Ю. П. ГУПАЛО
А. Д. ПОЛЯНИН
Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

МАССОТЕПЛООБМЕН РЕАГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.25
Г94
УДК 532

Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. **Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.**— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 336 с.

Посвящена исследованию процессов массо- и теплопереноса к поверхности реагирующих частиц, капель и пузырей, движущихся в жидкости или газе. Развиты эффективные приближенные аналитические методы решения соответствующих стационарных и нестационарных краевых задач при больших и малых числах Пекле. Исследована зависимость массотеплообмена от формы частицы, гидродинамики потока и кинетики химической реакции. Изучены вопросы конвективного массотеплообмена в упорядоченных системах частиц, капель и пузырей. Рассмотрены задачи о нестационарной диффузии к реагирующей поверхности в потоке. Приведены также простые инженерные формулы, пригодные для непосредственного практического использования.

Рассчитана на научных работников, аспирантов и инженеров, занимающихся исследованием процессов массотеплопереноса и макрокинетики в химической технологии, энергетике, метеорологии, биологии, и может использоваться как учебное пособие для студентов соответствующих специальностей.

Табл. 2. Ил. 57. Библиогр. 195 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *Р. И. Нигматулин*

Юрий Павлович Гупало
Андрей Дмитриевич Полянин
Юрий Сергеевич Рязанцев

МАССОТЕПЛООБМЕН РЕАГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ

Редактор *В. М. Сафрай*. Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*.
Техн. редактор *Е. В. Морозова*.
Корректоры *Г. В. Подвольская, И. Я. Кришталь*.

ИБ № 12283

Сдано в набор 25.10.84. Подписано к печати 19.04.85. Т-10805. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага для глубокой печати. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,64. Усл. кр.-отт. 17,64. Уч.-изд. л. 18,85. Тираж 2700 экз. Заказ № 815. Цена 3 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 издательства «Наука»
121099 Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

Г $\frac{1703040000-087}{053(02)-85}$ 84 — 85

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Основные обозначения 8

Введение 9
§ 1. Постановка задач теории конвективного массо-теплообмена частиц с потоком 9
§ 2. Методы решения задач о массотеплообмене частиц с потоком 17

Глава 1. **Массообмен сферической капли (пузыря) с ламинарным потоком жидкости при больших числах Пекле** 21
§ 1. Математическая формулировка задачи о поле концентрации вещества в потоке. Выделение основных областей поля концентрации 21
§ 2. Область передней критической точки и диффузионный пограничный слой 26
§ 3. Диффузионный след 29
§ 4. Асимптотическое разложение поля концентрации по числу Пекле. Учет сил инерции 36
§ 5. Локальный и полный диффузионные потоки вещества на поверхность капли. Число Шервуда 39
§ 6. Диффузия в потоке с градиентом скорости 43

Глава 2. **Влияние деформации капель и их диффузионного взаимодействия на массообмен с потоком при больших числах Пекле** 53
§ 1. Диффузия к капле (пузырю) в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой несжимаемой жидкостью. Общие соотношения 53
§ 2. Диффузионный поток на деформированную каплю при малых числах Рейнольдса и Вебера 61
§ 3. Диффузионный поток на деформированный газовый пузырь при больших числах Рейнольдса 63
§ 4. Массоперенос к каплям, движущимся одна за другой 68

Глава 3. **Диффузия к твердой сферической частице и круговому цилиндру в потоке жидкости** 78
§ 1. Сферическая частица в поступательном стоксовом потоке. Поле концентрации 78
§ 2. Локальный и полный диффузионные потоки вещества на поверхность сферы. Учет сил инерции . . . 89
§ 3. Сферическая частица в потоке с градиентом скорости. Деформационное течение 93

§ 4. Сфера в поступательно-сдвиговом потоке и потоке с параболическим профилем скорости 98
§ 5. Массоперенос к частицам, взвешенным в турбулентном потоке 103
§ 6. Диффузия к круговому цилиндру в поступательном потоке 109
§ 7. Диффузия к закрепленному и свободно вращающемуся цилиндрам в произвольном стационарном линейном сдвиговом потоке 113

Глава 4. **Массообмен одиночных реагирующих частиц произвольной формы и систем частиц с ламинарным потоком** 125

§ 1. Трехмерный диффузионный пограничный слой. Произвольная форма частиц 125
§ 2. Конвективная диффузия к эллипсоидальной частице и круговому тонкому диску 135
§ 3. Массоперенос к твердой сферической частице и капле в поле трехмерного деформационного течения 144
§ 4. Массоперенос к сферической частице, свободно взвешенной в простом сдвиговом потоке 149
§ 5. Плоский случай. Конвективная диффузия к эллиптическому цилиндру и пластине 152
§ 6. Диффузия в системе параллельных круговых цилиндров 155
§ 7. Массообмен цепочки твердых частиц с потоком . . . 162

Глава 5. **Массообмен, осложненный протекающей с конечной скоростью поверхностной или объемной химической реакцией** 171

§ 1. Постановка задачи. Метод решения 172
§ 2. Интегральные уравнения для поверхностной концентрации и локального диффузионного потока. Примеры точных решений 174
§ 3. Метод численного интегрирования уравнений для поверхностной концентрации и локального потока 180
§ 4. Диффузия к капле при конечной скорости поверхностной химической реакции 184
§ 5. Диффузия к твердой сфере и круговому цилиндру. Интерполяционная формула для среднего числа Шервуда 186
§ 6. Массоперенос в потоке с объемной химической реакцией 191
§ 7. Качественные особенности внутренних задач конвективного массопереноса, осложненного объемной химической реакцией 196

Глава 6. **Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком при малых числах Пекле** 206

§ 1. Массоперенос к сферической частице в поступательном потоке. Поверхностная химическая реакция первого порядка 206
§ 2. Массообмен сферической частицы при сдвиговом обтекании 221

§ 3. Поле температур, обусловленное тепловым эффектом реакции на поверхности сферы. Диффузионный режим реакции 235
§ 4. Тепломассообмен сферической частицы с потоком. Неизотермическая поверхностная химическая реакция 241
§ 5. Массоперенос к поверхности реагирующей частицы произвольной формы 250
§ 6. Некоторые интерполяционные формулы для числа Шервуда при промежуточных значениях числа Пекле 268

