опытах профили скорости и концентрации содержатся в работе [Л. 77] (таблицы II.4-1 и II.4-2 соответственно). Степень согласования между собой этих измерений может быть установлена интегрированием профилей концентраций поперек струи и сравнением полученной величины с расходом гелия через пористую стенку. Такая проверка показала, что расход гелия, вычисленный интегрированием профилей, на 50—100% превышал расход гелия через стенку.

Такой массовый баланс, однако, не может быть точно составлен в данном случае, поскольку небольшие пространственные изменения пористости стенки, отклонения от двумерного течения и местные неоднородности гелиевоздушной смеси, несомненно создают погрешности.

С другой стороны, невязка баланса массы может указывать на неточности измерения концентрации. Измерения профиля концентрации и объемного расхода гелия через стенку зависят от способа отбора пробы и ее анализа. Поэтому невозможно с уверенностью установить, завышены они или занижены.

Одной из причин погрешностей измерения концентрации может быть внутренняя геометрия зонда. Альпиниери [Л. 2] считает, что за этот счет возможны значительные изменения величины измеряемой концентрации. В основе его, по-видимому, лежит явление, известное под названием «предпочтительного отбора», когда более легкие молекулы гелия попадают внутрь зонда быстрее тяжелых молекул воздуха. Этот процесс ускоряется при определенной геометрии зонда.

Вопрос о влиянии геометрии зонда на измерение концентрации в пограничном слое заслуживает дальнейшего изучения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамзон Л. С., Сковородников Ю. А., Распространение веерной турбулентной струи вдоль твердой стенки, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3, стр. 176—177.

2. Абрамович Г. Н., О развитии турбулентных струй с несимметричным профилем скорости, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 24, Оборонгиз, 1962.

3. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, Физматгиз, 1960.

4. Абрамович Г. Н., Турбулентные струи в потоке жидкости, совещание по прикладной газовой динамике, изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1959.

5. Абрамович Г. Н., Турбулентная струя в движущейся среде, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 12.

6. Абрамович Г. Н., О толщине зоны турбулентного смещения на границе двух струй разной скорости, температуры и молекулярного веса, Изв. АН СССР, ОТН, 1967, № 3.

7. Абрамович Г. Н., О турбулентном смешении на границе двух плоских параллельных потоков жидкости (при спутном и встречном движении), Сб. статей № 19 по теоретической гидромеханике под ред. Л. И. Седова, Оборонгиз, 1956.

8. Абрамович Г. Н., Турбулентные свободные струи жидкостей и газов, Труды ЦАГИ, № 512, 1940.

9. Абрамович Г. Н., К теории свободной струи сжимаемого газа, Труды ЦАГИ, № 377, 1939.

10. Абрамович Г. Н., Теория свободной струи и ее приложение, Труды ЦАГИ, № 293, 1936.

11. Абрамович Г. Н., О смешении турбулентных струй разной плотности, Изв. АН СССР, ИТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3, стр. 55—57.

12. Авдуевский В. С., Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2, стр. 11—16.

13. Авдуевский В. С., Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4, стр. 3—12.

14. Авдуевский В. С., Крюков В. Н., Солнцев В. П., Экспериментальное исследование структуры пограничного слоя и теплообмена на шероховатой поверхности, сб. «Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа», М., 1965, стр. 55—90.

15. Авдуевский В. С., Калашник В. Н., Проблемы расчета трения и теплообмена в турбулентном пограничном слое, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и транспорт, 1967, № 5, стр. 9—24.

16. Азисов А., Зысина-Моложен Л. М., Кузнецова В. М., Соскова И. Н., ИФЖ, 1969, т. 16, № 2, стр. 218—224.

17. Акатнов Н. И., Распространение плоской турбулентной струи вдоль твердой, гладкой и шероховатой поверхностей, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1, стр. 27—32.

18. Акатнов Н. И., Распространение свободной турбулентной струи по внешней поверхности круглого цилиндра вдоль его образующей, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина (Энергомашиностроение), № 217, 1961.

19. Акатнов Н. И., Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина (Техническая гидромеханика), № 5, 1953.

20. Акатнов Н. И., О распространении плоской турбулентной струи вдоль твердой стенки, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина (Техническая гидромеханика), № 198, 1958.

21. Акатнов Н. И., Распространение системы плоских турбулентных струй, Труды ЛПИ, № 248, 1965, стр. 104—109.

22. Альбицкий А. А., Распространение кольцевой струи, сб. «Конвективный теплообмен», изд-во «Наукова думка», 1968, стр. 197—204.

23. Алиев Ф., Применение обобщенных переменных Мизеса к задаче о распространении плоских тепловых струй в несжимаемой жидкости, Труды ЛПИ, № 248, 1965, стр. 110—112.

---

[1] Список дополнительной литературы составлен З. П. Шульманом.

24. Андреевский А., Федорович Е. Д., К вопросу о теплообмене пластины и лобовой части цилиндра, обтекаемых каминарным пограничным слоем несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Прандтля, ИФЖ, т. 5, 1962, № 1, стр. 85—87.

25. Антонова Г. С., Исследование характеристик турбулентности свободной неизотермической струи и открытого факела, Труды совещания по прикладной газовой динамике, изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1959.

26. Арие М. Я., Турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости на плоской пластине со вдувом, «Самолетостроение и техника воздушного флота», Республиканский межведомственный научно-техн. сб., 1968, вып. 15, стр. 9—13.

27. Арие М. Я., Турбулентный пограничный слой на проницаемой поверхности, сб. «Гидромеханика», вып. 15, изд-во «Наукова думка», 1969, стр. 55—59.

28. Артюх А. Ю., Кашкаров В. П., Распространение ламинарной струи сжимаемого газа вдоль поверхности конуса, Труды Казах. университета, 1960, вып. 2, стр. 41—54.

29. Арутюнов В. А., Расчет процессов смешения в коаксиальных турбулентных струях, Известия вузов, Черная металлургия, 1963, № 9, стр. 194—201.

30. Асатурян А. Ш., Тонкошкуров Б. А., Черникин В. И., О взаимодействии теплового и гидродинамического полей в потоке с переменной вязкостью в пограничном слое, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, 1963, стр. 237—246.

31. Бай Ши-и, Теория струй (перевод с англ.), Физматгиз, 1960.

32. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 344.

