АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ЭНЕРГЕТИКИ

А. В. ЛЫКОВ, Ю. А. МИХАЙЛОВ

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ВЕЩЕСТВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК БССР
МИНСК 1959

АННОТАЦИЯ

Данная монография посвящена аналитической теории явлений переноса тепла и вещества. На основе термодинамики необратимых процессов выведена система дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса. Методами конечных интегральных преобразований получены решения для простейших тел (пластина, цилиндр и шар) при граничных условиях второго и третьего рода. Полученные решения могут быть использованы для расчета процессов термодиффузии в газовых смесях и молекулярных растворах, сушки, газификации, горения и т. д.

Книга представляет интерес для широкого круга инженерно-технических работников и может служить в качестве учебного пособия для студентов теплоэнергетических специальностей вузов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование многочисленных тепло- и электротехнических процессов связано с решением задач молекулярного переноса энергии, вещества и электричества. Молекулярный энерго-, тепло- и массообмен в твердых телах подчиняется простому линейному закону. Например, перенос тепла теплопроводностью описывается линейным законом Фурье: удельный тепловой поток прямо пропорционален температурному градиенту. Перенос электричества в металлах подчиняется линейному закону Ома: удельный поток электричества прямо пропорционален градиенту электрического потенциала. Молекулярный перенос вещества описывается законом диффузии: удельный поток вещества прямо пропорционален градиенту концентрации и т. д.

Эти линейные законы были положены в основу вывода соответствующих дифференциальных уравнений (теплопроводности, электропроводности, диффузии). Решение данных уравнений при определенных начальных и граничных условиях, характеризующих начальное состояние тела и взаимодействие поверхности тела с окружающей средой, представляет известные трудности. Поэтому с конца XVIII века и до настоящего времени разрабатываются различные методы решения дифференциальных уравнений теплопроводности, электропроводности и диффузии.

В результате развития экспериментальных методов установлено, что явления переноса взаимосвязаны. Например, концентрационная изотермическая диффузия в газовой смеси вызывает перенос тепла и образование температурного градиента (эффект Дюфо). Обратно, перенос тепла теплопроводностью в газовой смеси вызывает перенос вещества (термодиффузия или эффект Соре). Такая же взаимосвязь имеет место и в переносе тепла и электричества. Поэтому исходные положения, на основе которых выводились соответствующие дифференциальные уравнения, в настоящее время пересматриваются с использованием методов термодинамики необратимых процессов.

Вместо отдельных, не связанных между собой линейных уравнений переноса тепла, электричества и вещества за исходные уравнения переноса принимается система линейных уравнений Онзагера, в которой любой вид переноса определяется действием прямого эффекта и налагающихся явлений переноса. Эти линейные уравнения Онзагера приводят к системе взаимосвязанных дифференциальных уравнений молекулярного переноса тепла, электричества и вещества. Таким образом, возникает важнейшая задача разработки методов решения системы дифференциальных уравнений молекулярного переноса, которая является более сложной по сравнению с задачей создания математической теории теплопроводности или диффузии.

Данная монография посвящена разработке аналитической теории переноса энергии тепла и вещества, т. е. созданию одного из важнейших разделов аналитической теории термодинамики необратимых процессов.

Насколько известно, аналогичных работ в литературе не имеется. Монография написана на основе работ авторов.

Первая часть монографии посвящена изложению термодинамики явлений переноса и выводу системы дифференциальных уравнений тепло- и массообмена в капиллярно-пористых телах.

Вторая часть посвящена решению системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса при различных граничных условиях. Эти решения могут быть использованы при выборе оптимального режима кинетики процесса; они позволяют находить в телах заданной конфигурации распределение потенциалов переноса с учетом взаимного влияния друг на друга (нестационарные поля температуры и потенциала переноса связанного вещества). Решение этих задач сопровождается анализом с целью вскрытия физической сущности процесса и по возможности иллюстрируется рисунками и таблицами. Широко используется аппарат теории подобия, поэтому большинство решений уравнений тепло- и массообмена дано в критериальной форме. Установлена взаимосвязь между критериями подобия.

Общеизвестно, какие большие трудности возникают у инженера при применении методов математической физики к решению инженерных задач. Поэтому в этом разделе основное внимание уделяется технике и методике расчета при решении конкретных задач, опуская строгие математические исследования поставленной задачи. С этой целью подробно разбирается ход решения нескольких простейших задач теории тепло- и массопереноса с подробными преобразованиями для освоения инженером техники расчета.

В последнем разделе даны решения ряда задач, в которых перенос массы вещества происходит под влиянием

нескольких термодинамических движущих сил, в том числе под действием градиента общего давления. Эти смешанные задачи на молекулярно-молярный перенос массы связанного вещества представляют практический интерес для интенсивных технологических процессов термической обработки капиллярно-пористых тел.

В книге содержится большое количество оригинальных таблиц основных решений и параметрических коэффициентов. Поэтому она представляет интерес не только для физиков и энергетиков, но и для более широкого круга читателей. Благодаря подробному и систематическому изложению она доступна для инженеров-исследователей, которые могут с успехом применить аналитические методы исследования для решения важнейших задач современной техники.

Дальнейшее развитие теории явлений переноса на основе термодинамики необратимых процессов и ее широкое практическое применение в производственных процессах будет способствовать совершенствованию техники социалистического производства.

Авторы сознают, что данная монография, как и всякая первая попытка такого рода, обладает рядом недостатков. Поэтому все предложения читателей, направленные на дальнейшее улучшение этой книги, авторы заранее принимают с благодарностью.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПЕРЕНОСА

В наших работах было показано, что все явления молекулярного переноса тепла, вещества и энергии упорядоченного движения жидкости могут быть аналитически описаны законом энергопроводности: удельный поток энергии, характеризующий перенос соответствующей субстанции, прямо пропорционален градиенту объемной концентрации энергии. При этом коэффициент пропорциональности (энергопроводности) равен коэффициенту молекулярной диффузии. На основе этих законов выводятся соответствующие дифференциальные уравнения переноса (уравнения теплопроводности, диффузии, движения вязкой жидкости).

Однако исходные линейные законы справедливы только для процессов переноса малой интенсивности. В случае интенсивных процессов явления переноса должны рассматриваться во взаимосвязи. Это означает, что на перенос тепла влияет перенос вещества и энергии упорядоченного движения. Поэтому основные исходные положения, из которых выводились соответствующие дифференциальные уравнения, в настоящее время нуждаются в пересмотре. Для такого принципиального изменения в аналитическом описании процессов молекулярного переноса необходим строго научный метод рассмотрения явлений переноса в их взаимосвязи.

Голландские и бельгийские физики (Онзагер, Пригожин, де Гроот) разработали такой метод, получивший название термодинамики необратимых процессов. Особенностью его является описание процессов переноса любой субстанции на основе переноса энтропии, однозначно характеризующего сложный взаимосвязанный молекулярный перенос.

В отличие от дифференциального уравнения переноса энергии дифференциальное уравнение переноса энтропии содержит источник энтропии, связанный с возникновением ее при необратимых процессах. Этот источник энтропии является функцией координат и времени. Поэтому решение диф-

ференциальных уравнений типа теплопроводности с переменными источниками и стоками представляет существенный интерес для развития аналитической теории термодинамики необратимых процессов.

Кроме того, основное соотношение термодинамической теории переноса (произведение абсолютной температуры на скорость изменения объемной концентрации энтропии равно сумме произведений потоков субстанции на движущую силу переноса) служит в качестве исходного соотношения для определения потенциалов переноса тепла, вещества и энергии упорядоченного движения.

§ 1. Потенциалы переноса

Прежде всего остановимся на потенциалах переноса.

Основной аксиомой теории потенциалов является следующее соотношение: в состоянии термодинамического равновесия потенциалы системы тел или потенциалы тела в различных частях его одинаковы

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{1.1}$$

Перенос соответствующей субстанции (тепла, электричества, вещества) происходит в направлении от большего потенциала к меньшему: $\Pi_1 > \Pi_2$.

Градиент потенциала называют термодинамической движущей силой; например, градиент электрического потенциала равен напряженности электрического поля.

Количественная мера переноса энергии dE равна произведению потенциала на изменение обобщенной координаты dK, т. е. потенциал переноса должен удовлетворять соотношению

$$dE = \Pi\, dK. \tag{1.2}$$

Приведем несколько примеров. При расширении газа, когда совершается увеличение объема dV, работа расширения против сил внешнего давления p равна:

$$dW = p dV. \tag{1.3}$$

Следовательно, обобщенной координатой при совершении механической работы является объем ($K = V$), а потенциалом — давление ($\Pi = p$).

Работа заряжения dW проводника с электрическим потенциалом φ ($\Pi = \varphi$) в электростатическом поле равна произведению потенциала φ на увеличение электрического заряда dq:

$$dW = \varphi\, dq. \tag{1.4}$$

Обобщенной координатой в данном случае является величина электрического заряда ($K = q$). В процессах теплообмена количество переносимого тепла dQ равно произведению температуры T (потенциал переноса энергии в форме теплообмена) на приращение энтропии dS (обобщенной координатой является энтропия):

$$dQ = TdS. \tag{1.5}$$

При переносе энергии путем массообмена обобщенной координатой является масса вещества ν, измеренная в молях, а потенциалом переноса—соответственно выбранный химический потенциал μ, который зависит от условий термомеханического сопряжения изучаемой системы с окружающей средой.

Остановимся на этом подробней.

Уравнением первого закона термодинамики для открытых систем (системы, где наблюдается обмен массой вещества) является уравнение Гиббса

$$dQ = TdS = dE + pdV - \sum_k \mu_k \, d\nu_k \, , \tag{1.6}$$

где индекс k обозначает номер компоненты вещества, участвующего в массообмене.

Для системы, которая допускает механические и термическое сопряжения с окружающей средой, возможны следующие четыре случая сопряжения[1]:

а) изохорно-изоэнтропическое сопряжение $V = \text{const}$, $S = \text{const}$ ($dV = 0$; $dS = 0$),

откуда для потенциала переноса вещества получаем

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial \nu}\right)_{v,\, s} \; ; \tag{1.7}$$

б) изобарно-изоэнтропическое сопряжение $p = \text{const}$, $S = \text{const}$ ($pdV = dpV$; $dS = 0$).

Обозначим энтальпию системы через H ($H = E + pV$), тогда из (1. 6) получаем

$$\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial \nu}\right)_{p,\, s} \; ; \tag{1.8}$$

в) изохорно-изотермическое сопряжение $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ ($dV = 0$; $TdS = dTS$).

этом случае получаем

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right)_{v,\, \text{т}} \, , \tag{1.9}$$

[1] При этом предполагается, что все ν_k, за исключением одной, постоянны.

где F — свободная энергия, $F = E - TS$;

г) изобарно-изотермическое сопряжение $p = \text{const}$, $T = \text{const}$ ($pdV = dpV$; $TdS = dTS$).

Обозначим свободную энтальпию через Φ, т. е.

$$\Phi = H - TS = E + pV - TS,$$

тогда из уравнения (1. 6) получим

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right)_{p,\, T}. \tag{1.10}$$

Следовательно, потенциал переноса массы вещества зависит от условий термомеханического сопряжения системы с окружающей средой; он равен производной соответствующей характеристической функции ψ по массе вещества

$$\mu = \frac{\partial \psi}{\partial \nu}. \tag{1.11}$$

В первом случае характеристической функцией является внутренняя энергия ($\psi = E$), во втором случае—энтальпия ($\psi = H$) и т. д.

§ 2. Дифференциальные уравнения переноса энергии, энтальпии и массы вещества

Если внутренняя энергия E, объем V системы с общей массой M рассчитываются на единицу массы (удельные значения энергии и объема), то соотношение первого закона термодинамики будет одинаковым как для закрытой, так и для открытой систем, т. е.

$$dq = de + pdv, \tag{2.1}$$

где $v = \frac{V}{M}$ — удельный объем, $e = \frac{E}{M}$ — удельная энергия. Для полных величин Q, E, V, отнесенных к массе открытой системы, это соотношение будет иметь вид

$$dQ = dE + pdV - hdM, \tag{2.2}$$

где h — удельная энтальпия,

$$h = e + pv, \tag{2.3}$$

dQ — сообщаемое системе тепло ($dQ = Mdq$).

Обозначим удельные потоки тепла, вещества, энергии и энтальпии соответственно через j_q, j_m, j_e, j_h, т. е.

$$j_q = \frac{dQ}{Ad\tau}\ ;\ j_m = \frac{dM}{Ad\tau}\ ;\ j_e = \frac{dE}{Ad\tau}\ ;\ j_h = \frac{dH}{Ad\tau}\ , \quad (2.4)$$

где A — изопотенциальная поверхность, т. е. поверхность, имеющая одинаковый потенциал переноса. Тогда для изохорного процесса ($V = \text{const}$) тепломассообмена на основании соотношения (2.2) будем иметь

$$j_e = j_q + hj_m. \quad (2.5)$$

Для изобарного процесса ($p = \text{const}$) из соотношения (2.2) получаем

$$j_h = j_q + hj_m. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение переноса энергии при $V = \text{const}$ является уравнением движения энергии Умова. На основании закона сохранения энергии следует, что изменение энергии в некотором объеме V, образованном замкнутой поверхностью A, происходит в результате переноса энергии через эту поверхность, т. е.

$$\int_{(V)} \frac{\partial E_v}{\partial \tau}\, dV = -\oint_{(A)} (j_e)_n\, dA, \quad (2.7)$$

где E_v—объемная концентрация энергии, τ — время, индекс n обозначает нормаль к изопотенциальной поверхности.

Используем преобразование Остроградского—Гаусса, тогда из (2.7) получим дифференциальное уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial E_v}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_e, \quad (2.8)$$

где $\nabla\cdot$ обозначает символ дивергенции, т. е. $\nabla\cdot \equiv \text{div}$. Следовательно, локальная скорость изменения объемной концентрации энергии $\frac{\partial E_v}{\partial \tau}$ прямо пропорциональна дивергенции от вектора удельного потока энергии j_e.

Удельный поток энергии j_e равен произведению объемной плотности энергии E_v на линейную скорость молекулярного переноса w, т. е.

$$j_e = E_v w. \quad (2.9)$$

Для движущихся сред уравнение (2.8) можно написать в следующем виде:

$$\frac{dE_v}{d\tau} = -E_v \nabla \cdot w, \quad (2.10)$$

где $\frac{d}{d\tau}$ — полная производная,

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + w\,\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial\tau} + w\nabla,$$

w — скорость молярного (макроскопического) движения среды.

Для изобарного процесса вместо дифференциального уравнения переноса энергии будем иметь уравнение переноса энтальпии

$$\frac{\partial H_v}{\partial\tau} = -\nabla\cdot j_h, \tag{2.11}$$

где H_v — объемная концентрация энтальпии $\left(H_v = \frac{H}{V}\right)$.

Дифференциальное уравнение переноса вещества для компоненты k можно написать исходя из следующих положений. В некотором объеме, ограниченном контрольной поверхностью, изменение объемной концентрации k-компоненты вещества (ω_k) происходит за счет переноса и действия источника или стока k-компоненты вещества. Тогда на основе закона сохранения массы вещества с использованием преобразования Остроградского—Гаусса получаем дифференциальное уравнение переноса вещества

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial\tau} = -\nabla\cdot j_{mk} - \sum_r W_{kr}, \tag{2.12}$$

где j_{mk} — удельный поток вещества k-компоненты, W_{kr} — удельная мощность стока вещества, связанная с переходом вещества из компоненты k в компоненту r (наличие фазовых и химических превращений).

При этом на основе закона сохранения вещества имеют место равенства

$$W_{kr} + W_{rk} = 0; \quad W_{kr} = -W_{rk}. \tag{2.13}$$

Суммируя по k из системы уравнений (2.12) при $k = N$, получим дифференциальное уравнение переноса всей массы системы

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = -\nabla\cdot\sum_{k=1}^{N} j_{mk}, \tag{2.14}$$

где ω — объемная концентрация вещества в системе

$$\omega = \sum_{k=1}^{N} \omega_k. \tag{2.15}$$

Химические или фазовые превращения внутри выделенного объема не изменяют общей массы системы, т. е.

$$\sum_k \sum_r W_{kr} = 0. \tag{2.16}$$

Следовательно, изменение общего массосодержания вещества системы происходит только за счет переноса вещества.

§ 3. Уравнения переноса тепла и вещества в дисперсных системах при фазовых превращениях

Рассмотрим перенос тепла и массы связанного вещества в дисперсной среде при наличии фазовых превращений.

Дисперсная среда или система капиллярно-пористых тел содержит вещество в парообразном (индекс 1), жидком (2) и твердом (3) состояниях (трехфазная система связанного вещества). Индекс 0 обозначает дисперсную среду, лишенную связанного вещества (скелет дисперсной среды).

Объемная концентрация ω связанного вещества равна произведению удельного массосодержания на плотность среды γ_0, т. е.

$$\omega = u\gamma_0; \quad u = \sum_{k=1}^{3} u_k. \tag{3.1}$$

Локальное изменение связанного вещества в любой фазе может происходить за счет фазового превращения du_{kr} и в результате переноса du_{kf}:

$$du_k = \sum_r du_{kr} + du_{kf}. \tag{3.2}$$

При этом имеет место равенство (3.3), отображающее закон сохранения вещества при переходе его из фазы k в фазу r и обратно

$$du_{kr} = -du_{rk}. \tag{3.3}$$

Используя дифференциальные уравнения (2.12) и (2.14) переноса вещества, будем иметь:

$$\gamma_0 \frac{\partial u_k}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_{mk} + \sum_r W_{rk}, \tag{3.4}$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \sum_{k=1}^{3} j_{mk}, \tag{3.5}$$

где W_{rk} — удельная мощность источника связанного вещества фазы k (превращение вещества из фазы r в фазу k):

$$W_{rk} = \gamma_0 \frac{\partial u_{rk}}{\partial \tau}. \tag{3.6}$$

Дифференциальное уравнение переноса тепла при изобарном сопряжении системы с окружающей средой можно получить из уравнения (2.11) переноса энтальпии. Локальная скорость изменения объемной концентрации энтальпии γh системы (дисперсная среда и связанное с нею вещество в трехфазном состоянии) равна дивергенции от удельного потока энтальпии. Последний, согласно равенству (2.6), равен сумме удельного потока тепла и произведению удельной энтальпии на удельный поток вещества:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\gamma_0 h_0 + \sum_{k=1}^{3} \gamma_0 h_k u_k\right) = -\nabla \cdot \left(j_q + \sum_{k=1}^{3} h_k j_{mk}\right). \tag{3.7}$$

Обозначим удельную изобарную теплоемкость через c_k, т. е.

$$c_k = \frac{dh_k}{dt}; \quad c_0 = \frac{dh_0}{dt}, \tag{3.8}$$

где $t = T\text{-}273$ — температура в °С, а приведенную удельную теплоемкость через c:

$$c = c_0 + \sum_{k=1}^{3} c_k u_k. \tag{3.9}$$

Тогда из уравнения переноса энтальпии получаем уравнение переноса тепла

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_q + \sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} h_k W_{kr}. \tag{3.10}$$

Представляет интерес рассмотреть частный случай двухфазного состояния ($k = 1,2$) связанного вещества (жидкость и пар), соответствующего области положительных температур по шкале Цельсия. В этом случае уравнение переноса тепла примет вид

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_q + \rho W, \tag{3.11}$$

где ρ — удельная теплота испарения ($\rho = \rho_{21} = \rho_{12}$), равная разности энтальпий ($\rho_{12} = h_1 - h_2$),

W — источник или сток жидкости ($W = W_{12} = -W_{21}$).

Если перенос жидкости и пара происходит под действием капиллярных и гидродинамических сил (молярный перенос

массы вещества с линейной скоростью w_k), то в правой части уравнения (3.11) надо написать дополнительный член, равный

$$-\sum_{k=1}^{2} c_k \gamma_k w_k \nabla t.$$

При выводе уравнения (3.11) было использовано соотношение

$$h_1 W_{12} + h_2 W_{21} = (h_1 - h_2) W_{12} = \rho W. \tag{3.12}$$

Последнее соотношение справедливо в том случае, когда имеет место термодинамическое равновесие пара и жидкости в капиллярах и порах дисперсной среды, что соответствует действительному процессу тепло- и массообмена при медленном движении жидкости и пара.

Дифференциальное уравнение переноса вещества можно написать так:

$$\gamma_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_1 + W_{21},$$
$$\gamma_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_2 + W_{12}, \tag{3.13}$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (j_1 + j_2), \tag{3.14}$$

индекс m здесь опущен для простоты написания.

При этом надо иметь в виду, что при обычных условиях (давление пара и газа близко к барометрическому) удельное массосодержание u_1 пара в капиллярах тела мало по сравнению с массосодержанием жидкости u_2 ($u_1 << u_2$). Поэтому при массосодержании u_2, отличном от нуля ($u_2 > 0$), можно приближенно считать общее массосодержание u связанного вещества в дисперсной среде равным массосодержанию жидкости ($u \approx u_2$).

Для процесса сушки капиллярно-пористых тел источник или сток W жидкости может быть выражен через локальную скорость изменения влагосодержания тела $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ при помощи критерия фазового превращения ε($\varepsilon = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$) по соотношению

$$W = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} \gamma_0. \tag{3.15}$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что пар и жидкость не поступают в пористое тело от внешних источников,

а парообразование во влажном теле происходит только за счет испарения жидкости, содержащейся в нем. Кроме того, можно с большей степенью точности для влажных тел, подвергаемых сушке, принять $u = u_2$. Критерий фазового превращения ε_{kr} связанного вещества из фазы k в фазу r определяется по соотношению

$$\varepsilon_{kr} \frac{du_{kr}}{du_k}. \tag{3.16}$$

Если векторы удельных потоков пара j_1 и жидкости j_2 направлены одинаково (параллельны), то критерий фазового превращения

$$\varepsilon = \frac{j_1}{j_1 + j_2}. \tag{3.17}$$

Следовательно, критерий ε определяет количество движущегося пара в пористом влажном теле по отношению к общему потоку жидкости и пара. Если $\varepsilon = 1$, то перенос вещества происходит только за счет переноса пара ($j_2 = 0$). В этом случае в качестве дифференциального уравнения переноса вещества принимается уравнение (3.14). При $\varepsilon = 0$ перенос вещества осуществляется путем переноса жидкости ($j_1 = 0$). В данном случае источник вещества отсутствует ($W = 0$) и уравнения (3.13), (3.14) превращаются в одно уравнение переноса вещества. При значении ε, лежащего в пределах $0 < \varepsilon < 1$, можно пользоваться обоими уравнениями переноса. Для талых и промерзающих грунтов критерий фазового превращения можно ввести только для твердой фазы ($k = 3$), поскольку лед не поступает в грунт от внешних источников, а образуется за счет фазового перехода жидкости в лед (переход 23) или путем аблимации (переход 13).

Обычно вводится коэффициент льдистости, равный отношению массы льда к массе всего связанного вещества. В наших обозначениях коэффициент льдистости

$$b = \frac{u_3}{u} \approx \frac{u_3}{u_2 + u_3}, \tag{3.18}$$

поскольку массосодержание пара ничтожно мало по сравнению с общим массосодержанием.

Если грунт не содержит льда ($u_3 = 0$), то коэффициент b равен нулю. Когда вся вода превращается в лед ($u_2 = 0$), то коэффициент b равен единице. В большинстве случаев критерий b меньше единицы ($0 < b < 1$). Дифференциальное уравнение переноса (3.4) для твердой фазы ($k = 3$) связанного вещества упрощается, так как движение льда не происходит ($j_3 = 0$)

$$\gamma_0 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} = W_{13} + W_{23}. \qquad (3.19)$$

Пользуясь соотношением (3.18) и полагая $u_1 = 0$, дифференциальное уравнение переноса жидкости можно написать так:

$$\frac{\gamma_0}{1-b} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (j_1 + j_2). \qquad (3.20)$$

Если пренебречь процессами сублимации ($W_{31} = 0$) и аблимации ($W_{13} = 0$), то уравнение переноса тепла значительно упрощается и принимает вид

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_q + (h_1 - h_2) W_{12} +$$

$$+ (h_2 - h_3) \frac{b\gamma_0}{1-b} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \sum_{k=1}^{2} c_k \gamma_k w_k \nabla t. \qquad (3.21)$$

Первый член правой части уравнения характеризует перенос тепла теплопроводностью, второй член — источник (сток) тепла, связанный с конденсацией пара (испарением жидкости), третий член — источник тепла, обусловленный переходом воды в лед, и четвертый член соответствует конвективному переносу тепла потоками пара и жидкости. Для того чтобы система дифференциальных уравнений переноса имела законченный вид, необходимо удельные потоки тепла j_q и вещества j_k выразить через термодинамические движущие силы. Последние можно сделать на основе современных представлений о молекулярном переносе энергии и вещества методами термодинамики необратимых процессов.

§ 4. Основные соотношения термодинамики необратимых процессов

В основе термодинамики необратимых процессов лежат два принципа: линейный закон и соотношение взаимности Онзагера. Согласно линейному закону, скорость v приближения системы к состоянию равновесия пропорциональна термодинамической движущей силе X, которая может быть выражена через градиент потенциала (удельный поток электричества пропорционален градиенту потенциала или напряженности поля, тепловой поток в процессе теплообмена кондукцией пропорционален градиенту температуры, диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации и т. д.).

Линейный закон является обобщением эмпирических закономерностей, установленных для системы, состояние которой приближается к состоянию равновесия.

Следовательно, линейный закон является экспериментальным законом и не имеет строгой теоретической основы. Однако необходимо отметить, что линейный закон можно вывести из статистической теории флюктуаций, если состояние системы близко к состоянию равновесия.

При наличии действия нескольких движущих сил скорость v_i приближения системы к состоянию равновесия, согласно линейному закону, может быть представлена в виде следующей суммы:

$$v_i = \sum_j L_{ij} X_j. \tag{4.1}$$

Диагональные члены характеризуют прямой эффект, соответствующий основной движущей силе, а перекрестные члены—влияние налагающих явлений.

Отдельные применения соотношения (4.1) были известны давно, но общая формулировка личейного закона впервые дана в термодинамике необратимых процессов. Термодинамическая движущая сила определяется из основного соотношения термодинамики необратимых процессов: произведение скорости возрастания энтропии $\dot{S}$ на абсолютную температуру равно сумме из произведений движущих сил на скорость приближения системы к состоянию равновесия:

$$\dot{S}T = \sum_i X_i v_i. \tag{4.2}$$

Воспользовавшись соотношением (4.1), получаем

$$\dot{S}T = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j. \tag{4.3}$$

Поскольку $\dot{S} > 0$, то сумма в соотношении (4.3) является существенно положительной величиной.

Вторым принципом термодинамики необратимых процессов является соотношение взаимности

$$L_{ij} = L_{ji}, \tag{4.4}$$

из которого следует, что перекрестные кинетические коэффициенты L равны.

Это соотношение было доказано Онзагером с помощью самых общих положений статистической механики.

Принцип взаимности есть отображение микроскопической обратимости, т. е. в условиях равновесия любой молекулярный процесс и процесс, обратный данному, протекает в среднем с одинаковой скоростью.

На этих основаниях была разработана формальная теория скорости необратимых процессов, которая успешно применяется к явлениям переноса и химической кинетики. При этом основным уравнением переноса является дифференциальное уравнение движения энтропии, которое в отличие от дифференциального уравнения движения энергии Умова имеет дополнительный член, выражающий положительный источник энтропии (возрастание энтропии в необратимых процессах). Законы классической термодинамики могут быть обоснованы при помощи методов статистической механики, поэтому некоторые исследователи склонны считать классическую термодинамику частью статистической механики. Молекулярно-кинетическая теория тепла даст не только наглядное физическое толкование основных соотношений термодинамики, но явится некоторым дополнением к выводам и результатам классической термодинамики. Успешное сочетание этих методов позволяет более глубоко и детально изучать ряд физических и физико-химических явлений.

§ 5. Система линейных уравнений Онзагера

Удельные потоки будем обозначать через I (количество переносимой субстанции в единицу времени через единицу площади изопотенциальной поверхности), термодинамические движущие силы—X и, наконец, кинетические коэффициенты—L. При этих условиях молекулярный перенос электрической энергии, тепла и вещества в однородном теле описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= L_{11}X_1 + L_{12}X_2 + L_{13}X_3 \\ I_2 &= L_{21}X_1 + L_{22}X_2 + L_{23}X_3 \\ I_3 &= L_{31}X_1 + L_{32}X_2 + L_{33}X_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.1)$$

При этом имеет место соотношение взаимности Онзагера

$$L_{12} = L_{21};\ L_{13} = L_{31};\ L_{23} = L_{32}. \qquad (5.2)$$

Термодинамической движущей силой потока тепла является отношение температурного градиента к температуре, т. е.

$$X_1 = X_q = -\frac{\nabla T}{T}. \qquad (5.3)$$

Аналогичные соотношения имеют место для движущих сил вещества и электричества

$$X_2 = X_м = -T\nabla\left(\frac{\mu}{T}\right), \tag{5.4}$$

где μ—химический потенциал (производная термодинамической функции при изохорно-изотермическом сопряжении по массе переносимого вещества).

$$X_3 = X_c = -\nabla\varphi, \tag{5.5}$$

где φ—электрический потенциал.

Работами А. В. Лыкова и А. П. Порхаева было установлено, что на перенос тепла и вещества в пограничном слое (обтекание влажного тела нагретым газом) влияет гидродинамическая движущая сила. В этом случае явление внутреннего трения или вязкости целесообразно рассматривать как процесс молекулярного переноса энергии упорядоченного движения. Обычно вязкость жидкости или газа рассматривается как перенос количества движения упорядоченного движения. В этом случае закон вязкого течения Ньютона не может быть сопоставлен с законами теплопроводности и диффузии в виде системы линейных уравнений Онзагера, так как движущие силы переноса тепла, вещества и количества движения представляют собой тензоры различных рангов. На основании теоремы Кюри в систему Онзагера могут быть включены движущие силы, которые представляют собой тензоры одинакового ранга или степень ранга их отличается на четное число. Этому условию не удовлетворяют движущие силы тепла и количества движения упорядоченного движения. Однако если вязкость рассматривать как молекулярный перенос энергии упорядоченного движения, то противоречие теореме Кюри отпадает, поскольку движущие силы переноса тепла, вещества и энергии упорядоченного движения представляют собой тензор одного и того же ранга.

Движущей силой молекулярного переноса кинетической энергии упорядоченного поступательного движения является градиент кинетической энергии поступательного движения единицы массы жидкости, т. е.

$$X_4 = X_э = -\nabla\left(\frac{\gamma w^2}{2}\right), \tag{5.6}$$

где γ и w—соответственно плотность и линейная скорость движения жидкости или газа.

В этом случае к системе линейных уравнений (5.1) надо присоединить еще одно уравнение

$$I_4 = L_{41}X_1 + L_{42}X_2 + L_{43}X_3 + L_{44}X_4, \qquad (5.7)$$

где I_4—удельный поток кинетической энергии упорядоченного движения, переносимой за счет молекулярного хаотического движения.

Из соотношений (5.3)—(5.6) следует, что термодинамическая движущаяся сила соответствующего вида переноса прямо пропорциональна градиенту потенциала этого вида переноса. Знак минус необходим благодаря основной аксиоме переноса: перенос происходит от высшего потенциала к низшему. Если обозначить потенциал i переноса через Π_i, то можно написать

$$X_i = -K_i \nabla \Pi_i. \qquad (5.8)$$

Коэффициент пропорциональности K_i зависит от способа выбора потоков и сил, в частном случае он может быть равен единице. В термодинамике необратимых процессов доказывается, что соотношения взаимности Онзагера справедливы при любом способе выбора потоков и сил, т. е. доказывается инвариантность симметрии матриц L_{ik}.

Таким образом, в общем случае молекулярный перенос описывается следующей системой линейных уравнений Онзагера:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sum_i L_{1i}X_i \\ I_2 &= \sum_i L_{2i}X_i \\ I_3 &= \sum_i L_{3i}X_i \\ &\cdots\cdots \\ I_j &= \sum_i L_{ji}X_i \end{aligned}\right\}. \qquad (5.9)$$

В зависимости от вида переноса можно ограничиться несколькими термодинамическими силами.

§ 6. Дифференциальное уравнение переноса энтропии

Основное соотношение для выбора термодинамических сил (произведение абсолютной температуры на скорость возрастания объемной концентрации энтропии равно сумме из произведений потока на термодинамическую силу) является дифференциальным уравнением переноса энтропии.

Для составления баланса энтропии необходимо наличие четырех дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение переноса массы, получаемое на основе закона сохранения массы вещества.

Обозначим концентрацию k-компонента вещества через ω_k (M_k—масса, k—компонента вещества в единице полного объема V), скорость химической реакции через W_c (количество вещества, возникающего в результате химической реакции в единице объема в единицу времени). Тогда имеем:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \tau} = - \nabla \cdot \omega_k \vec{w}_k + \nu_k W_c, \tag{6.1}$$

где $\vec{w}_k$—вектор скорости компонента k,

ν_k—величина, равная стехиометрическому числу этого компонента, умноженному на молекулярный вес.

При этом имеет место соотношение

$$\sum_k \nu_k = 0. \tag{6.2}$$

Суммируя уравнение (6.1) по всем компонентам k, получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = - \nabla \cdot \omega \vec{w}, \tag{6.3}$$

где ω—суммарная концентрация, или плотность смеси, т. е.

$$\omega = \sum_k \omega_k = \frac{1}{V} \sum_k M_k = \frac{M}{V}, \tag{6.4}$$

$\vec{w}$—вектор скорости центра тяжести массы M, т. е.

$$\vec{w} = \frac{1}{\omega} \sum_k \omega_k \vec{w}. \tag{6.5}$$

Обозначим полную производную по времени через $\frac{d}{d\tau}$, т. е.

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{w} \nabla. \tag{6.6}$$

Поток компонента k определяется относительно движущегося центра тяжести всей массы вещества

$$I_k = \omega_k \left(\vec{w}_k - \vec{w} \right). \tag{6.7}$$

Из соотношений (6.5) и (6.7) следует

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0. \tag{6.8}$$

В этом случае дифференциальное уравнение переноса k-компонента вещества можно написать так:

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = -\omega_k \nabla \cdot \vec{w} - \nabla \cdot I_k + \nu_k W_c. \tag{6.9}$$

Если ввести весовую концентрацию или удельное массосодержание по соотношению

$$u_k = \frac{\omega_k}{\omega} = \frac{M_k}{M}, \tag{6.10}$$

дифференциальное уравнение (6.9) будет иметь вид

$$\omega \frac{du_k}{d\tau} = -\nabla \cdot I_k + \nu_k W_c. \tag{6.11}$$

На основании соотношения (6.6) уравнение (6.3) можно написать так:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\omega \nabla \cdot \vec{w}. \tag{6.12}$$

2. Вторым дифференциальным уравнением является уравнение действия внешних сил. Обозначим давление через P, внешнюю силу, действующую на единицу массы k-компонента, через F_k, тогда, пренебрегая силами вязкости, можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\omega \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} = -\nabla P + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \omega_k. \tag{6.13}$$

3. Дифференциальное уравнение энергии можно написать так:

$$\frac{\omega d\left(\frac{1}{2}\vec{w}^2 + E\right)}{d\tau} = -\nabla \cdot (P\vec{w} + I_q) + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \vec{w}_k \omega_k, \tag{6.14}$$

где E — внутренняя энергия,

I_q — удельный поток тепла.

Это уравнение можно переписать по-иному. Введем понятие общей энергии единицы объема

$$E_{об} = E_v + \frac{1}{2} w^2.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dE_{об}}{d\tau} = -\nabla \cdot I_E, \tag{6.15}$$

где

$$I_E = (E_{об} + Pv)\,\omega\,\vec{w} + I_q, \tag{6.16}$$

v — удельный объем.

4. Четвертым уравнением является уравнение Гиббса

$$T\frac{dS}{d\tau} = \frac{dE}{d\tau} + P\frac{dV}{d\tau} - \sum_k \mu_k \frac{dM_k}{d\tau}, \tag{6.17}$$

которое написано через полные производные относительно центра тяжести движущей массы вещества. Это уравнение может быть применено как для закрытых, так и для открытых систем.

Перейдем к удельным значениям, т. е.

$$T\frac{ds}{d\tau} = \frac{de}{d\tau} + p\frac{dv}{d\tau} - \sum_k \mu_k \frac{du_k}{d\tau}, \tag{6.18}$$

где $s = \frac{S}{M}$ — удельная энтропия, e — удельная энергия.

При этом необходимо иметь в виду, что масса M является величиной переменной и имеет место следующее соотношение:

$$Ts = e + pv - \sum_k \mu_k u_k \ . \tag{6.19}$$

Средний химический потенциал равен

$$\mu = \sum_k \mu_k u_k = \frac{1}{\omega}\sum_k \mu_k \omega_k = e - Ts + pv. \tag{6.20}$$

Если уравнение (6.13) умножить на w и вычесть из уравнения (6.14), то исключается кинетическая энергия движения центра инерции и получается выражение для изменения энергии e

$$\omega\frac{de}{d\tau} = -p\nabla\cdot w - \nabla\cdot j_q + \sum_k \vec{F}_k j_k \ . \tag{6.21}$$

Подставляя сюда соотношение (6.12), получим

$$\frac{de}{d\tau} = -p\frac{dv}{d\tau} - \frac{1}{\omega}\nabla\cdot j_q + \frac{1}{\omega}\sum_k \vec{F}_k j_k \ . \tag{6.22}$$

Используя (6.11)—(6.22), из уравнения (6.18) получим

$$\omega T \frac{ds}{d\tau} = -\nabla \cdot j_q + \sum_k \vec{F}_k i_k + \sum_k \mu_k \nabla \cdot j_k - W_c \sum_k \mu_k \nu_k . \quad (6.23)$$

Это соотношение можно написать так:

$$\omega \frac{ds}{d\tau} = -\nabla \cdot j_s + \sigma, \quad (6.24)$$

где

$$j_s = \frac{1}{T}\left(j_q - \sum_k \mu_k j_k\right), \quad (6.25)$$

$$\sigma = \frac{1}{T}\left(j_q X_q + \sum_k j_k X_k + A W_c\right), \quad (6.26)$$

$$X_q = -\frac{1}{T}\nabla T; \quad X_k = \vec{F}_k - T \nabla \left(\frac{\mu_k}{T}\right),$$

$$A = -\sum_k \mu_k \nu_k \text{ — химическое сродство.} \quad (6.27)$$

Следовательно, локальная скорость изменения энтропии равна дивергенции от потока энтропии j_s и источнику энтропии σ, связанному с необратимыми процессами тепломассопереноса.

Обозначим объемную концентрацию энтропии через S_v.

$$S_v = \frac{S}{V} = s\omega . \quad (6.28)$$

Тогда, используя соотношение

$$\omega \frac{ds}{d\tau} = \frac{\partial S_v}{\partial \tau} + \nabla \cdot S_v w , \quad (6.29)$$

получим дифференциальное уравнение переноса энтропии в виде

$$\frac{dS_v}{d\tau} = -\nabla \cdot (j_s + S_v w) + \sigma . \quad (6.30)$$

§ 7. Система дифференциальных уравнений переноса тепла и вещества в капиллярно-пористых телах

Рассмотрим подробно перенос тепла и вещества в капиллярно-пористых телах при наличии фазовых превращений. Будем рассматривать движение жидкости и пара внутри

пористого тела ($u_3=0$). При обычном, неизменном барометрическом давлении удельное массосодержание пара в порах тела ничтожно мало по сравнению с удельным содержанием жидкости ($u_2 \gg u_1$). Поэтому будем считать, что общее удельное массосодержание связанного вещества (влаги) равно удельному массосодержанию жидкости. Это положение соответствует методу определения влагосодержания тела (сушка в термостате при 105°С до постоянного веса), при котором удаляется влага в виде жидкости.

Дифференциальное уравнение переноса k-фазы связанного вещества в капиллярно-пористом теле в условиях сорбции или десорбции будет иметь вид

$$\gamma_0 \frac{\partial u_k}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_{mk} + \sum_i \varepsilon_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \gamma_0. \qquad (7.1)$$

Второй член правой части уравнения (7.1) должен рассматриваться как источник или сток k-фазы связанного вещества в результате превращения его из фазы k в фазу i и обратно — i в k.

Используя соотношение (3.3), дифференциальное уравнение переноса вещества в фазе k можно переписать так:

$$\gamma_0 \frac{\partial u_k}{\partial \tau} = -\nabla \cdot j_{mk} + \sum_k \varepsilon_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \gamma_0. \qquad (7.2)$$

Дифференциальное уравнение переноса тепла получается из уравнения переноса энтальпии, которое на основании закона сохранения энергии можно сформулировать так: локальная скорость изменения энтальпии в бесконечно малом объеме равна дивергенции от удельного потока энтальпии

$$\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(h_0 + \sum_k h_k u_k \right) = -\nabla \cdot \left(j_q + \sum_k h_k j_{mk} \right). \qquad (7.3)$$

Если тело содержит связанное вещество только в виде пара и жидкости ($u_3 = 0$), то $u = u_2$, так как при атмосферном давлении масса влажного газа в порах и капиллярах тела ничтожно мала по сравнению с массой жидкости ($u_1 \ll u_2$).

Перенос связанного вещества в любом состоянии определяется действием массовой движущей силы (градиент потенциала переноса влаги) и тепловой движущей силой (градиент температуры), т. е.

$$j_{mk} = -\lambda'_k \nabla \vartheta_k - \lambda''_k \nabla t, \qquad (7.4)$$

где ϑ_k — потенциал переноса связанного вещества в k-фазе,

λ'_k — коэффициент массопроводности связанного вещества,

λ_k'' — термический коэффициент массопроводности связанного вещества.

При изотермических условиях ($\nabla t = 0$) перенос связанного вещества в виде пара определяется только первым членом формулы (7.4); при этом потенциалом диффузионного переноса пара является парциальное давление пара или относительная концентрация молекул, т. е.

$$j_1 = -\lambda_1' \nabla p_1 = -\lambda_1' P \nabla \nu, \tag{7.5}$$

где $P = p_1 + p_b$ — общее барометрическое давление,

p_b — парциальное давление воздуха,

ν — относительная концентрация молекул, равная отношению объемной концентрации молекул пара (n_1) к объемной концентрации молекул смеси ($n_1 + n_b$),

$$\nu = \frac{n_1}{n_1 + n_b}. \tag{7.6}$$

Если воспользоваться уравнением состояния идеального газа

$$p = nkT = \frac{\omega RT}{\mu}, \tag{7.7}$$

где μ — молекулярный вес, k — постоянная Больцмана, R — универсальная газовая постоянная, ω — объемная концентрация газа или пара, то формула (7.5) превращается в известную формулу закона диффузии Фика

$$j_1 = -\lambda_1' \frac{RT}{\mu_1} \nabla \omega_1 = -D' \nabla \omega_1, \tag{7.8}$$

где $D' = \dfrac{\lambda_1' RT}{\mu_1}$ — коэффициент диффузии пара в воздухе.

В случае неизотермического молекулярного переноса пара необходимо пользоваться формулой (7.4).

При переносе вещества в виде жидкости можно написать аналогичное соотношение

$$j_2 = -\lambda_2' \nabla \theta_2 - \lambda_2'' \nabla t. \tag{7.9}$$

При изотермических условиях закон переноса жидкости описывается соотношением

$$j_2 = -\lambda_2' \nabla \theta_2. \tag{7.10}$$

При постоянной температуре ($T = \text{const}$) потенциал переноса жидкости θ_2 есть однозначная функция массосодержания жидкости u_2 (влагосодержания тела u).

В этом случае скалярная величина вектора $\nabla \theta_2$ равна $\partial\theta_2/\partial n$, где n — нормаль к изопотенциальной поверхности. Имеем:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial n} = \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)_T \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{7.11}$$

Частная производная влагосодержания тела по потенциалу переноса жидкости при постоянной температуре равна изотермической массоемкости

$$c'_T = \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_2}\right)_T. \tag{7.12}$$

Тогда градиент потенциала θ_2 будет равен:

$$\nabla \theta_2 = \frac{1}{c'_T} \nabla u. \tag{7.13}$$

Следовательно, закон переноса жидкости можно написать так:

$$j_2 = -\frac{\lambda'_2}{c'_T} \nabla u, \tag{7.14}$$

т. е. удельный поток жидкости пропорционален градиенту удельного влагосодержания (закон изотермической влагопроводности).

Умножим и разделим правую часть (7.14) на плотность абсолютно сухого тела γ_0. Тогда будем иметь

$$j_2 = -a'_2 \gamma_0 \nabla u; \quad a'_2 = \frac{\lambda'_2}{c'_T \gamma_0}. \tag{7.15}$$

Коэффициент переноса a'_2, аналогичный коэффициенту температуропроводности a, мы называем массообменным коэффициентом потенциалопроводности, поскольку коэффициент a можно назвать теплообменным коэффициентом потенциалопроводности.

Закон молекулярного переноса тепла (закон Фурье) можно написать в аналогичной форме

$$q = -\lambda \nabla T = -a\gamma_0 \nabla h; \quad a = \frac{\lambda}{c\gamma_0}, \tag{7.16}$$

так как

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_{u,\,p} \nabla h = -\frac{1}{c_p} \nabla h, \tag{7.17}$$

где h — энтальпия влажного тела, рассчитанная на 1 кг массы абсолютно сухого тела (ккал/кг сухого тела),

c_p — удельная изобарная теплоемкость влажного тела, рассчитанная на 1 кг абсолютно сухого тела (ккал/град·кг сухого тела), а именно

$$c = c_0 + c_2 u. \tag{7.18}$$

Следует отметить, что выражение закона изотермической влагопроводности справедливо только в условиях непрерывного поля влагосодержания. Если имеем систему соприкасающихся тел с разными удельными массоемкостями (влагоемкости), то на границе соприкосновения существует скачок влагосодержаний. Поэтому перенос вещества (влаги) через границу соприкосновения может происходить от меньшего влагосодержания к большему, т. е. влагосодержание не является потенциалом переноса влаги.

При неизотермических условиях необходимо исходить из формулы (7.4); кроме того, потенциал переноса θ_2 в общем случае является функцией не только влагосодержания, но и температуры. В этом случае основной закон переноса жидкости можно написать так:

$$j_2 = -\lambda_2' \nabla \theta_2 - \lambda_2'' \nabla t = -\lambda_2' \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)_T \nabla u - \lambda_2' \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial T}\right)_u \nabla t - \lambda_2'' \nabla t. \tag{7.19}$$

Величина $\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial T}\right)_u$ является температурным коэффициентом потенциала переноса жидкости, а $\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)_T$ — величина, обратная удельной изотермической массоемкости.

Перепишем формулу (7.19) с учетом (7.13) и (7.15).

$$j_2 = -\frac{\lambda_2'}{c_T'} \nabla u - \frac{\lambda_2'}{c_T'} c_T \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial T}\right)_u + \frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}\right] \nabla t. \tag{7.20}$$

Введем термоградиентный коэффициент по соотношению

$$\delta_2 = -\frac{\nabla u}{\nabla t} = -\frac{\Delta u}{\Delta t}, \quad \text{при } j_2 = 0, \tag{7.21}$$

т. е. термоградиентный коэффициент численно равен отношению перепадов влагосодержания и температуры в стационарном состоянии при отсутствии массообмена.

Тогда коэффициент

$$\delta_2 = c_T' \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial T}\right)_u + c_T' \frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}. \tag{7.22}$$

Если величина $\frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}$ мала, то термоградиентный коэффициент δ_2 будет равен температурному коэффициенту потенциала переноса жидкости, умноженному на изотермическую удельную массоемкость тела.

Если же температурный коэффициент мал

$$\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial T}\right)_u \ll \frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}, \tag{7.23}$$

то термоградиентный коэффициент δ_2 равен произведению коэффициента Соре δ_s на удельную массоемкость:

$$\delta_2 = \delta_s c_T' = \frac{\lambda_2''}{\lambda_2'} c_T. \tag{7.24}$$

Следовательно, уравнение переноса жидкости (7.20) можно написать так:

$$j_2 = -a_2' \gamma_0 \nabla u - a_2' \gamma_0 \delta_2 \nabla t. \tag{7.25}$$

Подставим полученное соотношение (7.25) в дифференциальное уравнение (7.2) переноса массы вещества, тогда получим

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla \cdot (a_2' \gamma_0 \nabla u + a_2' \delta_2 \nabla t) + \varepsilon \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}, \tag{7.26}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$ — критерий фазового превращения жидкости в пар и обратно.

Величина $\varepsilon \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}$ является стоком или источником жидкости за счет испарения или конденсации. Коэффициенты a_2' и δ_2 являются переменными; они зависят от температуры и влагосодержания тела. Если расчеты производить по зонам, на которые разбивается процесс нестационарного тепло- и массообмена, то для каждой зоны коэффициенты a_2' и δ_2 можно принять постоянными. В этом случае уравнение (7.26) можно написать так:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_2' \nabla^2 u + a_2' \delta_2 \nabla^2 t + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{7.27}$$

Если ввести эквивалентный коэффициент переноса жидкости (коэффициент потенциалопроводности переноса связанного вещества) по соотношению

$$a' = \frac{a_2'}{1-\varepsilon}, \tag{7.28}$$

то дифференциальное уравнение (7.27) переноса вещества примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a' \nabla^2 u + a' \delta_2 \nabla^2 t. \qquad (7.29)$$

Это соотношение справедливо при $\varepsilon < 1$. Если критерий фазового превращения равен единице ($\varepsilon = 1$), то движение жидкости отсутствует и изменение влагосодержания тела происходит только за счет фазовых превращений.

В этом случае перенос вещества должен рассматриваться на основе законов движения парообразной влаги.

Остановимся на этом подробней.

Дифференциальное уравнение (3.5) в нашем случае имеет вид

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (j_1 + j_2). \qquad (7.30)$$

Поставим вместо j_1 и j_2 соответствующие выражения, используя соотношение (7.4). Тогда дифференциальное уравнение (7.30) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla \cdot [(a_1' + a_2') \nabla u + (a_1' \delta_1 + a_2' \delta_2) \nabla t]. \qquad (7.31)$$

При этом предполагается, что векторы j_1 и j_2 параллельны. Введем обозначения

$$a' = a_1' + a_2'; \quad \delta = \frac{a_1' \delta_1 + a_2' \delta_2}{a_1' + a_2'}, \qquad (7.32)$$

тогда уравнение (7.31) можно написать так:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla \cdot (a' \nabla u + a' \delta \nabla t). \qquad (7.33)$$

В данном случае критерий

$$\varepsilon = \frac{j_1}{j_1 + j_2}. \qquad (7.34)$$

Если перенос вещества происходит в виде пара ($\varepsilon = 1$, $j_2 = 0$), то уравнение (7.31) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla \cdot (a_1' \nabla u + a_1' \delta_1 \nabla t). \qquad (7.35)$$

Представляет интерес сопоставить уравнения (7.33) и (7.29). Определим j_1 из соотношения (7.34) и подставим полученное выражение в уравнение (7.30), тогда будем иметь

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \left(\frac{j_2}{1-\varepsilon}\right) = \nabla \cdot \left[\frac{a_2'}{1-\varepsilon} (\nabla u + \delta_2 \nabla t)\right]. \qquad (7.36)$$

Полагая критерий ε постоянным, находим

$$a' = \frac{a'_2}{1-\varepsilon}; \quad \delta = \delta_1 = \delta_2. \tag{7.37}$$

Последнее равенство обусловлено соотношениями $u_2 = u$, так как $u_2 \gg u_1$.

При выводе дифференциального уравнения переноса тепла мы считаем, что пар в порах и капиллярах тела находится в термическом и молекулярном равновесии с жидкостью. Перенос вещества проходит медленно, так что температура жидкости равна температуре стенок скелета пористого тела.

Дифференциальное уравнение переноса тепла получается из уравнения (3.11), в котором источник (сток) вещества определяется соотношением (3.15)

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \varepsilon\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} - \sum_{k=1}^{2} c_k \gamma_k w_k \nabla t, \tag{7.38}$$

где

$$c\gamma_0 = (c_0 + c_2 u_2 + c_1 u_1)\gamma_0 = (c_0 + c_2 u_2)\gamma_0. \tag{7.39}$$

Так как удельное массосодержание пара ничтожно мало по сравнению с массосодержанием жидкости ($u_1 \ll u_2$), то $u_2 = u$.

Уравнение переноса тепла (7.38) является уравнением типа уравнения Фурье—Кирхгофа, которое выводится для движущейся жидкости. Оно получается из уравнения (7.38), если в нем положить $\varepsilon = 0$; $w_1 = 0$; $c = c_2$ и $\gamma_0 = \gamma_2$.

В уравнении (7.38) величина $\sum_k c_k \gamma_k w_k \nabla t$ учитывает конвективную составляющую переноса тепла движущимися жидкостью и паром, а первый член правой части уравнения $[\nabla \cdot (\lambda \nabla t)]$ — кондуктивную составляющую переноса тепла, (перенос тепла теплопроводностью).

Величина $\varepsilon\rho\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}$ является источником (стоком) тепла, обусловленным процессами испарения жидкости или конденсации пара.

При нагревании влажных тел или при сушке их перенос тепла движущимися жидкостью и паром (конвективные составляющие переноса) очень малы как по сравнению с источником тепла фазового превращения, так и по сравнению с кондуктивной составляющей переноса тепла. Поэтому этими членами можно пренебречь, если критерий Рейнольдса (Re) для движущегося пара или жидкости меньше единицы, т. е.

$$\mathrm{Re} = \frac{j_k d_э}{\eta} < 1, \tag{7.40}$$

где η — динамическая вязкость движущегося вещества пара или жидкости в кг/м·час,

$j_k = \gamma_k w_k$ — удельный молярный поток связанного вещества,

$d_э$ — эквивалентный диаметр пористого тела в м.

Обычно в процессах сушки критерий Re для движущегося пара или жидкости меньше 0,1.

С учетом сказанного дифференциальное уравнение переноса тепла превращается в уравнение теплопроводности Фурье с источником (стоком) тепла, обусловленным фазовыми превращениями, т. е.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c\gamma_0} \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \frac{\varepsilon\rho}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \qquad (7.41)$$

Система дифференциальных уравнений переноса вещества и тепла (7.26) и (7.41) является нелинейной системой, поскольку коэффициенты переноса зависят от влагосодержания и температуры. Если расчет нестационарного процесса тепло- и массообмена производить по зонам (частям), в каждой из которых коэффициенты принимаются постоянными (усредненными для каждой зоны), то мы при значительном упрощении самой системы уравнений получаем, как показывает опыт, хорошее совпадение.

Таким образом, для зональной системы расчета процесса тепло- и массообмена система дифференциальных уравнений переноса тепла и вещества примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \varepsilon \frac{\rho}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad (7.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a' \nabla^2 u + a' \delta \nabla^2 t. \qquad (7.43)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности (7.42) можно привести к уравнению (7.43), если вместо температуры ввести энтальпию (удельное теплосодержание) влажного тела h, т. е.

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = a \nabla^2 h + \varepsilon\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \qquad (7.44)$$

Можно, наоборот, дифференциальное уравнение массопроводности (7.43) написать аналогично уравнению теплопроводности (7.42)

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = a' \nabla^2 \theta_2 + a' \frac{\delta}{c'_T} \nabla^2 t. \qquad (7.45)$$

Если у потенциала переноса жидкости θ_2 опустить индекс 2 и принять во внимание соотношение (7.24), система дифференциальных уравнений переноса тепла и вещества примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \varepsilon\rho \frac{c'_T}{c} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \qquad (7.46)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a' \nabla^2 \theta + \delta_s a' \nabla^2 t, \qquad (7.47)$$

где $\delta_s = \dfrac{\delta}{c_T'}$ — коэффициент Соре для влажного тела.

Для ряда режимов нестационарного процесса тепло- и массопереноса коэффициент Соре — величина очень малая, так что вторым членом правой части уравнения (7.47) можно пренебречь.

ГЛАВА II

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЕЩЕСТВА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Внутренний тепло- и массообмен описывается системой дифференциальных уравнений переноса (см. гл. I), которую для одномерных тел можно записать так:

$$\frac{\partial t(\xi,\tau)}{\partial \tau} = a_q\left[\frac{\partial^2 t(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial t(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right] + \frac{\varepsilon \rho c'_{\text{т}}}{c_q}\frac{\partial \theta(\xi,\tau)}{\partial \tau}, \qquad (\text{I}')$$

$$\frac{\partial \theta(\xi,\tau)}{\partial \tau} = a_m\left[\frac{\partial^2 \theta(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial \theta(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right] + a_m\delta\left[\frac{\partial^2 t(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi}\frac{\partial t(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right], \qquad (\text{II}')$$

где t — температура тела (потенциал переноса тепла),

θ — потенциал переноса вещества,

c_q и $c'_{\text{т}}$ — соответственно удельная теплоемкость и массоемкость,

$a_q = \dfrac{\lambda}{c\gamma_0}$ — коэффициент температуропроводности (коэффициент потенциалопроводности переноса тепла),

$a_m = \dfrac{\lambda_m}{c'_{\text{т}}\gamma_0}$ — коэффициент потенциалопроводности переноса вещества,

λ_m — коэффициент массопроводности,

δ — коэффициент Соре для влажного тела,

ρ — удельная теплота фазового превращения,

Γ — постоянная формы (для неограниченной пластины $\Gamma = 0$, для цилиндра $\Gamma = 1$, для шара $\Gamma = 2$),

ξ — обобщенная координата, выбираемая в соответствии с формой тела (для неограниченной пластины и стержня $\xi = x$, для неограниченного цилиндра и шара $\xi = r$),

ε — критерий фазового перехода.

Эта система дифференциальных уравнений (I′ — II′) может быть записана в другой форме, если вместо потенциала переноса вещества θ ввести удельное массосодержание (влагосодержание) тела u:

$$\frac{\partial t(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a_q \left[\frac{\partial^2 t(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right] + \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau}, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a_m \left[\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right] + a_m \delta \left[\frac{\partial^2 t(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right]. \qquad (II)$$

Система уравнений (I—II) отличается от системы уравнений (I′—II′) только тем, что в первом случае коэффициент δ обозначает коэффициент Соре, а во втором случае—термоградиентный коэффициент δ, и затем вместо отношения массоемкости к теплоемкости $\left(\frac{c'_\text{т}}{c}\right)$ в последний член первого уравнения входит величина, обратная теплоемкости.

Поэтому полученные решения системы уравнений (I—II) можно использовать для решения системы уравнений переноса (I—II) с заменой отношения $\frac{c'_\text{т}}{c}$ на величину $\left(\frac{1}{c_q}\right)$, при этом θ надо заменить на удельное влагосодержание тела u. Учитывая сказанное, для удобства изложения будем рассматривать систему уравнений (I—II), но для подчеркивания тесной связи, существующей между уравнениями (I′— II′) и (I—II), отношение $\frac{c'_\text{т}}{c_q}$ обозначим через $\frac{1}{c}$. Тогда, заменив θ на u и величину c на c_q, получим решение для системы уравнений (I′—II′).

Аналитические решения (I—II) для граничных условий первого рода и неизменном интегральном удельном влагосодержании были даны С. П. Кузнецовым и Е. И. Сизяковой. Решения для граничных условий второго рода при отсутствии термоградиентного переноса массы ($\delta = 0$) и произвольных начальных условиях получил М. С. Смирнов. Полная система уравнений внутреннего тепло- и массообмена при граничных условиях третьего рода и различном законе изменения тем-

пературы среды во времени была решена Ю. А. Михайловым и для неограниченной пластины при $t_c = \text{const}$—А. В. Лыковым. Частные случаи решения неполной системы уравнений (I—II) дали Ф. М. Полонская, С. П. Кузнецов, А. В. Лыков, П. Д. Лебедев, Ю. А. Михайлов и М. С. Смирнов.

Влияние на процесс тепло- и массообмена отдельных критериев теплового и массового подобия было исследовано А. В. Лыковым, Ю. А. Михайловым, П. Д. Лебедевым и Е. И. Сизяковой. С. П. Кузнецов и Е. И. Сизякова на основе полученных аналитических решений разработали экспресс-методы экспериментального определения коэффициентов тепломассопереноса. Характерная особенность названных выше решений состоит в том, что все они получены посредством методов интегральных преобразований. Анализ и практика расчетов показывают, что использование классических методов не позволяет эффективно разделить переменные t и θ и довести тем самым решение задачи до конца. Применение методов интегральных преобразований все эти трудности успешно преодолевает.

Ниже будут даны решения системы уравнений внутреннего тепло- и массообмена для классических одномерных тел.

Краевые условия системы дифференциальных уравнений (I—II) в случае граничных условий третьего рода можно написать так:

$$-\lambda \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial \xi} + \alpha [t_c - t(R,\tau)] - $$

$$- (1-\varepsilon) \rho \beta \gamma_0 [\theta(R,\tau) - \theta_p] = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$a_m \frac{\partial \theta(R,\tau)}{\partial \xi} + a_m \delta \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial \xi} + \beta [\theta(R,\tau) - \theta_p] = 0, \qquad \text{(IV)}$$

где α — коэффициент теплообмена,

β — коэффициент массообмена,

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta(0,\tau)}{\partial \xi} = 0,$$

$$t(0,\tau) < \infty, \qquad \text{(V)}$$

$$\theta(0,\tau) < \infty,$$

$$t(\xi,0) = f(\xi); \quad \theta(\xi,0) = \varphi(\xi). \qquad \text{(VI)}$$

Особое значение имеет решение системы уравнений (I—II) при краевых условиях (III—VI) с постоянным и параболическим начальным распределением потенциалов переноса тепла и вещества, т. е.

$$f(\xi) = t_0 = \text{const}, \quad \varphi(\xi) = \theta_0 = \text{const},$$

$$f(\xi) = t_ц + \frac{\xi^2}{R^2}(t_п - t_ц), \quad \varphi(\xi) = \theta_ц - \frac{\xi^2}{R^2}(\theta_ц - \theta_п).$$

Например, постоянное начальное распределение потенциалов переноса может служить аналогом прогрева влажного тела, параболические начальные условия—аналогом периода падающей скорости сушки и др.

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества в среде с постоянной температурой

Общий прием решения полной системы уравнений внутреннего тепло- и массообмена мы покажем на примере нахождения поля потенциалов переноса тепла и вещества для тел в форме неограниченной пластины и шара. Приведенные в данной главе решения получены посредством преобразований Лапласа.

а) *Неограниченная пластина. Постоянные начальные условия* ($\Gamma = 0$, $\xi = x$, $f(x) = t_0 = \text{const}$, $\varphi(x) = \theta_0 = \text{const}$). Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (I—II), получим:

$$st_L(x, s) - t_0 = a_q t''_L(x, s) + \frac{\varepsilon\rho}{c} s\theta_L(x, s) - \frac{\varepsilon\rho}{c}\theta_0, \quad (1.1)$$

$$s\theta_L(x, s) - \theta_0 = a_m \theta''_L(x, s) + a_m \delta t''_L(x, s). \quad (1.2)$$

Дифференциальное уравнение для температуры $t_L(x, s)$ найдем следующим образом: из уравнения (1.1) определим $\theta_L(x, s)$, его вторую производную $\theta''_L(x, s)$ и подставим полученные выражения в уравнение (1.2). После упрощений будем иметь

$$t^{IV}_L(x, s) - \left(\frac{s}{a_q} + \frac{\varepsilon\rho\delta s}{a_q c} + \frac{s}{a_m}\right) t''_L(x, s) + \frac{s^2}{a_q a_m} t_L(x, s) - \frac{st_0}{a_q a_m} = 0. \quad (1.3)$$

Общий интеграл неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (1.3) можно определить, еще раз воспользовавшись преобразованием Лапласа по координате x. Проведение необходимых операций дает нам

$$t_L(x, s) = \frac{t_0}{s} + C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x} +$$

$$+C_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x}+C_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x}, \qquad (1.4)$$

где C_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — произвольные постоянные,

$$\nu_j^2=\frac{1}{2}\left[\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^j\sqrt{\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2-\frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right],\ (j=1,2). \qquad (1.5)$$

Условия симметрии (V) в изображениях можно записать так:

$$t'_L(0,s)=\theta'_L(0,s)=0.$$

Из этого условия следует $C_1=C_3$ и $C_2=C_4$.

Значит, решение для изображения температуры (1.4) перепишется так:

$$t_L(x,s)=\frac{t_0}{s}+B_1\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x+B_2\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x. \qquad (1.6)$$

Здесь B_1 и B_2 — новые постоянные относительно x.

Общее решение для изображения потенциала массопереноса $\theta_L(x,s)$ получим подстановкой $t''_L(x,s)$, найденного из уравнения (1.6), и $t_L(x,s)$ в (1.1). Имеем:

$$\theta_L(x,s)=\frac{\theta_0}{s}+\frac{c}{\varepsilon\rho}B_1(1-\nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x+$$

$$+\frac{c}{\varepsilon\rho}B_2(1-\nu_2^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x. \qquad (1.7)$$

B_1 и B_2 определим из граничных условий (III—IV), которые после применения преобразования Лапласа будут:

$$-\lambda t'_L(R,s)+\alpha\left[\frac{t_c}{s}-t_L(R,s)\right]-$$

$$-(1-\varepsilon)\rho\beta\left[\theta_L(R,s)-\frac{\theta_p}{s}\right]=0, \qquad (1.8)$$

$$\lambda_m\theta'_L(R,s)+\lambda_m\delta t'_L(R,s)+\beta\left[\theta_L(R,s)-\frac{\theta_p}{s}\right]=0. \qquad (1.9)$$

Найдем из уравнений (1.6) и (1.7) $t_L\ (R, s)$, $t'_L(R, s)$, $\theta_L\ (R,s)$, $\theta'_L(R,s)$ и подставим полученные значения в граничные условия (1.8) и (1.9). В результате будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&- B_1\left\{\lambda\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R + \right.\\
&+ \left.\left[\alpha + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,c\beta\,(1-\nu_1^2)\right]\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right\} -\\
&- B_2\left\{\lambda\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R + \left[\alpha + \right.\right.\\
&+ \left.\left.\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,c\beta\,(1-\nu_2^2)\right]\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right\} +\\
&+ \frac{\alpha(t_c - t_0)}{s} - (1-\varepsilon)\,\rho\beta\,\frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0, \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_1\left\{\left[\lambda_m\,\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_1^2) + \lambda_m\,\delta\right]\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R + \right.\\
&+ \left.\beta\,\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right\} +\\
&+ B_2\left\{\left[\lambda_m\,\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2) + \lambda_m\,\delta\right]\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R + \right.\\
&+ \left.\beta\,\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right\} + \beta\,\frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0. \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

После упрощения общих элементов (1.10) и (1.11) и обработки их в критериях подобия для определения B_1 и B_2 получим систему алгебраических уравнений (1.12)

$$
\left.\begin{aligned}
&B_1 Q_1 + B_2 Q_2 - \frac{t_c - t_0}{s} + (1-\varepsilon)\,\frac{\rho\beta}{\alpha}\,\frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0\\
&B_1 P_1 + B_2 P_2 + \frac{\mathrm{Fe}}{\delta}\,\frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (1.12)
$$

где

$$
Q_j = \left[1 + (1-\nu_j^2)K_1\right]\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R +
$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j\,R\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j\,R, \qquad (1.13)$$

$$P_j=(1-\nu_j^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j\,R+$$

$$+\left[(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}\right]\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R. \qquad (1.14)$$

Решение системы уравнений (1.12) дает

$$B_1=-\frac{(t_c-t_0)\,P_2+\frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0-\theta_p)\;(Q_2-K_1P_2)}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)},$$

$$B_2=\frac{(t_c-t_0)\,P_1+\frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0-\theta_p)(Q_1-K_1P_1)}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)}. \qquad (1.15)$$

Следовательно,

$$t_L\,(x,s)-\frac{t_0}{s}=(t_c-t_0)\left\{\frac{P_1+\varepsilon\mathrm{Ko}\,(Q_1-K_1P_1)}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x-\right.$$

$$\left.\frac{P_2+\varepsilon\mathrm{Ko}(Q_2-K_1P_2)}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x\right\}, \qquad (1.16)$$

$$\frac{\theta_0}{s}-\theta_L\,(x,s)=(\theta_0-\theta_p)\left\{\frac{Q_2+\frac{1}{\varepsilon\mathrm{Ko}}P_2-K_1P_2}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)}\times\right.$$

$$\times(1-\nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x-\frac{Q_1+\frac{1}{\varepsilon\mathrm{Ko}}P_1-K_1P_1}{s\,(Q_2P_1-Q_1P_2)}\times$$

$$\left.\times(1-\nu_2^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x\right\}. \qquad (1.17)$$

Мы нашли общее решение системы дифференциальных уравнений внутреннего тепло- и массообмена (I—VI) в изображениях. Для получения оригинала решения можно воспользоваться обобщенной теоремой разложения. Теорема

разложения справедлива для изображений, которые можно представить в виде отношения двух обобщенных полиномов $\Phi_0(s)/\psi_0(s)$, а также для отношения необобщенных полиномов $\Phi_1(s)$ и $\psi_1(s)$, когда последние путем умножения или деления на $s^l-(|l|\leqslant 1)$ приводятся к первым. При этом предполагается, что функция $\psi_0(s)$ имеет только простые корни и степень полинома в знаменателе на единицу больше степени полинома в числителе.

В нашем случае каждое из полученных уравнений в изображениях можно представить в виде отношения двух полиномов

$$\frac{1}{t_c-t_0}\left[t_L(x,s)-\frac{t_0}{s}\right]=\frac{\Phi_{01}(s)}{\psi_0(s)}, \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{\theta_0-\theta_p}\left[\frac{\theta_0}{s}-\theta_L(x,s)\right]=\frac{\Phi_{02}(s)}{\psi_0(s)}. \tag{1.19}$$

Знаменатель $\psi_0(s)=s(Q_2P_1-Q_1P_2)$ в уравнениях (1.18) и (1.19) одинаков, а полиномы в числителе соответственно равны:

$$\Phi_{01}(s)=[P_1+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_1-K_1P_1)]\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x-$$

$$-[P_2+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_2-K_1P_2)]\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x,$$

$$\Phi_{02}(s)=\left(Q_2+\frac{P_2}{\varepsilon \mathrm{Ko}}-K_1P_2\right)(1-\nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x-$$

$$-\left(Q_1+\frac{P_1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}-K_1P_1\right)(1-\nu_2^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x.$$

Числитель и знаменатель уравнений (1.18) и (1.19) являются обобщенными полиномами относительно s; поэтому, как показывает анализ, переход от изображения к оригиналу может быть сделан по обычной теореме разложения, т. е.

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_{01}(s)}{\psi_0(s)}\right]=\frac{\Phi_{01}(0)}{\psi_0'(0)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_{01}(s_n)}{\psi_0'(s_n)}\exp(s_n\tau) \tag{1.18'}$$

и

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_{02}(s)}{\psi_0(s)}\right]=\frac{\Phi_{02}(0)}{\psi_0'(0)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_{02}(s_n)}{\psi_0'(s_n)}\exp(s_n\tau). \qquad (1.19')$$

Здесь символ L^{-1} указывает на операцию обратного преобразования Лапласа.

Найдем корни $\psi_0(s)$, для чего положим

$$\psi_0(s) = s(Q_2P_1 - Q_1P_2) = 0.$$

Получаем:

1) $s = s_0 = 0$ (нулевой корень),

2) $s = s_n$ (где s_n удовлетворяет уравнению $Q_2P_1 - Q_1P_2 = 0$).

Уточним значения корней s_n, для чего заменим члены с гиперболическим синусом и косинусом в выражениях (1.13) и (1.14) согласно формулам $\mathrm{sh}z = -i\sin iz$ и $\mathrm{ch}z = \cos iz$. Получаем

$$s_n = -\frac{a_q\mu_n^2}{R^2},$$

где μ_n — корни характеристического уравнения,

$$Q_{n2}P_{n1} - Q_{n1}P_{n2} = 0, \qquad (1.20)$$

$$Q_{nj} = [1 + (1 - \nu_j^2)K_1]\cos\nu_j\mu_n - \frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\sin\nu_j\mu_n, \qquad (1.21)$$

$$P_{nj} = (1 - \nu_j^2)\cos\nu_j\mu_n - [(1 - \nu_j^2) + \mathrm{Fe}]\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\sin\nu_j\mu_n. \qquad (1.22)$$

Для получения оригиналов изображений (1.18′) и (1.19′) определим входящие в них величины $\psi_0'(0)$, $\psi_0'(s_n)$, $\Phi_{01}(0)$, $\Phi_{02}(0)$, $\Phi_{01}(s_n)$, $\Phi_{02}(s_n)$. Расчеты дают:

$$\psi_0' = \nu_2^2 - \nu_1^2,$$

$$\Phi_{01}(0) = \Phi_{02}(0) = \nu_2^2 - \nu_1^2,$$

$$\Phi_{01}(s_n) = -\{[P_{n2} + \varepsilon\mathrm{Ko}(Q_{n2} - K_1P_{n2})]\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R} -$$

$$-[P_{n1}+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_{n1}-K_1P_{n1})]\cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R}\Big\},$$

$$\Phi_{02}(s_n) = -\Big\{\Big(Q_{n1}+\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}P_{n1}-K_1P_{n1}\Big)\times$$

$$\times(1-\nu_2^2)\cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R} - \Big(Q_{n2}+\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}P_{n2}-K_1P_{n2}\Big)\times$$

$$\times (1-\nu_1^2)\cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R}\Big\},$$

$$\psi_0'(s_n) = \frac{1}{2}\mu_n \psi_n,$$

где

$$\psi_n = \nu_1 A_{n1}P_{n2} + \nu_2 B_{n2}Q_{n1} - \nu_2 A_{n2}P_{n1} - \nu_1 B_{n1}Q_{n2}, \qquad (1.23)$$

$$A_{nj} = \Big[1+\frac{1}{Bi_q}+(1-\nu_j^2)K_1\Big]\sin \nu_j \mu_n + \frac{\nu_j \mu_n}{Bi_q}\cos \nu_j \mu_n, \qquad (1.24)$$

$$B_{nj} = (1-\nu_j^2)\sin \nu_j \mu_n + \frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}(\sin \nu_j \mu_n + \nu_j \mu_n \cos \nu_j \mu_n). \qquad (1.25)$$

Подставляем найденные выше величины в уравнения (1.18′) и (1.19′); в результате для нестационарных полей потенциалов переноса тепла и вещества будем иметь:

$$\frac{t(x,\tau)-t_0}{t_c-t_0} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{P_{n2}+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_{n2}-K_1P_{n2})}{\mu_n \psi_n}\times$$

$$\times \cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R} - \frac{P_{n1}+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_{n1}-K_1P_{n1})}{\mu_n \psi_n}\times$$

$$\times \cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R}\Big\}\exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.26)$$

$$\frac{\theta_c-\theta(x,\tau)}{\theta_0-\theta_p} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{Q_{n1}+\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}P_{n1}-K_1P_{n1}}{\mu_n \psi_n}\times$$

$$\times (1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}-\frac{Q_{n2}+\dfrac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}P_{n2}-K_1P_{n2}}{\mu_n\psi_n}\times$$

$$\times (1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\Bigg\}\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}). \qquad (1.27)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений внутреннего тепло- и массообмена (I — VI) для неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода и постоянном начальном распределении по материалу потенциалов переноса решена до конца. В целях удобства использования полученного решения перепишем его еще раз, собрав уравнения (1.5), (1.20)—(1.27) вместе:

$$T=\frac{t(x,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(C_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}-$$

$$-C_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}\Bigg)\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}), \qquad (1.28)$$

$$\Theta=\frac{\theta_0-\theta(x,\tau)}{\theta_0-\theta_p}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[C_{n1}^{*}(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}-$$

$$-C_{n2}^{*}(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\Bigg]\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}). \qquad (1.29)$$

Здесь ν_j — коэффициенты ($j=1;\ 2$), определяемые соотношением

$$\nu_j^2=\frac{1}{2}\Bigg[\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)+$$

$$+(-1)^j\sqrt{\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2-\frac{4}{\mathrm{Lu}}}\Bigg],$$

C_{nj}, C_{nj}^{*} определяются соотношениями:

$$C_{nj}=2\,\frac{P_{nj}+\varepsilon\,\mathrm{Ko}(Q_{nj}-K_1P_{nj})}{\mu_n\psi_n},$$

$$C_{nj}^{*}=\frac{C_{nj}}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}, \qquad (1.30)$$

$$\psi_n = \nu_1 A_{n1} P_{n2} + \nu_2 B_{n2} Q_{n1} - \nu_2 A_{n2} P_{n1} - \nu_1 B_{n1} Q_{n2},$$

$$A_{nj} = \left[1 + \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + (1 - \nu_j^2) K_1\right] \sin \nu_j \mu_n +$$

$$+ \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \cos \nu_j \mu_n,$$

$$B_{nj} = (1 - \nu_j^2) \sin \nu_j \mu_n +$$

$$+ \frac{(1 - \nu_j^2) + \mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m} (\sin \nu_j \mu_n + \nu_j \mu_n \cos \nu_j \mu_n),$$

$$Q_{nj} = [1 + (1 - \nu_j^2) K_1] \cos \nu_j \mu_n -$$

$$- \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \sin \nu_j \mu_n,$$

$$P_{nj} = (1 - \nu_j^2) \cos \nu_j \mu_n -$$

$$- [(1 - \nu_j^2) + \mathrm{Fe}] \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_m} \sin \nu_j \mu_n.$$

μ_n являются корнями характеристического уравнения

$$Q_{n2} P_{n1} = Q_{n1} P_{n2}. \tag{1.20}$$

Значения характеристических корней μ_n возможно получить графоаналитическим путем. Для этого перепишем уравнение (1.20) в несколько ином виде:

$$\frac{M}{N} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}_q}, \tag{1.31}$$

где $M = P_1 \cos \nu_2 \mu - P_2 \cos \nu_1 \mu,$

$$N = \left[(1 - \nu_1^2) \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \mathrm{Lu}\, \mathrm{Bi}_m \frac{\cos \nu_1 \mu}{\mu} - \nu_1 \sin \nu_1 \mu\right] P_2 -$$

$$- \left[(1 - \nu_2^2) \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \mathrm{Lu}\, \mathrm{Bi}_m \frac{\cos \nu_2 \mu}{\mu} - \nu_2 \sin \nu_2 \mu\right] P_1.$$

Если левую часть выражения (1.31) обозначить через $\Phi_\mu = \Phi(\mu)$, а правую — через $y = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} \mu$, то точки пересечения кривых Φ_μ с прямой y на рисунке $[\mu, \Phi_\mu]$ дадут нам значения корней μ_n при заданной совокупности критериев Lu, ε, Ko, Pn, Bi_m, Bi_q (рис. 1). Для разных значений критерия Bi_q (от 0,10 до ∞) в зависимости от Lu, Bi_m, Fe, ε характери-

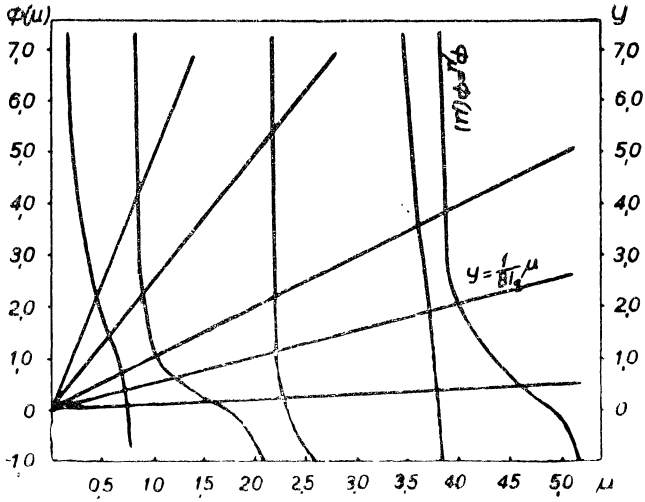


Рис. 1. Способ определения корней характеристического уравнения $\Phi(\mu) = \frac{1}{Bi_q}\mu$ для неограниченной пластины.

стические корни μ_n собраны в таблицах 1—4. В целях удобства практического использования графическая аноморфоза μ_n от указанных критериев приведена на рисунках 2 -9.

Из рассмотрения уравнения (1.31) и рисунка 1 следует, что мы имеем бесчисленное множество корней μ_n, значения которых растут:

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots \mu_n < \ldots$$

Благодаря этому неравенству бесконечные ряды в уравнениях (1.28) и (1.29) сходятся достаточно быстро. Как показывает таблица 5 и рисунок 10, с ростом безразмерного времени (Fo) процент ошибки, вносимый пренебрежением членами ряда, стоящими под знаком суммы, по сравнению с двумя первыми уменьшается.

Начиная с определенного значения критерия Фурье, допустимо с заранее заданной степенью точности из всего ряда разложения использовать два первых члена. Так, для системы уравнений с постоянными начальными условиями, задаваясь ошибкой в 1,0 и 0,5%, исходные значения Fo для упрощенных расчетов собраны в таблице 6.

Осуществление указанных упрощений имеет большое значение из-за громадного сокращения объема расчетной работы и возможности представления общих решений в форме, удобной для практического применения. Исходные значения Fo для упрощенных расчетов меняются с изменением совокупности входящих в решение критериев.