Глава 7. **Нестационарный массотеплообмен капель, пузырей и твердых частиц с потоком** 274

§ 1. Постановка задачи о массо- и теплопереносе к каплям и пузырям. Метод решения нестационарных двумерных задач диффузионного (теплового) пограничного слоя при помощи вспомогательных переменных 275
§ 2. Нестационарная диффузия к сферической капле при установившемся стоксовом обтекании и в потенциальном потоке. Приближение диффузионного пограничного слоя 280
§ 3. Общая картина процесса конвективного массотеплопереноса внутри капли при больших числах Пекле. Пределы применимости приближения диффузионного пограничного слоя 289
§ 4. Диффузионный механизм переноса вещества внутри капли при больших числах Пекле на заключительной стадии процесса (модель Кронига — Бринка) 298
§ 5. Массоперенос к поверхности растущей капли . . . 303
§ 6. Диффузия к капле в неустановившемся потоке . . 308
§ 7. Массоперенос к твердым частицам. Приближенный метод интегрирования нестационарных уравнений диффузионного пограничного слоя 315
§ 8. Нестационарный массоперенос к частице при малых числах Пекле 320

Список литературы 326

ПРЕДИСЛОВИЕ

Процессы массо- и теплообмена в дисперсных средах являются предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований в связи с их большим значением для химической технологии и других областей техники.

Однако, несмотря на значительное число полученных к настоящему времени «работоспособных» расчетных формул, применимых в отдельных частных случаях массотеплообмена реагирующих частиц с потоком, общая теория переноса вещества и тепла в дисперсных средах с учетом химических превращений далека от завершения. Такая теория должна базироваться на совместном рассмотрении уравнений гидродинамики, диффузии и теплопроводности, что связано с большими трудностями, которые не преодолены в настоящее время ни аналитическими, ни численными методами. Степень сложности проблемы станет понятной, если учесть, что имеющиеся аналитические и численные решения значительно более простой задачи об обтекании сферической капли или твердой частицы ламинарным однородным на бесконечности потоком не являются исчерпывающими. Вместе с тем разработка новых и совершенствование существующих химико-технологических схем, описание природных явлений часто приводят к новым постановкам задач, требующим учета условий, не соответствующих области применимости найденных ранее закономерностей, так что становится необходимым более детальное рассмотрение механизма процесса массотеплообмена реагирующих частиц с потоком.

В одной книге сравнительно небольшого объема не представляется возможным охватить все результаты многочисленных исследований в этой области, в связи с чем основное внимание сосредоточено на возможно более строгом и полном учете влияния особенностей обтекания на распределение концентраций и температуры и интен-

сивность массо- и теплообмена. При этом авторы стремились рассмотреть наиболее типичные задачи, важные с точки зрения практического использования результатов, представить общие методы и подходы к их решению. На отборе материала не могли не отразиться личный опыт и научные интересы авторов, вследствие чего вопросы, связанные с многочисленными экспериментальными исследованиями и численными расчетами, как правило, рассматриваются лишь в плане иллюстрации или дополнения к аналитическим результатам.

Располагая материал по главам, авторы старались соблюсти принцип «от простого к сложному» и в то же время выделить группы задач, сходных по постановкам и методам решения, имея в виду интересы читателей, как впервые знакомящихся с предметом, так и желающих более полно овладеть современными подходами к решению практических задач.

В первых четырех главах рассмотрен стационарный массо- и теплоперенос к каплям и пузырям (главы 1 и 2) и к твердым частицам (главы 3 и 4) при больших числах Пекле в отсутствие объемных химических реакций при диффузионном режиме химической реакции на межфазной поверхности. При этом сначала рассматриваются частицы простой формы (сфера, цилиндр) в потоке простой структуры. Далее исследуется влияние изменения формы частиц, усложнения структуры потока, взаимодействия частиц между собой. В главе 5 учитывается влияние поверхностной или объемной химической реакции, протекающей с конечной скоростью при больших числах Пекле. Массо- и теплообмену реагирующих частиц с потоком газа (малые числа Пекле) посвящена глава 6. Содержание главы 7 составили нестационарные задачи массо- и теплопереноса.

Авторы благодарны В. А. Альваресу-Суаресу, В. С. Берману, Н. Н. Бобкову, И. А. Викторовой, А. А. Головину, Л. Ю. Ерохину, В. Н. Курдюмову, Л. И. Лесниченко, Р. И. Нигматулину, В. М. Сафраю, Ю. А. Сергееву, оказавшим на разных этапах в той или иной форме большую помощь при подготовке рукописи к изданию.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a — характерный размер частицы (для сферической частицы и кругового цилиндра в качестве характерного размера выбирается радиус);

C — концентрация;

C_s — концентрация у поверхности частицы;

C_∞ — концентрация вдали от частицы;

$c = C/C_\infty$ — безразмерная концентрация;

D — коэффициент диффузии;

K_s — константа скорости поверхностной химической реакции;

K_v — константа скорости объемной химической реакции;

$k = aK_s/D$ — безразмерная константа скорости поверхностной химической реакции первого порядка;

$k_v = a^2K_v/D$ — безразмерная константа скорости объемной химической реакции первого порядка;

Nu — среднее число Нуссельта;

$\mathsf{Pe} = aU/D$ — число Пекле;

$\mathsf{Re} = aU/\nu$ — число Рейнольдса (ν — кинематическая вязкость жидкости);

(r, θ, φ) — сферическая система координат, связанная с частицей;

$\mathsf{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта;

Sh — среднее число Шервуда;

U — характерная скорость потока;

U_∞ — скорость поступательного потока вдали от частицы;

$z = \dfrac{C_\infty - C}{C_\infty}$ — степень превращения;

β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости;

$\varepsilon = \mathsf{Pe}^{-1/(n+1)}$ — малый параметр (значение $n = 1$ соответствует капле и пузырю, а $n = 2$ — твердой частице);

$\Psi \equiv \Psi_1 = \varepsilon^{-1}\psi$;

$\Psi_m = \varepsilon^{-m}\psi$ $(m = 1, 2, 3)$ — «растянутая» функция тока;

ψ — безразмерная функция тока.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Постановка задач теории конвективного массотеплообмена частиц с потоком

Задача о массотеплообмене движущейся твердой частицы, капли или пузыря с окружающей средой лежит в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, горением, химическими превращениями в дисперсной системе, осаждением аэрозолей и коллоидов и т. п. Так, в промышленности процесс экстракции проводится из капель или пузырей, широко применяются гетерогенные химические превращения с использованием частиц катализатора, взвешенных в жидкости или газе. При этом скорость экстракции и интенсивность каталитического процесса в значительной мере определяются величиной полного диффузионного притока реагента к поверхности частиц дисперсной фазы, который в свою очередь зависит от кинетики поверхностной химической реакции, характера обтекания частицы, влияния соседних частиц и других факторов.