33. Бакулев В. И., Расчет турбулентной затопленной струи реального газа, ИФЖ, 1961, т. 1, вып. 3, стр. 65—74.

34. Бакулев В. И., Расчет основного участка осесимметричной турбулентной струи реального газа, ИФЖ, 1964, т. 7, № 10, стр. 14—20.

35. Бакулев В. И., Расчет турбулентных струй реального газа, сб. «Исследование турбулентных струй воздуха, плазмы и реального газа», изд-во «Машиностроение», 1967, стр. 52—116.

36. Басин А. М., Гурбанов Г. Г., Расчет двухфазного ламинарного пограничного слоя при степенном законе распространения скорости на внешней границе, Труды Ленинградского института водного транспорта, 1968, вып. 98, стр. 3—14.

37. Башмаков И. В., Турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине с интенсивным вдувом. Тезисы докладов научно-технической конференции инженерного факультета Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, М., 1969, стр. 77—78.

38. Бекряев Б. И., Дыдина Г. П., Исследование турбулентных струй в сносящем потоке, Труды Ленинградского гидрометеорологического института, 1966, вып. 21, стр. 15—35.

39. Беленький С. З., Фрадкин Е. С., Теория турбулентного перемешивания, Труды Физического института им. Лебедева, 1965, т. 29, стр. 207—238.

40. Богданова В. В., Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1968, № 6, стр. 34—42.

41. Бородачев В. Я., К исследованию турбулентной струи, вытекающей в равномерный плоский поток жидкости с той же плотностью, 1945.

42. Боришанский В. М., Федорович Е. Д., Расчет теплообмена в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Прандтля, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, 1963, стр. 431—435.

43. Браиловская И. Ю., Чудов А. А., Решение уравнений пограничного слоя разностным методом, Сб. работ Вычислительного центра Московского университета, т. 1, стр. 167—182.

44. Брдлик П. М., Савин В. К., Переход пограничного слоя в турбулентный при осесимметричном струйном обтекании плоских поверхностей, расположенных нормально к потоку, ИФЖ, 1966, т. № 4, стр. 432—437.

45. Брдлик П. М., Савин В. К., Теплообмен в окрестности критической точки при осесимметричном струйном обтекании плоских поверхностей, расположенных нормально к потоку, ИФЖ, 1966, т. 10, № 4, стр. 423—428.

46. Брдлик П. М., Савин В. К., Теплообмен между осесимметричной струей и пластиной, расположенной нормально к потоку, ИФЖ, 1965, т. 8, № 2, стр. 146—155.

47. Брдлик П. М., Веревочкин Г. Е., Смирнов В. А., Теплообмен между струей и пластиной, расположенной нормально к потоку, Доклад I Межвузовской конференции по теории подобия и ее применению в теплотехнике, Труды Московского института инженеров железнодорожного транспорта, вып. 139, 1961, стр. 182—192.

48. Бровман М. Я., Сурин Е. В., Приближенное решение уравнений параболического типа применительно к задачам теплопроводности, ИФЖ, 1961, т. 4, № 12, стр. 75—82.

49. Ван-Дрист Е., Турбулентный пограничный слой в сжимаемых жидкостях (перев. с англ.), Сб. переводов, «Механика», 1952, № 11.

50. Варжанская Т. С., Обровская Е. И., Старова Е. Н., Пограничный слой в окрестности критической точки, Сб. работ вычислительного центра МГУ, 1963, т. 2, стр. 135—145.

51. Бойчак В. П., Ершин Е. А., Сарсенбаев Ж., Исследование турбулентных струй сжимаемого газа, сб. «Вопросы общей и прикладной физики», Алма-Ата, изд-во «Наука», 1969, стр. 112—115.

52. Волчков Э. П., Левченко В. Я., Тепловой турбулентный пограничный слой на плоской пластине с теплоизолированным участком, ИФЖ, 1965, т. 8, № 6 стр. 703—706.

53. Волчков Э. П., Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Взаимодействие затопленной турбулентной струи с твердой стенкой, Журнал прикладной механики и технической физики, 1965, № 2, стр. 50—53.

54. Вулис Л. А., Кашкаров В. П., Теория струй вязкой жидкости, изд-во «Наука», 1965, стр. 431.

55. Вулис Л. А., Сакипов З. Б., Трофименко А. Т., О переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный при струйном обтекании пластины, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3, стр. 53—60.

56. Вулис Л. А., Сендерехина И. Л., О расчете турбулентного трения и теплоотдачи в струях с помощью эквивалентной задачи теории теплопроводности Изв АН Каз. ССР, Энергетика, 1962, вып. 2, стр. 75—82.

57. Вулис Л. А., Леонтьев Т. П., Палатник И. Б., Процессы переноса в свободном (струйном) турбулентном пограничном слое, сб. «Тепло- и массоперенос» т. 3, 1963, стр. 340—348.

58. Вулис Л. А., Михасенко Ю. И., Хитриков В. Л., Об эффективном управлении свободной турбулентной струи, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 6, стр. 173—178.

59. Вулис Л. А., Карелин В. Е., Устименко Б. П., Распространение турбулентной газовой струи в спутном потоке, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 3, стр. 120—128.

60. Вулис Л. А., О турбулентных газовых струях, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1956, вып. 6.

61. Вулис Л. А., К расчету свободных турбулентных струй сжимаемого газа, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1956, вып. 10.

62. Вулис Л. А., Исатаев С. И., Турбулентное движение несжимаемой жидкости в следе за плохообтекаемым телом. В кн.: «Исследование физических основ рабочего процесса топок и печей», изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1957.

63. Вулис Л. А., К расчету свободных турбулентных течений с помощью эквивалентной задачи теплопроводности, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1960, вып. 2.

64. Вулис Л. А., Палатник И. Б., О механизме турбулентного перемешивания в газовых потоках, ИФЖ, 1961, т. 4, № 9.

65. Вулис Л. А., Исаев С. И., Кашкаров В. П., Трофименко А. Т., Распространение струй вязкой жидкости вдоль тел, Сб. трудов Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (аннотации докладов), изд. АН БССР, 1960.

66. Галюн И. И., Иванов Ю. А., Интенсивность турбулентности в ядре затопленной струи и за решетками, ИФЖ, 1969, т. 16, № 5, стр. 905—908.

67. Герман М. Л., Тараканов В. П., Результаты сравнения характеристик установившейся турбулентности в струйных течениях, рассчитанных различными методами, Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 187, 1966, стр. 221—231.