Таблица 1

Корни характеристического уравнения $\Phi(\mu) = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$ в зависимости от Lu (неограниченная пластина) $Fe=\varepsilon$, $KoPn=0{,}3$, $\varepsilon=0{,}5$. $\mathrm{Bi}_m=10$

Bi_q	Lu=0,15		Lu=0,3					Lu=0,5			Lu=0,7		Lu=1,0		Lu=2,0	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,10	0,306	0,569	0,307	0,814				0,307			0,307		0,308		0,308	
0,15	0,367	0,576	0,370	0,818	2,168			0,371	1,077	2,508	0,372	1,307	0,373		0,373	
0,20	0,415	0,583	0,423	0,825	2,169	3,365	3,809	0,424	1,084	2,511	0,425	1,314	0,426	1,637	0,424	
0,25	0,451	0,596	0,465	0,832	2,170	3,379	3,810	0,467	1,090	2,515	0,468	1,318	0,469	1,643	0,468	
0,30	0,477	0,613	0,500	0,839	2,171	3,396	3,811	0,505	1,096	2,519	0,506	1,322	0,507	1,649	0,507	
0,35	0,494	0,635	0,530	0,847	2,172	3,408	3,812	0,537	1,101	2,523	0,540	1,329	0,542	1,655	0,543	
0,40	0,506	0,658	0,556	0,856	2,173	3,423	3,814	0,568	1,104	2,527	0,571	1,335	0,573	1,660	0,574	
0,45	0,513	0,682	0,579	0,867	2,174	3,434	3,816	0,593	1,107	2,534	0,596	1,342	0,599	1,666	0,602	
0,50	0,518	0,706	0,599	0,877	2,175	3,444	3,818	0,616	1,112	2,537	0,620	1,347	0,623	1,674	0,627	
0,55	0,522	0,730	0,616	0,888	2,176	3,454	3,820	0,637	1,120	2,542	0,642	1,358	0,646	1,677	0,649	
0,60	0,525	0,752	0,630	0,898	2,178	3,468	3,822	0,654	1,128	2,546	0,661	1,359	0,666	1,681	0,669	
0,70	0,529	0,796	0,652	0,925	2,180	3,491	3,825	0,688	1,147	2,552	0,696	1,372	0,702	1,689	0,709	
0,80	0,532	0,834	0,668	0,950	2,183	3,515	3,830	0,716	1,167	2,557	0,727	1,384	0,734	1,701	0,745	
0,90	0,533	0,869	0,681	0,973	2,187	3,537	3,836	0,738	1,183	2,564	0,753	1,396	0,762	1,710	0,774	
1,0	0,535	0,903	0,690	0,999	2,191	3,558	3,841	0,757	1,198	2,572	0,775	1,407	0,786	1,717	0,799	
1,5	0,538	1,028	0,716	1,106	2,195	3,639	3,878	0,817	1,269	2,600	0,857	1,459	0,878	1,753	0,900	

Продолжение таблицы 1

Bi_q	Lu=0,15		Lu=0,3					Lu=0,5			Lu=0,7		Lu=1,0		Lu=2,0	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
2,0	0,539	1,114	0,726	1,188	2,197	3,685	3,936	0,848	1,329	2,625	0,901	1,503	0,937	1,780	0,967	
3,0	0,539	1,238	0,735	1,298	2,204	3,725	4,074	0,877	1,412	2,657	0,951	1,566	0,996	1,817	1,047	
4,0	0,540	1,311	0,739	1,364	2,213	3,742	4,187	0,891	1,469	2,682	0,974	1,606	1,033	1,841	1,091	2,760
5,0	0,540	1,362	0,741	1,409	2,220	3,749	4,281	0,900	1,509	2,698	0,989	1,637	1,057	1,858	1,125	2,666
6,0	0,540	1,398	0,742	1,440	2,224	3,753	4,357	0,906	1,541	2,711	0,999	1,659	1,072	1,871	1,148	2,623
7,0	0,541	1,425	0,743	1,465	2,229	3,756	4,420	0,907	1,561	2,720	1,007	1,675	1,083	1,879	1,163	2,595
8,0	0,541	1,444	0,743	1,487	2,231	3,759	4,479	0,912	1,579	2,728	1,011	1,689	1,092	1,887	1,178	2,576
9,0	0,541	1,459	0,744	1,504	2,233	3,760	4,518	0,914	1,595	2,735	1,015	1,700	1,099	1,893	1,188	2,561
10	0,541	1,472	0,744	1,516	2,235	3,762	4,554	0,915	1,606	2,740	1,017	1,709	1,106	1,898	1,197	2,552
15	0,542	1,509	0,745	1,552	2,241	3,764	4,665	0,919	1,638	2,756	1,027	1,734	1,122	1,912	1,224	2,526
20	0,542	1,530	0,746	1,572	2,245	3,766	4,730	0,922	1,653	2,766	1,033	1,748	1,128	1,919	1,237	2,512
30	0,542	1,550	0,747	1,597	2,248	3,767	4,589	0,924	1,675	2,775	1,036	1,764	1,138	1,928	1,253	2,498
40	0,542	1,558	0,747	1,607	2,251	3,768	4,826	0,925	1,684	2,782	1,039	1,774	1,143	1,933	1,261	2,490
50	0,542	1,565	0,747	1,614	2,253	3,769	4,840	0,926	1,691	2,786	1,040	1,780	1,146	1,936	1,266	2,485
∞	0,542	1,580	0,748	1,638	2,256	3,770	4,911	0,929	1,711	2,801	1,045	1,797	1,155	1,943	1,284	2,469

Таблица 2

Корни характеристического уравнения $\Phi(\mu) = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$ в зависимости от Bi_m (неограниченная пластина) Lu=0,3, KoPn=0,6, ε=0,5*

Bi_q	Bi_m=0,1		Bi_m=0,5		Bi_m=5		Bi_m=7		Bi_m=15		Bi_m=20	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,10	0,313	1,640	0,302	0,370	0,307	0,746	0,307	0,783	0,307	0,839	0,307	0,854
0,15	0,379	1,641	0,339	0,401	0,370	0,752	0,370	0,786	0,370	0,844	0,370	0,859
0,20	0,434	1,642	0,348	0,449	0,419	0,759	0,422	0,793	0,423	0,850	0,423	0,865
0,25	0,482	1,643	0,350	0,493	0,460	0,767	0,463	0,800	0,465	0,856	0,466	0,870
0,30	0,524	1,644	0,352	0,534	0,497	0,774	0,499	0,809	0,501	0,863	0,502	0,876
0,35	0,562	1,646	0,352	0,571	0,526	0,783	0,529	0,816	0,531	0,871	0,533	0,884
0,40	0,595	1,647	0,352	0,606	0,550	0,793	0,554	0,826	0,557	0,878	0,559	0,892
0,45	0,626	1,648	0,353	0,637	0,570	0,805	0,577	0,838	0,581	0,888	0,583	0,902
0,50	0,653	1,649	0,353	0,664	0,586	0,818	0,595	0,850	0,601	0,898	0,603	0,912
0,55	0,680	1,650	0,353	0,691	0,602	0,832	0,610	0,863	0,618	0,908	0,622	0,923
0,60	0,705	1,652	0,353	0,716	0,615	0,847	0,623	0,875	0,633	0,918	0,637	0,934
0,70	0,751	1,655	0,354	0,762	0,632	0,877	0,643	0,900	0,657	0,941	0,661	0,955
0,80	0,790	1,657	0,354	0,803	0,643	0,906	0,658	0,927	0,676	0,965	0,680	0,975
0,90	0,826	1,659	0,354	0,839	0,651	0,937	0,668	0,954	0,690	0,990	0,694	0,998
1,0	0,859	1,660	0,354	0,872	0,657	0,965	0,676	0,981	0,701	1,014	0,706	1,020

Продолжение таблицы 2

Bi_q	$Bi_m=0{,}1$		$Bi_m=0{,}5$		$Bi_m=5$		$Bi_m=7$		$Bi_m=15$		$Bi_m=20$	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
1,5	0,984	1,671	0,354	0,997	0,672	1,031	0,695	1,094	0,730	1,117	0,737	1,121
2,0	1,070	1,682	0,355	1,088	0,679	1,166	0,704	1,117	0,742	1,197	0,750	1,200
3,0	1,180	1,701	0,355	1,198	0,684	1,278	0,711	1,285	0,752	1,302	0,760	1,308
4,0	1,245	1,718	0,355	1,260	0,686	1,348	0,714	1,358	0,756	1,373	0,765	1,379
5,0	1,286	1,730	0,355	1,304	0,687	1,393	0,716	1,403	0,759	1,420	0,768	1,425
6,0	1,316	1,740	0,355	1,337	0,687	1,426	0,717	1,436	0,760	1,450	0,770	1,455
7,0	1,336	1,751	0,355	1,359	0,688	1,451	0,718	1,462	0,761	1,476	0,771	1,481
8,0	1,352	1,761	0,355	1,377	0,688	1,473	0,718	1,482	0,762	1,499	0,772	1,504
9,0	1,363	1,767	0,355	1,388	0,689	1,487	0,719	1,496	0,762	1,513	0,773	1,519
10	1,370	1,773	0,355	1,396	0,689	1,499	0,720	1,508	0,763	1,526	0,774	1,531
15	1,397	1,795	0,355	1,428	0,690	1,537	0,721	1,546	0,765	1,564	0,775	1,570
20	1,409	1,807	0,355	1,444	0,690	1,557	0,721	1,566	0,765	1,585	0,776	1,589
30	1,421	1,822	0,355	1,458	0,690	1,579	0,722	1,586	0,766	1,606	0,777	1,611
40	1,427	1,829	0,355	1,465	0,690	1,589	0,722	1,596	0,766	1,616	0,777	1,621
50	1,430	1,835	0,355	1,470	0,690	1,595	0,722	1,603	0,767	1,622	0,778	1,627
∞	1,443	1,861	0,355	1,485	0,691	1,621	0,723	1,628	0,767	1,650	0,778	1,652

* Для $Bi_m=10$ см. таблицу 1

Таблица 3

Корни характеристического уравнения $\Phi(\mu) = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$ **в зависимости от** $\mathrm{Fe} = \varepsilon$ **КоРп (неограниченная пластина)** $\mathrm{Lu} = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\mathrm{Bi}_m = 10$*

Bi_q	Fe = 0,1		Fe = 0,2		Fe = 0,4		Fe = 0,5		Fe = 0,6	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,10	0,310	0,793	0,309	0,803	0,306	0,824	0,305	0,835	0,304	0,845
0,15	0,375	0,794	0,373	0,807	0,368	0,832	0,366	0,845	0,364	0,858
0,20	0,428	0,796	0,426	0,811	0,419	0,840	0,415	0,853	0,412	0,870
0,25	0,474	0,800	0,469	0,816	0,461	0,848	0,455	0,862	0,451	0,881
0,30	0,513	0,803	0,507	0,820	0,494	0,855	0,488	0,874	0,482	0,895
0,35	0,548	0,806	0,539	0,826	0,523	0,866	0,516	0,887	0,510	0,908
0,40	0,579	0,809	0,567	0,833	0,547	0,877	0,541	0,899	0,534	0,925
0,45	0,606	0,813	0,592	0,841	0,569	0,889	0,562	0,913	0,554	0,939
0,50	0,630	0,818	0,613	0,849	0,587	0,902	0,578	0,927	0,570	0,954
0,55	0,650	0,825	0,632	0,858	0,604	0,914	0,593	0,940	0,583	0,968
0,60	0,669	0,834	0,647	0,869	0,617	0,928	0,605	0,954	0,594	0,982
0,70	0,696	0,852	0,671	0,891	0,633	0,954	0,626	0,982	0,614	1,009
0,80	0,715	0,873	0,689	0,916	0,654	0,980	0,641	1,012	0,629	1,036
0,90	0,728	0,897	0,702	0,940	0,666	1,007	0,653	1,039	0,641	1,065
1,0	0,737	0,922	0,711	0,964	0,676	1,032	0,662	1,064	0,650	1,091

Продолжение таблицы 1

Bi_q	Fe = 0,1		Fe = 0,2		Fe = 0,4		Fe = 0,5		Fe = 0,6	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
1,5	0,753	1,033	0,733	1,071	0,701	1,139	0,687	1,171	0,676	1,205
2,0	0,760	1,119	0,742	1,153	0,712	1,219	0,699	1,251	0,688	1,286
3,0	0,765	1,227	0,748	1,264	0,721	1,326	0,710	1,360	0,699	1,390
4,0	0,768	1,301	0,752	1,333	0,726	1,393	0,714	1,427	0,704	1,457
5,0	0,769	1,351	0,753	1,380	0,728	1,441	0,717	1,472	0,707	1,501
6,0	0,770	1,383	0,754	1,409	0,729	1,470	0,719	1,501	0,709	1,531
7,0	0,770	1,410	0,755	1,438	0,730	1,496	0,720	1,524	0,710	1,553
8,0	0,770	1,431	0,756	1,459	0,731	1,577	0,721	1,543	0,711	1,571
9,0	0,770	1,443	0,756	1,475	0,732	1,581	0,722	1,559	0,712	1,584
10	0,770	1,459	0,757	1,485	0,733	1,541	0,723	1,567	0,713	1,595
15	0,770	1,504	0,758	1,530	0,734	1,584	0,725	1,607	0,714	1,631
20	0,770	1,527	0,758	1,551	0,735	1,602	0,726	1,624	0,716	1,648
30	0,771	1,554	0,758	1,574	0,735	1,625	0,726	1,644	0,716	1,666
40	0,771	1,564	0,759	1,584	0,736	1,633	0,727	1,653	0,717	1,676
50	0,771	1,574	0,759	1,593	0,736	1,641	0,727	1,661	0,717	1,683
∞	0,771	1,603	0,759	1,618	0,737	1,665	0,728	1,683	0,718	1,704

* Для Fe = 0,3 см. таблицу 1.

Таблица 4

Корни характеристического уравнения $\Phi(\mu) = \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$ **в зависимости от** ε

(неограниченная пластина) $\mathrm{Lu} = 0{,}3$, $\mathrm{KoPn} = 0{,}6$, $\mathrm{Bi}_m = 10^*$

Bi_q	$\varepsilon = 0{,}1667$		$\varepsilon = 0{,}3333$		$\varepsilon = 0{,}6667$		$\varepsilon = 0{,}8333$		$\varepsilon = 1{,}000$	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,10	0,307	0,836	0,307	0,825	0,307	0,803	0,307	0,793	0,307	0,783
0,15	0,373	0,840	0,372	0,830	0,371	0,809	0,371	0,798	0,370	0,789
0,20	0,423	0,846	0,423	0,835	0,422	0,815	0,422	0,806	0,421	0,797
0,25	0,465	0,852	0,465	0,841	0,464	0,823	0,464	0,813	0,463	0,802
0,30	0,501	0,858	0,500	0,849	0,499	0,831	0,498	0,819	0,497	0,812
0,35	0,533	0,866	0,532	0,855	0,529	0,839	0,528	0,830	0,526	0,821
0,40	0,559	0,872	0,558	0,863	0,555	0,848	0,553	0,840	0,551	0,832
0,45	0,583	0,881	0,581	0,873	0,577	0,859	0,575	0,852	0,572	0,845
0,50	0,603	0,890	0,601	0,883	0,595	0,870	0,593	0,863	0,591	0,857
0,55	0,622	0,900	0,619	0,894	0,614	0,882	0,611	0,876	0,607	0,871
0,60	0,638	0,910	0,634	0,905	0,628	0,894	0,625	0,888	0,620	0,885
0,70	0,662	0,931	0,658	0,927	0,650	0,919	0,645	0,915	0,639	0,912
0,80	0,681	0,952	0,676	0,951	0,664	0,945	0,658	0,942	0,653	0,941
0,90	0,695	0,975	0,689	0,974	0,675	0,973	0,670	0,971	0,664	0,970
1,0	0,705	0,999	0,698	0,999	0,683	0,999	0,677	0,999	0,671	0,999

Bi_q	$\varepsilon = 0{,}1667$		$\varepsilon = 0{,}3333$		$\varepsilon = 0{,}6667$		$\varepsilon = 0{,}8333$		$\varepsilon = 1{,}000$	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
1,5	0,733	1,096	0,723	1,101	0,706	1,109	0,698	1,112	0,692	1,115
2,0	0,745	1,172	0,733	1,179	0,716	1,190	0,707	1,197	0,700	1,203
3,0	0,755	1,273	0,743	1,285	0,725	1,304	0,715	1,314	0,707	1,322
4,0	0,759	1,340	0,747	1,350	0,728	1,379	0,718	1,387	0,710	1,400
5,0	0,761	1,382	0,749	1,393	0,730	1,425	0,720	1,436	0,712	1,450
6,0	0,762	1,414	0,751	1,427	0,732	1,459	0,721	1,475	0,713	1,487
7,0	0,763	1,435	0,752	1,450	0,733	1,484	0,722	1,499	0,714	1,511
8,0	0,764	1,454	0,753	1,470	0,734	1,505	0,723	1,520	0,715	1,534
9,0	0,765	1,467	0,754	1,486	0,734	1,521	0,723	1,537	0,715	1,552
10	0,766	1,477	0,754	1,499	0,735	1,536	0,724	1,553	0,716	1,566
15	0,767	1,513	0,756	1,532	0,736	1,572	0,725	1,590	0,717	1,606
20	0,767	1,533	0,757	1,553	0,736	1,593	0,725	1,612	0,717	1,629
30	0,768	1,554	0,757	1,573	0,737	1,615	0,726	1,634	0,717	1,653
40	0,768	1,564	0,758	1,583	0,737	1,626	0,726	1,645	0,718	1,664
50	0,769	1,575	0,758	1,593	0,738	1,637	0,727	1,657	0,718	1,676
∞	0,770	1,605	0,758	1,617	0,738	1,666	0,727	1,684	0,719	1,707

* Для $\varepsilon = 0{,}5$ см. таблицу 1.

Таблица 5

Fo	% ошибки			
	1−T		1−Θ	
	$x/R=0$	$x/R=1$	$x/R=0$	$x/R=1$
0,1	11,30	40,16	18,05	137,37
0,2	6,62	20,53	18,72	71,46
0,3	4,20	12,74	9,23	40,05
0,4	3,21	8,48	6,00	23,48
0,5	2,26	5,75	3,85	14,15
0,6	1,59	3,91	2,47	8,68
0,7	1,10	2,65	1,58	5,37
0,8	0,76	1,79	1,01	3,35
0,9	0,52	1,20	0,64	2,10
1,0	0,35	0,80	0,41	1,32

Как показывает анализ расчетов, наибольшее влияние на упрощаемость (на величину исходного Fo) оказывает значение критерия Lu. С ростом Lu величина исходного для упрощения Fo уменьшается. Значительно слабее на упрощаемости сказывается влияние критериев ε, Ko, Pn. В зависимости от Bi_q, как это видно из таблицы 6, исходный Fo увеличивается с ростом Bi_q для локальных величин и уменьшается для средних. Влияние критерия Био особенно сильно сказывается на безразмерном потенциале тепла. Аналогично исходный Fo для безразмерного потенциала вещества особенно существенно зависит от критерия Bi_m. В целом величина исходного для упрощения Fo ниже для теплообменных показателей, чем для массообменных.

Таким образом, из сказанного следует, что безразмерные потенциалы переноса в неограниченной пластине являются функциями относительной координаты, безразмерного времени, а также критериев Lu, Bi_q, Bi_m, ε, Ko, Pn, т. е.

$$T = T(x/R,\ \mathrm{Fo},\ \mathrm{Lu},\ \mathrm{Bi}_q,\ \mathrm{Bi}_m,\ \varepsilon,\ \mathrm{Ko},\ \mathrm{Pn}), \qquad (1.32)$$

$$\Theta = \Theta(x/R,\ \mathrm{Fo},\ \mathrm{Lu},\ \mathrm{Bi}_q,\ \mathrm{Bi}_m,\ \varepsilon,\ \mathrm{Ko},\ \mathrm{Pn}), \qquad (1.33)$$

так как

$$C_{nj} = \psi_1(\mathrm{Lu},\ \mathrm{Bi}_q,\ \mathrm{Bi}_m,\ \varepsilon,\ \mathrm{Ko},\ \mathrm{Pn}), \qquad (1.34)$$

$$C^*_{nj} = \psi_2(\mathrm{Lu},\ \mathrm{Bi}_q,\ \mathrm{Bi}_m,\ \varepsilon,\ \mathrm{Ko},\ \mathrm{Pn}). \qquad (1.35)$$

Численные значения первых двух коэффициентов C_{ni} и C^*_{nj} в зависимости от приведенных критериев даны в таблицах 7—12 и для облегчения расчетов на рисунках 11—16.

Таблица 6

Значения исходных Fo для упрощенных расчетов тепло- и массопереноса

(Lu = 0,3, Ko = 1,2, Pn = 0,5, $\varepsilon = 0{,}5$, $Bi_m = 10$)

Тип задачи	Bi_q	Fo								Ошибка $\lvert\Delta\rvert$ %
		$1-T$		$1-\Theta$		$1-\overline{T}$	$1-\overline{\Theta}$	$\frac{d\overline{T}}{d\mathrm{Fo}}$	$\frac{d\overline{\Theta}}{d\mathrm{Fo}}$	
		$x/R=0$	$x/R=1$	$x/R=0$	$x/R=1$					
Пластина, постоянные начальные условия	1	0,75	0,66	0,79	~ 1,06	0,48	0,59	1,03	~ 1,13	1
		0,79	0,81	0,94	~ 1,19	0,61	0,74	1,19	~ 1,31	0,5
	10	0,73	0,95	0,80	1,06	0,11	0,57	0,29	1,06	1
		0,89	1,08	0,95	1,19	0,17	0,73	0,37	~ 1,19	0,5
Шар, постоянные начальные условия	10		0,24		0,27	0,17	0,13	0,26	0,22	1
			0,27		0,31	0,21	0,15	0,30		0,5
Пластина, параболические начальные условия	10	0,66	0,87	0,73	1,00	0,13	0,50	0,25	0,33	1
		0,84	1,04	0,88	1,11	0,16	0,64	0,33	1,15	0,5

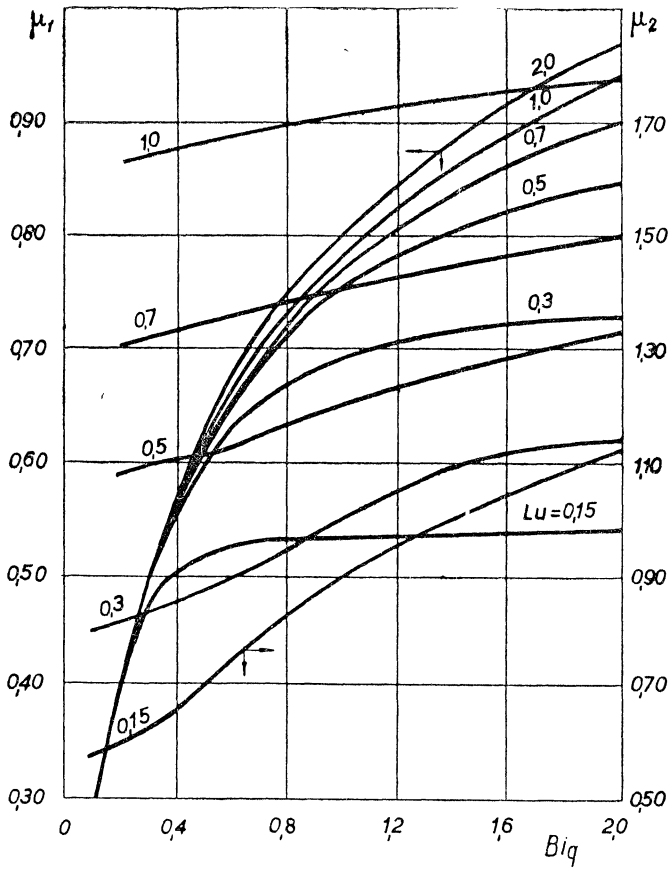


Рис. 2. Зависимость характеристических корней от Lu для неограниченной пластины ($Bi_q = 0{,}1 \div 2{,}0$).

Для изучения процессов внутреннего тепло- и массообмена необходимо знать среднюю температуру и потенциал вещества, а также локальную и среднюю скорости их изменения. Например, средняя температура позволяет рассчитать по соотношению

$$\Delta Q = c\,\gamma_0\,[\bar{t}\,(\tau) - t_0]$$

расход тепла на прогрев единицы объема тела. Зависимость средних и локальных скоростей изменения потенциалов переноса дает возможность получить важнейшие характеристики ряда процессов (для сушки, например, температурную кривую и кривую скорости сушки).

Средние значения потенциалов переноса в неограниченной пластине получим согласно соотношениям

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{R}\int_0^R t(x, \tau)\, dx, \quad \bar{\Theta}(\tau) = \frac{1}{R}\int_0^R \Theta(x, \tau)\, dx.$$

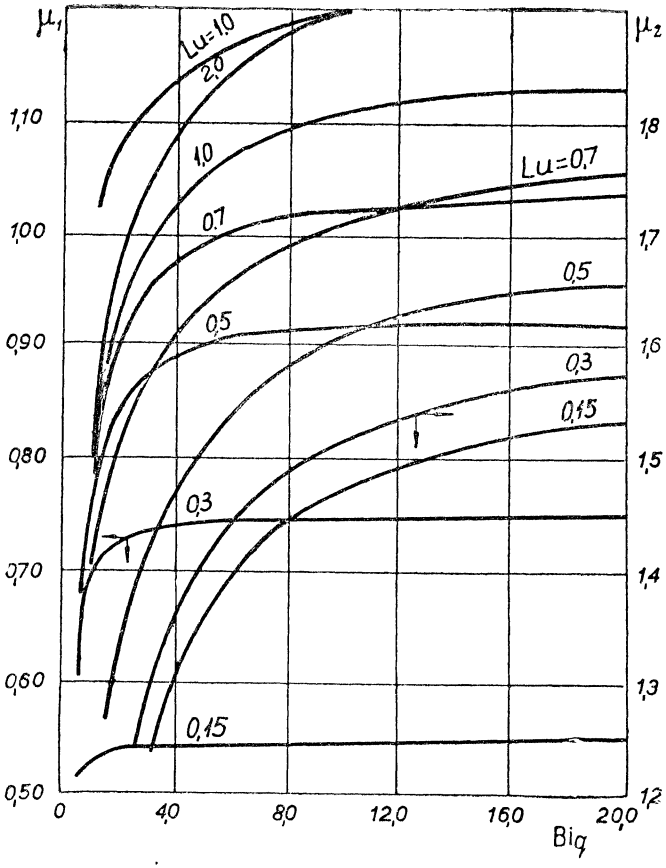


Рис. 3. Зависимость характеристических корней от Lu для неограниченной пластины ($Bi_q = 1 \div 20$).

Если подставить вместо $t(x, \tau)$ и $\Theta(x, \tau)$ соответствующие выражения из (1.28) и (1.29), то после интегрирования для средних значений безразмерных температуры и потенциала вещества получим следующие выражения:

$$T = \frac{\bar{t}(\tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.36)$$

$$\overline{\Theta} = \frac{\theta_0 - \overline{\theta}(\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.37)$$

где

$$D_n = D_{n2} - D_{n1}, \; D_n^* = D_{n1}^* - D_{n2}^*, \qquad (1.38$$

$$D_{n1} = \frac{\sin \nu_2 \mu_n}{\nu_2 \mu_n} C_{n1}, \; D_{n2} = \frac{\sin \nu_1 \mu_n}{\nu_1 \mu_n} C_{n2}, \qquad (1.39)$$

$$D_{n1}^* = \frac{\sin \nu_2 \mu_n}{\nu_2 \mu_n} (1 - \nu_2^2) C_{n1}^*, \; D_{n2}^* = \frac{\sin \nu_1 \mu_n}{\nu_1 \mu_n} (1 - \nu_1^2) C_{n2}^*.$$

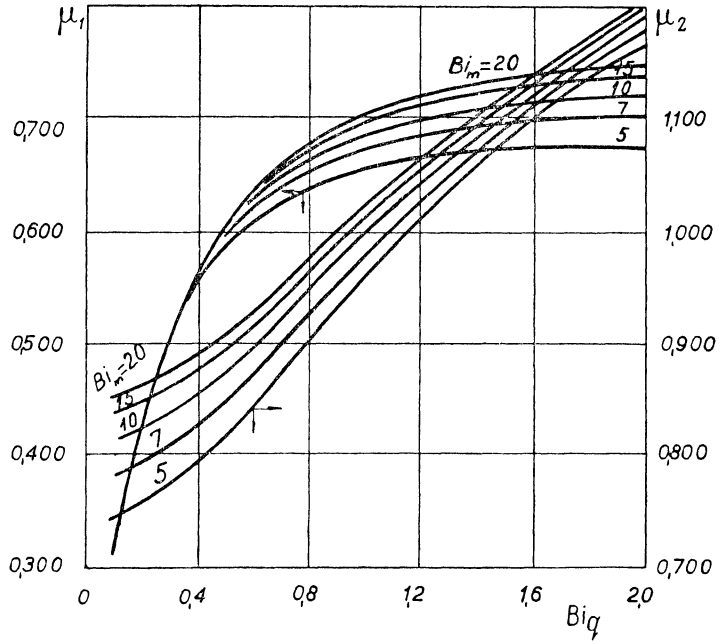


Рис. 4. Зависимость характеристических корней от Bi_m для неограниченной пластины ($\mathrm{Bi}_q = 0{,}1 \div 2{,}0$).

Рассчитанные значения коэффициентов D_n и D_n^* и их графики в зависимости от критериев Lu, Bi_q, Bi_m, ε, Pn собраны в таблицах 7—12 и на рисунках 11—16.

Безразмерную скорость изменения температуры и массы связанного вещества (локальную и среднюю) получим дифференцированием уравнений (1.28), (1.29), (1.36) и (1.37) по безразмерному времени, т. е.

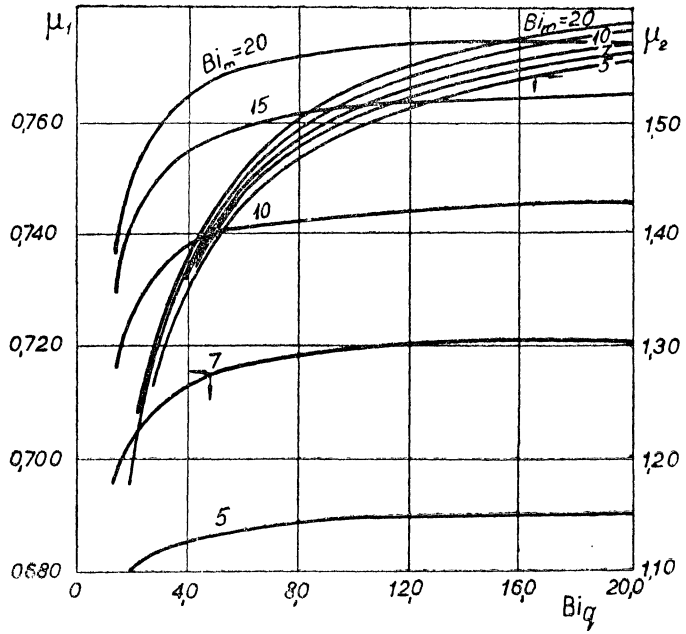


Рис. 5. Зависимость характеристических корней от Bi_m для неограниченной пластины ($Bi_q = 2 \div 20$).

$$\frac{dT}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n2} \cos \nu_1 \mu_n x/R -$$

$$- C_{n1} \cos \nu_2 \mu_n x/R)\, \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.40)$$

$$\frac{d\overline{T}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.41)$$

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1}^{*} (1 - \nu_2^2) \cos \nu_2 \mu_n \; x/R -$$

$$- C_{n2}^{*} (1 - \nu_1^2) \cos \nu_1 \mu_n x/R]\; \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.42)$$

$$\frac{d\overline{\Theta}}{d\,\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{*} \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \qquad (1.43)$$

Так как $\mathrm{Fo} = \frac{a_q \tau}{R^2}$, то локальная и средняя скорости про-

грева и сушки влажной пластины будут обратно пропорциональны квадрату ее характерного размера (половине толщины пластины) и прямо пропорциональны коэффициенту температуропроводности.

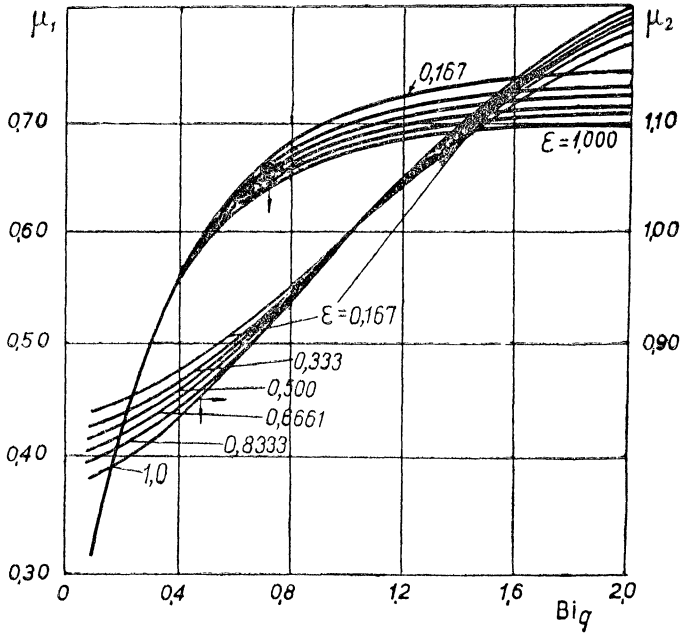


Рис. 6. Зависимость характеристических корней от ε для неограниченной пластины ($Bi_q = 0{,}1 \div 2{,}0$).

б) *Шар. Постоянные начальные условия* ($\Gamma = 2$, $\xi = r$, $f(r) = t_0 = \text{const}$, $\varphi(r) = \theta_0 = \text{const}$). Введем обозначения:

$$L[rt(r, \tau)] = \int_0^\infty rt(r, \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \vartheta_L(r, s) = rt_L(r, s), \qquad (1.44)$$

$$L[r\theta(r, \tau)] = \int_0^\infty r\theta(r, \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \\ = u_L(r, s) = r\theta_L(r, s). \qquad (1.45)$$

Применяя преобразование Лапласа (1.44), (1.45) к уравнениям (I—II), получим:

$$\vartheta_L''(r, s) - \frac{s}{a_q}\vartheta_L(r, s) +$$

$$+\frac{\varepsilon\rho}{a_q c}\, s u_L(r,\ s) - \frac{\varepsilon\rho}{a_q c}\, r\theta_0 + \frac{r t_0}{a_q} = 0, \qquad (1.46)$$

$$u_L''(r,\ s) - \frac{s}{a_m}\, u_L(r,\ s) + \delta\vartheta_L''(r,\ s) + \frac{r\theta_0}{a_m} = 0. \qquad (1.47)$$

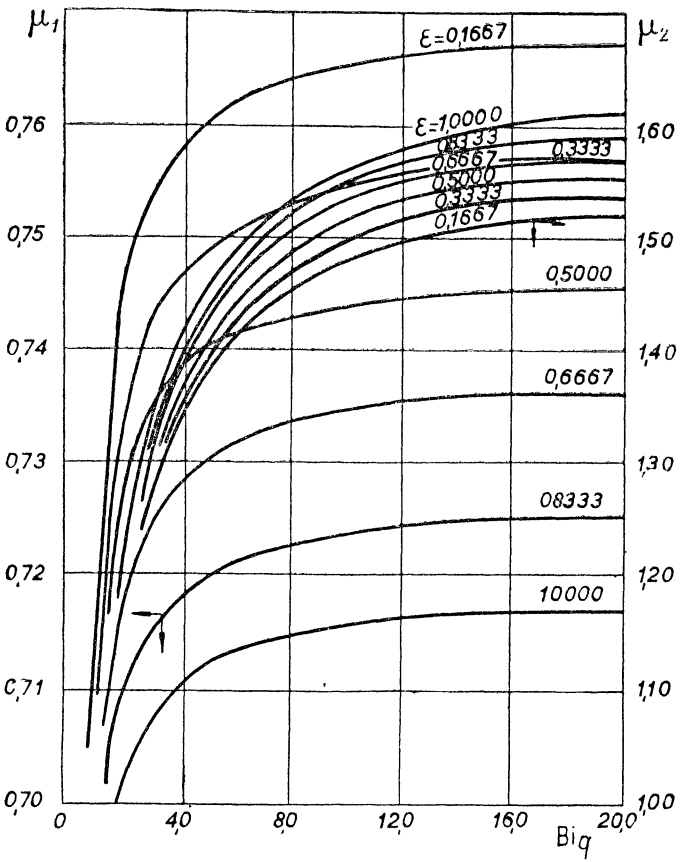


Рис. 7. Зависимость характеристических корней от ε для неограниченной пластины ($\mathrm{Bi}_q = 1 \div 20$).

Из уравнения (1.46) определим $u_L(r, s)$ и его вторую производную $u_L''(r, s)$. Найденные выражения подставляем в (1.47). После преобразования для модифицированного изображения температуры $\vartheta_L(r, s)$ получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\vartheta_L^{IV}(r, s) - \left(\frac{s}{a_q} + \frac{\varepsilon\rho\delta s}{a_q c} + \frac{s}{a_m}\right)\vartheta_L''(r, s) +$$

$$+\frac{s^2}{a_q a_m}\,\vartheta_L(r,s)-\frac{srt_0}{a_q a_m}=0. \qquad (1.48)$$

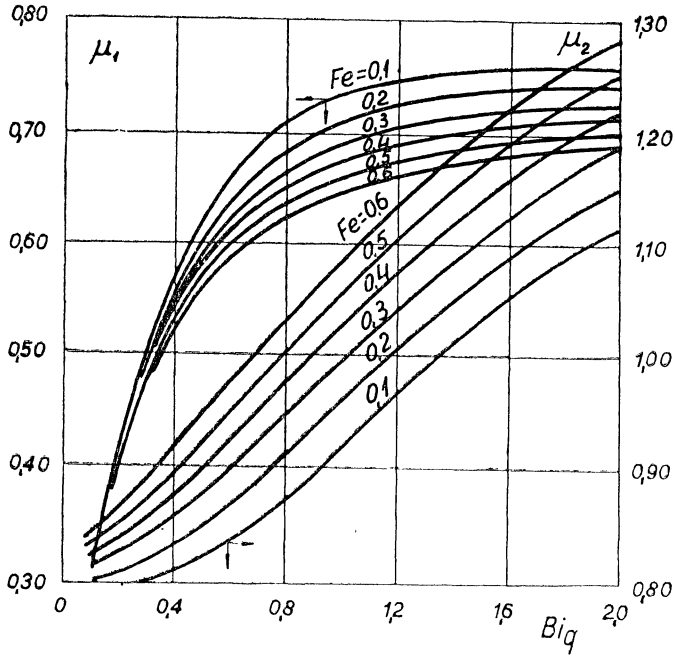


Рис. 8. Зависимость характеристических корней от Fe для неограниченной пластины ($\mathrm{Bi}_q = 0{,}1 \div 2{,}0$).

Общий интеграл уравнения (1.48) запишется так:

$$\nu_L(r,s)=\frac{rt_0}{s}+C_1\,e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}+$$

$$+C_2\,e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r}+C_3\,e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}+C_4\,e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r}, \qquad (1.49)$$

где $C_k\,(k=1,2,3,4)$ — произвольные постоянные, и ν_j описывается уравнением (1.5).

Решение для $u_L(r,s)$ находим подстановкой $\vartheta_L''(r,s)$ и $\vartheta_L(r,s)$ в уравнение (1.46). Имеем:

$$u_L(r,s)=\frac{r\theta_0}{s}+C_1\,\frac{c}{\varepsilon\rho}\,(1-\nu_1^2)\,e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}+$$

$$+C_2\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2)\,e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r}+$$

$$+C_3\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_1^2)\,e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}+C_4\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2)\,e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r}. \quad (1.50)$$

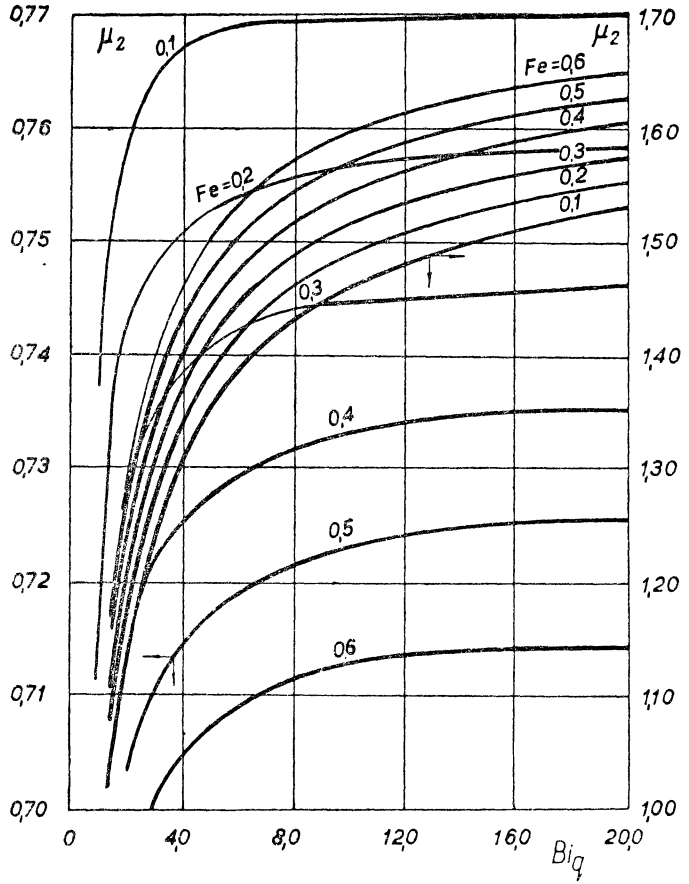


Рис. 9. Зависимость характеристических корней от Fe для неограниченной пластины ($Bi_q = 1{,}0 \div 20$).

Постоянные C_k определяются граничными условиями и условиями симметрии (III — V). Последние после применения преобразования Лапласа будут

$$t'_L(0,\ s) \text{ и } \theta'_L(0,\ s) = 0.$$

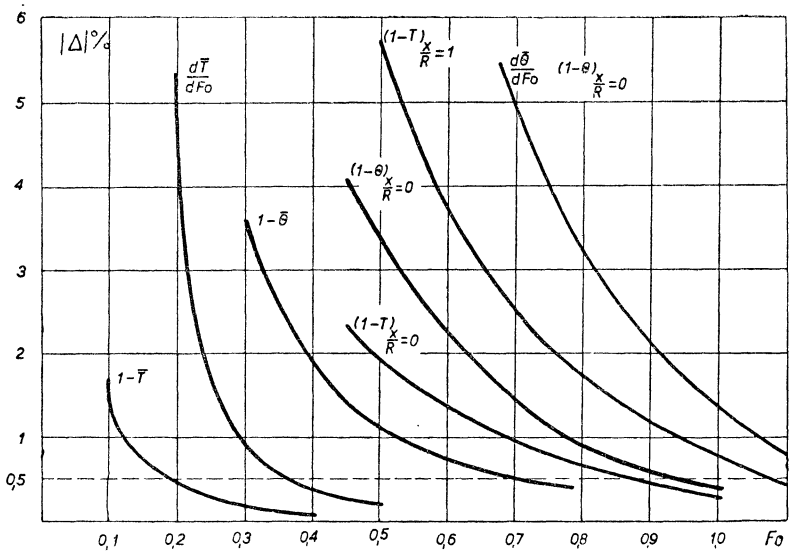


Рис. 10. Ошибка, вносимая в определение $1-\bar{T}$; $1-\bar{\Theta}$; $\frac{d\bar{T}}{d\mathrm{Fo}}$; $\frac{d\bar{\Theta}}{d\mathrm{Fo}}$ пренебрежением членами бесконечного ряда, начиная с третьего.

Так как

$$r^2 \frac{dt_L}{dr} = \frac{d\vartheta_L}{dr} r - \vartheta_L \quad \text{и} \quad t'_L(0, \tau) < \infty,$$

$$\lim_{r \to 0} \left[r^2 \frac{dt_L(r, s)}{dr} \right] =$$

$$= \lim_{r \to 0} \left[r \frac{d\vartheta_L(r, s)}{dr} - \vartheta_L(r, s) \right] = 0.$$

Условие симметрии для модифицированной температуры можно поэтому переписать в виде

$$\vartheta_L(0, s) = 0. \tag{1.51}$$

Аналогично запишется условие для модифицированного потенциала вещества

$$u_L(0, s) = 0. \tag{1.52}$$

Из (1.51) и (1.52) следует, что $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$. Значит, уравнения (1.49) и (1.50) можно несколько упростить:

$$\vartheta_L(r, s) - \frac{rt_0}{s} = B_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}} \nu_1 r +$$

$$+ B_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r, \tag{1.53}$$

$$u_L(r, s) - \frac{r\theta_0}{s} = B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r +$$

$$+ B_2 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r, \tag{1.54}$$

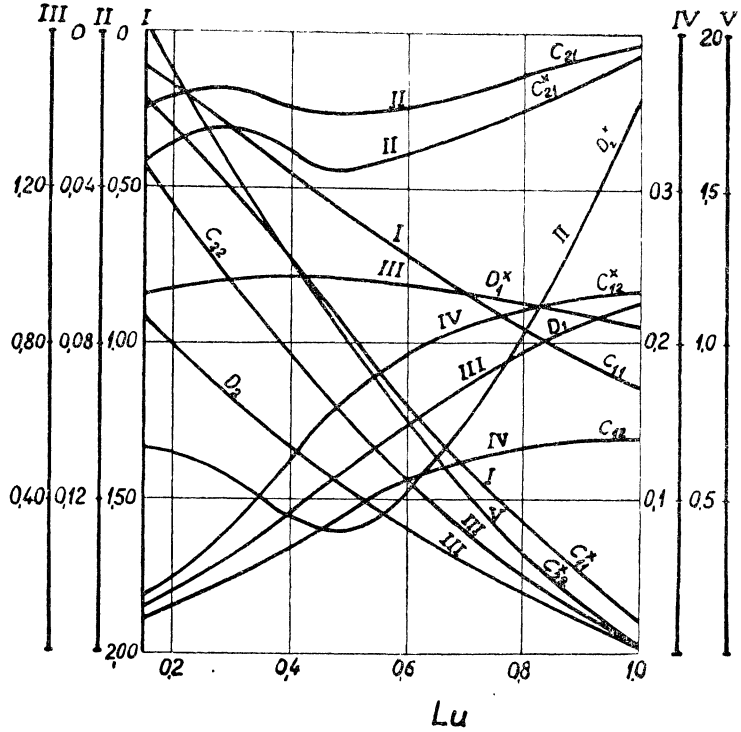


Рис 11. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от критерия Lu.

или

$$t_L(r, s) - \frac{t_0}{s} = B_1 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r}{r} +$$

$$+ B_2 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r}{r}, \tag{1.55}$$

$$\theta_L(r, s) - \frac{\theta_0}{s} = B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r}{r} +$$

$$+ B_2 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r}{r}. \qquad (1.56)$$

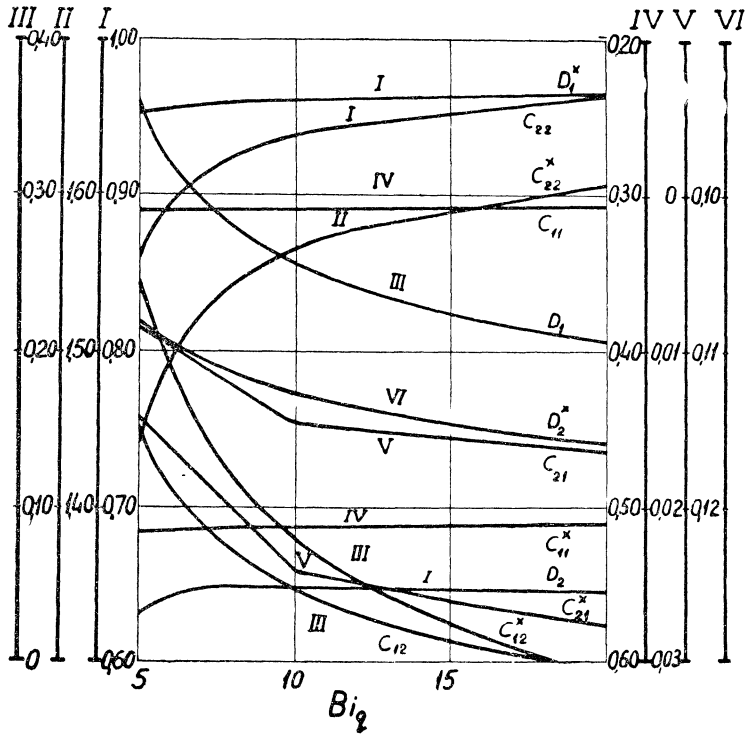


Рис. 12. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от Bi_q.

Здесь $B_1 = 2C_1$ и $B_2 = 2C_2$ — новые постоянные по отношению к координате. B_1 и B_2 определим из граничных условий (III — IV), которые после применения преобразования Лапласа запишутся так:

$$-\lambda t_L'(R, s) + \alpha \left[\frac{t_c}{s} - t_L(R, s)\right] -$$

$$-(1 - \varepsilon)\rho\beta \left[\theta_I(R, s) - \frac{\theta_p}{s}\right] = 0, \qquad (1.57)$$

$$\lambda_m \theta'_L(R, s) + \lambda_m \delta t'_L(R, s) +$$

$$+ \beta \left[\theta_L(R, s) - \frac{\theta_p}{s} \right] = 0. \qquad (1.58)$$

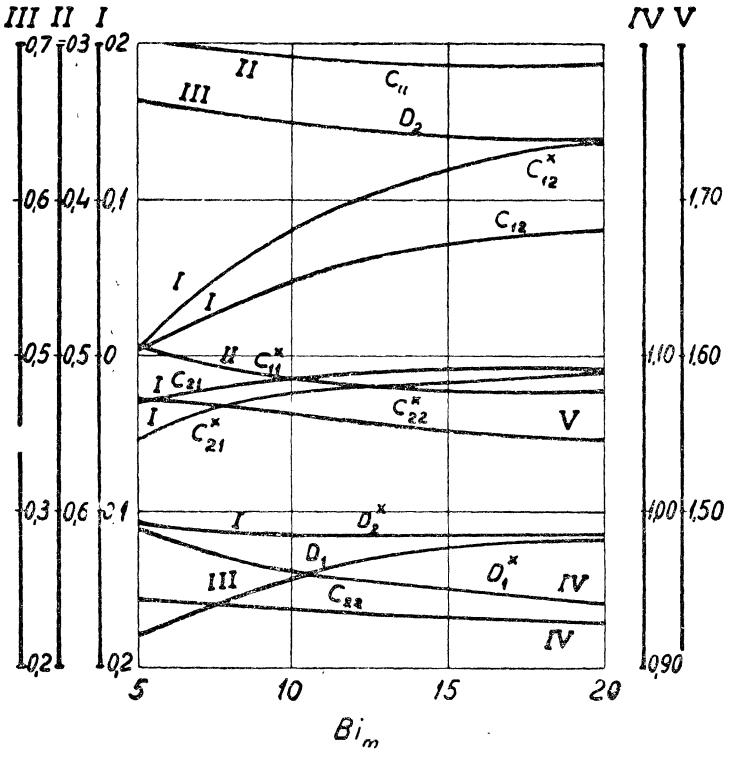


Рис. 13. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от Bi_m.

Удовлетворим решения (1.55) и (1.56) граничным условиям (1.57) и (1.58). После упрощений система уравнений для B_1 и B_2 запишется следующим образом:

$$B_1 \widetilde{Q}_1 + B_2 \widetilde{Q}_2 - \frac{t_c - t_0}{s} + (1 - \varepsilon) \frac{\rho \beta}{\alpha} \frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0,$$

$$B_1 \widetilde{P}_1 + B_2 \widetilde{P}_2 + \frac{\mathrm{Fe}}{\delta} \frac{\theta_0 - \theta_p}{s} = 0. \qquad (1.59)$$

Таблица 7

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Lu
(Ko = 1,2, Pn = 0,5, ε = 0,5, $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$)

Lu	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,15	—0,1336	—0,01978	0,02312	1,258	—0,2226	—0,03298	0,03852	2,096	0,1144	0,8651	0,9240	—0,1070
0,3	—0,3080	—0,01452	0,04880	1,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9161	—0,1137
0,5	—0,5840	—0,02162	0,09142	0,6064	—0,9732	—0,03606	0,1524	1,011	0,4821	0,4232	0,974	—0,1274
0,7	—0,8483	—0,01546	0,1270	0,3146	—1,415	—0,02574	0,2114	0,5246	0,6945	0,2213	0,9375	—0,0991
1,0	—1,135	—0,003402	0,1399	0,03438	—1,892	—0,00572	0,2334	0,0572	0,9009	0,02439	0,8435	—0,01538
2,0	—1,452	0,04048	0,1118	—0,1828	—2,420	0,06738	0,1864	—0,3044	1,100	—0,1227	0,6463	0,1328

Таблица 8

Неограниченная пластина. Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Bi_q (Lu = 0,3, ε = 0,5, Ko = 1,2, Pn = 0,5, $Bi_m = 10$)

Bi_q	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
1,0	—0,2986	—0,009234	1,348	—0,3906	—0,4974	—0,01539	2,246	—0,6514	1,473	—0,3308	0,7652	0,08159
5,0	—0,3102	—0,008446	0,1563	0,8598	—0,5168	—0,01409	0,2606	1,434	0,3582	0,6291	0,9531	—0,1088
7,0	—0,3088	—0,01090	0,09294	0,9122	—0,5148	—0,01816	0,1550	1,521	0,2984	0,6491	0,9579	—0,1129
10	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9616	—0,1137
15	—0,3074	—0,01556	0,01517	0,9524	—0,5122	—0,02594	0,02526	1,588	0,2254	0,6472	0,9635	—0,1146
20	—0,3068	—0,01634	—0,002564	0,9630	—0,5116	—0,02724	—0,004274	1,606	0,2084	0,6473	0,9643	—0,1156

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Bi_m
($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}5$, $Ko = 1{,}2$, $Pn = 0{,}5$, $Bi_q = 10$)

Bi_m	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,1	—2,558	0,1000	16,65	0,3122	—4,266	0,1667	27,74	0,5206	12,83	0,1939	—0,178	0,00417
0,5	—0,2500	0,02192	0,2408	0,5598	—0,4168	—0,03656	0,4018	0,9346	0,4660	0,5394	1,014	—0,02065
5	—0,2974	—0,03146	0,00369	0,9466	—0,4958	—0,05242	0,006154	1,578	0,2202	0,6635	0,9910	—0,1087
7	—0,3034	—0,02174	0,02590	0,9428	—0,5054	—0,03622	0,04320	1,572	0,2384	0,6570	0,9751	—0,1120
10	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2670	0,6500	0,9616	—0,1137
15	—0,3122	—0,009438	0,07318	0,9320	—0,5202	—0,01574	0,1219	1,554	0,2776	0,6423	0,9502	—0,1143
20	—0,3136	—0,006896	0,08182	0,9284	—0,5228	—0,01148	0,1364	1,548	0,2835	0,6378	0,9410	—0,1144

Таблица 10

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от ε
($Lu = 0{,}3$, $Ko = 1{,}2$, $Pn = 0{,}6$, $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$)

ε	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,1667	—0,1173	—0,006474	0,08554	1,112	—0,5868	—0,03238	0,4276	5.562	0,1590	0,7636	0,990	—0,1433
0,3333	—0,2190	—0,01140	0,06714	1,018	—0,5472	—0,02850	0,1679	2,546	0,2128	0,7021	0,9753	—0,1268
0,5000	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9616	—0,1137
0,6667	—0,3872	—0,01751	0,03478	0,8638	—0,4840	—0,02190	0,04352	1,080	0,2979	0,6004	0,9484	—0,1019
0,8333	—0,4592	—0,02002	0,02734	0,7946	—0,4592	—0,02002	0,02734	0,7946	0,3401	0,5540	0,9399	—0,09164
1,0000	—0,5244	—0,01967	0,01669	0,7340	—0,4368	—0,01640	0,01391	0,6116	0,3738	0,5143	0,9301	—0,08296

Таблица 11

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Pn
(Lu= 0,3, Ko = 1,2, $\varepsilon = 0{,}5$, $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$)

Pn	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,1667	—0,3188	—0,005276	0,04618	0,9158	—0,5312	—0,008794	0,07694	1,527	0,2620	0,6353	0,9045	—0,03952
0,3333	—0,3132	—0,009060	0,04718	0,9288	—0,5220	—0,01509	0,07860	1,549	0,2590	0,6452	0,9336	—0,07796
0,5000	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9616	—0,1137
0,6667	—0,3028	—0,01809	0,04882	0,9524	—0,5048	—0,03016	0,08138	1,588	0,2532	0,6600	0,9865	—0,1500
0,8333	—0,2978	—0,02246	0,04830	0,9694	—0,4964	—0,03742	0,08048	1,616	0,2493	0,6709	1,010	—0,1862

Таблица 12

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Ko
(Lu = 0,3, Pn = 0,5, $\varepsilon = 0{,}5$. $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$)

Ko	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0,4	—0,1172	—0,006408	0,01408	1,133	—0,5862	—0,03204	0,07050	5,670	0,09371	0,7859	0,9486	—0,1470
0,8	—0,2186	—0,01032	0,03190	1,029	—0,5466	—0,02580	0,07982	2,574	0,1799	0,7148	0,9777	—0,1293
1,2	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9616	—0,1137
1,6	—0,3876	—0,01630	0,06270	0,8658	—0,4844	—0,02036	0,07842	1,082	0,3244	0,6001	0,9466	—0,1022
2,0	—0,4592	—0,01827	0,07526	0,8072	—0,4592	—0,01827	0,07526	0,8072	0,3850	0,5586	0,9338	—0,09302

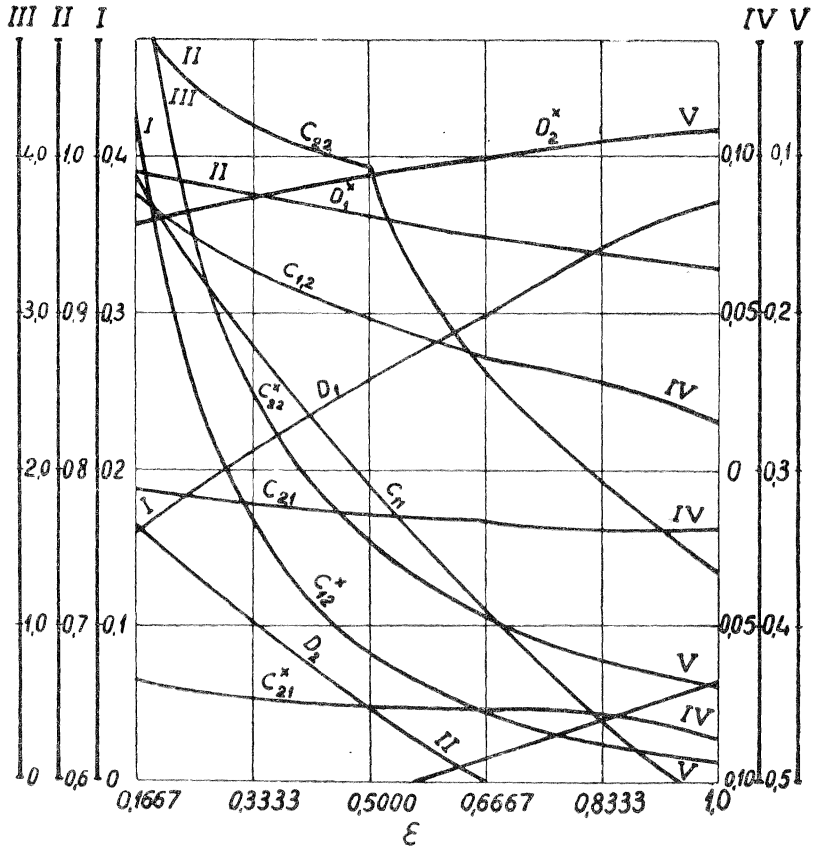


Рис. 14. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от ε.

Отсюда определяем коэффициенты B_j. Имеем:

$$B_1 = \frac{(t_c - t_0)\widetilde{P}_2 + \frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0 - \theta_p)(\widetilde{Q}_2 - K_1\widetilde{P}_2)}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)},$$

$$B_2 = \frac{(t_c - t_0)\widetilde{P}_1 + \frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0 - \theta_p)(\widetilde{Q}_1 - K_1\widetilde{P}_1)}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)},$$

где

$$\widetilde{Q}_j = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R\,\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R}{R} +$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-(1-\nu_j^2)K_1\right]\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R}{R}, \qquad (1.60)$$

$$\widetilde{P}_j=\left[(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}\right]\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\;\nu_j R\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R}{R}+$$

$$+\left[(1-\nu_j^2)-\frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_j R}{R}, \qquad (1.61)$$

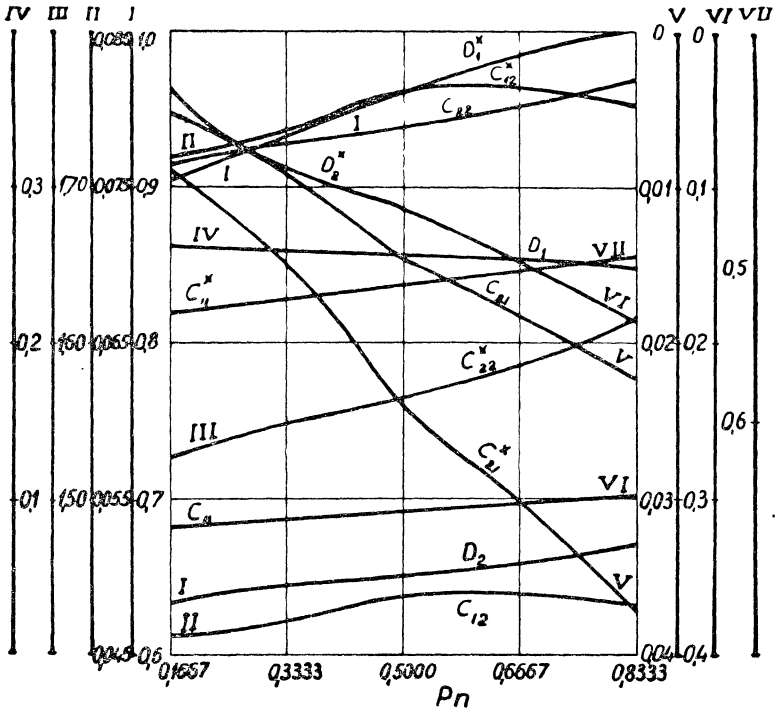


Рис. 15. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от Pn.

Таким образом, решения для модифицированных изображений потенциалов переноса (1.53) и (1.54) будут следующие:

$$\vartheta_E(r,s)-\frac{rt_0}{s}=(t_c-t_0)\left\{\frac{\widetilde{P}_1+\varepsilon\mathrm{Ko}\,(\widetilde{Q}_1-K_1\widetilde{P}_1)}{s\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\;\nu_2 r-\right.$$

$$- \frac{\widetilde{P}_2 + \varepsilon \mathrm{Ko}(\widetilde{Q}_2 - K_1\widetilde{P}_2)}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}} \nu_1 r \Bigg\} =$$

$$= (t_c - t_0)\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)} , \qquad (1.62)$$

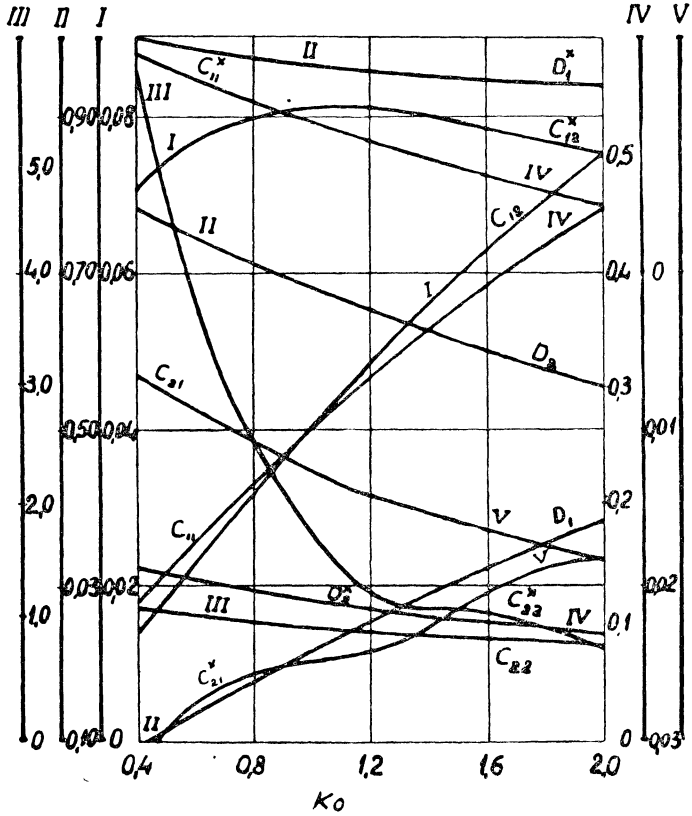


Рис. 16. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от критерия Ко.

$$\frac{r\theta_0}{s} - u_L(r, s) = (\theta_0 - \theta_p)\left\{\frac{\widetilde{Q}_2 + \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}\widetilde{P}_2 - K_1\widetilde{P}_2}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} \times\right.$$

$$\times (1 - \nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}} \nu_1 r - \frac{\widetilde{Q}_1 + \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}\widetilde{P}_1 - K_1\widetilde{P}_1}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} \times$$

$$\times(1-\nu_2^2)\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r\Bigg\} = (\theta_0-\theta_p)\frac{\Phi_2(s)}{\psi_1(s)}\ . \qquad (1.63)$$

Числитель и знаменатель уравнений (1.62) и (1.63) не являются обобщенными полиномами относительно s, но их можно привести к ним, разделив обе части, т. е. $\Phi_1(s)$ и $\psi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ и $\psi_1(s)$ на $\sqrt{\frac{s}{a_q}}$ $\sqrt{\frac{s}{a_q}}$. Анализ приведенных уравнений показывает также, что переход от изображения к оригиналу, за исключением нулевого корня ($s=0$), может быть проведен по обычной теореме разложения, т. е. без преобразования $\Phi_1(s)$ или $\Phi_2(s)$ в обобщенный полином $\Phi_{01}(s)$ или $\Phi_{02}(s)$ и $\psi_1(s)$ в $\psi_0(s)$.

Найдем корни $\psi_1(s)$:

$$\psi_1(s) = s(\widetilde{Q_2}\widetilde{P_1} - \widetilde{Q_1}\widetilde{P_2}) = 0.$$

Имеем:

а) $s = s_0 = 0$ (нулевой корень),

б) $s = s_n$, где s_n удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{Q_2}\widetilde{P_1} - \widetilde{Q_1}\widetilde{P_2} = 0. \qquad (1.64)$$

Заменим в уравнении (1.64) гиперболические функции тригонометрическими и обозначим $i\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,R$ через μ; тогда для s_n получим следующее выражение:

$$s_n = -\frac{a_q\,\mu_n^2}{R^2}\ ,$$

где μ_n определяются из уравнения

$$Q_{n2}P_{n1} - Q_{n1}P_{n2} = 0. \qquad (1.65)$$

Здесь

$$Q_{nj} = \frac{\nu_j\,\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\cos\nu_j\,\mu_n +$$

$$+\left[\ 1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + (1-\nu_j^2)K_1\ \right]\sin\nu_j\,\mu_n, \qquad (1.66)$$

$$P_{nj} = \left[(1-\nu_j^2) + \mathrm{Fe}\ \right]\frac{\nu_j\,\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\cos\nu_j\,\mu_n + \left[(1-\nu_j^2) -\right.$$

$$- \frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\Bigg] \sin \nu_j \mu_n. \qquad (1.67)$$

Таким образом, оригинал изображений пишем в виде

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}\right] = \frac{\Phi_{01}(0)}{\psi_0'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_n)}{\psi_1'(s_n)} \exp(s_n\tau), \qquad (1.68)$$

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_2(s)}{\psi_1(s)}\right] = \frac{\Phi_{02}(0)}{\psi_0'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_2(s_n)}{\psi_1'(s_n)} \exp(s_n\tau). \qquad (1.69)$$

Для определения нулевого члена, согласно изложенному, преобразуем уравнение (1.68) так, чтобы оно представляло собой отношение двух обобщенных полиномов. Последними будут:

$$\Phi_{01}(s) = \left\{\left[\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\nu_1\left(1+\frac{1}{2!}\frac{s}{a_q}\nu_1^2R^2+\dots\right)+\right.\right.$$

$$+\left[(1-\nu_1^2)-\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\left(\nu_1+\frac{1}{3!}\frac{s}{a_q}\nu_1^3R^2+\dots\right)\Bigg]+$$

$$+\varepsilon\,\mathrm{Ko}\left[\frac{\nu_1}{\mathrm{Bi}_q}\left(1+\frac{1}{2!}\frac{s}{a_q}\nu_1^2R^2+\dots\right)+\right.$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+(1-\nu_1^2)K_1\right]\times$$

$$\times\left(\nu_1+\frac{1}{3!}\nu_1^3R^2\frac{s}{a_q}+\dots\right)-$$

$$-K_1\left(\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\nu_1\left(1+\frac{1}{2!}\frac{s}{a_q}\nu_1^2R^2+\dots\right)+\right.$$

$$+\left[(1-\nu_1^2)-\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\nu_1+\frac{1}{3!}\frac{s}{a_q}\nu_1^3R^2+\dots\right)\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\nu_2\ r\ +\frac{1}{3!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^3 r^3+\ldots\right)-$$

$$-\left\{\left[\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\ \nu_2\left(1+\frac{1}{2!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^2 R^2+\ldots\right)+\right.\right.$$

$$+\left[(1-\nu_2^2)-\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\times$$

$$\left.\times\left(\nu_2+\frac{1}{3!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^3 R^2+\ldots\right)\right]+$$

$$+\varepsilon\,\mathrm{Ko}\left[\frac{\nu_2}{\mathrm{Bi}_q}\left(1+\frac{1}{2!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^2 R^2+\ldots\right)+\right.$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+(1-\nu_2^2)K_1\right]\times$$

$$\times\left(\nu_2+\frac{1}{3!}\ \nu_2^3 R^2\ \frac{s}{a_q}+\ldots\right)-$$

$$-K_1\left(\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\ \nu_2\left(1+\frac{1}{2!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^2 R^2+\ldots\right)+\right.$$

$$+\left[(1-\nu_2^2)-\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\times$$

$$\left.\left.\times\left(\nu_2+\frac{1}{3!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^3 R^2+\ldots\right)\right)\right]\Bigg\}\times$$

$$\times\left(\nu_1 r+\frac{1}{3!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_1^3 r^3+\ldots\right),$$

$$\psi_0(s)=s\left[\left\{\frac{\nu_2}{\mathrm{Bi}_q}\left(1+\frac{1}{2!}\ \frac{s}{a_q}\ \nu_2^2 R^2+\ldots\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+K_1(1-\nu_2^2)\right]\times\right.$$

$$\times\left(\nu_2+\frac{1}{3!}\,\nu_2^3 R^2\frac{s}{a_q}+\ldots\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left\{\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\,\nu_1\left(1+\frac{1}{2!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_1^2 R^2+\ldots\right)+\right.$$

$$+\left[(1-\nu_1^2)-\frac{(1-\nu_1^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\times$$

$$\times\left(\nu_1+\frac{1}{3!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_1^3 R^2+\ldots\right)\Bigg\}-$$

$$-\left\{\frac{\nu_1}{\mathrm{Bi}_q}\left(1+\frac{1}{2!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_1^2 R^2+\ldots\right)+\right.$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+K_1(1-\nu_1^2)\right]\times$$

$$\times\left(\nu_1+\frac{1}{3!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_1^3 R^2+\ldots\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\,\nu_2\left(1+\frac{1}{2!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_2^2 R^2+\ldots\right)+\right.$$

$$+\left[(1-\nu_2^2)-\frac{(1-\nu_2^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\times$$

$$\times\left.\left.\left(\nu_2+\frac{1}{3!}\,\frac{s}{a_q}\,\nu_2^3 R^2+\ldots\right)\right\}\right].$$

В результате нулевой член уравнения (1.68) запишется так:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Phi_{01}(s)}{\psi_0'(s)}=r.$$

Для остальных корней находим

$$\psi_1'(s_n)=\frac{\mu_n}{2R^2}\,\psi_n,$$

где

$$\psi_n = \nu_1 P_{n2} A_{n1} + \nu_2 Q_{n1} B_{n2} - \nu_2 P_{n1} A_{n2} - \nu_1 Q_{n2} B_{n1}, \quad (1.70)$$

$$A_{nj} = \left[1 + (1 - \nu_j^2) K_1\right] \cos \nu_j \mu_n -$$

$$- \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \sin \nu_j \mu_n, \quad (1.71)$$

$$B_{ni} = (1 - \nu_j^2) \cos \nu_j \mu_n -$$

$$- [(1 - \nu_j^2) + \mathrm{Fe}] \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_m} \sin \nu_j \mu_n. \quad (1.72)$$

Член для ненулевых корней уравнения (1.68) будет

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_n)}{\psi_1'(s_n)} e^{s_n \tau} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} R \sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R} - \right.$$

$$\left. - C_{n2} R \sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R} \right) \exp\ (-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

$$C_{nj} = 2 \frac{P_{nj} + \varepsilon \mathrm{Ko}\,(Q_{nj} - K_1 P_{nj})}{\mu_n \psi_n}. \quad (1.73)$$

Итак, решение для нестационарного поля потенциала переноса тепла имеет вид

$$\frac{r t(r, \tau) - r t_0}{t_c - t_0} = r - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} R \sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R} - \right.$$

$$\left. - C_{n2} R \sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R} \right) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \quad (1.74)$$

Методика получения оригинала изображения (1.69) совершенно аналогична предыдущему. Расчеты дают в этом случае

$$\frac{r \theta_0 - r \theta(r, \tau)}{\theta_0 - \theta_p} = r -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2}^{*} (1-\nu_1^2) R \sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R} - \right.$$

$$\left. - C_{n1}^{*} (1-\nu_2^2) R \sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R} \right] \exp (-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.75)$$

$$C_{nj}^{*} = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj}. \qquad (1.76)$$

Таким образом, окончательный вид для решения системы дифференциальных уравнений внутреннего тепло- и массообмена в форме шара, граничных условиях третьего рода и постоянных начальных условиях получим, собрав вместе уравнения (1.65)—(1.67) и (1.70)—(1.76):

$$T = \frac{t(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \frac{\sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - C_{n2} \frac{\sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \exp (-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.77)$$

$$\Theta = \frac{\theta_0 - \theta(r, \tau)}{\theta_0 - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2}^{*} (1-\nu_1^2) \frac{\sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - C_{n1}^{*} (1-\nu_2^2) \frac{\sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right] \exp (-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.78)$$

где

$$C_{nj} = 2 \frac{P_{nj} + \varepsilon \mathrm{Ko} (Q_{nj} - K_1 P_{nj})}{\mu_n \psi_n},$$

$$C_{nj}^{*} = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj},$$

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^j\sqrt{\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2-\frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right],$$

$$\psi_n = \nu_1 P_{n2} A_{n1} + \nu_2 Q_{n1} B_{n2} - \nu_1 P_{n1} A_{n2} - \nu_1 Q_{n2} B_{n1},$$

$$A_{nj} = [1+(1-\nu_j^2) K_1]\cos\nu_j\mu_n - \frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\sin\nu_j\mu_n,$$

$$B_{nj} = (1-\nu_j^2)\cos\nu_j\mu_n - [(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}]\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\sin\nu_j\mu_n,$$

$$Q_{nj} = \frac{\nu_j\mu_n}{Bi_q}\cos\nu_j\mu_n +$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+(1-\nu_j^2)K_1\right]\sin\nu_j\mu_n,$$

$$P_{nj} = [(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}]\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\cos\nu_j\mu_n +$$

$$+\left[(1-\nu_j^2)-\frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\sin\nu_j\mu_n.$$

μ_n — корни характеристического уравнения (1.65)

$$Q_{n2} P_{n1} - Q_{n1} P_{n2} = 0.$$

Необходимые для расчета тепло- и массопереноса корни характеристического уравнения возможно получить графоаналитическим путем. Как и в случае пластины, преобразуем для этой цели уравнение (1.65), обозначив

$$M = P_1\frac{\sin\nu_2\mu}{\mu} - P_2\frac{\sin\nu_1\mu}{\mu},$$

$$N = P_2\left[\nu_1\mu\cos\nu_1\mu + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\mathrm{LuBi}_m(1-\nu_1^2)\sin\nu_1\mu\right] -$$

$$-P_1\left[\nu_2\mu\cos\nu_2\mu+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathrm{LuBi}_m\,(1-\nu_2^2)\sin\nu_2\mu\right],$$

будем иметь

$$\Phi_\mu=\frac{M}{N}=\frac{\mu}{\mathrm{Bi}_q-1}\,. \tag{1.79}$$

Корни μ_n определяются пересечением кривых $\Phi=\Phi_\mu(\mu)$ и прямой $y=\dfrac{\mu}{\mathrm{Bi}_q-1}$. Характер указанных кривых и способ определения μ_n показаны на рисунке 17. Найденные значения нескольких первых характеристических корней приведены в таблице 13 и на рисунках 18 и 19.

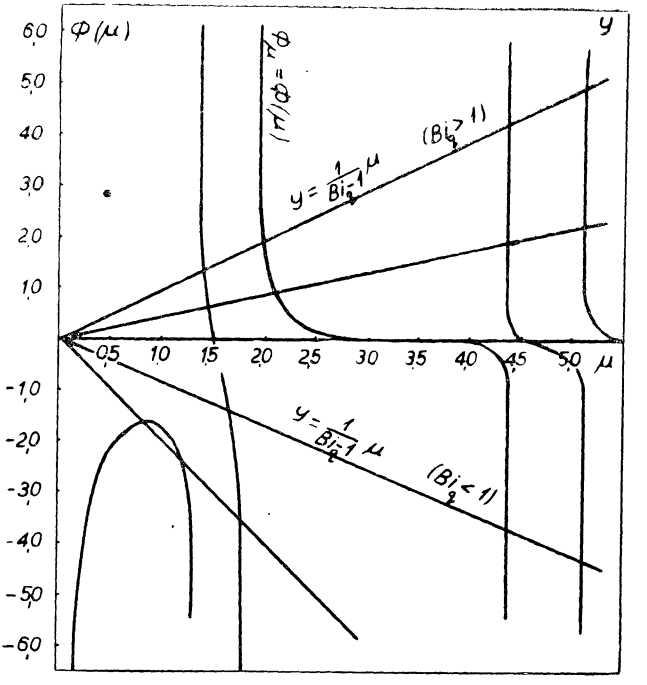


Рис. 17. Графический способ определения корней характеристического уравнения $\Phi(\mu)=\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_q-1}\,\mu$ для шара.

С увеличением индекса n значения μ_n быстро растут, а бесконечные ряды в уравнениях (1.77) и (1.78) достаточно быстро сходятся так, что, начиная с определенного Fo, мо-

Таблица 13

Корни характеристического уравнения $\Phi(\mu)=\frac{1}{\mathrm{Bi}_q-1}\mu$ **для шара** (Lu=0,3, KoPn=0,6, ε=0,5, Bi_m=10)

Bi_q	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
		для $\mathrm{Bi}_q<1{,}0$		
0,10			1,756	5,076
0,15			1,760	5,079
0,20			1,763	5,081
0,25			1,766	5,082
0,30			1,769	
0,35			1,772	
0,40	0,970	1,125	1,776	
0,45	0,879	1,183	1,781	
0,50	0,811	1,217	1,787	
0,55	0,749	1,240	1,793	
0,60	0,695	1,257	1,800	
0,70	0,584	1,285	1,865	
0,80	0,462	1,315		
0,90	0,343			
		для $\mathrm{Bi}_q>1{,}0$		
1,5	1,389	1,917	4,401	5,088
2,0	1,408	1,969	4,402	5,093
3,0	1,431	2,058	4,404	5,100
4,0	1,447	2,126	4,406	5,110
5,0	1,455	2,191	4,408	5,115
6,0	1,460	2,247	4,410	5,121
7,0	1,464	2,295	4,411	5,127
8,0	1,467	2,337	4,412	5,133
9,0	1,469	2,370	4,413	5,141
10	1,471	2,405	4,415	5,149
15	1,475	2,526	4,423	5,186
20	1,478	2,641	4,430	5,218
30	1,481	2,788	4,441	5,273
40	1,482	2,855	4,450	5,320
50	1,483	2,900	4,459	5,387
∞	1,486	2,960	4,518	5,881

жем удовлетвориться двумя членами разложения. Исходные значения Fo для упрощения расчетов тепло- и массопереноса в шаре даны в таблице 6. Сравнение этих данных с соответствующими данными для неограниченной пластины показывает, что в шаровой задаче значения исходных Fo значительно ниже, чем в задаче для пластины. В целях облегчения расчетов в таблице 14 собраны коэффициенты тепло- и массопереноса для шара, графически эти же данные отражены на рисунке 20.

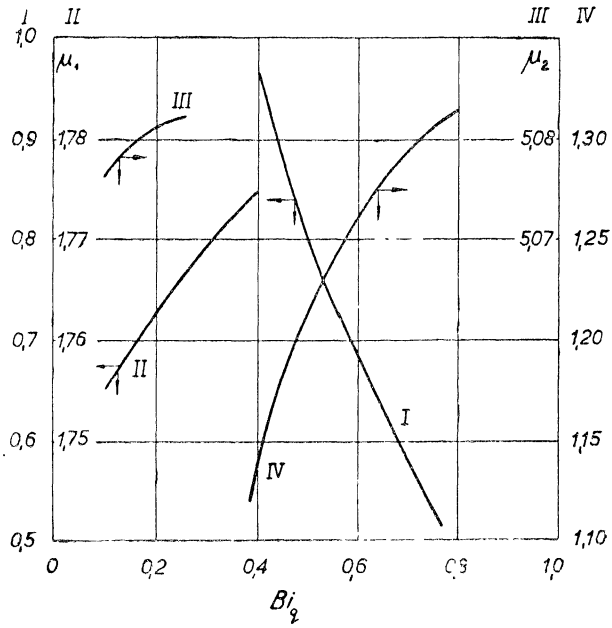


Рис. 18. Зависимость характеристических корней от Bi_q для шара ($Bi_q < 1{,}0$).