В результате анализа упрощенных задач, обработки обширного экспериментального материала и численных расчетов к настоящему времени установлен ряд закономерностей конвективного массотеплопереноса и предложены инженерные методы расчета, позволяющие приближенно определять интенсивности потоков массы и тепла к поверхностям движущихся реагирующих частиц в различных конкретных случаях. Вывод соответствующих формул, результаты расчетов на ЭВМ, сопоставление их с данными эксперимента и примеры практического применения содержатся в многочисленных статьях и мо-

нографиях (например, [3, 5, 12, 18, 48, 59, 59а, 60, 68, 104]).

Значительные математические трудности не позволяют дать единое описание массотеплообмена частицы со средой, охватывающее все многообразие встречающихся на практике ситуаций, различающихся характером обтекания частиц, кинетикой химической реакции на поверхности частицы, степенью взаимного влияния тепловых, химических и гидродинамических процессов, свойствами частиц и другими параметрами. Поэтому необходимо выделять сходные по постановке задачи, приближенное решение которых может быть найдено с разной степенью точности различными приближенными методами. Получение аналитических результатов по массотеплообмену капель и частиц при наличии химических превращений в потоке и на межфазной поверхности оказывается при этом возможным лишь для сравнительно простых моделей, допускающих существенные упрощения в математической формулировке задачи.

В предлагаемой книге авторы предприняли попытку изложить полученные к настоящему времени на основании ряда упрощающих предположений результаты теоретического исследования массотеплообмена движущихся реагирующих частиц со средой. Предполагается, что изменением плотности при химических превращениях (выражающимся, в частности, в появлении потоков Стефана) можно пренебречь. Баро- и термодиффузия, а также перенос тепла излучением считаются пренебрежимо малыми. Предполагается также, что плотность и вязкость среды не зависят от концентрации и температуры и, следовательно, распределения концентрации и температуры не оказывают влияния на обтекание частицы. Это приводит к возможности независимого анализа гидродинамической задачи о вязком обтекании и диффузионно-тепловой задачи о полях концентрации и температуры. Необходимая для решения диффузионно-тепловой задачи информация о поле скоростей считается известной. Коэффициенты диффузии и температуропроводности считаются не зависящими от концентрации и температуры. В некоторых разделах книги наряду с поверхностными превращениями рассматриваются также реакции, протекающие в объеме.

В указанных выше предположениях перенос каждого из компонентов движущейся смеси, сопровождаемый объемной (гомогенной) химической реакцией, описыва-

ется системой уравнений

$$\frac{\partial C_m}{\partial t_*} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\, C_m = D_m \Delta C_m + F_{vm*}(C_1, \ldots, C_M, T_*). \quad (1.1)$$

Здесь C_m — концентрации веществ, участвующих в реакции, D_m — коэффициенты диффузии m-компонента смеси, предполагаемые постоянными, F_{vm*} — скорость объемной химической реакции по m-компоненту, M — общее число компонентов, T_* — температура смеси, $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости жидкости, t_* — время. Скорость объемной химической реакции (по m-компоненту) F_{vm*} определяется как количество m-компонента смеси, поглощаемое (или выделяющееся) в единице объема за единицу времени. Для ряда конкретных реакций зависимости скоростей реакций от концентраций и температуры приведены, например, в [48, 104].

В случае массообмена жидких частиц (капель или пузырей), заполненных гомогенной реагирующей смесью, с потоком уравнения (1.1) описывают распределение концентраций реагентов как в потоке, так и внутри капель (пузырей).

Уравнения (1.1) отражают тот факт, что перенос вещества в движущейся жидкости обусловлен двумя различными механизмами. Во-первых, при наличии разности концентраций в жидкости идет процесс молекулярной диффузии; во-вторых, частицы растворенного вещества увлекаются движущейся жидкостью и переносятся вместе с ней. Совокупность обоих процессов часто называют конвективной диффузией [60, 104].

При отсутствии химической реакции в объеме жидкости ($F_{vm*} = 0$) уравнения (1.1) несколько упрощаются. Однако коэффициенты в них зависят от координат, поэтому анализ соответствующей системы (1.1) сопряжен с большими трудностями даже в тех случаях, когда скорость реакции лимитируется концентрацией одного вещества или когда смесь стехиометрическая и коэффициенты диффузии компонентов совпадают, т. е. когда система (1.1) может быть сведена к одному уравнению.

Уравнения (1.1) должны быть дополнены начальными и граничными условиями. Начальные условия определяются исходными профилями концентраций в потоке и внутри частицы. Граничные условия обычно задаются на поверхности частицы и вдали от нее. Последнее условие соответствует заданию невозмущенных значений

концентраций $C_{m\infty}$ на бесконечности:

$$y_* \to \infty, \quad C_m \to C_{m\infty}, \tag{1.2}$$

где y_* — расстояние от межфазной поверхности. (В задачах растворения значение концентрации растворенного вещества вдали от частицы обычно берется за начало отсчета.)

В зависимости от конкретной физической постановки задачи граничные условия на поверхности частицы могут иметь различный вид.

Если на поверхности частицы протекает гетерогенная химическая реакция, в которой участвуют растворенные в потоке реагенты, и скорость диффузии внутри частицы пренебрежимо мала по сравнению со скоростью диффузии вне ее, то граничное условие, представляющее собой баланс массы m-компонента смеси на поверхности частицы, записывается в виде

$$y_* = 0, \quad -D_m \frac{\partial C_m}{\partial y_*} = F_{sm*}(C_1, \ldots, C_M, T_*), \tag{1.3}$$

где координата y_* отсчитывается по нормали к поверхности, F_{sm*} — скорость поверхностной реакции.