68. Гиневский А. С., Турбулентный след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.

69. Гиневский А. С., Интегральные методы решения задач свободной турбулентности, сб. «Промышленная аэродинамика», № 15, Оборонгиз, 1959.

70. Гиневский А. С., Тепло- и массоперенос в неизотермической турбулентной струе газа переменного состава в спутном потоке, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 377—391.

71. Гиневский А. С., Турбулентные неизотермические струи сжимаемого газа переменного состава, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 27, 1966, стр. 31—54.

72. Гиневский А. С., Расчет поперечных скоростей в начальном и основном участках турбулентных струй в спутном потоке, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 27, 1966, стр. 55—70.

73. Гиневский А. С., Илизарова Л. И., Шубин Б. М., Исследование микроструктуры турбулентных струй в спутном потоке, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 4, стр. 81—88.

74. Гиневский А. С., Почкина К. А., Уханова А. Н., Закономерности распространения турбулентного струйного течения с нулевым избыточным импульсом. Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 6, стр. 164—166.

75. Гиневский А. С., Теория турбулентных струй и следов, интегральные методы расчета, изд-во «Машиностроение», 1969.

76. Гиневский А. С., Солодкин Е. Е., Влияние поперечной кривизны поверхности на характеристики неизотермического осесимметричного турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 1, стр. 99—110.

77. Гиневский А. С., Турбулентные неизотермические струйные течения сжимаемого газа, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 23, Оборонгиз, 1962.

78. Гиневский А. С., Радиально-щелевая струя, истекающая из кольцевого источника конечного диаметра, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 23, Оборонгиз, 1962.

79. Гиневский А. С., Расчет переходного участка турбулентной струи, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 3, стр. 59—67.

80. Гиневский А. С., Приближенные уравнения движения в задачах теории турбулентных струй, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1965, № 5, стр. 134—140.

81. Гинзбург И. П., Кочеры женков Г. В., О решении задачи турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 76—86.

82. Гинзбург И. П., Кочеры женков Г. В., Турбулентный пограничный слой на проницаемой криволинейной поверхности, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 328—350.

83. Гинзбург И. П., Кочеры женков Г. В., Турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине, Вестник Ленинградского университета, № 13, Математика, механика и астрономия, 1964, № 13, стр. 89—102.

84. Гинзбург И. П., О связи между теплосодержанием и скоростью при движении газа в пограничном слое, ИФЖ, 1964, т. 7, № 8, стр. 64—74.

85. Гинзбург И. П., Корнева И. В., О влиянии турбулентного числа на трение и теплоотдачу пластины, обтекаемой турбулентным потоком газа, ИФЖ, 1965, т. 9, № 2, стр. 155—162.

86. Гинзбург И. П., Кочеры женков Г. В., Турбулентный пограничный слой теплоизолированного крыла или тела осевой симметрии, Вестник Ленинградского университета, № 19, Математика и механика, 1961, вып. 4, стр. 115—121.

87. Гинзбург И. П., Кочеры женков Г. В., Турбулентный пограничный слой нетеплоизолированного крыла или осевой симметрии в сжимаемой жидкости, Вестник Ленинградского университета, № 7, Математика, механика и астрономия, 1963, вып. 2, стр. 86—98.

88. Гинзбург И. П., Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости (смеси газов), Вестник Ленинградского университета, № 1, Математика, механика и астрономия, 1961, вып. 1, стр. 75—83.

89. Гинзбург И. П., О возможных методах решения задач пограничного слоя при наличии диссоциации в диффузии, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, стр. 87—105.

90. Гинзбург И. П., Методы решения задач турбулентного пограничного слоя при движении смеси газов, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 313—327.

91. Гиршович Т. А., О веерной турбулентной струе в сносящем потоке, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1963, № 4, стр. 113—121.

92. Глушко Г. С., Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, ОТН, Механика, 1965, № 4, стр. 13—23.

93. Голубев В. А., Исследование турбулентной струи высокой температуры, сб. «Исследование турбулентных струй воздуха, плазмы и реального газа», изд-во «Машиностроение», 1967, стр. 5—51.

94. Гольдштик М. А., Кутателадзе С. С., Вычисление константы пристенной турбулентности, сб. «Пристенная турбулентность», Новосибирск, 1968, стр. 52—56.

95. Гоман В. Г., Распространение веерной турбулентной струи вдоль плоской шероховатой поверхности твердого тела, Известия вузов, Энергетика, 1968, № 12, стр. 117—120.

96. Гоман В. Г., Распространение веерной турбулентности струи вдоль плоской и вогнутой поверхностей твердого тела, ИФЖ, 1968, № 5, стр. 909—914.

97. Гришанин К. В., Турбулентный пограничный слой на плоской поверхности, Труды Ленинградского института водного транспорта, 1960, вып. 7, стр. 23—31.

98. Гродзовский Г. Л., Турбулентный пограничный слой плоской пластины, Журнал прикладной механики и технической физики, 1962, № 4, стр. 117—119.

99. Гродзовский Г. Л., Распространение ламинарной и турбулентной струй в затопленном пространстве, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 23, 1962, стр. 66—71.

100. Гродзовский Г. Л., Решение осесимметричных задач по теории турбулентной диффузии, ПММ, 1950, т. XIV, вып. 4.

101. Гродзовский Г. Л., Выравнивание неравномерности поля скорости в осесимметричном турбулентном и ламинарном потоке, ДАН СССР, 1954, т. XCVII, № 4, стр. 613.

102. Громовов В. П., Колобов Б. П., Димитриева А. Ф., Некоторые схемы расчета ламинарного пограничного слоя на телах вращения, Изв. Сибирского отделения АН СССР, 1967, № 8, Техника, вып. 2, стр. 101—104.

103. Громов В. Г., Применение трехслойной разностной схемы для решения уравнений пограничного слоя, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5, стр. 121—133.

104. Гуршев И. Г., К вопросу о влиянии формы начального профиля скорости на развитие плоской турбулентной струи, Труды Института горного дела АН Каз. ССР, 1967, № 26, стр. 76—81.

105. Гухман А. А., Гандельсман А. Ф., Кацнельсон Г. Г., Кадер Б. А., Науриц Л. Н., О влиянии больших отрицательных градиентов давления на структуру турбулентного потока, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 812—824.