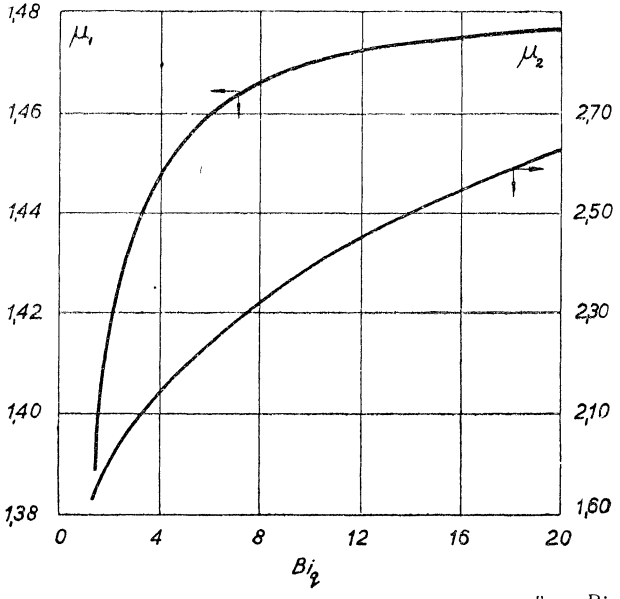


Рис. 19. Зависимость характеристических корней от Bi_q для шара ($Bi_q > 1{,}0$).

Таблица 14

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от Bi_q

(Lu=0,3, ε=0,5, Ko=1,2, Pn=0,5, Bi_m=10)

Bi_q	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
5,0	0,1679	−0,1720	−0,1643	−0,9540	0,2799	−0,2867
7,0	0,1664	−0,1229	−0,09866	−0,7322	0,2774	−0,2049
10	0,1651	−0,08956	−0,05284	−0,5456	0,2752	−0,1493
15	0,1642	−0,06734	−0,01965	−0,3970	0,2737	−0,1123
20	0,1636	−0,05408	−0,004038	−0,3008	0,2727	−0,09015

Bi_q	C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
5,0	−0,2739	−1,590	0,3757	1,218	0,8343	−0,3637
7,0	−0,1645	−1,221	0,2987	0,9520	0,8334	−0,1940
10	−0,08808	−0,9095	0,2444	0,7161	0,8314	−0,0878
15	−0,03276	−0,6618	0,2052	0,5226	0,8315	−0,02132
20	−0,006731	−0,5014	0,1860	0,3943	0,8288	0,01378

Средние значения потенциалов переноса тепла и вещества в шаре получим согласно соотношениям

$$\bar{t}(\tau) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 t\,(r, \tau)dr, \qquad \bar{\Theta}(\tau) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2\,\Theta(r, \tau)\,dr.$$

Для средних безразмерных потенциалов переноса будем иметь:

$$\bar{T} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.80)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{\theta_0 - \bar{\theta}(\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \qquad (1.81)$$

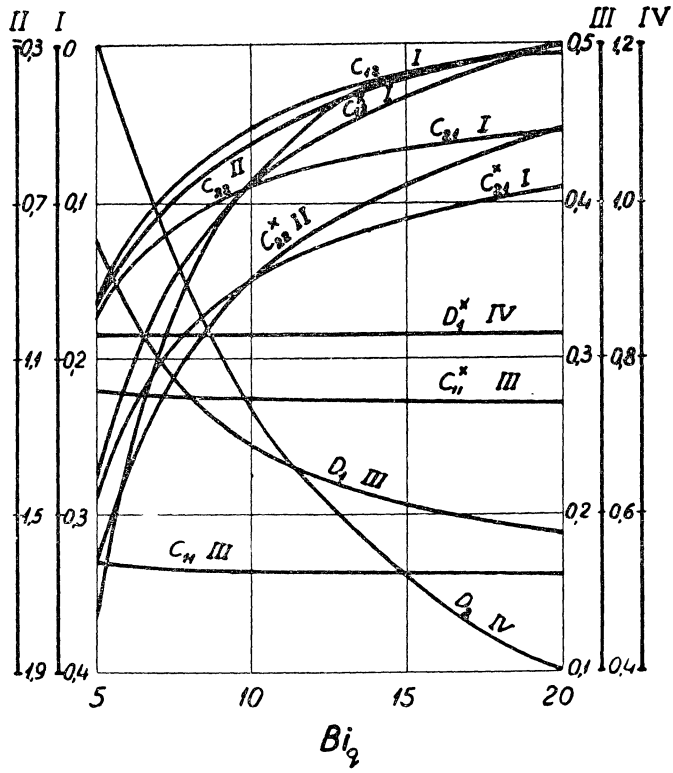


Рис. 20. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от Bi_q для шара.

Здесь

$$D_n = D_{n1} - D_{n2}, \quad D_n^{*} = D_{n2}^{*} - D_{n1}^{*}, \tag{1.82}$$

$$D_{n1} = \frac{3\,(\sin \nu_2 \mu_n - \nu_2 \mu_n \cos \nu_2 \mu_n)}{\nu_2^2\ \mu_n^2}\, C_{n1}\,,$$

$$D_{n2} = \frac{3\,(\sin \nu_1 \mu_n - \nu_1 \mu_n \cos \nu_1 \mu_n)}{\nu_1^2\ \mu_n^2}\, C_{n2},$$

$$D_{n1}^{*} = \frac{3\,(\sin \nu_2 \mu_n - \nu_2 \mu_n \cos \nu_2 \mu_n)}{\nu_2^2\ \mu_n^2}\,(1 - \nu_2^2)\, C_{n1}^{*},$$

$$D_{n2}^{*} = \frac{3\,(\sin \nu_1 \mu_n - \nu_1 \mu_n \cos \nu_1 \mu_n)}{\nu_1^2\ \mu_n^2}\,(1 - \nu_1^2)\, C_{n2}^{*}.$$

Рассчитанные по уравнению (1.82) коэффициенты D_n и D_n^* в зависимости от Bi_q собраны в таблице 14 и отображены на рисунке 20.

Безразмерную скорость изменения потенциалов получим дифференцированием уравнений (1.77) и (1.78) для локальных величин и (1.80) и (1.81) для средних величин по безразмерному времени.

Имеем:

$$\frac{dT}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\frac{\sin \nu_2 \mu_n r/R}{r/R} - C_{n2}\frac{\sin \nu_1 \mu_n r/R}{r/R}\right)\mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \quad (1.83)$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \quad (1.84)$$

$$\frac{d\theta}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}^*(1-\nu_1^2)\frac{\sin \nu_1 \mu_n r/R}{r/R} - C_{n1}^*(1-\nu_2^2)\frac{\sin \nu_2 \mu_n r/R}{r/R}\right]\mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \quad (1.85)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \quad (1.86)$$

В приведенные решения одновременно с известными тепло- и массообменными критериями подобия вошли безразмерные величины ν_1 и ν_2. Роль ν_j в отличие от других критериев связана не с физикой процесса, а с математикой. В общем случае ν_j—см. уравнение (1.5)—зависят от критериев Федорова и Lu:

$$\nu_j = \nu_j(\mathrm{Fe}, \mathrm{Lu}).$$

В таблице 15 даны значения ν_j в интервалах изменения критерия Lu от 0 до 100 и критерия Федорова от 0 до 1,0. Из этой таблицы видно, что ν_1 изменяется с изменением Lu и Fe незначительно. С ростом каждого из названных критериев он уменьшается. При $\mathrm{Lu} = 0$ ν_1 равен единице, а при $\mathrm{Lu} > 1{,}0$ уменьшается и стремится к нулю. ν_2 с ростом

Таблица 15

Значения $\nu_j = \nu_j$ (Lu, Fe) $j = 1,2$

Lu \ Fe	ν_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	ν_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	ν_2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	ν_1	1	0,9995	0,9990	0,9985	0,9980	0,9975	0,9970	0,9965	0,9960	0,9955	0,9950
0,01	ν_2	10,0000	10,0050	10,0100	10,0150	10,0201	10,0251	10,0301	10,0352	10,0403	10,0453	10,0503
	ν_1	1	0,9990	0,9980	0,9939	0,9960	0,9949	0,9939	0,9929	0,9919	0,9909	0,9899
0,02	ν_2	7,0711	7,0782	7,0854	7,0926	7,0998	7,1070	7,1141	7,1213	7,1285	7,1356	7,1428
	ν_1	1	0,9979	0,9959	0,9938	0,9918	0,9837	0,9877	0,9858	0,9838	0,9818	0,9798
0,04	ν_2	5,0000	5,0104	5,0208	5,0311	5,0414	5,0517	5,0620	5,0722	5,0825	0,0927	5,1029
	ν_1	1	0,9968	0,9937	0,9906	0,9875	0,9845	0,9815	0,9784	0,9754	0,9725	0,9696
0,06	ν_2	4,0825	4,0955	4,1084	4,1213	4,1341	4,1469	4,1597	4,1724	4,1850	4,1977	4,2102
	ν_1	1	0,9957	0,9914	0,9873	0,9831	0,9791	0,9750	0,9710	0,9671	0,9632	0,9595
0,08	ν_2	3,5355	3,5508	3,5660	3,5812	3,5963	3,6113	3,6262	3,6410	3,6557	3,6704	2,6850
	ν_1	1	0,9945	0,9891	0,9838	0,9786	0,9735	0,9684	0,9635	0,9587	0,9539	0,9492
0,10	ν_2	3,1623	3,1798	3,1971	3,2143	3,2314	3,2484	3,2652	3,2820	3,2986	3,3151	3,3315
	ν_1	1	0,9878	0,9762	0,9651	0,9544	0,9440	0,9344	0,9250	0,9158	0,9071	0,8986
0,20	ν_2	2,2361	2,2636	2,2907	2,3170	2,3428	2,3681	2,3931	2,4175	2,4415	2,4652	2,4884
	ν_1	1	0,9796	0,9609	0,9437	0,9278	0,9129	0,8989	0,8858	0,8733	0,8615	0,8503
0,30	ν_2	1,8257	1,864	1,9000	1,9346	1,968	2,0000	2,031	2,0612	2,0906	2,1192	2,1472
	ν_1	1	0,9694	0,9431	0,9200	0,8993	0,8803	0,8632	0,8473	0,8325	0,8187	0,8057
0,40	ν_2	1,5811	1,6310	1,6764	1,7185	1,7582	1,7953	1,8316	1,8660	1,8992	1,9312	1,9623
	ν_1	1	0,9415	0,9004	0,8677	0,8402	0,8167	0,7955	0,7766	0,7594	0,7437	0,7292
0,60	ν_2	1,2910	1,3712	1,4339	1,4879	1,5365	1,5811	1,6229	1,6624	1,7000	1,7360	1,7706
	ν_1	1	0,9020	0,8511	0,8137	0,7835	0,7580	0,7358	0,7162	0,6985	0,6824	0,6676
0,80	ν_2	1,1180	1,2395	1,3136	1,3740	1,4269	1,4750	1,5193	1,5611	1,6007	1,6384	1,6746
	ν_1	1	0,8543	0,8011	0,7630	0,7326	0,7071	0,6850	0,6657	0,6482	0,6324	0,6180
1,00	ν_2	1,0000	1,1705	1,2483	1,3107	1,3650	1,4142	1,4597	1,5023	0,5427	1,5811	1,6181

Продолжение таблицы 15

Lu \ Fe	ν_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	ν_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	ν_2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	ν_1	1	0,6526	0,6150	0,5858	0,5617	0,5409	0,5233	0,5073	0,4931	0,4801	0,4682
2,00	ν_2	0,7071	1,0836	1,1496	1,2070	1,2587	1,3067	1,3513	1,3938	1,4342	1,4730	1,5102
	τ_1	1	0,4706	0,4472	0,4276	0,4108	0,3960	0,3831	0,3714	0,3609	0,3512	0,3423
4,00	ν_2	0,5000	1,0623	1,1180	1,1693	1,2171	1,2622	1,3050	1,3461	1,3856	1,4236	1,4604
	ν_1	1	0,3863	0,3680	0,3523	0,3389	0,3267	0,3162	0,3066	0,2979	0,2900	0,2826
6,00	ν_2	0,4083	1,0571	1,1097	1,1587	1,2049	1,2487	1,2910	1,3314	1,3704	1,4080	1,4446
	ν_1	1	0,3352	0,3198	0,3062	0,2949	0,2846	0,2753	0,2670	0,2594	0,2525	0,2461
8,00	ν_2	0,3536	1,0548	1,1058	1,1544	1,1992	1,2524	1,2842	1,3243	1,3629	1,4004	1,4368
	ν_1	1	0,3002	0,8865	0,2748	0,2645	0,2556	0,2470	0,2396	0,2328	0,2265	0,2208
10,0	ν_2	0,3162	1,0535	1,1036	1,1509	1,1958	1,2388	1,2802	1,3201	1,3586	1,3960	1,4322
	ν_1	1	0,2127	0,2034	0,1952	0,1880	0,1817	0,1758	0,1704	0,1657	0,1612	0,1572
20,0	ν_2	0,2236	1,0510	1,0994	1,1454	1,1894	1,2318	1,2724	1,3118	1,3500	1,3870	1,4231
	ν_1	1	0,1737	0,1661	0,1595	0,1538	0,1488	0,1437	0,1394	0,1355	0,1319	0,1285
30,0	ν_2	0,1825	1,0503	1,0981	1,1436	1,1837	1,2293	1,2629	1,3091	1,3472	1,3841	1,4201
	ν_1	1	0,1506	0,1439	0,1384	0,1332	0,1285	0,1247	0,1208	0,1174	0,1145	0,1114
40,0	ν_2	0,1581	1,0499	1,0974	1,1427	1,1863	1,2282	1,2686	1,3078	1,3458	1,3827	1,4187
	ν_1	1	0,1347	0,1288	0,1239	0,1194	0,1153	0,1116	0,1082	0,1051	0,1022	0,0998
50,0	ν_2	0,1414	1,0497	1,0970	1,1422	1,1857	1,2275	1,2679	1,3070	1,3450	1,3819	1,4177
	ν_1	1	0,1230	0,1179	0,1131	0,1091	0,1054	0,1020	0,0990	0,0962	0,0935	0,0911
60,0	ν_2	0,1292	1,0495	1,0967	1,1419	1,1852	1,2270	1,2674	1,3065	1,3444	1,3812	1,4172
	ν_1	1	0,1066	0,1020	0,0980	0,0943	0,0909	0,0883	0,0854	0,0831	0,0810	0,0791
80,0	ν_2	0,1118	1,0493	1,0964	1,1415	1,1847	1,2265	1,2668	1,3058	1,3437	1,3805	1,4164
	ν_1	1	0,0954	0,0911	0,0875	0,0843	0,0817	0,0791	0,0765	0,0745	0,0725	0,0707
100	ν_2	0,1000	1,0492	1,0962	1,1412	1,1845	1,2261	2,2663	1,3054	1,3433	1,3801	0,4160

критерия Fe меняется незначительно в сторону увеличения, а с ростом критерия Lu падает приблизительно по логарифмической кривой.

в) *Неограниченная пластина. Параболические начальные условия* $\left[\Gamma=0,\ \xi=x,\ f(x)=t(x,0)=t_ц+\left(\frac{x}{R}\right)^2(t_п-t_ц),\right.$ $\left.\varphi(x)=\vartheta(x,0)=\vartheta_ц-\left(\frac{x}{R}\right)^2(\vartheta_ц-\vartheta_п)\right]$. Для решения используем операционный метод в форме преобразования Лапласа. Применяя его к уравнениям (I—II), получим:

$$a_q t_L''(x,s)-s t_L(x,s)+$$

$$+\frac{\varepsilon\rho}{c}s\vartheta_L(x,s)-\frac{\varepsilon\rho}{c}\vartheta(x,0)-t(x,0)=0, \qquad (1.87)$$

$$a_m\vartheta_L''(x,s)-s\vartheta(x,s)+a_m\delta t_L''(x,s)+\vartheta(x,0)=0. \qquad (1.88)$$

Из уравнения (1.87) находим $\vartheta_L(x,s)$, $\vartheta_L''(x,s)$, и эти выражения подставляем в (1.88). После преобразования получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (1.89)

$$t_L^{IV}(x,s)-\frac{s}{a_q}\Lambda t_L''(x,s)+\frac{s^2}{a_q a_m}t_L(x,s)+$$

$$+\frac{1}{2}wx^2+\varkappa=0, \qquad (1.89)$$

где

$$\Lambda=1+\mathrm{Fe}+\frac{1}{\mathrm{Lu}},$$

$$w=2\frac{t_ц-t_п}{a_q R^2},$$

$$\varkappa=-\frac{s}{a_q a_m}t_ц+w-2\frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{\vartheta_ц-\vartheta_п}{a_q R^2}.$$

Общий интеграл уравнения (1.89) находится посредством вторичного использования преобразования Лапласа по координате x. Имеем:

$$t_L(x,s)=\frac{t_ц-(t_ц-t_п)\left(\frac{x^2}{R^2}\right)}{s}+\frac{2a_m w}{s^2}+C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x}+$$

$$+ C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x}, \quad (1.90)$$

где

$$\omega = \frac{t_ц - t_п}{R^2} - \frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{\theta_ц - \theta_п}{R^2} - \frac{t_ц - t_п}{R^2}\Lambda, \quad (1.91)$$

ν_j — определяется уравнением (1.5),

C_k — постоянные ($k = 1, 2, 3, 4$).

Решение для изображения потенциала вещества $\theta_L(x, s)$ получим подстановкой $t_L(x, s)$ и $t''_L(x, s)$ в уравнение (1.87), т. е.

$$\theta_L(x, s) = \frac{\theta_ц - (\theta_ц - \theta_п)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\frac{2\left(\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right)}{s^2} +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon\rho}\left[C_1(1 - \nu_1^2)\, e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x} + C_2(1 - \nu_2^2)\, e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x} + \right.$$

$$\left. + C_3(1 - \nu_1^2)\, e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x} + C_4(1 - \nu_2^2)\, e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x}\right]. \quad (1.92)$$

Из условия симметрии (V) следует $C_1 = C_3$ и $C_2 = C_1$, тогда (1.90) и (1.92) перепишутся так:

$$t_L(x, s) = \frac{t_ц - (t_ц - t_п)\left(\frac{x^2}{R^2}\right)}{s} + \frac{2\, a_m\, \omega}{s^2} +$$

$$+ B_1 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x + B_2 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 x, \quad (1.93)$$

$$\theta_L(x, s) = \frac{\theta_ц - (\theta_ц - \theta_п)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2\frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\left(\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right)}{s^2} +$$

$$+ B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2) \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 x +$$

$$+B_2\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x. \qquad (1.94)$$

B_1 и B_2—новые постоянные по отношению к x.

Удовлетворяя решения (1.93) и (1.94) граничным условиям (1.8) и (1.9), для определения B_j получим систему уравнений (1.95)

$$\left.\begin{aligned} B_1 Q_1 + B_2 Q_2 - \frac{\Omega_1}{s} - \frac{\Omega_2}{s^2} = 0 \\ B_1 P_1 + B_2 P_2 - \frac{\Omega_3}{s} - \frac{\Omega_4}{s^2} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1.95)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}(t_ц - t_n) + (t_c - t_n) - \varepsilon K_1 \frac{\rho}{c}(\vartheta_n - \vartheta_p), \qquad (1.96)$$

$$\Omega_2 = -2a_q\left[K_1\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right) + \omega\,\mathrm{Lu}\right], \qquad (1.97)$$

$$\Omega_3 = 2\frac{\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\left[\frac{1}{\delta}(\vartheta_ц - \vartheta_n) + (t_ц - t_n) - \frac{\mathrm{Bi}_m}{2\delta}(\vartheta_n - \vartheta_p)\right], \qquad (1.98)$$

$$\Omega_4 = -2a_q\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right), \qquad (1.99)$$

а Q_j и P_j определяются соответственно уравнениями (1.13) и (1.14). Решение (1.95) дает

$$B_1 = -\left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2 P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right],$$

$$B_2 = \frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2 P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}.$$

Подставляя B_1 и B_2 в уравнения (1.93) и (1.94), для распределения потенциалов переноса будем иметь окончательно в изображениях следующие общие решения:

$$t_L(x, s) = \frac{t_ц - (t_ц - t_n)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2a_m\omega}{s^2} +$$

$$+\left\{\left[\frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2 P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right]\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x -\right.$$

$$-\left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2 P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x\Bigg\}, \quad (1.100)$$

$$\theta_L(x, s) = \frac{\theta_ц - (\theta_ц - \theta_n)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2\frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right)}{s^2} +$$

$$+ \Bigg\{\Bigg[\frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} +$$

$$+ \frac{\Omega_2 P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\Bigg]\frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x -$$

$$- \left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} +\right.$$

$$\left. + \frac{\Omega_2 P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right]\frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x\Bigg\}. \quad (1.101)$$

В уравнениях (1.100) и (1.101) имеем две группы членов, от которых необходимо получить оригиналы; это

$$\frac{\Omega_1 P_j - \Omega_3 Q_j}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu x$$

и

$$\frac{\Omega_2 P_j - \Omega_4 Q_j}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu x.$$

Здесь $\nu = \nu_{j-(-1)^j}$ $(j = 1, 2)$.

Рассмотрим изображение первого типа:

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_1 P_j - \Omega_3 Q_j) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu x}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right] =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{\Phi_{01}(s)}{\psi_{01}(s)}\right]. \quad (1.102)$$

Так как условия теоремы разложения выполняются и корнями знаменателя $\psi_{01}(s) = 0$ служат

$s = 0$ (нулевой корень) и

$$s = s_n, \text{ где } s_n = -\frac{a_q \mu_n^2}{R^2},$$

то теорему разложения можно записать следующим образом:

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_{01}(s)}{\psi_{01}(s)}\right] = \frac{\Phi_{01}(0)}{\psi'_{01}(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_{01}(s_n)}{\psi'_{01}(s_n)}\exp(s_n\tau). \quad (1.102')$$

Для $\Phi_{01}(0)$, $\psi'_{01}(0)$, $\Phi_{01}(s_n)$, $\psi'_{01}(s_n)$ расчеты дают:

$$\Phi_{01}(0) = (\Omega_1 - K_1\Omega_3)(1-\nu_j^2) - \Omega_3,$$

$$\psi'_{01}(0) = \nu_2^2 - \nu_1^2,$$

$$\Phi_{01}(s_n) = (\Omega_1 P_{nj} - \Omega_3 Q_{nj})\cos\mu_n\nu\frac{x}{R},$$

$$\psi'_{01}(s_n) = \frac{\mu_n}{2}\psi_n, \text{ где } \mu_n, Q_{nj}, P_{nj} \text{ и } \psi_n \text{ опи-}$$

сываются соответственно уравнениями (1.20)—(1.23).

Подставим найденные выше выражения в (1.102'), а следовательно в (1.102), получим оригинал первого типа изображения

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_1 P_j - \Omega_3 Q_j)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu x}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right] =$$

$$= \frac{(\Omega_1 - K_1\Omega_3)(1-\nu_j^2) - \Omega_3}{\nu_2^2 - \nu_1^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(\Omega_1 P_{nj} - \Omega_3 Q_{nj})\cos\nu\mu_n\frac{x}{R}}{\mu_n\psi_n}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}). \quad (1.103)$$

Рассмотрим теперь оригинал изображения второго типа:

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_2 P_j - \Omega_4 Q_j)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu x}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right] =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{\Phi_{02}(s)}{\psi_{02}(s)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\Phi_{02}(s)}{s^2\varphi(s)}\right].$$

Отличие от рассмотренного выше случая составляет нуле-

вой член с двукратным нулевым корнем. Используем для его получения теорему разложения для кратных корней

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi_{02}(0)}{\psi_{02}(0)}\right]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\Phi_{02}(s)s^2}{\psi_{02}(s)}e^{s\tau}\right)\right]=$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\Phi_{02}(s)}{\varphi(s)}e^{s\tau}\right)\right]=$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[\frac{\tau e^{s\tau}\Phi_{02}(s)}{\varphi(s)}+\frac{e^{s\tau}\Phi'_{02}(s)}{\varphi(s)}-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{s\tau}\Phi_{02}(s)\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2}\right].$$

Входящие в теорему разложения члены имеют следующие значения:

$$\varphi(0)=\nu_2^2-\nu_1^2,$$

$$\varphi'(0)=\frac{R^2}{2a_q}\left(1+\mathrm{Fe}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\mathrm{Bi}_m\mathrm{Lu}}\right)(\nu_2^2-\nu_1^2),$$

$$\Phi_{02}(0)=(\Omega_2-K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2)-\Omega_4,$$

$$\Phi'_{02}(0)=[(\Omega_2-K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2)-\Omega_4]\frac{\nu_j^2R^2+\nu^2x^2}{2a_q}+$$

$$+\left[\Omega_2\frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}-\Omega_4\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right]\frac{\nu_j^2R^2}{a_q},$$

$$\psi'_{02}(s_n)=-\frac{a_q}{2R^2}\mu_n^3\psi_n,$$

$$\Phi_{02}(s_n)=(\Omega_2P_{nj}-\Omega_4Q_{nj})\cos\nu\mu_n x/R.$$

Поэтому оригинал изображения второго типа запишется так:

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_2P_j-\Omega_4Q_j)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu x}{s^2(Q_2P_1-Q_1P_2)}\right]=$$

$$= \tau \frac{(\Omega_2 - K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2) - \Omega_4}{\nu_2^2 - \nu_1^2} +$$

$$+ \frac{[(\Omega_2 - K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2) - \Omega_4]\dfrac{\nu_j^2 R^2 + \nu^2 x^2}{2a_q}}{\nu_2^2 - \nu_1^2} +$$

$$+ \frac{\left[\Omega_2 \dfrac{(1-\nu_j^2) + \mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m} - \Omega_4 \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right] \dfrac{\nu_j^2 R^2}{a_q}}{\nu_2^2 - \nu_1^2} -$$

$$- \frac{\dfrac{R^2}{2a_q}\left(1 + \mathrm{Fe} + \dfrac{2}{\mathrm{Bi}_q} + \dfrac{1}{\mathrm{Lu}} + \dfrac{2}{\mathrm{Bi}_m \mathrm{Lu}}\right)}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \times$$

$$\times \left[(\Omega_2 - K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2) - \Omega_4\right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R^2}{a_q} \frac{(\Omega_2 P_{nj} - \Omega_4 Q_{nj}) \cos \nu \mu_n \dfrac{x}{R}}{\mu_n^3 \psi_n} \times$$

$$\times \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \qquad (1.104)$$

Оригинал для полей потенциалов переноса получим, применяя теорему разложения к уравнениям (1.100) и (1.101); при этом учтем найденные решения для оригиналов изображений (1.103) и (1.104). Раскрывая значения Λ, ω, Ω_k ($k = 1, 2, 3, 4$) согласно формулам (1.91) и (1.96—1.99), упрощая и обрабатывая решения в критериях подобия, окончательно можем записать:

$$T_1 = \frac{t(x,\tau) - t_n}{t_c - t_n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n2} \cos \nu_1 \mu_n x/R -$$

$$- C_{n1} \cos \nu_2 \mu_n x/R) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.105)$$

$$\Theta_1 = \frac{\theta_n - \theta(x,\tau)}{\theta_n - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1}^* (1-\nu_2^2) \cos \nu_2 \mu_n x/R -$$

$$- C_{n2}^* (1-\nu_1^2) \cos \nu_1 \mu_n x/R] \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (1.106)$$

где

$$C_{nj} = 2\frac{G_1 P_{nj} - G_2 Q_{nj}}{\mu_n \psi_n},$$

$$C^*_{nj} = \frac{C_{nj}}{\varepsilon \mathrm{Ko}}, \qquad (1.107)$$

$$G_1 = 1 - 2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q} - \frac{1}{\mu_n^2}\right) -$$

$$- \varepsilon \mathrm{Ko} K_1 - 2\varepsilon \mathrm{Ko} K_2 \frac{(K_1 + 1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}, \qquad (1.108)$$

$$G_2 = 2\varepsilon \mathrm{Ko} K_2 \left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m} - \frac{\mathrm{Lu}}{\mu_n^2} - \varepsilon \mathrm{Ko}. \right. \qquad (1.109)$$

Критерии подобия Lu, Bi_q, Bi_m, Ko, Pn, ε, K_1, Fe в параболических задачах сохраняют старый вид при замене t_0 и θ_0 на t_n и θ_n.

Ввиду тождественности характеристического уравнения в параболической задаче характеристическому уравнению для пластины при постоянных начальных условиях приведенные в таблицах 1—4 значения μ_n являются корнями и данной задачи. Сравнение исходных значений Fo для упрощенных расчетов при параболических начальных условиях (табл. 6) с аналогичными значениями в задаче с постоянными начальными условиями не дает существенных расхождений. Из этого можно заключить о слабом влиянии начальных условий на упрощаемость решений системы уравнений внутреннего тепло- и массообмена. Рассчитанные по уравнениям (1.107) коэффициенты тепло- и массопереноса для пластины в зависимости от параметрических критериев неравномерности начального распределения W и V собраны в таблицах 16 и 17. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от этих же критериев представлена на рисунках 21 и 22.

Средние значения безразмерной температуры и потенциала массопереноса в параболической задаче запишутся так:

$$\overline{T}_1 = \frac{\overline{t}(\tau) - t_n}{t_c - t_n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (1.110)$$

$$\overline{\Theta}_1 = \frac{\theta_n - \overline{\theta}(\tau)}{\theta_n - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (1.111)$$

D_n^* и D_n^* сохраняют старую внешнюю форму записи (1.38) и (1.39) при новом содержании C_{nj} и C_{nj}^*.

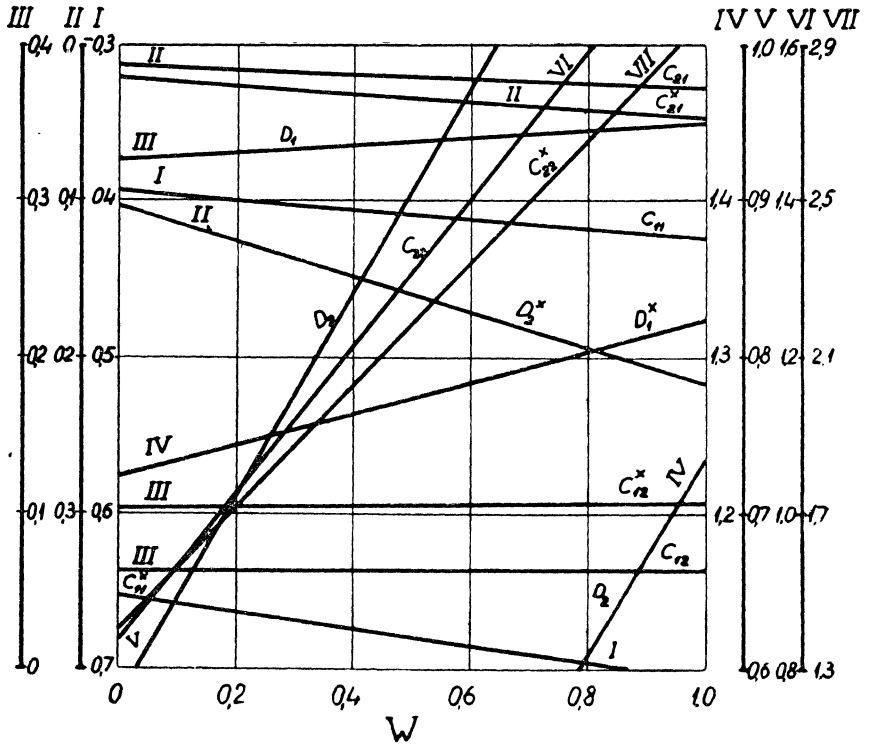


Рис. 21. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса для неограниченной пластины от W.

Безразмерную скорость прогрева и сушки пластины возможно получить, как обычно, дифференцированием уравнений (1.105) и (1.106) или (1.110) и (1.111) по безразмерному времени, т. е.

$$\frac{dT_1}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n2} \cos \nu_1 \mu_n x/R -$$

$$- C_{n1} \cos \nu_2 \mu_n x/R)\, \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

$$\frac{d\overline{T}_1}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

Таблица 16

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от W (неограниченная пластина с параболическими начальными условиями)

$Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}5$, $Ko = 1{,}2$, $Pn = 0{,}5$, $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$, $V = 0{,}4$

W	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0	—0,3918	—0,01300	0,06262	0,8372	—0,6531	—0,02167	0,1044	1,396	0,3274	0,5802	1,223	—0,1015
0,2	—0,3982	—0,01585	0,06286	1,026	—0,6638	—0,02642	0,1048	1,710	0,3320	0,7111	1,243	—0,1243
0,4	—0,4046	—0,01868	0,06310	1,214	—0,6745	—0,03114	0,1052	2,024	0,3366	0,8414	1,263	—0,1472
0,6	—0,4110	—0,02154	0,06336	1,403	—0,6851	—0,03591	0,1056	2,339	0,3413	0,9724	1,283	—0,1701
0,8	—0,4174	—0,02438	0,06360	1,591	—0,6958	—0,04064	0,1060	2,652	0,3459	1,103	1,303	—0,1929
1,0	—0,4238	—0,02722	0,06384	1,779	—0,7065	—0,04538	0,1064	2,966	0,3505	1,233	1,324	—0,2157

Таблица 17

Зависимость коэффициентов в решении системы уравнений тепло- и массопереноса от V (неограниченная пластина с параболическими начальными условиями)

$Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}5$, $Ko = 1{,}2$, $Pn = 0{,}5$, $Bi_m = 10$, $Bi_q = 10$, $W = 0{,}4$

V	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0	—0,3208	—0,02020	0,04926	1,315	—0,5348	—0,03367	0,08212	2,192	0,2662	0,9114	1,002	—0,1594
0,2	—0,3624	—0,01944	0,05615	1,264	—0,6045	—0,03241	0,09362	2,107	0,3012	0,8761	1,133	—0,1532
0,4	—0,4046	—0,01868	0,06310	1,214	—0,6745	—0,03114	0,1052	2,024	0,3366	0,8414	1,263	—0,1472
0,6	—0,4466	—0,01794	0,07002	1,164	—0,7445	—0,02991	0,1167	1,940	0,3719	0,8068	1,394	—0,1411
0,8	—0,4882	—0,01718	0,07692	1,113	—0,8138	—0,02864	0,1282	1,855	0,4069	0,7714	1,524	—0,1349
1,0	—0,5300	—0,01641	0,08384	1,063	—0,8835	—0,02736	0,1398	1,772	0,4420	0,7368	1,655	—0,1288

$$\frac{d\Theta_1}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1}^{*}(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n x/R -$$

$$- C_{n2}^{*}(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n x/R]\,\mu_n^2 \exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}),$$

$$\frac{d\bar{\Theta}_1}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{*}\,\mu_n^2 \exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}).$$

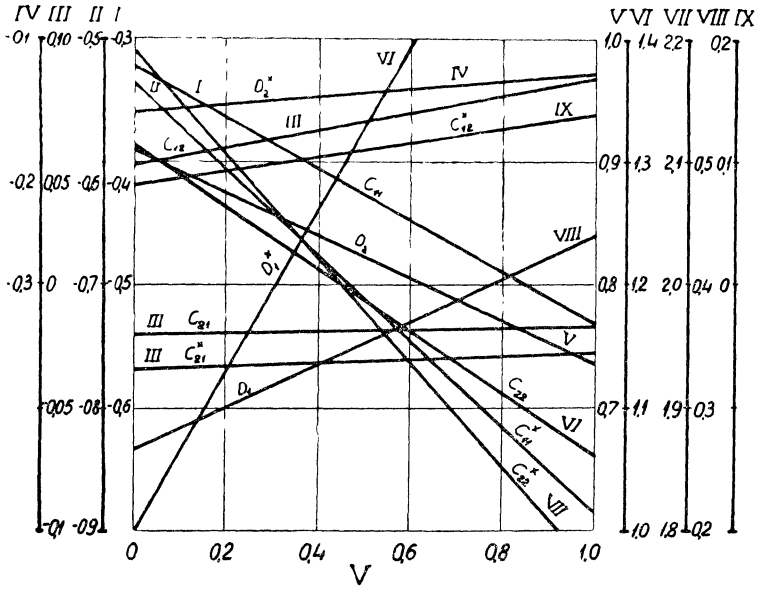


Рис. 22. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от V для неограниченной пластины.

г) *Шар. Параболические начальные условия* $\left[\Gamma=2,\ \xi = r,\ f(r) = t_ц + \left(\frac{r}{R}\right)^2 (t_п - t_ц),\ \varphi(r) = \theta_ц - \left(\frac{r}{R}\right)^2 (\theta_ц - \theta_п)\right]$.

Общее решение для потенциалов переноса тепла и вещества в изображениях возможно получить путем, изложенным в предыдущей задаче. Ими будут:

для теплового потенциала

$$\vartheta_L(r, s) = \frac{r\left[t_ц - (t_ц - t_п)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} + \frac{6\,r a_m \omega}{s^2} +$$

$$+ C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r} + C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r} +$$

$$+ C_3 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r}; \qquad (1.112)$$

для потенциала массопереноса

$$u_L(r, s) = \frac{r\left[\theta_ц - (\theta_ц - \theta_п)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} +$$

$$+ \frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\,\frac{6r\left[\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right]}{s^2} +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon\rho}\left[C_1(1-\nu_1^2)\, e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r} + C_2(1-\nu_2^2)\, e^{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r} + \right.$$

$$\left. + C_3(1-\nu_1^2) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r} + C_4(1-\nu_2^2)\, e^{-\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r}\right], \qquad (1.113)$$

где C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные относительно r, ν_j и ω описываются уравнениями (1.5) и (1.91).

Для упрощения уравнений (1.112) и (1.113) воспользуемся условиями симметрии. При разборе задач с постоянными начальными условиями было показано, что для шара условия симметрии (V) в изображениях можно представить уравнениями (1.51) и (1.52),

$$\vartheta_L(0, s) = 0, \quad u_L(0, s) = 0.$$

Применение этих условий к уравнениям (1.112) и (1.113) дает

$$C_1 = -C_3, \; C_2 = -C_4.$$

Следовательно, решения для изображения модифицированной температуры $\vartheta_L(r, s)$ и потенциала переноса вещества или $u_L(r, s)$ будут:

$$\vartheta_L(r, s) = \frac{r\left[t_ц - (t_ц - t_п)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} + \frac{6\,r a_m \omega}{s^2} +$$

$$+ B_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r + B_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r, \qquad (1.114)$$

$$u_L(r, s) = \frac{r\left[\theta_ц - (\theta_ц - \theta_п)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} +$$

$$+ \frac{6r\frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\left[\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right]}{s^2} +$$

$$+ B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r +$$

$$+ B_2 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r. \qquad (1.115)$$

B_1 и B_2 — новые постоянные по отношению к координате, значения которых определим из граничных условий (III—IV) или в изображениях (1.57) и (1.58). Подставив (1.114) и (1.115) в граничные условия и решив полученную при этом систему уравнений относительно постоянных коэффициентов, для B_1 и B_2 будем иметь

$$B_1 = -\left[\frac{\Omega_1 \widetilde{P}_2 - \Omega_3 \widetilde{Q}_2}{s(\widetilde{Q}_2 \widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1 \widetilde{P}_2)} + \frac{\Omega_2 \widetilde{P}_2 - \Omega_4 \widetilde{Q}_2}{s^2(\widetilde{Q}_2 \widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1 \widetilde{P}_2)}\right],$$

$$B_2 = \frac{\Omega_1 \widetilde{P}_1 - \Omega_3 \widetilde{Q}_1}{s(\widetilde{Q}_2 \widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1 \widetilde{P}_2)} + \frac{\Omega_2 \widetilde{P}_1 - \Omega_4 \widetilde{Q}_1}{s^2(\widetilde{Q}_2 \widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1 \widetilde{P}_2)}.$$

Здесь $\widetilde{Q}_j$ и $\widetilde{P}_j$ определяются уравнениями (1.60) и (1.61), Ω_1 и Ω_3 — уравнениями (1.96) и (1.98), а

$$\Omega_2 = -6 a_q \left[K_1\left(\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right) + \omega \mathrm{Lu}\right], \qquad (1.116)$$

$$\Omega_4 = -6 a_q \left[\frac{t_ц - t_п}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right]. \qquad (1.117)$$

Следовательно, решение системы в изображениях окончательно запишется:

$$\vartheta_L(r, s) = \frac{r\left[t_ц - (t_ц - t_п)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} + \frac{6 r a_m \omega}{s^2} +$$

$$+\left\{\left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_1-\Omega_3\widetilde{Q}_1}{s\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}+\frac{\Omega_2\widetilde{P}_1-\Omega_4\widetilde{Q}_1}{s^2\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right]\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r-\right.$$

$$-\left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_2-\Omega_3\widetilde{Q}_2}{s\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Omega_2\widetilde{P}_2-\Omega_4\widetilde{Q}_2}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right]\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r\right\}, \qquad (1.118)$$

$$u_L(r,s)=\frac{r\left[\theta_{\text{ц}}-(\theta_{\text{ц}}-\theta_n)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s}+$$

$$+\frac{c}{\varepsilon\rho}\left\{\frac{6\,r a_q\left[\frac{t_{\text{ц}}-t_n}{R^2}+\omega\,\mathrm{Lu}\right]}{s^2}+\right.$$

$$+\left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_1-\Omega_3\widetilde{Q}_1}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}+\right.$$

$$+\left.\frac{\Omega_2\widetilde{P}_1-\Omega_4\widetilde{Q}_1}{s^2\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right](1-\nu_2^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r-$$

$$-\left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_2-\Omega_3\widetilde{Q}_2}{s\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Omega_2\widetilde{P}_2-\Omega_4\widetilde{Q}_2}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right](1-\nu_1^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r\right\}. \qquad (1.119)$$

Получим теперь два основных оригинала изображений, необходимые для осуществления обратного преобразования уравнений (1.118) и (1.119),

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_1\widetilde{P}_j-\Omega_3\widetilde{Q}_j)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu r}{s\,(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}\right]. \qquad (1.120)$$

Так как числитель и знаменатель уравнения (1.120) не являются обобщенными полиномами относительно s, то теорему разложения для нахождения оригинала возможно будет применить только после ряда преобразований: числитель

и знаменатель для нулевого корня разлагаются в ряд, обе части делятся на $\sqrt{\frac{s}{a_q}}\ \sqrt{\frac{s}{a_q}}$, берется производная $\psi_{01}(s)$ по s, находится предел выражения при стремлении s к нулю (см. § 1б).

Таким образом, теорема разложения для выражения (1.120) запишется так:

$$L^{-1}\left|\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}\right| = \frac{\Phi_{01}(0)}{\psi_0'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(s_n)}{\psi_1'(s_n)}\exp(s_n\tau), \quad (1.121)$$

где первое слагаемое отвечает нулевому корню $\psi_1(s) = s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2) = 0$, а второе — корням $s_n = -\frac{a_q\mu_n^2}{R^2}$, выражение $\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2 = 0$; μ_n определяется корнями (1.65).

Решение (1.120) или (1.121) дает

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_1\widetilde{P}_j - \Omega_3\widetilde{Q}_j)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu\, r}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right] =$$

$$= \frac{(\Omega_1 - K_1\Omega_3)(1-\nu_j^2) - \Omega_3}{\nu_2^2 - \nu_j^2}\, r -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{\Omega_1 P_{nj} - \Omega_3 Q_{nj}}{\mu_n\,\psi_n}\, R\sin\nu\mu_n\frac{r}{R}\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}). \quad (1.122)$$

Оригинал изображения членов второго типа получим таким же путем, как это было сделано при нахождении оригинала в задаче для пластины, с учетом дополнительных преобразований по приведению полиномов к условиям, удовлетворяющим обобщенной теореме разложения. Имеем:

$$L^{-1}\left[\frac{(\Omega_2\widetilde{P}_j - \Omega_4\widetilde{Q}_j)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu\, r}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right] =$$

$$= \frac{r\left[(\Omega_2 - K_1\Omega_4)(1-\nu_j^2) - \Omega_4\right]\left[\tau + \frac{r^2\nu^2 + R^2\nu_j^2}{6\,a_q} - \right.}{\nu_2^2 - \nu_1^2}$$

$$\frac{\left. - \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Lu}} + \mathrm{Fe} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_m}\,\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)\frac{R^2}{6\,a_q}\right]}{\nu_2^2 - \nu_1^2} +$$

$$+\frac{\left[\Omega_2\dfrac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}-\Omega_4\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right]\dfrac{2\nu_j^2R^2}{6a_q}}{\nu_2^2-\nu_1^2}r+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{R^2}{a_q}\frac{\Omega_2P_{nj}-\Omega_4Q_{nj}}{\mu_n^3\psi_n}R\sin\nu\mu_n\frac{r}{R}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}). \quad (1.123)$$

Величины ψ_n, A_{nj}, B_{nj} описываются уравнениями (1.70)—(1.72).

Применяя теорему разложения к уравнениям (1.118) и (1.119) и учитывая оригиналы (1.122), (1.123), после преобразований и раскрытия значений Λ, ω, Ω_k ($k=1, 2, 3, 4$) для поля температур и потенциала вещества будем иметь:

$$T_1=\frac{t(r,\tau)-t_n}{t_c-t_n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n1}\frac{\sin\nu_2\mu_n r/R}{r/R}-\right.$$

$$\left.-C_{n2}\frac{\sin\nu_1\mu_n r/R}{r/R}\right]\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}). \quad (1.124)$$

$$\Theta_1=\frac{\theta_n-\theta(r,\tau)}{\theta_n-\theta_p}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}^*(1-\nu_1^2)\frac{\sin\nu_1\mu_n r/R}{r/R}-\right.$$

$$\left.-C_{n1}^*(1-\nu_2^2)\frac{\sin\nu_2\mu_n r/R}{r/R}\right]\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \quad (1.125)$$

$$C_{nj}=2\frac{G_1P_{nj}-G_2Q_{nj}}{\mu_n\psi_n},\quad C_{nj}^*=\frac{1}{\varepsilon\mathrm{Ko}}C_{nj}, \quad (1.126)$$

$$G_1=1-2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-\frac{3}{\mu_n^2}\right)-$$

$$-\varepsilon\mathrm{Ko}K_1-6\varepsilon\mathrm{Ko}K_2\frac{(K_1+1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}, \quad (1.127)$$

$$G_2=2\varepsilon\mathrm{Ko}K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}-\frac{3\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\mathrm{Ko}. \quad (1.128)$$

Выражения для безразмерной температуры и безразмерного потенциала переноса вещества в данном случае будут:

$$\overline{T}_1=\frac{\overline{t}(\tau)-t_n}{t_c-t_n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \quad (1.129)$$

$$\overline{\theta}_1 = \frac{\theta_n - \overline{\theta}(\tau)}{\theta_n - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \quad (1.130)$$

где D_n и D_n^* сохраняют форму уравнений (1.82) при учете того, что C_{nj} и C_{nj}^* определяются уравнением (1.126).

Среднюю и локальную скорости прогрева и сушки легко получить дифференцированием соответствующих выражений по безразмерному времени Fo.

§ 2. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества. Температура среды — линейная функция времени

Действительные процессы в большинстве случаев протекают в среде с меняющейся температурой. Тело, соприкасаясь с теплоносителем, нагревается, а теплоноситель, отдав тепло телу, остывает. Математическая модель процесса внутреннего тепло- и массообмена должна отразить изменение температуры среды в своих граничных условиях. Решения системы дифференциальных уравнений (I — VI) при меняющейся температуре среды интересны прежде всего для описания сушки, полукоксования, увлажнения и газификации, не говоря уже о необходимости таких решений для разработки методов определения коэффициентов тепло- и массопереноса. Ниже рассмотрены задачи, где температура среды — линейная функция времени. Задачи с экспоненциальной зависимостью температуры среды от времени будут даны в следующем параграфе.

а) *Неограниченная пластина. Постоянные начальные условия* [$\Gamma = 0$, $\xi = x$, $t(x, 0) = t_0 = \mathrm{const}$, $\theta(x, 0) = \theta_0 = \mathrm{const}$, $t_c = t_c^0 - b\tau$]. Общее решение уравнений [I — VI] в изображениях для потенциалов переноса тепла и вещества с учетом условий симметрии (V) можно записать в следующем виде:

$$t_L(x, s) - \frac{t_0}{s} =$$

$$= B_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x + B_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x, \quad (2.1)$$

$$\theta_L(x, s) - \frac{\theta_0}{s} = \frac{c}{\varepsilon \rho}(1 - \nu_1^2) B_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon \rho}(1 - \nu_2^2) B_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x, \quad (2.2)$$

где

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \mathrm{Fe} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^j \sqrt{\left(1 + \mathrm{Fe} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2 - \frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right], \quad (j = 1, 2). \qquad (2.3)$$

B_j — постоянные относительно координат, их значения определим из граничных условий (III—IV). Граничные условия после применения преобразования Лапласа будут:

$$-\lambda t'_L(R, s) + \alpha\left[\frac{t_c^0}{s} - \frac{b}{s^2} - t_L(R, s)\right] -$$

$$-(1-\varepsilon)\rho\beta\left[\theta_L(R, s) - \frac{\theta_p}{s}\right] = 0, \qquad (2.4)$$

$$\lambda_m \theta'_L(R, s) + \lambda_m \delta t'_L(R, s) +$$

$$+\beta\left[\theta_L(R, s) - \frac{\theta_p}{s}\right] = 0. \qquad (2.5)$$

Подставив в (2.4) и (2.5) $t_L(R, s)$, $t'_L(R, s)$, $\theta_L(R, s)$ и $\theta'_L(R, s)$, решаем образовавшуюся алгебраическую систему относительно B_1 и B_2. Из расчета следует

$$B_1 = -\left\{\frac{(t_c^0 - t_0)P_2 + \frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0 - \theta_p)(Q_2 - K_1 P_2)}{s(Q_2 P_1 - Q_1 P_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{b P_2}{s^2(Q_2 P_1 - Q_1 P_2)}\right\},$$

$$B_2 = \frac{(t_c^0 - t_0)P_1 + \frac{\varepsilon\rho}{c}(\theta_0 - \theta_p)(Q_1 - K_1 P_1)}{s(Q_2 P_1 - Q_1 P_2)} -$$

$$- \frac{b P_1}{s^2(Q_2 P_1 - Q_1 P_2)},$$

где Q_j и P_j определяются уравнениями (1.13) и (1.14). Следовательно, решения (2.1) и (2.2) можно переписать так:

$$t_L(x, s) - \frac{t_0}{s} = (t_c^0 - t_0) \times$$

$$\times\left\{\frac{P_1+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_1-K_1P_1)}{s(Q_2P_1-Q_1P_2)}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x-\right.$$

$$\left.-\frac{P_2+\varepsilon \mathrm{Ko}(Q_2-K_1P_2)}{s(Q_2P_1-Q_1P_2)}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x\right\}+$$

$$+b\frac{P_2\,ch\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x-P_1\,ch\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x}{s^2(Q_2P_1-Q_1P_2)}=\Pi_1+\Pi_2, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\theta_0}{s}-\theta_L(x,s)=(\theta_0-\theta_p)\times$$

$$\times\left\{\frac{Q_2+\dfrac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}P_2-K_1P_2}{s(Q_2P_1-Q_1P_2)}(1-\nu_1^2)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x-\right.$$

$$\left.-\frac{Q_1+\dfrac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}P_1-K_1P_1}{s(Q_2P_1-Q_1P_2)}(1-\nu_2^2)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x\right\}+$$

$$+\frac{c}{\varepsilon\rho}b\frac{P_1(1-\nu_2^2)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x-P_2(1-\nu_1^2)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x}{s^2(Q_2P_1-Q_1P_2)}=$$

$$=N_1+N_2. \qquad (2.7)$$

Оригиналы первых слагаемых $L^{-1}[\Pi_1]$ и $L^{-1}[N_1]$ были найдены в § 1а.

Остановимся здесь на определении оригиналов оставшихся выражений Π_2 и N_2, которые характеризуют влияние линейного изменения температуры среды на общее решение. Для потенциала переноса тепла исходное выражение имеет вид

$$\Pi_2=b\frac{P_2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x-P_1\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x}{s^2(Q_2P_1-Q_1P_2)}=$$

$$=\frac{b\,\Phi_{01}(s)}{s^2\varphi_0(s)}. \qquad (2.8)$$

Оригинал изображения Π_2 ищем посредством теоремы разложения. Определим корни знаменателя (2.8) $s^2\varphi_0(s)$. Имеем:

а) нулевой двукратный корень,

б) корни $s = s_n$, удовлетворяющие уравнению $\varphi_0(s) = Q_2P_1 - Q_1P_2 = 0$. Тогда теорема разложения для (2.8) запишется следующим образом:

$$L^{-1}\left[\frac{b\,\Phi_{01}(s)}{s^2\,\varphi_0(s)}\right] = b\lim_{s\to 0}\left[\frac{\tau e^{s\tau}\,\Phi_{01}(s)}{\varphi_0(s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{s\tau}\,\Phi'_{01}(s)}{\varphi_0(s)} - \frac{e^{s\tau}\,\Phi_{01}(s)\,\varphi'_0(s)}{[\varphi_0(s)]^2}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b\,\frac{\Phi_{01}(s_n)}{[s_n^2\,\varphi_0(s_n)]'}\,e^{s_n\tau}. \qquad (2.9)$$

Так как

$$\varphi_0(0) = \nu_2^2 - \nu_1^2,$$

$$\varphi'_0(0) = \frac{R^2}{2a_q}\,(\nu_2^2 - \nu_1^2) \times$$

$$\times\left[1 + \mathrm{Fe} + \frac{1}{\mathrm{Lu}} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_m\,\mathrm{Lu}}\right],$$

$$\Phi_{01}(0) = -(\nu_2^2 - \nu_1^2),$$

$$\Phi'_{01}(0) = -(\nu_2^2 - \nu_1^2)\,\frac{R^2}{2a_q} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\mathrm{Lu}} + \mathrm{Fe} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_m\,\mathrm{Lu}} + \frac{x^2}{R^2}\right),$$

$$[s_n^2\,\varphi_0(s_n)]' = -\frac{a_q}{2R^2}\,\mu_n^3\,\psi_n,$$

$$\Phi_{01}(s_n) = P_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R} - P_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R},$$

оригинал изображения (2.9) будет иметь вид

$$L^{-1}[\Pi_2] = -b\tau + b\,\frac{R^2}{2a_q}\left(1 - \frac{x^2}{R^2} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right) -$$

$$- 2\sum_{n=1}^{\infty} b\,\frac{R^2}{a_q\,\mu_n^2}\,\frac{P_{n2}\cos\nu_1\mu_n\dfrac{x}{R} - P_{n1}\cos\nu_2\mu_n\dfrac{x}{R}}{\mu_n\psi_n} \times$$

$$\times \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) = (t_c^0 - t_0)\left\{-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{R^2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right] - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2} \frac{P_{n2}\cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R} - P_{n1}\cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R}}{\mu_n \psi_n} \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo})\right\}. \qquad (2.10)$$

В оригинале (2.10) введен новый критерий подобия

$$\mathrm{Pd} = \frac{bR^2}{a_q (t_c^0 - t_0)}, \qquad (2.11)$$

характеризующий интенсивность изменения температуры среды. Более детальный анализ показывает, что этот безразмерный комплекс является частным случаем выражения $\left|\frac{dT_c}{d\,\mathrm{Fo}}\right|_{max}$, который называется критерием Предводителева. Следовательно, (2.11) является критерием Предводителева для случая линейной зависимости температуры среды от времени. Из величин, входящих в Pd, $b = \mathrm{const}$ означает скорость изменения температуры среды, а $t_c^0 = \mathrm{const}$ — температуру среды в начальный момент времени.

Ищем теперь оригинал изображения N_2:

$$N_2 = \frac{c}{\varepsilon \rho} b \frac{P_1 (1 - \nu_2^2)\mathrm{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x - P_2 (1 - \nu_1^2)\mathrm{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x}{s^2 (Q_2 P_1 - Q_1 P_2)} =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon \rho} b \frac{\Phi_{02}(s)}{s^2 \varphi_0(s)}. \qquad (2.12)$$

Корни знаменателя (2.12) остаются прежними. Поэтому

$$L^{-1}\left[\frac{c}{\varepsilon \rho} b \frac{\Phi_{02}(s)}{s^2 \varphi_0(s)}\right] = \frac{c}{\varepsilon \rho} b \lim_{s \to 0}\left[\tau e^{s\tau} \frac{\Phi_{02}(s)}{\varphi_0(s)} + \right.$$

$$\left. + e^{s\tau} \frac{\Phi'_{02}(s)}{\varphi_0(s)} - e^{s\tau} \frac{\Phi_{02}(s)\, \varphi'_0(s)}{[\varphi_0(s)]^2} + \frac{c}{\varepsilon \rho} b \times \right.$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{02}(s_n)}{[s_n^2 \varphi_0(s_n)]'} \exp(s_n \tau) = \frac{c}{\varepsilon \rho} b\, \mathrm{Fe}\, \frac{R^2}{2 a_q} \times$$

$$\times\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}2\,\frac{c}{\varepsilon\rho}\,\frac{bR^2}{a_q\mu_n^2}\times$$

$$\times-\frac{P_{n1}\,(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\dfrac{x}{R}-P_{n2}\,(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\dfrac{x}{R}}{\mu_n\psi_n}\times$$

$$\times\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right)=(\theta_0-\theta_p)\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{PnPd}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)-\frac{2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}\times\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2}\,\frac{P_{n1}\,(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\dfrac{x}{R}-P_{n2}\,(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\dfrac{x}{R}}{\mu_n\psi_n}\times$$

$$\left.\times\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right)\right\},\qquad(2.13)$$

так как

$$\Phi_{02}\,(0)=0$$

$$\Phi'_{02}\,(0)=-\,(\nu_2^2-\nu_1^2)\,\mathrm{Fe}\,\frac{R^2}{2\,a_q}\left(\frac{x^2}{R^2}-1\right),$$

$$\Phi_{02}\,(s_n)=P_{n1}\,(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\,\frac{x}{R}-P_{n2}\,(1-\nu_1^2)\times$$

$$\times\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\,.$$

Значит, окончательное решение нашей задачи будет иметь вид

$$T=\frac{t\,(x,\tau)-t_0}{t_c^0-t_0}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n2}\,\cos\nu_1\mu_n\,\frac{x}{R}-C_{n1}\,\cos\nu_2\mu_n\,\frac{x}{R}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right);\qquad(2.14)$$

$$\Theta=\frac{\theta_0-\theta\,(x,\tau)}{\theta_0-\theta_p}=1+\frac{1}{2}\,\mathrm{PnPd}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n1}^{*}\ (1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}-C_{n2}^{*}\times\right.$$

$$\left.\times(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\right]\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right), \qquad (2.15)$$

где

$$C_{nj}=2\frac{\left(1-\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_1+\dfrac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2}\right)P_{nj}+\varepsilon\,\mathrm{Ko}Q_{nj}}{\mu_n\psi_n}-,$$

$$C_{nj}^{*}=\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}C_{nj}. \qquad (2.16)$$

Q_{nj}, P_{nj}, ψ_n определяются уравнениями (1.21), (1.23), а корни μ_n — характеристическим уравнением (1.20). Критерии подобия остаются теми же, что и в задачах $t_c=\mathrm{const}$ с заменой t_c на t_c^0.

Среднюю безразмерную температуру и потенциал переноса вещества получим обычным способом. Они будут:

$$\bar{T}=\frac{\bar{t}(\tau)-t_0}{t_c^0-t_0}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right), \qquad (2.17)$$

$$\bar{\Theta}=\frac{\theta_0-\bar{\theta}(\tau)}{\theta_0-\theta_p}=1+\frac{1}{3}\mathrm{PnPd}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{*}\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right), \qquad (2.18)$$

где

$$D_n=D_{n2}-D_{n1},\quad D_n^{*}=D_{n1}^{*}-D_{n2}^{*}.$$

Выражения для D_{nj} и D_{nj}^{*} остаются такими же, как в других усредненных задачах для неограниченной пластины с учетом уравнения (2.16).

Локальная и средняя безразмерная скорость изменения потенциалов переноса будет выглядеть так:

$$\frac{dT}{d\mathrm{Fo}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}-C_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}\right)\times$$

$$\times \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) - \mathrm{Pd}, \qquad (2.19)$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) - \mathrm{Pd}, \qquad (2.20)$$

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n1}^* (1 - \nu_2^2) \cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R} - C_{n2}^* \times \right.$$

$$\left. \times (1 - \nu_1^2) \cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R} \right] \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (2.21)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}). \qquad (2.22)$$

Таблица 18

Исходные значения Fo для упрощенных расчетов тепло- и массопереноса в неограниченной пластине при $t_c = t_c^0 - b\tau$

Показатель		Fo /Δ/ %	
		1,0 %	0,5 %
$1-T$	$x/R=0$	0,73	0,88
	$x/R=1$	0,93	1,09
$1-\Theta$	$x/R=0$	0,79	0,95
	$x/R=1$	1,04	
$1-\bar{\Theta}$		0,12	0,17
$1-\bar{\Theta}$		0,14	0,30
$d\bar{T}/d\mathrm{Fo}$		0,26	0,35
$d\bar{\Theta}/d\mathrm{Fo}$		1,04	

Анализ решений (2.14), (2.15), (2.17)—(2.22) показывает, что исходные значения Fo для упрощения расчетов (возможность использования двух членов из бесконечного ряда) до $\mathrm{Pd} \approx \approx 0{,}25$ остаются примерно такими же, как в среде с постоянной температурой (см. табл. 18). При последующем увеличении Pd исходные значения Fo медленно понижаются. С ростом безразмерного времени влияние бесконечного ряда на значения безразмерных потенциалов также уменьшается. Так, для T ($\mathrm{Pd} = 0{,}25$, $\mathrm{Bi}_q = 10$, $\frac{x}{R} = 0$, $\varepsilon = 0{,}5$, Pn=

$=0{,}5$, $\mathrm{Ko}=1{,}2$, $\mathrm{Bi}_m=10$) член бесконечной суммы по сравнению со свободным членом

при $\mathrm{Fo}=5{,}0$ составляет 23,7 %,

„ $\mathrm{Fo}=7{,}0$ „ 1,31 %,

„ $\mathrm{Fo}=10$ „ 0,110 %.

Начиная со значения $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_{квазист}$, безразмерные потенциалы начинают определяться исключительно свободным членом. Тогда температура в любой точке пластины становится линейной функцией времени, а распределение температуры по толще материала — параболическим. Следовательно, начиная с $\mathrm{Fo}_{квазист}$, мы будем иметь одно и то же распределение температуры в пространстве. Такой режим называется квазистационарным. К этому же времени прекращается перераспределение в теле потенциала вещества. Устанавливается стационарное параболическое распределение потенциала вещества. С ростом критерия Pd квазистационарный режим прогрева (или охлаждения) тела наступает при меньших значениях Fo.

Таким образом, для $\mathrm{Fo}\geqslant\mathrm{Fo}_{квазист}$ уравнения (2.14), (2.15), (2.17) и (2.18) принимают вид:

$$T=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right], \qquad (2.14')$$

$$\Theta=1+\frac{1}{2}\,\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right), \qquad (2.15')$$

$$\overline{T}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right], \qquad (2.17')$$

$$\overline{\Theta}=1+\frac{1}{3}\,\mathrm{PnPd}. \qquad (2.18')$$

В целях облегчения расчетов тепло- и массопереноса в среде с линейно падающей температурой на рисунках 23 и 24 отражена зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса C_{nj}, C^*_{nj}, D_n и D^*_n от критерия Предводителева, а в таблицах 19—22 приведены численные значения этих же данных.

б) *Шар. Постоянные начальные условия*

$$[\Gamma=2,\ \xi=r,\ t(r,0)=t_0=\mathrm{const},\ \vartheta(r,0)=\vartheta_0=\mathrm{const},$$

$$t_c=t_c^0-b\tau].$$

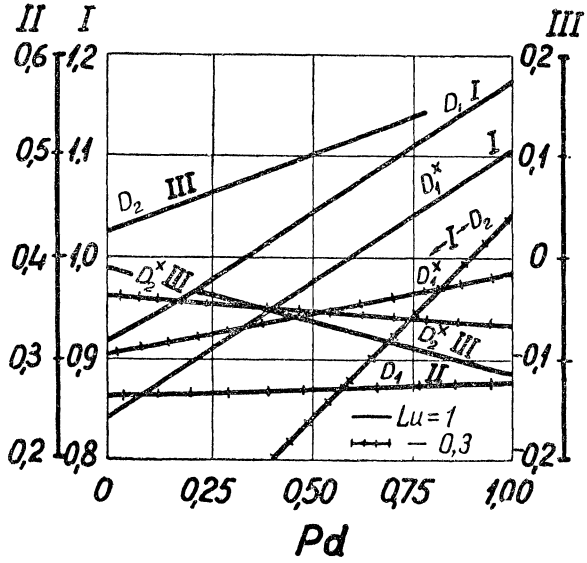


Рис. 23. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от критерия Pd (неограниченная пластина, $t_c = t_c^0 - b\,\tau$).

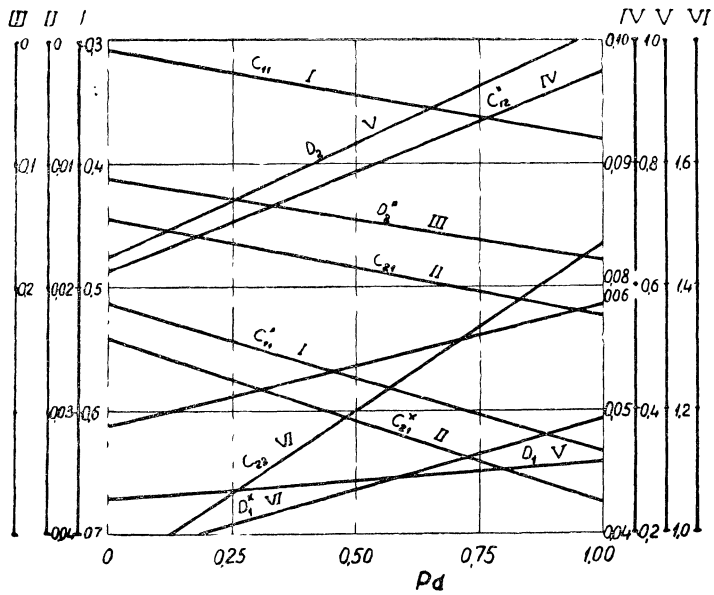


Рис. 24. Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от критерия Pd (неограниченная пластина, $t_c = t_c^0 - b\tau$).

Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от $\mathrm{Pd}=\dfrac{bR^2}{a_q\left(t_c^0-t_0\right)}$ (неограниченная пластина*)

Pd	C_{n1}		C_{n2}		C_{n1}^*		C_{n2}^*		D_n		D_n^*	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0	—0,3080	—0,01452	0,04880	0,9378	—0,5134	—0,02420	0,08130	1,564	0,2570	0,6500	0,9616	—0,1137
0,1	—0,3152	—0,01532	0,04976	0,9908	—0,5254	—0,02554	0,08295	1,652	0,2628	0,6867	0,9842	—0,1202
0,2	—0,3225	—0,01612	0,05073	1,044	—0,5376	—0,02687	0,08457	1,740	0,2687	0,7235	1,007	—0,1265
0,25	—0,3261	—0,01652	0,05125	1,070	—0,5436	—0,02754	0,08513	1,784	0,2716	0,7416	1,018	—0,1297
0,3	—0,3297	—0,01692	0,05169	1,097	—0,5496	—0,0.821	0,08617	1,829	0,2745	0,7603	1,029	—0,1330
0,4	—0,3369	—0,01772	0,05266	1,150	—0,56 6	—0,02954	0,08778	1,917	0,2804	0,7971	1,052	—0,1394
0,5	—0,3441	—0,01852	0,05362	1,203	—0,5736	—0,03087	0,0ъ938	2,005	0,2862	0,8338	1,075	—0,1458
0,6	—0,3514	—0,01932	0,05458	1,256	—0,58 8	—0,03221	0,09098	2,094	0,2921	0,8706	1,098	—0,1523
0,7	—0,3586	—0,02012	0,05555	1,309	—0,5978	—0,03354	0,09260	2,182	0,2980	0,9072	1,120	—0,1587
0,75	—0,3622	—0,02052	0,05603	1,355	—0,6038	—0,03421	0,09340	2,225	0,3009	0,9252	1,132	—0,1618
0,8	—0,3658	—0,02092	0,0 651	1,362	—0,6098	—0,03487	0,09420	2,270	0,3039	0,9440	1,143	—0,1650
0,9	—0,3730	—0,02172	0,05748	1,414	—0,6218	—0,03621	0,09582	2,357	0,3097	0,9800	1,165	—0,1714
1,0	—0,3803	—0,02252	0,05844	1,467	—0,6340	—0,03754	0,09742	2,445	0,3156	1,031	1,88	—0,1778

* Расчет проведен при $\mathrm{Lu}=0{,}3$; $\varepsilon=0{,}5$; $\mathrm{Ko}=1{,}2$; $\mathrm{Pn}=0{,}5$; $\mathrm{Bi}_m=10$; $\mathrm{Bi}_q=10$.
Начальные условия постоянные.

Таблица 20

Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от $Pd = \frac{bR^2}{a_q (t_c^0 - t_0)}$

(неограниченная пластина) Lu = 1,0, ε = 0,5, Ko = 1,2, Pn = 0,5, $Bi_m = Bi_q = 10$

dd	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0	—1,135	—0,003402	0,1399	0,03438	—1,892	—0,00572	0,2334	0,0572	0,9009	0,02439	0,8436	—0,01538
0,25	—1,222	—0,007787	0,1498	0,08778	—2,037	—0,01298	0,2497	0,1463	0,9692	0,06206	0,909	—0,03962
0,50	—1,309	—0,01217	0,1596	0,1412	—2,182	—0,02029	0,2661	0,2354	1,037	0,09975	0,974	—0,06386
0,75	—1,396	—0,01656	0,1695	0,1946	—2,327	—0,02761	0,2826	0,3244	1.106	0,1374	1,039	—0,08806
1,00	—1,483	—0,02094	0,1793	0,2480	—2,472	—0,03491	0,2989	0,4134	1,174	0,1751	1,104	—0,1123

Таблица 21

Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса от Pd

(неограниченная пластина) Lu=0,3, ε=0,5, Ko=1,2, Pn=0,1667, Bi_m=10, Bi_q =10

PP	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
0	—0,3188	—0,005276	0,04618	0,9158	—0,5312	—0,008794	0,07694	1,527	0,2620	0,6353	0,9045	—0,03952
0,25	—0,3258	—0,006395	0,04536	1,062	—0,5431	—0,01066	0,07562	1,770	0,2662	0,7368	0,9248	—0,04563
0,50	—0,3327	—0,006914	0,04455	1,207	—0,5546	—0.01153	0,07426	2,012	0,2702	0,8372	0,9446	—0,05209
0,75	—0,3397	—0,007733	0,04373	1,353	—0,5663	—0,01289	0,07290	2,255	0,2743	0,9386	0,9645	—0,05839
1,00	—0,3466	—0,008552	0,04292	1,499	—0,5778	—0,01426	0,07155	2,499	0,2783	1,040	0,9843	—0,06471

Таблица 22

Зависимость коэффициентов тепло- и массопереноса при линейно падающей температуре среды от критерия Био (Bi_q) (неограниченная пластина) Lu=0,3, ε=0,5, Ko=1,2, Pn=0,5, Bi_m=10, Pd=0,25

Bi_q	C_{n1}		C_{n2}		C^*_{n1}		C^*_{n2}		D_n		D^*_n	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2
5	—0,3295	—0,00990	0,1643	1,010	—0,5493	—0,01650	0,2739	1,684	0,3789	0,7390	1,013	—0,1278
7	—0,3274	—0,01266	0,09726	1,054	—0,5458	—0,02110	0,1621	1,757	0,3152	0,7500	1,016	—0,1303
10	—0,3261	—0,01652	0,05125	1,070	—0,5436	—0,02754	0,08543	1,784	0,2716	0,7416	1,018	—0,1297
15	—0,3251	—0,01773	0,01597	1,079	—0,5419	—0,02956	0,02662	1,799	0,2383	0,7332	1,019	—0,1299
20	—0,3243	—0,01860	—0,003319	1,088	—0,5406	—0,03101	0,005533	1,814	0,2197	0,7314	1,019	—0,1305

Общее решение задачи в изображениях можно написать так:

$$\vartheta_L(r, s) - \frac{rt_0}{s} = B_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r + $$

$$+ B_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r,$$

$$u_L(r, s) - \frac{r\theta_0}{s} = B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho} (1-\nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r + $$

$$+ B_2 \frac{c}{\varepsilon\rho} (1-\nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r. \qquad (2.23)$$

Постоянные B_j определяем из граничных условий (III—IV), которые в изображениях имеют вид (2.4), (2.5). Удовлетворяем (2.22) и (2.23) граничным условиям, получившуюся систему уравнений решаем относительно B_1 и B_2. Найденные значения подставляем в уравнения (2.22) и (2.23). Имеем:

$$\vartheta_L(r, s) - \frac{rt_0}{s} = (t_c^0 - t_0) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\widetilde{P}_1 + \varepsilon \mathrm{K_0}(\widetilde{Q}_1 - K_1\widetilde{P}_1)}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r - \right.$$

$$\left. - \frac{\widetilde{P}_2 + \varepsilon \mathrm{K_0}(\widetilde{Q}_2 - K_1\widetilde{P}_2)}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r \right\} +$$

$$+ b \frac{\widetilde{P}_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r - \widetilde{P}_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} = \Pi_1 + \Pi_2, \qquad (2.24)$$

$$\frac{r\theta_0}{s} - u_L(r, s) = (\theta_0 - \theta_p) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\widetilde{Q}_2 + \frac{1}{\varepsilon \mathrm{K_0}}\widetilde{P}_2 - K_1\widetilde{P}_2}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} (1-\nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r - \right.$$

$$\left. - \frac{\widetilde{Q}_1 + \frac{1}{\varepsilon \mathrm{K_0}}\widetilde{P}_1 - K_1\widetilde{P}_1}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} (1-\nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r \right\} -$$

$$-b\frac{c}{\varepsilon\rho}\times$$

$$\times\frac{\widetilde{P}_2(1-\nu_1^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r-\widetilde{P}_1(1-\nu_2^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}=$$

$$=N_1+N_2. \qquad (2.25)$$

$\widetilde{Q}_j$ и $\widetilde{P}_j$ определяются уравнениями (1.60) и (1.61), а ν_j— уравнением (2.3). Оригиналы Π_1 и N_1 найдены в § 1 б.

Определим оригиналы выражений Π_2 и N_2:

$$\Pi_2=b\frac{\widetilde{P}_2\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_1 r-\widetilde{P}_1\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\nu_2 r}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}=$$

$$=b\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}. \qquad (2.26)$$

Как обычно, для шара числитель и знаменатель (2.26) не являются обобщенными, но приводятся к ним путем деления обеих частей (2.26) на $\frac{s}{a_q}:\Phi_1(s):\frac{s}{a_q}=\Phi_{01}(s)$, $\psi_1(s):\frac{s}{a_q}=\psi_0(s)$. Ввиду того что корнями знаменателя является двукратный нулевой корень и корни $s_n=-\frac{a_q\mu_n^2}{R^2}$, отвечающие уравнению $\frac{\psi_0(s)}{s^2}=\varphi_0(s)=0$, обобщенная теорема разложения имеет вид

$$L^{-1}[\Pi_2]=L^{-1}\left[b\frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}\right]=b\lim_{s\to 0}\left[\tau e^{s\tau}\frac{\Phi_{01}(s)}{\varphi_0(s)}+\right.$$

$$\left.+e^{s\tau}\frac{\Phi'_{01}(s)}{\varphi_0(s)}-e^{s\tau}\frac{\Phi_{01}(s)\varphi'_0(s)}{[\varphi_0(s)]^2}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}b\frac{\Phi_1(s_n)}{\psi'_1(s_n)}\exp(s_n\tau)=$$

$$=-b\tau r+b\frac{R^2}{6a_q}r\left(1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{b}{a_q}\frac{R^2}{\mu_n^2}\left(\frac{P_{n2}R\sin\nu_1\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\psi_n}-\right.$$

$$\left.-\frac{P_{n1}R\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\psi_n}\right)\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})=$$

$$=r(t_c^0-t_0)\left\{-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-\right.$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2}\frac{P_{n1}R\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}-P_{n2}R\sin\nu_1\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\psi_n}\times$$

$$\left.\times\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\right\}, \qquad (2.27)$$

так как $\varphi_0(0)=(\nu_2^2-\nu_1^2)\nu_1\nu_2$,

$$\varphi_0'(0)=\frac{R^2}{6a_q}\nu_1\nu_2\left(1+\frac{1}{\mathrm{Lu}}+\mathrm{Fe}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_m\mathrm{Lu}}\right)(\nu_2^2-\nu_1^2),$$

$$\Phi_{01}(0)=-r(\nu_2^2-\nu_1^2)\nu_1\nu_2,$$

$$\Phi_{01}'(0)=r\frac{R^2}{6a_q}\nu_1\nu_2\times$$

$$\times\left(-\frac{2}{\mathrm{Bi}_m\mathrm{Lu}}-\frac{1}{\mathrm{Lu}}-\mathrm{Fe}-\frac{r^2}{R^2}\right)(\nu_2^2-\nu_1^2),$$

$$\psi_1'(s_n)=-\frac{a_q\mu_n^3}{2R^4}\psi_n,$$

$$\Phi_1(s_n)=-\frac{1}{R}\left(P_{n2}\sin\nu_1\mu_n\frac{r}{R}-P_{n1}\sin\nu_2\mu_n\frac{r}{R}\right),$$

оригинал

$$N_2 = -b\,\frac{c}{\varepsilon\rho}\times$$

$$\times\frac{\widetilde{P}_2(1-\nu_1^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r-\widetilde{P}_1(1-\nu_2^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1-\widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}=$$

$$=-\frac{bc}{\varepsilon\rho}\,\frac{\Phi_2(s)}{\psi_1(s)}$$

можно получить таким же образом, как был получен оригинал Π_2. Вычисления дают

$$L^{-1}[N_2]=\frac{c}{\varepsilon\rho}\,b\,\frac{R^2}{6a_q}\,r\,\mathrm{Fe}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{\varepsilon\rho}\,b\,\frac{R^2}{a_q\mu_n^2}\times$$

$$\times\frac{P_{n2}(1-\nu_1^2)\,R\sin\nu_1\mu_n\,\dfrac{r}{R}-P_{n1}(1-\nu_2^2)\,R\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\psi_n}e^{-\mu_n^2\mathrm{Fo}}=$$

$$=(\theta_0-\theta_p)\,r\left\{\frac{1}{6}\,\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Pd}}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}\mu_n^2}\times$$

$$\times\left[\frac{P_{n2}(1-\nu_1^2)\sin\nu_1\mu_n^2\,\dfrac{r}{R}-P_{n1}(1-\nu_2^2)\sin\nu_2\mu_n\,\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}\,\mu_n\psi_n}\right]\times$$

$$\times\exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo}). \qquad (2.28)$$

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений внутреннего тепло- и массообмена для потенциалов переноса тепла и вещества, используя оригиналы (2.27) и (2.28), а также решения § 1 б, запишется:

$$T=\frac{t(r,\tau)-t_0}{t_c^0-t_0}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\frac{\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}-C_{n2}\frac{\sin\nu_1\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}\right)\times$$

$$\times\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (2.29)$$

$$\Theta=\frac{\theta_0-\theta(r,\tau)}{\theta_0-\theta_p}=1+\frac{1}{6}\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}^{*}(1-\nu_1^2)\frac{\sin\nu_1\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}-\right.$$

$$\left.-C_{n1}^{*}(1-\nu_2^2)\frac{\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}\right]\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}). \qquad (2.30)$$

Здесь C_{nj} и C_{nj}^{*} определяются уравнением (2.16); Q_{nj}, P_{nj} и ψ_n — уравнениями (1.66), (1.67), (1.70).

Средние безразмерные потенциалы для шара будут выражаться уравнениями (2.31) и (2.32):

$$\overline{T}=\frac{\overline{t}(\tau)-t_0}{t_c^0-t_0}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{15}\left(1+\frac{5}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (2.31)$$

$$\overline{\Theta}=\frac{\theta_0-\overline{\theta}(\tau)}{\theta_0-\theta_p}=1+\frac{1}{15}\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{*}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (2.32)$$

где $D_n=D_{n1}-D_{n2}$, $D_n^{*}=D_{n2}^{*}-D_{n1}^{*}$, D_{nj} и D_{nj}^{*} имеют обычный для шара вид с учетом нового выражения для C_{nj} и C_{nj}^{*}.

Характеристические корни μ_n в уравнениях (2.27)—(2.32) остаются теми же, что и в задачах t_c=const.

Из решений для шара, как и из решений для пластины, следует, что безразмерная температура и потенциал переноса вещества в любой точке тела пропорциональны критерию Предводителева, следовательно, скорости изменения температуры среды. Ввиду сравнительно быстрой сходимости бесконечных рядов, начиная с $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_{квазист}$, этим критерием можно пренебречь. В этом случае распределение потенциалов по материалу делается параболическим, а изменение T во времени—линейным (при Bi_q=const), т. е.

для $\mathrm{Fo} \geqslant \mathrm{Fo}_{квазист}$

$$T=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right], \qquad (2.29')$$

$$\Theta=1+\frac{1}{6}\,\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), \qquad (2.30')$$

$$\overline{T}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{15}\left(1+\frac{5}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right], \qquad (2.31')$$

$$\overline{\Theta}=1+\frac{1}{15}\,\mathrm{Pn}\,\mathrm{Pd}. \qquad (2.32')$$

в) *Неограниченная пластина. Параболические начальные условия*

$$\left[\Gamma=0,\ \xi=x,\ t(x,0)=t_ц+\left(\frac{x}{R}\right)^2(t_п-t_ц),\right.$$

$$\left.\theta(x,0)=\theta_ц-\left(\frac{x}{R}\right)^2(\theta_ц-\theta_п),\ t_c=t_c^0-b\tau\right].$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса в изображениях при параболических начальных условиях выглядит так:

$$t_L(x,s)=\frac{t_ц-(t_ц-t_п)\dfrac{x^2}{R^2}}{s}+\frac{2a_m\omega}{s^2}+$$

$$+B_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x+B_2\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x, \qquad (2.33)$$

$$\theta_L(x, s) = \frac{\theta_ц - (\theta_ц - \theta_n)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2\frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right)}{s^2} +$$

$$+ B_1 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x +$$

$$+ B_2 \frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x. \qquad (2.34)$$

В уравнениях (2.33) и (2.34) B_1 и B_2—постоянные относительно координат, ν_j имеет обычное выражение, а ω определяется уравнением (1.91).