Если скорость поверхностной реакции зависит от концентрации одного реагирующего вещества, задача сводится к исследованию поля концентрации одного компонента ($M = 1$, индекс 1 в этом случае будем опускать). В случае степенной зависимости скорости гетерогенного превращения от концентрации условие (1.3) принимает вид

$$-D \frac{\partial C}{\partial y_*} = F_{s*} = K_s C^n, \tag{1.4}$$

где $n > 0$ — порядок реакции, K_s — константа скорости поверхностной реакции, зависимость которой от температуры обычно описывается законом Аррениуса

$$K_s = K_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right). \tag{1.5}$$

Здесь K_0 — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации, R — газовая постоянная.

При рассмотрении задач диффузии, сопровождаемой конвективным переносом вещества и объемными химическими реакциями во внешнем потоке и внутри капли (пузыря) в отсутствие гетерогенных превращений на межфазной поверхности, в качестве граничного условия на

поверхности капли вместо (1.3) должно быть использовано условие непрерывности потоков и условие фазового равновесия компонентов. В задачах о растворении обычным является условие постоянства концентрации на поверхности частицы.

В зависимости от соотношения между скоростью гетерогенной химической реакции и скоростью диффузии можно выделить два важных предельных случая. Если скорость гетерогенной реакции относительно мала, то в первом приближении (при разложении по малому параметру, характеризующему отношение скоростей упомянутых выше процессов) концентрация реагента на реагирующей поверхности оказывается равной концентрации во внешнем потоке, так что скорость потребления вещества в ходе химической реакции может быть найдена непосредственной подстановкой значения концентрации в потоке вдали от поверхности в выражение для скорости химической реакции (кинетический режим). В случае «быстрой» по сравнению с диффузией поверхностной реакции граничное условие (1.3) упрощается и заменяется условием

$$y_* = 0, \quad C = 0, \tag{1.6}$$

которое соответствует полному поглощению реагента на межфазной поверхности (диффузионный режим). Условие (1.6) соответствует также диффузионному режиму осаждения аэрозольных и коллоидных частиц, причем при учете эффекта «зацепления» [18, 105] поверхность $y_* = 0$ расположена на расстоянии от поверхности осаждения, равном среднему радиусу осаждающихся частиц. В общем случае, когда скорость диффузии реагента сравнима со скоростью химической реакции, в качестве граничного условия на поверхности реагирующей частицы должно использоваться условие (1.3), и режим реагирования называется смешанным.

При рассмотрении неизотермических процессов для описания распределения температуры в движущейся реагирующей среде используется уравнение переноса тепла, которое имеет вид

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) T_* = \chi \Delta T_* + \sum_{m=1}^{M} H_{vm} F_{vm*}. \tag{1.7}$$

Здесь T_* — температура, χ — коэффициент температуропроводности среды, предполагаемый постоянным, H_{vm} —

тепловой эффект объемных химических реакций. Уравнение (1.7) справедливо в области как вне, так и внутри частицы (очевидно, что при описании переноса внутри твердой частицы в (1.7) следует положить $V \equiv 0$). Отсутствию объемных химических реакций соответствует в (1.7) равенство $F_{vm*} = 0$.

При решении нестационарных задач должны быть заданы распределения температур в потоке и, в общем случае, внутри частицы в начальный момент времени.

Граничные условия для уравнения (1.7) зависят от характеристик моделируемой системы и могут быть различными. Одним из них обычно является условие постоянства температуры на больших расстояниях от частицы:

$$y_* \to \infty, \quad T_* \to T_\infty. \tag{1.8}$$

При расчете темплообмена частицы со средой, когда температура поверхности частицы сохраняет постоянное значение, граничное условие на поверхности частицы принимает простой вид

$$y_* = 0, \; T_* = T_s. \tag{1.9}$$

При этом задача о теплообмене частицы со средой с математической точки зрения оказывается полностью аналогичной задаче о массообмене реагирующей частицы с потоком, протекающем в диффузионном режиме.

Иная ситуация возникает при совместном исследовании тепло- и массообмена частицы с потоком, когда на поверхности частицы протекает неизотермическая реакция и температура частицы оказывается заранее не известной, подлежащей определению в ходе решения задачи. Вместо граничного условия (1.9) на поверхности частицы в этом случае следует записать условия непрерывности температуры и теплового потока:

$$y_*=0, \; T_*=T_{p*}, \; \lambda \frac{\partial T_*}{\partial y_*} - \lambda_p \frac{\partial T_{p*}}{\partial y_*} = \sum_{m=1}^{M} H_m D_m \frac{\partial C_m}{\partial y_*}, \tag{1.10}$$

где λ, λ_p — коэффициенты теплопроводности внешней среды и частицы, параметры H_m определяются теплотой поверхностной химической реакции на поверхности частицы и стехиометрическими коэффициентами.

Получение и анализ решений приведенных выше уравнений для концентрации и температуры с соответствующими граничными условиями, отвечающими конкретным физическим ситуациям, составляют предмет данной книги.

Из анализа перечисленных упрощающих предположений и примеров постановок задач можно видеть, что круг рассматриваемых задач ограничен сравнительно простыми по физической формулировке модельными задачами тепло- и массообмена частиц с потоком для слабо «тепло- и массонапряженных» процессов в промышленных системах и природных явлениях, когда поле скоростей обтекания частиц может быть задано независимо от полей концентрации и температуры. При этом главное внимание сосредоточено на возможно более строгом и полном учете влияния особенностей гидродинамического обтекания на распределения концентраций и температуры и интенсивность массотеплообмена.

Остановимся на способах задания фигурирующей в уравнениях (1.1), (1.7) функции V от пространственных координат, которая определяет поле скоростей обтекания частицы и считается известной. В большинстве случаев в качестве V будет использоваться распределение скоростей при ламинарном режиме.

Обтекание частицы однородным поступательным на бесконечности потоком является классическим модельным примером, который во многих реальных ситуациях дает хорошее приближение к действительному течению. Наряду с поступательным потоком рассматриваются и другие достаточно простые течения около частицы [107], также близкие к реальным и позволяющие расширить число модельных гидродинамических течений, допускающих аналитическое описание конвективного массообмена частицы со средой.