106. Демьянова Ю. А., Пограничный слой на пластине с изменяющейся во времени температурой поверхности, ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, стр. 647—650.

107. Дородницын А. А., Об одном методе решения уравнений пограничного слоя, сб. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, 1961, стр. 77—83.

108. Демьянов Ю. А., Шманенков В. Н., К исследованию возвратных течений в области отрыва турбулентного пограничного слоя, ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, стр. 237—279.

109. Дорфман А. Ш., Применение преобразования Прандтля — Мизеса к решению задач пограничного слоя, ТВТ, 1967, № 5, стр. 858—866.

110. Дроздов О. А., Исследование уравнения турбулентной диффузии, Труды Всесоюзного научного метеорологического совещания, т. 7, 1963, стр. 170—179.

111. Дроздов О. А., О некоторых вопросах турбулентной диффузии, Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 133, 1963, стр. 138—179.

112. Дудинцев Л. М., Кузьмина Л. Б., Распространение плоской настилающейся струи в ограниченном пространстве, Научные работы Института охраны труда ВЦСПС, 1969, вып. 56, стр. 17—20.

113. Войчак В. П., Ершин Ш. А., Исследование турбулентных концентрических струй сжимаемого газа, сб. «Теория и практика сжигания газа», № 3, изд-во «Недра», 1967, стр. 26—37.

114. Забродский С. С., Житкевич Л. К., Исследование теплообмена правильных укладок одинаковых шаров с потоком воздуха, сб. «Исследование тепло- и массообмена в технологических процессах и аппаратах», Минск, изд-во «Наука и техника», 1966, стр. 42—54.

115. Зысина-Моложен Л. М., Соскова И. Н., Исследование теплообмена и сопротивления при турбулентном течении сжимаемого газа, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 86—100.

116. Зысина-Моложен Л. М., Соскова И. Н., Шапиро И. Г., Исследование турбулентного пограничного слоя, образующегося при обтекании пластины потоком сжимаемого газа с теплообменом, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 305—312.

117. Зысина-Моложен Л. М., Расчет теплового пограничного слоя в потоке сжимаемого газа, ИФЖ, 1962, т. 5, № 6, стр. 21—26.

118. Иванов Э. П., Об автомодельных струйных решениях уравнений пограничного слоя, Труды Ленинградского политехнического института, № 230, 1964, стр. 84—89.

119. Иванов Ю. В., Закономерности затухания осевой избыточной температуры осесимметричной струи в поперечном неограниченном потоке, «Теплоэнергетика», 1969, № 7, стр. 47—48.

120. Иванов Ю. В., Гендрикоон В. А., О перемешивании турбулентной осесимметричной струи в поперечном равномерном потоке, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 394—397.

121. Иванов Ю. В., Некоторые закономерности свободной круглой струи во внешнем поперечном потоке, Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8.

122. Илизаров Л. И., Гиневский А. С., Экспериментальное исследование струи во встречном потоке, сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 23, 1962, стр. 107—118.

123. Изюмов М. А., Хзмалян Д. М., Распределение скоростей и температур в системе плоских струй, сб. «Теория и практика сжигания газа», № 4, изд-во «Недра», 1968, стр. 25—39.

124. Исатаев С. И., Распределение турбулентной полуограниченной струи вдоль плоской пластины, Сб. статей соискателей и аспирантов, Министерство высшего и среднего специального образов. Каз. ССР, Физика, 1968, вып. 3, стр. 102—109.

125. Исатаев С. И., О турбулентном следе за телом при струйном обтекании, Сб. статей соискателей и аспирантов, Министерство высшего и среднего специального образования Каз. ССР, Физика, 1968, вып. 3, стр. 58—62.

126. Исатаев С. И., Файнерман Э. И., Осесимметричная турбулентная струя, распространяющаяся вдоль сферы, Сб. статей соискателей и аспирантов, Министерство высшего и среднего специального образования Каз. ССР, Физика, 1968, вып. 3, стр. 95—111.

127. Исатаев С. И., Экспериментальное исследование турбулентного движения жидкости в следе за плохообтекаемым телом, Ученые записи Казахск. университета им. С. М. Кирова. Математика, механика и физика, 1957, т. 30, вып. 5.

128. Исмаилов М. И., Аналитическое решение задачи тепломассообмена при испарении для случая турбулентного пограничного слоя, Доклады АН УзССР, 1964, № 8, стр. 11—14.

129. Каплан В. С., Щеглова В. М., Трехмерный ламинарный пограничный слой на проницаемой пластине, ИФЖ, 1969, т. 16, № 3, стр. 389—397.

130. Карпов В. А., О турбулентном пограничном слое на поверхности затупленных конусов, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1968, № 3, стр. 147—150.

131. Кац Ю. И., Закономерности измерения скорости и избыточных температур по оси свободной плоской конвективной струи, Научные работы института охраны труда ВЦСПС, 1968, вып. 50, стр. 14—21.

132. Кашкаров В. П., Михаэлян Б. М., Полуограниченная струя жидкости с переменной вязкостью, сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 3, 1966, стр. 173—178.

133. Кашкаров В. П., Михаэлян Б. М., Веерная закрученная струя капельной жидкости с переменной вязкостью. Сб. статей соискателей и аспирантов. Министерство высшего и среднего специального образования Каз. ССР, Физика, 1968, вып. 63, стр. 113—120.

134. Кельмансон И. А., Некоторые данные по структуре турбулентной струи. Вестник АН Каз. ССР, 1968, № 3, стр. 51—58.

135. Клиентов Н. В., Гидродинамическое сопротивление и теплообмен при струйном обтекании неограниченной преграды, Доклады на кустовой научно-технической конференции по вопросам механики жидкости и газа, май 1961 г., 1963, вып. 15, № 2, стр. 41—52.

136. Клиентов Н. В., К методике расчета гидродинамического сопротивления и теплообмена при струйном обтекании неограниченной преграды, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 5, Минск, 1963, стр. 273—280.

137. Клиентов Н. В., К теории вопроса о расчете сопротивления и теплообмена при струйном обтекании неограниченной преграды, Доклад на кустовой научно-технической конференции по вопросам механики жидкости и газа, май 1960 г. Труды Куйбышевского авиационного института, 1961, вып. 12, стр. 99—103.