B_j, найденные из граничных условий (2.4), (2.5), имеют вид:

$$B_1 = -\left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2' P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right],$$

$$B_2 = \frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2' P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)},$$

где Q_j, P_j Ω_k имеют значения, приведенные в § 1 в,

$$\Omega_2' = -2a_q\left[K_1\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right) + \omega \mathrm{Lu} + \frac{b}{2a_q}\right].$$

Следовательно, решение системы уравнений (I—VI) в изображениях будет:

$$t_L(x, s) = \frac{t_ц - (t_ц - t_n)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2a_m\omega}{s^2} + \left\{\left[\frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \right.\right.$$

$$+ \left.\frac{\Omega_2' P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right]\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x - \left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \right.$$

$$+ \left.\left.\frac{\Omega_2' P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right]\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x\right\}, \qquad (2.35)$$

$$\theta_E(x, s) = \frac{\theta_ц - (\theta_ц - \theta_n)\frac{x^2}{R^2}}{s} + \frac{2\frac{a_q c}{\varepsilon\rho}\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega \mathrm{Lu}\right)}{s^2} +$$

$$+ \left\{\left[\frac{\Omega_1 P_1 - \Omega_3 Q_1}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2' P_1 - \Omega_4 Q_1}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right]\frac{c}{\varepsilon\rho}(1 - \nu_2^2) \times\right.$$

$$\times \mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x - \left.\left[\frac{\Omega_1 P_2 - \Omega_3 Q_2}{s(Q_2P_1 - Q_1P_2)} + \frac{\Omega_2' P_2 - \Omega_4 Q_2}{s^2(Q_2P_1 - Q_1P_2)}\right] \times\right.$$

$$\times \frac{c}{\varepsilon\rho}\ (1-\nu_1^2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x\Big\}. \qquad (2.36)$$

Оригиналы основных выражений, содержащихся в уравнениях (2.35) и (2.36), были получены в § 1 в, поэтому, подставляя их значения в обратные преобразования для $L^{-1}[t_L(x, s)]$ и $L^{-1}[\theta_L(x, s)]$ и производя необходимые упрощения, окончательно получим:

$$T_1=\frac{t(x,\tau)-t_n}{t_c^0-t_n}=1-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}-C_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}\right)\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}), \qquad (2.37)$$

$$\Theta_1=\frac{\theta_n-\theta(x,\tau)}{\theta_n-\theta_p}=1+\frac{1}{2}\,\mathrm{Pd}\,\mathrm{Pn}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n1}^*(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}-C_{n2}^*(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\right]\times$$

$$\times\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}), \qquad (2.38)$$

где

$$C_{nj}=2\,\frac{G_1P_{nj}-G_2Q_{nj}}{\mu_n\psi_n},\quad C_{nj}^*=\frac{1}{\varepsilon\mathrm{Ko}}C_{nj}, \qquad (2.39)$$

$$G_1=1-2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-\frac{1}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1-$$

$$-2\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\frac{(K_1+1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}+\frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2}, \qquad (2.40)$$

$$G_2=2\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}-\frac{\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}. \qquad (2.41)$$

Выражения для остальных величин § 1 в.

г) *Шар. Параболические начальные условия.*

$$\left[\Gamma=2,\ \xi=r,\ t(r,o)=t_ц+\left(\frac{r}{R}\right)^2(t_n-t_ц),\right.$$

$$\left.\theta(r,0)=\theta_ц-\left(\frac{r}{R}\right)^2(\theta_ц-\theta_n),\ t_c=t_c^0-b\tau\right].$$

Решение для шара в изображениях можно записать следующим образом:

$$\vartheta_L(r, s) = \frac{r\left[t_ц - (t_ц - t_n)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} + \frac{6r\,a_m\,\omega}{s^2} +$$

$$+ \left\{\left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_1 - \Omega_2\widetilde{Q}_1}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} + \frac{\Omega_2'\widetilde{P}_1 - \Omega_4\widetilde{Q}_1}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right] \times \right.$$

$$\times \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r - \left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_2 - \Omega_3\widetilde{Q}_2}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\Omega_2'\widetilde{P}_2 - \Omega_4\widetilde{Q}_2}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right] \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r\right\}, \qquad (2.42)$$

$$u_L(r, s) = \frac{r\left[\vartheta_ц - (\vartheta_ц - \vartheta_n)\frac{r^2}{R^2}\right]}{s} + \frac{c}{\varepsilon\rho}\left\{\frac{6ra_q\left[\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega\mathrm{Lu}\right]}{s^2} + \right.$$

$$+ \left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_1 - \Omega_3\widetilde{Q}_1}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} + \frac{\Omega_2'\widetilde{P}_1 - \Omega_4\widetilde{Q}_1}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right](1 - \nu_2^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r -$$

$$- \left[\frac{\Omega_1\widetilde{P}_2 - \Omega_3\widetilde{Q}_2}{s(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)} + \frac{\Omega_2'\widetilde{P}_2 - \Omega_4\widetilde{Q}_2}{s^2(\widetilde{Q}_2\widetilde{P}_1 - \widetilde{Q}_1\widetilde{P}_2)}\right] \times$$

$$\left. \times (1 - \nu_1^2)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r\right\}. \qquad (2.43)$$

Здесь

$$\Omega_2' = -6a_q\left[K_1\left(\frac{t_ц - t_n}{R^2} + \omega\,\mathrm{Lu}\right) + \omega\mathrm{Lu} + \frac{b}{6a_q}\right],$$

значения остальных величин даны в § 1 г. $L^{-1}[\vartheta_L(r, s)]$, $L^{-1}[u_L(r, s)]$ можно найти, используя обобщенную теорему разложения. Так как оригиналы основных выражений (2.42) и (2.43) получены в § 1 г, то окончательное решение задачи после ряда преобразований примет вид:

$$T_1 = \frac{t(r, \tau) - t_n}{t_c^0 - t_n} = 1 - \mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\,\frac{\sin\nu_2\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$-C_{n2}\frac{\sin\nu_1\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}\Bigg)\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (2.44)$$

$$\Theta_1=\frac{\vartheta_n-\vartheta(r,\tau)}{\vartheta_n-\vartheta_p}=1+\frac{1}{6}\mathrm{PnPd}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}^*(1-\nu_1^2)\frac{\sin\nu_1\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}-\right.$$

$$\left.-C_{n1}^*(1-\nu_2^2)\frac{\sin\nu_2\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}\right]\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (2.45)$$

где

$$C_{nj}=2\frac{G_1P_{nj}-G_2Q_{nj}}{\mu_n\ \psi_n},\quad C_{nj}^*=\frac{C_{nj}}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}, \qquad (2.46)$$

$$G_1=1-2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-\frac{3}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\mathrm{Ko}K_1-$$

$$-6\varepsilon\mathrm{Ko}\,K_2\frac{(K_1+1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}+\frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2}, \qquad (2.47)$$

$$G_2=2\varepsilon\mathrm{Ko}K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}-\frac{3\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}, \qquad (2.48)$$

μ_n определяется решениями характеристического уравнения

$$Q_{n2}P_{n1}-Q_{n1}P_{n2}=0.$$

д) *Некоторые замечания о методе определения коэффициентов тепло- и массопереноса.* Наличие решений (2.14′), (2.15′) и (2.29′), (2.30′) позволяет предложить метод определения коэффициентов переноса тепла и массы связанного вещества (А. В. Лыков, 1935; Е. П. Шурыгина, 1941; Ю. А. Михайлов, 1956). Сущность метода сводится к следующему. Начиная с $\mathrm{Fo}>\mathrm{Fo}_{\text{квазист}}$, ведется регистрация линейно меняющейся температуры среды и температуры двух точек влажного тела. В интересуемый момент времени находится распределение влажности в материале. На основе полученных данных рассчитываются:

1. Критерий Предводителева

$$\mathrm{Pd} = \frac{AR^2}{\xi^2 - R^2} \cdot \frac{t(R, \tau) - t(\xi, \tau)}{t_c - t_0},$$

где A для пластины равно 2, для цилиндра — 4, для шара — 6,

ξ — произвольная координата влажного тела.

2. Коэффициент температуропроводности

$$a_q = \frac{b}{A} \cdot \frac{\xi^2 - R^2}{t(R, \tau) - t(\xi, \tau)}.$$

3. Критерий Поснова

$$\mathrm{Pn} = \frac{A(\Theta - 1)}{\mathrm{Pd}}.$$

4. Термоградиентный коэффициент, или коэффициент Соре,

$$\delta = \mathrm{Pn} \frac{\theta_0 - \theta_p}{t_c - t_0} = \mathrm{Pn}' \frac{u_0 - u_p}{t_c - t_0},$$

здесь θ_0 и θ_p—начальное и равновесное значение потенциала переноса вещества, u_0 и u_p—начальная и равновесная влажность.

5. Объемная теплоемкость

$$c_q \gamma_0 = \frac{\alpha A}{2\, bR} [t_c - t(R, \tau)].$$

6. Коэффициент теплопроводности

$$\lambda = c_q \gamma_0 a_q.$$

Преимущества метода состоят в том, что все указанные критерии подобия и коэффициенты определены из одного опыта. Недостаток заключается в трудности регулировки линейного изменения температуры среды.

§ 3. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества. Температура среды — экспоненциальная функция времени

Рассмотрим решение системы уравнений тепло- и массопереноса (I)—(VI) для случая экспоненциальной зависимости температуры среды от времени. Так как методика решения системы уравнений (I)—(VI) при $t_c = t_c^0 e^{-x\tau}$ ничего нового по сравнению с разобранными выше задачами не вносит, приведем здесь окончательные результаты.

а) *Решения для неограниченной пластины. Постоянные начальные условия.*

$$T=\frac{t(x,\ \tau)-t_0}{t_c^0-t_0}=-W_0+W_c\times$$

$$\times\frac{\bar{\bar{P}}_1\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)-\bar{\bar{P}}_2\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1-\bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}-C_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}\right)\times$$

$$\times\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}),\qquad(3.1)$$

$$\Theta=\frac{\theta_0-\theta(x,\ \tau)}{\theta_0-\theta_p}=1+\frac{W_c}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}\times$$

$$\times\frac{\bar{\bar{P}}_2(1-\nu_1^2)\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)-\bar{\bar{P}}_1(1-\nu_2^2)\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1-\bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\times$$

$$\times\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n1}^*(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}-\right.$$

$$\left.-C_{n2}^*(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\right]\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}),\qquad(3.2)$$

где

$$C_{nj}=2\frac{\varepsilon\,\mathrm{Ko}Q_{nj}-\left[\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1+W_0-\dfrac{W_c}{1-\mathrm{Pd}'/\mu_n^2}\right]\mathrm{P}_{nj}}{\mu_n\psi_n},$$

$$C_{nj}^*=\frac{C_{nj}}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}},\qquad(3.3)$$

$$\bar{\bar{Q}}_j=[1+K_1(1-\nu_j^2)]\cos\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}\sin\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'},$$

$$\bar{\bar{P}}_j = (1-\nu_j^2)\cos\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'} - [(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}]\times$$
$$\times\frac{\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}}{\mathrm{Bi}_m}\sin\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}.$$

Средние безразмерные потенциалы переноса

$$\bar{T} = -W_0 + W_c N\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} D_n\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}), \qquad (3.4)$$
$$\bar{\Theta} = 1 + W_c N^*\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} D_n^*\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}). \qquad (3.5)$$

Здесь

$$N = \frac{\bar{\bar{P}}_1\dfrac{\sin(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'})}{\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}} - \bar{\bar{P}}_2\dfrac{\sin(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'})}{\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}}}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2},$$
$$N^* = \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}\times$$
$$\times\frac{\bar{\bar{P}}_2(1-\nu_1^2)\dfrac{\sin(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'})}{\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}} - \bar{\bar{P}}_1(1-\nu_2^2)\dfrac{\sin(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'})}{\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}}}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}.$$

Форма выражения для D_n и D_n^* — обычная. Локальная и средняя безразмерная скорости потенциалов

$$\frac{dT}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n2}\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R} -\right.$$
$$\left. - C_{n1}\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R}\right)\mu_n^2\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}) - W_c\mathrm{Pd}'\times$$
$$\times\frac{\bar{\bar{P}}_1\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\dfrac{x}{R}\right) - \bar{\bar{P}}_2\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\dfrac{x}{R}\right)}{\bar{Q}_2 P_1 - \bar{\bar{Q}}_1 P_2}\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}), \qquad (3.6)$$
$$\frac{d\bar{T}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\mu_n^2\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}) - W_c\mathrm{Pd}'N, \qquad (3.7)$$

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C^{*}_{n1}(1-\nu_2^2)\cos\nu_2\mu_n\frac{x}{R} - C^{*}_{n2}(1-\nu_1^2)\cos\nu_1\mu_n\frac{x}{R}\right]\times$$

$$\times\,\mu_n^2\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}) - \frac{W_c}{\varepsilon\mathrm{Ko}}\times$$

$$\times\mathrm{Pd}'\frac{\bar{\bar{P}}_2(1-\nu_1^2)\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right) - \bar{\bar{P}}_1(1-\nu_2^2)\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)}{Q_2\bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\times$$

$$\times\exp(-\mathrm{Pd}'\,\mathrm{Fo}), \qquad (3.8)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}}{d\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} D^{*}_{n}\,\mu_n^2\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}) - W_c\mathrm{Pd}'\,N^{*}. \qquad (3.9)$$

В решениях (3.1), (3.2), (3.4), (3.9) $\mathrm{Pd}' = \frac{\varkappa R^2}{a_q}$ — критерий Предводителева для задач с экспоненционально меняющейся во времени температурой среды; $W_c = \frac{t_c^0}{t_c^0 - t_0}$, $W_0 = \frac{t_0}{t_c^0 - t_0}$ — параметрические критерии для температуры.

б) *Решения для шара. Постоянные начальные условия.*

$$T = \frac{t(r,\tau) - t_0}{t_c^0 - t_0} = -W_0 + W_c\times$$

$$\times\frac{\bar{\bar{P}}_1\dfrac{\sin\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}} - \bar{\bar{P}}_2\dfrac{\sin\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}}}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\frac{\sin\nu_2\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}} - C_{n2}\frac{\sin\nu_1\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}\right)\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (3.10)$$

$$\Theta = \frac{\theta_0 - \theta(r,\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = 1 + \frac{W_c}{\varepsilon\mathrm{Ko}}\left(\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_2 - \bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2\right)^{-1}\times$$

$$\times\left[\bar{P}_2(1-\nu_1^2)\frac{\sin\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}} -\right.$$

$$-\overline{\overline{P}}_1(1-\nu_2^2)\frac{\sin\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\,\frac{r}{R}\right)}{\frac{r}{R}}\Bigg]\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C^*_{n2}(1-\nu_1^2)\frac{\sin\nu_1\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}-\right.$$

$$\left.-C^*_{n1}(1-\nu_2^2)\frac{\sin\nu_2\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}\right]\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}). \qquad (3.11)$$

C_{nj} и C^*_{nj} определяются уравнениями (3.3), где входящие величины определены предыдущими решениями для шара, а

$$\overline{\overline{Q}}_j=\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}\cos(\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'})+$$

$$+\left[1-\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}+K_1(1-\nu_j^2)\right]\sin(\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}),$$

$$P_j=\left[(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}\right]\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}\cos\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}+$$

$$+\left[(1-\nu_j^2)-\frac{(1-\nu_j^2)+\mathrm{Fe}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\sin(\nu_j\sqrt{\mathrm{Pd}'}).$$

Характеристические корни μ_n, как обычно, определяются уравнением

$$Q_{n2}P_{n1}-Q_{n1}P_{n2}=0.$$

Средняя безразмерная температура и безразмерный потенциал вещества определяются уравнениями:

$$\overline{T}=-W_0+W_cN\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})-\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (3.12)$$

$$\overline{\Theta}=1+W_cN^*\exp(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})-\sum_{n=1}^{\infty}D^*_n\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}), \qquad (3.13)$$

где

$$N = \frac{\overline{\overline{P}}_1 \xi_2 - \overline{\overline{P}}_2 \xi_1}{\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{Q}}_1 \overline{\overline{P}}_2},$$

$$N^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \frac{(1 - \nu_1^2)\xi_1 \overline{\overline{P}}_2 - (1 - \nu_2^2)\xi_2 \overline{\overline{P}}_1}{\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{Q}}_1 \overline{\overline{P}}_2},$$

$$\xi_j = \frac{3\left[\sin\left(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}\right) - \nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'} \cos\left(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}\right)\right]}{\left(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}\right)^2},$$

$$D_n = D_{n1} - D_{n2}, \quad D_n^* = D_{n2}^* - D_{n1}^*.$$

Дифференцируя уравнения (3.10) — (3.13) по безразмерному времени, легко получить решения для скорости прогрева влажного материала и для скорости его сушки.

в) *Решения для неограниченной пластины. Параболические начальные условия.*

$$T_1 = \frac{t(x, \tau) - t_\text{п}}{t_c^0 - t_\text{п}} = -W_\text{пп} +$$

$$+ W_\text{сп} \frac{\overline{\overline{P}}_1 \cos\left(\nu_2 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \frac{x}{R}\right) - \overline{\overline{P}}_2 \cos\left(\nu_1 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \frac{x}{R}\right)}{\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{Q}}_1 \overline{\overline{P}}_2} \times$$

$$\times \exp(-\mathrm{Pd}' \mathrm{Fo}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n2} \cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R} - \right.$$

$$\left. - C_{n1} \cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R} \right) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (3.14)$$

$$\Theta_1 = \frac{\theta_\text{п} - \theta(x, \tau)}{\theta_\text{п} - \theta_p} = 1 + \frac{W_\text{сп}}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \times$$

$$\times \left[\overline{\overline{P}}_2 (1 - \nu_1^2) \cos\left(\nu_1 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \frac{x}{R}\right) - \right.$$

$$\left. - \overline{\overline{P}}_1 (1 - \nu_2^2) \cos\left(\nu_2 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \frac{x}{R}\right) \right] \frac{\exp(-\mathrm{Pd}' \mathrm{Fo})}{\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{P}}_1 - Q_1 \overline{\overline{P}}_2} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n1}^{*} (1 - \nu_2^2) \cos \nu_2 \mu_n \frac{x}{R} - C_{n2}^{*} (1 - \nu_1^2) \cos \nu_1 \mu_n \frac{x}{R} \right] \times$$

$$\times \exp (- \mu_n^2 \, \mathrm{Fo}), \qquad (3.15)$$

где

$$C_{nj} = 2 \frac{G_1 P_{nj} - G_2 Q_{nj}}{\mu_n \psi_n}, \; C_{nj}^{*} = \frac{C_{nj}}{\varepsilon \, \mathrm{Ko}}, \qquad (3.16)$$

$$G_1 = 1 - 2 W \left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q} - \frac{1}{\mu_n^2} \right) - \varepsilon \, \mathrm{Ko} \, K_1 -$$

$$- 2 \varepsilon \, \mathrm{Ko} \, K_2 \frac{(K_1 + 1) \, \mathrm{Lu}}{\mu_n^2} - W_{\text{сп}} + \frac{W_{\text{сп}}}{1 - \mathrm{Pd}'/\mu_n^2},$$

$$G_2 = 2 \varepsilon \, \mathrm{Ko} \, K_2 \left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m} - \frac{\mathrm{Lu}}{\mu_n^2} \right) - \varepsilon \, \mathrm{Ko}.$$

Запись средних величин будет такой же, как в задаче с постоянными начальными условиями — уравнения (3.4) и (3.5). При этом необходимо учесть, что вместо W_0 стоит $W_{\text{пп}}$ и вместо $W_c - W_{\text{сп}}$. Отличие будут вносить D_n и D_n^{*} или точнее C_{nj} и C_{nj}^{*}. Последние должны определяться уравнением (3.16):

$$W_{\text{пп}} = W_{\text{сп}} - 1 = \frac{t_{\text{п}}}{t_c^0 - t_{\text{п}}}.$$

г) *Решения для шара. Параболические начальные условия.*

$$T_1 = \frac{t(r, \tau) - t_{\text{п}}}{t_c^0 - t_{\text{п}}} = - W_{\text{пп}} +$$

$$+ W_{\text{сп}} \frac{\overline{\overline{P}}_1 \frac{\sin (\nu_2 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \, r/R)}{r/R} - \overline{\overline{P}}_2 \frac{\sin (\nu_1 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \, r/R)}{r/R}}{\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{Q}}_1 \overline{\overline{P}}_2} \times$$

$$\times \exp (- \mathrm{Pd}' \, \mathrm{Fo}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \frac{\sin \nu_2 \mu_n r/R}{r/R} - \right.$$

$$\left. - C_{n2} \frac{\sin \nu_1 \mu_n \, r/R}{r/R} \right) \exp (- \mu_n^2 \, \mathrm{Fo}), \qquad (3.17)$$

$$\Theta_1 = \frac{\theta_{\text{п}} - \theta (r, \tau)}{\theta_{\text{п}} - \theta_p} = 1 + \frac{W_{\text{сп}}}{\varepsilon \, \mathrm{Ko}} \times$$

$$\times\left[\bar{\bar{P}}_2\left(1-\nu_1^2\right)\frac{\sin\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\,r/R\right)}{r/R}-\right.$$

$$\left.-\bar{\bar{P}}_1\left(1-\nu_2^2\right)\frac{\sin\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\,r/R\right)}{r/R}\right]\frac{\exp\left(-\mathrm{Pd}'\,\mathrm{Fo}\right)}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1-\bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}^{*}\left(1-\nu_1^2\right)\frac{\sin\nu_1\mu_n\,r/R}{r/R}-\right.$$

$$\left.-C_{n1}^{*}\left(1-\nu_2^2\right)\frac{\sin\nu_2\mu_n\,r/R}{r/R}\right]\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right),\qquad(3.18)$$

где

$$C_{nj}=2\,\frac{G_1P_{nj}-G_2Q_{nj}}{\mu_n\psi_n},\quad C_{nj}^{*}=\frac{C_{nj}}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}},$$

$$G_1=1-2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-\frac{3}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1-$$

$$-G\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_2\,\frac{(K_1+1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}-$$

$$-W_{\mathrm{cn}}+\frac{W_{\mathrm{cn}}}{1-\mathrm{Pd}'/\mu_n^2},$$

$$G_2=2\,\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}-\frac{3\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right)\varepsilon\,\mathrm{Ko}.$$

§ 4. Обобщенные решения системы уравнений тепло- и массопереноса

Если сравнить решения различных задач § 1—3 для тел одинаковой формы, то можно заметить в них много общих элементов (например, ψ_n, Q_{nj}, P_{nj}, A_{nj}, B_{nj}, характеристические корни и др.). Последнее дает возможность представить окончательные решения в виде, приемлемом как для задач с различными начальными условиями, так и с различным законом изменения температуры среды. Ниже приводятся такие обобщенные решения для неограниченной пластины и шара.

Обобщенное решение тепло- и массопереноса в неограниченной пластине можно представить в следующем виде:

$$T = 1 + \Pi - \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n2} \cos \nu_1 \mu_n x/R - C_{n1} \cos \nu_2 \mu_n x/R) \times$$

$$\times \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

$$\Theta = 1 + \Pi^* - \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1}^* (1 - \nu_2^2) \cos \nu_2 \mu_n x/R -$$

$$- C_{n2}^* (1 - \nu_1^2) \cos \nu_1 \mu_n x/R] \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

где

а) при постоянных начальных условиях

$$C_{nj} = 2 \frac{P_{nj} + \varepsilon \mathrm{Ko} (Q_{nj} - K_1 P_{nj}) + M P_{nj}}{\mu_n \psi_n}$$

$$C_{nj}^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj},$$

$$t(x, 0) = t_0, \ \theta(x, 0) = 0_0;$$

б) при параболических начальных условиях

$$C_{nj} = 2 \frac{G_1 P_{nj} - G_2 Q_{nj}}{\mu_n \psi_n}, \ C_{nj}^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj},$$

$$t(x, 0) = t_{\mathrm{n}} \qquad \theta(x, 0) = 0_{\mathrm{n}}.$$

Здесь

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \varepsilon \mathrm{KoPn} + \frac{1}{\mathrm{Lu}} \right) + (-1)^j \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\left(1 + \varepsilon \ \mathrm{KoPn} + \frac{1}{\mathrm{Lu}} \right)^2 - \frac{4}{\mathrm{Lu}}} \right],$$

$$\psi_n = \nu_1 \ A_{n1} P_{n2} + \nu_2 B_{n2} Q_{n1} - \nu_2 A_{n2} P_{n1} - \nu_1 B_{n1} Q_{n2},$$

$$A_{nj} = \left[1 + \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + (1 - \nu_j^2) K_1 \right] \sin \nu_j \mu_n +$$

$$+ \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \cos \nu_j \mu_n,$$

$$B_{nj} = (1 - \nu_j^2) \sin \nu_j \mu_n +$$

$$+\frac{(1-\nu_j^2)+\varepsilon\,\mathrm{KoPn}}{\mathrm{Bi}_m}\frac{}{}\ (\sin\nu_j\mu_n+\nu_j\mu_n\cos\nu_j\mu_n),$$

$$Q_{nj}=[1+(1-\nu_j^2)\ K_1]\cos\nu_j\mu_n-\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\sin\nu_j\mu_n,$$

$$P_{nj}=(1-\nu_j^2)\cos^2\nu_j\mu_n-[(1-\nu_j^2)+\varepsilon\ \mathrm{KoPn}]\times$$

$$\times\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\sin\nu_j\mu_n,$$

$$G_1=1-2W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}-\frac{1}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_1-$$

$$-2\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\frac{(K_1+1)\ \mathrm{Lu}}{\mu_n^2}+M,$$

$$G_2=2\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}-\frac{\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko},$$

μ_n — определяются решениями уравнения $Q_2P_1=Q_1P_2$.

Для

$t_c=\mathrm{const}$

$$\Pi=0,\ \Pi^*=0,\ M=0,$$

$t_c=t_c^0-b\,\tau$

$$\Pi=-\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{R^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right],$$

$$\Pi^*=\frac{1}{2}\ \mathrm{PnPd}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right),\quad M=\frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2},$$

$t_c=t_c^0\ e^{-x\tau}$

$$\Pi=-W_c+W_c\frac{\bar{\bar{P}}_1\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\ \frac{x}{R}\right)-\bar{\bar{P}}_2\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1-\bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\times$$

$$\times\exp\ (-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}),$$

$$\Pi^*=\frac{W_c}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}\times$$

$$\times\frac{P_2(1-\nu_1^2)\cos\left(\nu_1\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)-\bar{\bar{P}}_1\ (1-\nu_2^2)\cos\left(\nu_2\sqrt{\mathrm{Pd}'}\frac{x}{R}\right)}{\bar{\bar{Q}}_2\bar{\bar{P}}_1-\bar{\bar{Q}}_1\bar{\bar{P}}_2}\times$$

$$\times\exp\ (-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}),$$

$$M = -W_c + \frac{W_c}{1 - \frac{\mathrm{Pd}'}{\mu_n^2}},$$

$$\bar{\bar{Q}}_j = [1 + K_1 (1 - \nu_j^2)] \cos(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}) -$$

$$- \frac{\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}}{\mathrm{Bi}_q} \sin(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}),$$

$$\bar{\bar{P}}_j = (1 - \nu_j^2) \cos(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}) -$$

$$- [(1 - \nu_j^2) + \varepsilon \mathrm{KoPn}] \frac{\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}}{\mathrm{Bi}_m} \sin(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}).$$

Обобщенное решение внутреннего тепло- и массопереноса в шаре запишется так:

$$T = 1 + \Pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \frac{\sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - C_{n2} \frac{\sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

$$\Theta = 1 + \Pi^* - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2}^* (1 - \nu_1^2) \frac{\sin \nu_1 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - C_{n1}^* (1 - \nu_2^2) \frac{\sin \nu_2 \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right] \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}),$$

где а) при постоянных начальных условиях

$$C_{nj} = 2 \frac{P_{nj} + \varepsilon \mathrm{Ko} (Q_{nj} - K_1 P_{nj}) + M P_{nj}}{\mu_n \psi_n}, \quad C_{nj}^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj},$$

$$t(r, 0) = t_0, \quad \vartheta(r, 0) = \vartheta_0;$$

б) при параболических начальных условиях

$$C_{nj} = 2 \frac{G_1 P_{nj} - G_2 Q_{nj}}{\mu_n \psi_n}, \quad C_{nj}^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} C_{nj},$$

$$t(r, 0) = t_n, \quad \vartheta(r, 0) = \vartheta_n.$$

Здесь

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \varepsilon\,\mathrm{KoPn} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^j \sqrt{\left(1 + \varepsilon\,\mathrm{KoPn} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2 - \frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right],$$

$$\psi_n = \nu_1 A_{n1} P_{n2} + \nu_2 B_{n2} Q_{n1} - \nu_2 A_{n2} P_{n1} - \nu_1 B_{n1} Q_{n2},$$

$$A_{nj} = [1 + K_1\,(1 - \nu_j^2)]\,\cos\,\nu_j\mu_n - \frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\,\sin\,\nu_j\mu_n,$$

$$B_{nj} = (1 - \nu_j^2)\,\cos\,\nu_j\mu_n - [(1 - \nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}]\,\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\,\sin\,\nu_j\mu_n,$$

$$Q_{nj} = \left[1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + K_1(1 - \nu_j^2)\right]\sin\,\nu_j\mu_n + \frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_q}\,\cos\,\nu_j\mu_n,$$

$$P_{nj} = \left[(1 - \nu_j^2) - \frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}}{\mathrm{Bi}_m}\right]\sin\,\nu_j\mu_n +$$

$$+ [(1 - \nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{Ko\,Pn}]\,\frac{\nu_j\mu_n}{\mathrm{Bi}_m}\,\cos\,\nu_j\mu_n,$$

$$G_1 = 1 - 2\,W\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_q} - \frac{3}{\mu_n^2}\right) - \varepsilon\,\mathrm{Ko}K_1 -$$

$$- 6\,\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\,\frac{(K_1 + 1)\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2} + M,$$

$$G_2 = 2\,\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_m} - \frac{3\,\mathrm{Lu}}{\mu_n^2}\right) - \varepsilon\mathrm{Ko},$$

μ_n — определяется решением уравнения

$$Q_2 P_1 = Q_1 P_2.$$

Для

$t_c = \mathrm{const}$

$$\Pi = 0, \quad \Pi^* = 0, \quad M = 0,$$

$t_c = t_c^0 - b\,\tau$

$$\Pi = -\,\mathrm{Pd}\left[\mathrm{Fo} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right)\right],$$

$$\Pi^* = \frac{1}{6}\,\mathrm{PnPd}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

$$M = \frac{\mathrm{Pd}}{\mu_n^2},$$

$$t_c = t_c^0 e^{-\kappa}$$

$$\Pi = -W_c + W_c \frac{\bar{\bar{P}}_1 \dfrac{\sin\left(\nu_2 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}} - \bar{\bar{P}}_2 \dfrac{\sin\left(\nu_1 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}}}{\bar{\bar{Q}}_2 \bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1 \bar{\bar{P}}_2} \times$$

$$\times \exp\,(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo}),$$

$$\Pi^* = \frac{W_c}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}} \left[\bar{\bar{P}}_2 (1 - \nu_1^2) \frac{\sin\left(\nu_1 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - \bar{\bar{P}}(1 - \nu_2^2) \frac{\sin\left(\nu_2 \sqrt{\mathrm{Pd}'} \dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{r}{R}} \right] \frac{\exp\,(-\mathrm{Pd}'\mathrm{Fo})}{\bar{\bar{Q}}_2 \bar{\bar{P}}_1 - \bar{\bar{Q}}_1 \bar{\bar{P}}_2},$$

$$M = -W_c + \frac{W_c}{1 - \dfrac{\mathrm{Pd}'}{\mu_n^2}},$$

$$\bar{\bar{Q}}_j = \left[1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + K_1 (1 - \nu_j^2) \right] \sin\,(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}) -$$

$$- \frac{\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}}{\mathrm{Bi}_q} \cos\,(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}),$$

$$\bar{\bar{P}}_j = \left[(1 - \nu_j^2) - \frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}}{\mathrm{Bi}_m} \right] \sin\,(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}) +$$

$$+ [(1 - \nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}] \frac{\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}}{\mathrm{Bi}_m} \cos\,(\nu_j \sqrt{\mathrm{Pd}'}).$$

§ 5. Частные случаи тепло- и массопереноса. Некоторые вопросы предельных переходов в системе уравнений тепло- и массопереноса

Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества для частных случаев тепло- и массопереноса лучше всего получить из решений полной системы уравнений(I)—(VI)

посредством предельного перехода. Однако непосредственное применение предельного перехода к решениям системы уравнений (I)—(VI) дает результат, не совпадающий с решением, полученным из неполной системы уравнений ($\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ и др.). Исследования показывают, что для осуществления правильных предельных переходов в системе уравнений тепло- и массопереноса важное значение имеет вид характеристического уравнения после предельного перехода и „форма" полученных при этом корней. Так, для неограниченной пластины характеристическое уравнение (1.20) в результате δ-перехода (а также Pn-перехода, Ko-перехода) имеет вид

$$\left(\cos\mu - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\,\mu\sin\mu\right)\left(\cos\frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\,\frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right) = 0, \qquad (5.1')$$

т. е. старая единая форма корня μ_{no}, содержащаяся в решении полной системы уравнений, приняла двойственный вид: μ и $\mu^* = \frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}$. Предельный переход в системе уравнений тепло- и массопереноса будет правильным, если повторить исходную бесконечную сумму общего решения слагаемым столько раз, сколько „форм" корней имеется в преобразованном характеристическом уравнении. Например, бесконечную сумму уравнения (1.28) необходимо повторить два раза, подставив вместо μ_{no} сперва μ, а потом μ^*, так как в характеристическом уравнении (5.1′) имеем две „формы" корня. После этого переход можно осуществлять обычным способом. Предельные переходы позволяют проверить правильность решений полной системы уравнений, легко и быстро получить решения неполных систем на основе одного общего решения и, наконец, выяснить новые интересные особенности и свойства процесса. Разработка способов предельного перехода для системы уравнений тепло- и массопереноса вскрыла новый физический смысл критерия $\sqrt{\mathrm{Lu}}$ как меры взаимосвязи между теплообменом и массообменом, показала возможность с формально математической точки зрения вести расчет тепло- и массопереноса в неполных системах ($\delta = 0$, $\varepsilon = 0$) только в массообменных или только в теплообменных величинах. Интересно отметить, что $\sqrt{\mathrm{Lu}}$ в процессах тепло- и массопереноса выполняет ту же роль, какую выполняет квадрат скорости света c^2 в известном соотношении А. Эйнштейна: $E = c^2 m$, определяющем взаимосвязь между энергетическими и массовыми величинами.

Посредством изложенного способа предельного перехода можно получить решение для частных случаев тепло- и массопереноса во влажном материале.

а) *Отсутствие в материале термического переноса вещества* ($\delta = 0$, $\mathrm{Pn} = 0$). Общее решение для тепло- и массопереноса в неограниченной пластине при постоянных начальных условиях запишется следующим образом:

$$T = \frac{t(x,\tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 + \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right) \cos \mu_n \frac{x}{R} \times$$

$$\times \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \mathrm{Ko} \left(\frac{\varepsilon \mathrm{Lu}}{1 - \mathrm{Lu}} \cos \mu_n^* \frac{x}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_n^*}{\psi_n^*} \cos \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \frac{x}{R}\right) \exp\left(-\mu_n^{*2} \mathrm{Fo}^*\right),$$

$$\Theta = \frac{\theta_0 - \theta(x,\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos \mu_n^* \frac{x}{R} \exp\left(-\mu_n^{*2} \mathrm{Fo}^*\right), \quad (5.1)$$

где

$$\varphi_n = \mathrm{Ko}\left[\frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q}\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1}\right)\sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon \mathrm{Lu} \mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Lu} - 1} \cos \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right],$$

$$\varphi_n^* = \mathrm{Lu}\left[\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1}\right) \mu_n^* \sin \mu_n^* + \frac{\varepsilon \mathrm{Bi}_q}{\mathrm{Lu} - 1} \cos \mu_n^*\right],$$

$$\psi_n = \mathrm{Bi}_m \cos \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}},$$

$$\psi_n^* = \mathrm{Bi}_q \cos \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* - \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^*,$$

μ_n и μ_n^* — корни характеристических уравнений

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} \mu \text{ и } \operatorname{ctg} \mu^* = \frac{1}{\mathrm{Bi}_m} \mu^*, \quad (5.2)$$

коэффициенты A_n и A_n^* определяются выражениями

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, \quad A_n^* = \frac{2 \sin \mu_n^*}{\mu_n^* + \sin \mu_n^* \cos \mu_n^*}. \quad (5.3)$$

Значения характеристических корней даны в таблице 23, а значения коэффициентов A_n и A_n^* — в таблице 24. Эти же величины представлены на рисунках 25 и 26.

Таблица 23

Корни характеристических уравнений $\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$

и $\operatorname{ctg}\mu^* = \frac{1}{\mathrm{Bi}m}\mu^*$

Bi_q / Bi_m	μ_1 / μ_1^*	μ_2 / μ_2^*	μ_3 / μ_3^*	μ_4 / μ_4^*	μ_5 / μ_5^*	μ_6 / μ_6^*
0	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,010	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,020	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,040	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,060	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,080	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,100	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,200	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,300	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,400	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,500	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,600	0,7061	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,700	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,800	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,900	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,000	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,500	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,000	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,000	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,000	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,000	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,000	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,000	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,000	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,000	1,4149	4,4694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,000	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,000	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,000	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,000	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,000	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50,000	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,9666	16,9519
60,000	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,000	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100,000	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Таблица 24

Значения коэффициентов A_n и A_n^* для неограниченной пластины

Bi_q / Bi_m	A_1 / A_1^*	A_2 / A_2^*	A_3 / A_3^*	A_4 / A_4^*	A_5 / A_5^*	A_6 / A_6^*
0,000	1,0000	—0,0000	0,0000	—0,0000	0,0000	—0,0000
0,001	1,0002	—0,0002	0,0000	—0,0000	0,0000	—0,0000
0,002	1,0004	—0,0004	0,0001	—0,0000	0,0000	—0,0000
0,004	1,0008	—0,0008	0,0002	—0,0001	0,0000	—0,0000
0,006	1,0012	—0,0012	0,0003	—0,0001	0,0001	—0,0000
0,008	1,0015	—0,0016	0,0004	—0,0002	0,0001	—0,0001
0,010	1,0020	—0,0020	0,0005	—0,0002	0,0001	—0,0001
0,020	1,0030	—0,0040	0,0010	—0,0004	0,0003	—0,0002
0,040	1,0065	—0,0080	0,0020	—0,0009	0,0005	—0,0003
0,060	1,0099	—0,0119	0,0030	—0,0013	0,0007	—0,0004
0,080	1,0130	—0,0158	0,0040	—0,0018	0,0010	—0,0006
0,100	1,0159	—0,0197	0,0050	—0,0022	0,0013	—0,0008
0,200	1,0312	—0,0381	0,0100	—0,0045	0,0025	—0,0016
0,300	1,0450	—0,0555	0,0148	—0,0067	0,0038	—0,0024
0,400	1,0581	—0,0719	0,0196	—0,0089	9,0050	—0,0032
0,500	1,0701	—0,0873	0,0243	—0,0110	0,0063	—0,0040
0,600	1,0813	—0,1025	0,0289	—0,0132	0,0075	—0,0048
0,700	1,0918	—0,1154	0,0335	—0,0153	0,0087	—0,0056
0,800	1,1016	—0,1282	0,0379	—0,0175	0,0100	—0,0064
0,900	1,1107	—0,1403	0,0423	—0,0196	0,0112	—0,0072
1,000	1,1192	—0,1517	0,0466	—0,0217	0,0124	—0,0080
1,500	1,1537	—0,2013	0,0667	—0,0318	0,0184	—0,0119
2,000	1,1784	—0,2367	0,0848	—0,0414	0,0241	—0,0157
3,000	1,2102	—0,2881	0,1154	—0,0589	0,0351	—0,0231
4,000	1,2287	—0,3215	0,1396	—0,0750	0,0451	—0,0300
5,000	1,2403	—0,3442	0,1588	—0,0876	0,0543	—0,0366
6,000	1,2478	—0,3604	0,1740	—0,0991	0,0626	—0,0427
7,000	1,2532	—0,3722	0,1861	—0,1089	0,0701	—0,0483
8,000	1,2569	—0,3812	0,1959	—0,1174	0,0768	—0,0535
9,000	1,2598	—0,3880	0,2039	—0,1246	0,0828	—0,0583
10,000	1,2612	—0,3934	0,2104	—0,1309	0,0881	—0,0676
15,000	1,2677	—0,4084	0,2320	—0,1514	0,1072	—0,0795
20,000	1,2699	—0,4147	0,2394	—0,1621	0,1182	—0,0901
30,000	1,2717	—0,4198	0,2472	—0,1718	0,1291	—0,1015
40,000	1,2723	—0,4217	0,2502	—0,1759	0,1340	—0,1069
50,000	1,2727	—0,4227	0,2517	—0,1779	0,1365	—0,1098
60,000	1,2728	—0,4232	0,2526	—0,1791	0,1379	—0,1115
80,000	1,2730	—0,4237	0,2535	—0,1803	0,1394	—0,1132
100,000	1,2731	—0,4239	0,2539	—0,1808	0,1405	—0,1141
∞	1,2732	—0,4244	0,2546	—0,1819	0,1415	—0,1157

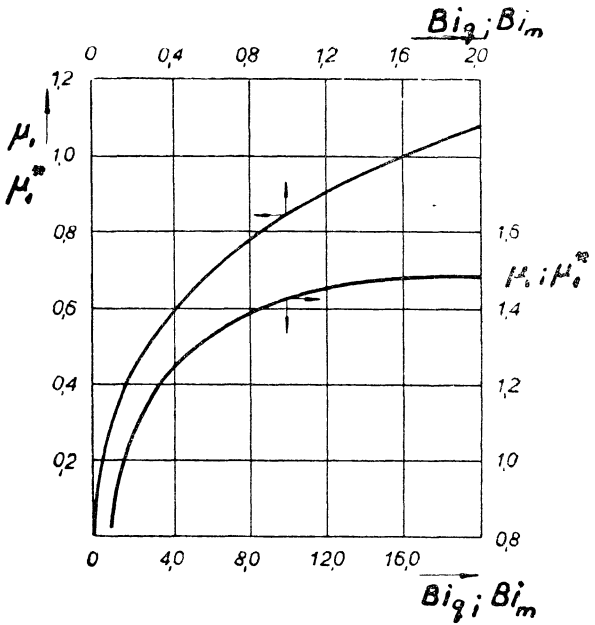


Рис. 25. Зависимость между первыми корнями характеристических уравнений $\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\mu$; $\operatorname{ctg}\mu^* = \frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\mu^*$ и критериями Био для пластины.

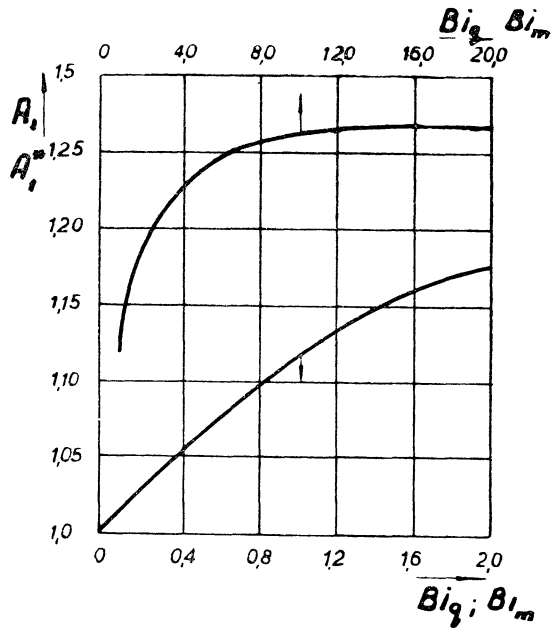


Рис. 26. Зависимость между A_1, A_1^* и критериями Био для пластины.

Общее решение для тепло- и массопереноса в шаре при постоянных начальных условиях запишется так:

$$T = \frac{t(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 + \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right) \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n \frac{r}{R}} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \mathrm{Ko} \left(\frac{\varepsilon \mathrm{Lu}}{1 - \mathrm{Lu}} \frac{\sin \mu_n^* \frac{r}{R}}{\mu_n^* \frac{r}{R}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_n^*}{\psi_n^*} \frac{\sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \frac{r}{R}}{\mu_n^* \frac{r}{R}} \right) \exp(-\mu_n^{*2} \mathrm{Fo}^*),$$

$$\Theta = \frac{\vartheta_0 - \vartheta(r, \tau)}{\vartheta_0 - \vartheta_p} = 1 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{\sin \mu_n^* \frac{r}{R}}{\mu_n^* \frac{r}{R}} \exp(-\mu_n^{*2} \mathrm{Fo}^*), \qquad (5.4)$$

где

$$\varphi_n = \mathrm{KoLu} \frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q} \left\{ \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1} (\mathrm{Bi}_q - 1) \right] \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1} \right] \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \cos \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \right\},$$

$$\varphi_n^* = \mathrm{Lu} \left\{ \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1} (\mathrm{Bi}_q - 1) \right] \sin \mu_n^* - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu} - 1} \right] \mu_n^* \cos \mu_n^* \right\},$$

$$\psi_n = (\mathrm{Bi}_m - 1) \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} + \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \cos \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}},$$

$$\psi_n^* = (\mathrm{Bi}_q - 1) \sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* + \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \cos \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^*,$$

μ_n и μ_n^* определяются из характеристических уравнений

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_q - 1}\mu \text{ и } \operatorname{tg}\mu^* = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_m - 1}\mu^*, \quad (5.5)$$

коэффициенты A_n и A_n^* определяются уравнениями

$$A_n = \frac{2(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n},$$

$$A_n^* = \frac{2(\sin\mu_n^* - \mu_n^*\cos\mu_n^*)}{\mu_n^* - \sin\mu_n^*\cos\mu_n^*}. \quad (5.6)$$

Значения характеристических корней даны в таблице 25 и на рисунке 27, а коэффициентов A_n и A_n^* —в таблице 26 и на рисунке 28.

Общее решение для тепло- и массопереноса в неограниченном цилиндре при постоянных начальных условиях таково:

$$T = \frac{t(r,\tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1 + \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right)J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^*\,\mathrm{Ko}\left[\frac{\varepsilon\,\mathrm{Lu}}{1-\mathrm{Lu}}J_0\left(\mu_n^*\frac{r}{R}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_n^*}{\psi_n^*}J_0\left(\mu_n^*\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\frac{r}{R}\right)\right]\exp\left(-\mu_n^{*2}\mathrm{Fo}^*\right),$$

$$\Theta = \frac{\vartheta_0 - \vartheta(r,\tau)}{\vartheta_0 - \vartheta_p} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* J_0\left(\mu_n^*\frac{r}{R}\right)\exp(-\mu_n^{*2}\mathrm{Fo}^*), \quad (5.7)$$

где

$$\varphi_n = \mathrm{Ko}\left[\frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q}\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu}-1}\right)\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n J_1\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Lu}-1}J_0\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)\right],$$

$$\varphi_n^* = \mathrm{Lu}\left[\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lu}-1}\right)\mu_n^* J_1(\mu_n^*) + \frac{\varepsilon\,\mathrm{Bi}_q}{\mathrm{Lu}-1}J_0(\mu_n^*)\right],$$

$$\psi_n = \mathrm{Bi}_m J_0\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right) - \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}J_1\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right),$$

$$\psi_n^* = \mathrm{Bi}_q J_0\left(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^*\right) - \sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^* J_1\left(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^*\right),$$

μ_n и μ_n^* — корни характеристических уравнений

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}_q} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(\mu^*)}{J_1(\mu^*)} = \frac{\mu^*}{\mathrm{Bi}_m}, \tag{5.8}$$

коэффициенты A_n и A_n^* определяются уравнениями

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n)]}, \quad A_n^* = \frac{2J_1(\mu_n^*)}{\mu_n^*[J_0^2(\mu_n^*)+J_1^2(\mu_n^*)]}. \tag{5.9}$$

Здесь

J_0 и J_1 — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядков.

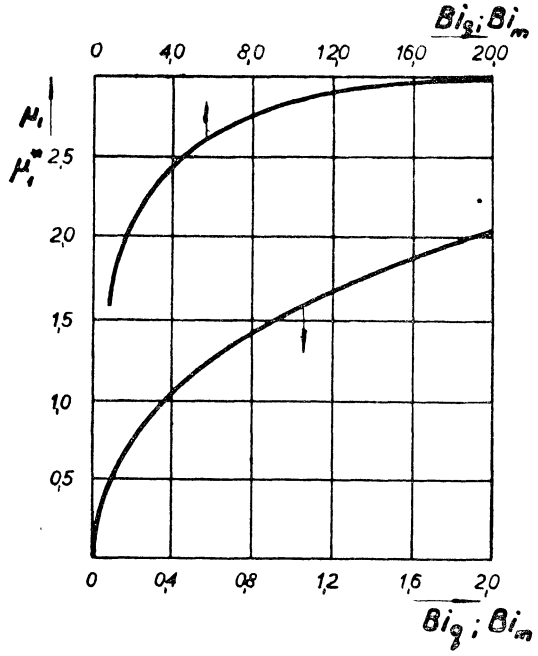


Рис. 27. Зависимость между первыми корнями характеристических уравнений $\mathrm{tg}\,\mu = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_q - 1}\mu$; $\mathrm{tg}\,\mu^* = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\mu^*$ и критериями Био для шара.

Корни характеристических уравнений (5.8) даны в таблице 27, а значения коэффициентов A_n и A_n^* — в таблице 28. Графическое отображение указанных величин представлено соответственно на рисунках 29 и 30.

Таблица 25

Корни характеристических уравнений

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_q - 1}\,\mu \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\mu^* = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_m - 1}\,\mu^*$$

Bi_q Bi_m	μ_1 μ_1^*	μ_2 μ_2^*	μ_3 μ_3^*	μ_4 μ_4^*	μ_5 μ_5^*	μ_6 μ_6^*
0,000	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
0,010	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,020	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,030	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
0,040	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,050	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
0,060	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,070	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
0,080	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,090	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
0,100	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,150	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,200	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,300	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,400	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,500	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
0,600	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
0,700	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
0,800	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
0,900	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
1,000	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,100	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
1,200	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
1,300	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
1,400	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
1,500	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
1,600	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
1,700	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
1,800	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
1,900	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
2,000	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
2,500	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
3,000	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,000	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
5,000	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
6,000	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
7,000	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
8,000	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
9,000	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
10,000	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
11,000	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
16,000	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
21,000	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
31,000	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
41,000	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
51,000	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
61,000	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
81,000	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
101,000	3,1105	6,2211	9,3317	10,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица 26

Значения коэффициентов A_n и A_n^* для шара

Bi_q / Bi_m	A_1 / A_1^*	A_2 / A_2^*	A_3 / A_3^*	A_4 / A_4^*	A_5 / A_5^*	A_6 / A_6^*
0,000	1,0000	—0,0000	0,0000	—0,0000	0,0000	—0,0000
0,005	1,0025	—0,0023	0,0013	—0,0009	0,0007	—0,0006
0,010	1,0035	—0,0046	0,0026	—0,0018	0,0014	—0,0012
0,020	1,0055	—0,0091	0,0052	—0,0037	0,0029	—0,0023
0,030	1,0089	—0,0137	0,0078	—0,0055	0,0043	—0,0035
0,040	1,0121	—0,0182	0,0104	—0,0074	0,0057	—0,0047
0,050	1,0147	—0,0227	0,0130	—0,0092	0,0071	—0,0058
0,060	1,0181	—0,0273	0,0156	—0,0110	0,0085	—0,0070
0,070	1,0206	—0,0318	0,0183	—0,0129	0,0100	—0,0081
0,080	1,0239	—0,0363	0,0209	—0,0147	0,0114	—0,0093
0,090	1,0266	—0,0409	0,0235	—0,0166	0,0128	—0,0105
0,100	1,0297	—0,0454	0,0260	—0,0184	0,0142	—0,0116
0,150	1,0443	—0,0679	0,0390	—0,0276	0,0214	—0,0174
0,200	1,0592	—0,0894	0,0520	—0,0368	0,0285	—0,0232
0,300	1,0880	—0,1345	0,0779	—0,0551	0,0427	—0,0349
0,400	1,1164	—0,1781	0,1036	—0,0734	0,0569	—0,0465
0,500	1,1440	—0,2216	0,1292	—0,0916	0,0710	—0,0580
0,600	1,1713	—0,2633	0,1546	—0,1098	0,0852	—0,0696
0,700	1,1978	—0,3048	0,1799	—0,1270	0,0998	—0,0812
0,800	1,2237	—0,3455	0,2050	—0,1460	0,1134	—0,0927
0,900	1,2488	—0,3854	0,2299	—0,1640	0,1275	—0,1042
1,000	1,2732	—0,4244	0,2546	—0,1819	0,1415	—0,1157
1,100	1,2970	—0,4626	0,2792	—0,1997	0,1555	—0,1272
1,200	1,3200	—0,4999	0,3035	—0,2175	0,1694	—0,1387
1,300	1,3424	—0,5364	0,3276	—0,2352	0,1833	—0,1501
1,400	1,3640	—0,5720	0,3515	—0,2528	0,1972	—0,1616
1,500	1,3848	—0,6067	0,3752	—0,2703	0,2110	—0,1730
1,600	1,4051	—0,6405	0,3986	—0,2878	0,2248	—0,1843
1,700	1,4247	—0,6735	0,4218	—0,3051	0,2385	—0,1957
1,800	1,4436	—0,7063	0,4447	—0,3228	0,2522	—0,2078
1,900	1,4618	—0,7368	0,4674	—0,3395	0,2659	—0,2183
2,000	1,4793	—0,7673	0,4899	—0,3565	0,2795	—0,2296
2,500	1,5579	—0,9073	0,5980	—0,4365	0,3449	—0,2855
3,000	1,6223	—1,0288	0,6993	—0,5205	0,4122	—0,3405
4,000	1,7201	—1,2253	0,8811	—0,6719	0,5384	—0,4476
5,000	1,7870	—1,3733	1,0363	—0,8095	0,6570	—0,5501
6,000	1,8338	—1,4860	1,1673	—0,9333	0,7702	—0,6428
7,000	1,8673	—1,5731	1,2776	—1,0437	0,8695	—0,7398
8,000	1,8920	—1,6409	1,3703	—1,1415	0,9633	—0,8264
9,000	1,9106	—1,6949	1,4482	—1,2280	1,0489	—0,9073
10,000	1,9249	—1,7381	1,5141	—1,3042	1,1269	—0,9027
11,000	1,9361	—1,7732	1,5698	—1,3713	1,1977	—1,0527
16,000	1,9663	—1,8766	1,7489	—1,6058	1,4633	—1,3305
21,000	1,9801	—1,9235	1,8385	—1,7360	1,6256	—1,5149
31,000	1,9905	—1,9626	1,9186	—1,8616	1,7950	—1,7225
41,000	1,9948	—1,9780	1,9515	—1,9161	1,8732	—1,8263
51,000	1,9964	—1,9856	1,9680	—1,9441	1,9145	—1,8802
61,000	1,9974	—1,9901	1,9773	—1,9601	1,9387	—1,9135
81,000	1,9985	—1,9942	1,9869	—1,9769	1,9644	—1,9482
101,000	1,9993	—1,9962	1,9915	—1,9850	1,9767	—1,9667
∞	2,0000	—2,0000	2,0000	—2,0000	2,0000	—2,0000

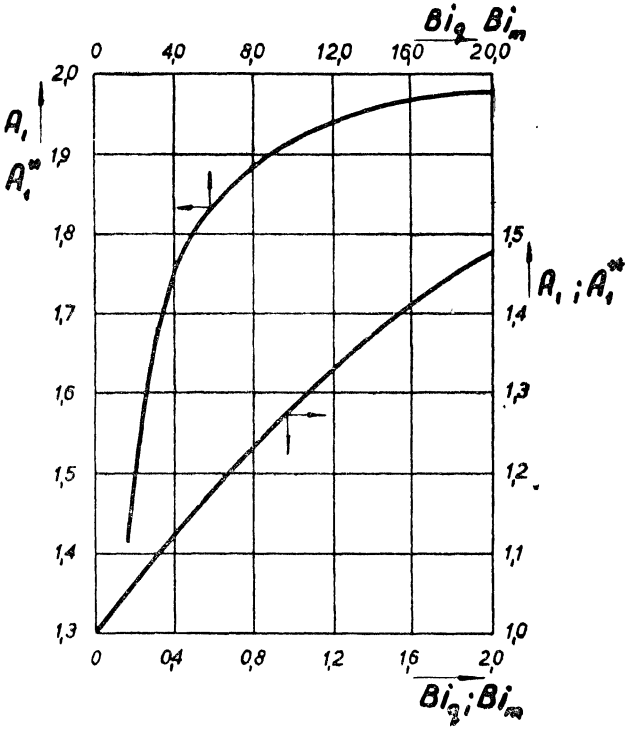


Рис. 28. Зависимость между A_1, A_1^* и критериями Био для шара.

б) *Отсутствие в материале термического переноса вещества и фазового перехода* ($\delta = 0$, $\varepsilon = 0$).

Для пластины $T = \dfrac{t(x, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 -$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 + \frac{\mathrm{Ko} \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \dfrac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q}\, \mu_n \sin \dfrac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}{\mathrm{Bi}_m \cos \dfrac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \dfrac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \sin \dfrac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}} \right] \times$$

$$\times \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{\mathrm{KoLu}\, \mu_n^* \sin \mu_n^* \cos\left(\sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \dfrac{x}{R}\right)}{\mathrm{Bi}_q \cos \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* - \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^* \sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_n^*} \exp\left(-\mu_n^{*2} \mathrm{Fo}^*\right).$$

Таблица 27

Корни характеристических уравнений

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\,\mu \quad \text{и} \quad \frac{J_0(\mu^*)}{J_1(\mu^*)} = -\frac{1}{\mathrm{Bi}_m}\,\mu^*.$$

Bi_q / Bi_m	μ_1 / μ_1^*	μ_2 / μ_2^*	μ_3 / μ_3^*	μ_4 / μ_4^*	μ_5 / μ_5^*	μ_6 / μ_6^*
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,00	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,50	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,00	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,00	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,00	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,00	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,00	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,00	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,00	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,00	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,00	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,00	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,00	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,00	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,00	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,00	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,00	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,00	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,00	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица 28

Значения коэффициентов A_n и A_n^* для неограниченного цилиндра

Bi_q / Bi_m	$+A_1$ / $+A_1^*$	$-A_2$ / $-A_2^*$	$+A_3$ / $+A_3^*$	$-A_4$ / $-A_4^*$	$+A_5$ / $+A_5^*$	$-A_6$ / $-A_6^*$
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,01	1,0031	0,0034	0,0013	0,0008	0,0005	0,0004
0,02	1,0049	0,0067	0,0027	0,0015	0,0010	0,0007
0,04	1,0102	0,0135	0,0052	0,0031	0,0021	0,0015
0,06	1,0150	0,0201	0,0081	0,0046	0,0031	0,0023
0,08	1,0199	0,0268	0,0110	0,0062	0,0041	0,0030
0,10	1,0245	0,0333	0,0135	0,0077	0,0051	0,0037
0,15	1,0366	0,0497	0,0202	0,0116	0,0077	0,0056
0,20	1,0482	0,0658	0,0269	0,0154	0,0103	0,0075
0,30	1,0711	0,0972	0,0401	0,0231	0,0155	0,0112
0,40	1,0931	0,1277	0,0582	0,0307	0,0205	0,0150
0,50	1,1142	0,1571	0,0662	0,0383	0,0256	0,0187
0,60	1,1345	0,1857	0,0790	0,0458	0,0307	0,0224
0,70	1,1539	0,2132	0,0917	0,0533	0,0358	0,0261
0,80	1,1724	0,2398	0,1043	0,0608	0,0408	0,0298
0,90	1,1902	0,2654	0,1167	0,0682	0,0459	0,0335
1,00	1,2071	0,2901	0,1289	0,0756	0,0509	0,0372
1,50	1,2807	0,4008	0,1877	0,1117	0,0756	0,0554
2,00	1,3377	0,4923	0,2422	0,1404	0,0998	0,0732
3,00	1,4192	0,6309	0,3384	0,2114	0,1463	0,1084
4,00	1,4698	0,7278	0,4184	0,2699	0,1898	0,1420
5,00	1,5029	0,7973	0,4842	0,3220	0,2301	0,1735
6,00	1,5253	0,8484	0,5382	0,3679	0,2672	0,2038
7,50	1,5409	0,8869	0,5825	0,4080	0,3010	0,2317
8,00	1,5523	0,9225	0,6189	0,4430	0,3316	0,2579
9,00	1,5611	0,9393	0,6491	0,4735	0,3593	0,2826
10,00	1,5677	0,9575	0,6784	6,5000	0,3843	0,3042
15,00	1,5853	1,0091	0,7519	0,5901	0,4760	0,3913
20,00	1,5918	1,0309	0,7889	0,6382	0,5303	0,4461
30,00	1,5964	1,0488	0,8195	0,6827	0,5853	0,5062
40,00	1,5988	1,0550	0,8335	0,7018	0,6133	0,5390
50,00	1,5995	1,0587	0,8395	0,7112	0,6227	0,5544
60,00	1,6009	1,0589	0,8428	0,7165	0,6301	0,5642
80,00	1,6012	1,0599	0,8463	0,7212	0,6398	0,5770
100,00	1,6014	1,0631	0,8505	0,7245	0,6415	0,5850
∞	1,6021	1,0648	0,8558	0,7296	0,6485	0,5896

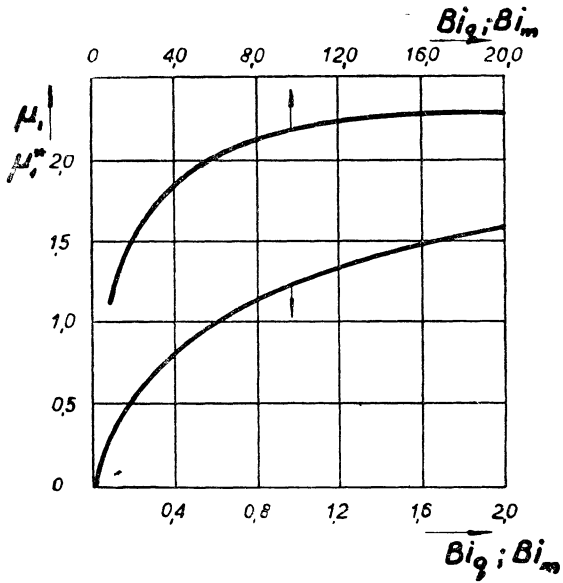


Рис. 29. Зависимость между первыми корнями характеристических уравнений $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}_q}$; $\frac{J_0(\mu^*)}{J_1(\mu^*)} = \frac{\mu^*}{\mathrm{Bi}_m}$ и критериями Био для неограниченного цилиндра.

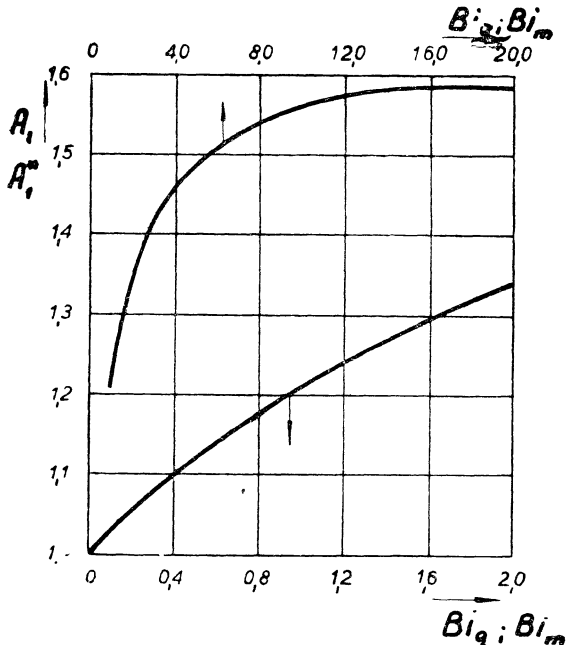


Рис. 30. Зависимость между A_1, A_1^* и критериями Био для неограниченного цилиндра.

Для шара

$$T = \frac{t\,(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 + \frac{\mathrm{KoLu}\,\frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q}\left(\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)}{(\mathrm{Bi}_m - 1)\sin\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} + \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}} \right] \times$$

$$\times \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n \frac{r}{R}} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{\mathrm{Ko\,Lu\,Bi}_m \sin \mu_n^*}{(\mathrm{Bi}_q - 1)\sin\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^* + \sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^* \cos\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^*} \times$$

$$\times \frac{\sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^* \frac{r}{R}}{\mu_n^* \frac{r}{R}} \exp(-\mu_n^{*2}\mathrm{Fo}^*).$$

Для цилиндра

$$T = \frac{t\,(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0} =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 + \frac{\mathrm{Ko}\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Bi}_q}\,\mu_n J_1\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)}{\mathrm{Bi}_m J_0\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right) - \frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\,J_1\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)} \right] \times$$

$$\times J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{\mathrm{Ko\,Lu}\,\mu_n^* J_1(\mu_n^*)\, J_0\left(\mu_n^* \sqrt{\mathrm{Lu}}\,\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{Bi}_q J_0(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^*) - \sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^* J_1(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_n^*)} \exp(-\mu_n^{*2}\mathrm{Fo}^*).$$

Выражения для полей массосодержания определяются уравнениями (5.1), (5.4), (5.7); корни характеристических уравнений—уравнениями (5.2), (5.5), (5.8); коэффициенты тепло- и массопереноса—уравнениями (5.3), (5.6), (5.9).

При отсутствии массообмена ($\mathrm{Ko} = 0$) написанные выше решения превращаются в обычные классические решения распределения температуры в пластине, шаре, цилиндре.

в) *Интенсивность удаления из материала вещества постоянна; термический перенос вещества отсутствует* ($\delta = 0$, $q_m = \beta\,[\theta(R, \tau) - \theta_p] = \mathrm{const}$). Эта задача может служить ана-

логом математического описания периода постоянной скорости сушки. Решение ее, данное Ф. М. Полонской, было первым шагом в разработке системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса (I), (II).

Решение системы уравнений для распределения потенциала переноса вещества в неограниченной пластине имеет вид

$$\frac{\theta_0 - \theta(x,\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = \mathrm{Ki}_m \left[\mathrm{Fo}^* - \frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{R^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi \frac{x}{R} \exp\left(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}^*\right) \right], \quad (5.10)$$

где

$\mathrm{Ki}_m = \dfrac{q_m R}{\lambda_m (\theta_0 - \theta_p)}$ — массообменный критерий Кирпичева.

С ростом безразмерного времени (Fo^*) члены бесконечного ряда (5.10) быстро уменьшаются, так что начиная с $\mathrm{Fo}^* = \mathrm{Fo}\,\mathrm{Lu} = \dfrac{a_m \tau}{R^2} \geqslant 0{,}54$ им можно пренебречь по сравнению с первыми двумя слагаемыми (5.10), т. е. в материале устанавливается квазистационарный режим:

$$\frac{\theta_0 - \theta(x,\tau)}{\theta_0 - \theta_p} = \mathrm{Ki}_m \left[\mathrm{Fo}^* - \frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{R^2}\right)\right] \text{ при } \mathrm{Fo}^* > 0{,}54.$$

В этом случае решение для поля температур будет

$$\frac{t(x,\tau) - t_0}{t_м - t_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Ki}_m\left(1 - \frac{x^2}{R^2} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \frac{1}{\mu_n^2}\varepsilon\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Ki}_m\right) \cos\mu_n \frac{x}{R} \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right). \quad (5.11)$$

Здесь μ_n и A_n определяются выражениями (5.1) и (5.3), $t_м = t_c - \dfrac{(1-\varepsilon)\rho q_m}{\alpha}$. Начиная со значения критерия $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}32$ решение (5.11) упрощается и выражение для безразмерной температуры принимает вид

$$\frac{t(x,\tau) - t_0}{t_м - t_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Ki}_m\left(1 - \frac{x^2}{R^2} + \frac{2}{\mathrm{Bi}_q}\right).$$

Следовательно, температурное поле становится стационарным. Эксперименты Ф. М. Полонской подтвердили указанное распределение температуры по толще влажного материала.

Более подробное рассмотрение последнего соотношения показывает, что критерий фазового перехода

$$\varepsilon = \frac{2\lambda}{\rho q_m R}(t_п - t_ц).$$

Это значит, что по известному перепаду температуры и теплофизическим свойствам материала можно определить ε, следовательно, и поток вещества в парообразном состоянии. По опытам Ф. М. Полонской и П. Д. Лебедева для гипсовых пластин $\varepsilon = 0{,}045$; для глины — $0{,}75 \div 1$; песка — $0{,}2 \div 0{,}4$; древесины — $0{,}09 \div 0{,}2$.

г) *Обобщенные граничные условия третьего рода; термический перенос вещества отсутствует.* В предыдущих задачах были рассмотрены аналитические решения различных случаев тепло- и массопереноса. При этом интенсивность удаления из материала вещества q_m принималась либо постоянной, $q_m = \text{const}$, либо зависящей от потенциала переноса вещества на поверхности тела, $q_m = \beta[\vartheta(R, \tau) - \vartheta_p]$. Член, характеризующий в граничных условиях интенсивность удаления в среду вещества, может принимать тот либо другой вид в соответствии с условиями протекания процесса; q_m от координат и времени может иметь различную зависимость. Поэтому крайне желательно иметь единое решение, справедливое для всего процесса тепло- и массообмена. В случае $q_m = q_m(\tau)$, $\delta = 0$ и регулярного режима такое решение для неограниченной пластины получили А. В. Лыков и М. С. Смирнов. Краевыми условиями этой задачи являются:

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha[t_c - t(R, \tau)] - (1 - \varepsilon)\rho q_m(\tau) = 0, \qquad (5.12)$$

$$\lambda_m \frac{\partial \vartheta(R, \tau)}{\partial x} + q_m(\tau) = 0, \qquad (5.13)$$

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const}, \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_0 = \text{const}, \qquad (5.14)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0. \qquad (5.15)$$

Решение системы уравнений (I), (II), полученное методом интегрального преобразования при краевых условиях (5.12)—(5.15) для поля потенциала переноса вещества, имеет вид

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0} = 1 - \int_0^\tau \frac{a_m}{R^2} \mathrm{Ki}_m(\eta)\, d\eta + \mathrm{Ki}_m(\tau)\frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{R^2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi \frac{x}{R} \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}^*) \times$$

$$\times\left\{\mathrm{Ki}_m(0)+\int_0^{\tau}\exp\left(n^2\pi^2\frac{a_m\eta}{R^2}\right)\frac{\mathrm{Ki}_m(\eta)}{d\eta}\,d\eta\right\}. \qquad (5.16)$$

Спустя определенный промежуток времени, т. е. при $\mathrm{Fo}^*>\mathrm{Fo}_1^*$, в формуле (5.16) можно пренебречь бесконечным рядом. Тогда выражение будет иметь только два первых слагаемых.

Температурное поле неограниченной пластины для регулярного режима можно записать так:

$$\frac{t(x,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=$$

$$=1-\mathrm{Ki}_m(\tau)\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Lu}\,\frac{t_c}{t_c-t_0}\left[0{,}5\varepsilon\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right]. \qquad (5.17)$$

В формулах (5.16) и (5.17)

$\mathrm{Ki}_m(\tau)=\dfrac{q_m(\tau)R}{\lambda_m\theta_0}$ — массообменный критерий Кирпичева,

$\mathrm{Ko}=\dfrac{\rho\theta_0\rho c_m\theta_0}{c t_c c_q t_c}$ — критерий Коссовича.

Найдем средние (интегральные) значения для потенциалов переноса. Имеем

$$\frac{\bar{\theta}(\tau)}{\theta_0}=1-\int_0^{\tau}\frac{a_m}{R^2}\mathrm{Ki}_m(\eta)\,d\eta,$$

$$\frac{\bar{t}(\tau)-t_0}{t_c-t_0}=1-\mathrm{Ki}_m(\tau)\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Lu}\,\frac{t_c}{t_c-t_0}\left[\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\right].$$

Из этих соотношений для скорости изменения потенциала переноса вещества (например, для процесса сушки—скорости сушки) получим следующее выражение:

$$-\frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau}=\frac{u_0 a_m[t_c-\bar{t}(\tau)]}{R^2\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Lu}\,t_c\left(\frac{1}{3}\varepsilon+\mathrm{Bi}_q^{-1}\right)}=$$

$$=\frac{\lambda_q[\bar{t}_c-\bar{t}(\tau)]}{\rho\gamma_0 R^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon+\mathrm{Bi}_q^{-1}\right)}. \qquad (5.18)$$

Соотношение (5.18) представляет большой практический интерес, так как позволяет по средней температуре тела и коэффициентам переноса тепла определить скорость сушки, другими словами—свести расчет интенсивности массообмена на расчет теплообмена. Из приведенных выше соотношений

можем также получить формулу для массообменного критерия Кирпичева:

$$\mathrm{Ki}_m(\tau) = \frac{\lambda_q\,[t_c - \bar{t}(\tau)]}{\rho\, a_m \gamma_0 u_0 \left(\frac{1}{3}\,\varepsilon + \mathrm{Bi}_q^{-1}\right)},$$

из которой следует, что интенсивность испарения зависит от критерия фазового превращения, коэффициента теплообмена и коэффициентов переноса тепла и вещества.

§ 6. Влияние тепло- и массообменных критериев подобия на процесс тепло- и массопереноса

Решения системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса зависят от большой группы тепло- и массообменных критериев подобия. Однако не все критерии в одинаковой мере влияют на ход процесса. Анализ результатов большой серии расчетов уравнений (I)—(VI) показывает на преимущественное воздействие одних критериев (Bi_m, Pn) на массообменные характеристики тепло- и массопереноса, а других (Bi_q, Ko, ε, W)—на теплообменные.

Наиболее существенное влияние на процессы переноса тепла и вещества оказывает критерий Lu, который можно также назвать критерием взаимосвязи тепло- и массопереноса. В основном Lu характеризует инерционные свойства поля потенциала переноса вещества по сравнению с инерционными свойствами полей температур. Из рисунка 31 видно,

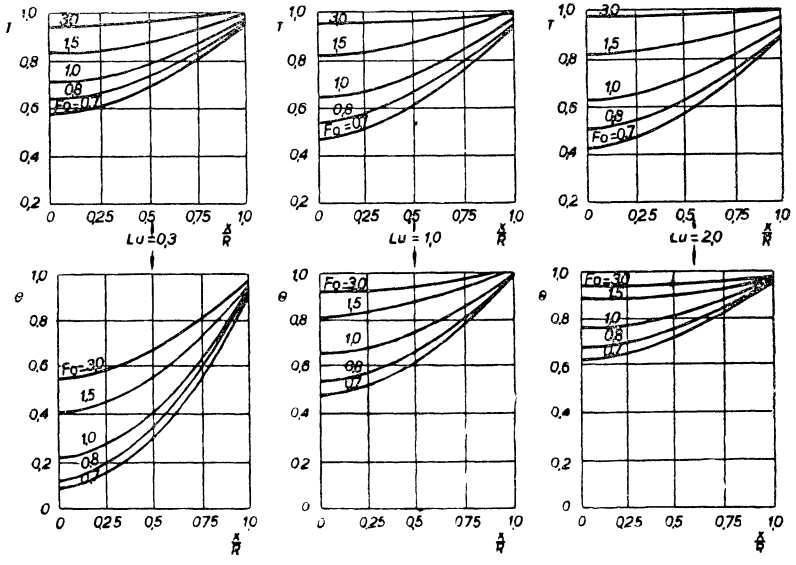


Рис. 31. Распределение потенциалов переноса по материалу в зависимости от Lu.

что при малых значениях Lu распространение потенциала тепла в материале опережает распространение потенциала переноса вещества. При $Lu \approx 1{,}0$ они приблизительно сравниваются и при $Lu > 1{,}0$ распространение потенциала вещества начинает опережать распространение температуры. Однако полной симметрии в характеристиках переноса по отношению к $Lu = 1{,}0$ не наблюдается. Для сравнения рассмотрим два случая: $Lu = 0{,}5$ и $Lu = 2{,}0$, т. е. когда коэффициент температуропроводности в 2 раза больше коэффициента потенциалопроводности массопереноса и в 2 раза меньше его.

Таблица 29

Fo	$\overline{T} : \overline{\Theta}$	$\overline{\Theta} : \overline{T}$	$\frac{d\overline{T}}{d\,\mathrm{Fo}} : \frac{d\overline{\Theta}}{d\mathrm{Fo}}$	$\frac{d\overline{\Theta}}{d\,\mathrm{Fo}} : \frac{d\overline{T}}{d\,\mathrm{Fo}}$	$\overline{T} : \overline{\Theta}$	$\frac{d\overline{T}}{d\mathrm{Fo}} : \frac{d\overline{\Theta}}{d\mathrm{Fo}}$
	Lu=0,5	Lu=2,0	Lu=0,5	Lu=2,0	Lu=1,0	
0,4	1,44	1,61			0,908	
0,6	1,41	1,35	1,23	0,63	0,946	1,10
0,8	1,35	1,22	0,22	0,60	0,965	1,09
1,0	1,29	1,15	0,79	0,59	0,976	1,08

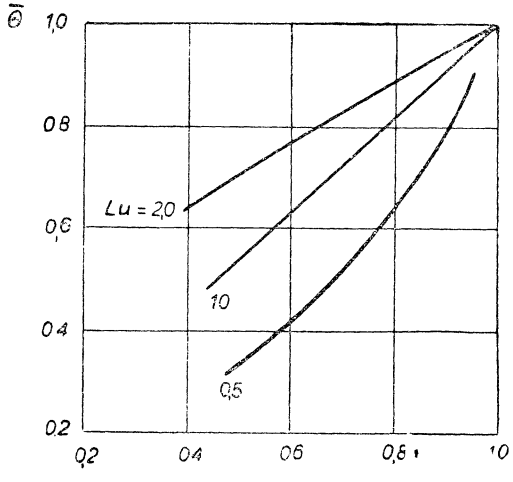


Рис. 32. Симметрия $\overline{T}$ и $\overline{\Theta}$ относительно $Lu = 1{,}0$.

Из таблицы 29 и рисунка 32 видно, что указанное отличие для средних безразмерных потенциалов составляет $\pm 12\%$,

а для отношения скорости их изменения—до 200%. Не наблюдается полного равенства переносов тепла и вещества даже при Lu = 1,0, оно наступает при Lu < 1,0. С ростом критерия Lu при одном и том же значении безразмерного времени средняя температура материала уменьшается, а сушка усиливается; все процессы идут более равномерно на всем интервале изменения потенциала переноса вещества (рис. 33).

Следовательно, с технологической точки зрения рационально создавать такие условия протекания тепло- и массообмена (например, сушки), при которых значение критерия Lu было бы возможно большим; последнее одновременно с интенсификацией прогрева и сушки уменьшает возможность термического распада и других отрицательных особенностей процесса, обусловленных высокими температурами.

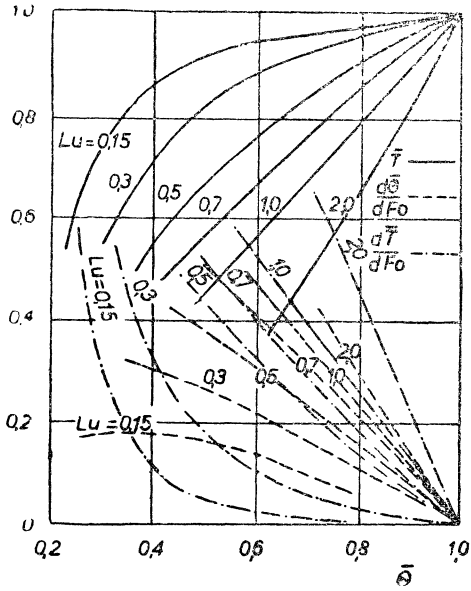


Рис. 33. Зависимость тепло- и массообменных характеристик от Lu.