Произвольное стационарное поле (безразмерных) скоростей $v_i(\boldsymbol{r})$ в несжимаемой среде в окрестности некоторой точки $\boldsymbol{r} = 0$ ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$, x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты, нормированные на характерный размер частицы), принятой за начало отсчета пространственных координат, может быть приближенно представлено в виде двух членов разложения в ряд Тейлора:

$$v_i(\boldsymbol{r}) = v_i(0) + G_{ij}x_j, \quad G_{ij} \equiv (\partial v_i/\partial x_j)_{r=0}, \quad G_{ij}\delta_{ij} = 0. \tag{1.11}$$

Здесь v_i, G_{ij} — безразмерные компоненты поступательной скорости и тензора сдвига, при нормировке которых в каждом конкретном случае выбираются подходящие характерные значения. По повторяющимся индексам производится суммирование; равенство нулю суммы диагональных эле-

ментов тензора $\| G_{ij} \|$ следует из условия несжимаемости жидкости, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для частиц, размеры которых много меньше характерного пространственного масштаба неоднородности поля течения, распределение скоростей (1.11) при решении задач о вязком обтекании частицы соответствующим потоком жидкости может рассматриваться как распределение скоростей вдали от частицы. Частный случай $G_{ij} = 0$ соответствует однородному поступательному потоку. При $v_i(0) = 0$ выражение (1.11) описывает поле скоростей в произвольном линейном сдвиговом потоке.

Произвольный тензор $\| G_{ij} \|$ может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров

$$\| G_{ij} \| = \| E_{ij} \| + \| \Omega_{ij} \| \quad (E_{ij} = E_{ji}, \ \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}). \tag{1.12}$$

В свою очередь симметричный тензор $\| E_{ij} \|$ путем поворота осей системы координат может быть приведен к диагональному виду. При этом ориентация главных осей будет определяться значениями трех независимых параметров (обозначим их p_1, p_2, p_3). Диагональные элементы E_1, E_2, E_3 приведенного к главным осям тензора $\| E_{ij} \|$ определяют интенсивности растягивающего (сжимающего) движения вдоль осей координат. В соответствии с условием несжимаемости только два диагональных элемента из трех будут независимы: $E_1 + E_2 + E_3 = 0$.

Компоненты антисимметричного тензора второго ранга $\| \Omega_{ij} \|$ в произвольной системе координат можно представить в виде

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k,$$

где ω_k — компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения среды как твердого тела, $\| \epsilon_{ijk} \|$ — антисимметричный единичный тензор третьего ранга. В системе координат, совпадающей с главными осями тензора $\| E_{ij} \|$, обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ через ω_1, ω_2, ω_3.

Разбиение тензора $\| G_{ij} \|$ на симметричную и антисимметричную части соответствует представлению поля скоростей линейного сдвигового течения жидкости в виде суперпозиции линейного деформационного течения растяжения-сжатия с коэффициентами растяжения по осям, равными E_1, E_2, E_3, и вращения жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ [99]. В общем случае тензор

$\| G_{ij} \|$ определяется заданием восьми независимых величин: p_1, p_2, p_3, E_1, E_2, ω_1, ω_2, ω_3. Любой набор значений этих параметров определяет конкретный вид линейного сдвигового движения среды. Каждое из этих движений, вообще говоря, может быть принято за невозмущенное движение в задаче об обтекании частицы.

Для широкого круга задач приближенные аналитические выражения для распределения скоростей обтекания частицы поступательным или сдвиговым потоком могут быть получены в явном виде (см., например, [107]).

§ 2. Методы решения задач о массотеплообмене частиц с потоком

Глубокая аналогия между диссипативными процессами переноса импульса в движущейся жидкости и переноса массы и тепла позволяет при теоретическом исследовании процессов массотеплообмена частиц с потоком использовать математические методы, разработанные в теории вязкой жидкости. Записанное в безразмерных переменных уравнение конвективной диффузии для одного компонента в стационарном случае представляет собой уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами и при отсутствии объемных химических реакций имеет вид

$$\mathrm{Pe}\,(v\cdot\nabla)\,c = \Delta c. \qquad (2.1)$$

Точные аналитические решения этого уравнения при $\mathrm{Pe} \neq 0$ отсутствуют, за исключением нескольких вырожденных случаев, когда решение зависит только от расстояния до реагирующей поверхности и не зависит от поперечной координаты. Аналогичное утверждение справедливо и применительно к уравнению конвективного теплопереноса, которое совпадает с (2.1) с точностью до замены концентрации температурой и диффузионного числа Пекле $\mathrm{Pe} = aU/D$, соответствующего диффузии, тепловым числом Пекле $\mathrm{Pe}_T = aU/\chi$, соответствующим теплопроводности.

В задачах массотеплообмена число Пекле является аналогом числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU/\nu$ и характеризует меру отношения скоростей конвективного переноса тепла и массы к диффузионному переносу.

Как и в механике вязкой жидкости, приближенное решение задач о тепломассообмене частицы со средой базируется на применении приближенных методов, в которых

фигурирующий в уравнении (2.1) безразмерный параметр — число Пекле Pe или Pe^{-1} — используется как параметр разложения при отыскании решений в виде асимптотических рядов. Поэтому построение приближенных аналитических решений оказывается возможным лишь в предельных случаях малых и больших значений безразмерного параметра.

В данной книге вопрос о массотеплообмене частицы с потоком исследуется в случаях, когда для описания поля скоростей обтекания частицы могут быть использованы имеющиеся в литературе приближенные аналитические решения гидродинамической задачи, обычно соответствующие малым числам Рейнольдса (см., например, [107]). Диффузионное и тепловое числа Пекле однозначно связаны с числом Рейнольдса соотношениями

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}, \quad \mathrm{Pe}_T = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr},$$

где $\mathrm{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта, равное отношению коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту диффузии, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, равное отношению коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности.

Для большинства газов коэффициенты диффузии и кинематической вязкости по порядку величины равны между собой ($\mathrm{Sc} \sim 1$), в то время как в жидкостях коэффициент кинематической вязкости обычно на несколько порядков величины превышает коэффициент диффузии ($\mathrm{Sc} \sim 10^3$). В очень вязких жидкостях число Шмидта достигает значений порядка 10^6.