138. Клиентов Н. В., Применение интегральных соотношений к приближенному решению задач гидродинамики и теплообмена при распространении струй несжимаемой жидкости вдоль плоской стенки, Труды I Казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механике, Алма-Ата, 1965, стр. 255—256.

139. Козлов Л. П., Влияние сжимаемости газа на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, изд. АН УССР, 1969, № 3, стр. 239—243.

140. Козлов Л. В., Экспериментальное определение закона теплообмена для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, сб. «Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа», М., 1965, стр. 91—102.

141. Коловандин Б. А., Пустынцев Г. Н., К расчету локальных характеристик турбулентного пограничного слоя, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 9, Минск, изд-во «Наука и техника», 1968, стр. 145—165.

142. Корявов П. П., Численный расчет турбулентного смешения двух однородных потоков газа, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 4, № 3, стр. 495—511.

143. Костерин В. А., Матылинский И. П., О распространении боковых струй в сносящем потоке, Труды Казанского авиационного института, 1968, вып. 98, стр. 67—77.

144. Коула Д., Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости, «Механика» (сборник переводов), 1965, № 3, стр. 42—80.

145. Кошмаров Ю. А., Теплообмен в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа, ИФЖ, 1962, т. 2, вып. 1, стр. 41—54.

146. Крестьяникова Н. С., Турбулентный пограничный слой со вдувом на пластине в сжимаемой жидкости, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 49—58.

147. Крокко Л., Кохен С. Б., Ламинарный пограничный слой в сжимаемом градиентном течении при наличии теплообмена, сб. «Проблемы пограничного слоя и вопросы теплопередачи», 1960, стр. 236—248.

148. Крижановский В. Н., Структура и расчет турбулентного факела, Известия вузов, Энергетика, 1965, № 4, стр. 52—67.

149. Кузнецов А. Л., Сударев А. В., Аэродинамика и теплоотдача плоской турбулентной струи, растекающейся вдоль плоской поверхности, Труды Ленинградского кораблестроительного института, 1964, вып. 42, № 121—131.

150. Кузнецов А. Л., Аэродинамика и теплоотдача круглой турбулентной струи воздуха, растекающейся в щели по пластине, перпендикулярной направлению потока, Труды Ленинградского кораблестроительного института, 1964, вып. 44, стр. 57—65.

151. Кук Дж., Пространственные турбулентные пограничные слои, «Механика» (сб. переводов), 1964, № 5, стр. 65—93.

152. Кулонен Л. А., Новый метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя, Записки Ленинградского горного института, 1964, т. 44, вып. 3, стр. 87—104.

153. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Миронов Б. Н., Турбулентный пограничный слой на проницаемой поверхности с продольным градиентом давления в области сильных вдувов и конечных чисел Рейнольдса, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», 1968, стр. 24—32.

154. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Неоднородный, турбулентный

пограничный слой газа на проницаемой пластине, Журнал прикладной механики и технической физики, 1964, № 6, стр. 57—62.

155. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Турбулентный пограничный слой газа на проницаемой поверхности, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 351—360.

156. Кутателадзе С. С., Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое, Новосибирск, 1964.

157. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Тепловая завеса при турбулентном пограничном слое газа, ТВТ, 1963, т. I, № 2, стр. 281—290.

158. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Турбулентный пограничный слой газа на проницаемой стенке, Журнал прикладной механической физики, 1962, № 1 стр. 51—60.

159. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., К расчету турбулентного пограничного слоя при существенных градиентах давления, ИФЖ, 1962, № 5, стр. 38—41.

160. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа, Новосибирск, изд. Сибирского отделения АН СССР, 1962, стр 180.

161. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Миронов Б. П., К расчету турбулентного теплообмена на полупроницаемой поверхности при вдуве инородного газа, Журнал прикладной механики и технической физики, 1966, № 5, стр. 123—125.

162. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Пименов А. К., К расчету теплообмена при турбулентном течении газа в длинном цилиндрическом канале при произвольном распределении тепловой нагрузки и существенной неизотермичности, ТВТ, 1966, т. 4, № 5, стр. 698—702.

163. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Законы сопротивления и теплообмена в турбулентном потоке сжимаемого газа, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, 1963, стр. 106—128.

164. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Законы сопротивления и теплообмена в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа и метод расчета трения и теплообмена, ИФЖ, 1961, т. 4, № 6, стр. 33—41.

165. Лайхтман Д. Л., Шнайдхман В. А., Критерии установившейся турбулентности в струйных течениях, «Метеорология и гидрология», 1960, № 12, стр. 11—13.

166. Лапин Ю. В., Турбулентный пограничный слой в газовом потоке при наличии теплопередачи и числа Прандтля, отличного от единицы, Труды Ленинградского политехнического института, № 217, 1961, стр. 27—36.

167. Лапин Ю. В., Сергеев Г. П., Влияние диссоциации на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое, Труды Ленинградского политехнического института, 1964, № 230, стр. 98—106.

168. Лебедев И. В., Уравнения движения затопленной струи между параллельными плоскими поверхностями, сб. «Новое в пневматике», изд-во «Наука», 1969, стр. 76—82.

169. Леонтьев А. И., Методы расчетов турбулентного пограничного слоя по предельным законам, сб. «Пристенная турбулентность», Новосибирск, 1968, стр. 72—100.

170. Липцин Ф. Г., Исследование ограниченной затопленной неизотермической струи, «Санитарная техника», Межведомственный республиканский научный сборник, 1968, вып. 7, стр. 58—62.

171. Дойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962.

172. Лойцянский Л. Г., Параметры подобия в теории пограничного слоя, сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», изд-во «Наука», 1969, стр. 301—310.

173. Лойцянский Л. Г., Лапин Ю. В., Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке, Труды Ленинградского политехнического института, 1961, № 217, стр. 7—16.

174. Лойцянский Л. Г., Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью, ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.

175. Лойцянский Л. Г., Радиально-щелевая струя в пространстве, затопленном той же жидкостью, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, Техническая гидромеханика, 1953, № 5.

176. Лойцянский Л. Г., К теории плоских ламинарных и турбулентных струй, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, Энергомашиностроение, 1955, № 176.

177. Ляховский Д. Н., Турбулентность в прямоточных и закрученных струях, сб. «Теория и практика сжигания газа», 1964, стр. 18—48.

178. Ляховский Д. Н., Турбулентность и перемешивание воздушных струй, сб. «Теория и расчет вентиляционных струй», 1965, стр. 107—135.