Серьезное влияние на ход процесса оказывают критерии поверхностного и внутреннего тепло- и массообмена. Критерии тепло- и массообмена (Bi_q и Bi_m) характеризуют интенсивность внешнего переноса (тепла для Bi_q и вещества для Bi_m) по сравнению с интенсивностью внутреннего переноса. При малых значениях критериев Био (табл. 30) скорость прогрева и сушки незначительна, градиенты температуры и потенциала вещества малы. С ростом Bi_q и Bi_m процесс переноса интенсифицируется, одновременно с этим в материале растут градиенты потенциалов переноса. После стабилизации определенных процессов внутри материала (для пластины $Fo \approx 0{,}2$; шара $Fo \approx 0{,}4$) теплообменный критерий Био начинает воздействовать только на тепловые характеристики тепло- и массопереноса $\left(\bar{T}, \frac{dT}{d\,Fo}\right)$ и не влияет на характеристики массопереноса $\left(\Theta, \frac{d\Theta}{d\,Fo}\right)$. Обратно массообменный критерий Био начинает воздействовать только на характери-

Показатель	Fo	$Bi_q = 0{,}5$; $Bi_m = 0{,}5$			
		$\frac{x}{R} = 0$	$\frac{x}{R} = 0{,}25$	$\frac{x}{R} = 0{,}50$	$\frac{x}{R} = 0{,}75$
$T = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}$	0,7	0,123	0,133	0,162	0,211
	0,8	0,147	0,157	0,185	0,232
	1,0	0,192	0,201	0,228	0,272
	1,5	0,293	0,301	0,324	0,362
	2,0	0,377	0,383	0,404	0,437
	3,0	0,507	0,513	0,528	0,553
	5,0	0,673	0,676	0,686	0,702
	7,0	0,768	0,771	0,777	0,788
	10,0	0,852	0,853	0,857	0,864
$\Theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_p}$	0,7	$-0{,}006$	$0{,}118 \cdot 10^{-1}$	$0{,}640 \cdot 10^{-1}$	0,150
	0,8	$0{,}59 \cdot 10^{-2}$	$0{,}240 \cdot 10^{-1}$	$0{,}753 \cdot 10^{-1}$	0,160
	1,0	$0{,}303 \cdot 10^{-1}$	$0{,}448 \cdot 10^{-1}$	$0{,}974 \cdot 10^{-1}$	0,179
	1,5	$0{,}889 \cdot 10^{-1}$	0,105	0,151	0,226
	2,0	0,144	0,159	0,201	0,271
	3,0	0,244	0,257	0,293	0,353
	5,0	0,411	0,420	0,447	0,492
	7,0	0,541	0,548	0,569	0,603
	10,0	0,684	0,689	0,703	0,726
$\frac{dT}{d\,\mathrm{Fo}}$	1,0	0,219	0,216	0,208	0,195
	1,5	0,183	0,181	0,174	0,163
	2,0	0,154	0,152	0,146	0,137
	3,0	0,110	0,109	0,105	$0{,}987 \cdot 10^{-1}$
	5,0	$0{,}611 \cdot 10^{-1}$	$0{,}604 \cdot 10^{-1}$	$0{,}584 \cdot 10^{-1}$	$0{,}550 \cdot 10^{-1}$
$\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}}$	1,0	0,121	0,118	0,109	$0{,}955 \cdot 10^{-1}$
	1,5	0,113	0,111	0,103	$0{,}911 \cdot 10^{-1}$
	2,0	0,107	0,104	$0{,}975 \cdot 10^{-1}$	$0{,}866 \cdot 10^{-1}$
	3,0	$0{,}941 \cdot 10^{-1}$	$0{,}922 \cdot 10^{-1}$	$0{,}868 \cdot 10^{-1}$	$0{,}779 \cdot 10^{-1}$
	5,0	$0{,}734 \cdot 10^{-1}$	$0{,}721 \cdot 10^{-1}$	$0{,}683 \cdot 10^{-1}$	$0{,}621 \cdot 10^{-1}$

Таблица 30

характеристик от критериев Био

	$Bi_q = 10;\ Bi_m = 10$				
$\frac{x}{R}=1{,}00$	$\frac{x}{R}=0$	$\frac{x}{R}=0{,}25$	$\frac{x}{R}=0{,}50$	$\frac{x}{R}=0{,}75$	$\frac{x}{R}=1{,}00$
0,276	0,567	0,594	0,670	0,785	0,924
0,295	0,619	0,643	0,709	0,810	0,932
0,332	0,699	0,717	0,769	0,848	0,944
0,413	0,814	0,825	0,857	0,904	0,963
0,481	0,872	0,880	0,901	0,934	0,973
0,588	0,931	0,935	0,947	0,964	0,985
0,723	0,978	0,979	0,983	0,988	0,995
0,803	0,993	0,993	0,994	0,996	0,998
0,873	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000
0,265	$0{,}714\cdot10^{-1}$	0,134	0,311	0,579	0,898
0,273	0,118	0,177	0,344	0,598	0,901
0,289	0,206	0,259	0,408	0,635	0,907
0,327	0,394	0,433	0,546	0,718	0,926
0,364	0,539	0,568	0,654	0,784	0,943
0,433	0,734	0,751	0,800	0,876	0,967
0,553	0,912	0,918	0,934	0,959	0,989
0,649	0,971	0,973	0,978	0,986	0,996
0,758	0,995	0,995	0,996	0,998	0,999
0,177	0,333	0,181	0,147	$0{,}953\cdot10^{-1}$	$0{,}515\cdot10^{-1}$
0,148	0,156	$0{,}981\cdot10^{-1}$	$0{,}801\cdot10^{-1}$	$0{,}529\cdot10^{-1}$	$0{,}272\cdot10^{-1}$
0,125	$0{,}874\cdot10^{-1}$	$0{,}619\cdot10^{-1}$	$0{,}508\cdot10^{-1}$	$0{,}339\cdot10^{-1}$	$0{,}169\cdot10^{-1}$
$0{,}901\cdot10^{-1}$	$0{,}397\cdot10^{-1}$	$0{,}313\cdot10^{-1}$	$0{,}258\cdot10^{-1}$	$0{,}174\cdot10^{-1}$	$0{,}841\cdot10^{-2}$
$0{,}505\cdot10^{-1}$	$0{,}124\cdot10^{-1}$	$0{,}101\cdot10^{-1}$	$0{,}830\cdot10^{-2}$	$0{,}561\cdot10^{-2}$	$0{,}569\cdot10^{-2}$
$0{,}777\cdot10^{-1}$	0,421	0,347	0,274	0,167	$0{,}357\cdot10^{-1}$
$0{,}751\cdot10^{-1}$	0,330	0,268	0,214	0,132	$0{,}362\cdot10^{-1}$
$0{,}723\cdot10^{-1}$	0,254	0,205	0,164	0,102	$0{,}303\cdot10^{-1}$
$0{,}661\cdot10^{-1}$	0,147	0,118	$0{,}950\cdot10^{-1}$	$0{,}592\cdot10^{-1}$	$0{,}184\cdot10^{-1}$
$0{,}539\cdot10^{-1}$	$0{,}486\cdot10^{-1}$	$0{,}391\cdot10^{-1}$	$0{,}314\cdot10^{-2}$	$0{,}196\cdot10^{-1}$	$0{,}614\cdot10^{-2}$

стики массопереноса (рис. 34 и 35). Для всех рассчитанных значений Bi_q кривая скорости сушки оказалась единой (рис. 36).

Критерии поверхностного тепло- и массообмена, как это следует из рисунка 37, с ростом $\overline{\Theta}$ увеличиваются для Bi_m и уменьшаются для Bi_q. Интенсивность изменения их величин приблизительно одинакова. Экспериментальные данные П. Д. Лебедева, а также А. Ф. Чижского для Bi_m достаточно хорошо подтверждают полученные результаты. С ростом средней безразмерной температуры наблюдается обратная картина: Bi_m уменьшается, а Bi_q увеличивается с ростом $\overline{T}$. Тепло- и массообменный критерии Био в реальных условиях не являются независимыми друг от друга. В математической форме взаимосвязь выражена посредством уравнений теплового и массового балансов. С изменением теплообменного критерия Био меняется массообменный критерий Био, при

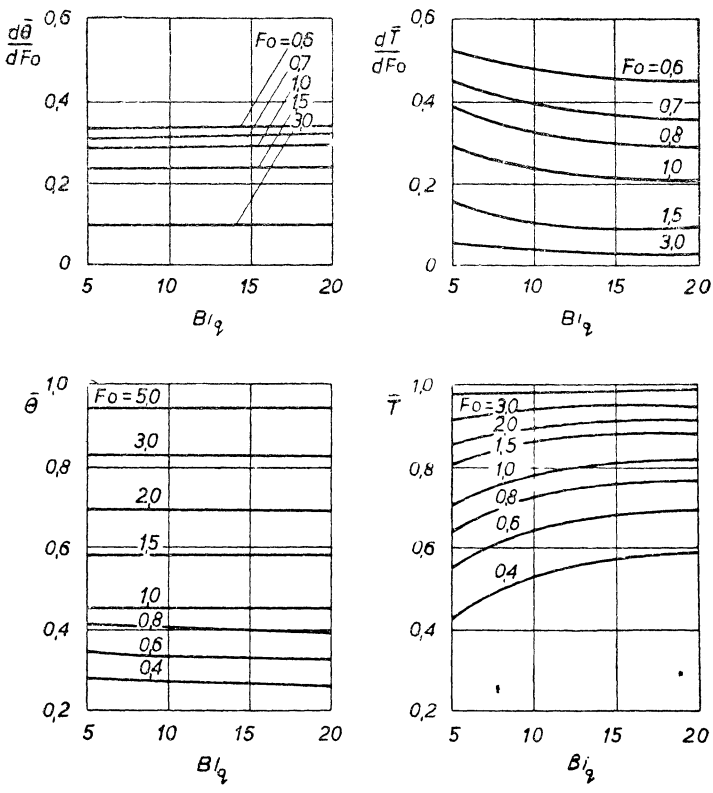


Рис. 34. Зависимость потенциалов переноса тепла и вещества в неограниченной пластине от Bi_q.

этом их численные значения имеют приблизительно один порядок. С ростом обоих критериев Био температура значительно увеличивается, скорость прогрева интенсифицируется и при меньшем $\bar{\Theta}$ наступает стационарный режим. Сушка идет более быстро и глубоко.

К критериям тепло- и массопереноса относятся критерии Коссовича (Ко) и Поснова (Рп). Своими особенностями они напоминают критерии Био, но в отличие от последних характеризуют внутренние переносы тепла и вещества без

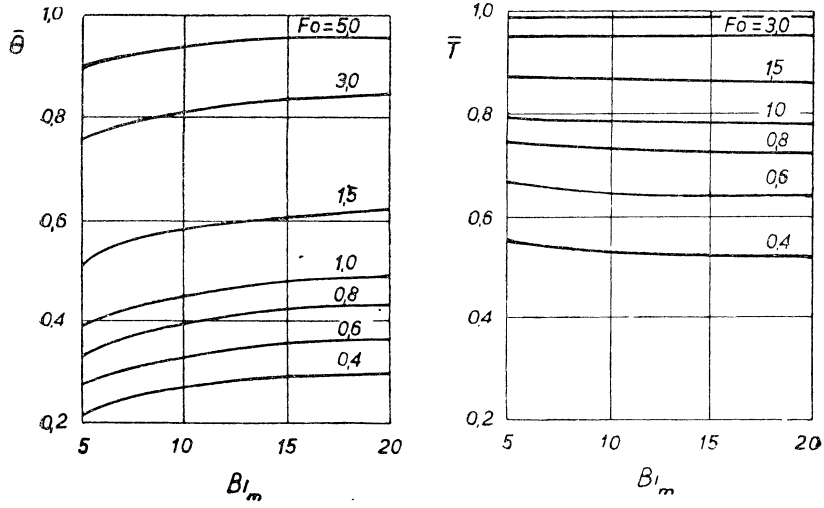


Рис. 35. Кинетика тепло- и массообмена неограниченной пластины в зависимости от Bi_m.

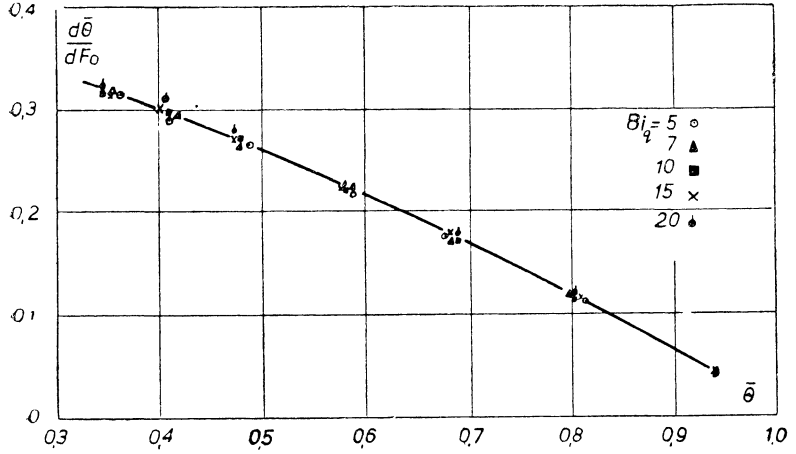


Рис. 36. Зависимость скорости сушки от Bi_q.

определенного воздействия на процесс внешней среды. Критерий Коссовича является аналогом теплообменного критерия Био, а критерий Поснова—аналогом Bi_m. Критерий Рп влияет только на поля потенциалов массопереноса, в то время как Ко—на поля температур (рис. 38). С ростом Рп и Ко соответственно линейно уменьшаются безразмерные (средние и локальные) потенциал переноса вещества и температура. Линейность строго выдерживается при всех зна-

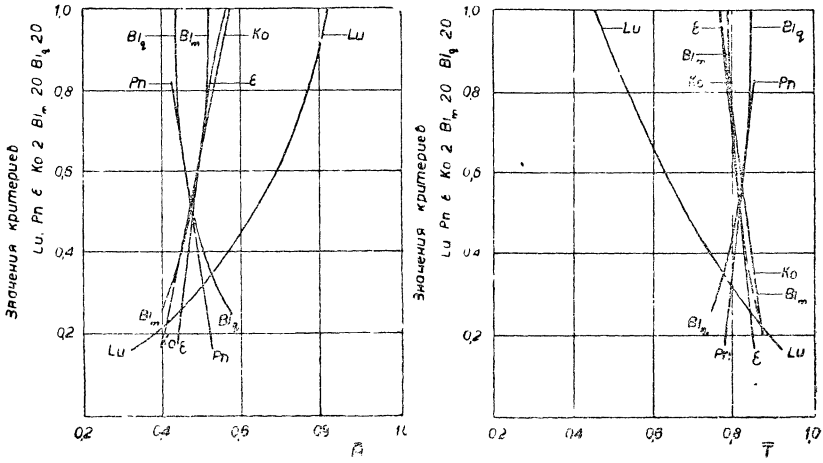


Рис. 37. Влияние на критерии тепло- и массообмена $\bar{T}$ и $\bar{\Theta}$.

чениях Fo. При уменьшении критерия Рп вместе с ускорением сушки улучшаются температурные условия, так как процесс проходит при более низких температурах материала. Расчеты показывают, что с уменьшением влажности имеет место резкое падение критерия Рп (см. рис. 37). Такое поведение Рп соответствует и подтверждается опытами. Критерий Коссовича с ростом $\bar{\Theta}$ и с уменьшением $\bar{T}$ растет. Зависимость критериев тепло- и массопереноса от $\bar{T}$ и $\bar{\Theta}$ носит характер противоположный зависимостям от тех же величин критериев тепло- и массообмена.

Выясненный характер зависимости тепло- и массообмена от критериев Bi_m и Рп дает возможность объяснить найденный Лебедевым способ обработки экспериментальных данных по скорости сушки. П. Д. Лебедев показал, что для любого способа сушки $\frac{d\bar{\Theta}}{d\,\mathrm{Fo}}$ однозначно определяется двумя параметрами: отношением $\frac{Bi_m}{Pn}$ и удаляемой влажностью $(1-\bar{u})$. Из разобранного выше следует, что поверхностный массообмен обусловливается критерием Bi_m, а внутренний—

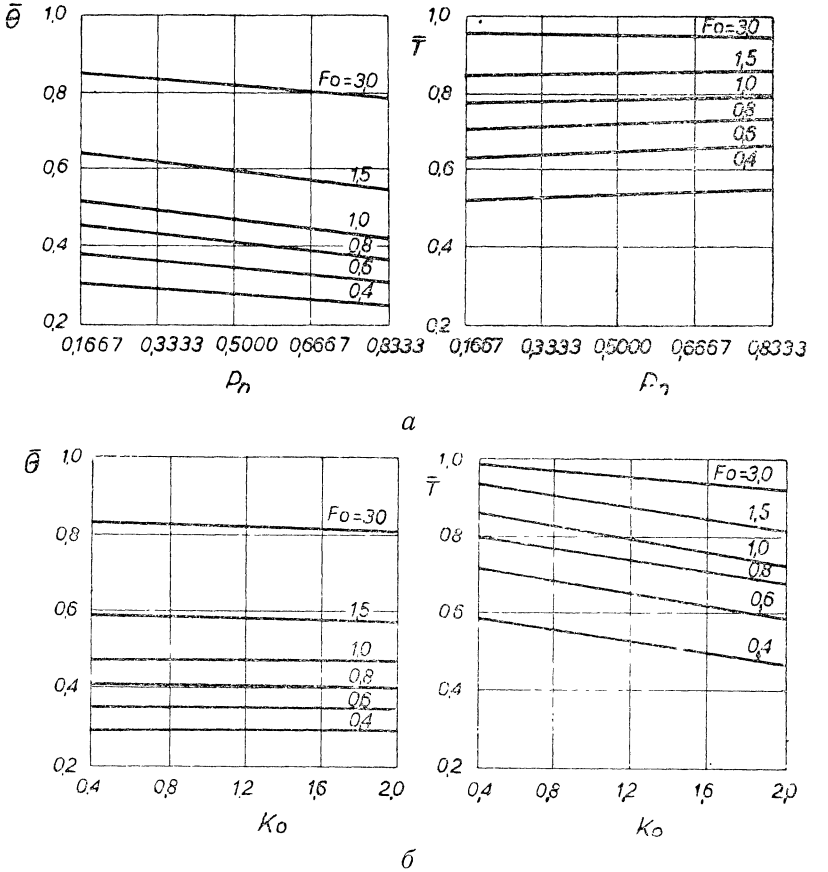


Рис. 38. Зависимость потенциалов переноса:
а—от Рп, *б*—от Ко.

критерием Рп. Следовательно, совокупность критериев Bi_m и Рп полностью определяют массообмен в теле.

Значит, Θ и $\frac{d\Theta}{d\,Fo}$ как величины, характеризующие массообменные процессы, должны полностью описываться совокупностью критериев Bi_m и Рп. Эта зависимость должна быть приемлемой для различных способов сушки, так как механизм тепло- и массопереноса для них одинаков.

Исходя из проведенного анализа влияния критериев подобия на тепло- и массообмен, можно считать, что для группировки экспериментальных данных по скорости прогрева влажного материала аналогичную роль должна сыграть совокупность критериев Bi_q и Ко, т. е. $\frac{Bi_q}{Ko}$. Последнее

следует из того, что критериями Bi_q и Ко в основном обусловливаются теплообменные процессы как на поверхности материала, так и в его толще.

Критерий фазового перехода ε на процесс тепло- и массопереноса оказывает такое же влияние, как критерий Коссовича. Отличие состоит в интенсивности воздействия на тепловые характеристики: влияние ε менее значительно, чем Ко. Сходство графического отображения тепло- и массообменных характеристик критериями ε и Ко, а также анализ общих решений говорит о существовании функциональной зависимости одного критерия от другого.

В связи с разбором критерия ε представляет интерес оценить влияние члена характеризующего фазовый переход (внутреннее испарение) $\frac{c'_{\text{т}}\varepsilon\rho}{c_q}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$ (см. уравнение (I)) на распределение потенциалов переноса тепла и вещества, а также на скорость их изменения. Аналитически оценить влияние этого члена можно путем сравнения результатов расчета системы уравнений (I)—(VI) с отрицательными и положительными знаками при $\frac{c'_{\text{т}}\varepsilon\rho}{c_q}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$. В этом случае разность результатов будет давать нам удвоенное значение члена фазового перехода. Проведенные расчеты показывают, что влияние двойного члена фазового перехода в отдельные характеристики составляет:

Таблица 31

Для зависимости от критерия	Ср. арифм. % влияния			
	$\overline{T}$	$\overline{\theta}$	$\frac{d\overline{T}}{d\,\text{Fo}}$	$\frac{d\overline{\theta}}{d\,\text{Fo}}$
Lu	20 (13 ÷ 25)	4 (1 ÷ 6)	2 (− 4 ÷ + 7)	10 (3—16)
Bi_q	15 (12 ÷ 21)	4 (4)	5 (2—7)	9
Bi_m	20 (19 ÷ 21)	4 (3 ÷ 6)	8 (4 ÷ 12)	9 (8 ÷ 11)
Pn	21 (24 ÷ 18)	4 (0 ÷ 7)	6 (− 8 ÷ 22)	11 (5 ÷ 16)
Ко	21 (6 ÷ 36)	3 (− 2 — + 8)	6 (1—13)	12 (8 ÷ 16)
Среднее влияние	19,4	3,8	5,4	10,2

Следовательно, наиболее существенное влияние этот член оказывает на температурное поле (в общем баланс влияния составляет 10%), но почти не сказывается на поле потенциала вещества (2%) и скорости прогрева материала (3%). Доля внутреннего фазового перехода в безразмерной скорости сушки также весьма мала и составляет 5%.

Если тепло- и массообмен происходит в среде с переменной температурой, то в общем решении появляется критерий Предводителева (Pd), характеризующий интенсивность изменения температуры среды. Сделаем краткий анализ влияния критерия Pd на тепло- и массоперенос при линейном законе уменьшения температуры теплоносителя с течением времени.

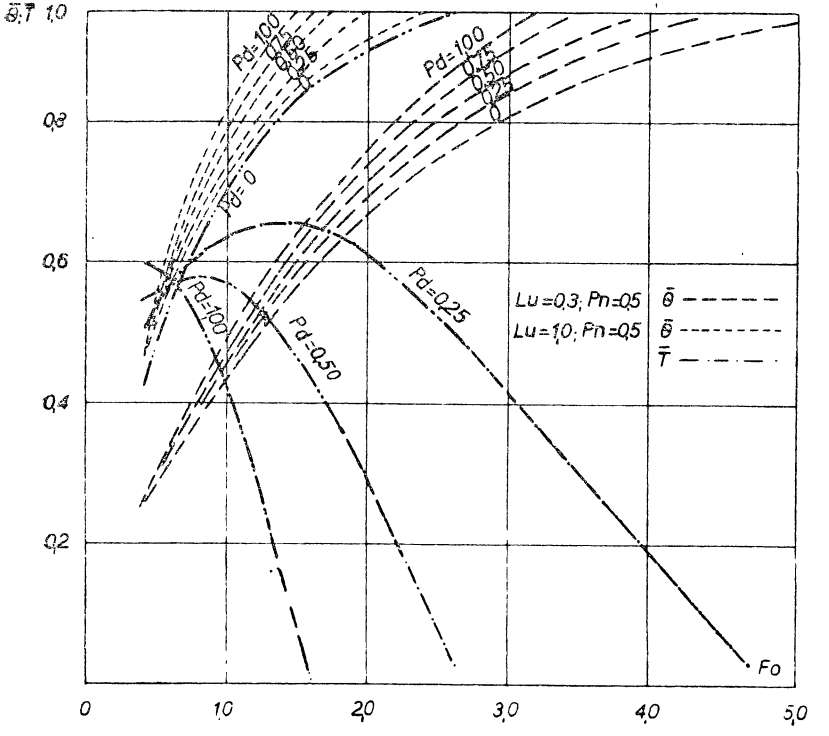


Рис. 39. Зависимость потенциалов переноса от Pd и Fo.

Безразмерная температура с ростом Fo вначале увеличивается, достигает максимума (T_{max}) и затем начинает падать (рис. 39). Чем больше значение Pd, тем раньше (при меньших Fo и $\bar{\theta}$) наступает максимум температуры материала.

До $T = T_{max}$ температура на поверхности повышается значительно интенсивнее, чем в центре материала. После прохождения T_{max} поверхностный слой тела начинает остывать, так как температура среды к этому времени снижается ниже температуры материала. Однако прогрев центра ввиду $t_п > t_ц$ продолжается. Как только $t_ц \approx t_п$ в охлаждение включаются все слои материала. Знание момента наступления максимальной температуры и ее абсолютное значение важно для правильной организации процесса сушки. В целях предотвращения конденсации теплоносителя на материале к моменту $Fo_{T_{max}}$ процесс сушки рационально прекратить.

Скорость прогрева материала с ростом Pd убывает по линейному закону. Изменение потенциала переноса вещества и скорости сушки от критерия Предводителева мало: с ростом Pd и Fo они увеличиваются. Так при Fo = 0,4 увеличение скорости сушки от Pd = 0,25 до Pd = 1,0 произошло на 8,5%, а изменение потенциала вещества ($\bar{\theta}$)—на 3,5%. Соответственно для Fo = 0,8 имеем 11,8% и 5,3%. С ростом Lu указанная зависимость $\bar{\theta}$ от Pd сохраняется, но находится при больших значениях $\bar{\theta}$.

Влияние на тепло- и массоперенос параметрических критериев неравномерности начального распределения температуры и потенциала переноса вещества сказывается лишь до определенного значения Fo. С необходимой для практики точностью допустимо пренебречь влиянием параметрического критерия W на массообменные характеристики тепло- и массопереноса (начиная с Fo $\geqslant$ 1,0). Влияние критерия V на распределение потенциалов переноса очень существенно, и поэтому до значения $\bar{\theta}_1 = 0{,}7$ и Fo = 2,5 при обработке экспериментальных данных его необходимо учитывать.

В заключение рассмотрим влияние формы тела на ход процесса тепло- и массопереноса. Из рисунка 40 видно, что с ростом фактора формы Г средняя температура тела снижается при одном и том же массосодержании материала. Скорость сушки на всем протяжении процесса значительно выше для шара, чем для неограниченной пластины. Падение скоростей прогрева и сушки с ростом $\bar{\theta}$ также более интенсивно для тел с большим значением Г. Таким образом, увеличение Г значительно ускоряет процесс сушки и уменьшает среднюю температуру материала. Поэтому рациональнее сушить влажное тело в форме шара, чем в форме цилиндра, а тела в в форме цилиндра лучше сушить, чем в форме пластины.

В силу характера влияния отдельных критериев на тепло- и массообменные процессы, при описании тепло- и массопереноса представляется возможным пренебречь частью критериев и тем самым значительно упростить рассматриваемую модель.

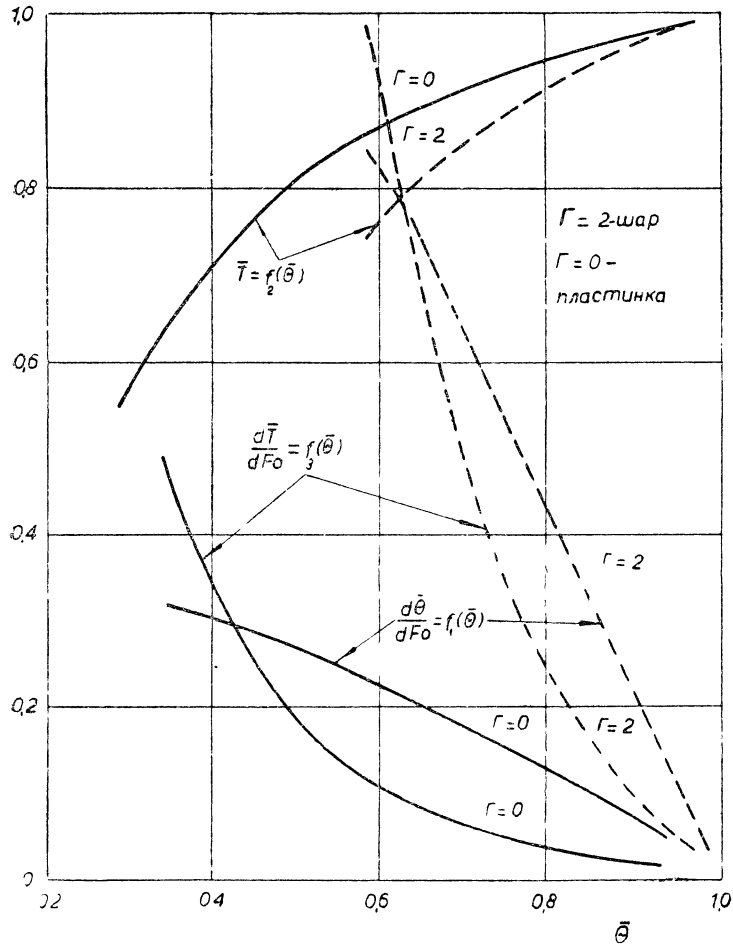


Рис. 40. Влияние фактора формы на внутренний тепло- и массообмен.

Так, упрощенные критериальные уравнения для средних характеристик можно представить в следующем виде:

$$\bar{T} = \bar{T}\left(\mathrm{Fo}, \mathrm{Lu}, \frac{\mathrm{Bi}_q}{\mathrm{Ko}}, \varepsilon, \mathrm{Pd}, V, W\right),$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}\left(\mathrm{Fo}, \mathrm{Lu}, \frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Pn}}, \mathrm{Pd}, V\right),$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\,\mathrm{Fo}} = \varphi_1\left(\mathrm{Fo}, \mathrm{Lu}, \frac{\mathrm{Bi}_q}{\mathrm{Ko}}, \varepsilon, \mathrm{Pd}, V, W\right),$$

$$\frac{d\bar{\Theta}}{d\,\mathrm{Fo}} = \varphi_2\left(\mathrm{Fo}, \mathrm{Lu}, \frac{\mathrm{Bi}_m}{\mathrm{Pn}}, \mathrm{Pd}, V\right).$$

Если температура среды постоянна во времени, то $\mathrm{Pd} = 0$. При постоянном начальном распределении температуры и потенциала переноса вещества $V = 0$, $W = 0$. В случае стационарности процесса тепло- и массопереноса $\mathrm{Fo} = \infty$.

§ 7. Тепло- и массообмен в слое влажного материала

Система дифференциальных уравнений (I)—(VI) по своему существу описывает перенос тепла и вещества в одиночном теле. Представляет интерес обобщить эту систему уравнений на тот случай, когда происходит процесс тепло- и массообмена в слое. Такая система прежде всего позволяет отказаться от ряда ограничений, налагавшихся на аналитическое описание слоевых процессов. В большинстве работ по теплообмену и сушке частицы слоя принимались настолько малыми, или теплопроводность и потенциалопроводность в них столь большой, что градиентами потенциалов переноса тепла и вещества в частицах пренебрегали. В результате слой влажного материала становился сплошной средой с непрерывно и односторонне меняющимися температурой и потенциалом вещества. Действительные процессы большей частью протекают в слое, элементы которого не являются малыми по сравнению с размером слоя. Если к тому же температура теплоносителя велика, то значительны в материале градиенты потенциалов переноса; тогда модель слоя в виде сплошной среды становится неправильной. Обобщение системы (I)—(VI) должно заключаться в установлении связи между температурой поверхности тела и температурой теплоносителя. Указанный подход позволяет вместе с тем более полно и правильно отразить изменение температуры среды, поэтому данный параграф можно считать дальнейшим углублением материала, изложенного в § 2 и 3.

а) *Постановка задачи. Система дифференциальных уравнений.* Имеем слой влажного материала, состоящего из частиц сферической формы радиусом R. Через слой в направлении η продувается теплоноситель с постоянной скоростью v. Температура до слоя t_c°. Начальные потенциалы переноса в частицах слоя (т. е. до соприкосновения частиц с теплоносителем) t_0 и θ_0. Порозность слоя P.

Пренебрегая влиянием на поле потенциалов (излучением внутри слоя и контактной теплопроводностью между частицами) систему уравнений переноса можно записать так:

$$\frac{\partial [rt(r,\tau)]}{\partial \tau} = a_q \frac{\partial^2 [r\,t(r,\tau)]}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon \rho \varepsilon_T'}{c_q} \frac{\partial [r\theta(r,\tau)]}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial [r\theta(r,\tau)]}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 [r\theta(r,\tau)]}{\partial r^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 [rt(r,\tau)]}{\partial r^2},$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r} + \alpha\,[t_c(\eta,\tau) - t(R,\tau)] - (1-\varepsilon)\,\rho\, q_m = 0, \quad (7.1)$$

$$\lambda_m \left[\frac{\partial \vartheta(R,\tau)}{\partial r} + \delta\,\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r}\right] + q_m = 0,$$

$$\frac{\partial t_c(\eta,\tau)}{\partial \tau} + v\,\frac{\partial t_c(\eta,\tau)}{\partial \eta} + \frac{\alpha F}{c_p \gamma_p p}\,[t_c(\eta,\tau) - t(R,\tau)] = 0,$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta(0,\tau)}{\partial r} = 0$$

при

$$\eta = 0 \qquad t_c = t_c^{\circ} = \text{const},$$

$$\eta = v\tau \qquad t = t_0 = \text{const}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}.$$

б) *Критериальные уравнения для тепло- и массообмена в слое.* Из системы уравнений (7.1) можно получить новые критерии подобия:

критерий гомохронности, характеризующий масштабное преобразование времени,

$$\text{Ho} = \frac{v\tau}{R};$$

критерий Маргулиса, являющийся мерой отношения удельного тепла, переданного материалу, к теплу, перенесенному теплоносителем через слой,

$$\text{Mr} = \frac{\alpha}{v\, c_p \gamma_p};$$

критерий Миниовича, состоящий из величин, характеризующих геометрию слоя,

$$\text{Mn} = \frac{F R}{p}.$$

Так как $\text{Ho} = \text{FoPe}$, где $\text{Pe} = \dfrac{v R}{a_q}$ — критерий Пекле, то критериальные уравнения для слоя влажного материала можно написать следующим образом:

$$T = T\,(\text{Fo}, \text{Lu}, \text{Bi}_q, \text{Bi}_m, \text{Ko}, \text{Pn}, \varepsilon, \text{Pe}, \text{Mr}, \text{Mn}, W, V, x/R, \eta/R), \quad (7.2)$$

$$\vartheta = \vartheta\,(\text{Fo}, \text{Lu}, \text{Bi}_q, \text{Bi}_m, \text{Ko}, \text{Pn}, \varepsilon, \text{Pe}, \text{Mr}, \text{Mn}, W, V, x/R, \eta/R). \quad (7.3)$$

Количество независимых критериев в уравнениях (7.2) и (7.3) значительно меньше, так как между отдельными критериями существует связь.

в) *Решения для поля температур в материале и теплоносителе при* $\rho = 0$.

$$T = \frac{t(r,\tau) - t_0}{t_c^{\circ} - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \mathrm{MrMn}\frac{\eta}{R}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin\mu_n \dfrac{r}{R}}{\mu_n \dfrac{r}{R}} \exp\left[-\mu_n^2 K_3 \left(\mathrm{PeFo} - \frac{\eta}{R}\right)\right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \frac{\sin\mu_n}{\mu_n} \left\{\left[\frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_q(\mathrm{Bi}_q - 1)} + \right.\right.$$

$$\left. + \mu_n^2 K_3 \left(\mathrm{PeFo} - \frac{\eta}{R}\right) + \frac{\mathrm{Bi}_q}{2}\right] \times$$

$$\times \frac{\sin\mu_n \dfrac{r}{R}}{\mu_n \dfrac{r}{R}} - \cos\mu_n \frac{r}{R}\Bigg\} \mathrm{MrMn}\frac{\eta}{R} \exp \times$$

$$\times\left[-\mu_n^2 K_3 \left(\mathrm{Pe\,Fo} - \frac{\eta}{R}\right)\right] + \ldots$$

$$T_c = \frac{t_c(\eta,\tau) - t_0}{t_c^0 - t_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{MrMn}\frac{\eta}{R} \exp \times$$

$$\times\left[-\mu_n^2 K_3 \left(\mathrm{PeFo} - \frac{\eta}{R}\right)\right] + \ldots$$

Здесь

$$A_n = \frac{2(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n} = \frac{2\,\mathrm{Bi}_q\sqrt{\mu_n^2 + (\mathrm{Bi}_q - 1)^2}}{\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_q(\mathrm{Bi}_q - 1)},$$

$$K_3 = \frac{\mathrm{Mr}}{\mathrm{Bi}_q}\frac{c_p\gamma_p}{c_q\gamma_0},$$

μ_n — корни характеристического уравнения

$$\mathrm{tg}\,\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}_q - 1}.$$

ГЛАВА III

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЕЩЕСТВА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

В некоторых процессах при определении коэффициентов тепло- и массопереноса в тепловых и химических аппаратах приходится поддерживать постоянные значения потенциалов переноса тепла и вещества на поверхности материала. Математическим аналогом рассматриваемых условий являются граничные условия первого рода. Решения системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса (I), (II) в этом случае можно получить из решений соответствующих задач предыдущей главы, положив критерии Bi_q и Bi_m равными бесконечности. Решения (I), (II) при условии постоянства значения интегрального потенциала переноса вещества

$$\frac{\Gamma+1}{R^{\Gamma+1}}\int_0^R \xi^{\Gamma}\theta(\xi,\tau)\,d\xi=\theta_0=\text{const} \qquad \text{(VII)}$$

и на поверхности тела, постоянства температуры

$$t(R,\tau)=0, \qquad \text{(VIII)}$$

приведены ниже. Результаты § 1 получены на основе решений С. П. Кузнецова, решения § 2 г даны Е. И. Сизяковой, а § 2 а, в—С. П. Кузнецовым.

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества при неизменном массосодержании тела

а) *Решение для неограниченной пластины* ($\xi=x$, $\Gamma=0$, $t(x,0)=t_0=\text{const}$, $\theta(x,0)=\theta_0=\text{const}$).
Общее решение (I), (II) в изображениях можно записать так (см. гл. II, § 1):

$$t_L(x,s)=\frac{t_0}{s}+B_1\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x+B_2\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x, \qquad (1.1)$$

$$\theta_L(x, s) = \frac{\theta_0}{s} + \frac{c}{\varepsilon\rho} B_1 (1 - \nu_1^2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon\rho} B_2 (1 - \nu_2^2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x, \qquad (1.2)$$

где

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \mathrm{Fe} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right) + (-1)^j \times\right.$$

$$\left.\times \sqrt{\left(1 + \mathrm{Fe} + \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2 - \frac{4}{\mathrm{Lu}}}\,\right],$$

а B_1 и B_2 — постоянные относительно x. Последние определим из граничных условий (VII) и (VIII), которые в изображениях будут иметь вид

$$\frac{1}{R}\int_0^R \theta(x, s)\, dx = \frac{\theta_0}{s}, \qquad (1.3)$$

$$t_L(R, s) = 0. \qquad (1.4)$$

Удовлетворяя решения (1.1), (1.2) условиям (1.3), (1.4), получим

$$\nu_2 (1 - \nu_1^2) B_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R + (1 - \nu_2^2) \nu_1 B_2 \operatorname{sh} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R = 0, \qquad (1.5)$$

$$B_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R + B_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R + \frac{t_0}{s} = 0. \qquad (1.6)$$

Из равенства (1.6) определяем B_1 и подставляем его в (1.5), имеем

$$B_2 = \nu_2 (1 - \nu_1^2) t_0 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \times$$

$$\times s \left[\nu_1 (1 - \nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \right.$$

$$\left. - \nu_2 (1 - \nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right]^{-1}.$$

Тогда

$$B_1 = \nu_1 (1 - \nu_2^2) t_0 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \times$$

$$\times s \left[\nu_1 (1 - \nu_2^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \right.$$

$$\left. - \nu_2 (1 - \nu_1^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right]^{-1}.$$

Следовательно, изображения функций распределения потенциалов переноса принимают вид:

$$t_L(x, s) - \frac{t_0}{s} = -t_0 \frac{K_4 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x -}{s \left[K_4 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \right.}$$

$$\frac{- \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x}{\left. - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right]} = -t_0 \frac{\Phi_1(s)}{\psi(s)}, \qquad (1.7)$$

$$\frac{\Theta_0}{s} - \Theta_L(x, s) = \frac{c}{\varepsilon \rho} (1 - \nu_2^2) t_0 \frac{\frac{\nu_1}{\nu_2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \times}{s \left[K_4 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \times \right.}$$

$$\frac{\times \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 x - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 x}{\left. \times \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right]} =$$

$$= \frac{c t_0}{\varepsilon \rho} (1 - \nu_2^2) \frac{\Phi_2(s)}{\psi(s)}, \qquad (1.8)$$

где

$$K_4 = \frac{\nu_1}{\nu_2} \left(\frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2} \right).$$

Для определения оригиналов $t(x, \tau)$ и $\theta(x, \tau)$ воспользуемся теоремой разложения, так как выражения (1.7) и (1.8)

могут быть представлены в виде отношений обобщенных полиномов относительно s, где степень полиномов в числителе на единицу меньше степени полинома в знаменателе.

Найдем корни $\psi(s)$, для чего приравняем его нулю, $\psi(s)=0$. Имеем:

1) нулевой корень $s=0$,

2) корни, удовлетворяющие уравнению

$$K_4 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R = 0.$$

Последнее уравнение может быть представлено в виде

$$K_4 \sin N\mu \cos\mu - \sin\mu \cos N\mu = 0, \tag{1.9}$$

где

$$\mu = i \sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R, \quad N = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Уравнение (1.9) имеет бесчисленное множество действительных простых корней, это общие корни системы уравнений (1.10):

$$\left.\begin{aligned} \sin\mu &= 0 \\ \sin N\mu &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.10}$$

а также корни уравнения

$$\operatorname{ctg} N\mu - K_4 \operatorname{ctg}\mu = 0. \tag{1.11}$$

Система уравнений (1.10) будет иметь общие корни только в случае, если N есть рациональная дробь. Значения корней характеристического уравнения (1.11) можно получить графоаналитическим способом. Следовательно, для уравнения (1.7) теорема разложения запишется следующим образом:

$$t(x,\tau) = -t_0 \left[\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_l)}{\psi'(s_l)} e^{s_l \tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau} \right]. \tag{1.12}$$

Чтобы определить первое слагаемое (1.12), представим отношение $\dfrac{\Phi_1(s)}{\psi(s)}$ в виде

$$\frac{\Phi_1(s)}{\psi(s)} = \frac{K_4 \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 x \right)^2 + \ldots \right] -}{s \left\{ K_4 \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R \right)^2 + \ldots \right] - \right.}$$

$$\frac{-\left[1+\frac{1}{2!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 x\right)^2+\ldots\right]\times}{-\left[1+\frac{1}{2!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)^2+\ldots\right]\times}$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R}, \qquad (1.13)$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R}\right\}$$

где

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R}=\frac{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)^2+\ldots}{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)^2+\ldots}\,\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Продифференцировав знаменатель (1.13) по s и перейдя к пределу этого выражения при $s\to 0$, получим

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)}=1.$$

Во втором слагаемом (1.12) суммирование ведется по общим корням системы (1.10). Обозначим общие корни через $\mu_l=\nu_1 l\pi$, при $l=1, 2, 3\ldots$ Тогда, переходя от гиперболических функций к тригонометрическим, будем иметь

$$\Phi_1(s_l)=-i\left(K_4\sin N\mu_l\cos\mu_l\frac{x}{R}-\sin\mu_l\cos N\mu_l\frac{x}{R}\right)=$$

$$=-i\left(K_4\sin\nu_2 l\pi\,\cos\nu_1 l\pi\,\frac{x}{R}-\right.$$

$$\left.-\sin\nu_1 l\pi\,\cos\nu_2 l\pi\,\frac{x}{R}\right)=0,$$

и

$$\psi'(s_l)=-i\left(K_4\frac{N\mu_l}{2}\cos N\mu_l\cos\mu_l-\frac{\mu_l}{2}\cos\mu_l\cos N\mu_l\right)=$$

$$=-i\frac{\mu_l}{2}(K_4N-1)\cos N\mu_l\cos\mu_l\neq 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_l)}{\psi'(s_l)} \exp(s_l \tau) = 0.$$

В третьем слагаемом суммирование ведется по положительным корням уравнения (1.11) и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_4 \sin N\mu_n \cos \mu_n \frac{x}{R} -}{\mu_n [(NK_4 - 1) \cos \mu_n \cos N\mu_n +}$$

$$\frac{- \sin \mu_n \cos N\mu_n \frac{x}{R}}{+ (N - K_4) \sin \mu_n \sin N\mu_n]} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right).$$

Подставляем найденные значения слагаемых в равенство (1.12), тогда для распределения температуры получим

$$\frac{t(x, \tau)}{t_0} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \cos \mu_n \frac{x}{R} - C_{2n} \cos N\mu_n \frac{x}{R} \right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right), \quad (1.14)$$

где

$$C_{1n} = \frac{2K_4 \sin N\mu_n}{\mu_n [(NK_4 - 1) \cos \mu_n \cos N\mu_n + (N - K_4) \sin \mu_n \sin N\mu_n]},$$

$$C_{2n} = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n [(NK_4 - 1) \cos \mu_n \cos N\mu_n + (N - K_4) \sin \mu_n \sin N\mu_n]},$$

μ_n—корни характеристического уравнения (1.11).

Определим распределение потенциала переноса вещества в неограниченной пластине. Так как корни знаменателя (1.8) сохраняются старыми, то теорему разложения можно записать так:

$$\theta_0 - \theta(x, \tau) = \frac{c}{\varepsilon \rho} t_0 (1 - \nu_2^2) \left[\lim_{s \to 0} \frac{\Phi_2(s)}{\psi'(s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_2(s_l)}{\psi'(s_l)} e^{s_l \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_2(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau} \right]. \quad (1.15)$$

Воспользовавшись приемом, аналогичным тому, который мы применяли при вычислении двух первых слагаемых (1.12),

можно показать, что соответствующие слагаемые (1.15) обращаются в нуль. Третье слагаемое дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_2(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{N} \sin N\mu_n \cos \mu_n \frac{x}{R} - \right.}{\mu_n [(NK_4 - 1) \cos \mu_n \cos N\mu_n +}$$

$$\frac{\left. - \sin \mu_n \cos N\mu_n \frac{x}{R}\right] \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right)}{+ (N - K_4) \sin \mu_n \sin N\mu_n}.$$

Таким образом, для поля потенциала переноса вещества окончательно получаем

$$\frac{\theta_0 - \theta(x, \tau)}{\theta_0} =$$

$$= \frac{1 - \nu_2^2}{\varepsilon \mathrm{Ko}_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n}^* \cos \mu_n \frac{x}{R} - C_{2n}^* \cos N\mu_n \frac{x}{R} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right), \qquad (1.16)$$

где

$$C_{1n}^* = \frac{1}{NK_4} C_{1n}, \quad C_{2n}^* = C_{2n},$$

$\mathrm{Ko}_1 = \dfrac{c_{\mathrm{T}}' \theta_0}{c_q t_0}$ — критерий Коссовича,

μ_n—корни характеристического уравнения (1.11).

Средние значения потенциалов переноса определяются соотношениями:

$$\overline{t}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R t(x, \tau)\, dx, \qquad \overline{\theta}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R \theta(x, \tau)\, dx.$$

Для средней безразмерной температуры тела имеем

$$\frac{\overline{t}(\tau)}{t_0} = -\sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right) \qquad (1.17)$$

и для среднего безразмерного потенциала переноса вещества

$$\frac{\theta_0 - \overline{\theta}(\tau)}{\theta_0} = \frac{1 - \nu_2^2}{\varepsilon \mathrm{Ko}_1} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right), \qquad (1.18)$$

где

$$D_n = C_{1n}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - C_{2n}\frac{\sin N\mu_n}{N\mu_n},$$

$$D_n^* = C_{1n}^*\frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - C_{2n}^*\frac{\sin N\mu_n}{N\mu_n}.$$

Локальную и среднюю безразмерную скорости изменения потенциалов переноса получим продифференцировав уравнения (1.14), (1.16)—(1.18) по безразмерному времени, т. е.:

$$\frac{d\left[\frac{t(x,\tau)}{t_0}\right]}{d\,\mathrm{Fo}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\nu_2^1}\left(C_{1n}\cos\mu_n\frac{x}{R} - C_{2n}\cos N\mu_n\frac{x}{R}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right),$$

$$\frac{d\left[\frac{\bar{t}(\tau)}{t_0}\right]}{d\,\mathrm{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}D_n\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right),$$

$$\frac{d\left[\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}\right]}{d\,\mathrm{Fo}} =$$

$$= \frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\left(C_{1n}^*\cos\mu_n\frac{x}{R} - C_{2n}^*\cos N\mu_n\frac{x}{R}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right),$$

$$\frac{d\left[\frac{\bar{\theta}(\tau)}{\theta_0}\right]}{d\,\mathrm{Fo}} = \frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}D_n^*\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right).$$

б) *Решение для шара* ($\xi = r$, $\Gamma = 2$, $t(r, 0) = t_0 = \mathrm{const}$, $\theta(r, 0) = \theta_0 = \mathrm{const}$). Общее решение (I), (II) в изображениях можно представить в виде (см. гл. II, § 1 б):

$$t_L(r, s) = \frac{t_0}{s} + \frac{B_1}{r}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r +$$

$$+\frac{B_2}{r}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r, \qquad (1.19)$$

$$\vartheta_L(r,s)=\frac{\vartheta_0}{s}+\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_1^2)\frac{B_1}{r}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r+$$

$$+\frac{c}{\varepsilon\rho}(1-\nu_2^2)\frac{B_2}{r}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r. \qquad (1.20)$$

Удовлетворяя уравнения (1.19) и (1.20) граничным условиям (VII) и (VIII) в изображениях, получим:

$$B_1\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R+B_2\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R+\frac{Rt_0}{s}=0, \qquad (1.21)$$

$$(1-\nu_1^2)B_1\frac{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R}{\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)^2}+$$

$$+(1-\nu_2^2)B_2\frac{\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R}{\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)^2}=0. \qquad (1.22)$$

Решая совместно (1.21) и (1.22) по отношению к B_1 и B_2, будем иметь

$$B_1=-\frac{K_4}{N}Rt_0\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)\times$$

$$\times s\left[\frac{K_4}{N}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\times\right.$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)-$$

$$-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\times\right.$$

$$\left.\left.\times\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)\right]^{-1},$$

$$B_2 = R t_0 \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \right) \times$$

$$\times s \left[\frac{K_4}{N} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \times \right.$$

$$\times \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right) -$$

$$- \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \times \right.$$

$$\left. \left. \times \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \right) \right]^{-1}.$$

Следовательно, изображения для функций распределения потенциалов переноса тепла и вещества после небольших преобразований запишутся следующим образом:

$$t_L(r, s) - \frac{t_0}{s} = - \frac{R t_0}{r} \times$$

$$\times \frac{\frac{K_4}{N} \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right) \times}{s \left[\frac{K_4}{N} \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \right) \times \right.}$$

$$\times \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 r - \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \right.$$

$$\left. \left. \times \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 r \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_1 R \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, \nu_2 R \Big] = - \frac{R t_0}{r} \frac{\Phi_1(s)}{\psi(s)}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\theta_0}{s} - \theta_L(r, s) = \frac{c}{\varepsilon \rho} \frac{R t_0}{r} \frac{1 - \nu_2^2}{N^2} \times$$

$$\times \frac{\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)\times}{s\left[\frac{K_4}{N}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)\times\right.}$$

$$\times \mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r-N^2\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\right.$$

$$\times \mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 r\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right] =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon\rho}\,\frac{R t_0}{r}\,\frac{(1-\nu_2^2)}{N^2}\,\frac{\Phi_2(s)}{\psi(s)}, \qquad (1.24)$$

где значения $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ и $\psi(s)$ следуют непосредственно из рассмотрения выражений (1.23) и (1.24); K_4 и N определены выше.

Для перехода от операционных решений (1.23) и (1.24) к оригиналам $t(r,\tau)$ и $\theta(r,\tau)$ воспользуемся теоремой разложения. Отношения $\frac{\Phi_1(s)}{\psi(s)}$ и $\frac{\Phi_2(s)}{\psi(s)}$ можно рассматривать как отношения обобщенных полиномов относительно s, к которым применима теорема разложения. Общий знаменатель $\psi(s)$ имеет корни:

а) нулевой корень $s=0$,

б) корни уравнения

$$\frac{K_4}{N}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)\times$$

$$\times \mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R-\right.$$

$$\left.-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R=0,$$

которое может быть также записано в виде

$$\frac{K_4}{N}(\sin N\mu - N\mu\cos N\mu)\sin\mu-(\sin\mu-\mu\cos\mu)\sin N\mu=0,$$

где

$$\mu = i\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R.$$

Последнее уравнение удовлетворяется общими корнями системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu &= 0\\ \sin N\mu &= 0\end{aligned}\right\}, \tag{1.25}$$

если эта система имеет общие корни (т. е. если N—рациональная дробь), и корнями уравнения

$$K_4\,\mu\operatorname{ctg} N\mu - \mu\operatorname{ctg}\mu - \frac{K_4}{N} + 1 = 0. \tag{1.26}$$

Применяя теорему разложения к уравнению (1.23), получим

$$t(r,\tau) - t_0 = -\frac{R\,t_0}{r}\left[\lim_{s\to 0}\frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(s_l)}{\psi'(s_l)}\,e^{s_l\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(s_n)}{\psi'(s_n)}\,e^{s_n\tau}\right]. \tag{1.27}$$

Здесь

s_l—общие корни системы уравнений (1.25),

s_n—корни уравнения (1.26).

Если в отношение $\frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)}$ уравнения (1.27) подставить $s=0$, то получим неопределенность. Поэтому вначале разложим гиперболические функции, входящие в $\Phi_1(s)$ и $\psi(s)$, в бесконечный ряд, затем производим сокращения и в результате будем иметь

$$\frac{\Phi_1(s)}{\psi(s)} = \frac{\dfrac{K_4}{N}\left[\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\dfrac{s}{a_q}\,\nu_2^2R^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right]\times}{s\left[\dfrac{K_4}{N}\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\dfrac{s}{a_q}\,\nu_2^2R^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right]\times}$$

$$\frac{\times\,\nu_2^2-\left[\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\dfrac{s}{a_q}\,\nu_1^2R^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right]\times}{\times\,\nu_2^2-\left[\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\dfrac{s}{a_q}\,\nu_1^2R^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right]\times}$$

$$\times \nu_1^2 \frac{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2\right)^2 r^2+\ldots}{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1\right)^2 r^2+\ldots} \times$$

$$\times \nu_1^2 \frac{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_2 R\right)^2+\ldots}{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)^2+\ldots} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R},$$

где последний сомножитель

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R} = \frac{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 r\right)^2+\ldots}{1+\frac{1}{3!}\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,\nu_1 R\right)^2+\ldots} \frac{r}{R}.$$

Дифференцируя знаменатель полученного отношения по s и переходя к пределу отношения $\frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)}$ при $s \to 0$, для первого слагаемого (1.27) получим

$$\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_1(s)}{\psi'(s)} = \frac{r}{R}.$$

Найдем второе слагаемое (1.27). Общие корни системы уравнений (1.25) имеют вид $\mu_l = \beta l \pi$ при $l = 1, 2, 3 \ldots$, если $N = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\alpha}{\beta}$ — рациональная дробь (α и β — целые числа). Рядом небольших преобразований легко показать, что

$$\Phi_1(s_l) = \mu_l \cos\mu_l \sin N\mu_l \frac{r}{R} - \frac{K_4}{N} N\mu_l \cos N\mu_l \sin\mu_l \frac{r}{R},$$

$$\psi'(s_l) = \frac{1}{2}\mu_l N\mu_l \cos\mu_l \cos N\mu_l \left(1 - \frac{K_4}{N}\right).$$

Так как

$$\cos\mu_l = \cos\beta l\pi = (-1)^{\beta l} \text{ и } \cos N\mu_l = \cos\alpha l\pi = (-1)^{\alpha l},$$

то для второго члена равенства (1.27) окончательно получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(s_l)}{\psi'(s_l)} \exp(s_l \tau) =$$

$$= 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta l} \beta \sin \alpha l \pi \frac{r}{R} - \frac{K_4}{N} (-1)^{\alpha l} \alpha \sin \beta l \pi \frac{r}{R}}{\alpha \beta l \pi (-1)^{\beta l} (-1)^{\alpha l} \left(1 - \frac{K_4}{N}\right)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\beta^2 l^2 \pi^2 a_q \tau}{\nu_1^2 R^2}\right).$$

Для третьего слагаемого (1.27) расчеты дают

$$\Phi_1(s_n) = \frac{K_4}{N} (\sin N\mu_n - N\mu_n \cos N\mu_n) \sin \mu_n \frac{r}{R} -$$

$$- (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) \sin N\mu_n \frac{r}{R},$$

$$\psi'(s_n) = \frac{1}{2} \left[\mu_n \frac{K_4}{N} \cos \mu_n (\sin N\mu_n - N\mu_n \cos N\mu_n) - \right.$$

$$- N\mu_n \cos N\mu_n (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) +$$

$$\left. + (NK_4 - 1) \mu_n^2 \sin \mu_n \sin N\mu_n \right].$$

Заменяя в равенстве (1.27) каждое из слагаемых соответствующими значениями, полученными выше, для распределения потенциала переноса тепла в шаре будем иметь

$$\frac{t(r, \tau)}{t_0} =$$

$$= -\left[\sum_{l=1}^{\infty} \left(E_{1l} \frac{\sin \alpha \pi l \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - E_{2l} \frac{\sin \beta \pi l \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{\beta^2 \pi^2 l^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - C_{2n} \frac{\sin N\mu \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\,\mathrm{Fo}\right)\Bigg], \qquad (1.28)$$

где

$$E_{1l} = \frac{2N}{(-1)^{\alpha l}(N-K_4)\,\alpha\pi l}, \qquad E_{2l} = \frac{2K_4}{(-1)^{\beta l}(N-K_4)\,\beta\pi l},$$

$$C_{1n} = \frac{2\,\dfrac{K_4}{N}\,\varphi(N\mu_n)}{\psi_n}, \qquad C_{2n} = \frac{2\,\varphi(\mu_n)}{\psi_n},$$

$$\varphi(N\mu_n) = \sin N\mu_n - N\mu_n \cos N\mu_n,$$

$$\varphi(\mu_n) = \sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n,$$

$$\psi_n = \frac{K_4}{N}\,\mu_n\cos\mu_n\,\varphi(N\mu_n) - N\mu_n\cos N\mu_n\;\varphi(\mu_n) +$$

$$+ (NK_4 - 1)\,\mu_n^2\sin\mu_n\,\sin N\mu_n.$$

Функцию распределения потенциала переноса вещества в шаре возможно получить способом, аналогичным использованному при получении функции распределения температуры (1. 28).

Решение дает нам

$$\frac{\theta_0 - \theta(r,\,\tau)}{\theta_0} = \frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1}\Bigg[\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg(E_{1l}^*\,\frac{\sin\alpha\pi\,l\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}} -$$

$$- E_{2l}^*\,\frac{\sin\beta\pi\,l\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}\Bigg)\exp\left(-\frac{\beta^2\pi^2 l^2}{\nu_1^2}\,\mathrm{Fo}\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(C_{1n}^*\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}} - C_{2n}^*\,\frac{\sin N\mu_n\dfrac{r}{R}}{\dfrac{r}{R}}\Bigg)\exp\times$$

$$\times\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\,\mathrm{Fo}\right)\Bigg], \qquad (1.29)$$

где

$$E_{1l}^{*} = E_{1l}, \quad E_{2l}^{*} = \frac{1}{NK_4} E_{2l},$$

$$C_{1n}^{*} = \frac{1}{NK_4} C_{1n}, \quad C_{2n}^{*} = C_{2n}.$$

В первом слагаемом суммирование ведется по общим корням уравнения (1.25), а во втором—по корням характеристического уравнения (1.26). α и β—целые числа, причем $N = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\alpha}{\beta}$ — рациональная дробь.

Средние значения потенциалов переноса для тела в форме шара определим согласно соотношениям

$$\bar{t}(\tau) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 t(r, \tau)\, dr, \qquad \bar{\theta}(\tau) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 \theta(r, \tau)\, dr.$$

Для безразмерных значений потенциалов имеем:

$$\frac{t(\tau)}{t_0} = -\left[\sum_{l=1}^{\infty} F_l \exp\left[-\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right)^2 \mathrm{Fo}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right)\right], \tag{1.30}$$

$$\frac{\theta_0 - \theta(\tau)}{\theta_0} = \frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon \mathrm{Ko}_1}\left[\sum_{l=1}^{\infty} F_l^{*} \exp\left[-\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right)^2 \mathrm{Fo}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{*} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right)\right], \tag{1.31}$$

где

$$F_l = \frac{3(\sin\alpha\pi l - \alpha\pi l \cos\alpha\pi l)}{(\alpha\pi l)^2} E_{1l} - \frac{3(\sin\beta\pi l - \beta\pi l\cos\beta\pi l)}{(\beta\pi l)^2} E_{2l},$$

$$F_l^{*} = \frac{3(\sin\alpha\pi l - \alpha\pi l\cos\alpha\pi l)}{(\alpha\pi l)^2} E_{1l}^{*} -$$

$$- \frac{3(\sin \beta\pi l - \beta\pi l \cos \beta\pi l)}{(\beta\pi l)^2} E^*_{2l},$$

$$D_n = \frac{3(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n^2} C_{1n} -$$

$$- \frac{3(\sin N\mu_n - N\mu_n \cos N\mu_n)}{(N\mu_n)^2} C_{2n},$$

$$D^*_n = \frac{3(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n^2} C^*_{1n} -$$

$$- \frac{3(\sin N\mu_n - N\mu_n \cos N\mu_n)}{(N\mu_n)^2} C^*_{2n}.$$

Безразмерную скорость изменения потенциалов переноса (локальную и среднюю) получим дифференцированием (1.28)—(1.31) по безразмерному времени (Fo):

$$\frac{d}{d\mathrm{Fo}}\left[\frac{t(r,\tau)}{t_0}\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right)^2 \left(E_{1l} \frac{\sin \alpha\pi l \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - \right.$$

$$\left. - E_{2l} \frac{\sin \beta\pi l \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \exp\left[-\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right)^2 \mathrm{Fo}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \left(C_{1n} \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} - C_{2n} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin N\mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right),$$

$$\frac{d}{d\mathrm{Fo}}\left[\frac{\bar{t}(\tau)}{t_0}\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right) F_l \exp\left[-\left(\frac{\beta\pi l}{\nu_1}\right)^2 \mathrm{Fo}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\nu_1^2} D_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2} \mathrm{Fo}\right),$$

$$\frac{d}{d\,\mathrm{Fo}}\left[\frac{\theta(r,\tau)}{\theta_0}\right]=\frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\beta\pi\,l}{\nu_1}\right)^2\left(E^*_{1\,l}\frac{\sin\alpha\pi\,l\,\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-E^*_{2\,l}\frac{\sin\beta\pi\,l\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}\right)\exp\left[-\left(\frac{\beta\pi\,l}{\nu_1}\right)^2\mathrm{Fo}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(C^*_{1n}\frac{\sin\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}-C^*_{2n}\frac{\sin N\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right)\right],$$

$$\frac{d}{d\mathrm{Fo}}\left[\frac{\overline{\theta}(\tau)}{\theta_0}\right]=\frac{1-\nu_2^2}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1}\left[\sum_{l=1}^{\infty}F^*_l\left(\frac{\beta\pi\,l}{\nu_1}\right)^2\exp\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\left(\frac{\beta\pi\,l}{\nu_1}\right)^2\mathrm{Fo}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}D^*_n\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\nu_1^2}\mathrm{Fo}\right)\right].$$

в) *Анализ решений.* Из рассмотрения решений (1.14), (1.16), (1.28), (1.29) следует, что распределение потенциалов переноса в материале определяется критериями Fo и Ko_1 (или Ko_2), а также безразмерными величинами ν_1 и ν_2. Последние в свою очередь, как было показано в § 1 б гл. II, являются функциями критериев Lu и $\mathrm{Fe}=\varepsilon\,\mathrm{Ko}_1\mathrm{Pn}_1$.

Следовательно,

$$\frac{t-t_0}{t_0}=f_1\left(\mathrm{Fo},\ \mathrm{Lu},\ \varepsilon\,\mathrm{Ko}_1\,\mathrm{Pn}_1,\frac{x}{R}\right),\qquad(1.32)$$

$$\frac{\theta_0-\theta}{\theta_0}=f_2\left(\mathrm{Fo},\ \mathrm{Ko}_1,\ \mathrm{Lu},\ \varepsilon\,\mathrm{Ko}_1\mathrm{Pn}_1,\ \frac{x}{R}\right),\qquad(1.33)$$

т. е. перенос тепла в материале неотделим от переноса вещества и наоборот.

Сравнивая выражения (1.32) и (1.33) с аналогичными выражениями (1.32), (1.33) гл. II, необходимо заключить следующее. Переход от решений тепло- и массообменных задач при граничных условиях третьего рода к задачам, отвечающим граничным условиям первого рода и неизменному значению интегрального потенциала переноса вещества,

упрощает аналитические решения за счет выпадения из критериев поверхностного тепло- и массообмена (Bi_q, Bi_m) и связывания критериев тепло- и массопереноса (ε, Ko_1, Pn_1) посредством критерия Федорова.

В заключение данного параграфа приведем расчет поля температур и поля потенциала переноса вещества (массосодержания) для неограниченной пластины. Коэффициенты тепло- и массопереноса принимаем следующими:

$$c_q=0{,}45\ \text{ккал/кг}\cdot\text{град},\quad a_q=0{,}865\cdot10^{-3}\ \text{м}^2/\text{час},\quad u_0=0{,}15\ \text{кг/кг},$$

$$a_m=0{,}13\cdot10^{-3}\ \text{м}^2/\text{час},\quad \delta=1\cdot10^{-3}\ 1/\text{град},\quad t_0=90^\circ\text{ C},$$

$$\rho=560\ \text{ккал/кг},\quad \varepsilon=0{,}09,\quad t_c=0^\circ\text{ C}.$$

Получаем

$$\text{критерий Lu}=\frac{a_m}{a_q}=0{,}150,$$

$$\text{критерий Ko}_1=\frac{\rho u_0}{c_q t_0}=1{,}44,$$

$$\text{критерий Fe}=\frac{\varepsilon\rho\delta}{c_q}=0{,}112,$$

$\nu_1=0{,}993$, $\nu_2=2{,}61$, $N=2{,}63$, $K_4=-147$, $\mu_1=1{,}19$, $\mu_2=1{,}58$.

Результаты решения уравнений (1.14) и (1.16) для распределения по координате $\frac{x}{R}$ безразмерной температуры и безразмерного потенциала вещества собраны в таблицах 32 и 33, при этом в решениях мы ограничивались двумя членами разложения.

Таблица 32

Распределение безразмерной температуры в неограниченной пластине

$\frac{x}{R}$	$\frac{t(x,\tau)}{t_0}$			
	Fo=0,1	Fo=0,5	Fo=1,0	Fo=1,5
0,0	0,900	0,290	0,096	0,024
0,2	0,918	0,338	0,098	0,029
0,4	0,783	0,287	0,083	0,024
0,6	0,568	0,208	0,060	0,017
0,8	0,295	0,107	0,030	0,009
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 33

Распределение безразмерного потенциала массопереноса в неограниченной пластине

$\frac{x}{R}$	$\frac{\vartheta(x,\tau)-\vartheta_0}{\vartheta_0}$			
	Fo=0,1	Fo=0,5	Fo=1,0	Fo=1,5
0,0	−0,026	0,149	0,079	0,049
0,2	0,002	0,079	0,068	0,041
0,4	0,084	0,060	0,034	0,018
0,6	0,093	0,004	−0,016	−0,013
0,8	−0,041	−0,093	−0,071	−0,042
1,0	−0,275	−0,197	−0,112	−0,059

§ 2. Тепло- и массоперенос при неизменном массосодержании тела и при отсутствии фазовых превращений

Аналитическое описание частных случаев тепло- и массопереноса при граничных условиях первого рода (VII), (VIII) можно получить из решений соответствующих задач предыдущего параграфа методом предельного перехода (см. § 5 гл. II). Этот же результат следует из непосредственного решения неполной ($\delta=0$, $\varepsilon=0$ и др.) системы дифференциальных уравнений (I), (II). В качестве иллюстрации рассмотрим решения неполной системы уравнений для случая отсутствия в материале фазового перехода. Последнее означает, что перенос массы внутри материала осуществляется лишь в жидкой фазе, т. е. при температуре материала $t\leqslant 50°C$.

а) *Тепло- и массоперенос в шаре* ($\Gamma=2$, $\xi=r$, $\varepsilon=0$, $t(r,\ 0)=t_0=\text{const}$, $\vartheta(r,\ 0)=\vartheta_0=\text{const}$). Исходную систему уравнений (I), (II) для шара можно переписать так:

$$\frac{\partial[rt(r,\ \tau)]}{\partial\tau}=a_q\frac{\partial^2[rt(r,\ \tau)]}{\partial r^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial[r\vartheta(r,\ \tau)]}{\partial\tau}=a_m\frac{\partial^2[r\vartheta(r,\ \tau)]}{\partial r^2}+a_m\delta\frac{\partial^2[rt(r,\ \tau)]}{\partial r^2}. \tag{2.2}$$

Изображением поля температур (2.1) является

$$t_L(r,\ s)-\frac{t_0}{s}=-\frac{Rt_0}{r}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,r}{s\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,R}. \tag{2.3}$$

Оригинал (2. 3) получим посредством теоремы разложения. Если обозначить

$$\Phi(s) = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, r \ ,$$

$$\psi(s) = s \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R \ ,$$

то корнями полинома $\psi(s)$ будут:

1. $s = 0$,

2. $s_n = -\dfrac{\mu_n^2 a_q}{R_2}$, где $\mu_n = i \sqrt{\dfrac{s_n}{a_q}}\, R = n\pi\,(n = 1, 2, 3\ldots)$—

множество корней уравнения

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s_n}{a_q}}\, R = 0.$$

Следовательно, теорема разложения запишется так:

$$\frac{t(r, \tau)}{t_0} = -\frac{Rt_0}{r}\left[\lim_{s\to 0} \frac{\Phi(s)}{\psi'(s)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)}\, e^{s_n \tau}\right]$$

и оригиналом (2.3) будет

$$\frac{t(r, \tau)}{t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin n\pi \dfrac{r}{R}}{n\pi \dfrac{r}{R}} \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}). \qquad (2.4)$$

При значениях критерия $\mathrm{Fo} > 0{,}1$ ряд сходится достаточно быстро и для расчета можно использовать только первый член разложения: При малых значениях безразмерного времени ($\mathrm{Fo} < 0{,}1$) нужно брать несколько членов бесконечного ряда.

Применим теперь преобразование Лапласа к уравнению (2.2). Учтем при этом (2.3) и тогда получим

$$a_m u_L''(r, s) - s\left[u_L(r, s) - \frac{r\,0_0}{s}\right] - \frac{Rt_0 a_m \delta \operatorname{sh} \sqrt{\dfrac{s}{a_q}}\, r}{a_q \operatorname{sh} \sqrt{\dfrac{s}{a_q}}\, R} = 0,$$

где

$$u_L(r, s) = r\theta_L(r, s).$$

Решение этого уравнения дает

$$\theta_L(r, s) = B_1 \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, r}{r} + B_2 \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, r}{r} + \frac{\theta_0}{s} +$$

$$+ \frac{\delta t_0 R\left[\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, r - \sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, r\right]}{r\left(1 - \frac{a_q}{a_m}\right) s \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R}. \qquad (2.5)$$

Из условия симметрии (V) в изображениях следует $B_1 = 0$. Постоянный относительно r коэффициент B_2 определим посредством (VII). Удовлетворяя (2.5) граничному условию (VII), получим

$$B_2 = \frac{\delta t_0 R}{(a_m - a_q) s \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R} \times$$

$$\times\left[\sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\right) a_m -\right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, R\right) a_q\right] \times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\right)^{-1}.$$

Таким образом, решение для изображения функции распределения потенциала переноса вещества в шаре имеет вид

$$\theta_L(r, s) - \frac{\theta_0}{s} = \frac{\delta t_0 R}{r(a_m - a_q)} \times$$

$$\times\left[a_m \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\, r\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\, R\right) -\right.$$

$$-a_q\left(\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,R\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}R\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,r\Big]\times$$

$$\times s\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}R\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\delta\,t_0R}{r\,(a_m-a_q)}\,\frac{\Phi\,(s)}{\psi\,(s)}\,. \qquad (2.6)$$

Так как условия теоремы разложения в (2.6) выполняются, используем последнюю для получения оригинала $\theta\,(r,\,s)$.

Корнями полинома $\psi\,(s)$ будут:

1) $s=0$,

2) $s_n=-\dfrac{\mu_n^2a_q}{R^2}$, где $\mu_n=i\sqrt{\dfrac{s_n}{a_q}}\,R=n\pi$ — корни уравнения $\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{s}{a_q}}\,R=0$,

3) $s_l=-\dfrac{\mu_l^2a_m}{R^2}$, где $\mu_l=i\sqrt{\dfrac{s_l}{a_m}}\,R$ — корни уравнения

$$\mathrm{tg}\,\mu_l=\mu_l. \qquad (2.7)$$

Следовательно,

$$\theta\ (r,\,s)-\theta_0=\frac{\delta\,t_0R}{r\,(a_m-a_q)}\Big[\lim_{s\to0}\frac{\Phi\,(s)}{\psi'\,(s)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi\,(s_n)}{\psi'\,(s_n)}\,e^{s_n\tau}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Phi\,(s_l)}{\psi'\,(s_l)}\,e^{s_l\tau}\Big]. \qquad (2.8)$$

Здесь

$$\psi'\,(s)=\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_q}}R\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}R\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a_q}}\,R\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_q}}R\left(\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R-\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}R\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a_m}}R\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a_m}}\,R.$$

Для получения первого слагаемого (2.8) разложим числитель и знаменатель $\dfrac{\Phi\,(s)}{\psi\,(s)}$ в ряд, сократим дробь на $\sqrt{\dfrac{s}{a_m}}\times$

$\times\sqrt{\frac{s}{a_q}}$, после этого продифференцируем знаменатель по s и возьмем предел этого отношения при $s \to 0$. В результате будем иметь

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Phi(s)}{\psi'(s)} = 0.$$

Для остальных слагаемых расчеты дают

$$\Phi(s_n) = a_m \sin\mu_n \frac{r}{R}\left(\sin\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n - \sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n\cos\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n\right) +$$

$$+ a_q\mu_n\cos\mu_n\sin\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n\frac{r}{R},$$

$$\Phi(s_l) = -\left(\sin\sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\mu_l - \sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\mu_l\cos\sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\mu_l\right)a_q\sin\mu_l\frac{r}{R},$$

$$\psi'(s_n) = -\frac{1}{2}\mu_n\cos\mu_n\left(\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n\cos\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n -\right.$$

$$\left. - \sin\sqrt{\frac{a_q}{a_m}}\mu_n\right),$$

$$\psi'(s_l) = \frac{1}{2}\mu_l^2\sin\mu_l\sin\sqrt{\frac{a_m}{a_q}}\mu_l.$$

Следовательно, функцию распределения потенциала переноса вещества в шаре (2.8) после небольших преобразований можем записать так:

$$\frac{\theta(r,\tau)-\theta_0}{\theta_0} = \frac{2\mathrm{LuPn}_1}{\mathrm{Lu}-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})}{(-1)^n n\pi\left(\sin\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)}\frac{}{}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\sin\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} - \frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)\frac{\sin n\pi\frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} +\right.\right.$$

$$+ (-1)^n \frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \frac{\sin \frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \Bigg] -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_l - \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_l \cos \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_l)}{\mathrm{Lu}\, \mu_l^2 \sin \mu_l \sin \sqrt{\mathrm{Lu}}\, \mu_l} \times$$

$$\times \frac{\sin \mu_l \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \exp(-\mu_l^2 \mathrm{LuFo}) \Bigg\}, \qquad (2.9)$$

где μ_l — корни характеристического уравнения (2.7); их значения даны в таблице 34

Таблица 34

Корни μ_l уравнения $\mathrm{tg}\,\mu = \mu$

l	μ_l
1	0,0000
2	4,4934
3	7,7253
4	10,9041
5	14,0662
6	17,2208

б) *Тепло- и массоперенос в неограниченном цилиндре* ($\Gamma = 1$, $\xi = r$, $\varepsilon = 0$, $t(r, 0) = t_0 = \mathrm{const}$, $\theta(r, 0) = \theta_0 = \mathrm{const}$). Относительная температура и безразмерный потенциал переноса вещества в любой точке неограниченного цилиндра соответственно имеют вид:

$$\frac{t(r, \tau)}{t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \qquad (2.10)$$

$$\frac{\theta(r, \tau) - \theta_0}{\theta_0} = \frac{2\mathrm{LuPn}_1}{\mathrm{Lu} - 1} \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}} \times$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\frac{r}{R}\right)}{\mu_n J_1\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right)} - \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)}\Bigg] \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right) -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_l\right)}{\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_l J_0\left(\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\mu_l\right) J_0'(\mu_l)} J_0\left(\mu_l \frac{r}{R}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\mu_l^2 \mathrm{LuFo}\right)\Bigg\}, \qquad (2.11)$$

где μ_n — корни характеристического уравнения

$$J_0(\mu) = 0,$$

μ_l — корни характеристического уравнения

$$J_1(\mu) = 0.$$

Значения характеристических корней μ_n и μ_l приведены в таблице 35.

Таблица 35

Корни характеристических уравнений $J_0(\mu) = 0$ и $J_1(\mu) = 0$

n или l	корни μ_n уравнения $J_0(\mu) = 0$	корни μ_l уравнения $J_1(\mu) = 0$
1	2,4048	3,8317
2	5,5201	7,0156
3	8,6537	10,1735
4	11,7915	13,3237
5	14,9309	16,4706
6	18,0711	19,6159
7	21,2116	22,7601
8	24,3525	25,9037
9	27,4935	29,0468
10	30,6346	32,1897

в) *Тепло- и массоперенос в неограниченной пластине* ($\Gamma=0$, $\xi=x$, $\varepsilon=0$, $t(x, 0)=t_0=\mathrm{const}$, $\theta(x, 0)=\theta_0=\mathrm{const}$). Распределение потенциалов переноса тепла и вещества имеет вид:

$$\frac{t(x, \tau)}{t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\cos\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2}\frac{x}{R}}{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\,\mathrm{Fo}\right], \qquad (2.12)$$

$$\frac{\theta(x,\tau)-\theta_0}{\theta_0}=\frac{2\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Pn}_1}{\mathrm{Lu}-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\,\mathrm{Fo}\right]}{(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{\pi}{2}\sin\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}\times\right.$$

$$\times\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{R}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{R}\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\sin\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\pi l}{(-1)^l\,\pi\,l\cos\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\pi\,l}\times$$

$$\left.\times\cos\pi l\frac{x}{R}\;\exp(-\pi^2 l^2\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Fo})\right\}, \qquad (2.13)$$

где $n=1, 2, 3..$, $l=1, 2, 3....$

г) *Тепло- и массоперенос в ограниченном стержне* ($\Gamma=0$, $\xi=x$, $\varepsilon=0$, $t(x, 0)=t_0=\mathrm{const}$, $\theta(x, 0)=\theta_0=\mathrm{const}$). Будем считать, что один конец стержня, находящийся в начале координат ($x=0$), имеет во время опыта постоянную температуру, равную температуре нагревателя $t_н$,

$$t(0, \tau)=t_н=\mathrm{const}. \qquad (2.14)$$

Другой конец ($x=l$) остается в течение опыта при температуре окружающей среды, т. е.

$$t(l, \tau)=t_c=t_0=\mathrm{const}, \qquad (2.15)$$

причем $t_н > t_0$. Боковые поверхности стержня изолированы для переноса тепла и вещества.

Общее решение системы уравнений (I), (II) при постоянных начальных условиях (VI) и граничных условиях (VII), (2.14), (2.15) имеет вид

$$\frac{t(x,\tau)-t_0}{t_н-t_0}=\left(1-\frac{x}{l}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\pi n}\sin\pi n\left(1-\frac{x}{l}\right)\exp(-\pi^2 n^2 \mathrm{Fo}_1), \qquad (2.16)$$

$$\frac{\theta(x,\tau)-\theta_0}{\theta_0}=\mathrm{Pn}_2\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Pn}_2}{\mathrm{Lu}-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}_1)}{n\pi\sin\dfrac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\cos\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\frac{x}{l}+\right.\right.$$

$$+\sin\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\sin n\pi\frac{x}{l}-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\times$$

$$\left.\times\cos\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{n\pi}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-\cos\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\pi k}{\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\pi k\,\sin\sqrt{\mathrm{Lu}}\,\pi k}\times$$

$$\left.\times\cos k\pi\frac{x}{l}\exp(-k^2\pi^2\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Fo}_1)\right\}. \qquad (2.17)$$

В уравнениях (2.16) и (2.17) $n=1, 2, 3...$, $k=1, 2, 3...$,

$\mathrm{Pn}_2=\dfrac{\delta(t_н-t_0)}{\theta_0}$ — критерий Поснова, $\mathrm{Fo}_1=\dfrac{a_q\tau}{l^2}$.

Выражениями (2.16) и (2.17) удобно пользоваться при больших значениях Fo_1, т. е. при $\mathrm{Fo}_1>0{,}1$, когда для расчета потенциалов переноса можно ограничиться одним-двумя членами бесконечного ряда. При малых Fo_1, правильный результат будет получен лишь при условии учета многих членов ряда разложения, рационально поэтому дать для потенциалов переноса более удобные (быстро сходящиеся) выражения:

$$\frac{t(x,\tau)-t_0}{t_н-t_0}=\mathrm{erfc}\,\frac{\dfrac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\operatorname{erfc}\frac{2n+\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}-\operatorname{erfc}\frac{2n-\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}\right\}, \tag{2.18}$$

$$\frac{\theta(x,\tau)-\theta_0}{\theta_0}=\frac{\mathrm{Lu}\,\mathrm{Pn}_2}{\mathrm{Lu}-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\operatorname{erfc}\frac{\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Lu}\,\mathrm{Fo}_1}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\operatorname{erfc}\frac{2k+\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Lu}\mathrm{Fo}_1}}+\operatorname{erfc}\frac{2k-\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Lu}\,\mathrm{Fo}_1}}\right]-$$

$$-\operatorname{erfc}\frac{\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{erfc}\frac{2n+\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}-\operatorname{erfc}\frac{2n-\frac{x}{l}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}\right]+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{erfc}\frac{n+\frac{k+\frac{x}{l}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{erfc}\frac{n-\frac{k-\frac{x}{l}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_1}}\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{erfc}\frac{2n+\frac{\frac{x}{l}}{\sqrt{\mathrm{Lu}}}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right\}. \tag{2.19}$$

д) *Анализ решений.* Температурное поле аналогично температурному полю „сухого" материала. Относительная температура тела является функцией теплообменного критерия Фурье (Fo) и относительной координаты $\frac{\xi}{R}$:

$$\frac{t(\xi,\tau)}{t_0}=f\left(\mathrm{Fo},\ \frac{\xi}{R}\right).$$

Так как характеристические корни с ростом индекса увеличиваются начиная с $\mathrm{Fo}>\mathrm{Fo}_1$ (т. е. в стадии регулярного режима), можно пренебречь всеми членами ряда, за исключением первого. В этом случае соотношение между

безразмерными температурой и временем можно написать так:

$$\frac{t(\xi, \tau)}{t_0} = A_1 \Phi\left(\mu_1, \frac{\xi}{R}\right) \exp(-\mu_1^2 \mathrm{Fo}).$$

Здесь A_1 — начальная тепловая амплитуда, для неограниченной пластины $A_1 = \frac{4}{\pi}$, для шара $A_1 = \frac{2}{\pi}$ и для неограниченного цилиндра

$$A_1 = \frac{2}{2{,}405\ I_1\ (2{,}405)},$$

$\Phi\left(\mu_1, \frac{\xi}{R}\right)$ — функция, описывающая распределение температуры по характерной координате $\frac{\xi}{R}$,

μ_1 — первый корень характеристического уравнения (для неограниченной пластины $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$, для шара $\mu_1 = \pi$, для неограниченного цилиндра $\mu_1 = 2{,}405$),

I_1 — модифицированная функция Бесселя первого рода и первого порядка.