Число Прандтля изменяется в более узких пределах, чем число Шмидта. В газах числа Прандтля примерно равны единице (в частности, для воздуха при обычных условиях $\mathrm{Pr} = 0{,}71$), а в обычных жидкостях не превышают 10 (для воды при температуре 20 °С имеем $\mathrm{Pr} = 7{,}0$). Только в очень вязких жидкостях типа глицерина среднее число Прандтля имеет порядок 10^3; напротив, в жидких металлах значения Pr, как правило, очень малы (для ртути $\mathrm{Pr} = 0{,}023$).

Из приведенных примеров следует, что в реальных задачах о массообмене частиц с потоком при малых числах Рейнольдса число Пекле в уравнении (2.1), вообще говоря, может принимать значения, изменяющиеся в очень широком интервале.

Однако наиболее характерными являются малые и большие значения этого параметра. Эта особенность физи-

ческих постановок задач о массотеплообмене частиц с потоком при малых числах Рейнольдса придает особую значимость анализу и получению аналитических решений модельных задач о массотеплообмене частиц при предельных — малых и больших — значениях чисел Пекле. Ввиду существенного различия асимптотического поведения решений уравнения (2.1) при больших и малых значениях параметра Pe при построении решений, соответствующих различным асимптотикам, как и в гидродинамике вязкой жидкости, используются различные модификации метода сингулярных возмущений [15, 56, 66].

При больших значениях числа Пекле уравнение (2.1) представляет собой типичный пример уравнения с малым параметром при старшей производной, решение которого не может быть найдено в форме регулярного разложения. Построение решения в этом случае основывается на проведении растяжений независимых переменных и выделении в потоке нескольких областей с различным асимптотическим поведением решения, одной из которых является тонкий диффузионный пограничный слой у поверхности частицы. Распределение концентрации во всей исследуемой области находится в виде совокупности асимптотических рядов-решений, определяющих решение в каждой из областей и удовлетворяющих условию сращивания на границах.

Разбиение на области и формализм получения приближенных решений зависят от характера обтекания, т. е. от конкретного распределения скорости. При этом весьма существенным оказывается различие полей обтекания твердых частиц, когда скорость потока на поверхности частицы равна нулю, и жидких частиц (капли, пузыри), когда скорость потока на поверхности частицы имеет отличное от нуля значение. Это различие обусловливает целесообразность принятого в данной книге отдельного рассмотрения массообмена твердых и жидких частиц с потоком.

При малых числах Пекле отыскание решения уравнения (2.1) в виде регулярного степенного ряда по малому параметру — числу Пекле — также не приводит к успеху, поскольку здесь, как и в гидродинамической задаче об обтекании частиц при малых числах Рейнольдса, отбрасываемые в ходе построения решения члены перестают быть малыми на достаточно больших расстояниях от частицы. Сингулярность возмущения, вносимого реагирующей частицей в поток с постоянной на бесконечности кон-

центрацией реагента, по существу обусловлена в этом случае бесконечными размерами области определения решения.

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [15]) приближенное решение задачи в данном случае может быть построено в виде двух асимптотических рядов, определяющих распределение концентрации соответственно во внутренней и внешней областях пространства. Соответствие между рядами-решениями устанавливается путем асимптотической процедуры сращивания.

Необходимые для понимания детали используемых в книге асимптотических методов будут по мере необходимости сообщаться далее непосредственно по ходу изложения.

Глава 1

МАССООБМЕН СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ (ПУЗЫРЯ) С ЛАМИНАРНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

В данной главе излагаются полученные к настоящему времени результаты приближенного аналитического решения задачи о распределении концентрации растворенного в потоке вещества, поглощаемого одиночной движущейся каплей или пузырем, в случае, когда число Пекле велико, а диффузионное сопротивление массообмену сосредоточено во внешней среде. Для простоты предполагается, что капля (пузырь) имеет сферическую форму.

Итогом проведенного анализа являются приближенные формулы для поля концентрации и диффузионного притока растворенного в потоке вещества к поверхности капли. Полученные данные позволяют практически рассчитывать массообмен между непрерывной и дискретной фазами при экстракции и других процессах, проводить сопоставление и контроль результатов численного решения задачи, содержат методику приближенного решения сходных по математической постановке задач.

§ 1. Математическая формулировка задачи о поле концентрации вещества в потоке. Выделение основных областей поля концентрации

Рассмотрим задачу о стационарной диффузии к поверхности сферической капли, обтекаемой однородным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Будем считать жидкости несмешивающимися и ограничимся пока случаем малых чисел Рейнольдса, пренебрегая инерционными эффектами. Для описания поля скоростей жидкости будем пользоваться известными результатами (см., например, [16, 107]). Будем считать также, что число Пекле велико по сравнению с единицей: $\mathrm{Pe} = aU_\infty/D \gg 1$, где U_∞ — скорость набегающего потока, a — радиус капли, D — коэффициент диффузии.

Учитывая осесимметричность задачи, запишем безразмерное уравнение стационарной диффузии в потоке в сфе-

рической системе координат, связанной с центром капли:

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \\ = \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right\}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \mathrm{Pe}^{-1/2}.$$

Здесь ε — малый параметр. Как будет видно из дальнейшего изложения, введение малого параметра по формуле $\varepsilon = \mathrm{Pe}^{-1/2}$ удобно в связи с тем, что толщина диффузионного пограничного слоя у поверхности капли оказывается порядка ε.

Угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности, радиальная координата отнесена к радиусу капли, концентрация отнесена к ее значению в невозмущенном потоке; v_r, v_θ — безразмерные (отнесенные к скорости набегающего потока) компоненты скорости жидкости, определенные соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \psi(r, \theta) = \frac{1}{2}(r-1)\left[r - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta+1} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] \sin^2 \theta. \quad (1.2)$$

Здесь ψ — функция тока, соответствующая решению Рыбчинского — Адамара [107], β — отношение вязкостей капли и окружающей ее жидкости (для газового пузыря $\beta \approx 0$).