179. Макаров И. С., Худенко Б. Г., Система плоских турбулентных струй, ИФЖ, 1965, т. 9, № 2, стр. 180—186.

180. Макаров И. С., Худенко Б. Г., Смешение пересекающихся турбулентных струй, ИФЖ, 1965, т. 8, № 4, стр. 447—450.

181. Маккарти Т. Ф., Хартнетт Дж. П., Турбулентные пограничные слои с продольным градиентом давления и теплообменом, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 265—279.

182. Малиновский К. Л., Приближенный способ определения поля концентра-

ции в турбулентной газовой струе, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1967, № 1, стр. 110—112.

183. Мартыщенко Л. Ф., О характеристиках закрученных течений, Труды института Гипрониигаз, 1968, вып. 7, стр. 257—262.

184. Марцевой Е. П., Особенности распространения струй в поперечном потоке со значительным различием в плотностях, «Теоретические основы химической технологии», 1969, т. 3, № 4, стр. 644—646.

185. Мелентьев П. В., Новая теория свободной струи, Труды Волгоградского механического института, т. I, 1952.

186. Миронов Б. П., Некоторые результаты исследования турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности, сб. «Пристенная турбулентность», Новосибирск. 1968, стр. 114—141.

187. Мугалев В. П., Приближенный метод расчета трения и теплоотдачи при вдувании воздуха в турбулентный пограничный слой, Труды МФТИ, 1960, вып. 5, стр. 86—96.

188. Навознов О. И., Павельев А. А., О смешении спутных газовых струй, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и транспорт, 1968, № 2, стр. 52—57.

189. Нетюхайло А. П., Устойчивость пограничного слоя раздела потоков разноплотностных жидкостей, «Гидравлика и гидротехника», Республиканский межведомственный научно-технический сборник, 1969, № 8, стр. 36—43.

190. Никитенко Н. И., Явный разностный метод решения уравнений теплового и гидродинамического пограничных слоев, ИФЖ, 1968, т. 14, 639—644.

191. Никитин Н. Н., Устойчивость плоского потока несжимаемой жидкости в пограничном слое при малых ускорениях, Изв. вузов, Авиационная техника, 1967, № 4, стр. 16—23.

192. Никитин И. К., Теория турбулентного пограничного слоя с учетом переменной по длине шероховатости, Труды совещания по современным методам расчета и моделирования температурных полей водоемов, Гидрометеоиздат, 1966, стр. 13—28.

193. Носовицкий А. Я., Неполновеерные свободные затопленные струи, Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1968, № 8, стр. 122—126.

194. Олейник О. А., Математические задачи теории пограничного слоя, «Успехи математических наук», 1968, т. 23, № 3, стр. 3—65.

195. Олейник О. А., О системе уравнений теории пограничного слоя, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, т. 3, № 3, стр. 489—507.

196. Олейник О. А., О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя, АН СССР, 1963, т. 150, № 1, стр. 28—31.

197. Олейник О. А., О системе уравнений пограничного слоя для осесимметричных течений, АН СССР, 1967, т. 175, № 4, стр. 777—780.

198. Олейник О. А., О решении системы уравнений Прандтля методом конечных разностей, ПММ, 1967, т. 31, № 4, стр. 90—100.

199. Омельчук В. С., Неизотермическая осесимметричная турбулентная струя, искривленная силами тяжести, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 3, стр. 52—58.

200. Павлов Б. М., Смешение системы турбулентных параллельных струй, вытекающих из щелевых отверстий, Труды Казанского химико-технологического института, 1968, вып. 39, стр. 115—123.

201. Павловский Ю. Н., Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1962, т. 2, № 5, стр. 884—901.

202. Павловский В. В., Определение положения критических сечений в турбулентных осесимметричных случаях несжимаемой жидкости, вытекающих в спутный поток той же жидкости, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 5, стр. 126—128.

203. Палатник И. Б., О распространении осесимметричной турбулентной струи конечного размера в спутном однородном потоке, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1960, вып. 2 (13), стр. 93—101.

204. Палатник И. Б., Темирбаев Д. Ж., О распространении свободных турбулентных струй, вытекающих из насадки прямоугольной формы, «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», 1964, вып. 1, стр. 18—28.

205. Палатник И. Б., Темирбаев Д. Ж., Исследование свободных турбулентных струй, вытекающих из прямоугольного отверстия, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2. Минск. 1965, стр. 414—419.

206. Пасконов В. М., Чулов Л. А., Разностные методы расчета течений в пограничном слое, Сб. работ вычислительного центра Московского университета, 1968, т. II, стр. 55—74.

207. Пасконов В. М., Численное решение нестационарных уравнений пограничного слоя, Сб. вычислительного центра Московского университета, 1968, т. II, стр. 75—92.

208. Пасконов В. М., Стандартная программа для решения задач пограничного слоя, Сб. работ вычислительного центра МГУ, вып. 2, 1963, стр. 110—116.

209. Поляев В. М., Башмаков И. В., Расчет турбулентного пограничного слоя при подаче охладителя сквозь пористую стенку, Изв. вузов, Машиностроение, 1961, № 11, стр. 118—128.

210. Попов В. П., Исследование характеристик турбулентности ограниченной струи, сб. «Тепло- и массообмен тел с окружающей газовой средой», Минск, 1965, стр. 160—167.

211. Прудников А. Г., Сагалович В. Н., Статистическое описание турбулентной струи, 1962, АН СССР, т. 144, № 6, стр. 1258—1261.

212. Репников М. Н., К теории осесимметричной турбулентности, ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, стр. 356.

213. Розенштох Ю. Л., Применение методов теории пограничного слоя к решению задач взаимосвязанного тепло- и массопереноса, ИФЖ, 1965, т. 8, № 6, стр. 707—711.

214. Розин Л. А., О расчете пограничного слоя методом расчленения, Вестник Ленинградского университета, № 7, Математика, механика и астрономия, вып. 2, 1963, стр. 128—140.

215. Романенко П. Н., Харченко В. Н., Влияние вдува газов в турбулентный пограничный слой с предельным градиентом давления на сопротивление трения, Журнал прикладной механики и технической физики, 1961, № 1, стр. 77—83.

216. Романенко П. Н., Семенов Н. П., Трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое на проницаемой поверхности при вдуве капельных жидкостей и газов, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 280—289.