В стационарном состоянии, т. е. при $\mathrm{Fo} \to \infty$, безразмерная температура для пластины, цилиндра и шара становится равной нулю, а для ограниченного стержня $\frac{t(x, \tau) - t_0}{t_н - t_0} = 1 - \frac{x}{l}$, т. е. является линейной функцией x/l.

Поле безразмерного потенциала переноса вещества характеризуется не только Fo и $\frac{x}{R}$, но и критериями Lu и Pn. Аналитические решения для $\frac{\theta(\xi, \tau) - \theta_0}{\theta_0}$ представляют собой разность двух рядов, первый из которых описывает модифицированное температурное поле, а второй — модифицированное поле потенциала вещества.

С ростом безразмерного времени распределение потенциала переноса вещества стремится к стационарному состоянию, при котором для неограниченных пластины и цилиндра, а также шара $\theta(\xi, \infty) = \theta_0$ для ограниченного стержня

$$\frac{\theta(x, \tau) - \theta_0}{\theta_0} = \mathrm{Pn}_2\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right).$$

Вычисленные Е. И. Сизяковой значения $\Delta = \frac{\theta(x, \tau) - \theta_0}{\theta_0 \mathrm{Pn}_2}$

для ограниченного стержня в зависимости от Fo, x/l и Lu отражены на рисунке 41, а $\frac{\theta(x,\tau)-\theta_0}{\theta_0}$ рассчитывались по выражению (2. 17). Из кривых следует, что под влиянием переменного температурного поля во влажном материале возникает волна потенциала переноса вещества (массосодержания), которая со временем затухает. Расчеты показывают, что при малых значениях Lu волна затухает очень быстро. С ростом Lu она глубже проникает в материал, распространяется быстрее, а величина ее максимума увеличивается.

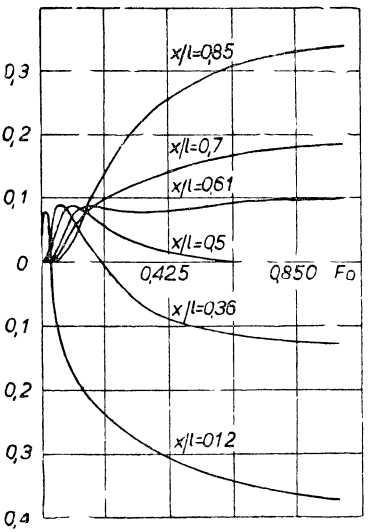


Рис. 41. Зависимость $\Delta = \frac{\theta(x,\tau)-\theta_0}{\theta_0 \mathrm{Pn}_2}$ от величины критерия Фурье и безразмерной координаты (Lu = 0,355).

Скорость изменения потенциала вещества в каждой точке с ростом Lu сильно увеличивается и значительно быстрее наступает его линейное стационарное распределение. Например, при Lu=0,8 и Fo=0,5 распределение влагосодержания и в ограниченном стержне можно считать уже стационарным. Локальная температура (рис. 42) сначала быстро увеличивается, а затем медленно приближается к постоянному значению, соответствующему стационарному линейному распределению температуры в образце. Сравнение кривых изменения безразмерных потенциалов переноса в одинаковые моменты времени показывает, что наиболее интенсивное изменение потенциала переноса вещества происходит в период наиболее интенсивного изменения потенциала переноса тепла. При малых Lu изменения θ протекают значительно медленнее изменения t. Стационарное распределение температуры наступает много раньше стационарного распределения

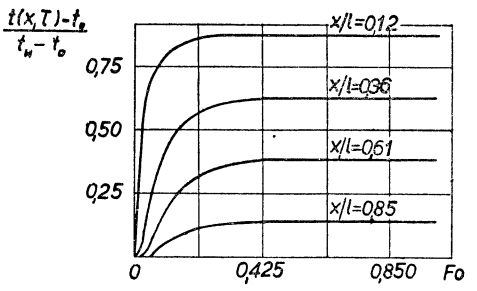


Рис. 42. Аналитические кривые изменения безразмерной температуры в зависимости от времени.

потенциала переноса вещества. Из расчетов также следует, что кривые распределения θ по времени и по координатам имеют максимум, причем величина максимума при данном значении Lu для всех координат одинакова, но с увеличением Lu увеличивается.

Характер зависимости процесса тепло- и массопереноса от критерия Lu при граничных условиях первого рода находится в полном соответствии с проведенным в гл. II, § 6 анализом зависимости тепло- и массопереноса от Lu при граничных условиях третьего рода. Экспериментальная проверка выводов из аналитических решений неполной системы ($\varepsilon = 0$), проведенная Е. И. Сизяковой, показала наличие максимумов, однако по сравнению с решениями эти максимумы были не столь острыми и во времени достигались значительно позже аналитических. Равновесие также наступало много позже, чем это следовало из решений. При сравнении аналитических и экспериментальных температурных кривых выяснилось, что нарастание температуры происходит более плавно, а стационарное распределение наступает значительно позже, чем по аналитическим кривым. Все это говорит о наличии в материале существенного фазового превращения (испарения). Следовательно, мы опять приходим к выводу о необходимости математического отображения процесса полной системой дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса (I), (II).

§ 3. Методы определения коэффициентов тепло- и массопереноса

Используя решения для нестационарных полей потенциалов переноса тепла и вещества, данные в § 2, С. П. Кузнецов и Е. И. Сизякова предложили методы определения коэффициентов тепло- и массопереноса. Практическая применимость этих методов ограничена ввиду предположения об отсутствии в материале фазового перехода, т. е. перенос вещества осуществляется лишь в жидкой фазе. Однако эти первые попытки использования аналитических решений системы уравнений (I), (II) могут служить началом разработки новых нестационарных методов определения коэффициентов переноса.

а) *Метод С. П. Кузнецова.* Для определения коэффициентов тепло- и массопереноса С. П. Кузнецов использует образец в форме шара. Его метод позволяет определить из одного опыта коэффициент потенциалопроводности a_m и термоградиентный коэффициент δ; при этом величина a_q находится независимым способом, например методом регулярного режима. Для определения коэффициентов необходимо знать распределение в материале температуры и потенциала переноса вещества (массосодержания).

В основу метода С. П. Кузнецов положил следующие результаты аналитических решений:

а) зависимость между $\Delta = \dfrac{u(r, \tau) - u_0}{u_0 \operatorname{Pn}_1}$ и критерием Fo, как это видно из рисунка 43, является однозначной функцией в интервалах значений Fo от 0,09 до 0,5 и критерия Lu от 0 до 0,5;

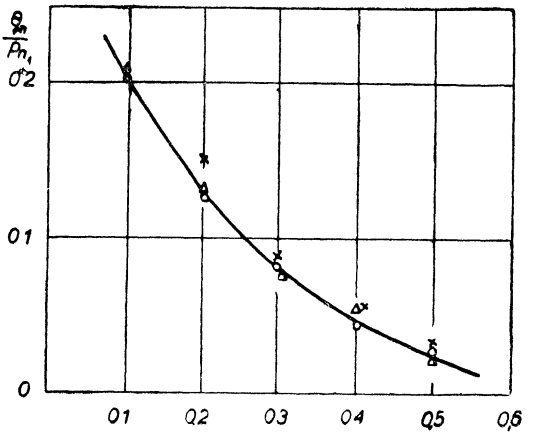


Рис. 43. Зависимость между $\dfrac{\overline{\theta}_n}{\operatorname{Pn}_1}$ и критерием Фурье при условии $0{,}09 < \mathrm{Fo} < 0{,}5$ и $0 < \mathrm{Lu} < 0{,}5$: * — Lu = 0,2, 0 — Lu = 0,3, Δ — Lu = 0,4.

б) при больших Fo кривая распределения потенциала переноса вещества в материале пересекает прямую начального распределения в определенной точке $\left(\dfrac{x}{R}\right)_A$ (рис. 44).

Из рисунка 45 следует, что эта точка является однозначной функцией критерия Lu для значения критерия Fo в интервале от 0,09 до 0,30.

Иллюстрируем метод на примере расчета коэффициентов тепло- и массопереноса для песка с начальными параметрами переноса вещества $u_0 = 10{,}9\%$ и тепла $t = 54°C$. Радиус колбы, в которой насыпан песок, $R = 10$ см. Коэффициент температуропроводности песка $a_q = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ м²/час. Пусть $\tau = 25$ мин. Тогда критерий Фурье будет

$$\mathrm{Fo} = \frac{a_q \tau}{R^2} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 25}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 60} = 0{,}096.$$

Из рисунка 43 находим, что критерию Fo = 0,096 соответству-

ет величина $\Delta_R = \frac{u(R, \tau) - u_0}{u_0 \, Pn_1} = 0{,}212$. Значение безразмерного потенциала переноса вещества на поверхности тела $\frac{u(R, \tau) - u_0}{u_0}$ находим из кривой его распределения, приведенной на рисунке 44:

$$\frac{u(R, \tau) - u_0}{u_0} = \frac{13{,}3 - 10{,}9}{10{,}9} = 0{,}22.$$

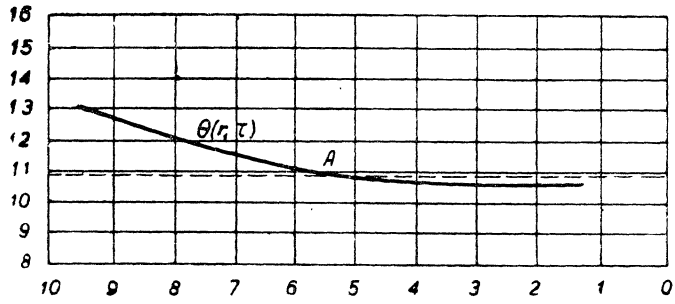


Рис. 44. Кривая распределения массосодержания песка по радиальной координате r (см) в процессе охлаждения.

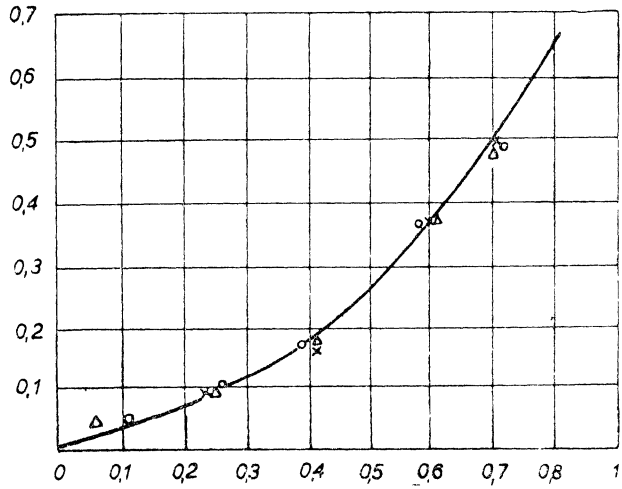


Рис. 45. Зависимость между критериями Lu и относительной координатой $\left(\frac{r}{R}\right)$, соответствующей точке пересечения кривой распределения влажности в процессе охлаждения с линией начальной влажности (обозначения те же, что на рис. 43).

Критерий Поснова

$$Pn_1 = \frac{u(R, \tau) - u_0}{u_0 \Delta_R} = \frac{0{,}22}{0{,}212} = 1{,}03.$$

Следовательно, термоградиентный коэффициент

$$\delta = \frac{u_0 Pn_1}{t_0} = \frac{0{,}109 \cdot 1{,}03}{54} = 0{,}207 \cdot 10^{-2}\ 1/\text{град} = 0{,}207\ \%/\text{град}.$$

Из рисунка 44 определяем относительную координату $\left(\frac{r}{R}\right)_A$ пересечения кривой $u(r, \tau)$ с линией u_0, она равна 0,5. По рисунку 45 находим, что этой координате соответствует критерий $Lu = 0{,}26$. Тогда коэффициент

$$a_m = Lu\ a_q = 0{,}26 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2/\text{час}.$$

б) *Метод Е. И. Сизяковой.* Согласно аналитическим решениям, распределение потенциала переноса вещества во времени и по координатам, как уже отмечалось выше, при малых Fo имеет максимум. Величина максимума при данном значении критерия Lu для всех координат одинакова, но с увеличением критерия Lu увеличивается. Такой характер изменения поля потенциала переноса вещества позволил Е. И. Сизяковой предложить новый скоростной метод определения коэффициентов тепло- и массопереноса из одного опыта. Для этого нужно построить кривые распределения потенциала переноса вещества и температуры в стержне через небольшой промежуток времени (около 1 часа) после начала опыта. Кривая распределения потенциала переноса вещества θ или влагосодержания будет иметь максимум θ_{max} в некоторой точке с безразмерной координатой $\frac{x}{l}$, которую обозначим $\left(\frac{x}{l}\right)_{max}$. Для этой же точки и времени температура образца имеет значение $t\left[\left(\frac{x}{l}\right)_{max}, \tau_{max}\right]$. Зная $t\left[\left(\frac{x}{l}\right)_{max}, \tau_{max}\right]$, $t_н$ и t_0 по аналитическому решению (2.18), можно найти соответствующее значение критерия Фурье, которое обозначим Fo_{max}. Последнее легко сделать, потому что при малых Fo достаточно удовлетворится одним первым слагаемым, т. е.

$$\frac{t\left[\left(\frac{x}{l}\right)_{max}, \tau_{max}\right] - t_0}{t_н - t_0} = \operatorname{erfc} \frac{\frac{x}{l}}{2\sqrt{Fo_1}}. \qquad (3.1)$$

Подставив в левую часть (3. 1) известные величины и воспользовавшись таблицами значений интеграла ошибок, на-

ходим Fo_{max}, откуда коэффициент температуропроводности будет

$$a_q = \frac{Fo_{max}\, l^2}{\tau_{max}}.$$

Расчеты показывают, что зависимость $\ln Fo_{max}$ от $\ln Lu$ для каждой координаты $\frac{x}{l}$ является линейной. Зная Fo_{max} и координату $\left(\frac{x}{l}\right)_{max}$, по рисунку 46 можно найти значение $\ln Lu$, а потом значение критерия Lu. Коэффициент потенциалопроводности тогда будет

$$a_m = a_q\, Lu.$$

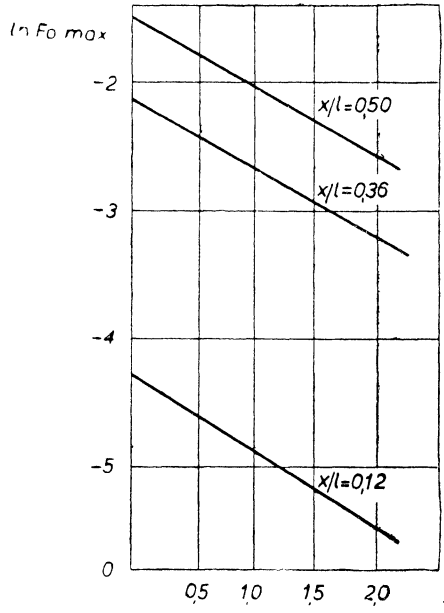


Рис. 46. Зависимость $\ln Fo_{max}$ (ось ординат) от $\ln Lu$ (ось абсцисс).

При анализе зависимости Δ было показано, что Δ_{max} не зависит от координат и от критерия Fo, а зависит только от критерия Lu. Это дает возможность найти величину критерия Поснова (Pn_1) и, следовательно, термоградиентный коэффициент δ. Таким образом, по рисунку 47 на основе ранее определенного значения критерия Lu находим Δ_{max}. Отсюда определяем критерий Поснова:

$$Pn_1 = \frac{\theta_{max} - \theta_0}{\theta_0\, \Delta_{max}}.$$

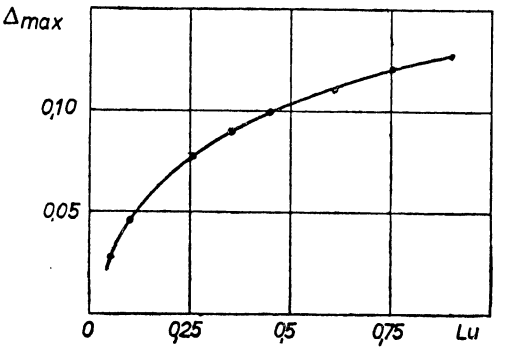


Рис. 47. Кривая зависимости ΔF_{max} от Lu.

Тогда термоградиентный коэффициент

$$\delta = \frac{c_m \mathrm{Pn}_1 \theta_0}{t_н - t_0} = \frac{\mathrm{Pn}_1 u_0}{t_н - t_0}.$$

Метод Е. И. Сизяковой дает возможность определить из одного опыта коэффициенты a_m, a_q и δ. В этом отношении он удобнее метода С. П. Кузнецова, но, как и метод Кузнецова, ограничен низкими температурами материала ($\leqslant 50°C$) и узким интервалом значений критерия Fo. Последующее развитие нестационарных методов определения коэффициентов тепло- и массопереноса должно разрешить в первую очередь эти вопросы.

ГЛАВА IV

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЕЩЕСТВА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА

Во многих случаях удельные потоки тепла и вещества на поверхности тела не могут быть описаны законами конвективного тепло- и массообмена. В этих случаях задаются удельные потоки тепла $q_q(\tau)$ и вещества $q_m(\tau)$ как некоторые неизвестные функции времени, определяемые из опытов.

В этом случае граничные условия для одномерных тел при симметричных полях потенциалов переноса тепла и вещества можно написать так:

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial \xi} + q_q = 0, \tag{IX}$$

$$-\lambda_m \frac{\partial \theta(R,\tau)}{\partial \xi} + \lambda_m \delta \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial \xi} + q_m = 0, \tag{X}$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \theta(0,\tau)}{\partial \xi} = 0. \tag{XI}$$

Необходимо отметить, что граничные условия (IX)—(XI) по своему физическому содержанию отражают больший класс теплообмена и массообмена, включая в себя радиационный теплообмен. Вначале рассмотрим задачи при коэффициенте δ, равном нулю. Такие решения были получены М. С. Смирновым для неограниченных пластины, цилиндра и шара при помощи конечных преобразований Фурье и Ханкеля, т. е. решалась система дифференциальных уравнений переноса:

$$\frac{\partial t(\xi,\tau)}{\partial \tau} = a_q \left[\frac{\partial^2 t(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial t(\xi,\tau)}{\partial \xi} \right] + \frac{c'_T \varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial \theta(\xi,\tau)}{\partial \tau}, \tag{XII}$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a_m \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right], \tag{XIII}$$

$$t(\xi, 0) = f(\xi), \quad \theta(\xi, 0) = \varphi(\xi), \tag{XIV}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial \xi} &= 0, \quad t(0, \tau) < \infty \\ \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} &= 0, \quad \theta(0, \tau) < \infty \end{aligned}\right\}, \tag{XV}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial \xi} + q_q = 0, \tag{XVI}$$

$$\lambda_m \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial \xi} + q_m = 0. \tag{XVII}$$

§ 1. Неограниченная пластина ($\delta = 0$)

$$[\Gamma = 0, \ \xi = x, \ \delta = 0, \ t(x, 0) = f(x), \ \theta(x, 0) = \varphi(x),$$
$$q_q = \text{const}, \ q_m = \text{const}]$$

Решение системы дифференциальных уравнений (XII)—(XIII) при граничных условиях (XVI), (XVII), произвольном начальном распределении потенциалов переноса (XIV), условиях симметрии (XV) и постоянных плотностях потоков тепла и вещества найдем посредством метода конечного интегрального преобразования Фурье.

Определим прежде всего функцию распределения потенциала переноса вещества в неограниченной пластине. Решаем для этого уравнение (XIII).

Применение интегрального преобразования

$$\theta_{c.F}(n, \tau) = \int_0^R \theta(x, \tau) \cos n\pi \frac{x}{R} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3. \ . \ .) \tag{1.I}$$

относительно переменной x к $\theta''(x, \tau)$ дает

$$\int_0^R \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x} \cos n\pi \frac{x}{R} dx = (-1)^n \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial x} - \frac{n^2 \pi^2}{R^2} \theta_{c.F}(n, \tau),$$

а с учетом условий (XV) и (XVII)

$$\int_0^R \frac{\partial^2 \theta(x,\tau)}{\partial x} \cos n\pi \frac{x}{R} dx =$$

$$= -(-1)^n \frac{q_m}{\lambda_m} - \frac{n^2\pi^2}{R^2} \theta_{c.F}(n,\tau). \qquad (1.2)$$

Далее, умножая правую и левую стороны дифференциального уравнения (XIII) на $\cos\frac{n\pi x}{R}$, интегрируя в пределах от 0 до R и учитывая результат (1. 2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно τ:

$$\frac{d\theta_{c.F}(n,\tau)}{d\tau} + \frac{a_m n^2\pi^2}{R^2} \theta_{c.F}(n,\tau) = -(-1)^n \frac{q_m}{\gamma_0 c_T'}.$$

Решение этого уравнения будет следующее:

$$\theta_{c.F}(n,\tau) = (-1)^n \frac{q_m}{\lambda_m} \frac{R^2}{n^2\pi^2}\left[\exp\left(-n^2\pi^2\frac{a_m\tau}{R^2}\right) - 1\right] +$$

$$+ C_1(n)\exp\left(-n^2\pi^2\frac{a_m\tau}{R^2}\right). \qquad (1.3)$$

Постоянную интегрирования $C_1(n)$ найдем, используя начальное условие $\theta(x,0) = \varphi(x)$. Из (1.3) имеем при $\tau \to 0$

$$\theta_{c.F}(n,0) = C_1(n),$$

но, с другой стороны, согласно (1. 1) и с учетом начального распределения для потенциалов переноса вещества, имеем

$$\theta_{c.F}(n,0) = \int_0^R \varphi(x)\cos n\pi \frac{x}{R} dx.$$

Следовательно,

$$C_1(n) = \int_0^R \varphi(x)\cos n\pi \frac{x}{R} dx,$$

и решение для изображения окончательно запишется так:

$$\theta_{c.F}(n,\tau) = (-1)^n \frac{q_m}{\lambda_m} \frac{R^2}{n^2\pi^2}\left[\exp\left(-n^2\pi^2\frac{a_m\tau}{R^2}\right) - 1\right] +$$

$$+ \exp\left(-n^2\pi^2\frac{a_m\tau}{R^2}\right)\int_0^R \varphi(x)\cos n\pi\frac{x}{R} dx. \qquad (1.4)$$

Теперь для того, чтобы найти функцию распределения потенциала переноса вещества, остается осуществить переход от изображения функции $\theta_{c.F}(n, \tau)$ к ее оригиналу $\theta(x, \tau)$ по формуле обращения для косинус-преобразования Фурье:

$$\theta(x, \tau) = \frac{1}{R}\theta_{c.F}(0, \tau) + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{c.F}(n, \tau)\cos n\pi\frac{x}{R}. \quad (1.5)$$

При $n = 0$ первое слагаемое (1. 4) представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя. Производя необходимые преобразования для нулевого члена (1. 5), получим

$$\frac{1}{R}\theta_{c.F}(0, \tau) = -\frac{q_m\tau}{c_T\gamma_0 R} + \frac{1}{R}\int_0^R \varphi(x)\,dx. \quad (1.6)$$

Подставляем (1. 4) и (1. 6) в выражение (1. 5), учитывая при этом, что, согласно теории рядов Фурье,

$$2R\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R} = -\frac{R}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{R^2}\right).$$

Тогда для распределения $\theta(x, \tau)$ в неограниченной пластине будем иметь

$$\theta(x, \tau) - \frac{1}{R}\int_0^R \varphi(x)\,dx = -$$

$$-\frac{q_m R}{\lambda_m}\left[\mathrm{Fo}^* - \frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{R^2}\right) + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*) +$$

$$+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi\frac{x}{R}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*)\times$$

$$\left.\times\int_0^R \varphi(x)\cos n\pi\frac{x}{R}\,dx\right]. \quad (1.7)$$

Определим теперь функцию распределения температуры. Обозначим конечное интегральное преобразование для температуры относительно координаты так:

$$t_{c.F}(n, \tau) = \int_0^R t(x, \tau) \cos n\pi \frac{x}{R}\, dx \quad (n = 0, 1, 2...).$$

Для второй производной температуры по координате с учетом условий (XV) и (XVI) получим

$$\int_0^R \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \cos n\pi \frac{x}{R}\, dx =$$

$$= (-1)^n \frac{q_q}{\lambda_q} - \frac{n^2\pi^2}{R^2} t_{c.F}(n, \tau). \qquad (1.8)$$

Умножая обе части уравнения (XII) на $\cos n\pi \frac{x}{R}$, интегрируя от 0 до R по координате x и учитывая (1.8), будем иметь

$$\frac{dt_{c.F}(n, \tau)}{d\tau} + \frac{a_q n^2\pi^2}{R^2} t_{c.F}(n, \tau) =$$

$$= (-1)^n \frac{a_q q_q}{\lambda_q} + \frac{\varepsilon \rho c'_T}{c_q} \frac{d\theta_{c.F}(n, \tau)}{d\tau}. \qquad (1.9)$$

Значение $\frac{d\theta_{c.F}(n, \tau)}{d\tau}$ найдем, дифференцируя по τ соотношение (1.4); после небольших преобразований (1.9) перепишется следующим образом:

$$\frac{dt_{c.F}(n, \tau)}{d\tau} + \frac{a_q n^2\pi^2}{R^2} t_{c.F}(n, \tau) =$$

$$= (-1)^n \frac{a_q q_q}{\lambda_q} - \frac{\varepsilon \rho c'_T}{c_q} \left[(-1)^n \frac{q_m}{\gamma_0 c'_T} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{a_m \tau}{R^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{a_m n^2\pi^2}{R^2} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{a_m \tau}{R^2}\right) \times$$

$$\left. \times \int_0^R \varphi(x) \cos n\pi \frac{x}{R}\, dx \right].$$

Решение этого обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения будет следующее:

$$t_{c.F} = (-1)^n \frac{q_q}{\lambda_q} \frac{R^2}{n^2\pi^2} [1 - \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo})] +$$

$$+ (-1)^n \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{q_m}{\gamma_0} \frac{R^2}{n^2\pi^2(a_m - a_q)} \times$$

$$\times [\exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}^*) - \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo})] +$$

$$+ \frac{\varepsilon \rho c_T'}{c_q} \frac{a_m}{a_m - a_q} [\exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}^*) - \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo})] \times$$

$$\times \int_0^R \varphi(x) \cos n\pi \frac{x}{R} dx + C_2(n) \exp(-n^2\pi^2 \mathrm{Fo}). \qquad (1.10)$$

Если устремить τ (а следовательно, Fo и Fo*) к нулю, то из (1.10) следует, что $t_{c.F}(n, 0) = C_2(n)$. С другой стороны,

$$t_{c.F}(n, 0) = \int_0^R t(x, 0) \cos n\pi \frac{x}{R} dx =$$

$$= \int_0^R t(x) \cos n\pi \frac{x}{R} dx.$$

Следовательно

$$C_2(n) = \int_0^R f(x) \cos n\pi \frac{x}{R} dx.$$

Переходя по формуле обращения

$$t(x, \tau) = \frac{1}{R} t_{c.F}(0, \tau) + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} t_{c.F}(n, \tau) \cos n\pi \frac{x}{R}$$

к оригиналу, после небольших преобразований, аналогичных преобразованиям, имеющим место при получении $\theta(x, \tau)$, решение для $t(x, \tau)$ запишется в виде

$$t(x, \tau) - \frac{1}{R} \int_0^R f(x) dx = \frac{q_q R}{\lambda_q} \left[\mathrm{Fo} - \frac{1}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{R^2} \right) + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})+$$

$$+\frac{2\lambda_q}{R^2q_q}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})\cos n\pi\frac{x}{R}\times$$

$$\times\int_0^R f(x)\cos n\pi\frac{x}{R}\,dx\Big]+\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\frac{\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\frac{q_mR}{a_m\gamma_0}\times$$

$$\times\Bigg\{(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\times$$

$$\times[\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})-\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*)]-\frac{2\lambda_m}{R^2q_m}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}[\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})-\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*)]\times$$

$$\times\cos n\pi\frac{x}{R}\int_0^R\varphi(x)\cos n\pi\frac{x}{R}\,dx\Bigg\}. \qquad (1.11)$$

При переходе к оригиналу (1.11) было использовано равенство

$$\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\frac{q_m}{a_m\gamma_0}\frac{a_m\tau}{R}=$$

$$=\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\frac{q_m}{a_m\gamma_0}\frac{a_m}{a_m-a_q}\left(\frac{a_m\tau}{R}-\frac{a_q\tau}{R}\right).$$

В том случае, когда начальное распределение потенциалов переноса тепла и вещества постоянно по пластине, т. е.

$$t(x,0)=t_0=\mathrm{const},$$

$$\vartheta(x,0)=\vartheta_0=\mathrm{const},$$

из решений (1.7) и (1.11) как частный случай получим соответственно:

$$\Theta=\frac{\vartheta_0-\vartheta(x,\tau)}{\vartheta_0-\vartheta_p}=\mathrm{Ki}_m\left[\mathrm{Fo}^*-\frac{1}{6}\left(1-3\frac{x^2}{R^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*)\right], \qquad (1.12)$$

$$T = \frac{t(x,\tau)-t_0}{t_c-t_0} = \mathrm{Ki}_q\left[\mathrm{Fo} - \frac{1}{6}\left(1-3\frac{x^2}{R^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo})\right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\mathrm{KoKi}_m\,\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\left\{\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^* + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\frac{x}{R}\times$$

$$\left.\times\left[\exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}) - \exp(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}^*)\right]\right\}, \qquad (1.13)$$

где $$\mathrm{Ki}_m = \frac{q_m R}{a_m\gamma_0(u_0-u_p)} = \frac{q_m R}{\lambda_m(\theta_0-\theta_p)},$$

$\mathrm{Ki}_q = \dfrac{q_q R}{\lambda_q(t_c-t_0)}$ — массообменный и теплообменный критерии Кирпичева.

§ 2. Неограниченный цилиндр ($\delta = 0$)

$[\Gamma = 1, \quad \xi = r, \quad \delta = 0, \quad t(r,0) = f(r), \quad \theta(r,0) = \varphi(r),$

$q_q = \mathrm{const}, \quad q_m = \mathrm{const}]$

Интегрируем систему дифференциальных уравнений (XII)—(XIII) при указанных в § 1 краевых условиях. Это интегрирование осуществим с помощью конечного интегрального преобразования Ханкеля.

Найдем функцию распределения потенциала переноса вещества $\theta(r,\tau)$ в цилиндре.

Применяя интегральное преобразование

$$\theta_H(p_n,\tau) = \int_0^R r\,\theta(r,\tau)\,J_0(p_n r)\,dr, \qquad (2.1)$$

где p_n — корни характеристического уравнения

$$J_0'(p_n R) = 0,$$

к группе производных и учитывая граничное условие (XVII), получим

$$\int_0^R\left[\frac{\partial^2\theta(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial r}\right] r\,J_0(p_n r)\,dr =$$

$$= -\frac{q_m}{\lambda_m} RJ_0(p_n R) - p_n^2 \theta_H(p_n \tau). \qquad (2.2)$$

Умножая обе части уравнения (XIII) на $rJ_0(p_n r)$, интегрируя относительно r от 0 до R и учитывая (2.1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно τ:

$$\frac{d\theta_H(p_n,\tau)}{d\tau} + a_m p_n^2 \theta_H(p_n,\tau) = -\frac{q_m}{c_m \gamma_0} RJ_0(p_n R).$$

Решением этого уравнения будет

$$\theta_H(p_n,\tau) = C(p_n)\exp(-a_m p_n^2 \tau) -$$

$$- \frac{q_m R}{\lambda_m p_n^2} J_0(p_n R)\,[1 - \exp(-a_m p_n^2 \tau)]. \qquad (2.3)$$

Постоянную интегрирования $C(p_n)$ найдем, используя начальное условие для потенциала вещества; имеем

$$C(p_n) = \int_0^R \varphi(r) r J_0(p_n r)\, dr.$$

Следовательно, выражение (2.3) для распределения изображения потенциала переноса вещества в цилиндре перепишется так:

$$\theta_H(p_n,\tau) = \exp(-a_m p_n^2 \tau) \int_0^R \varphi(r) r J_0(p_n r) dr -$$

$$- \frac{q_m R}{\lambda_m p_n^2} J_0(p_n R)\,[1 - \exp(-a_m p_n^2 \tau)]. \qquad (2.4)$$

Оригинал $\theta_H(p_n,\tau)$ найдем по формуле обращения, которая для данной задачи имеет вид

$$\theta(r,\tau) = \frac{2}{R^2}\theta_H(0,\tau) + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \theta_H(p_n,\tau)\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}.$$

Так как

$$\theta_H(0,\tau) = -\frac{q_m R\tau}{c_T \gamma_0} + \int_0^R \varphi(r) r\, dr$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0 (p_n r)}{(p_n R)^2 J_0 (p_n R)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{r^2}{R^2}\right),$$

то для распределения потенциала переноса вещества получаем

$$\theta(r, \tau) - \frac{2}{R^2}\int_0^R \varphi(r) r\, dr = -\frac{q_m R}{a_m \gamma_0 c_T'}\left[2\,\mathrm{Fo}^* - \frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{r^2}{R^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}^*\right)\right] + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)} \times$$

$$\times \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}^*\right) \int_0^R \varphi(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) dr. \qquad (2.5)$$

В решении (2. 5) $\mu_n = p_n R$ являются корнями характеристического уравнения

$$J_1(\mu) = 0. \qquad (2.6)$$

Значения μ_n приведены в таблице 34.

Дифференциальное уравнение изображения температуры цилиндра можно получить, применив к (XII) конечное интегральное преобразование Ханкеля и учтя граничное условие (XVI). Выполнив необходимые операции, будем иметь

$$\frac{dt_H(p_n, \tau)}{d\tau} + a_q p_n^2 t_H(p_n, \tau) = \frac{a_q q_q R}{\lambda_q} J_0(p_n R) + \frac{a \rho c_T'}{c_q} \frac{d\theta_H(p_n, \tau)}{d\tau}, \qquad (2.7)$$

где

$$t_H(p_n, \tau) = \int_0^R t(r, \tau)\, r\, J_0(p_n r) dr \quad \text{и} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\frac{d\theta_h(p_n, \tau)}{d\tau}$ найдем, продифференцировав (2. 5) по τ. Полученное значение производной подставляем в уравнение (2. 7). В результате имеем

$$\frac{dt_H(p_n, \tau)}{d\tau} + a_q p_n^2 t_H(p_n, \tau) = \frac{a_q q_q R}{\lambda_q} J_0(p_n R) -$$

$$- \frac{\varepsilon \rho c_{\mathrm{T}}'}{c_q} \exp(-a_m p_n^2 \tau) \left\{ \frac{q_m R}{\gamma_0 c_{\mathrm{T}}'} J_0(p_n R) + a_m p_n^2 \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^R \varphi(r)\, r\, J_0(p_n r) dr \right\}.$$

Решением этого дифференциального уравнения после использования соответствующего начального условия будет (при $a_m \neq a_q$):

$$t_H(p_n, \tau) = \frac{q_q R}{\lambda_q p_n^2} J_0(p_n R) [1 - \exp(-a_q p_n^2 \tau)] +$$

$$+ \exp(-a_q p_n^2 \tau) \int_0^R f(r)\, r\, J_0(p_n r)\, d r +$$

$$+ \frac{\varepsilon \rho c_{\mathrm{T}}'}{c_q} \frac{a_m}{a_m - a_q} \left\{ \frac{q_m R}{a_m \gamma_0 p_n^2 c_{\mathrm{T}}'} J_0(p_n R) + \right.$$

$$\left. + \int_0^R \varphi(r)\, r\, J_0(p_n r)\, d r \right\} [\exp(-a_m p_n^2 \tau) -$$

$$- \exp(-a_q p_n^2 \tau)]. \qquad (2.8)$$

Оригинал (2.8) ищем по соотношению

$$t(r, \tau) = \frac{2}{R^2} t_H(0, \tau) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} t_H(p_n, \tau) \frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}.$$

Так как

$$t_H(0, \tau) = \frac{a_q q_q R \tau}{\lambda_q} - \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{q_m R \tau}{\gamma_0} + \int_0^R f(r)\, r\, dr,$$

то решение дифференциального уравнения (XII) после некоторых преобразований будет следующим:

$$t(r, \tau) - \frac{2}{R^2} \int_0^R f(r)\, r\, dr = \frac{q_q R}{\lambda_q} \left[2\,\mathrm{Fo} - \frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0\left(\mu_n \frac{r}{R} \right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) + \right.$$

$$+\frac{\lambda_q}{q_q R^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)\times$$

$$\times\int_0^R f(r)\,r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr\Bigg]+\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\,\frac{\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\,\frac{q_m R}{a_m\gamma_0}\times$$

$$\times\Bigg\{2\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)}\left[\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*\right)\right]-\frac{\lambda_m}{q_m R^3}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)}\left[\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)-\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*\right)\right]\times$$

$$\times\int_0^R\varphi(r)\,r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr\Bigg\}. \qquad (2.9)$$

Если начальное распределение потенциалов переноса в цилиндре равномерно и равно постоянным, т. е.

$$f(r)=t(r,0)=t_0=\mathrm{const}\ \text{и}\ \varphi(r)=\vartheta(r,0)=\vartheta_0=\mathrm{const},$$

то из решений (2.5) и (2.9), как частный случай, получим соответственно:

$$\Theta=\frac{\vartheta_0-\vartheta(r,\tau)}{\vartheta_0-\vartheta_p}=\mathrm{Ki}_m\left[2\mathrm{Fo}^*-\frac{1}{4}\left(1-2\frac{r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*\right)\right], \qquad (2.10)$$

$$T=\frac{t(r,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=\mathrm{Ki}_q\left[2\mathrm{Fo}-\frac{1}{4}\left(1-2\frac{r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon \mathrm{Ko}\,\mathrm{Ki}_m\,\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\left\{2(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,I_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})-\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*)\right]\right\}. \qquad (2.11)$$

В получении (2.10) и (2.11) использовано свойство интегралов

$$\int_0^R \varphi(r)\,r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr \quad \text{и} \quad \int_0^R f(r)\,r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr,$$

которые при $p_n \neq 0$ равны нулю.

§ 3. Шар ($\delta = 0$)

$$[\Gamma = 2,\ \ \xi = r,\ \ \delta = 0,\ \ t(r,0) = f(r),\ \ \vartheta(r,0) = \varphi(r),$$

$$q_q = \mathrm{const},\ \ q_m = \mathrm{const}]$$

Дадим теперь решение системы уравнений внутреннего тепло- и массообмена для шара при краевых условиях, рассмотренных в предыдущих параграфах. Интегрирование системы осуществим посредством конечного интегрального преобразования Фурье.

Определим распределение потенциала переноса вещества в шаре. Из уравнения (XIII) с учетом названных выше условий следует

$$\int_0^R\left(\frac{\partial^2\vartheta(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{2}{R}\,\frac{\partial\vartheta(r,\tau)}{\partial r}\right)r\,\frac{\sin p_n r}{p_n}\,dr =$$

$$=-\frac{q_m R}{a_m\,\gamma_0\,c_T}\,\frac{\sin p_n R}{p_n}-p_n^2\,\vartheta_{s.F}(p_n,\tau),$$

где p_n является корнем характеристического уравнения

$$\mathrm{tg}\,pR = pR, \qquad (3.1)$$

и

$$\vartheta_{s.F} = \int_0^R r\,\vartheta(r,\tau)\,\frac{\sin p_n r}{p_n}\,dr.$$

Поэтому уравнение (XIII) эквивалентно дифференциальному уравнению θ в изображениях

$$\frac{d\,\theta_{s.F}(p_n, \tau)}{d\tau} + a_m\, p_n^2\, \theta_{s.F}(p_n, \tau) = -\frac{q_m R}{\gamma_0 c_T'} \frac{\sin p_n R}{p_n}. \qquad (3.2)$$

Решение уравнения (3.2) с учетом начального условия будет

$$\theta_{s.F}(p_n, \tau) = \exp(-a_m p_n^2 \tau) \int_0^R \varphi(r) r \frac{\sin p_n r}{p_n} dr -$$

$$- \frac{q_m R^2}{a_m \gamma_0 c_T'} \frac{\sin p_n R}{p_n R} \frac{1}{p_n^2} [1 - \exp(-a_m p_n^2 \tau)]. \qquad (3.3)$$

Применяя к последнему равенству формулу обращения

$$\theta(r, \tau) = \frac{3}{R^3} \theta_{s.F}(0, \tau) +$$

$$+ \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\sin^2 p_n R} \frac{\sin p_n r}{r} \theta_{s.F}(p_n, \tau),$$

для потенциала переноса вещества получаем следующее выражение:

$$\theta(r, \tau) - \frac{3}{R^3} \int_0^R \varphi(r) r^2 dr =$$

$$= -\frac{q_m R}{c_T' a_m \gamma_0} \left[\frac{3 a_m \tau}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n R \sin p_n R} \frac{\sin p_n r}{p_n r} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n R \sin p_n R} \frac{\sin p_n r}{p_n r} \exp(-a_m p_n^2 \tau) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{R \sin^2 p_n R} \frac{p_n \sin p_n r}{r} \exp(-a_m p_n^2 \tau) \times$$

$$\times \int_0^R \varphi(r) r \frac{\sin p_n r}{p_n} dr.$$

Принимая во внимание уравнение (3.1), а также учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n R \sin p_n R} \frac{\sin p_n r}{p_n r} = -\frac{1}{10}\left(3 - 5\frac{r^2}{R^2}\right),$$

решение можно окончательно переписать так:

$$\theta(r, \tau) - \frac{3}{R^3}\int_0^R \varphi(r)\, r^2\, dr =$$

$$= -\frac{q_m R}{a_m \gamma_0 c_T}\left[3\,\mathrm{Fo}^* - \frac{1}{10}\left(3 - 5\frac{r^2}{R^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{\sin \mu_n \dfrac{r}{R}}{\mu_n \dfrac{r}{R}} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}^*)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n \cos^2 \mu_n} \frac{\sin \mu_n \dfrac{r}{R}}{Rr} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}^*) \times$$

$$\times \int_0^R \varphi(r)\, r \frac{\sin \mu_n \dfrac{r}{R}}{\mu_n}\, dr. \qquad (3.4)$$

Здесь $\mu_n = p_n R$ корни уравнения (3.1). Их значения приведены в таблице 33.

Найдем теперь распределение в шаре потенциала переноса тепла. Дифференциальное уравнение в изображениях для температуры будет

$$\frac{d t_{s.F}(p_n, \tau)}{d\tau} + a_q p_n^2 t_{s.F}(p_n, \tau) =$$

$$= \frac{a_q q_q R}{\lambda_q} \frac{\sin p_n R}{p_n} + \frac{\varepsilon \rho c_T'}{c_q} \frac{d\theta_{s.F}(p_n, \tau)}{d\tau}, \qquad (3.5)$$

где

$$t_{s.F}(p_n, \tau) = \int_0^R t(r, \tau)\, r \frac{\sin p_n r}{p_n}\, dr,$$

p_n—корень характеристического уравнения (3.1).

Производную $\frac{d\,\theta_{s.F}(p_n, \tau)}{d\,\tau}$ определим из уравнения (3.3); подставляя полученное значение в (3.5), будем иметь

$$\frac{d\,t_{s.F}(p_n, \tau)}{d\,\tau} + a_q\,p_n^2\,t_{s.F}(p_n, \tau) = \frac{a_q\,q_q\,R^2}{\lambda_q}\,\frac{\sin p_n R}{p_n R} -$$

$$- \exp(-a_m\,p_n^2\,\tau)\,\frac{\varepsilon\,\rho\,c_T'}{c_q}\left\{\frac{q_m R^2}{\gamma_0\,c_T'}\,\frac{\sin p_n R}{p_n R} + \right.$$

$$\left. + a_m\,p_n^2 \int_0^R \varphi(r)\,r\,\frac{\sin p_n r}{p_n}\,dr\right\}.$$

Решением этого уравнения будет

$$t_{s.F}(p_n, \tau) = \frac{q_q R^2}{\lambda_q}\,\frac{\sin p_n R}{p_n R}\,\frac{1}{p_n^2}[1 - \exp(-a_q\,p_n^2\,\tau)] +$$

$$+ \exp(-a_q\,p_n^2\tau) \int_0^R f(r)\,r\,\frac{\sin p_n r}{p_n}\,d\,r +$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\rho\,c_T'}{c_q}\,\frac{a_m}{a_m - a_q}\left\{\frac{q_m R^2 \sin p_n R}{a_m\,\gamma_0\,p_n^2\,c_T' p_n R} + \right.$$

$$\left. + [\exp(-a_m\,p_n^2\,\tau) - \exp(-a_q\,p_n^2\tau)] \int_0^R \varphi(r)\,r\,\frac{\sin p_n r}{p_n}\,dr\right\}.$$

Ввиду того что формула обращения для температуры имеет вид

$$t(r, \tau) = \frac{3}{R^3}\,t_{s.F}(0, \tau) +$$

$$+ \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\sin^2 p_n R}\,\frac{\sin p_n r}{r}\,t_{s.F}(p_n, \tau),$$

после преобразования окончательное решение для распределения температуры в шаре запишется следующим образом:

$$t(r, \tau) - \frac{3}{R^3}\int_0^R f(r)\,r^2\,dr = \frac{q_q R}{\lambda_q}\left[3\,\mathrm{Fo} - \frac{1}{10}\left(3 - 5\frac{r^2}{R^2}\right) -\right.$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\dfrac{r}{R}}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})+$$

$$+\frac{\lambda}{q_q R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n\cos^2\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{Rr}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\times$$

$$\times\int_0^R f(r)r\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n}\,dr\Bigg]+\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\,\frac{\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\,\frac{q_m R}{a_m\gamma_0}\Bigg\{3(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\dfrac{r}{R}}\left[\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})-\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*)\right]-$$

$$-\frac{a_m\gamma_0 c_T'}{q_m R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n\cos^2\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{Rr}\times$$

$$\times\left[\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})-\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*)\right]\times$$

$$\times\int_0^R\varphi(r)\,r\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n}\,dr\Bigg\}. \qquad (3.6)$$

Если $\varphi(r)=\theta_0=\mathrm{const}$, и $f(r)=t_0=\mathrm{const}$, то решения для потенциалов переноса вещества и тепла (3.4) и (3.6) превращаются соответственно в решения (3.7) и (3.8):

$$\Theta=\frac{\theta_0-\theta(r,\tau)}{\theta_0-\theta_p}=\mathrm{Ki}_m\left[3\,\mathrm{Fo}^*-\frac{1}{10}\left(3-5\frac{r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\dfrac{r}{R}}{\mu_n\dfrac{r}{R}}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*)\right], \qquad (3.7)$$

$$T=\frac{t(r,\tau)-t_0}{t_c-t_0}=\mathrm{Ki}_q\left[3\,\mathrm{Fo}-\frac{1}{10}\left(3-5\frac{r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\frac{\sin\mu_n\frac{r}{R}}{\mu_n\frac{r}{R}}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\Big]+$$

$$+\frac{\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Ki}_m\,\mathrm{Lu}}{\mathrm{Lu}-1}\Big\{3(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\frac{\sin\mu_n\frac{r}{R}}{\mu_n\frac{r}{R}}\times$$

$$\times[\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})-\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo}^*)]\Big\}. \qquad (3.8)$$

§ 4. Анализ решений

Дадим анализ аналитических решений, полученных в § 1—3 (уравнения (1.7), (1.11)—(1.13), (2.5), (2.9)—(2.11), (3.4), (3.6)—(3.8). В случае постоянного и равномерного начального распределения потенциалов переноса распределение температуры в теле представляет собой суперпозицию трех температурных полей. Первое поле, описываемое соотношением в квадратной скобке, характеризует прогрев материала без учета массообмена и фазового перехода в теле. Второе поле учитывает влияние неподвижных стоков (источников) тепла (члены с Fo, стоящие во второй совокупности членов). Наконец, третье поле характеризует влияние подвижного источника тепла—фазовый переход перемещающегося вещества (члены с Fo*, стоящие во второй совокупности членов).

В том случае, когда критерий $\varepsilon = 0$, т. е. фазовый переход в материале отсутствует, все три решения превращаются в обычные классические решения уравнения теплопроводности без источника тепла.

Все сказанное справедливо также и для более общих решений, полученных в предположении, что начальное распределение температуры и потенциала вещества не является равномерным и постоянным, а дается в виде функции координат. В последнем случае решения содержат дополнительные слагаемые, характеризующие влияние начальных условий.

Ряды, входящие в решения, быстро сходятся, поэтому полученные решения удобны для инженерных расчетов.

Распределение потенциала переноса вещества в теле соответствует классическим решениям для уравнений диф-

фузии и теплопроводности. С увеличением времени, точнее критерия Fo^*, члены ряда, входящие в решения, быстро убывают и при некотором значении $Fo^* > Fo_1^*$ становятся ничтожно малыми по сравнению с двумя первыми слагаемыми, так что всем рядом можно пренебречь. Начиная с этого момента времени, $\theta(\xi, \tau)$ в любой точке тела будет линейной функцией времени, а его распределение в теле подчиняется закону параболы, т. е. устанавливается квазистационарный режим.

§ 5. Неограниченный цилиндр ($\delta \neq 0$)

$$[\Gamma = 1, \quad \xi = r, \quad t(r, 0) = f_1(r), \quad \theta(r, 0) = f_2(r),$$

$$q_q = q_q(\tau), \quad q_m = q_m(\tau)]$$

Решаем систему уравнений (I′)—(II′) при граничных условиях (IX)—(XI) и начальных условиях (XIV) методом совместного применения интегральных преобразований Ханкеля и Лапласа. В отличие от предшествовавших параграфов в целях сокращения записи дальнейших преобразований переобозначим потенциалы переноса тепла и вещества через $\theta_i (i = 1,2)$, так что $\theta_1 = t$ и $\theta_2 = \theta$, кроме этого, индексы q и m при коэффициентах соответственно запишем через 1 и 2.

По отношению к переменной r воспользуемся конечным интегральным преобразованием Ханкеля

$$\{\theta_i(p, \tau)\}_H = \int_0^R r\,\theta_i(r, \tau)\, J_0(pr)\, dr, \tag{5.1}$$

где p — корень характеристического уравнения $J_0'(pR) = 0$.

Переход от изображения $\{\theta_i(p, \tau)\}_H$ к оригиналу $\theta_i(r, \tau)$ осуществляется посредством формулы

$$\theta_i(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\,\theta_i(r, \tau)\, dr + \\ + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)} \{\theta_i(p, \tau)\}_H. \tag{5.2}$$

Применение преобразования Ханкеля (5.1) с учетом граничных условий (IX)—(XI) к группе членов уравнений (I′)—(II′), находящихся в квадратных скобках, приводит к следующим соотношениям:

$$\int_0^R \left[\frac{\partial^2 \theta_1(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1(r,\tau)}{\partial r} \right] r J_0(pr)\, dr =$$

$$= R \frac{q_1(\tau)}{\lambda_1} J_0(pR) - p^2 \{\theta_1(p,\tau)\}_H, \qquad (5.3)$$

$$\int_0^R \left[\frac{\partial^2 \theta_2(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \theta_2(r,\tau)}{\partial r} \right] r J_0(pr)\, dr =$$

$$= -R \left[\delta \frac{q_1(\tau)}{\lambda_1} + \frac{q_2(\tau)}{\lambda_2} \right] J_0(pR) - p^2 \{\theta_2(p,\tau)\}_H. \qquad (5.4)$$

Предполагая, что оператор преобразования Ханкеля $\{\ \}_H$ коммутативен с оператором дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \tau}$, после умножения всех членов уравнений (I′)—(II′) на $rJ_0(pr)$ и интегрирования по r от нуля до R с учетом (5.3)—(5.4), исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных можно преобразовать к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\{\theta_1(p,\tau)\}_H &= a_1 \left[R \frac{q_1(\tau)}{\lambda_1} J_0(pR) - \right. \\ &\left. - p^2 \{\theta_1(p,\tau)\}_H \right] + \varepsilon\rho \frac{c'}{c} \frac{d}{d\tau} \{\theta_2(p,\tau)\}_H \\ \frac{d}{d\tau}\{\theta_2(p,\tau)\}_H &= -a_2 \left[R \frac{q_2(\tau)}{\lambda_2} J_0(pR) + \right. \\ &\left. + p^2 \{\theta_2(p,\tau)\}_H \right] - a_2 \delta p^2 \{\theta_1(p,\tau)\}_H \end{aligned}\right\}, \qquad (5.5)$$

При выводе уравнений (5.5) предполагалось, что условия (XIV) после применения преобразования Ханкеля (5.1) переходят в условия

$$[\theta_i(p,0)\}_H = \{f_i(p)\}_H \quad (i=1,2). \qquad (5.6)$$

Применим теперь к системе дифференциальных уравнений (5.5) и начальным условиям (5.6) интегральное преобразование Лапласа

$$\{\theta_i(r,\ s)\}_L = s\int_0^\infty \theta_i(r,\ \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau, \qquad (5.7)$$

в результате получим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$(s+a_1p^2)\{\theta_i(p,\ s)\}_{HL} - \frac{\varepsilon\rho\, c'}{c}\, s\{\theta_2(p,\ s)\}_{HL} =$$

$$= s\{f_1(p)\}_H + \frac{a_1}{\lambda_1} R J_0(pR)\{q_1(s)\}_L - \frac{\varepsilon\rho\, c'}{c}\, s\{f_2(p)\}_H,$$

$$a_2\delta p^2\{\theta_1(p,\ s)\}_{HL} + (s+a_2p^2)\{\theta_2(p,\ s)\}_{HL} =$$

$$= s\{f_2(p)\}_H - \frac{a_2}{\lambda_2} RJ_0(pR)\{q_2(s)\}_L.$$

Решая последнюю систему относительно $\{\theta_i(p,\ s)\}_{HL}$ $(i=1,2)$ и переходя к оригиналам этих потенциалов относительно параметра s, получим

$$\{\theta_i(p,\ \tau)\}_H = \sum_{j,k=1}^{2} [A^i_{jk}\{P_{jk}\}_H + B^i_{jk}\{Q_{jk}\}_H], \qquad (5.8)$$

где

$$A^1_{j1} = (-1)^j \frac{1-\nu_j^2}{\nu_1^2-\nu_2^2}, \quad A^1_{j2} = (-1)^j \frac{\varepsilon\rho\,\dfrac{c'}{c}}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$B^1_{j1} = (-1)^j \frac{a_1}{\lambda_1}\frac{1-\nu_j^2}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$B^1_{j2} = (-1)^j \nu_j^2 \frac{a_2}{\lambda_2}\frac{\varepsilon\rho\,\dfrac{c'}{c}}{\nu_1^2-\nu_2^2} = (-1)^j \frac{a_2}{\lambda_2\delta} - \frac{\varepsilon\,\mathrm{KoPn}\,\nu_j^2}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$A^2_{j1} = (-1)^j \frac{\delta}{\nu_2^2-\nu_1^2}, \quad A^2_{j2} = (-1)^j \left[\frac{\dfrac{1}{\mathrm{Lu}} - \nu_j^2 + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}}{\nu_1^2-\nu_2^2}\right],$$

$$B_{j1}^2 = (-1)^j \frac{a_1}{\lambda_1} \frac{\delta}{\nu_2^2 - \nu_1^2}, \quad B_{j2}^2 = (-1)^j \frac{a_2}{\lambda_2} \frac{\frac{1}{\mathrm{Lu}} - \nu_j^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2},$$

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1+\varepsilon\,\mathrm{KoPn}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^{j+1}\sqrt{\left(1+\varepsilon\,\mathrm{KoPn}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2-\frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right],$$

$$\{P_{jk}\}_H = \{f_k(p)\}_H \exp(-R^2 p^2 \nu_j^2\,\mathrm{Fo}_2),$$

$$\{Q_{jk}\}_H = RJ_0(pR)\int_0^\tau q_k(\eta)\times$$

$$\times \exp\left[-R^2p^2\nu_j^2\,\frac{a_2(\tau-\eta)}{R^2}\right]d\eta,$$

$$\mathrm{Fo}_2 = \frac{a_2\tau}{R^2} = \mathrm{LuFo}, \quad (j=1,2).$$

Нетрудно проверить, что функция $\{\theta_i(p, \tau)\}_H$, определяемая выражением (5.8), удовлетворяет начальным условиям (5.6).

Найдем теперь оригинал изображения $\{\theta_i(p, \tau)\}_H$, для этого воспользуемся формулой (5.2). После небольших преобразований получим

$$\theta_i(r, \tau) = \sum_{j,\,k=1}^{2} (A_{jk}^i P_{jk} + B_{jk}^i Q_{jk}) \quad (i=1,2),$$

где

$$P_{jk} = \frac{2}{R^2}\left[\int_0^R r f_k(r)\,dr + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-\mu_n^2\nu_j^2\,\mathrm{Fo}_2)\int_0^R r f_k(r)\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr\right],$$

$$Q_{jk}=\frac{2}{R}\left[\int_0^{\tau} q_k(\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0(\mu_n)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-\mu_n^2\,\nu_j^2\,\mathrm{Fo}_2)\int_0^{R} q_k(\eta)\exp\left(\mu_n^2\,\nu_j^2\,\frac{a_2\eta}{R^2}\right)\right]d\eta,$$

μ_n—корни уравнения $J_0'(\mu)=0$.

§ 6. Шар ($\delta\neq 0$)

$$[\Gamma=2,\ \xi=r,\ t(r,\ 0)=f_1(r),\ \theta(r,\ 0)=f_2(r),$$

$$q_q=q_q(\tau),\ q_m=q_m(\tau)]$$

Решаем задачу при тех же условиях, как это было сделано в предыдущем параграфе. Воспользуемся методом совместного применения интегральных синус-преобразований Фурье и преобразований Лапласа. Синус-преобразование Фурье, отмеченное уже в § 3, имеет вид

$$\{\theta_i(p,\ \tau)\}_F=\int_0^{R} r\,\theta_i(r,\ \tau)\,\frac{\sin pr}{p}\,dr, \tag{6.1}$$

где p—корень характеристического уравнения

$$\mathrm{tg}\,pR=pR.$$

По аналогии с § 3 и 5, применяя к системе уравнений (I′)—(II′) и краевым условиям (IX)—(XI), (XIV) сначала преобразование (6. 1), а затем преобразование Лапласа (5.7), получим алгебраическую систему уравнений

$$(s+a_1p^2)\{\theta_1(p,\ s)\}_{FL}-\frac{\varepsilon\rho c'}{c}\,s\{\theta_2(p,\ s)\}_{FL}=$$

$$=s\{f_1(p)\}_F+R\frac{a_1}{\lambda_1}\frac{\sin pR}{p}\{q_1(s)\}_L-$$

$$-\frac{\varepsilon\rho c'}{c}\,s\{f_2(p)\}_F, \tag{6.2}$$

$$a_2\delta p^2\{\theta_1(p,\ s)\}_{FL}+(s+a_2p^2)\{\theta_2(p,\ s)\}_{FL}=$$

$$=s\{f_2(p)\}_F-R\frac{a_2}{\lambda_2}\frac{\sin pR}{p}\{q_2(s)\}_L\ . \qquad (6.3)$$

Решая систему уравнений (6.2), (6.3) по отношению к $\{\theta_i\ (p,\ s)\}_{FL}$ $(i=1,2)$ и переходя к оригиналам по s, получим

$$\{\theta_i\ (p,\ \tau)\}_F=\sum_{j,\ k=1}^{2}[A^i_{jk}\{P_{jk}\}_F+B^i_{jk}\{Q_{jk}\}_F], \qquad (6.4)$$

где A^i_{jk} и B^i_{jk} — определяются выражениями, приведенными в предыдущем параграфе:

$$\{P_{jk}\}_F=\{f_k(p)\}_F\exp[-R^2p^2\nu_j^2\ \mathrm{Fo}_2],$$

$$\{Q_{jk}\}_F=\frac{R\sin pR}{p}\int_0^{\tau}q_k(\eta)\exp\left[p^2R^2\nu_j^2\frac{a_2(\tau-\eta)}{R^2}\right]d\eta.$$

Обратное преобразование Фурье для рассматриваемой задачи можно получить по формуле

$$\theta_i\ (r,\ \tau)=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2f_i\ (r,\ \tau)\ dr+$$

$$+\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\sin^2 p_nR}\frac{\sin p_nr}{r}\{\theta_i\ (p,\ \tau)\}_F. \qquad (6.5)$$

Применяя к равенствам (6.4) формулу (6.5), для потенциалов переноса тепла и вещества окончательно получим

$$\theta_i\ (r,\ \tau)=\sum_{j,\ k=1}^{2}(A^i_{jk}P_{jk}+B^i_{jk}Q_{jk}),$$

где

$$P_{jk}=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2f_k\ (r)\ dr+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\sin^2\mu_n}\times$$

$$\times \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} \exp\left(-\mu_n^2 \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right) \int_0^R r f_k(r) \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n} dr,$$

$$Q_{jk} = \frac{3}{R^2} \int_0^\tau q_k(\eta)\, d\eta + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\frac{r}{R} \sin \mu_n} \times$$

$$\times \exp\left(-\mu_n^2 \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right) \int_0^\tau q_k(\eta) \exp\left(\mu_n^2 \nu_j^2 \frac{a_2 \eta}{R^2}\right) d\eta,$$

μ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \mu.$$

§ 7. Неограниченная пластина. Обобщенные граничные условия второго рода

Решим систему уравнений (I′)—(III′) при начальных условиях (XIV), условиях симметрии (XV), но при граничных условиях, имеющих вид

$$\frac{\partial \theta_1(R, \tau)}{\partial x} + \alpha \theta_1(R, \tau) + \beta \theta_2(R, \tau) = \varphi_1(\tau), \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial \theta_2(R, \tau)}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \theta_1(R, \tau)}{\partial x} + \beta' \theta_2(R, \tau) = \varphi_2(\tau). \qquad (7.2)$$

Здесь, как и в предыдущих параграфах, $\theta_1 = t$, $\theta_2 = \theta$, α, β, α', β' — определенные совокупности известных теплофизических коэффициентов.

Следуя А. П. Прудникову, рассмотрим вспомогательную задачу, в которой граничные условия (7.1) и (7.2) заменяются условиями

$$\theta_k(R, \tau) = \chi_k(\tau), \qquad (k = 1,2). \qquad (7.3)$$

Последнюю будем решать методом совместного применения интегральных преобразований Фурье и Лапласа. По отношению к переменной x применим конечное косинус-преобразование Фурье

$$\{\theta_i(p,\tau)\}_F = \int_0^R \theta_i(x,\tau)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\,x dx. \qquad (7.4)$$

Оригинал изображения потенциалов переноса $\{\theta_i(p,\tau)\}_F$ определится по формуле

$$\theta_i(x,\tau) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\{\theta_i(p,\tau)\}_F\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\,x. \qquad (7.5)$$

По отношению к переменной τ применим преобразование Лапласа

$$\{\theta_i(x,s)\}_L = \int_0^{\infty} e^{-s\tau}\theta(x,\tau)\,d\tau. \qquad (7.6)$$

Посредством последовательного применения интегральных преобразований (7.4), (7.6) с учетом начальных условий (XIV) и граничных условий (7.3) исходная задача сводится к алгебраической системе, применяя к которой обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\{\theta_i(p,\tau)\}_F = \sum_{j,\,s=1}^{2}\left[A^i_{js}\{v_{js}\}_F + B^i_{js}\{w_{js}\}_F\right]\ (i=1,2), \qquad (7.7)$$

где

$$\{v_{js}\}_F = \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\nu_j^2\,\mathrm{Fo}_2\right]\{f_s(p)\}_F,$$

$$\{w_{js}\}_F = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\times$$

$$\times\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\nu_j^2\,\mathrm{Fo}_2\right]^{\tau}_{*}\chi_s(\tau),$$

$$\nu_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1+\varepsilon\mathrm{KoPn}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)+(-1)^{j+1}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\left(1+\varepsilon\mathrm{KoPn}+\frac{1}{\mathrm{Lu}}\right)^2-\frac{4}{\mathrm{Lu}}}\right],$$

$$\mathrm{Fo}_2 = \frac{a_2\tau}{R^2}.$$

Знак $\overset{\tau}{*}$ обозначает операцию свертывания:

$$f(\tau)\overset{\tau}{*} g(\tau) = \int_0^\tau f(\eta)\, g(\tau-\eta)\, d\eta = \int_0^\tau f(\tau-\eta)\, g(\eta)\, d\eta = g(\tau)\overset{\tau}{*} f(\tau).$$

Постоянные коэффициенты A_{js}^i, B_{js}^i $(i, j, s = 1,2)$ определяются по формулам:

$$A_{j1}^1 = (-1)^j \frac{1-\nu_j^2}{\nu_1^2-\nu_2^2}, \qquad A_{j2}^1 = (-1)^j \frac{\varepsilon \rho \dfrac{c'}{c}}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$B_{j1}^1 = (-1)^j \frac{a_1\left[1-\nu_j^2-\varepsilon \mathrm{KoPnLu}\,\nu_j^2\right]}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$B_{j2}^1 = (-1)^j \frac{a_2}{\delta}\, \varepsilon \mathrm{KoPn} \frac{\nu_j^2}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$A_{j1}^2 = (-1)^j \frac{\delta}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$A_{j2}^2 = (-1)^j \frac{\nu_j^2 - \varepsilon \mathrm{KoPn} - \dfrac{1}{\mathrm{Lu}}}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$B_{j1}^2 = (-1)^j a_2 \delta \frac{\nu_j^2}{\nu_2^2-\nu_1^2},$$

$$B_{j2}^2 = (-1)^j \frac{a_2\left(\nu_j^2 - \dfrac{1}{\mathrm{Lu}}\right)}{\nu_2^2-\nu_1^2}.$$

Применение формулы обращения (7.5) к выражению (7.7) дает нам

$$\theta_i(x,\tau) = \sum_{j,s=1}^{2} \left(A_{js}^i v_{js} + B_{js}^i w_{js}\right) \quad (i = 1,\ 2), \tag{7.8}$$

где

$$v_{js} = \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right] \times$$

$$\times \int_0^R f_s(\xi) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\,\xi\,d\xi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}x, \quad (7.9)$$

$$w_{js} = \frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right]^{\tau} * (-1)^n \times$$

$$\times \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\,\chi_s(\tau)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}x. \quad (7.10)$$

Выражения (7.9) и (7.10) можно упростить, вводя тэта-функцию; после выполнения необходимых преобразований получим

$$v_{js} = \frac{1}{2R}\int_0^R \left\{\vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2R},\ \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right] + \vartheta_2\left[\frac{x+\xi}{2R},\ \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right]\right\} \times$$

$$\times f_s(\xi)\,d\xi,$$

$$w_{js} = \frac{1}{R}\int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_2\left[\frac{R-x}{2R},\ \nu_j^2 \frac{a_2(\tau-\eta)}{R^2}\right]\chi_s(\eta)\,d\eta, \quad (7.11)$$

$$\vartheta_2(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left[-\frac{(x+n)^2}{\tau}\right]. \quad (7.12)$$

Чтобы решить поставленную в данном параграфе задачу, необходимо определить неизвестные функции $\chi_k(\tau)$ из граничных условий (7.1) и (7.2). Дифференцируя (7.8) по x и заменяя вторую производную по x от ϑ_2 ее производной по τ, получим

$$\frac{\partial \theta_i(x,\tau)}{\partial x} = \sum_{j,s=1}^{2}(A_{js}^i P_{js} + B_{js}^i Q_{js}), \quad (i=1,2), \quad (7.13)$$

где

$$P_{js}(x,\tau) = \frac{1}{2R}\int_0^R \frac{\partial}{\partial x}\left\{\vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2R},\ \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right] +\right.$$

$$\left. + \vartheta_2\left[\frac{x+\xi}{2R},\ \nu_j^2 \mathrm{Fo}_2\right]\right\} f_s(\xi)\,d\xi,$$

$$Q_{js}(x\,\tau) = \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R}\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial(\tau-\eta_1)}\vartheta_2\left[\frac{R-x}{2R},\ \nu_j^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{a_2(\tau-\eta_1)}{R^2}\right]\chi_s(\eta_1)\,d\eta_1. \qquad (7.14)$$

Нетрудно заметить, что производная $\frac{\partial}{\partial(\tau-\eta_1)}\vartheta_2$, существующая при всех $x \neq R$, стремится к бесконечности, как $\tau^{-3/2}$ при $\tau \to 0$, когда $x = R$ и $\tau \to \eta_1$; поэтому заменим граничные условия (7.1) и (7.2) условиями, которые получаются из последних путем интегрирования по τ. В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial\theta_1(R,\eta_1)}{\partial x}\,d\eta_1 + \alpha\int_0^{\tau}\chi_1(\eta_1)\,d\eta_1 + \beta\int_0^{\tau}\chi_2(\eta_1)\,d\eta_1 =$$

$$= \int_0^{\tau}\varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1, \qquad (7.15)$$

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial\theta_2(R,\eta_1)}{\partial x}\,d\eta_1 + \alpha'\int_0^{\tau}\frac{\partial\theta_1(R,\eta_1)}{dx}\,d\eta_1 + \beta'\int_0^{\tau}\chi_2(\eta_1)\,d\eta_1 =$$

$$= \int_0^{\tau}\varphi_2(\eta_1)\,d\eta_1. \qquad (7.16)$$

Интегрируя (7.13) по τ, найдем

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial\theta_i(x,\eta_1)}{dx}\,d\eta_1 = \sum_{j,s=1}(A_{js}^i P_{js}^* + B_{js}^i Q_{js}^*)\ (i=1,2), \qquad (7.17)$$

где

$$P_{js}^*(x,\tau) = \int_0^{\tau}P_{js}(x,\eta_1)\,d\eta_1,\ Q_{js}^*(x,\tau) = \int_0^{\tau}Q_{js}(x,\eta_1)\,d\eta_1.$$

Интегрируя (7.14) по τ и меняя порядок интегрирования посредством формулы Дирихле, получим

$$Q_{js}^{*}(x, T) = \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R} \int_0^T d\tau \int_0^\tau \chi_s(\eta) \frac{\partial}{\partial(\tau - \eta)} \times$$

$$\times \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \nu_j^2 \frac{a_2(\tau - \eta)}{R^2} \right] d\eta =$$

$$= \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R} \int_0^T \chi_s(\eta)\, d\eta \int_\eta^T \frac{\partial}{\partial(\tau - \eta)} \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \nu_j^2 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{a_2(\tau - \eta)}{R^2} \right] d\tau = \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R} \times$$

$$\times \int_0^T \chi_s(\eta)\, d\eta \left\{ \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \nu_j^2 \frac{a_2(\tau - \eta)}{R^2} \right] - \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, 0 \right] \right\}.$$

Отсюда следует, что при всех $x < R$

$$Q_{js}^{*}(x, T) = \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R} \int_0^T \chi_s(\eta) \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \nu_j^2 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{a_2(T - \eta)}{R^2} \right] d\eta. \qquad (7.18)$$

Расчеты показывают, что (7.18) справедливо и при $x = R$, т. е.

$$Q_{js}^{*}(R, T) = \frac{1}{\nu_j^2 a_2 R} \int_0^T \chi_s(\eta) \vartheta_2 \left[0, \nu_j^2 \frac{a_2(T - \eta)}{R^2} \right] d\eta. \qquad (7.19)$$

Последний интеграл сходится, так как, согласно (7.12), функция ϑ_2 при $\eta \to T$ стремится к бесконечности при $T \to 0$. Используя (7.17) — (7.19) для получения соответствующих слагаемых в модифицированных граничных условиях (7.15) и (7.16), а также принимая во внимание (7.3), получим систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода:

$$\sum_{p=1}^{2} \int_0^\tau K_{\alpha\beta}(\tau - \eta) \chi_\beta(\eta)\, d\eta = g_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, 2), \qquad (7.20)$$

где

$$K_{11}(\tau-\eta_l)=\frac{B_{11}^1}{\nu_1^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_1^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+$$

$$+\frac{B_{21}^1}{\nu_2^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_2^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+\alpha,$$

$$K_{12}(\tau-\eta_l)=\frac{B_{12}^1}{\nu_1^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_1^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+$$

$$+\frac{B_{22}^1}{\nu_2^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_2^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+\beta,$$

$$K_{21}(\tau-\eta_l)=\frac{\alpha' B_{11}^1+B_{11}^2}{\nu_1^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_1^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha' B_{21}^1+B_{21}^2}{\nu_2^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_2^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right],$$

$$K_{22}(\tau-\eta_l)=\frac{\alpha' B_{12}^1+B_{12}^2}{\nu_1^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_1^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha' B_{22}^1+B_{22}^2}{\nu_2^2 a_2 R}\vartheta_2\left[0,\ \nu_2^2\frac{a_2(\tau-\eta_l)}{R^2}\right]+\beta',$$

$$g_1(\tau)=\int_0^\tau \varphi_1(\eta_l)\,d\eta_l-\sum_{j,s=1}^{2}A_{js}^1 P_{js}^*(R,\tau),$$

$$g_2(\tau)=\int_0^\tau \varphi_2(\eta_l)\,d\eta_l-\sum_{j,s=1}^{2}(\alpha' A_{js}^1+A_{js}^2)P_{js}^*(R,\tau).$$

Обозначим

$$K_{11}(\tau-\eta_l)=\frac{G_1(\tau-\eta_l)}{\sqrt{\tau-\eta_l}},\quad K_{22}(\tau-\eta_l)=\frac{G_2(\tau-\eta_l)}{\sqrt{\tau-\eta_l}},\qquad(7.21)$$

где

$$G_1(\tau-\eta_l)=\frac{\varkappa_1}{\sqrt{\pi}}+\frac{B_{11}^1}{\nu_1^2 a_2\sqrt{\nu_1^2 a_2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{R^2 n^2}{\nu_1^2 a_2 (\tau - \eta_l)} \right] + \frac{B_{21}^1}{\nu_2^2 a_2 \sqrt{\nu_2^2 a_2 \pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{R^2 n^2}{\nu_2^2 a_2 (\tau - \eta_l)} \right] + \alpha \sqrt{\tau - \eta_l},$$

$$G_2(\tau - \eta_l) = \frac{\varkappa_2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha' B_{22}^1 + B_{12}^2}{\nu_1^2 a_2 \sqrt{\nu_1^2 a_2 \pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{R^2 n^2}{\nu_1^2 a_2 (\tau - \eta_l)} \right] + \frac{\alpha' B_{22}^1 + B_{22}^2}{\nu_2^2 a_2 \sqrt{\nu_2^2 a_2 \pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{R^2 n^2}{\nu_2^2 a_2 (\tau - \eta_l)} \right] + \beta' \sqrt{\tau - \eta_l},$$

$$\varkappa_1 = \frac{B_{11}^1}{\nu_1^2 a_2 \sqrt{\nu_1^2 a_2}} + \frac{B_{21}^1}{\nu_2^2 a_2 \sqrt{\nu_2^2 a_2}},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\alpha' B_{12}^1 + B_{12}^2}{\nu_1^2 a_2 \sqrt{\nu_1^2 a_2}} + \frac{\alpha' B_{22}^1 + B_{22}^2}{\nu_2^2 a_2 \sqrt{\nu_2^2 a_2}}.$$

Суммирование Σ' в приведенных выражениях распространяется на все целые значения n, кроме $n = 0$. Подставляя выражения (7.21) в (7.20), получим систему обобщенных интегральных уравнений Абеля, которая может быть приведена к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\varphi_\alpha(\tau) + \sum_{\beta=1}^{2} \int_0^\tau \varphi_{\alpha\beta}(\tau, \eta_l) \varphi_\beta(\eta_l)\, a\, \eta_l = \omega_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, 2), \qquad (7.22)$$

где

$$\varphi_{\alpha\beta}(\tau, \eta_l) = \frac{1}{\varkappa_\alpha \sqrt{\pi}} \frac{d}{d\tau} L_{\alpha\beta}(\tau, \eta_l),$$

$$\omega_\alpha(\tau) = \frac{1}{\varkappa_\alpha \sqrt{\pi}} \frac{d}{d\tau} S_\alpha(\tau),$$

$$L_{\alpha\beta}(\tau, \eta_l) = \int_{\eta_l}^{\tau} \frac{G_\alpha(T - \eta_l)}{\sqrt{(\tau - T)(T - \eta_l)}}\, dT \quad (\alpha = \beta),$$

$$L_{\alpha\beta}(\tau, \eta) = \int_{\eta}^{\tau} \frac{K_{\alpha\beta}(T-\eta)}{\sqrt{\tau - T}}\, dT \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$s_{\alpha}(\tau) = \int_{0}^{\tau} \frac{g_{\alpha}(T)}{\sqrt{\tau - T}}\, dT,$$

α и β принимают значения 1, 2.

Окончательное решение поставленной задачи получим после определения $\varphi_{\alpha}(\tau)$ из системы уравнений (7.22) и подстановки их в равенства (7.8) и (7.11).

ГЛАВА V

ДВУХМЕРНЫЕ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

§ 1. Ограниченная пластина. Граничные условия второго рода

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса применительно к двухмерной пластине.

Имеем:

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a_q \left(\frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial \tau}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a_m \left(\frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right) + \\ + a_m \delta \left(\frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right), \tag{1.2}$$

где $u = c_T' \theta$ — удельное массосодержание.

Начальные условия:

$$t(x, y, 0) = f(x, y), \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \tag{1.3}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} = \psi_1(y, \tau), \qquad \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} = \chi_1(x, \tau), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} = \psi_2(y, \tau), \quad \frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} = \chi_2(x, \tau). \qquad (1.7)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье, взятым в области Г

$$(-h \leqslant x \leqslant h), \quad (-d \leqslant y \leqslant d):$$

$$F\{\varphi(x, y)\} = \iint\limits_{(\Gamma)} \exp\left(im \frac{\pi}{h} \xi - in \frac{\pi}{d} \eta \right) \varphi(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = \bar{\varphi}(m, n). \qquad (1.8)$$

Это преобразование действительную функцию $\varphi(x, y)$, интегрируемую в области Г, приводит к изображению $\bar{\varphi}(m, n)$, которое является функцией двух целочисленных аргументов m и n.

Переход от изображения к оригиналу производится по формуле

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd} \sum_{m,n}^{-\infty, \infty} \exp\left(im \frac{\pi}{h} x + in \frac{\pi}{d} y \right) \bar{\varphi}(m, n) =$$

$$= F^{-1}\{\bar{\varphi}(m, n)\}. \qquad (1.9)$$

Если функция $\varphi_1(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике $(-2h \leqslant x \leqslant 2d - 2d \leqslant y \leqslant 2d)$, а функция $\varphi_2(x, y)$ интегрируема в области Г, тогда свертка этих функций будет равна

$$\varphi_1 * \varphi_2(x, y) = \iint\limits_{(\Gamma)} \varphi_1(x - \xi, y - \eta) \varphi_2(\xi, \eta)\, d\xi, d\eta. \qquad (1.10)$$

Если функция $\varphi_1(x, y)$ является периодической по первому из аргументов периода $2h$ и по второму периода $2d$, то имеет место основной закон свертки

$$F\{\varphi_1 * \varphi_2\} = F\{\varphi_1\} F\{\varphi_2\}. \qquad (1.11)$$

Целесообразно продолжить функции t и u в интервалах $(-d \leqslant y \leqslant d)$ и $(-h \leqslant x \leqslant +h)$ четным образом, а их частные производные t'_x, t'_y, u'_x и u'_y —нечетным образом, что можно сделать в силу условий (1.4), (1.5). Тогда в предположении, что F можно переставить с $\frac{\partial}{\partial \tau}$ после применения преобразования Фурье, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{t}\,(m,n,\tau)}{d\tau} = -a_q\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\bar{t}\,(m,n,\tau)+$$

$$+2a_q\left\{(-1)^m\int_{-d}^{d}\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_1(\eta,\tau)\,d\eta+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\int_{-h}^{h}\exp\left(-im\frac{\pi}{n}\xi\right)\chi_1(\xi,\tau)\,d\xi\right\}+\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\frac{d\bar{u}\,(m,n,\tau)}{d\tau}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\bar{u}\,(m,n,\tau)}{d\tau} = -a_m\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\bar{u}\,(m,n,\tau)-a_m\delta\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\times$$

$$\times\bar{t}\,(m,n,\tau)+2a_m\left\{(-1)^m\int_{-d}^{d}\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_2(\eta,\tau)\,d\eta+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\int_{-h}^{h}\exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right)\chi_2(\xi,\tau)\,d\xi\right\}+2\frac{\varepsilon\rho}{c_q}\times$$

$$\times\left\{(-1)^m\int_{-d}^{d}\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_1(\eta,\tau)\,d\eta+(-1)^n\int_{-h}^{h}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right)\chi_1(\xi,\tau)\,d\xi\right\} \quad (1.13)$$

с начальными условиями

$$\bar{t}\,(m,n,0)=\bar{f}\,(m,n), \qquad \bar{u}\,(m,n,0)=\bar{\varphi}\,(m,n). \quad (1.14)$$

Систему уравнений (1.12), (1.13) решаем методом интегрального преобразования Лапласа. В результате получаем следующее решение для $\bar{t}\,(m,n,\tau)$ и $\bar{u}\,(m,n,\tau)$:

$$\bar{t}\,(m,n,\tau)=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\left\{A_j\bar{\varphi}\,(m,n)\exp\left[-\nu_j^2 a_q \mathrm{Lu}\pi^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{h^2}{d^2}\right)\tau\right]+B_j\bar{f}\,(m,n)\exp\left[-a_q\,\mathrm{Lu}\,\nu_j^2\pi^2\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\tau\Big]+C_j\exp\left[-a_q\,\mathrm{Lu}\,\nu_j^2\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\tau\right]^{\tau}_{*}\times$$

$$\times\Big[(-1)^m\int_{-d}^{d}\exp\left(in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_1(\eta,\tau)\,d\eta+$$

$$+(-1)^n\int_{-h}^{h}\exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right)\chi_1(\xi,\tau)\,d\xi+D_j\times$$

$$\times\exp\left[-a_q\,\mathrm{Lu}\,\nu_j^2\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\tau\right]^{\tau}_{*}\Big[(-1)^m\int_{-d}^{d}\times$$

$$\times\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_2(\eta,\tau)\,d\eta+(-1)^n\int_{-h}^{h}\times$$

$$\times\exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right)\chi_2(\xi,\tau)\,d\xi\Big]\Big\}, \qquad (1.15)$$

где знак $\overset{\tau}{*}$ обозначает взятие свертки по τ от 0 до τ, ν_j^2 определяется по формулам (1.9), (1.10).