Безразмерные граничные условия в предположении полного поглощения вещества на поверхности капли и постоянства концентрации вдали от нее имеют вид

$$r = 1, \quad c = 0; \quad r \to \infty, \quad c \to 1. \quad (1.3)$$

Приведем еще одну форму записи уравнения (1.1), удобную для последующего анализа:

$$\frac{\partial(c, \psi)}{\partial(r, \theta)} = \varepsilon^2 \sin \theta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (1.4)$$

В левой части (1.4) стоит якобиан функций c и ψ.

Наличие в уравнении (1.1) малого параметра дает возможность определить поле концентрации во всей области течения путем приближенного решения задачи (1.1)—(1.3). Для построения такого решения необходимо преодолеть специфические трудности, связанные

с тем , что задача (1.1)—(1.3) является сингулярно возмущенной (ввиду наличия малого параметра при старшей производной). Это требует предварительного исследования задачи с целью выделения областей с различной структурой асимптотических решений. Каждое из этих решений

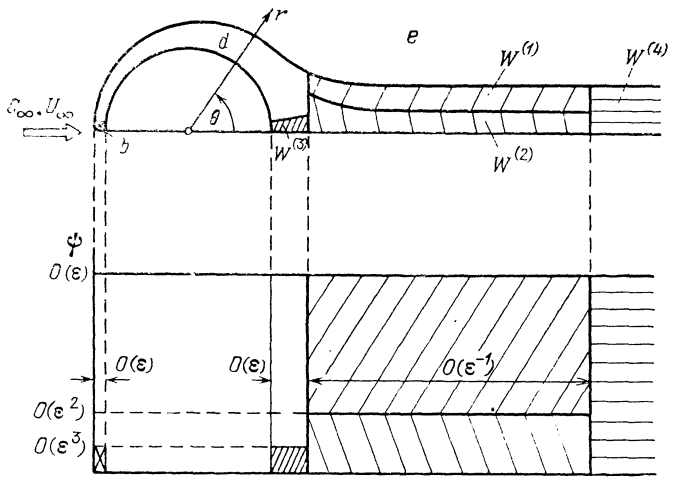


Рис. 1.1. Схема разбиения поля концентрации вне капли на области с различной структурой асимптотических решений.

описывает распределение концентрации в соответствующей области течения и находится из анализа приближенной, более простой, чем (1.1)—(1.3), задачи с применением процедуры сращивания.

Сравнительный анализ величин отдельных слагаемых в уравнении (1.1) при $\varepsilon \ll 1$ с учетом явного вида функции тока (1.2) будет проведен ниже. Он показывает, что в потоке можно выделить несколько областей с различными механизмами массопереноса, которые схематически показаны на рис. 1.1. Это внешняя область e, область передней критической точки b[1]), диффузионный пограничный слой с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$ и область диффузионного следа W, которая в свою очередь состоит из областей $W^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. В каждой из областей уравнение (1.1) заменяется приближенным в результате выделения главных членов разложений по малому параметру ε.

[1]) Здесь и далее имеется в виду малая окрестность соответствующей точки.

Характерные размеры областей и их условные границы в задачах рассматриваемого типа определяются из следующих соображений. Например, делается растяжение координат $y = r - 1$ и θ, т. е. вводятся новые координаты Y_l, S_m по формулам

$$r - 1 = \varepsilon^l Y_l, \quad \theta = \varepsilon^m S_m. \tag{1.5}$$

Исходная задача (1.1) — (1.3) записывается в новых переменных Y_l, S_m, которые считаются величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$. Далее проводится оценка порядков величин отдельных слагаемых в уравнении (1.1) с учетом (1.2), конкретизируются значения l, m и выделяются области изменения исходных переменных r, θ, где может быть достигнуто то или иное упрощение уравнения (1.1) за счет пренебрежения слагаемыми более высокого порядка малости по ε.

Из дальнейшего будет видно, что преобразование (1.5) наиболее часто используется при $l = m = 1$. Для краткости будем в этом случае употреблять переменные Y и S без индексов.

Отметим, что для исследования всей области течения $1 \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ нельзя ограничиться использованием лишь растяжений (1.5). Так, в окрестности передней критической точки b следует ввести растянутые координаты Y, X по формулам (2.1) § 2.

При выделении области диффузионного следа W и последующем разбиении ее на области $W^{(i)}$ необходимо наряду с растяжением вводить сжатие координат по формуле $r = \varepsilon^{-1}\rho$, а также исследовать изменение порядка функции тока в зависимости от соответствующего деформирования $r - 1$ или r и угловой координаты θ (см. § 3). В результате при описании границ областей в данном случае будет фигурировать та или иная асимптотика функции тока, вместо которой удобнее использовать более простую функцию

$$\hat{\psi}(r, \theta) = (r - 1) r\theta^2. \tag{1.6}$$

Последнее объясняется тем, что в области следа функции $\hat{\psi}(1 + \varepsilon^n Y_n, \varepsilon^m S_m)$ и $\psi(1 + \varepsilon^n Y_n, \varepsilon^m S_m)$, а также $\hat{\psi}(\varepsilon^{-1}\rho, \varepsilon^m S_m)$ и $\psi(\varepsilon^{-1}\rho, \varepsilon^m S_m)$ имеют при малых ε одинаковый порядок, а выражение (1.6) — наиболее простая комбинация координат r и θ, обладающая этими свойствами при указанных деформациях.

Следует подчеркнуть, что функция $\hat{\psi}(r, \theta)$ выбирается в соответствии с видом функции тока; для функции тока

иного, чем (1.2), вида выражение для $\hat{\psi}(r, \theta)$ может, вообще говоря, отличаться от (1.6).

На рис. 1.1 для условного изображения указанных выше характерных областей наряду со сферической системой координат r, θ использована также система, связанная с функцией тока (или, что то же, с функцией $\hat{\psi}$). Ниже будут использоваться обе эти системы.

Дадим теперь краткую характеристику каждой области.

Во внешней области e: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1, \quad O(\varepsilon) \leqslant \hat{\psi}\}$ (здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области) роль диффузии в переносе растворенного вещества незначительна, и концентрация сохраняет постоянное значение, равное концентрации в набегающем потоке, т. е.

$$c^{(e)} = 1. \tag{1.7}$$

В области передней критической точки b: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon), \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ уравнение (1.1) может быть несколько упрощено, однако в нем сохраняются конвективные члены и члены, описывающие диффузию как в тангенциальном, так и в радиальном направлениях.