217. Ротта И. К., Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости, изд-во «Судостроение», 1967.

218. Рулин С. Н., Расчет турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, Труды Новосибирского института инженеров водного транспорта, 1966, вып. 24, стр. 12—19.

219. Рузин М. И., Болдырева Н. А., Совельева Т. А., Некоторые результаты вычисления коэффициента турбулентного обмена в пограничном слое, Труды Ленинградского гидрометеорологического института, 1963, вып. 15, стр. 66—80.

220. Садиков И. Н., Отрыв пограничного слоя при нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости, Труды МФТИ, 1962, вып. 9, стр. 27—53.

221. Сакипов З. Б., Об отношении коэффициентов турбулентного обмена импульса и тепла в свободной турбулентной струе, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1961, вып. 1, стр. 30—35.

222. Сакипов З. Б., Темирбаев Д. Ж., Об отношении коэффициентов турбулентного обмена импульса и тепла в свободной турбулентной струе, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, 407—413.

223. Сакипов З. Б., Темирбаев Д. Ж., Перенос импульса и тепла в свободной турбулентной струе, сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 1, Алма-Ата, 1964, стр. 47—72.

224. Сакипов З. Б., Экспериментальное исследование турбулентных струй, сб. «Теория и расчет вентиляционных струй, 1965, стр. 203—225.

225. Самойлов М. С., К теории турбулентной закрученной струи несжимаемой жидкости, ИФЖ, 1965, т. 8, № 3, стр. 325—329.

226. Секундов А. Н., Распространение турбулентной струи во встречном потоке, сб. «Исследование турбулентных струй воздуха плазмы и реального газа», изд-во «Машиностроение», 1967, стр. 131—143.

227. Селезнев В. М., Развитие плоской турбулентной струи в спутном потоке, Труды Ленинградского института водного транспорта, 1967, вып. 88, стр. 109—111.

228. Сивиркин В. Ф., Приближенная теория начального участка высокотемпературной турбулентной затопленной струи, Труды Куйбышевского авиационного института, 1967, вып. 24, стр. 143—149.

229. Синельщиков В. С., О применении теории Колмогорова к пристенной турбулентности. Изв. Сибирского отделения АН СССР, № 10. Серия техн. наук, вып. 3, 1966, стр. 125—130.

230. Скэлайр Г. Б., Радиальные струи, сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи», под ред. Г. Гертлера и В. Толмина, Госэнергоиздат, 1960.

231. Славнов В. В., Пограничный слой при свободной тепловой конвекции жидкости около вертикальной изотермической стенки, Сб. научных трудов Пермского политехнического института, 1963, № 13, стр. 67—70.

232. Смольский Б. М., Шульман Э. П., Федоров Б. И., Тепло- и массообмен в пограничном слое на пористой стенке, сб. «Тепло- и массообмен тел с окружающей газовой средой», Минск, 1965, стр. 70—85.

233. Смольняков А. В., О некоторых закономерностях поля турбулентных давлений в пограничном слое на плоской пластине, Журнал прикладной механики и технической физики, 1969, № 3, стр. 116—120.

234. Совершенный В. Д., Турбулентный пограничный слой на проницаемой поверхности, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 3, стр. 54—51.

235. Сполдинг Д. Б., Конвективный массоперенос, изд-во «Энергия», 1965.

236. Сполдинг Д. Б., Чи С. В., Закон сопротивления для сжимаемого турбулентного пограничного слоя гладкой пластины при наличии теплопередачи и без нее. «Механика» (сб. переводов), 1964, № 6, стр. 82—112.

237. Сполдинг Д. Б., Джаятилака К., Обзор теоретических и экспериментальных данных по ламинарному подслою с тепло- и массообменом, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, 1965, стр. 234—264.

238. Столер В. Д., Плоская турбулентная струя в сносящем потоке, Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1966, № 6, стр. 121—129.

239. Сычек А. Т., Распространение веерной полуограниченной турбулентной затопленной струи вдоль плоской гладкой стенки, Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1967, № 3, стр. 112—117.

240. Талеев В. Н., Закономерности свободной неизотермической осесимметричной струи, «Водоснабжение и санитарная техника», 1969, № 1, стр. 22—25.

241. Тарнопольский Д., Распространение веерной струи в ограниченном пространстве, ИФЖ, 1967, т. 12, № 1, стр. 20—26.

242. Терехина Н. Н., О неизотермических турбулентных струях газа переменного состава, Труды Казахск. университета, 1960, вып. 2, стр. 59—66.

243. Тетерин М. П., Турбулентный пограничный слой свободной струи сжимаемого газа в спутном и встречном потоках, ИФЖ, 1964, т. 4. вып. 2, стр. 330—336.

244. Ульянов А. В., Кожахметов Д. Б., Аэродинамика закрученной газовой струи в поперечном потоке, Изв. АН Каз. ССР, Серия технических и химических наук, 1963, вып. 1, стр. 116—121.

245. Устименко Б. П., Ибрагимов И. И., К расчету аэродинамики турбулентной закрученной струи, развивающейся вдоль цилиндрической стенки в спутном потоке, «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», 1966, вып. 3, стр. 135—147.

246. Устименко Б. П., О расчете свободных турбулентных сильно закрученных струй с помощью эквивалентной задачи теории теплопроводности, Вестник АН Каз. ССР, 1964, № 10, стр. 69—74.

247. Устименко Б. П., О расчете свободных турбулентных сильно закрученных струй, сб. «Теория и практика сжигания газа», № 3, изд-во «Недра», 1967, стр. 20—26.

248. Устименко Б. П., Исследование плоских турбулентных струй со сложным начальным профилем скорости, Изв. АН Каз. ССР, Энергетика, 1960, вып. 2 (18), стр. 68—83.

249. Устименко Б. П., Исследование слабозакрученных струй, сб. «Исследование физических основ рабочих процессов топок и печей», изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1957.

250. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, ЖТФ, 1957, т. XXVII, вып. 2.

251. Федяевский К. К., Колесников А. В., Смольянинова А. Н., К расчету турбулентного пограничного слоя с продольным градиентом давления, Труды ЦАГИ, 1967, вып. 1088.

252. Фролов А. А., Определение влияния вдува различных газов в пограничный слой на трение, тепло- и массообмен при степенном изменении скорости внешнего потока, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1968, № 5, стр. 137—142.