Постоянные коэффициенты равны:

$$A_j=\frac{\varepsilon\rho}{c_q(\nu_1^2-\nu_2^2)},\qquad B_j=\frac{\nu_j^2-1}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$C_j=\frac{2a_q[\nu_j^2(1+\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn}\,\mathrm{Lu})-1]}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$D_j=\frac{2a_q\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn}\,\nu_j^2}{\delta(\nu_1^2-\nu_2^2)}. \qquad (1.16)$$

Изображение $\bar{u}(m,n,\tau)$ выражается правой частью равенства (1.15), где вместо коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j надо подставить соответственно коэффициенты A_j', B_j', C_j' и D_j', определенные по следующим формулам:

$$A_j'=\frac{\nu_j^2-\dfrac{1}{\mathrm{Lu}}-\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn}}{\nu_1^2-\nu_2^2},\qquad B_j'=\frac{\delta}{\nu_1^2-\nu_2^2},$$

$$C_j' = \frac{2a_q \delta \operatorname{Lu} \nu_j^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}, \qquad D_j' = \frac{2a_q (\operatorname{Lu} \nu_j^2 - 1)}{\nu_1^2 - \nu_2^2}. \tag{1.17}$$

Прежде чем перейти к оригиналу, необходимо отметить известные свойства тэта-функции, как функции двух переменных:

$$\vartheta_3(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}, \qquad (z = e^{i\pi v}, \quad q = e^{-i\pi\tau}). \tag{1.18}$$

Функция $\bar{K}(m, n, z)$, определяемая соотношением

$$\bar{K}(m, n, z) = \exp\left[-\pi^2 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{d^2} \right) z \right], \tag{1.19}$$

имеет оригинал

$$K(x, y, z) = \frac{1}{4hd} \vartheta_3 \left[\frac{x}{2h}, \frac{i\pi z}{h^2} \right] \vartheta_3 \left[\frac{y}{2d}, \frac{i\pi z}{d^2} \right]. \tag{1.20}$$

В силу известных свойств тэта-функций следует, что функция $K(x, y, z)$ является периодической по x периода $2h$ и по y периода $2d$. Учитывая последнее и принимая во внимание соотношения (1.19), (1.20), нетрудно получить оригиналы по m и n.

После окончательных преобразований будем иметь:

$$t(x, y, \tau) = \frac{1}{4hd} \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} \left\{ A_j \iint_{(\Gamma)} \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2h}, i \operatorname{Lu}, \nu_j^2 \pi \operatorname{Fo}_1 \right) \times \right.$$

$$\times \vartheta_3 \left(\frac{y - \eta}{2d}, i \operatorname{Lu} \pi \nu_j^2 \operatorname{Fo}_2 \right) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi, d\eta +$$

$$+ B_j \iint_{(\Gamma)} \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2h}, i\pi \nu_j^2 \operatorname{Lu} \operatorname{Fo}_1 \right) \vartheta_3 \left(\frac{y - \eta}{2d}, i\pi \nu_j^2 \operatorname{Lu} \operatorname{Fo}_2 \right) \times$$

$$\times f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + C_j \int_0^{\tau} d\theta \left(\vartheta_3 \left[\frac{h - x}{2h}, i\pi \nu_j^2 \operatorname{Lu} \operatorname{Fo}_1 \left(1 - \frac{\theta}{\tau} \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-d}^{d} \vartheta_3 \left[\frac{y - \eta}{2d}, i\pi \nu_j^2 \operatorname{Lu} \operatorname{Fo}_2 \left(1 - \frac{\theta}{\tau} \right) \right] \psi_1(\eta, \theta)\, d\eta + \right.$$

$$+\vartheta_3\left[\frac{d-y}{2d},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{Lu\,Fo}_2\left(1-\frac{\theta}{\tau}\right)\right]\int_{-h}^{h}\vartheta_3\times$$

$$\times\left[\frac{x-\xi}{2\lambda},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{Lu\,Fo}_1\left(1-\frac{\vartheta}{\theta}\right)\right]\chi_1(\xi,\theta)\,d\xi\Bigg)+$$

$$+D_j\int_0^{\tau}d\theta\Bigg(\vartheta_3\left[\frac{h-x}{2h},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{Lu\,Fo}\left(1-\frac{\theta}{\tau}\right)\right]\int_{-d}^{d}\vartheta_3\times$$

$$\times\left[\frac{y-\eta}{2d},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{Lu\,Fo}_2\left(1-\frac{\vartheta}{\tau}\right)\right]\psi_2(\eta,\vartheta)\,d\eta+\vartheta_3\times$$

$$\times\left[\frac{d-y}{2d},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{Lu\,Fo}_2\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)\right]\int_{-h}^{h}\vartheta_3\left[\frac{x-\xi}{2h},\, i\pi\nu_j^2\,\mathrm{LuFo}_1\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)\right]\chi_2(\xi,\tau)\,d\xi\Bigg)\right\}. \qquad (1.21)$$

Оригинал $u(x, y, \tau)$ получается таким же способом. В результате получим аналогичное выражение для $u(x, y, \tau)$, как и соотношение (1.21), но только коэффициенты A_j, B_j, C_j, и D_j надо заменить на A_j', B_j', C_j' и D_j'.

§ 2. Двухмерная пластина. Граничные условия первого и третьего рода

При помощи совместного применения двухмерных конечных комплексных преобразований Фурье и преобразования Лапласа могут быть решены также следующие задачи, относящиеся к неизотермическому перекосу вещества в пластине конечных размеров ($h \times d$) при граничных условиях первого и третьего рода.

Задача 1. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) (см. § 1) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \qquad (3)$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \qquad (5)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_1(y, \tau) = 0, \tag{6}$$

$$a_m \frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_2(y, \tau) = 0, \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_1(x, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m \frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} + a_m \delta \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_2(x, \tau) = 0. \tag{9}$$

Для решения задачи (1)—(9) воспользуемся двухмерным конечным комплексным преобразованием Фурье в области $\Gamma\ (-h \leqslant x \leqslant +h\ -d \leqslant y \leqslant +d)$

$$\bar{\varphi}(m, n) = \int\int \exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi - in\frac{\pi}{d}\eta\right)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{10}$$

и соответствующей формулой обращения

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd} \sum_{(m, n)}^{-\infty, +\infty} \exp\left(im\frac{\pi}{h}x + in\frac{\pi}{d}y\right)\bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

Если

$$\bar{\varphi}_1(m, n) \div \varphi_1(x, y),$$

$$\bar{\varphi}_2(m, n) \div \varphi_2(x, y), \tag{12}$$

то при условии

$$\varphi_1(x + 2h, y) = \varphi_1(x, y),$$

$$\varphi_1(x, y + 2d) = \varphi_1(x, y) \tag{13}$$

имеет место теорема о свертке:

$$\bar{\varphi}_1(m, n)\, \bar{\varphi}_2(m, n) \div \int\int_{(\Gamma)} \varphi_1(x - \xi, y - \eta)\, \varphi_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{14}$$

Причем здесь предполагается, что $\varphi_2(x, y)$ интегрирует в области Γ, а $\varphi_1(x, y)$—в более широкой области $(-2h \leqslant x \leqslant 2h,\ -2d \leqslant y \leqslant +2d)$.

Подставив в (10) вместо φ частные производные и выполнив после этого интегрирование по частям, получим формулы для изображения частных производных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \doteqdot im \frac{\pi}{h} \bar{\varphi}(m, n) + (-1)^m \int_{-d}^{+d} \exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right) \times$$

$$\times [\varphi(h, \eta) + \varphi(-h, \eta)]\, d\eta, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \doteqdot in \frac{\pi}{d} \bar{\varphi}(m, n) + (-1)^n \int_{-h}^{+h} \exp\left(-im\frac{\pi}{d}\eta\right) \times$$

$$\times [\varphi(\xi, d) + \varphi(\xi, -d)]\, d\xi, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \doteqdot -m^2 \frac{\pi^2}{h^2} \bar{\varphi}(m, n) + (-1)^m \int_{-d}^{+d} \exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial \varphi(h, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(-h, \eta)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + im \frac{\pi}{h} \left[\varphi(h, \eta) - \varphi(-h, \eta) \right] \right\} d\eta, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \doteqdot -n^2 \frac{\pi^2}{h^2} \bar{\varphi}(m, n) + (-1)^n \int_{-h}^{+h} \exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial \varphi(\xi, d)}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi(\xi, -d)}{\partial \eta} + \right.$$

$$\left. + in \frac{\pi}{d} [\varphi(\xi, d) - \varphi(\xi, -d)] \right\} d\xi. \qquad (18)$$

Продолжая теперь в интервалы $(-h \leqslant x \leqslant 0)$ и $(-d \leqslant y \leqslant 0)$ функции t и u четным образом, а их частные производные $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ нечетным образом, что можно сделать в силу (4), (5), и переходя в (1)—(9) к изображениям относительно x и y по формулам (15)—(18), получим вместо системы дифференциальных уравнений в частных производных (1), (2) систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\bar{t}(m, n, \tau)$ и $\bar{u}(m, n, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{t}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_q\sigma\,\bar{t}(m,n,\tau)+\frac{2a_q}{\lambda_q}S_1(\tau)+\\
&+\frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau}\\
\frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_m\sigma\bar{u}(m,n,\tau)-2S_2(\tau)-\\
&-a_m\delta\sigma\,\bar{t}(m,n,\tau)
\end{aligned}\right\},\quad (19)$$

где

$$\sigma=\pi^2\left(\frac{m^2}{h^2}+\frac{h^2}{d^2}\right),\quad (20)$$

$$S_j(\tau)=(-1)^m\int_{-d}^{+d}\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\psi_j(\eta,\tau)\,d\eta+$$

$$+(-1)^n\int_{-h}^{+h}\exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi\right)\chi_j(\xi,\tau)\,d\xi.\quad (21)$$

Начальные условия (3) в области изображений принимают вид

$$\bar{t}(m,n,0)=\bar{f}_1(m,n),\quad \bar{u}(m,n,0)=\bar{f}_2(m,n).\quad (22)$$

Переходя далее в (19) к изображениям по Лапласу относительно τ, получим систему двух алгебраических уравнений первой степени для двух неизвестных функций $\bar{t}(m,n,s)$ и $\bar{u}(m,n,s)$. Решая эту систему и переходя к оригиналу относительно s, получим

$$t(m,n,\tau)=\sum_{i=1}^{2}\left\{\exp\left(-a_q\,\mathrm{Lu}\,\nu_i^2\sigma\tau\right)\left[A_i\bar{f}_1(m,n)+\right.\right.$$

$$\left.+B_i\bar{f}_2(m,n)\right]+\exp(-a_q\,\mathrm{Lu}\,\nu_i^2\sigma\tau)\times$$

$$\left.\times\left[D_i\overset{\tau}{*}S_2(\tau)+C_i\overset{\tau}{*}S_1(\tau)\right]\right\}.\quad (23)$$

Здесь символ $\overset{\tau}{*}$ обозначает взятые свертки по τ от 0 до τ. Коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i определяются по формулам:

$$A_i = (-1)^{i+1}\frac{\nu_i^2 - 1}{\nu_1^2 - \nu_2^2}, \quad B_i = (-1)^{i+1}\frac{\varepsilon \mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn}}{\nu_1^2 - \nu_2^2},$$

$$C_i = \frac{2}{c_q \gamma_0} A_i, \quad D_i = 2\nu_i^2 B_i. \tag{24}$$

Вторая функция $\bar{u}(m, n, \tau)$ получается из (23), если в правой части (23) заменить коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i на коэффициенты A_i', B_i', C_i', D_i', имеющие следующий вид:

$$A_i' = (-1)^{i+1}\frac{\delta}{\nu_1^2 - \nu_2^2},$$

$$B_i' = \frac{(-1)^{i+1}}{\nu_1^2 - \nu_2^2}\left(\nu_i^2 - \varepsilon \mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} - \frac{1}{\mathrm{Lu}}\right),$$

$$C_i' = (-1)^{i+1}\frac{2\delta}{c_q \gamma_0 (\nu_1^2 - \nu_2^2)},$$

$$D_i' = (-1)^{i+1}\frac{\left(\nu_i^2 - \dfrac{1}{\mathrm{Lu}}\right)}{\nu_1^2 - \nu_2^2}. \tag{25}$$

Для того чтобы получить окончательное решение задачи, остается перейти в выражении (23) к оригиналам относительно m и n. Этот переход можно осуществить при помощи теоремы о свертке с использованием тэта-функций. Напомним, что по определению

$$\vartheta_3(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^{2n} \quad (z = e^{i\pi v}, \; q = e^{i\pi\tau}). \tag{26}$$

Следовательно, согласно (11), (20) и (26),

$$e^{-\sigma\varsigma} \doteqdot \frac{1}{4hd}\,\vartheta_3\left(\frac{x}{2h}, \frac{i\pi\varsigma}{h^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{y}{2d}, \frac{i\pi\varsigma}{d^2}\right). \tag{27}$$

Причем в правой части стоит функция периодическая по x с периодом $2h$ и по y с периодом $2d$. Имея в виду последнее обстоятельство и принимая во внимание (25), переходим к оригиналам в первых двух слагаемых правой части (23) по теории о свертке (14), а в оставшихся слагаемых непосредственно по формуле (11). В результате получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} +$$

$$+ C_1 K_{11} + C_2 K_{21} + D_1 K_{12} + D_2 K_{22}, \qquad (28)$$

где

$$I_{mn} = \frac{1}{4 h d} \int\limits_{(V)}\int \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2 h}, \frac{i \pi \mathrm{Lu}\, a_q \nu_i^2 \tau}{h^2} \right) \times$$

$$\times \vartheta_3 \left(\frac{y - h}{2 d}, \frac{i \pi \mathrm{Lu}\, a_q \nu_m^2 \tau}{d^2} \right) f_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (29)$$

$$K_{mn} = \frac{1}{4 h d} \int\limits_0^\tau d\,0 \left\{ \vartheta_3 \left(\frac{h - x}{2 h}, \frac{i \pi \mathrm{Lu}\, a_q \nu_m^2 (\tau - 0)}{h^2} \right) \times \right.$$

$$\times \int\limits_{-d}^{+d} \vartheta_3 \left(\frac{y - h}{2 d}, \frac{i \pi a_q \mathrm{Lu}\, \nu_m^2 (\tau - 0)}{d^2} \right) \psi_n(\eta, 0)\, d\eta +$$

$$+ \vartheta_3 \left(\frac{d - y}{2 d}, \frac{i \pi \mathrm{Lu}\, a_q \nu_m^2 (\tau - 0)}{d^2} \right) \times$$

$$\left. \times \int\limits_{-c}^{+c} \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2 h}, \frac{i \pi \mathrm{Lu}\, a_q \nu_m^2 (\tau - 0)}{h^2} \right) \chi_n(\xi, 0)\, d\xi \right\}. \qquad (30)$$

Если ввести обозначения

$$A_1 = A_{11},\ A_2 = A_{21},\ B_1 = A_{12},\ B_2 = A_{22},\ C_1 = B_{11},$$

$$C_2 = B_{21},\ D_1 = B_{12},\ D_2 = B_{22},$$

то формулу (28) можно переписать в виде

$$t(x, y, \tau) = \sum_{i,j} (A_{ij} I_{ij} + B_{ij} K_{ij}), \qquad (31)$$

$$i, j = 1,2.$$

В силу сделанного ранее замечания относительно функции $\bar{u}(m, n, \tau)$ ее оригинал имеет вид

$$u(x, y, \tau) = \sum_{(i,j)} (A'_{ij} I_{ij} + B'_{ij} K_{ij}) (i, j = 1,2). \tag{32}$$

Задача 2. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$t(h, y, \tau) = \psi_1(y, \tau), \tag{6}$$

$$u(h, y, \tau) = \psi_2(y, \tau), \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_1(x, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m \left(\frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} + \delta \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} \right) + \chi_2(x, \tau) = 0. \tag{9}$$

Воспользуемся двухмерным конечным комплексным преобразованием Фурье в области $\Gamma(-h \leqslant x \leqslant +h,\ d \leqslant y \leqslant +d)$:

$$\bar{\varphi}(m, n) = \iint_{(\Gamma)} \exp \left[-i \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{h} \xi - \right.$$

$$\left. - in \frac{\pi}{d} \eta \right] \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{10}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd} \sum_{(m, n)}^{-\infty, +\infty} \exp \left[i \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{h} x + \right.$$

$$\left. + in \frac{\pi}{d} y \right] \bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

В результате применения преобразования (10) к уравнениям (1.1) и (1.2) получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\bar{t}(m, n, \tau)$ и $\bar{u}(m, n, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{t}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_q\sigma\bar{t}(m,n,\tau) + 2a_qS_1(\tau) + \frac{2a_q}{\lambda_q}I_1(\tau) + \\ &+ \frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_m\sigma\bar{u}(m,n,\tau) + \\ &+ 2a_mS_2(\tau) - 2J_2(\tau) - a_m\delta\sigma\bar{u}(m,n,\tau) + 2a_m\delta S_1(\tau)\end{aligned}\right\}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = \pi^2\left[\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{n^2}{d^2}\right], \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}S_j(\tau) &= (-1)^m i\int_{-d}^{+d}\exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\times \\ &\times\left[i\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\right]\psi_j(\eta,\tau)\,d\eta \\ I_l(\tau) &= (-1)^n\int_{-h}^{+h}\exp\left[-i\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi\right]\chi_l(\xi,\tau)\,d\xi\end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Решая эту систему и переходя к оригиналам относительно s, получим

$$\bar{t}(m, n, \tau) = \sum_{i=1}^{2}\{\exp(-a_q\mathrm{Lu}\,\nu_i^2\sigma\tau)[A_i\bar{f}_1(m, n) + B_i\bar{f}_2(m, n) + C_i^*\overset{\tau}{I}_1(\tau) + D_i^*\overset{\tau}{I}_2(\tau) + a_mD_i^*\overset{\tau}{S}_2(\tau) + E_i^*\overset{\tau}{S}_1(\tau)]\}. \quad (15)$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i определяются по формулам (25) предыдущей задачи, а коэффициенты D_i — по формуле

$$E_i = (-1)^{i+1}\frac{2a_q}{\nu_1^2-\nu_2^2}[\nu_i^2(1+\varepsilon\,\mathrm{LuKoPn}) - 1]. \quad (16)$$

Вторая функция $\bar{u}(m, n, \tau)$ получается из (15), если в правой части заменить коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, на коэффициенты A_i', B_i', C_i', D_i' и E_i', последние имеют вид

$$E_i' = 2a_m \delta(-1)^{i+1} \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}. \qquad (17)$$

Используя теорему о свертке и формулу обращения (11), окончательно получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + E_1 K_{11} +$$
$$+ E_2 K_{21} + a_m D_1 K_{12} + a_m D_2 K_{22} + C_1 M_{11} + C_2 M_{21} +$$
$$+ D_1 M_{12} + D_2 M_{22}, \qquad (18)$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd} \int_{(1)}\int \vartheta_2\left(\frac{x-\xi}{2h}, \frac{\alpha_k i \pi \tau}{h^2}\right) \vartheta_3\left(\frac{y-\eta}{2d}, \frac{\alpha_k i \pi \tau}{d^2}\right) \times$$
$$f_l(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (19)$$

$$K_{kl} = \frac{1}{4hd} \int_0^\tau d\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2\left[\frac{h-x}{2h}, \frac{\alpha_k i \pi (\tau - \theta)}{h^2}\right] \right\} \times$$
$$\times \int_{-d}^{+d} \vartheta_3\left[\frac{y-\eta}{2d}, \frac{\alpha_k i \pi (\tau - \theta)}{d^2}\right] \psi_l(\eta, d)\, d\eta \Big\}, \qquad (20)$$

$$M_{kl} = \frac{1}{4hd} \int_0^\tau d\theta \left\{ \vartheta_3\left[\frac{d-y}{2d}, \frac{\alpha_k i \pi (\tau - \theta)}{d^2}\right] \times \right.$$
$$\times \int_{-h}^{+h} \vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{\alpha_k i \pi (\tau - \theta)}{h^2}\right] \chi_l(\xi, d)\, d\xi \Big\}, \qquad (21)$$

$$\alpha_k = \nu_k^2 \operatorname{Lu} a_q, \quad k, l = 1, 2.$$

В силу сделанного ранее замечания относительно функции $\bar{u}(m, n, \tau)$ ее оригинал выражается правой частью формулы (18), в которой A_i... нужно заменить A_i'....

Задача 3. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$t(h, y, \tau) = \psi_1(y, \tau), \tag{6}$$

$$u(h, y, \tau) = \psi_2(y, \tau), \tag{7}$$

$$t(x, d, \tau) = \chi_1(x, \tau), \tag{8}$$

$$u(x, d, \tau) = \chi_2(x, \tau). \tag{9}$$

Для решения задачи воспользуемся двухмерным конечным комплексным преобразованием Фурье в области $\Gamma(-h \leqslant x \leqslant +h, \ -d \leqslant y \leqslant +d)$:

$$\bar{\varphi}(m, n) = \iint\limits_{(\Gamma)} \exp\left[-i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi - i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta\right]\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{10}$$

и соответствующей формулой обращения:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd}\sum_{(m, n)}^{-\infty, +\infty} \exp\left[i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}x + i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}y\right]\bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

Если

$$\bar{\varphi}_1(m, n) \doteqdot \varphi_1(x, y), \qquad \bar{\varphi}_2(m, n) \doteqdot \varphi_2(x, y), \tag{12}$$

то при условии

$$\varphi_1(x + 2h, y) = -\varphi_1(x, y), \qquad \varphi_1(x, y + 2d) = -\varphi_1(x, y) \tag{13}$$

имеет место теорема о свертке:

$$\bar{\varphi}_1(m, n)\,\bar{\varphi}_2(m, n) \div \iint_{(\Gamma)} \varphi_1(x-\xi, y-\eta)\,\varphi_2(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \quad (14)$$

Подставляя в (10) вместо φ частные производные и выполняя после этого интегрирование по частям, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\bar{t}(m, n, \tau)$ и $\bar{u}(m, n, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{t}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_q\,\sigma\bar{t}(m,n,\tau) + a_q S_1(\tau) + \frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\bar{u}(m,n,\tau)}{d\tau} &= -a_m\,\sigma\bar{u}(m,n,\tau) + a_m S_2(\tau) - a_m\delta\sigma\bar{t}(m,n,\tau) + \\ &\quad + a_m S_1(\tau), \end{aligned}\right\}, \quad (15)$$

где

$$\sigma = \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{d^2}, \quad (16)$$

$$S_j(\tau) = 2(-1)^m i \int_{-d}^{+d} \exp\left[-i\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta\right]\left[i\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\right]\times$$

$$\times\,\psi_1(\eta,\tau)\,d\eta + 2(-1)^n i \int_{-h}^{+h} \exp\left[-i\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi\right]\times$$

$$\times\left[i\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\right]\chi_1(\xi,\tau)\,d\xi. \quad (17)$$

Окончательное решение уравнения (15) будет иметь вид

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + 2E_1 K_{11} +$$
$$+ 2E_2 K_{21} + a_m D_1 K_{12} + a_m D_2 K_{22}, \quad (18)$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd}\iint_{(\Gamma)} \vartheta_2\left(\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{h^2}\right)\vartheta_2\left(\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{d^2}\right)\times$$
$$\times f_l(\xi, \eta)\,d\xi,\,d\eta, \quad (19)$$

$$K_{kl} = \frac{1}{2hd} \int_0^{\tau} d\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2 \left[\frac{h-x}{2h}, \frac{i\pi \alpha_k (\tau - \theta)}{h^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-d}^{+d} \vartheta_2 \left[\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k (\tau-\theta)}{d^2} \right] \psi_l (\eta, \theta)\, d\eta \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2hd} \int_0^{\tau} d\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2 \left[\frac{d-y}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k (\tau-\theta)}{d^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-h}^{+h} \vartheta_2 \left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k (\tau-\theta)}{h^2} \right] \chi_l (\xi, \alpha)\, d\xi \right\}, \qquad (20)$$

$$\alpha_k = a_q \operatorname{Lu} \nu_k^2.$$

Оригинал функции $\bar{u}(m, n, \tau)$ выражается правой частью формулы (18), в которой $A_i \ldots$ нужно заменить на $A_i' \ldots$.

Задача 4. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \qquad (3)$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = t(x, 0, \tau) = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = u(x, 0, \tau) = 0, \qquad (5)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_1 (y, \tau) = 0, \qquad (6)$$

$$a_m \left[\frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} + \delta \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} \right] + \psi_2 (y, \tau) = 0, \qquad (7)$$

$$t(x, d, \tau) = \chi_1 (x, \tau), \qquad (8)$$

$$u(x, d, \tau) = \chi_2 (x, \tau). \qquad (9)$$

Для решения задачи воспользуемся двухмерным конечным комплексным преобразованием Фурье в области $\Gamma(-h \leqslant x \leqslant +h, -d \leqslant y \leqslant +d)$:

$$\bar{\varphi}(m, n) = \int\limits_{(\Gamma)}\int \exp\left(-im\frac{\pi}{h}\xi - in\frac{\pi}{d}\eta\right)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (10)$$

и соответствующей формулой обращения:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd}\sum_{(m,n)}^{+\infty,-\infty} \exp\left(im\frac{\pi}{h}x + in\frac{\pi}{d}y\right)\bar{\varphi}(m, n). \qquad (11)$$

Продолжая функции τ и u в интервал $(-h \leqslant x \leqslant 0)$ четным образом, а в интервал $(-d \leqslant y \leqslant 0)$ нечетным образом, что можно сделать в силу (4), (5), получим

$$t(x, y, \tau) = t(-x, y, \tau), \quad u(x, y, \tau) = u(-x, y, \tau), \qquad (12)$$

$$t(x, y, \tau) = -t(x, -y, \tau), \quad u(x, y, \tau) = -u(x, -y, \tau), \qquad (13)$$

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial x} = -\frac{\partial t(-x, y, \tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial x} = -\frac{\partial u(-x, y, \tau)}{\partial x}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial t(x, -y, \tau)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, -y, \tau)}{\partial y}, \qquad (15)$$

$$f_1(x, y) = f_1(-x, y) = -f_1(x, y), \quad f_2(x, y) = f_2(-x, y) = -f_2(x, y), \qquad (16)$$

$$\psi_1(y, \tau) = -\psi_1(-y, \tau), \quad \psi_2(y, \tau) = -\psi_2(-y, \tau), \qquad (17)$$

$$\chi_1(x, \tau) = \chi_1(-x, \tau), \quad \chi_2(x, \tau) = \chi_2(-x, \tau). \qquad (18)$$

Переходя теперь при помощи (10) к изображениям относительно x и y в (1)—(9), получим вместо (1.1), (1.2) систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\bar{t}(m, n, \tau)$ и $\bar{u}(m, n, \tau)$.

Окончательно получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + C_1 K_{11} +$$

$$+ C_2 K_{21} + D_1 K_{11} + D_2 K_{22} + E_1 M_{11} + E_2 M_{21} +$$

$$+ a_m D_1 M_{12} + a_m D_2 M_{22}, \qquad (19)$$

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd} \iint\limits_{(\Gamma)} \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2h}, \frac{i \pi \alpha_k \tau}{h^2} \right) \times$$

$$\times \vartheta_3 \left(\frac{y - \eta}{2d}, \frac{i \pi \alpha_k \tau}{d^2} \right) f_l(\xi, \eta_l)\, d\xi\, d\eta_l,$$

$$K_{kl} = \frac{1}{4hd} \int\limits_0^\tau d\theta \left\{ \vartheta_3 \left[\frac{h - x}{2h}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - \theta)}{h^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-d}^{+d} \vartheta_3 \left[\frac{y - \eta}{2d}, \frac{i \pi \alpha_s (\tau - \theta)}{d^2} \right] \psi_l(\eta_l, \alpha)\, d\eta_l \right\},$$

$$M_{kl} = \frac{1}{4hd} \int\limits_0^\tau d\theta \left[\frac{\partial}{\partial y} \vartheta_3 \left[\frac{d - y}{2d}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - \theta)}{d^2} \right] \right] \times$$

$$\times \int\limits_{-h}^{+h} \vartheta_3 \left[\frac{x - \xi}{2h}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - \theta)}{h^2} \right] \chi_l(\xi, \theta)\, d\xi \Bigg\},$$

$$\alpha_k = d_q \mathrm{Lu}\, \nu_k^2.$$

Задача 5. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \qquad (3)$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = t(x, 0, \tau) = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = u(x, 0, \tau) = 0, \qquad (5)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(h, y, \tau)}{dx} + \psi_1(y, \tau) = 0, \tag{6}$$

$$a_m \left[\frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} + \delta \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} \right] + \psi_2(y, \tau) = 0, \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_1(x, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m \left[\frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} + \delta \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} \right] + \chi_2(x, \tau) = 0. \tag{9}$$

Для решения задачи воспользуемся двухмерным конечным комплексным преобразованием Фурье в области $\Gamma(-h \leqslant x \leqslant +h, -d \leqslant y \leqslant +d)$:

$$\bar{\varphi}(m, n) = \iint\limits_{(\Gamma)} \exp\left[-im\frac{\pi}{h}\xi - i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta \right] \times$$

$$\times \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{10}$$

и соответствующей формулой обращения:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd} \sum_{(m, n)}^{-\infty, +\infty} \exp\left[im\frac{\pi}{h}x + i\left(n - \right.\right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta \right] \bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

Переходя к изображениям по Лапласу относительно τ, получим систему двух алгебраических уравнений первой степени для двух неизвестных функций $\bar{t}(m, n, s)$ и $\bar{u}(m, n, s)$. Решая эту систему и переходя к оригиналам относительно s, получим для $\bar{t}(m, n, \tau)$ и $\bar{u}(m, n, \tau)$ те же выражения, что и в задаче 1. Переходя к оригиналам относительно m и n, при помощи формул задачи 2 получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + C_1 K_{11} +$$

$$+ C_2 K_{21} + D_1 K_{12} + D_2 K_{22}, \tag{12}$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd} \iint\limits_{(\Gamma)} \vartheta_3\left(\frac{x - \xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{h^2}\right)\vartheta_2 \times$$

$$\times\left(\frac{y-\eta_l}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{d^2}\right) f_l(\xi,\eta_l)\,d\xi\,d\eta_l, \tag{13}$$

$$K_{kl} = \frac{1}{4hd}\int_0^{\tau} d\theta\left\{\vartheta_3\left[\frac{h-x}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{h^2}\right]\times\right.$$

$$\times\int_{-d}^{+d}\vartheta_2\left[\frac{y-\eta_l}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\alpha)}{\alpha_2}\right]\psi_l(\eta_l,\theta)\,d\eta_l +$$

$$+\vartheta_2\left[\frac{d-y}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{d^2}\right]\int_{-h}^{+h}\vartheta_3\times$$

$$\left.\times\left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{h^2}\right]\chi_l(\xi,\theta)\,d\xi\right\}. \tag{14}$$

Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (12), в которой A_i... нужно заменить на A_i' из (26) задачи 1.

Задача 6. Требуется решить системы дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = t(x, 0, \tau) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = u(x, 0, \tau) = 0, \tag{5}$$

$$t(h, y, \tau) = \psi_1(y, \tau), \tag{6}$$

$$u(h, y, \tau) = \psi_2(y, \tau), \tag{7}$$

$$-\lambda_q\frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_1(x, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m\frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} + a_m\delta\frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_2(x, \tau) = 0. \tag{9}$$

Для решения задачи воспользуемся формулами обращения (10) и (11) задачи 3. Продолжая t и u в интервал ($-h \leqslant$

$\leqslant x \leqslant 0$) четным образом, а в интервал ($-d \leqslant y \leqslant 0$) нечетным образом и переходя в (1)—(9) к изображениям по пространственным координатам, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (12) задачи 2, где теперь

$$\sigma = \pi^2 \left[\frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{d^2} \right], \tag{10}$$

$$S_j(\tau) = (-1)^m i \int_{-d}^{+d} \exp\left[-i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta \right] \times$$

$$\times \left[i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h} \right] \psi_j(\eta, \tau)\, d\eta, \tag{11}$$

$$I_j(\tau) = (-1)^n i \int_{-h}^{+h} \exp\left[-i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi \right] \chi_j(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{12}$$

Решение этой системы дается формулой (15) задачи 2.

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + E_1 K_{11} + E_2 K_{21} + a_m D_1 K_{12} +$$
$$+ a_m D_2 K_{22} + C_1 M_{11} + C_2 M_{21} + D_1 M_{12} + D_2 M_{22}, \tag{13}$$

где I_{kl}, K_{kl}, M_{kl} дается формулами (19), (20) и (21) задачи 2. Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (13), в которой A_i нужно заменить на A_i', указанные в (17) задачи 2.

Задача 7. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = t(x, 0, \tau) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(0, y, \tau)}{\partial x} = u(x, 0, \tau) = 0, \tag{5}$$

$$t(h, y, \tau) = \psi_1(y, \tau), \tag{6}$$

$$u(h, y, \tau) = \psi_2(y, \tau), \tag{7}$$

$$t(x, d, \tau) = \chi_1(x, \tau), \tag{8}$$

$$u(x, d, \tau) = \chi_2(x, \tau). \tag{9}$$

Для решения задачи продолжим функции t и u в интервал $(-h \leqslant x \leqslant 0)$ четным образом, в интервал $(-d \leqslant y \leqslant 0)$ нечетным образом и воспользуемся формулами обращения:

$$\varphi(m, n) = \int\limits_{(\Gamma)}\int \exp\left[-i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi - in\frac{\pi}{d}\eta\right]\varphi(\xi, \eta)d\xi\, dh, \tag{10}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd}\sum_{(m, n)}^{-\infty, +\infty} \exp\left[i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}x + in\frac{\pi}{d}\eta\right]\bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

Переходя в (1)–(9) к изображениям по пространственным координатам, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (12) задачи 2, где теперь

$$\sigma = \pi^2\left[\frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{h^2}{d^2}\right], \tag{12}$$

$$S_j(\tau) = 2(-1)^m i \int\limits_{-d}^{+d} \exp\left(-in\frac{\pi}{d}\eta\right)\left[i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\right]\times$$

$$\times \psi_j(\eta, \tau)\, d\eta + 2(-1)^n \int\limits_{-h}^{+h} \exp\left[-i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi\right]\times$$

$$\times\left(in\frac{\pi}{d}\right)\chi_j(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{13}$$

Решение этой системы производится обычным путем.

Переходя к оригиналу на основе формулы обращения и теоремы о свертке, получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_2 I_{12} B_2 I_{22} + 2E_1 K_{11} +$$

$$+ 2E_2 K_{21} + a_m D_1 K_{12} + a_m D_2 K_{22}, \tag{14}$$

где I_{kl}, K_{kl} определяются формулами (19), (20) задачи 3.

Коэффициент A_i указан в задаче 3. Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (14), в которой A_i, Bi... нужно заменить на A_i', B_i' из задачи 3.

Задача 8. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \; u(x, y, 0) = f_2(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$t(0, y, \tau) = t(x, 0, \tau) = 0, \tag{4}$$

$$u(0, y, \tau) = u(x, 0, \tau) = 0, \tag{5}$$

$$t(x, d, \tau) = \chi_1(x, \tau), \tag{6}$$

$$u(x, d, \tau) = \chi_2(x, \tau), \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_1(y, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m \frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_2(y, \tau) = 0. \tag{9}$$

Для решения задачи продолжим функции t и u в интервалы $(-h \leqslant x \leqslant 0)$ и $(-d \leqslant y \leqslant 0)$ нечетным образом и воспользуемся формулами обращения задачи 2. Переходя в (1)—(9) к изображениям по пространственным координатам, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений задачи 2, где теперь

$$\sigma = \pi^2 \left[\frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{h^2}{d^2} \right], \tag{10}$$

$$S_j(\tau) = (-1)^n \int_{-h}^{+h} \exp \times$$

$$\times \left[-i \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h} \xi \right] \left(in \frac{\pi}{d} \right) \chi_1(\xi, \tau) \, d\xi, \tag{11}$$

$$I_j(\tau) = (-1)^m i \int_{-d}^{+d} \exp\left(-in \frac{\pi}{d} \eta \right) \psi_1(\eta, \tau) \, d\eta. \tag{12}$$

Решая эту систему и переходя к оригиналам, получим

$$t(x, y, \tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + E_1 K_{11} + E_2 K_{21} +$$

$$+a_m D_1 K_{12} + a_m D_2 K_{22} + C_1 M_{11} + C_2 M_{21} + D_1 M_{12} + D_2 M_{22}, \quad (13)$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd} \iint\limits_{(\Gamma)} \vartheta_2 \left(\frac{x-\xi}{2h}, \frac{\alpha_k i \pi \tau}{h^2} \right) \times$$

$$\times \vartheta_3 \left(\frac{y-\eta}{2d}, \frac{\alpha_k i \pi \tau}{d^2} \right) f_l(\xi, \eta)\, d_\xi d_\eta, \quad (14)$$

$$K_{kl} = \frac{1}{4hd} \int\limits_0^\tau d\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \vartheta_3 \left[\frac{d-y}{2d}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - \theta)}{d^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-h}^{+h} \vartheta_2 \left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - \theta)}{h^2} \right] \chi_l(\xi, \theta)\, d\xi \right\}, \quad (15)$$

$$M_{kl} = \frac{1}{4hd} \int\limits_0^\tau d\theta \left\{ \vartheta_2 \left[\frac{h-x}{2h}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - 0)}{h^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-d}^{+d} \vartheta_3 \left[\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i \pi \alpha_k (\tau - 0)}{d^2} \right] \psi_l(\eta, \theta)\, d\eta \right\}, \quad (16)$$

$$\alpha_k = \nu_k^2 \, a_q \mathrm{Lu}.$$

Коэффициенты $A_i \ldots$ указаны в задаче 2. Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (13), в которой A_i, $B_i \ldots$ нужно заменить на A_i', B_i' из задачи 2.

Задача 9. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, 0) = f_2(x, y) \quad (3)$$

и граничных условиях:

$$t(0, y, \tau) = t(x, 0, \tau) = 0, \quad (4)$$

$$u(0, y, \tau) = u(x, 0, \tau) = 0, \quad (5)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_1(y, \tau) = 0, \tag{6}$$

$$a_m \frac{\partial u(h, y, \tau)}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t(h, y, \tau)}{\partial x} + \psi_2(y, \tau) = 0, \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_1(x, \tau) = 0, \tag{8}$$

$$a_m \frac{\partial u(x, d, \tau)}{\partial y} + a_m \delta \frac{\partial t(x, d, \tau)}{\partial y} + \chi_2(x, \tau) = 0. \tag{9}$$

Для решения задачи с граничными условиями первого и второго рода и воспользуемся формулами преобразования и обращения:

$$\bar{\varphi}(m, n) = \int_{(U)}\int \exp\left[-i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi - \right.$$

$$\left. - i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta\right] \varphi(\xi, \eta)\, d\xi,\, d\eta, \tag{10}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4hd} \sum_{m, n}^{-\infty, +\infty} \exp\left[i\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}x + \right.$$

$$\left. + i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}y\right] \bar{\varphi}(m, n). \tag{11}$$

Переходя в (1)—(9) к изображениям по пространственным координатам, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений задачи 1, где теперь

$$\sigma = \left[\frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}{h^2} + \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{d^2}\right], \tag{12}$$

$$S_j(\tau) = (-1)^m i \int_{-d}^{+d} \exp\left[-i\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\eta\right] \psi_1(\eta, \tau)\, d\eta +$$

$$+(-1)^n i \int_{-h}^{+h} \exp\left[-i\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\xi\right]\chi_1(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (13)$$

Решая эту систему и переходя к оригиналам получим

$$t(x,y,\tau) = A_1 I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + C_1 K_{11} + \\ + C_2 K_{12} + D_1 K_{12} + D_2 K_{22}, \qquad (14)$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd}\iint_{(\Gamma)} \vartheta_2\left(\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{h^2}\right)\times$$

$$\times\,\vartheta_2\left(\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{d^2}\right) f_l(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (15)$$

$$K_{kl} = \frac{1}{4hd}\int_0^{\tau} d\theta\left\{\vartheta_2\left[\frac{h-x}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{h^2}\right]\times\right.$$

$$\times\int_{-d}^{+d}\vartheta_2\left[\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{d^2}\right]\psi_l(\eta,\theta)\,d\eta +$$

$$+\,\vartheta_2\left[\frac{d-y}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{d^2}\right]\times$$

$$\left.\times\int_{-h}^{+h}\vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{h^2}\right]\chi_l(\xi,\theta)\,d\xi\right\}. \qquad (16)$$

Коэффициенты $A_i\ldots$ указаны в задаче 1. Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (14), в которой A_i нужно заменить на $A_i' B_i'$ из задачи 1.

Задача 10. Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при начальных условиях:

$$t(x, y, 0) = f_1(x, y),\ u(x, y, 0) = f_2(x, y) \qquad (3)$$

и граничных условиях

$$t(0, y, \tau) = t(x, 0, \tau) = 0, \qquad (4)$$

$$u(0, y, \tau) = u(x, 0, \tau) = 0, \tag{5}$$

$$t(h, y, \tau) = \psi_1(y, \tau), \tag{6}$$

$$u(h, y, \tau) = \psi_2(y, \tau), \tag{7}$$

$$t(x, d, \tau) = \chi_1(x, \tau), \tag{8}$$

$$u(x, d, \tau) = \chi_2(x, \tau). \tag{9}$$

Для решения задачи с граничными условиями первого рода воспользуемся формулами обращения задачи 1. Переходя в (1)—(9) к изображениям по пространственным координатам, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений задачи 3, где теперь

$$\sigma = \pi^2 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{d^2} \right), \tag{10}$$

$$S_j(\tau) = 2(-1)^m \int_{-d}^{+d} \exp\left(-in \frac{\pi}{d} \eta \right) \left(im \frac{\pi}{h} \right) \times$$

$$\times \psi_j(\eta, \tau)\, d\eta + 2(-1)^n \int_{-h}^{+h} \exp\left(-im \frac{\pi}{h} \xi \right) \times$$

$$\times \left(in \frac{\pi}{d} \right) \chi_j(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{11}$$

Решая эту систему и переходя к оригиналам, получим

$$t(x, y, \tau) = A_{11} I_{11} + A_2 I_{21} + B_1 I_{12} + B_2 I_{22} + 2E_1 K_{11} +$$

$$+2E_2 K_{21} + a_m D_1 K_{12} + a_m D_2 K_{22}, \tag{12}$$

где

$$I_{kl} = \frac{1}{4hd} \iint_{(\Gamma)} \vartheta_3 \left(\frac{x - \xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{h^2} \right) \times$$

$$\times \vartheta_3 \left(\frac{y - \eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k\tau}{d^2} \right) f_l(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{13}$$

$$K_{kl} = \frac{1}{2hd} \left[\int_0^\tau d\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_3 \left[\frac{h - x}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau - \theta)}{h^2} \right] \times \right. \right.$$

$$\times \int_{-d}^{+d} \vartheta_3 \left[\frac{y-\eta}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{d^2} \right] \psi_l(\eta, \theta)\, d\eta +$$

$$+ -\frac{\partial}{\partial y} \vartheta_3 \left[\frac{d-y}{2d}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{d^2} \right] \times$$

$$\times \int_{-h}^{+h} \vartheta_3 \left[\frac{x-\xi}{2h}, \frac{i\pi\alpha_k(\tau-\theta)}{h^2} \right] \chi_l(\xi, \theta)\, d\xi \Bigg\} \Bigg]. \qquad (14)$$

Коэффициенты A_iB_i указаны в задаче 3. Функция $u(x, y, \tau)$ выражается правой частью формулы (12), в которой $A_i, B_i \ldots$ нужно заменить на $A_i'B_i'$ из задачи 3.

ГЛАВА VI

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН ПРИ МОЛЕКУЛЯРНОМ И МОЛЯРНОМ ПЕРЕНОСЕ ЭНЕРГИИ И ВЕЩЕСТВА

При интенсивных процессах нагрева, как показывают экспериментальные исследования П. Д. Лебедева, Г. А. Максимова, В. В. Красникова и других, помимо молекулярного переноса тепла и вещества, в дисперсной среде может иметь место молярный (фильтрационный) перенос под действием гидродинамической силы. К таким явлениям относится движение жидкости под влиянием расширения защемленного воздуха, фильтрационное движение пара под действием нерелаксируемого градиента общего давления парогазовой смеси. Наложение молярного переноса на молекулярные процессы, происходящие в среде, обусловливает перестройку механизма переноса и связанную с ней существенную интенсификацию процесса. Например, при комбинированной сушке древесины токами высокой частоты и инфракрасными лучами около 50 % общего потока влаги перемещается к поверхности тела в виде пара за счет избыточного давления. Систему дифференциальных уравнений тепло- и массообмена при молекулярном и молярном переносе энергии и вещества можно представить в следующем виде:

$$c_q \gamma \frac{\partial t}{d\tau} = \nabla (\lambda_q \nabla t) + \varepsilon \rho c'_m \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \sum_i c_i q_{mi} \nabla t,$$

$$c'_m \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nabla [\eta_m (\nabla \theta + \delta \nabla t) + \lambda_p \nabla p], \qquad \text{(XVIII)}$$

$$c_p \gamma \frac{\partial p}{\partial \tau} = \nabla (\lambda_p \nabla p) - \varepsilon c'_m \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \tau}.$$

Здесь λ_q—коэффициент теплопроводности, λ_p—коэффициент молярного переноса вещества, c_p—удельная пароемкость среды, p—фильтрационный потенциал, c'_m—удельная массоемкость; значения остальных величин приведены выше.

В целях упрощения решений систему уравнений рационально представить в безразмерном виде. Для зонального расчета высокоинтенсивного тепло- и массообмена для одномерных тел последняя будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 T(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2} - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\frac{\partial \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}, \quad \text{(XVIII')}$$

$$\frac{\partial \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \mathrm{Lu}\,\frac{\partial^2 \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2} -$$

$$- \mathrm{LuPn}\,\frac{\partial^2 T(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2} - \mathrm{Lu}_p\,\frac{\mathrm{Bu}}{\mathrm{Ko}}\,\frac{\partial^2 P(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2},$$

$$\frac{\partial P(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \mathrm{Lu}_p\,\frac{\partial^2 P(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2} + \varepsilon\,\frac{\mathrm{Ko}}{\mathrm{Bu}}\,\frac{\partial \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}},$$

где

$\mathrm{Bu} = \dfrac{\rho c_p}{c_q}\,\dfrac{p_0}{t_c - t_0}$ — критерий Булыгина, характеризующий аккумулирующую способность тела,

$\mathrm{Lu}_p = \dfrac{a_p}{a_q}$ — критерий инерционности поля давления по отношению к полю температур (a_p — фильтрационный коэффициент потенциалопроводности),

$X = \dfrac{x}{R}$ — безразмерная координата,

T, Θ, P — соответственно безразмерные потенциалы переноса тепла, вещества, а также фильтрационного переноса; для постоянного начального распределения потенциалов

$$T = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}, \quad \Theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_p}, \quad P = \frac{p - p_0}{p_0}.$$

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса энергии и вещества при граничных условиях третьего рода

Найдем нестационарное распределение безразмерных потенциалов в дисперсной среде, по форме приближающихся к неограниченной пластине и шару. Примем задачу симметричной, а начальное распределение потенциалов по сечению материала постоянным. Краевые условия тогда запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial T(1,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} - \mathrm{Bi}_q\,[1 - T(1,\ \mathrm{Fo})] +$$

$$+ (1-\varepsilon)\,\mathrm{LuKoBi}_m\,[1 - \Theta(1,\ \mathrm{Fo})] = 0, \qquad (1.1)$$

$$- \frac{\partial \Theta(1,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} + \mathrm{Pn}\,\frac{\partial T(1,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} +$$

$$+ \frac{\mathrm{Bu}}{\mathrm{Ko}}\,\frac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}}\,\frac{\partial P(1,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} + \mathrm{Bi}_m\,[1 - \Theta(1,\ \mathrm{Fo})] = 0, \qquad (1.2)$$

$$P(1,\ \mathrm{Fo}) = 0, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial T(0,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} = \frac{\partial \Theta(0,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} = \frac{\partial P(0,\ \mathrm{Fo})}{\partial X} = 0, \qquad (1.4)$$

$$T(X,\ 0) = 0, \quad \Theta(X,\ 0) = 0, \quad P(X,\ 0) = 0. \qquad (1.5)$$

а) *Неограниченная пластина.* Обозначим

$$F_L(X,\ s) = \int_0^\infty F(X,\ \mathrm{Fo}) \exp\,(-s\,\mathrm{Fo})\,d\mathrm{Fo}. \qquad (1.6)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа к уравнениям (XVIII′) и учитывая начальные условия (1.5), получим:

$$sT_L = T_L'' - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\,s\,\Theta_L, \qquad (1.7)$$

$$s\,\Theta_L = \mathrm{Lu}\,\Theta_L'' - \mathrm{LuPn}T_L'' - \mathrm{Lu}_p\,\frac{\mathrm{Bu}}{\mathrm{Ko}}\,P_L'', \qquad (1.8)$$

$$sP_L = \mathrm{Lu}_p\,P_L'' + \varepsilon\,\frac{\mathrm{Ko}}{\mathrm{Bu}}\,s\,\Theta_L. \qquad (1.9)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7)—(1.9) в изображениях можно получить следующим образом. Определим из уравнения (1.7) Θ_L и подставим его в (1.8) и (1.9), в результате получим систему из двух уравнений относительно T_L и P_L. Решение новой системы найдем путем вторичного использования преобразования Лапласа относительно безразмерной координаты. Решение для Θ_L определится подстановкой выражений T_L, P_L и их вторых производных в уравнение (1.7). После проведения указанных преобразований будем иметь:

$$T_L = A_1 \exp(\sqrt{s}\,\nu_1 X) + A_2 \exp(\sqrt{s}\,\nu_2 X) +$$

$$+ A_3 \exp(\sqrt{s}\,\nu_3 X) + A_4 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_1 X) +$$

$$+ A_5 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_2 X) + A_6 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_3 X). \quad (1.10)$$

$$\Theta_L = -\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} [A_1 (1-\nu_1^2) \exp(\sqrt{s}\,\nu_1 X) +$$

$$+ A_2 (1-\nu_2^2) \exp(\sqrt{s}\,\nu_2 X) + A_3 (1-\nu_3^2) \exp(\sqrt{s}\,\nu_3 X) +$$

$$+ A_4 (1-\nu_1^2) \exp(-\sqrt{s}\,\nu_1 X) + A_5 (1-\nu_2^2) \exp(-\sqrt{s}\,\nu_2 X) +$$

$$+ A_6 (1-\nu_3^2) \exp(-\sqrt{s}\,\nu_3 X)], \quad (1.11)$$

$$P_L = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}} [A_1 \sigma_1 \exp(\sqrt{s}\,\nu_1 X) + A_2 \sigma_2 \exp(\sqrt{s}\,\nu_2 X) +$$

$$+ A_3 \sigma_3 \exp(\sqrt{s}\,\nu_3 X) + A_4 \sigma_1 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_1 X) +$$

$$+ A_5 \sigma_2 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_2 X) + A_6 \sigma_3 \exp(-\sqrt{s}\,\nu_3 X)]. \quad (1.12)$$

Здесь

$$\sigma_j = (1-\varepsilon)(1-\nu_j^2) - \mathrm{Lu}(1-\nu_j^2)\nu_j^2 - \varepsilon\,\mathrm{KoPnLu}\,\nu_j^2, \quad (1.13)$$

$$\nu_j = \sqrt{\Lambda_j + \frac{1}{3}\alpha}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.14)$$

Λ_j, входящие в (1.14), определяются выражением

$$\Lambda = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\Pi_2 + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_2^2 + \frac{1}{27}\Pi_1^3}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\Pi_2 - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_2^2 + \frac{1}{27}\Pi_1^3}}.$$

При этом правильные значения Λ одновременно должны удовлетворять соотношению

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\Pi_2 + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_2^2 + \frac{1}{27}\Pi_1^3}} \times$$

$$\times \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\Pi_2 - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_2^2 + \frac{1}{27}\Pi_1^3}} = -\frac{1}{3}\Pi_1,$$

где

$$\Pi_1 = -\frac{\alpha^2}{3} + \beta, \quad \Pi_2 = -\frac{2\alpha^3}{27} + \frac{\alpha\beta}{3} - \gamma,$$

$$\alpha = 1 + (1-\varepsilon)\frac{1}{\mathrm{Lu}} + \frac{1}{\mathrm{Lu}_p} + \varepsilon\,\mathrm{KoPn},$$

$$\beta = (1-\varepsilon)\frac{1}{\mathrm{Lu}} + \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Lu}} + \varepsilon\,\mathrm{KoPn}\right)\frac{1}{\mathrm{Lu}_p},$$

$$\gamma = \frac{1}{\mathrm{Lu}\mathrm{Lu}_p}.$$

Значения ν_j для различных значений критериев тепло- и массообмена приведены в таблице 36.

Таким образом, общее решение системы уравнений (XVIII') в изображениях описывается выражениями (1.10)–(1.12), где A_k ($k=1, 2, \ldots, 6$)—постоянные коэффициенты относительно X. Значения последних найдем из краевых условий (1.1)–(1.4). Первоначально используем условия симметрии (1.4). После применения преобразования Лапласа (1.6) они запишутся так:

$$T'_L(0, s) = \Theta'_L(0, s) = P'_L(0, s) = 0.$$

Удовлетворение общих решений условиям симметрии дает нам

$$A_1 = A_4, \quad A_2 = A_5, \quad A_3 = A_6.$$

На основе этих соотношений решения (1.10)—(1.12) можно переписать в следующем виде:

$$T_L(X, s) = \sum_{j=1}^{3} C_j \operatorname{ch} \sqrt{s}\,\nu_j X, \tag{1.15}$$

$$\Theta_L(X, s) = -\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}} \sum_{j=1}^{3} C_j (1-\nu_j^2) \operatorname{ch} \sqrt{s}\,\nu_j X, \tag{1.16}$$

$$P_2(X, s) = \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Bu}} \sum_{j=1}^{3} C_j \sigma_j \operatorname{ch} \sqrt{s}\,\nu_j X, \tag{1.17}$$

Таблица 36

$\nu_j = \nu_j(Lu_p, Lu, \varepsilon, KoPn)$ $\quad j = 1, 2, 3$

ν_j	Lu_p					Lu			
	100	300	500	700	1000	0,3	0,7	1,0	3,333
$j = 1$	1,8070	1,8080	1,8080	1,8080	1,8080	1,8080	1,6480	1,6100	1,5510
$j = 2$	0,1892	0,0938	0,0825	0,0686	0,0583	0,0825	0,2830	0,3135	0,9801
$j = 3$	0,5345	0,5502	0,5498	0,5507	0,5514	0,5498	0,4570	0,4312	0,3734
Значения других параметров	$Lu = 0,3, \quad \varepsilon = 0,7, \quad KoPn = 2,25$					$Lu_p = 500, \quad \varepsilon = 0,7, \quad KoPn = 2,25$			

ν_j	ε				KoPn						
	0,1	0,4	0,7	0,9	0,45	0,75	1,50	2,25	3,0	4,05	5,85
$j = 1$	1,8230	1,8150	1,8080	1 8040	1,3190	1,4250	1,6360	1,8080	1,9590	2,1490	2,4340
$j = 2$	0,0469	0,0577	0,0825	0,1604	0,0820	0,0820	0,0820	0,0825	0,0820	0,0820	0,0349
$j = 3$	0,9504	0,7790	0,5498	0,2828	0,7560	0,6990	0,6084	0,5498	0,5066	0,4611	0,4053
Значения других параметроь	$Lu = 0,3, \quad Lu_p = 500, \quad KoPn = 2,25$				$Lu = 0,3, \quad Lu_p = 500, \quad \varepsilon = 0,7$						

где C_j ($j=1, 2, 3$)—новые постоянные относительно координат. Применяя преобразования (1.6) к граничным условиям (1.1), (1.2), получим:

$$T'_L(1, s) - \mathrm{Bi}_q\left[\frac{1}{s} - T_L(1, s)\right] +$$

$$+ (1-\varepsilon)\,\mathrm{Lu}\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Bi}_m\left[\frac{1}{s} - \Theta_L(1, s)\right] = 0, \qquad (1.18)$$

$$-\Theta'_L(1, s) + \mathrm{Pn}\,T'_E(1, s) +$$

$$+ \frac{\mathrm{Bu}}{\mathrm{Ko}}\,\frac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}}\,P'_L(1, s) + \mathrm{Bi}_m\left[\frac{1}{s} - \Theta_L(1, s)\right] = 0, \qquad (1.19)$$

$$P_L(1, s) = 0. \qquad (1.20)$$

Подставляя в условия (1.18)—(1.20) решения (1.15)—(1.17), получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3} C_j P_j + \frac{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}{s} = 0 \\ &\sum_{j=1}^{3} C_j Q_j + \frac{\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1 - 1}{s} = 0 \\ &\sum_{j=1}^{3} C_j \chi_j = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1.21)$$

решение которой дает нам:

$$C_1 = \frac{(\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1 - 1)\left(P_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}P_3\right) - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\left(Q_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}Q_3\right)}{s\left[\left(P_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}Q_3\right) - \left(P_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}Q_3\right)\right]}, \qquad (1.22)$$

$$C_2 = -\frac{(\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1 - 1)\left(P_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}P_3\right) - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\left(Q_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}Q_3\right)}{s\left[\left(P_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}Q_3\right) - \left(P_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}Q_3\right)\right]}, \qquad (1.23)$$

$$C_3=\frac{(\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1-1)\left(P_1\frac{\chi_2}{\chi_3}-P_2\frac{\chi_1}{\chi_3}\right)-\varepsilon\,\mathrm{Ko}\left(Q_1\frac{\chi_2}{\chi_3}-Q_2\frac{\chi_1}{\chi_3}\right)}{s\left[\left(P_1-\frac{\chi_1}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_2-\frac{\chi_2}{\chi_3}Q_3\right)-\left(P_2-\frac{\chi_2}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_1-\frac{\chi_1}{\chi_3}Q_3\right)\right]}, \quad (1.24)$$

где

$$P_j=(1-\nu_j^2)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{s}\,\nu_j+$$

$$+\frac{(1-\nu_j^2)+\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn}+\frac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}}\sigma_j}{\mathrm{Bi}_m}\sqrt{s}\,\nu_j\,\mathrm{sh}\,\sqrt{s}\,\nu_j,$$

$$Q_j=[1+(1-\nu_j^2)K_1]\,\mathrm{ch}\,\sqrt{s}\,\nu_j+\frac{1}{\mathrm{Bi}_q}\sqrt{s}\,\nu_j\,\mathrm{sh}\,\sqrt{s}\,\nu_j,$$

$$\chi_j=\sigma_j\,\mathrm{ch}\,\sqrt{s}\,\nu_j.$$

Для получения оригинала изображения каждое из решений необходимо представить в виде отношения двух обобщенных полиномов относительно s: $\frac{\Phi(s)}{\psi(s)}$. Знаменатель соответствующих отношений для T_L, Θ_L, P_L будет общим и равным

$$\psi(s)=s\left[\left(P_1-\frac{\chi_1}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_2-\frac{\chi_2}{\chi_3}Q_3\right)-\right.$$

$$\left.-\left(P_2-\frac{\chi_2}{\chi_3}P_3\right)\left(Q_1-\frac{\chi_1}{\chi_3}Q_3\right)\right], \quad (1.25)$$

Анализ отношений и корней знаменателя (1.25) показывает, что условия, необходимые для перехода к оригиналу, по теореме разложения выполняются, и мы можем воспользоваться следующей формулой обратного преобразования:

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{\psi(s)}\right]=\frac{\Phi(0)}{\psi'(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)}\exp(s_n\,\mathrm{Fo}), \quad (1.26)$$

где $s=0$ и $s=s_n$—корни (1.25).

Определяя для полей безразмерных потенциалов переноса $\psi'(0)$, $\Phi(0)$, $\psi'(s_n)$, $\Phi(s_n)$ и подставляя полученные значения в (1.26), после ряда преобразований получим окончательное решение рассматриваемой задачи:

$$T(X, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} C_{nj} \cos \nu_j \mu_n X \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \quad (1.27)$$

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \times$$

$$\times\, C_{nj}\left(1 - \nu_j^2\right) \cos \nu_j \mu_n X \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \quad (1.28)$$

$$P(X, \mathrm{Fo}) = -\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \times$$

$$\times\, C_{nj} \sigma_j \cos \nu_j \mu_n X \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right). \quad (1.29)$$

Коэффициенты C_{nj} определяются выражениями:

$$C_{n1} = 2\left(\varepsilon \mathrm{Ko} K_1 - 1\right)\left(P_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} P_{n3}\right) -$$

$$- \varepsilon \mathrm{Ko}\left(Q_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} Q_{n3}\right)(\mu_n \psi_n)^{-1}, \quad (1.30)$$

$$C_{n2} = -2\left(\varepsilon \mathrm{Ko} K_1 - 1\right)\left(P_{n1} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}} P_{n3}\right) -$$

$$- \varepsilon \mathrm{Ko}\left(Q_{n1} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n2}} Q_{n3}\right)(\mu_n \psi_n)^{-1}, \quad (1.31)$$

$$C_{n3} = 2\left(\varepsilon \mathrm{Ko} K_1 - 1\right)\left(P_{n1} \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} - P_{n2} \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}}\right) -$$

$$- \varepsilon \mathrm{Ko}\left(Q_{n1} \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} - Q_{n2} \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n2}}\right)(\mu_n \psi_n)^{-1}, \quad (1.32)$$

где

$$\psi_n = \left(P_{n1} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}} P_{n3}\right)\left[\nu_2 A_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}}(\nu_3 A_{n3} + b_{n2} Q_{n3})\right] +$$

$$+ \left[\nu_1 B_{n1} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}}(\nu_3 B_{n3} + b_{n1} P_{n3})\right]\left(Q_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} Q_{n3}\right) -$$

$$- \left(P_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}} P_{n3}\right)\left[\nu_1 A_{ni} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}}(\nu_3 A_{n3} + b_{n1} Q_{n3})\right] -$$

$$- \left[\nu_2 B_{n2} - \frac{\chi_{n2}}{\chi_{n3}}(\nu_3 B_{n3} + b_{n2} P_{n3})\right]\left(Q_{n1} - \frac{\chi_{n1}}{\chi_{n3}} Q_{n3}\right), \qquad (1.33)$$

$$A_{nj} = \left[1 + \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + (1 - \nu_j^2) K_1\right] \sin \nu_j \mu_n + \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \cos \nu_j \mu_n, \qquad (1.34)$$

$$B_{nj} = (1 - \nu_j^2) \sin \nu_j \mu_n + \frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon \,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} + \dfrac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}} \sigma_j}{\mathrm{Bi}_m} \times$$

$$\times (\sin \nu_j \mu_n + \nu_j \mu_n \cos \nu_j \mu_n), \qquad (1.35)$$

$$b_{nj} = \nu_j \operatorname{tg} \nu_j \mu_n - \nu_3 \operatorname{tg} \nu_3 \mu_n, \qquad (1.36)$$

$$P_{nj} = (1 - \nu_j^2) \cos \nu_j \mu_n - \frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon \,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} + \dfrac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}} \sigma_j}{\mathrm{Bi}_m} \times$$

$$\times \nu_j \mu_n \sin \nu_j \mu_n, \qquad (1.37)$$

$$Q_{nj} = [1 + (1 - \nu_j^2) K_1] \cos \nu_j \mu_n - \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \sin \nu_j \mu_n, \qquad (1.38)$$

$$\chi_{nj} = \sigma_j \cos \nu_j \mu_n. \qquad (1.39)$$

Характеристические корни $\mu_n = i\sqrt{s_n}$ определяются решением следующего уравнения:

$$\left(P_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3} P_3\right)\left(Q_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3} Q_3\right) - \left(P_2 - \frac{\chi_2}{\chi_3} P_3\right)\left(Q_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3} Q_3\right) = 0. \qquad (1.40)$$

В таблицах 37—42 и на рисунках 48—52 приведены значения характеристических корней μ_n для различных критериев подобия в зависимости от Bi_q. Значения μ_n получены графоаналитическим решением уравнения (1.40).

Таблица 37

Корни характеристического уравнения (1.40) в зависимости от Bi_m (Lu = 0,3, $\varepsilon = 0,7$, KoPn = 2,25, $Lu_p = 500$)

Bi_q	$Bi_m = 5$			$Bi_m = 10$			$Bi_m = 15$			$Bi_m = 20$		
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
0,30	0,454	1,221	1,702	0,466	—	—	0,468	—	—	0,469	—	—
0,35	0,476	1,358	1,700	0,492	—	—	0,494	—	—	0,495	—	—
0,40	0,493	1,392	1,697	0,513	—	—	0,515	—	—	0,517	—	—
0,45	0,511	1,429	1,686	0,532	—	—	0,534	—	—	0,536	—	—
0,50	0,528	1,462	1,668	0,552	—	—	0,553	—	—	0,556	—	—
0,60	0,555	—	—	0,577	—	—	0,581	—	—	0,583	—	—
0,70	0,578	—	—	0,599	—	—	0,605	—	—	0,607	—	—
0,80	0,596	—	—	0,617	—	—	0,624	—	—	0,627	—	—
0,90	0,611	—	—	0,633	—	—	0,640	—	—	0,645	—	—
1,00	0,622	—	—	0,645	—	—	0,653	—	—	0,658	—	—
1,50	0,656	—	—	0,686	—	—	0,700	—	—	0,706	—	—
2,00	0,676	—	—	0,714	—	—	0,725	—	—	0,733	—	—
3,00	0,696	—	—	0,739	—	—	0,755	—	—	0,764	—	—
4,00	0,704	—	—	0,752	—	—	0,771	—	—	0,779	—	—
5,00	0,712	1,990	2,091	0,761	—	—	0,781	—	—	0,789	—	—
6,00	0,715	1,931	2,211	0,767	—	—	0,787	—	—	0,796	—	—
7,00	0,718	1,911	2,286	0,771	—	—	0,792	—	—	0,801	—	—
8,00	0,721	1,900	2,336	0,775	—	—	0,796	—	—	0,804	—	—
9,00	0,723	1,895	2,370	0,777	—	—	0,798	—	—	0,807	—	—
10,00	0,725	1,891	2,397	0,779	—	—	0,801	—	—	0,810	—	—
15,00	0,728	1,879	2,483	0,786	2,213	2,462	0,808	—	—	0,817	—	—
20,00	0,730	1,875	2,529	0,788	2,185	2,527	0,812	2,378	2,506	0,820	—	—
30,00	0,732	1,870	2,579	0,792	2,158	2,585	0,816	2,326	2,586	0,824	2,424	2,587
40,00	0,734	1,867	2,600	0,794	2,149	2,610	0,817	2,311	2,610	0,826	2,404	2,610
50,00	0,735	1,866	2,620	0,795	2,144	2,630	0,818	2,302	2,630	0,827	2,392	2,630

Таблица 38

Корни характеристического уравнения (1.40) в зависимости от Pn (Lu = 0,3, ε = 0,7, Bi_m = 20, Ko = 9, Lu_p = 500)

Bi_q	Pn = 0,65		Pn = 0,45		Pn = 0,25			Pn = 0,05	
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2
0,30	0,412	1,752	0,443	2,480	0,469	—	—	0,508	1,437
0,35	0,430	1,764	0,464	2,454	0,495	—	—	0,544	1,439
0,40	0,445	1,771	0,482	2,430	0,517	—	—	0,574	1,445
0,45	0,458	1,779	0,498	2,402	0,536	—	—	0,602	1,450
0,50	0,470	1,784	0,511	2,375	0,556	—	—	0,625	1,453
0,60	0,488	1,792	0,534	2,330	0,583	—	—	0,669	1,466
0,70	0,504	1,799	0,552	2,288	0,607	—	—	0,709	1,477
0,80	0,515	1,804	0,566	2,259	0,627	—	—	0,741	1,488
0,90	0,525	1,810	0,578	2,237	0,645	—	—	0,771	1,498
1,00	0,533	1,815	0,588	2,220	0,658	—	—	0,796	1,507
1,50	0,558	1,830	0,622	2,177	0,706	—	—	0,885	1,556
2,00	0,572	1,837	0,642	2,159	0,733	—	—	0,938	1,597
3,00	0,589	1,847	0,662	2,142	0,764	—	—	0,993	1,660
4,00	0,599	1,854	0,673	2,135	0,779	—	—	1,023	1,704
5,00	0,604	1,858	0,681	2,131	0,789	—	—	1,042	1,734
6,00	0,608	1,861	0,685	2,128	0,796	—	—	1,054	1,755
7,00	0,611	1,863	0,688	2,126	0,801	—	—	1,061	1,773
8,00	0,613	1,865	0,691	2,124	0,804	—	—	1,068	1,787
9,00	0,614	1,866	0,693	2,123	0,807	—	—	1,073	1,797
10,00	0,616	1,868	0,695	2,122	0,810	—	—	1,077	1,805
15,00	0,621	1,870	0,699	2,120	0,817	—	—	1,090	1,831
20,00	0,622	1,872	0,701	2,118	0,820	—	—	1,096	1,846
30,00	0,624	1,873	0,704	2,117	2,824	2,424	2,587	1,103	1,862
40,00	0,626	1,874	0,705	2,116	0,826	2,404	2,610	1,105	1,870
50,00	0,627	1,875	0,706	2,115	0,827	2,392	2,630	1,106	1,875

Таблица 39

Корни характеристического уравнения (1.40) в зависимости от Ко ($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_m = 20$, $Pn = 0.25$, $Lu_p = 500$)

Bi_q	Ко = 3		Ко = 6			Ко = 9			Ко = 12		
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
0,30	0,502	1,489	0,485	1.686	2,191	0,469	—	—	0,456	—	—
0,35	0,535	1,498	0,513	1,699	2,189	0,495	—	—	0,480	—	—
0,40	0,565	1,508	0,538	1,720	2,187	0,517	—	—	0,501	—	—
0,45	0,590	1,518	0,563	1,743	2 185	0,536	—	—	0.518	—	—
0,50	0,614	1,527	0,582	1,768	2,182	0,556	—	—	0,534	—	—
0,60	0,656	1,546	0,617	1,816	2,179	0,583	—	—	0,560	—	—
0,70	0,690	1,563	0,646	1,862	2,173	0,607	—	—	0,581	—	—
0,80	0,718	1,579	0,670	1,904	2,163	0,627	—	—	0,599	—	—
0,90	0,743	1,595	0,690	1,948	2,148	0,645	—	—	0,613	—	—
1,00	0,766	1,612	0,707	1,988	2,129	0,658	—	—	0,625	—	—
1,50	0,843	1,687	0,765	—	—	0,706	—	—	0,666	—	—
2,00	0,886	1,734	0,798	—	—	0,733	—	—	0,690	—	—
3,00	0,934	1,807	0,836	—	—	0,764	—	—	0,716	—	—
4,00	0,961	1,852	0,856	—	—	0,779	—	—	0,730	—	—
5,00	0,975	1.884	0,867	—	—	0,789	—	—	0,738	—	—
6,00	0,987	1,907	0,875	2,340	2,422	0,796	—	—	0.744	—	—
7,00	0,995	1,924	0,881	2,317	2.503	0,801	—	—	0,748	—	—
8,00	1,000	1,937	4,886	2,307	2,547	0,804	—	—	0,751	2,415	2,575
9,00	1,005	1,946	0,889	2,302	2,569	0,807	—	—	0,754	2,386	2,603
10.00	1,008	1,956	0,891	2,296	2,605	0,810	—	—	0,756	2,358	2,639
15,00	1,020	1,978	0,900	2,287	2,671	0,817	—	—	0,761	2,328	2,700
20,00	1,025	1,991	0,904	2,282	2,710	0,820	—	—	0,764	2,315	2,725
30,00	1,030	2,003	0,908	2,279	2,747	0,824	2,424	2.587	0,766	2,303	2,747
40,00	1,033	2,007	0,911	2,277	2,768	0,826	2,404	2,610	0,769	2,299	2,759
50,00	1,035	2,012	0,913	2,276	2,777	0,827	2,392	2,630	0,770	2,295	2,764

Таблица 40

Корни характеристического уравнения (1.40) в зависимости от Lu_p ($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_m = 20$, КоПп = 2,25)

Bi_q	$Lu_p = 300$			$Lu_p = 500$			$Lu_p = 1000$		
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
0,30	0,454	1,677	2,260	0,469	—	—	0,468	—	—
0,35	0,480	1,700	2,246	0,495	—	—	0,493	—	—
0,40	0,503	1,726	2,238	0,517	—	—	0,517	—	—
0,45	0,523	1,754	2,232	0,536	—	—	0,537	—	—
0,50	0,541	1,778	2,228	0,556	—	—	0,554	—	—
0,60	0,572	1,836	2,222	0,583	—	—	0,584	—	—
0,70	0,596	1,889	2,214	0,607	—	—	0,607	—	—
0,80	0,617	1,942	2,199	0,627	—	—	0,628	—	—
0,90	0,634	2,005	2,173	0,645	—	—	0,644	—	—
1,00	0,648	—	—	0,658	—	—	0,658	—	—
1,50	0,699	—	—	0,706	—	—	0,707	—	—
2,00	0,727	—	—	0,733	—	—	0,734	—	—
3,00	0,758	—	—	0,764	—	—	0,765	—	—
4,00	0,775	—	—	0,779	—	—	0,781	—	—
5,00	0,786	—	—	0,789	—	—	0,791	—	—
6,00	0,793	—	—	0,796	—	—	0,799	—	—
7,00	0,798	—	—	0,801	—	—	0,803	—	—
8,00	0,802	—	—	0,804	—	—	0,807	—	—
9,00	0,805	—	—	0,807	—	—	0,810	—	—
10,00	0,808	—	—	0,810	—	—	0,813	—	—
15,00	0,816	—	—	0,817	—	—	0,820	—	—
20,00	0,819	—	—	0,820	—	—	0,824	—	—
30,00	0,823	—	—	0,824	2,424	2,587	0,828	2,428	2,581
40,00	0,825	—	—	0,826	2,404	2,610	0,830	2,404	2,616
50,00	0,826	—	—	0,827	2,392	2,630	0,831	2,394	2,635

Таблица 41

Зависимость характеристических корней уравнения (1.40) от ε ($Lu = 0{,}3$, $Lu_p = 500$, $Bi_m = 20$, $Pn = 0{,}25$, $Ko = 9$)

Bi_q	$\varepsilon = 0{,}1$			$\varepsilon = 0{,}7$			$\varepsilon = 0{,}9$	
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2
0,30	0,463	1,345	1,959	0,469	—	—	0,474	—
0,35	0,490	1,351	1,961	0,495	—	—	0,501	—
0,40	0,512	1,358	1,967	0,517	—	—	0,523	—
0,45	0,533	1,369	1,970	0,536	—	—	0,543	—
0,50	0,550	1,381	1,978	0,556	—	—	0,561	—
0,60	0,579	1,405	1,993	0,583	—	—	0,590	—
0,70	0,603	1 422	2,012	0,607	—	—	0,614	—
0,80	0 623	1,438	2,030	0,627	—	—	0,633	—
0,90	0,639	1,453	2,047	0,645	—	—	0,649	—
1,00	0,653	1,466	2,062	0,658	—	—	0,662	—
1,50	0,702	1,510	2,123	0,706	—	—	0,709	—
2,00	0,731	1,536	2,178	0,733	—	—	0,736	—
3,00	0,761	1,568	2,247	0,764	—	—	0,767	—
4,00	0,776	1,586	2,286	0,779	—	—	0,784	2,616
5,00	0,785	1,598	2,313	0,789	—	—	0,794	2,560
6,00	0,792	1,607	2,334	0,796	—	—	0,803	2,537
7,00	0,796	1,613	2,352	0,801	—	—	0,807	2,523
8,00	0,800	1,617	2,364	0,804	—	—	0,812	2,514
9,00	0,802	1,620	2,376	0,807	—	—	0,815	2,507
10,00	0,804	1,623	2,384	0,810	—	—	0,817	2,502
15,00	0,810	1,631	2,413	0,817	—	—	0,825	2,490
20,00	0,813	1,636	2,427	0,820	—	—	0,828	2,484
30,00	0,816	1,640	2,442	0,824	2,424	2,587	0,832	2,478
40,00	0,818	1 642	2,450	0,826	2,404	2,610	0,834	2,475
50,00	0,819	1,644	2,455	0,827	2,392	2,630	0,836	2,473

Таблица 42

Корни характеристического уравнения (1.40) в зависимости от Lu ($\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_m = 20$, Ко $= 9$, Pn $= 0{,}25$, $Lu_p = 500$)

Bi_q	Lu = 0,3			Lu = 0,7		Lu = 1,0	Lu = 3,333
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_1	μ_1
0,25	0,438	—	—	0,0714	1,970	0,0529	0,0435
0,30	0,469	—	—	0,0779	1,971	0,0578	0,0474
0,35	0,495	—	—	0,0834	1,972	0,0622	0,0508
0,40	0,517	—	—	0,0884	1,974	0,0662	0,0541
0,45	0,536	—	—	0,0928	1,975	0,0699	0,0571
0,50	0,556	—	—	0,0968	1,977	0,0733	0,0598
0,60	0,583	—	—	0,1050	1,978	0,0801	0,0652
0,70	0,607	—	—	0,111	1,980	0,0858	0,0698
0,80	0,627	—	—	0,117	1,984	0,0911	0,0738
0,90	0,645	—	—	0,123	1,986	0,0962	0,0778
1,00	0,658	—	—	0,128	1,987	0,1011	0,0815
1,50	0,706	—	—	0,151	1,998	0,1197	0,0950
2,00	0,733	—	—	0,170	2,008	0,1340	0,106
3,00	0,764	—	—	0,197	2,024	0,157	0,124
4,00	0,779	—	—	0,214	2,037	0,173	0,138
5,00	0,789	—	—	0,228	2,047	0,184	0,155
6,00	0,796	—	—	0,242	2,056	0,197	0,167
7,00	0,801	—	—	0,250	2,064	0,208	0,175
8,00	0,804	—	—	0,254	2,069	0,214	0,188
9,00	0,807	—	—	0,260	2,074	0,220	—
10,00	0,810	—	—	0,263	2,078	0,225	0,204
15,00	0,817	—	—	0,280	2,091	0,245	0,231
20,00	0,820	—	—	0,287	2,098	0,256	0,241
30,00	0,824	2,424	2,587	0,296	2,108	0,269	0,255
40,00	0,826	2,404	2,610	0,300	2,112	0,275	0,264
50,00	0,827	2,392	2,630	0,302	2,114	0,278	0,270

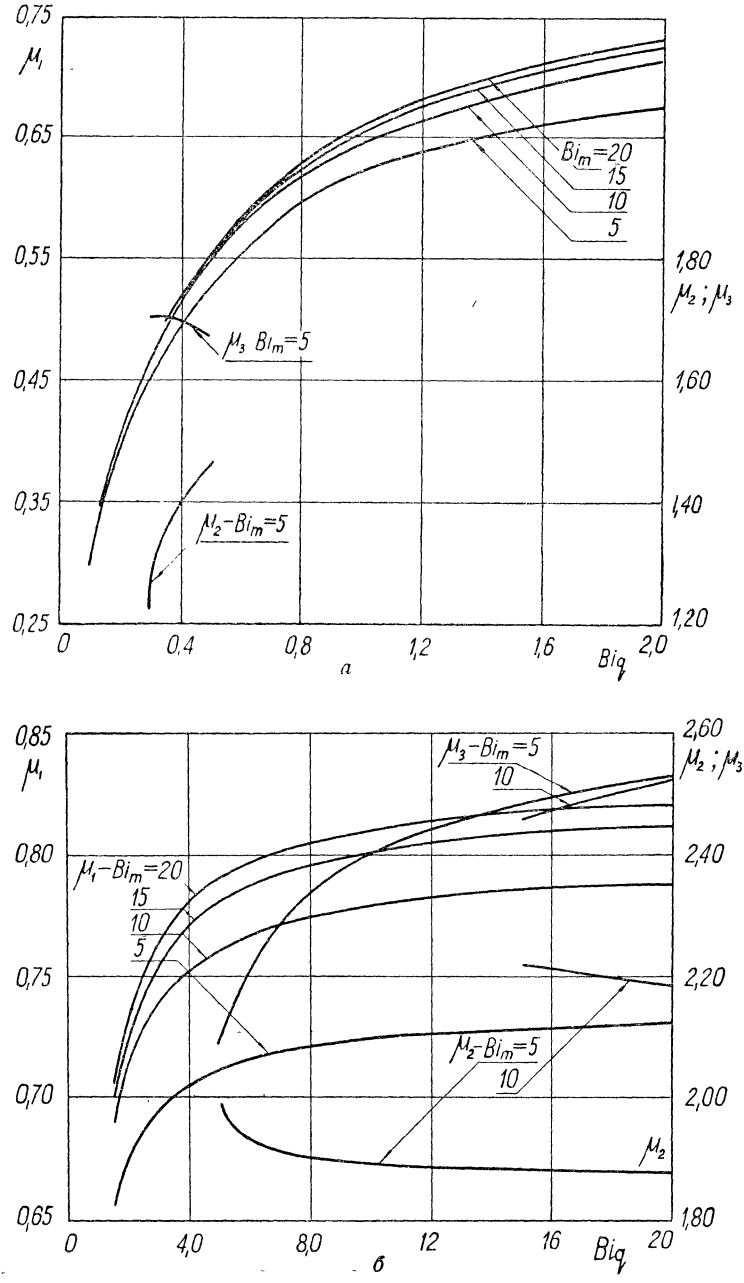
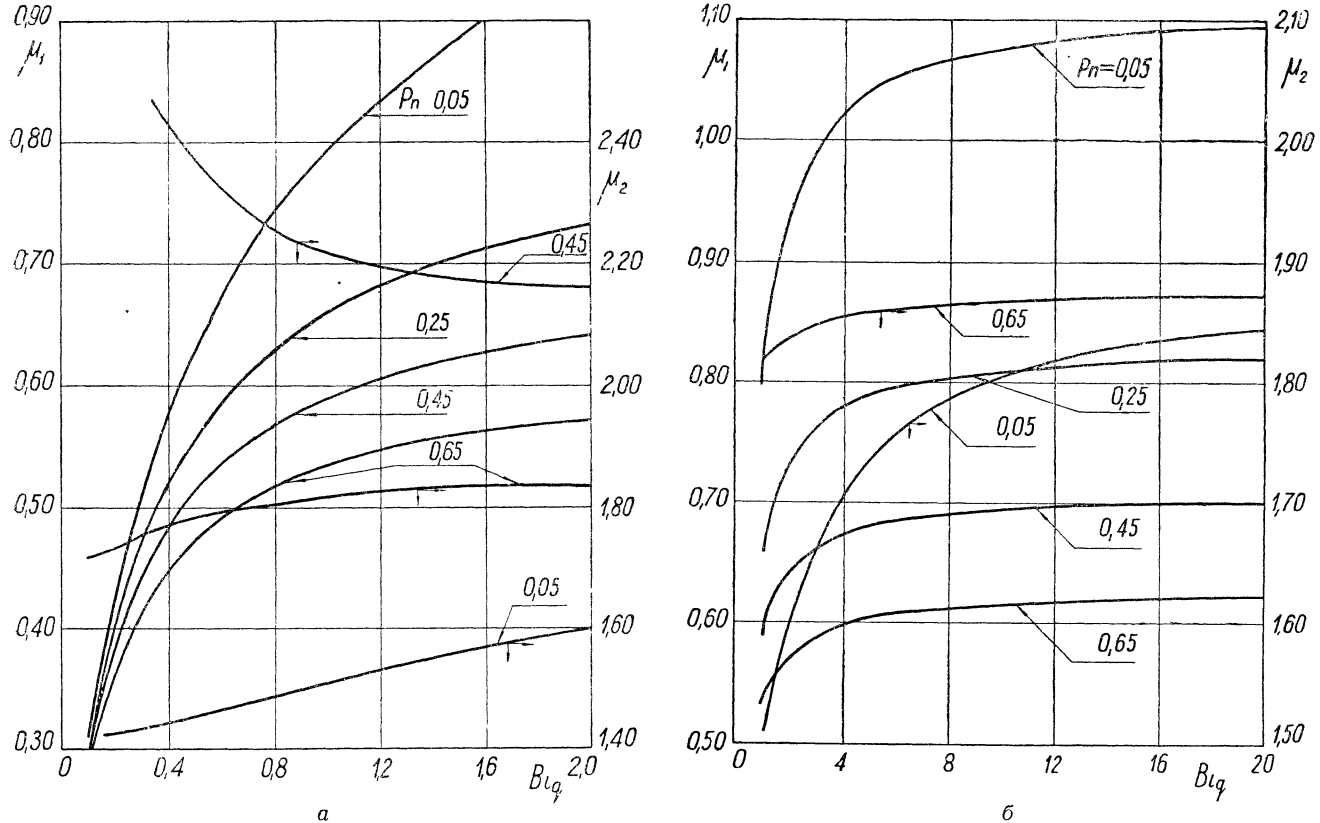


Рис. 48. Зависимость характеристических корней неограниченной пластины: *а* — от Bi_m ($Bi_q = 0{,}1 \div 2{,}0$), *б* — от Bi_m ($Bi_q = 1{,}0 \div 20$).



а *б*

Рис. 49. Зависимость характеристических корней неограниченной пластины:
а—от Pn ($Bi_q = 0{,}1 \div 2{,}0$), *б*— от Pn ($Bi_q = 1{,}0 \div 20$).

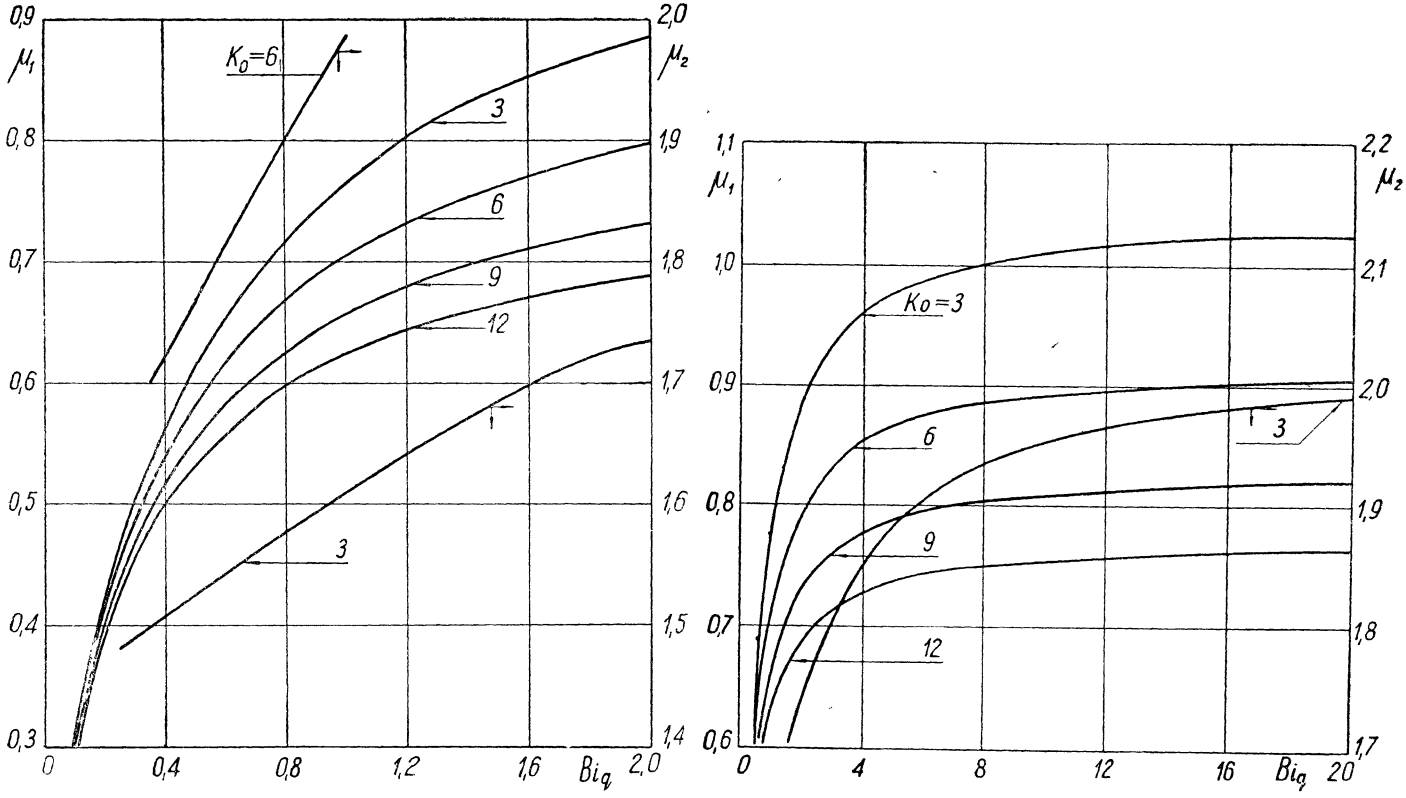
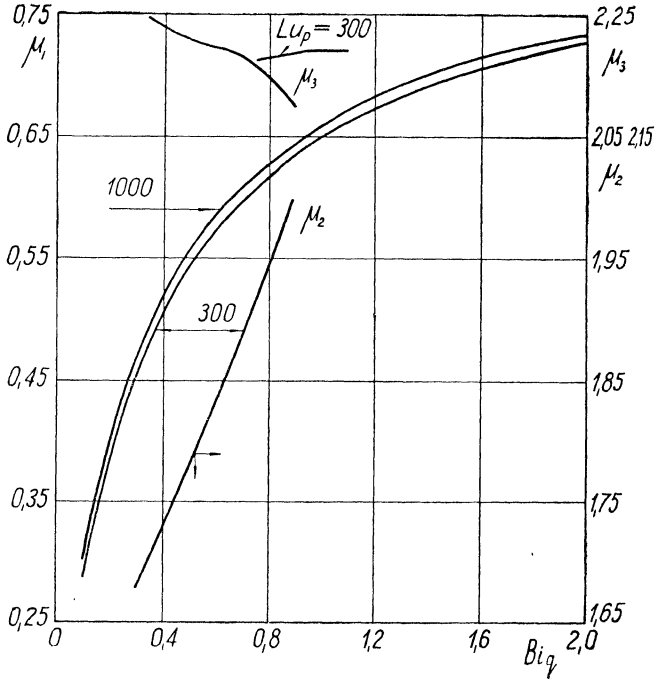
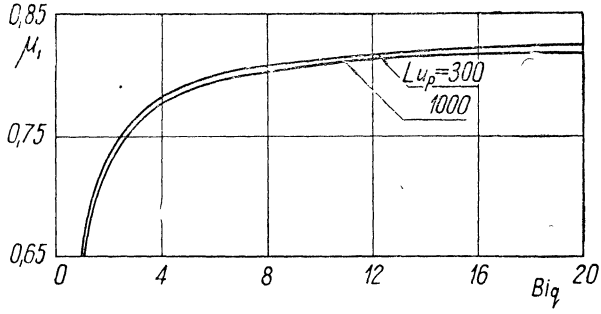


Рис. 50. Зависимость характеристических корней неограниченной пластины: *а*—от Ко ($Bi_q = 0{,}1 \div 2{,}0$, *б*—от Ко ($Bi_q = 1{,}0 \div 20$).

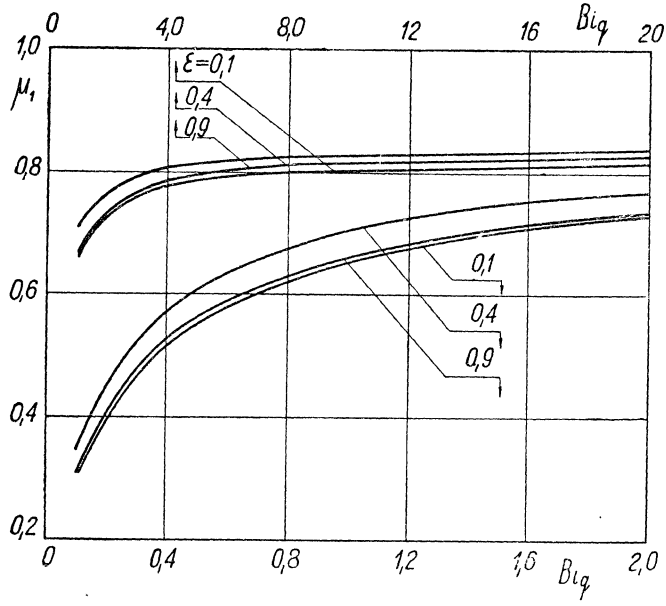


а

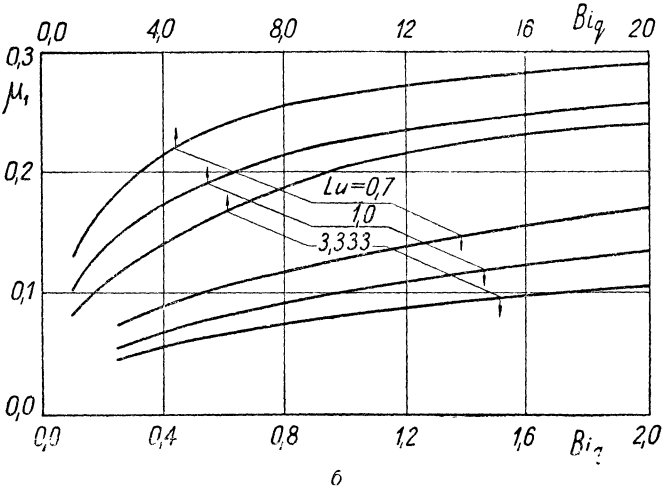


б

Рис. 51. Зависимость характеристических корней неограниченной пластины: *а*—от Lu_p (Bi_q =0,1÷2,0), *б*— от Lu_p (Bi_q = 1,0÷20).



а



б

Рис. 52. Зависимость характеристических корней неограниченной пластины: *а*—от ε, *б*—от Lu.

Среднее значение безразмерной величины определяется формулой

$$\overline{\varphi}(\mathrm{Fo})=\int_0^1 \varphi(X, \mathrm{Fo})\,dX,$$

поэтому для усредненных безразмерных потенциалов переноса будем иметь:

$$\overline{T}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} D_{nj}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \tag{1.41}$$

$$\overline{\Theta}=1+\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} D_{nj}\left(1-\nu_j^2\right)\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \tag{1.42}$$

$$\overline{P}=-\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Bu}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} D_{nj}\sigma_j\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right). \tag{1.43}$$

Здесь

$$D_{nj}=C_{nj}\frac{\sin\nu_j\mu_n}{\nu_j\mu_n}.$$

Выражения для скоростей изменения соответствующих параметров, равно как расходы тепла и вещества в процессе тепло- и массообмена, легко получить, пользуясь известными формулами и решениями, приведенными выше.

Результаты численных расчетов по формулам (1.27)—(1.29), (1.41)—(1.43) показывают, что бесконечные ряды, входящие в решения, сходятся достаточно быстро. Начиная с определенного значения критерия Фурье, из всего ряда можно использовать два-три первых члена. В среднем, начиная со значения Fo=0,7, ошибка в расчете по первым двум-трем членам ряда не превышает 1—2%. На основе вышесказанного, для практических расчетов решения (1.41)—(1.43) можно упростить и представить в следующем виде:

$$\overline{T}\approx 1-\sum_{n=1}^{2} D_{n\mathrm{T}}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \tag{1.44}$$

$$\overline{\Theta}\approx 1+\sum_{n=1}^{2} D_{n\Theta}\exp\left(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}\right), \tag{1.45}$$

$$\bar{P} \approx \sum_{n=1}^{2} D_{np} \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \tag{1.46}$$

где

$$D_{n\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{3} D_{nj}, \qquad D_{n\vartheta} = \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Ko}} \sum_{j=1}^{3} D_{nj}\left(1-\nu_j^2\right),$$

$$D_{np} = -\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Bu}} \sum_{j=1}^{3} D_{nj}\,\sigma_j.$$

Значения коэффициентов C_{nj}, D_{nj}, а также $D_{n\mathrm{T}}$, $D_{n\vartheta}$, D_{np} для различных совокупностей критериев тепло- и массообмена приведены в таблицах 43 — 47.

б) *Шар*. Систему дифференциальных уравнений высокоинтенсивного тепло- и массообмена (XVIII) для шара можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial[XT]}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2[XT]}{\partial X^2} - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\frac{\partial[X\Theta]}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial[X\Theta]}{\partial \mathrm{Fo}} = \mathrm{Lu}\,\frac{\partial^2[X\Theta]}{\partial X^2} - \mathrm{Lu}\,\mathrm{Pn}\frac{\partial^2[XT]}{\partial X^2} - \mathrm{Lu}_p\,\frac{\mathrm{Bu}}{\mathrm{Ko}}\,\frac{\partial^2[XP]}{\partial X^2}, \tag{1.48}$$

$$\frac{\partial[XP]}{\partial \mathrm{Fo}} = \mathrm{Lu}_p\,\frac{\partial^2[XP]}{\partial X^2} + \varepsilon\,\frac{\mathrm{Ko}}{\mathrm{Bu}}\,\frac{\partial[X\Theta]}{\partial \mathrm{Fo}}. \tag{1.49}$$

Обозначим

$$XT = T^*, \quad X\Theta = \Theta^*, \quad XP = P^*. \tag{1.50}$$

В указанном виде запись системы уравнений будет тождественна записи системы уравнений для неограниченной пластины. Следовательно, в изображениях ее решением будет

$$T_L^* = A_1 \exp\left(\sqrt{s}\,\nu_1 X\right) + A_2 \exp\left(\sqrt{s}\,\nu_2 X\right) + A_3 \exp\left(\sqrt{s}\,\nu_3 X\right) +$$

$$+ A_4 \exp\left(-\sqrt{s}\,\nu_1 X\right) + A_5 \exp\left(-\sqrt{s}\,\nu_2 X\right) +$$

$$+ A_6 \exp\left(-\sqrt{s}\,\nu_3 X\right), \tag{1.51}$$

Таблица 43

Bi_q

Значения постоянных коэффициентов для неограниченной пластины ($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_m = 20$, $Ko = 9$, $Pn = 0{,}25$, $Lu_p = 500$, $Bu = 1 \cdot 10^{-3}$)

	$Bi_q = 5$	$Bi_q = 10$	$Bi_q = 15$	$Bi_q = 20$	$Bi_q = 30$		
	μ_1	μ_1	μ_1	μ_1	μ_1	μ_2	μ_3
C_1	3,053	3,052	3,052	3,054	3,051	—1 586	0,6413
C_2	$-0{,}6316 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1760 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1822 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6397 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1437 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4536 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1186 \cdot 10^{-2}$
C_3	0.7861	0,2965	0.1252	$0{,}3672 \cdot 10^{-1}$	—0,05070	—0,9590	—0,4161
D_1	2,118	2,073	2,057	2,051	2,041	+0,3424	—0,1370
D_2	$-0{,}6311 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1759 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1821 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6393 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1436 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4507 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1177 \cdot 10^{-2}$
D_3	0,7617	0,2868	0,1210	$0{,}3549 \cdot 10^{-1}$	—0.04899	—0,6992	—0,2894
$D_{n\mathrm{T}}$	2,873	2,358	2,178	2,087	1,993	—0,3523	—0,4252
$D_{n\Theta}$	—0,6792	—0,7149	—0,7271	—0,7344	—0,7400	—0,2000	0,01746
D_{np}	2,420	2,657	2,746	2,790	2,834	1,910	0,6403

Таблица 44

Bi_m

Значения постоянных коэффициентов для неограниченной пластины
($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_q = 20$, $Ko = 9$, $Pn = 0{,}25$, $Lu_p = 500$, $Bu = 1 \cdot 10^{-3}$)

	$Bi_m = 5$			$Bi_m = 8$		
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
C_1	3,022	—0,6713	—0,1646	3,032	—0,8157	$-0{,}3260 \cdot 10^{-1}$
C_2	$0{,}8495 \cdot 10^{-2}$	$0{,}9549 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}2836 \cdot 10^{-3}$	$0{,}4320 \cdot 10^{-2}$	$0{,}8902 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1388 \cdot 10^{-4}$
C_3	—0,5517	—1,221	0,1844	—0,2480	—1,337	$0{,}4945 \cdot 10^{-1}$
D_1	2,218	$0{,}4870 \cdot 10^{-1}$	$0{,}3565 \cdot 10^{-1}$	2,120	0,1233	$-0{,}7061 \cdot 10^{-2}$
D_2	$0{,}8489 \cdot 10^{-2}$	$0{,}9512 \cdot 10^{-2}$	$-0{.}2816 \cdot 10^{-3}$	$0{,}4317 \cdot 10^{-2}$	$0{,}8660 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1378 \cdot 10^{-4}$
D_3	—0,5370	—1,016	0,1305	—0,2404	—1,067	$0{,}3500 \cdot 10^{-1}$
$D_{n\mathrm{T}}$	1,689	—0,958	0,1659	1,884	—0,935	$0{.}2792 \cdot 10^{-1}$
$D_{n\Theta}$	—0,8565	—0,1286	$0{,}1576 \cdot 10^{-2}$	—0,7892	—0,1611	$0{,}6416 \cdot 10^{-2}$
D_{np}	2,437	0 8314	—0,4340	2,646	1,459	0,1683

Продолжение таблицы 44

	$Bi_m = 15$			$Bi_m = 20$
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1
C_1	3,049	—1,977	0,9574	3,054
C_2	$0{,}1445 \cdot 10^{-2}$	$0{,}6335 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5966\ 10^{-3}$	$0{,}6397 \cdot 10^{-3}$
C_3	$-0{,}2636 \cdot 10^{-1}$	—1,114	—0,5776	$0{,}3672 \cdot 10^{-1}$
D_1	2,066	0,4211	—0,2079	2,051
D_2	$0{,}1444 \cdot 10^{-2}$	$0{,}6296 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5925 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6393 \cdot 10^{-3}$
D_3	$-0{,}2549 \cdot 10^{-1}$	—0,8228	--0,4114	$0{,}3549 \cdot 10^{-1}$
D_{nm}	2,042	—0,3954	—0,6187	2,087
$D_{n\Theta}$	—0,7463	—0,2417	$0{,}2937 \cdot 10^{-1}$	—0,7344
D_{np}	2,761	1,860	1,341	2,790

Таблица 45

Pn

Значения постоянных коэффициентов для неограниченной пластины

($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_q = 20$, $Bi_m = 20$, $Ko = 9$, $Lu_p = 500$, $Bu = 1 \cdot 10^{-3}$)

	Pn = 0,6500		Pn = 0,4500		Pn = 0,3333		
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3
C_1	1,576	−0,5375	2,063	−0,7563	2,528	−1,138	0,3658
C_2	$-0{,}1663 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1889 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}8842 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1420 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}2165 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1152 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5173 \cdot 10^{-2}$
C_3	$0{,}8207 \cdot 10^{-1}$	0,1186	$0{,}8207 \cdot 10^{-1}$	0,1857	$0{,}7269 \cdot 10^{-1}$	0,3447	−1,579
D_1	1,039	0,1165	1,367	0,1640	1,684	0,2469	$-0{,}5557 \cdot 10^{-1}$
D_2	$-0{,}1662 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}1881 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}8838 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1413 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}2165 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1145 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5131 \cdot 10^{-2}$
D_3	$0{,}8119 \cdot 10^{-1}$	0,1075	$0{,}8065 \cdot 10^{-1}$	0,1576	$0{,}7089 \cdot 10^{-1}$	0,2709	−1,123
$D_{n\mathrm{T}}$	1,119	0,2221	1,447	0,3202	1,755	0,5167	−1,174
$D_{n\Theta}$	−0,8017	$-0{,}7711 \cdot 10^{-1}$	−0,7751	$-0{,}7471 \cdot 10^{-1}$	−0,7506	$-0{,}7946 \cdot 10^{-1}$	−0,1067
D_{np}	2,017	−0,1587	1,919	0,3226	2,317	−0,7329	4,400

Продолжение таблицы 45

	Pn = 0,2500	Pn 0,1667			Pn = 0,0500	
	μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2
C_1	3,054	3,927	−0,5818	−0,6727	7,849	−0,8482
C_2	$0{,}6397 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1025 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5297 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5673 \cdot 10^{-3}$	$0{,}3174 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4937 \cdot 10^{-2}$
C_3	$0{,}3672 \cdot 10^{-1}$	$0{,}6170 \cdot 10^{-2}$	−2,532	$0{,}1027 \cdot 10^{-1}$	−0,4750	−5,725
D_1	2,051	2,644	$0{,}8686 \cdot 10^{-1}$	0,1458	5,386	−0,2262
D_2	$0{,}6393 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1024 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5266 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5627 \cdot 10^{-3}$	$0{,}3170 \cdot 10^{-2}$	0,4917
D_3	$0{,}3549 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5864 \cdot 10^{-2}$	−1,794	$0{,}6208 \cdot 10^{-2}$	−0,4225	−4,038
$D_{n\text{т}}$	2,087	2,651	−1,702	0,1526	4,967	−4,259
$D_{n\theta}$	−0,7344	−0,7022	−0,2016	$-0{,}3805 \cdot 10^{-1}$	−0,6598	−0,2473
D_{np}	2,790	2,836	4,074	$-0{,}7657 \cdot 10^{-1}$	3,904	5,847

Таблица 46

Ко

Значения постоянных коэффициентов для неограниченной пластины
($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_q = 20$, $Bi_m = 20$, $Pn = 0{,}25$, $Lu_p = 500$, $Bu = 1 \cdot 10^{-3}$)

	Ко = 3		Ко = 6		
	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_3
C_1	2,199	—0,1131	2,721	—0,3165	—0,5500
C_2	$0{,}8457 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1013 \cdot 10^{-3}$	$0{,}7109 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2889 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4604 \cdot 10^{-3}$
C_3	—0,067772	—0,8361	$0{,}4196 \cdot 10^{-2}$	—1,383	$0{,}3319 \cdot 10^{-2}$
D_1	1,407	$-0{,}1195 \cdot 10^{-1}$	1,832	$0{,}4725 \cdot 10^{-1}$	0,1192
D_2	$0{,}8447 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1009 \cdot 10^{-2}$	$0{,}7103 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2872 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4567 \cdot 10^{-3}$
D_3	—0,0608	—0,5911	$0{,}3988 \cdot 10^{-2}$	—0,9797	$0{,}2006 \cdot 10^{-2}$
$D_{n\mathrm{T}}$	1,436	—0,6020	1,835	—0,9296	0,1217
$D_{n\Theta}$	—0,7505	—0,1376	—0,7305	—0,1651	$-0{,}1733 \cdot 10^{-1}$
D_{np}	1,313	0,8053	1,979	2,226	$-0{,}5047 \cdot 10^{-1}$

Продолжение таблицы 46

	Ko = 9	Ko = 12		
	μ_1	μ_1	μ_2	μ_3
C_1	3,054	3,291	—1,557	0,5701
C_2	$0{,}6397 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}2814 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1577 \cdot 10^{-2}$	$0{,}8058 \cdot 10^{-2}$
C_3	$0{,}3672 \cdot 10^{-1}$	$0{,}9119 \cdot 10^{-1}$	0,4718	—2,460
D_1	2,051	2,192	0,3379	$-0{,}8660 \cdot 10^{-1}$
D_2	$0{,}6393 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}2812 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}1568 \cdot 10^{-2}$	$0{,}7993 \cdot 10^{-2}$
D_3	$0{,}3549 \cdot 10^{-1}$	$0{,}8893 \cdot 10^{-1}$	0,3708	—1,750
$D_{n\text{т}}$	2,087	2,281	0,7071	—1,829
$D_{n\Theta}$	—0,7344	—0,7330	$-0{,}8157 \cdot 10^{-1}$	—0,1246
D_{np}	2,790	3,037	—0,9740	6,859

Таблица 47

Lu_p

Значения постоянных коэффициентов для неограниченной пластины
($Lu = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}7$, $Bi_q = 20$, $Bi_m = 20$, $Bu = 1 \cdot 10^{-3}$, $Ko = 9$, $Pn = 0{,}25$)

	$Lu_p = 300$	$Lu_p = 500$	$Lu_p = 700$	$Lu_p = 1000$
	μ_1	μ_1	μ_1	μ_1
C_1	3,031	3,054	3,073	3,040
C_2	$0{,}1588 \cdot 10^{-2}$	$0{,}6397 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2718 \cdot 10^{-3}$	$0\,1887 \cdot 10^{-3}$
C_3	$0{,}3014 \cdot 10^{-1}$	$0{,}3672 \cdot 10^{-1}$	$0{,}4202 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5231 \cdot 10^{-1}$
D_1	2,038	2,051	2,063	2,033
D_2	$0{,}1587 \cdot 10^{-2}$	$0{,}6393 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2717 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1886 \cdot 10^{-3}$
D_3	$0{,}2913 \cdot 10^{-1}$	$0{,}3549 \cdot 10^{-1}$	$0{,}4061 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5053 \cdot 10^{-1}$
$D_{n\mathrm{T}}$	2,069	2,087	2,104	2,084
$D_{n\Theta}$	—0,7298	—0,7344	—0,7381	—0,7267
D_{np}	4,931	2,790	1,609	1,371

$$\Theta_L^* = -\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}[A_1(1-\nu_1^2)\exp(\sqrt{s}\,\nu_1 X)+A_2(1-\nu_2^2)\exp(\sqrt{s}\,\nu_2 X)+$$

$$+A_3(1-\nu_3^2)\exp(\sqrt{s}\,\nu_3 X)+A_4(1-\nu_1^2)\exp(-\sqrt{s}\,\nu_1 X)+$$

$$+A_5(1-\nu_2^2)\exp(-\sqrt{s}\,\nu_2 X)+A_6(1-\nu_3^2)\exp(-\sqrt{s}\,\nu_3 X)], \quad (1.52)$$

$$P_L^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}}[A_1\sigma_1\exp(\sqrt{s}\,\nu_1 X)+A_2\sigma_2\exp(\sqrt{s}\,\nu_2 X)+$$

$$+A_3\sigma_3\exp(\sqrt{s}\,\nu_3 X)+A_4\sigma_1\exp(-\sqrt{s}\,\nu_1 X)+$$

$$+A_5\sigma_2\exp(-\sqrt{s}\,\nu_2 X)+A_6\sigma_3\exp(-\sqrt{s}\,\nu_3 X)], \quad (1.53)$$

где σ_j и ν_j соответственно определяются по (1.13) и (1.14).

Условия симметрии для шара (1.4) на основе известных преобразований можно записать так:

$$T_L'(0,s) = \Theta_L'(0,s) = P_L'(0,s) = 0. \quad (1.54)$$

Удовлетворяя (1.51)—(1.53) условиям (1.54), получим

$$A_1 = -A_4, \quad A_2 = -A_5, \quad A_3 = -A_6.$$

Следовательно, решение задачи в изображениях имеет следующий общий вид:

$$T_L^*(X,s) = \sum_{j=1}^{3} C_j^* \operatorname{sh}\sqrt{s}\,\nu_j X, \quad (1.55)$$

$$\Theta_L^*(X,s) = -\frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}}\sum_{j=1}^{3} C_j^*(1-\nu_j^2)\operatorname{sh}\sqrt{s}\,\nu_j X, \quad (1.56)$$

$$P_L^*(X,s) = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}}\sum_{j=1}^{3} C_j^*\,\sigma_j \operatorname{sh}\sqrt{s}\,\nu_j X. \quad (1.57)$$

Подставляя (1.55)—(1.57) в граничные условия (1.18)—(1.20) и принимая во внимание (1.50), получим следующую алгебраическую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3} C_j^* P_j^* + \frac{\varepsilon \mathrm{Ko}}{s} = 0 \\ &\sum_{j=1}^{3} C_j^* Q_j^* + \frac{\varepsilon \mathrm{Ko} K_1 - 1}{s} = 0 \\ &\sum_{j=1}^{3} C_j^* \chi_j^* = 0. \end{aligned}\right\}, \quad (1.58)$$

где

$$Q_j^* = \left[1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + \left(1 - \nu_j^2\right) K_1 \right] \mathrm{sh}\sqrt{s}\,\nu_j +$$

$$+ \frac{1}{Bi_q} \sqrt{s}\,\nu_j \,\mathrm{ch}\sqrt{s}\,\nu_j,$$

$$P_j^* = \frac{(1-\nu_j^2) + \varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} + \dfrac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}}\sigma_j}{\mathrm{Bi}_m} (\sqrt{s}\,\nu_j \,\mathrm{ch}\sqrt{s}\,\nu_j - \mathrm{sh}\sqrt{s}\,\nu_j) +$$

$$+ (1 - \nu_j^2)\,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\nu_j,$$

$$\chi_j^* = \sigma_j \,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,\nu_j.$$

Ее решение можно написать так:

$$C_j^* = \left[(\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,K_1 - 1)\left(P_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} P_3^*\right) - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\left(Q_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right)\right] \times$$

$$\times \left\{ s \left[\left(P_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*}\right)\left(Q_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(P_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} P_3^*\right)\left(Q_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right)\right]\right\}^{-1},$$

$$C_2^* = -\left[(\varepsilon\,\mathrm{Ko}K_1 - 1)\left(P_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} P_3^*\right) - \varepsilon\,\mathrm{Ko}\left(Q_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right)\right] \times$$

$$\times \left\{ s \left[\left(P_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} P_3^*\right)\left(Q_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} Q^*\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(P_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} P_3^*\right)\left(Q_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right)\right]\right\}^{-},$$

$$C_3^* = \left[(\varepsilon\mathrm{Ko}K_1 - 1)\left(P_1^* \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} - P_2^* \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*}\right) - \varepsilon\mathrm{Ko}\left(Q_1^* \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} - Q_2^* \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*}\right)\right] \times$$

$$\times \left\{ s \left[\left(P_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} P_3^*\right)\left(Q_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right) - \right.\right.$$

$$-\left(P_2^* - \frac{\chi_2^*}{\chi_3^*} P_3^*\right)\left(Q_1^* - \frac{\chi_1^*}{\chi_3^*} Q_3^*\right)\Bigg]\Bigg\}^{-1}.$$

Таким образом, рассматриваемая нами задача решена в изображениях.

Оригинал (1.55)—(1.57) получим по теореме разложения, преобразуя числитель и знаменатель соответствующих выражений в обобщенные полиномы. Так как метод преобразования обобщенных полиномов для шара неоднократно рассматривался в предыдущих главах, приведем окончательное решение задачи:

$$T^* = X + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nj} \sin \nu_j \mu_n \, X \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.59}$$

$$\Theta^* = X - \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nj}(1-\nu_j^2) \sin \nu_j \mu_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.60}$$

$$P^* = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nl}\, \sigma_j \sin \nu_j \mu_n \, X \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.61}$$

или с учетом (1.50)

$$\mathrm{T} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nj} \frac{\sin \nu_j \mu_n X}{X} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.59'}$$

$$\Theta = 1 - \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nj}(1-\nu_j^2) \frac{\sin \nu_j \mu_n X}{X} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.60'}$$

$$P = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} C_{nj}\, \sigma_j \frac{\sin \nu_j \mu_n X}{X} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.61'}$$

Здесь C_{nj} и ψ_n по форме определяются соответственно выражениями (1.30)—(1.33), характеристические корни μ_n — уравнением (1.40),

$$A_{nj} = [1 + (1-\nu_j^2)K_1]\cos \nu_j \mu_n - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} \nu_j \mu_n \sin \nu_j \mu_n,$$

$$B_{nj} = (1 - \nu_j^2)\cos \nu_j \mu_n - \frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon \mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} + \frac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}} \sigma_j}{\mathrm{Bi}_m} \nu_j \mu_n \sin \nu_j \mu_n,$$

$$Q_{nj} = \left[1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_q} + (1 - \nu_j^2) K_1 \right] \sin \nu_j \mu_n + \frac{\nu_j \mu_n}{\mathrm{Bi}_q} \cos \nu_j \mu_n,$$

$$P_{nj} = -\frac{(1 - \nu_j^2) + \varepsilon \mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} + \frac{\mathrm{Lu}_p}{\mathrm{Lu}} \sigma_j}{\mathrm{Bi}_m} (\nu_j \mu_n \cos \nu_j \mu_n - \sin \nu_j \mu_n) +$$

$$+ (1 - \nu_j^2) \sin \nu_j \mu_n,$$

$$\chi_{nj} = \sigma_j \sin \nu_j \mu_n.$$

Средние значения безразмерных потенциалов переноса для шара получим по формуле

$$\overline{\varphi}(\mathrm{Fo}) = 3 \int_0^1 X^2 \varphi(X, \mathrm{Fo})\, dX.$$

После выполнения необходимых операций получим:

$$\overline{T} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} D_{nj} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.62}$$

$$\overline{\Theta} = 1 - \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Ko}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} D_{nj} (1 - \nu_j^2) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.63}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Bu}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} D_{nj} \sigma_j \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}), \tag{1.64}$$

где

$$D_{nj} = C_{nj} \frac{3 (\sin \nu_j \mu_n - \nu_j \mu_n \cos \nu_j \mu_n)}{\nu_j^2 \mu_n^2}.$$

Для практических расчетов уравнения (1.59)—(1.61), (1.62)—(1.64) можно упростить, используя из всего ряда разложения один-три слагаемых.

§ 2. Нестационарные поля потенциалов переноса энергии и вещества при граничных условиях второго рода

В ряде высокоинтенсивных процессов удельный поток вещества, испаряемый из материала $q_m(\tau)$, непрерывно меняется во времени, в этом случае граничные условия для одномерных задач необходимо писать так:

$$-a_q c_q \gamma_0 \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x} + \alpha [t_c - t(R,\tau)] - (1-\varepsilon)\rho q_m(\tau) = 0,$$

$$a_m c_p \gamma_0 \frac{\partial \theta(R,\tau)}{\partial x} + a_m c_m \gamma_0 \delta \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x} +$$

$$+ a'_m c_m \gamma_0 \frac{\partial p(R,\tau)}{\partial x} + q_m(\tau) = 0$$

$$p(R,\tau) = \varphi(\tau).$$

Для общности задачи здесь перенос вещества в жидкой и газообразной фазах разделен. То же самое сделаем с системой уравнений высокоинтенсивного тепло- и массообмена, кроме этого, для сокращения записи дальнейших преобразований потенциалы переноса обозначим через θ_i, так что $t = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и $p = \theta_3$. Система дифференциальных уравнений и краевые условия с учетом сделанных замечаний запишутся так:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \rho c_2}{c_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = a_2 \left(\delta \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \right) + a'_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} = a_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x^2} + \varepsilon \gamma_0 \frac{c_2}{c_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau}, \tag{2.3}$$

$$\theta_i(x, 0) = f_i(x),$$

$$(0 < x < R) \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \theta_i(0,\tau)}{\partial x} = 0, \tag{2.5}$$

$$-a_1 c_1 \gamma_0 \frac{\partial \theta_1(R,\tau)}{\partial x} + \alpha [\theta_{1c} - \theta_1(R,\tau)] =$$

$$-(1-\varepsilon)\rho\, q_m(\tau)=0, \tag{2.6}$$

$$a_2 c_3 \gamma_0 \frac{\partial \theta_2(R,\tau)}{\partial x} + a_2 c_2 \gamma_0 \delta \frac{\partial \theta_1(R,\tau)}{\partial x} +$$

$$+ a_2' c_2 \gamma_0 \frac{\partial \theta_3(R,\tau)}{\partial x} + q_m(\tau) = 0, \tag{2.7}$$

$$\theta_3(R,\tau) = \varphi_3(\tau). \tag{2.8}$$

Здесь индексы 1, 2, 3 соответственно обозначают q, m, p, a'—перенос вещества в жидкой фазе. Решение этой задачи дал А. П. Прудников. Покажем общий ход ее решения.

Первоначально рассмотрим вспомогательную задачу. Будем считать неизвестными функции $\theta_1(R,\tau)=\varphi_1(\tau)$, $\theta_2(R,\tau)=\varphi_2(\tau)$, т. е.

$$\theta_k(R,\tau)=\varphi_k(\tau) \quad (k=1,2), \tag{2.9}$$

как данные, определением которых займемся позже. Решение вспомогательной задачи, следовательно, сводится к определению функций $\theta_i(x,\tau)$, удовлетворяющих системе уравнений (2.1)—(2.3), начальным условиям (2.4), условиям симметрии (2.5) и граничным условиям (2.8), (2.9). Последнюю будем решать методом совместного применения интегральных преобразований Фурье и Лапласа. По отношению к переменной x используем конечное косинус-преобразование Фурье:

$$\{\theta_i(p,\tau)\}_F = \int_0^R \theta_i(x,\tau)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}x\,dx. \tag{2.10}$$

Функция $\theta_i(x,\tau)$ по известному изображению $\{\theta_i(p,\tau)\}_F$ определяется при помощи ряда

$$\theta_i(x,\tau)=\frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\{\theta_i(p,\tau)\}_F\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}x.$$

Для преобразования второй производной имеем формулу

$$\left\{\frac{\partial^2\theta_i(p,\tau)}{\partial x^2}\right\}_F = -\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{R^2}\{\theta_i(p,\tau)\}_F +$$

$$+(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\theta_i(R,\tau) - \frac{\partial\theta_i(0,\tau)}{\partial x}. \tag{2.11}$$

По отношению к переменной τ применим преобразование Лапласа

$$\{\theta_i(x, s)\}_L = \int_0^\infty \theta_i(x, \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau, \tag{2.12}$$

тогда

$$\left\{\frac{\partial \theta_i(x, s)}{\partial \tau}\right\}_L = s\{\theta_i(x, s)\}_L - \theta_i(x, 0). \tag{2.13}$$

Посредством последовательного применения интегральных преобразований (2.10), (2.12) с учетом формул (2.11), (2.13), начальных условий (2.4) и граничных условий (2.8), (2.9) исходная задача сводится к алгебраической системе, из которой с помощью соответствующих обратных интегральных преобразований найдем

$$\theta_i(x, \tau) = \sum_{i=1}(A^i_{js} v_{js} + B^i_{js} w_{js}) \quad (i, s = 1, 2, 3). \tag{2.14}$$

Здесь A^i_{js}, B^i_{js}—некоторые постоянные, зависящие от параметров, входящих в систему уравнений (2.1)—(2.3) и аналогичные соответствующим коэффициентам, данным в § 7 гл. VII:

$$v_{js} = \frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{R^2}\, \nu_j\, \tau\right] \times$$

$$\times \int_0^R f_s(\xi) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\, \xi\, d\xi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\, x, \tag{2.15}$$

$$w_{js} = \frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{R^2}\, \nu_j\, \tau\right] * (-1)^n \times$$

$$\times \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\, \varphi_s(\tau) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}\, x, \tag{2.16}$$

где

$\nu_j e^2$—корни кубического уравнения

$$A p^3 + B p^2 + C p + D = 0,$$

$$A = 1 - \varepsilon,$$

$$B = e^2\left[(1-\varepsilon)(a_1+a_3)+\frac{a_2\,\delta\,\varepsilon\,\rho\,c_1}{c_2}+\frac{a_2'\,\varepsilon\,\gamma_0\,c_2}{c_3}+a_2\right],$$

$$C = e^4\left[a_1\,a_3\,(1-\varepsilon)+a_2\,a_3+a_1\,a_2+\frac{a_2\,\delta\,\varepsilon\,\rho\,c_2\,a_3}{c_1}+\right.$$

$$\left.+a_1\,a_2\,\varepsilon\,\gamma_0\,\frac{c_2}{c_3}\right],$$

$$D = e^6\,a_1\,a_2\,a_3,$$

$$e = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{R}.$$

При этом предполагается, что коэффициенты системы дифференциальных уравнений удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{vmatrix} p+a_1e^2 & -\dfrac{\varepsilon\rho c_2}{c_1}p & 0 \\ a_2\delta e^2 & (1-\varepsilon)p+a_2 & a_2'e^2 \\ 0 & \dfrac{\varepsilon\gamma_0 c_2}{c_3}p & p+a_3e^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Знак $\overset{\tau}{*}$ обозначает операцию свертывания:

$$f(\tau)\overset{\tau}{*}g(\tau) = \int_0^\tau f(\xi)\,g(\tau-\xi)\,d\xi = \int_0^\tau f(\tau-\xi)\,g(\xi)\,d\xi = g(\tau)\overset{\tau}{*}f(\tau).$$

Для упрощения последующих выкладок введем тэта-функцию, тогда выражения (2.15) и (2.16) перепишутся так:

$$v_{js} = \frac{1}{2R}\int_0^R\left\{\vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2R},\ \frac{\nu_j\tau}{R^2}\right]+\vartheta_2\left[\frac{x+\xi}{2R},\ \frac{\nu_j\tau}{R^2}\right]\right\}f_s(\xi)\,d\xi,$$

$$w_{js} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\tau\vartheta_2\left[\frac{R-x}{2R},\ \frac{\nu_j(\tau-\eta)}{R^2}\right]\varphi_s(\eta)\,d\eta, \qquad (2.17)$$

$$\vartheta_2(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{(x+n)^2}{\tau}\right]. \qquad (2.18)$$

Определим теперь неизвестные функции $\varphi_k(\tau)$ $(k=1,2)$ из граничных условий (2)—(6) и (2)—(7). Дифференцируя (2.14) по x, заменяя вторую производную по x от тэта-функции ϑ_2 ее производной по τ, получим

$$\frac{\partial\theta_i(x,\tau)}{\partial x}=\sum_{j=1}^{3}(A^i_{js}P_{js}+B^i_{js}Q_{js}) \quad (i,s=1,2,3), \qquad (2.19)$$

где

$$P_{js}(x,\tau)=\frac{1}{2R}\int_0^R\frac{\partial}{\partial x}\left\{\vartheta_2\left[\frac{x-\xi}{2R},\ \frac{\nu_j\tau}{R^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\vartheta_2\left[\frac{x+\xi}{2R},\ \frac{\nu_j\tau}{R^2}\right]\right\}f_s(\xi)\,d\xi,$$

$$Q_{js}(x,\tau)=\frac{1}{\nu_j R}\int_0^\tau\frac{\partial}{\partial(\tau-\eta)}\times$$

$$\times\vartheta_2\left[\frac{R-x}{2R},\ \frac{\nu_j(\tau-\eta)}{R^2}\right]\varphi_s(\eta)\,d\eta. \qquad (2.20)$$

Принимая во внимание (2.18), нетрудно заметить, что производная $\frac{\partial}{\partial(\tau-\eta)}\vartheta_2$, существующая при всех $x\neq R$, стремится к бесконечности, как $\tau^{-\frac{3}{2}}$ при $\tau\to 0$, когда $x=R$ и $\tau\to\eta$. Чтобы избежать это затруднение, заменим условия (2.6) и (2.7) другими, которые получаются из них путем интегрирования по τ. Вместо (2.6) и (2.7) будем тогда иметь

$$-a_1c_1\gamma_0\int_0^\tau\frac{\partial\theta_1(R,\eta)}{\partial x}\,\partial\eta+\alpha\int_0^\tau[\theta_{1c}-\theta_1(R,\eta)]\,d\eta-$$

$$-(1-\varepsilon)\rho\int_0^\tau q_m(\eta)\,d\eta=0. \qquad (2.21)$$

$$a_2 c_2 \gamma_0 \left[\delta \int_0^\tau \frac{\partial \vartheta_1(R, \eta)}{\partial x} d\eta + \int_0^\tau \frac{\partial \vartheta_2(R, \eta)}{\partial x} d\eta \right] +$$

$$+ a_2' c_3 \gamma_0 \int_0^\tau \frac{\partial \vartheta_3(R, \eta)}{\partial x} d\eta + \int_0^\tau q_m(\eta) d\eta = 0. \qquad (2.22)$$

Интегрируя (2.19) по τ, найдем

$$\int_0^\tau \frac{\partial \vartheta_i(x, \eta)}{\partial x} d\eta = \sum_{j=1}^{3} (A_{js}^i P_{js}^* + B_{js}^i Q_{js}^*) \quad (i, s = 1, 2, 3), \qquad (2.23)$$

где

$$P_{js}^*(x, \tau) = \int_0^\tau P_{js}(x, \eta) d\eta, \quad Q_{js}^*(x, \tau) = \int_0^\tau Q_{js}(x, \eta) d\eta.$$

Интегрируя (2.20) по τ и меняя порядок интегрирования посредством формулы Дирихле, получим

$$Q_{js}^*(x, T) = \frac{1}{\nu_j R} \int_0^T d\tau \int_0^\tau \varphi_s(\eta) \frac{\partial}{\partial(\tau - \eta)} \times$$

$$\times \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \frac{\nu_j (\tau - \eta)}{R^2} \right] d\eta = \frac{1}{\nu_j R} \times$$

$$\times \int_0^T \varphi_s(\eta) d\eta \int_\eta^T \frac{\partial}{\partial(\tau - \eta)} \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \frac{\nu_j (\tau - \eta)}{R^2} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{\nu_j R} \int_0^T \varphi_s(\eta) d\eta \left\{ \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \frac{\nu_j (\tau - \eta)}{R^2} \right] - \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, 0 \right] \right\}.$$

Из этого выражения следует, что при всех $x < R$

$$Q_{js}^*(x, T) = \frac{1}{\nu_j R} \int_0^T \varphi_s(\eta) \times$$

$$\times \vartheta_2 \left[\frac{R - x}{2R}, \frac{\nu_j (T - \eta)}{R^2} \right] d\eta. \qquad (2.24)$$

Путем непосредственных вычислений можно показать, что формула (2.24) справедлива и при $x = R$, т. е.

$$Q_{js}^{*}(R, T) = \frac{1}{\nu_j R} \int_0^T \varphi_s(\eta)\, \vartheta_2 \left[0, \frac{\nu_j (T - \eta)}{R^2} \right] d\eta. \quad (2.25)$$

Последний интеграл сходится, так как, согласно (2.18), функция ϑ_2 при $\eta \to T$ стремится к бесконечности, как $T^{-1/2}$ при $T \to 0$. Образуя с помощью (2.23) — (2.25) соответствующие члены в выражениях (2.21) и (2.22), имея в виду (2.9), получим систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода:

$$\sum_{\beta=1}^{2} \int_0^{\tau} K_{\alpha\beta}(\tau, \eta)\, \varphi_\beta(\eta)\, d\eta = g_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (2.26)$$

где функции $K_{\alpha\beta}(\tau, \eta)$ и $g_\alpha(\tau)$ имеют вид, позволяющий свести систему уравнений (2.26) к системе обобщенных уравнений Абеля, а последнюю—к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, как это было сделано в § 7 гл. IV:

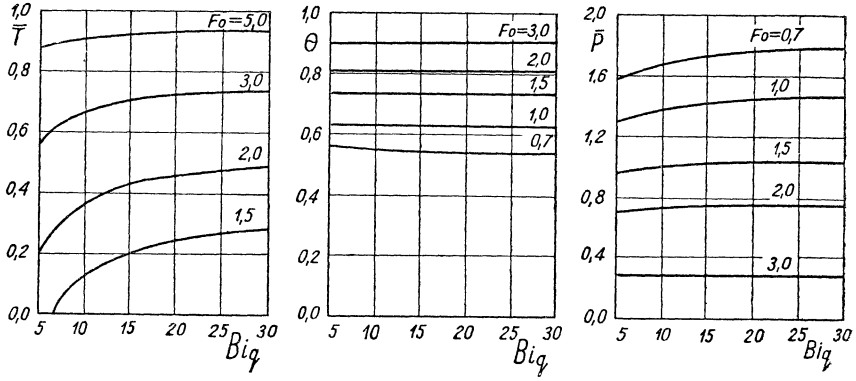
$$\varphi_\alpha(\tau) + \sum_{\beta=1}^{2} \chi_{\alpha\beta}(\tau, \eta)\, \varphi_\beta(\eta)\, d\eta = \omega_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.27)$$

Решение поставленной задачи получим после нахождения из (2.27) $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ и подстановки их в равенства (2.14) и (2.17).

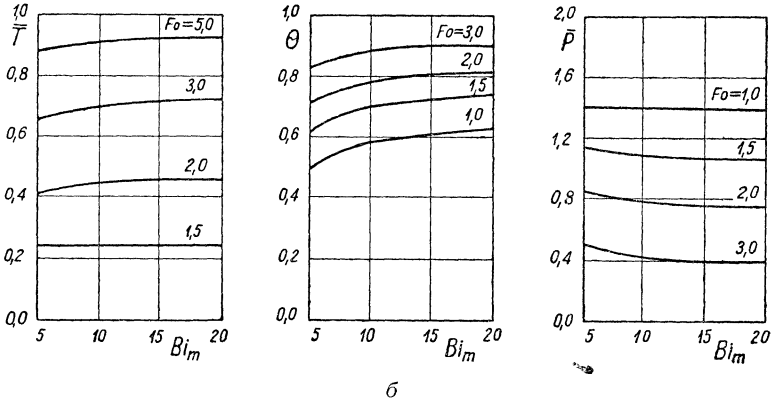
§ 3. Влияние критериев подобия на высокоинтенсивный тепло- и массообмен

Приведенные выше решения (см. § 1, 2) показывают, что распределение безразмерных потенциалов переноса энергии и вещества, равно как скоростей их изменения, зависит от большой группы критериев подобия. Кроме отмеченных в главе II § 6 критериев, на высокоинтенсивный тепло- и массообмен начинают влиять новые критерии подобия, характеризующие молярный перенос (Bu, Lu_p). Перестройка механизма переноса, связанная с образованием молярного потока вещества и тепла, по-новому начинает проявляться также на влиянии уже рассмотренной группы критериев. Так, критерии внутреннего тепло- и массообмена (Рп, Ко) не автомодельны более по отношению к полям некоторых потенциалов переноса.

Критерии поверхностного тепло- и массообмена Bi_q и Bi_m сохраняют характер своего влияния на тепло- и массообмен, наблюдавшийся при молекулярном переносе. Малым значениям критериев Био отвечают неразвитые поля потенциалов, перенос вещества и энергии осуществляется медленно. При значениях критериев Био порядка одного



а



б

Рис. 53. Зависимость потенциалов переноса: *а*—от Bi_q, *б*—от Bi_m.

или нескольких десятков в теле появляются большие градиенты температуры и массосодержания, в силу чего интенсифицируется перераспределение вещества и тепла. Вместе с тем в материале образуются большие напряжения, создаются условия для его коробления, образования трещин и пор. Как и при молекулярном переносе, после установления квазирегулярного режима, т. е. начиная с $Fo \approx 0{,}7 \div 1{,}0$, теплообменный критерий Био начинает воздействовать только на термическую характеристику (рис. 53 *а*), тогда как массообменный критерий Био влияет только на поле безразмерного массосодержания (рис. 53 *б*). Поле филь-

трационного потенциала становится автомодельным по отношению к обоим критериям. Индеферентность критериев Био к фильтрационному потенциалу, а следовательно, и к молярному переносу, заставляет предположить о связи критериев поверхностного тепло- и массообмена в основном с молекулярным механизмом переноса. Из рассмотрения рисунка 53 видно, что поле безразмерного массосодержания зависит от критерия Bi_m слабее, чем поле безразмерной температуры от критерия Bi_q. Последнее обусловливается большей инерционностью потенциала переноса вещества по сравнению с потенциалом переноса тепла при $Lu<1$. Анализ полученных решений показывает также, что в период регулярного режима скорости измерения потенциала переноса вещества и фильтрационного потенциала линейно убывают с увеличением $\bar{\Theta}$ и не зависят от величины Bi_q.

В трехмерном координатном пространстве $(\bar{T}, \bar{\Theta}, \bar{P})$ процесс высокоинтенсивного тепло- и массообмена характеризуется некоторой непересекающей кривой, каждая точка которой соответствует своему обобщенному времени (Fo). Меняя один из критериев подобия, мы получаем смещение кривой процесса, образующее поверхность процесса рассматриваемого критерия. Линии, полученные от пересечения поверхностей процесса с координатными поверхностями, дают нам зависимость одних потенциалов от данного критерия при постоянстве других потенциалов. Однозначность получаемой зависимости позволяет сделать выводы о влиянии потенциалов переноса на критерии подобия и на этой основе — сравнить теорию с экспериментом. Так, для критериев поверхностного тепло- и массообмена с ростом $\bar{\Theta}$ характер изменения критериев хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований, выполненных П. Д. Лебедевым и А. Ф. Чижским.

Наличие в материале наряду с молекулярным переносом вещества переноса молярного изменяет зависимость распределения безразмерных потенциалов от критериев внутреннего тепло- и массообмена (Pn, Ko). В главе II (§ 6) не учитывавшей молярного переноса вещества, была показана автомодельность Pn по отношению к полю температур. Молярный перенос обусловливает появление новой зависимости распределения температур от критерия Pn. При малых Fo температура дисперсной среды заметно увеличивается с ростом Pn, однако с течением времени это влияние уменьшается и при значениях критерия Фурье больше 2 приобретает противоположный характер (рис. 54*а*). Зависимость фильтрационного потенциала от Pn вместе с новым характером воздействия критерия на распределение температур указывает на то, что критерий Поснова связан как с молекуляр-

ным, так и с молярным механизмом переноса. Аналогичный вывод можно сделать и относительно критерия Коссовича (рис. 54 *б*). Появление в материале мощного молярного переноса в первую очередь сказывается на перераспределении вещества, перераспределение же тепла является следствием

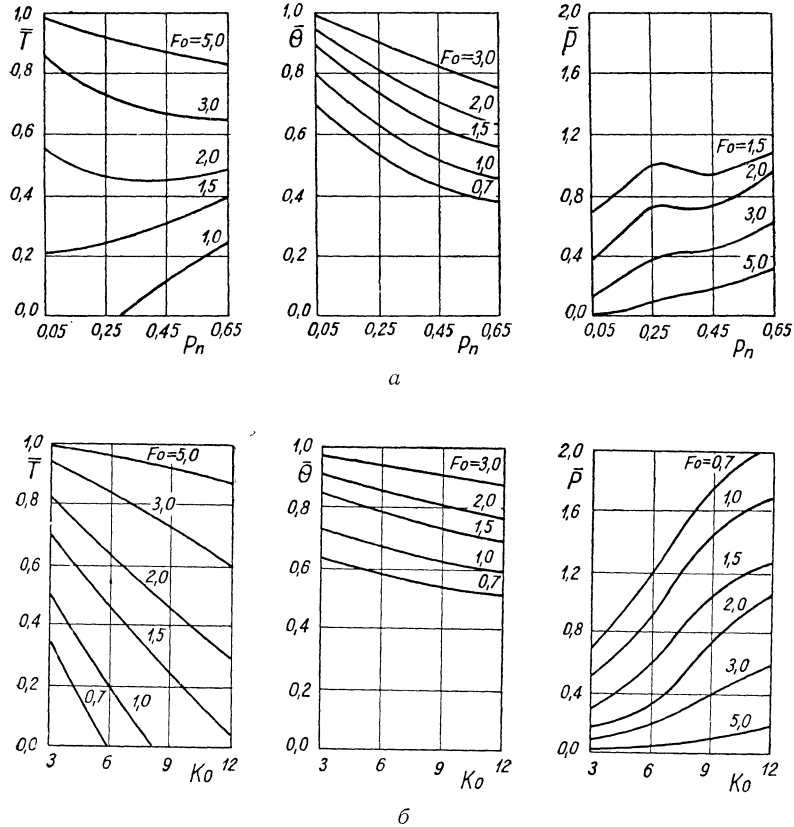


Рис. 54. Зависимость потенциалов переноса: *а*— от Рп, *б*— от Ко.

первого. Критерий Поснова, являющийся при молекулярном переносе характеристикой внутренних массообменных процессов, должен отразить появление нового механизма резче, чем критерий Коссовича, характеризующий внутренние теплообменные процессы. Изменение, происшедшее в характере влияния критерия Рп на топлообменный показатель процесса, оказалось более сильным, чем изменение, происшедшее с критерием Ко по отношению к массообменному показателю. С ростом критерия Рп безразмерный потенциал переноса уменьшается. Это показывает, что за одинаковые промежутки времени при меньших значениях критерия Пос-

нова из материала удаляется большее количество вещества. Другими словами, чем больше Pn, тем медленнее сушится материал. Влияние критерия Ко в первую очередь проявляется на температурном поле, в этой части сохраняется отмеченное ранее сходство критерия Коссовича с теплообменным критерием Био. Понижение средней температуры материала с ростом критерия Ко, а также слабая зависимость от него интенсивности сушки указывает на необходимость организации для тел, подверженных термическому разложению, такой технологии, при которой Ко имеет достаточно большое значение.

Новым и специфичным для высокоинтенсивного тепло- и массообмена является критерий Булыгина, $\mathrm{Bu}=\frac{\rho c_p}{c_q}\frac{p_0}{t_c-t_0}$. Он относится к группе критериев внутреннего тепло- и массообмена. Критерий Булыгина, как и критерий Коссовича, характеризует аккумулирующую способность тела, но в отличие от последнего говорит не о всем тепле, затраченном на испарение, а только о тепле, затраченном на создание пара, участвующего в молярном переносе. Критерий Булыгина целиком связан с молярным переносом, поэтому он влияет исключительно на распределение в материале фильтрационного потенциала и не сказывается на распределении температуры и массосодержании. Зависимость фильтрационного потенциала от критерия Bu показана на рисунке 55. Критерий Bu меняется в весьма широком интервале. Величина среднего значения фильтрационного потенциала обратно пропорциональна критерию и с ростом последнего уменьшается.

Другим молярной природы критерием подобия высокоинтенсивного тепло- и массообмена является Lu_p, который характеризует взаимосвязь между происходящим в материале молярным переносом вещества и переносом тепла, т. е. инерционность полей фильтрационного потенциала по отношению к температурным полям. В этом отношении он аналогичен критерию Lu. Из рисунка 56 видно, что критерий Lu_p автомоделен по отношению к T и Θ. Изменяется он в весьма широком интервале, от нескольких сотен при конвективном нагреве до нескольких десятков тысяч при высокочастотном нагреве влажного материала. В связи с разбором зависимости тепло- и массообмена от молярных критериев подобия остановимся несколько подробнее на динамике изменения фильтрационного потенциала вообще, нерелаксируемого избыточного давления в частности.

При интенсивном нагреве влажных дисперсных сред внутри материала отмечается весьма сильное парообразование, приводящее к созданию устойчивого градиента общего

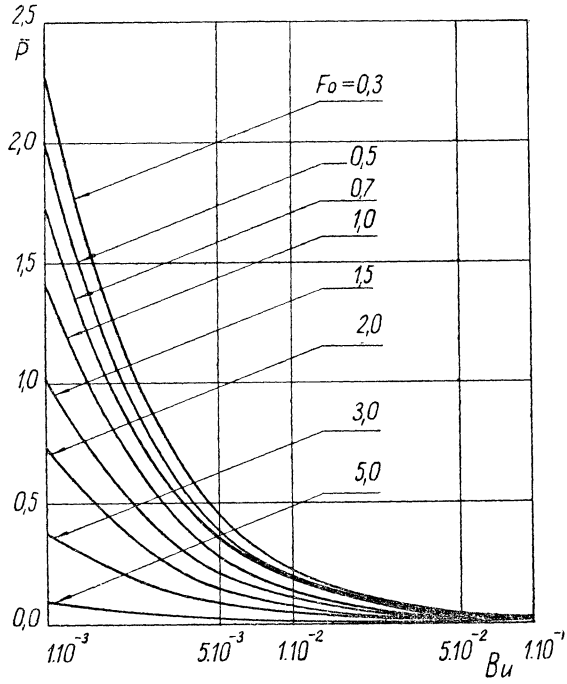


Рис. 55. Зависимость фильтрационного потенциала от Bu.

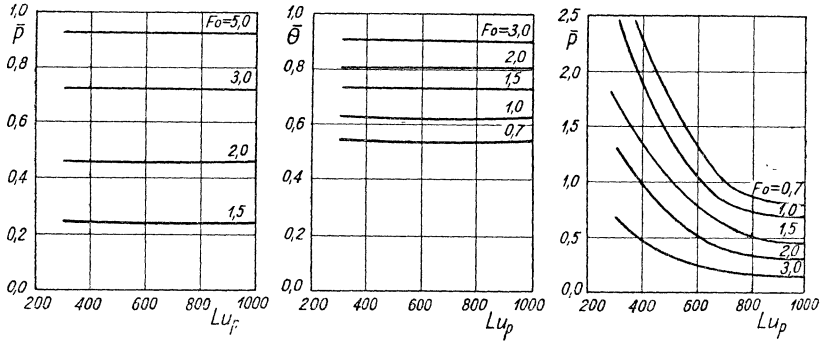


Рис. 56. Зависимость потенциалов переноса от Lu_p.

давления. Последнее обусловливается соизмеримостью времени релаксации избыточного давления через скелет материала и образованием за это же время пара, необходимого для восстановления исходного состояния. В зависимости от способа нагрева среды, а также от значения теплофизиче-

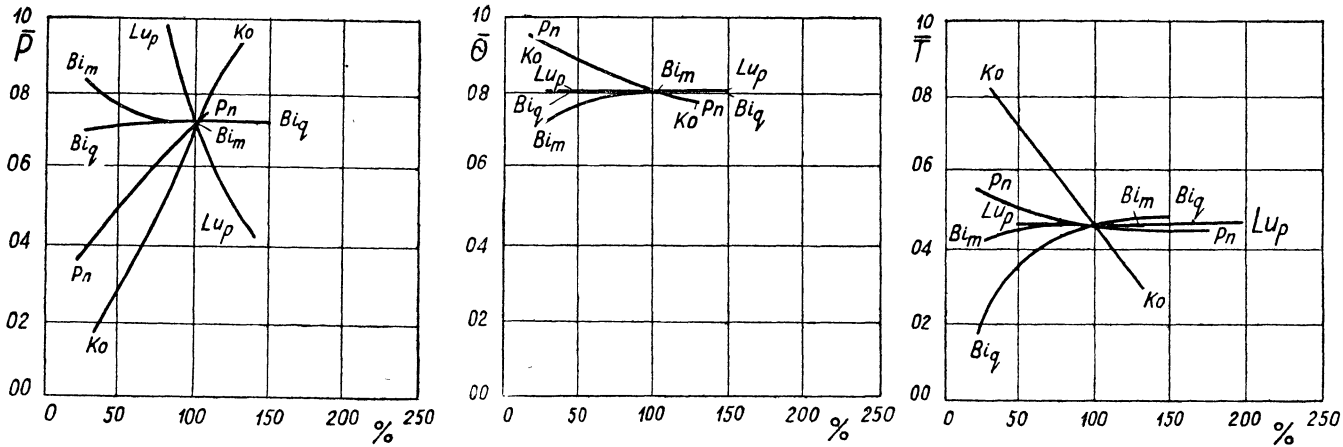


Рис. 57. Удельное влияние критериев подобия на высокоинтенсивный тепло- и массообмен.

ских и механических характеристик материала, распределение фильтрационного потенциала может приобретать тот или иной характер. Однако качественно в любом случае в начальной стадии процесса наблюдается интенсивный рост фильтрационного потенциала. С уменьшением массосодержания материала, ростом $\bar{\Theta}$ интенсивность внутреннего парообразования уменьшается, что приводит к уменьшению градиента фильтрационного потенциала. Величина фильтрационного потенциала и характер его изменения, как уже отмечалось выше, для различных критериев подобия различен. В первом приближении удельное влияние каждого из них можно оценить величиной их виртуального изменения, приняв исходное значение каждого из критериев избранной совокупности за 100. Из рисунка 57 и расчетов, не отраженных на графике, следует, что величина фильтрационного потенциала прежде всего зависит от величин критериев Lu, Lu_p и Bu. Решающую роль играет значение критерия Lu. Так, например, если при Lu=0,3, $\bar{P}$=0,7268, то соответственно при Lu=0,7 получаем $\bar{P}$=60,57, а при Lu=1,0, $\bar{P}$ = =83,95. Характерная особенность фильтрационного потенциала состоит в том, что он более резко реагирует на изменение величины критериев, чем потенциалы переноса тепла и вещества. В этом вопросе заключается основная трудность организации регулирования $\bar{P}$.

На основе проведенного выше анализа, а также из рассмотрения рисунка 57 можно предложить упрощенные критериальные уравнения для описания высокоинтенсивного внутреннего тепло- и массообмена. Такими уравнениями являются

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \bar{T}(\mathrm{Lu}, \mathrm{Bi}_q, \mathrm{Ko}, \mathrm{Pn}, \varepsilon, \mathrm{Fo}), \\ \bar{\Theta} &= \bar{\Theta}\ (\mathrm{Lu}, \mathrm{Bi}_m, \mathrm{Ko}, \mathrm{Pn}, \varepsilon, \mathrm{Fo}), \\ \bar{P} &= \bar{P}\ (\mathrm{Lu}, \mathrm{Lu}_p, \mathrm{Bu}, \mathrm{Ko}, \mathrm{Pn}, \varepsilon, \mathrm{Fo}). \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Отсюда следует, что экспериментальные данные по кинетике высокоинтенсивного нагрева капиллярно-пористых тел должны обрабатываться в виде критериальных соотношений (3.1). В зависимости от режимных параметров процесса некоторые критерии тепло- и массопереноса приобретают основное (доминирующее) значение, так что остальными критериями можно пренебречь.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$f_L(\xi, s) = \int_0^\infty f(\xi, \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$ — преобразование Лапласа,

t — температура, град.,

ϑ — потенциал переноса вещества, ед. пот.,

τ — время, час.,

ξ — обобщенная координата, м,

R — значение координаты на поверхности тела,

a_q — коэффициент температуропроводности, м²/час,

a_m — коэффициент потенциалопроводности массопереноса, м²/час,

δ — термоградиентный коэффициент, или коэффициент Соре, 1/град.

c_q — удельная теплоемкость влажного тела, ккал/кг град.,

C — теплоемкость теплоносителя, ккал/м³ град.,

γ — плотность сухой части влажного тела, кг/м³,

v — скорость теплоносителя в слое, м/час,

P — порозность слоя, или относительное давление,

α_q — коэффициент теплообмена, ккал/м² час. град.,

α_m — коэффициент массообмена, кг/м² час. ед. пот.,

β — коэффициент массообмена, отнесенный к разнице удельных массосодержаний, м/час,

r — удельная теплота фазового перехода, ккал/кг,

Γ — фактор формы,

$T = \dfrac{t(\xi, \tau) - t(\xi, 0)}{t_c - t(\xi, 0)}$ — безразмерная температура,

$\Theta = \dfrac{\vartheta(\xi, \tau) - \vartheta(\xi, 0)}{\vartheta(\xi, 0) - \vartheta_p}$ — безразмерный потенциал массопереноса,

$\mathrm{Fo} = \dfrac{a_q \tau}{R^2}$ — критерий Фурье,

$\mathrm{Lu} = \dfrac{a_m}{a_q}$ — критерий инерционности,

$\mathrm{Bi}_q = \dfrac{\alpha_q}{\lambda_q} R$, $\mathrm{Bi}_m = \dfrac{\alpha_m}{\lambda_m} R = \dfrac{\beta R}{a_m}$ — теплообменный и массообменный критерии Био,

$\mathrm{Pn} = \dfrac{\delta\,[t_c - t\,(0)]}{u\,(0) - u_o} = \dfrac{\delta_s\,[t_c - t(0)]}{[\theta\,(0) - \theta_p]}$ —критерий Поснова,

$\mathrm{Ko} = \dfrac{\rho\,[u\,(0) - u_p]}{c_q\,[t_c - t\,(0)]} = \dfrac{\rho\,c'_m\,[\theta\,(0) - \theta_p]}{c_q\,[t_c - t\,(0)]}$ —критерий Коссовича,

ε—критерий фазового перехода,

$\mathrm{Fe} = \varepsilon\,\mathrm{Ko}\,\mathrm{Pn} = \dfrac{\varepsilon\,\rho\,\delta}{c_q}$ —критерий Федорова,

$\mathrm{Mr} = \dfrac{a_q}{v\,c_p\,\gamma_p}$ —критерий Маргулиса,

$\mathrm{Mn} = \dfrac{F\,R}{P}$ —критерий Миниовича

$\mathrm{Pe} = \dfrac{v\,R}{a_q}$ —критерий Пекле,

$\mathrm{Pd} = \dfrac{b\,R^2}{a_q\,[t_c - t(\xi, 0)]}$, $\mathrm{Pd}' = \dfrac{\varkappa\,R^2}{a_q}$ —критерий Предводителева,

$W = \dfrac{t_n - t_\text{ц}}{t_c - t_n}$; $V = \dfrac{\theta_\text{ц} - \theta_n}{\theta_n - \theta_p}$ — параметрические критерии неравномерности начального распределения температуры и потенциала массопереноса,

$W_c = \dfrac{t_c}{t_c - t_0}$, $W_0 = \dfrac{t_0}{t_c - t_0}$—параметрические критерии температуры,

$K_1 = \dfrac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\,\mathrm{Lu}\,\dfrac{\mathrm{Bi}_q}{\mathrm{Bi}_m}$, $K_2 = V - \mathrm{Pn}\;\Theta$—комплексные критерии.

$\mathrm{Bu} = \dfrac{\rho\,c_p\,p_o}{c_q\,(t_c - t_0)}$ —критерий Булыгина.

ИНДЕКСЫ

L—знак операционного преобразования по Лапласу,

F—знак операционного преобразования по Фурье,

о—начальное состояние,

c—параметр окружающей среды,

п—параметры поверхности,

ц—параметры центра тела,

p—равновесное значение,

q—теплообменный параметр,

m—массообменный параметр,

j—индекс, принимающий два значения: $j = 1;\ 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грю К. Э. и Иббс Г. Л. Термическая диффузия в газах. Гостехиздат, 1956.

2. Гринберг Г. А Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

3. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. Гостехиздат, 1956.

4. Денбиг К. Термодинамика стационарных необратимых процессов, ИЛ, 1954.

5. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. Физматиздат, 1958.

6. Жучков П. А. Сушка торфа в слое, движущемся в потоке газа. «Котлотурбостроение» № 5, 1951.

7. Кичкина Е. С. Процессы сушки и теплообмена в слое кусковых материалов. Диссертация, ЛПИ, 1947.

8. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. ОНТИ, 1936.

9. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах. Изд. АН СССР, 1938.

10. Кузнецов С. П. Нагревание и охлаждение влажных тел. Диссертация, 1952.

11. Лебедев П. Д. Сушка инфракрасными лучами. Госэнергоиздат, 1955.

12. Левин В. И., Гросберг Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.

13. Лыков А. В. Новый метод определения коэффициентов температуропроводности влажных материалов, ЖЭТФ № 2, 1935.

14. Лыков А. В. Основные закономерности тепло- и массообмена в процессе сушки. «Известия ВТИ» № 10, 1952.

15. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.

16. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. Гостехиздат, 1954.

17. Лыков А. В., Смирнов М. С. К исследованию кинетики процесса сушки. «Известия АН СССР», ОТН, № 8, 1956.

18. Лыков А. В. Тепло- и массообмен в процессах сушки. Госэнергоиздат, 1956.

19. Лыков А. В., Прудников А. П. К исследованию явлений переноса тепла и вещества в пористых средах. ДАН БССР, 2, 334, 1958.

20. Лыков А. В. Тепло- и массообмен в дисперсных средах при фазовых превращениях, ИФЖ № 6, 1958.

21. Михайлов Ю. А. Применение системы дифференциальных уравнений тепло- и массообмена к процессу конвективной сушки. «Известия АН Латв. ССР» № 12, 1956.
22. Михайлов Ю. А. Влияние критериев подобия на тепло- и массообмен при конвективной сушке. «Известия АН Латв. ССР» № 6, 1957.
23. Михайлов Ю. А. К теории процесса конвективной сушки. ИФЖ № 1, 1958.
24. Полонская Ф. М. Исследование температурного поля влажных материалов в процессе сушки (период постоянной скорости). ЖТФ, в. 5, 1953.
25. Прудников А. П. Аналитическое исследование процессов тепло- и массообмена (диссертация). Академия наук БССР, 1957.
26. Прудников А. П. Решение некоторых задач теории молекулярного переноса для тел простейшей геометрической формы. «Известия АН СССР», ОТН № 8, 1957.
27. Прудников А. П. К исследованию тепло- и массообмена в дисперсных средах. ИФЖ № 4, 1958.
28. Сборник «Тепло- и массообмен в процессах испарения». Изд. АН СССР, 1958.
29. Сизякова Е. И. Исследование кинетики термовлагопроводности в капиллярно-пористых телах. Тепло- и массообмен в пищевых продуктах. Труды МТИПП, вып. VI, 1956.
30. Смирнов М. С. Применение метода интегральных преобразований к решению задач теории молекулярного переноса. Диссертация, 1955.
31. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
32. Темкин А. Г. Геометрический критерий охлаждения. ЖТФ № 4, 1952.
33. Темкин А. Г. Влияние интегрального критерия формы на процесс теплопроводности. ЖТФ, в. 3, 1954.
34. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
35. Толстов Г. П. Ряды Фурье. Гостехиздат, 1951.
36. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, 1956.
37. Crank, I. The mathematics of diffusion, Oxford, 1956.
38. Kay I. M. An Introduction to fluid mechanics and heat transfer, Cambridge, 1957.
39. Guggenheim, E. A. Thermodynamics, Amsterdam, 1957.
40. Eckert E. R., Drake R. M. Heat and mass Transfer, New-York, 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I

Основные законы и дифференциальные уравнения молекулярного переноса 7

§ 1. Потенциалы переноса 8
§ 2. Дифференциальные уравнения переноса энергии, энтальпии и массы вещества 10
§ 3. Уравнения переноса тепла и вещества в дисперсных системах при фазовых превращениях 13
§ 4. Основные соотношения термодинамики необратимых процессов . 17
§ 5. Система линейных уравнений Онзагера 19
§ 6. Дифференциальное уравнение переноса энтропии 21
§ 7. Система дифференциальных уравнений переноса тепла и вещества в капиллярно-пористых телах 25

Глава II

Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества при граничных условиях третьего рода 35

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества в среде с постоянной температурой 38
§ 2. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества. Температура среды—линейная функция времени 107
§ 3. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества. Температура среды—экспоненциальная функция времени . . . 130
§ 4. Обобщенные решения системы уравнений тепло- и массопереноса. 137
§ 5. Частные случаи тепло- и массопереноса. Некоторые вопросы предельных переходов в системе уравнений тепло- и массопереноса 142
§ 6. Влияние тепло- и массообменных критериев подобия на процесс тепло- и массопереноса 161
§ 7. Тепло- и массообмен в слое влажного материала 174

Глава III

Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества при граничных условиях первого рода 177

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества при неизменном массосодержании тела 177

§ 2. Тепло- и массоперенос при неизменном массосодержании тела и при отсутствии фазовых превращений 196
§ 3. Методы определения коэффициентов тепло- и массопереноса . . 208

Глава IV

Нестационарные поля потенциалов переноса тепла и вещества при граничных условиях второго рода 214
§ 1. Неограниченная пластина ($\delta = 0$) 215
§ 2. Неограниченный цилиндр ($\delta = 0$) 221
§ 3. Шар ($\delta = 0$) 226
§ 4. Анализ решений 231
§ 5. Неограниченный цилиндр ($\delta \neq 0$) 232
§ 6. Шар ($\delta \neq 0$) 236
§ 7. Неограниченная пластина. Обобщенные граничные условия второго рода 238

Глава V

Двухмерные поля потенциалов тепло- и массопереноса 247

§ 1. Ограниченная пластина. Граничные условия второго рода . . 247
§ 2. Двухмерная пластина. Граничные условия первого и третьего рода 252

Глава VI

Тепло- и массообмен при молекулярном и молярном переносе энергии и вещества 276

§ 1. Нестационарные поля потенциалов переноса энергии и вещества при граничных условиях третьего рода 277
§ 2. Нестационарные поля потенциалов переноса энергии и вещества при граничных условиях второго рода 311
§ 3. Влияние критериев подобия на высокоинтенсивный тепло- и массообмен 317

Принятые обозначения 325
Литература 327

ПОПРАВКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
11	4 и 5 снизу	w	w'
11	формула (2.10)	$-E_v \nabla \cdot w$	$-\nabla \cdot E_v w'$
16	формула (3.16)	$\varepsilon_{kr} \frac{du_{kr}}{du_k}$	$\varepsilon_{kr} = \frac{du_{kr}}{du_k}$
23	формула (6.13)	$\omega \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau}$	$\omega \frac{d \vec{w}}{d \tau}$
23	формула (6.15)	$\frac{dE_{об}}{d\tau}$	$\frac{\partial E_{об}}{\partial \tau}$
82	2 снизу	$\frac{\cdots}{\mu} - \frac{\cdots}{\mu}$	$\frac{\cdots}{\mu^{-1}} - \frac{\cdots}{\mu^{-1}}$
160	11 сверху	$\mathrm{Ko} = \frac{\rho \theta_0 \rho c_m \theta_0}{c t_c c_q t_c}$	$\mathrm{Ko} = \frac{\rho c_m \theta_0}{c_q t_c}$
183	10 снизу	$\mathrm{Ko}_1 = \frac{c'_T \theta_0}{c_q \bar{t}_0}$	$\mathrm{Ko}_1 = \frac{\rho c'_T \theta_0}{c_q t_c}$
213	подпись под рис. 47	ΔP_{max}	Δ_{max}
276	формула (XVIII)	η_m	λ_m

Зак. 544.

АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ЛЫКОВ,
ЮРИЙ АНАНЬЕВИЧ МИХАЙЛОВ

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ВЕЩЕСТВА

Издательство Академии наук БССР,
Минск, проспект Сталина, 110.

Редактор Издательства *Л. Марикс*
Технический редактор *И. Волоханович*
Корректор *Е. Пресман*

Утверждено РИСО АН БССР

АТ 11526. Сдано в набор 10.XI-1958 г. Подписано к печати 13.VIII-1959 г. Тираж 4000 экз. Бумага 60×92¹/₁₆. Печ. л. 20,75. Уч.-изд. л. 22,3. Изд. заказ 023. Тип. заказ 544. Цена 13 руб.

Типография Издательства Академии наук БССР,
Минск, проспект Сталина, 110.