253. Хабахпашева Е. М., Исследование пристенной турбулентности методом стробоскопической визуализации, сб. «Пристенная турбулентность», Новосибирск, 1965, стр. 142—148.

254. Хинце И. О., Турбулентность (перев. с англ.), Физматгиз, 1963.

255. Ходорковский Я. С., Приближенный метод расчета пограничного слоя с оптимальным распределенным отсосом, Труды Ленинградского кораблестроительного института, вып. 40, 1962, стр. 21—27.

256. Худенко Б. Г., К расчету турбулентного следа за плохо обтекаемым телом в дозвуковом потоке, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1968, № 4, стр. 92—97.

257. Чудов Л. А., Обзор работ по пограничному слою, выполненных в вычислительном центре МГУ (Изложение доклада на Совещании по численным методам в газовой динамике, март 1962 г.). Сб. работ вычислительного центра МГУ, № 2, 1963, стр. 87—97.

258. Шашупов И. С., Исследование некоторых вопросов аэродинамики взаимодействия настилающейся веерной струи со сносящим ее встречным потоком, Труды Всесоюзного института ж.-д. транспорта, 1968, вып. 354, стр. 50—86.

259. Шевелев Ю. Д., Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 5, стр. 112—117.

260. Шепелев И. А., Турбулентная конвективная струя над источником тепла, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4, стр. 3—9.

261. Шепелев И. А., Тарнопольский М. Д., Распространение турбулентной струи в ограниченном пространстве, сб. «Исследование тепло- и массообмена в технологических процессах и аппаратах», Минск, 1966, 291—297.

262. Шепелев И. А., Затопленные струи, сносимые боковым потоком, сб. «Строительная теплофизика», изд-во «Энергия», стр. 167—170.
263. Шепелев И. А., Васильева Л. С., Взаимодействие затопленных струй, Сб. трудов научно-исследовательского института санитарной техники, 1967, № 24, стр. 244—256.
264. Шерстюк А. Н., Николаев В. М., Теплообмен в турбулентном пограничном слое на стенке, «Теплоэнергетика», 1968, № 11, стр. 75—77.
265. Шерстюк А. Н., К теории теплообмена при турбулентном течении, «Теплоэнергетика», 1968, № 2, стр. 47—50.
266. Шкадов В. Я., К решению задачи о пограничном слое, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1968, № 3, стр. 173—175.
267. Шлихтинг Г., Пространственный пограничный слой, «Механика» (сб. переводов), 1964, № 3, стр. 51—82.
268. Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности (перев. с нем.), Изд-во иностр. лит., 1962.
269. Шорин С. Н., Приселков А. Б., Турбулентное и молекулярное смешение в струйных потоках, сб. «Теория и практика сжигания газа», № 2, 1964, стр. 5—18.
270. Шубауэр Г. Б., Чэн К. М., Турбулентные течения, сб. «Турбулентные течения и теплопередача», гл. II, 1963.
271. Яковлевский О. В., Закономерности турбулентного перемешивания соосных потоков в канале с постоянным поперечным сечением, Инженерный журнал, 1961, т. I, вып. 4, стр. 39—50.
272. Яковлевский О. В., Крашенинников С. Ю., Распространение турбулентной струи, соударяющейся с плоской поверхностью, Изв. АН СССР, ОТН, Механика жидкости и газа, 1966, № 4, стр. 192—197.
273. Яковлевский О. В., К вопросу о толщине турбулентного перемешивания на границе двух потоков газа разной скорости и плотности, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода 3
Предисловие 4
Перечень условных обозначений 5

ВВЕДЕНИЕ

Тепло- и массоперенос в пограничных слоях

0.1. Рассматриваемая задача 7
0.2. Исторический обзор 10
0.3. Последние разработки авторов 16
0.4. О структуре книги 22

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Математический анализ

Глава первая. **Уравнения пограничного слоя** 24
1-1. Дифференциальные уравнения для осесимметричного течения . . . 24
1.2. Начальные и граничные условия 26
1.3. Вспомогательные соотношения 27
1.4. Уравнения пристеночного одномерного пограничного слоя 31
Глава вторая. **Решение методом конечных разностей** 39
2.1. Выбор системы координат 39
2.2. Уравнение сохранения в координатах $x \sim \omega$ 40
2.3. Скорость обмена через внешнюю границу слоя 41
2.4. Разностное уравнение 43
2.5. Скользящие величины на границах 47
2.6. Формулирование граничных условий специального типа 52
2.7. Решение разностных уравнений 54
2.8. Дополнительные сведения 54
Глава третья. **Возможности метода решения: демонстрации применения и оценки** 58
3.1. Цель главы 58
3.2. Некоторые расчеты задач пограничного слоя 58
3.3. Достоинства и недостатки предлагаемого метода 63
3.4. Направление дальнейших разработок 64

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Исследование физических гипотез

Глава четвертая. **Некоторые соотношения для потоков стенки** . . . 65
4.1. Обоснование 65
4.2. Численное интегрирование 66
4.3. Алгебраические формулы 67
4.4. Проверка справедливости полученных алгебраических формул . . . 71
4.5. Дальнейшие разработки 73
4.6 Краткая сводка формул для турбулентного течения 74
Глава пятая. **Смысл гипотезы о пути смешения** 75

5.1. Цель главы 75
5.2. Предварительный выбор 75
5.3. Сравнение расчета с данными опытов, характеризующихся постоянными физическими свойствами среды 77
5.4. Сравнение с данными для сжимаемого течения вдоль плоской пластины 79
5.5. Гидродинамика пристенной струи 81
5.6. Заключительные замечания 83
Литература 85
Приложение I. Программа численного решения уравнений пограничного слоя . 90
Приложение II. Экспериментальное исследование 111
Дополнительная литература 115

Патанкар С. В., Сполдинг Д. Б.

Тепло- и массообмен в пограничных слоях

Редактор *И. В. Волобуева*

Переплет художника *Е. В. Никитина*

Технический редактор *О. Д. Кузнецова*

Корректор *Е. В. Житомирская*

Сдано в набор 26/XI 1970 г. Подписано к печати 23/XI 1971 г.

Формат 70×108¹/₁₆ Бумага типографская № 1

Усл. печ. л. 11,2 Уч.-изд. л. 12,52

Тираж 4 000 экз. Цена 1 р. 27 к. Зак. 1496

Издательство „Энергия". Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.