В диффузионном пограничном слое с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon), O(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \pi - O(\varepsilon)\}$ в уравнении (1.1) при сохранении конвективных членов можно пренебречь тангенциальным диффузионным переносом по сравнению с диффузией в радиальном направлении.

В конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}), \ O(\varepsilon^2) \leqslant \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$ правой частью (1.1) можно пренебречь по сравнению с левой. Поэтому концентрация здесь зависит только от функции тока и вдоль линий тока сохраняет постоянные значения, равные значениям на выходе из диффузионного пограничного слоя.

Во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}), \ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)\}$ оказывается возможным пренебречь радиальной диффузией вещества.

В области задней критической точки $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon), \ \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ после упрощения уравнения (1.1) в нем сохраняются члены, описывающие диффузию как в радиальном, так и в тангенциальном направлениях.

В области смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r, \ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$ определяющую роль в массообмене играет тангенциальный перенос вещества путем диффузии.

В приложениях наибольший интерес представляют сведения о локальном и интегральном диффузионных потоках вещества на поверхность капли, которые определяют интенсивность массообмена капли с потоком. Очевидно, что для их расчета достаточно знания распределения концентрации вблизи поверхности капли, т. е. в областях b, $d \setminus b$, $W^{(3)}$. Однако для нахождения поля концентрации в этих областях необходимо решить задачу во всей области изменения переменных r, θ. Кроме того, знание распределения концентрации в диффузионном следе капли оказывается весьма важным при расчете массообмена системы капель с потоком.

В соответствии с используемым асимптотическим методом решения вклады отдельных участков поверхности капли, граничащих с областями b, $d \setminus b$, $W_*^{(3)}$, в интегральный массообмен капли с потоком, так же как и суммарная интенсивность массообмена, представляются в виде разложений по степеням малого параметра ε.

§ 2. Область передней критической точки и диффузионный пограничный слой

Для изучения распределения концентрации в области передней критической точки b: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ введем растянутые координаты

$$Y = \varepsilon^{-1}(r - 1), \quad X = \varepsilon^{-1}(\pi - \theta). \tag{2.1}$$

Используя их в выражении для функции тока (1.2) и ограничиваясь главным членом разложения по степеням ε (принимается, что $Y = O(1)$, $X = O(1)$), получаем

$$\psi = \varepsilon^3 \frac{1}{2(\beta + 1)} Y X^2.$$

Записав уравнение (1.4) в переменных Y, X, подставляя в него приведенное выражение для функции тока и выделяя затем старшие члены разложения концентрации по малому параметру ε, получаем уравнение и (с учетом первого условия (1.3)) граничные условия для распределения концентрации в области передней критической точки:

$$-Y\frac{\partial c^{(b)}}{\partial Y} + \frac{1}{2}X\frac{\partial c^{(b)}}{\partial X} = (\beta + 1)\left[\frac{\partial^2 c^{(b)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial X}X\frac{\partial c^{(b)}}{\partial X}\right], \tag{2.2}$$

$$Y = 0, \quad c^{(b)} = 0; \quad X = 0, \quad \partial c^{(b)}/\partial X = 0.$$

Последнее условие в (2.2) является следствием симметрии задачи.

Для завершения формулировки задачи (2.2) необходимо использовать условия асимптотического сращивания решения в рассматриваемой области b с решениями в прилегающих областях — внешней области e: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1,\ O(\varepsilon) \leqslant \hat{\psi}\}$ и области диффузионного пограничного слоя с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ O(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \pi - O(\varepsilon)\}$. Эти условия записываются в следующем виде:

$$c^{(b)}(Y \to \infty) = c^{(e)} = 1, \tag{2.3}$$

$$c^{(b)}(X \to \infty) = c^{(d \setminus b)}(\theta \to \pi) \quad \text{при} \quad Y \leqslant O(1). \tag{2.4}$$

При записи условия (2.3) учтено решение (1.7) для внешней области. Для получения явного вида условия (2.4) необходимо знать асимптотику распределения концентрации в области $d \setminus b$ при $\theta \to \pi$.

Изучение поля концентрации в области $d \setminus b$ будем проводить в переменных $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$, θ. Из выражения для функции тока (1.2) получаем

$$\psi = \varepsilon\Psi + O(\varepsilon^2), \quad \Psi = \frac{1}{2(\beta + 1)} Y \sin^2\theta. \tag{2.5}$$

Процедура выделения старших членов разложения из уравнения (1.4) с учетом (2.5) при условиях $Y = O(1)$, $\theta = O(1)$, $\pi - \theta = O(1)$ приводит к следующему уравнению для концентрации в области $d \setminus b$:

$$\frac{\partial(c^{(d \setminus b)}, \Psi)}{\partial(Y, \theta)} = \sin\theta \frac{\partial^2 c^{(d \setminus b)}}{\partial Y^2}. \tag{2.6}$$

В диффузионном погранслое с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$ существенную роль играет радиальная диффузия вещества к поверхности капли, в то время как тангенциальной диффузией можно пренебречь.

Переходя в (2.6) к переменным Мизеса Ψ, θ [156] и используя соотношения

$$\frac{\partial(c, \Psi)}{\partial(Y, \theta)} = -\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\left(\frac{\partial c}{\partial\theta}\right)_\Psi, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\Psi^2}\right)_\theta$$

(нижним индексом отмечена фиксируемая координата) получаем следующее уравнение для распределения

концентрации:

$$-\frac{\partial c^{(d\setminus b)}}{\partial \theta} = \frac{\sin^3\theta}{2(\beta+1)}\frac{\partial^2 c^{(d\setminus b)}}{\partial \Psi^2}. \qquad (2.7)$$

Делая замену переменной

$$\tau = \frac{1}{2(\beta+1)}\int_{\theta}^{\pi}\sin^3 x\,dx = \frac{1}{2(\beta+1)}\left[\frac{2}{3}+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right], \qquad (2.8)$$

сводим (2.7) к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial c^{(d\setminus b)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c^{(d\setminus b)}}{\partial \Psi^2}. \qquad (2.9)$$

Граничные условия для (2.9) следуют из первого условия (1.3) и условия сращивания с решением (1.7) во внешней области и соответствуют значениям $Y = 0$ и $Y \to +\infty$:

$$\Psi = 0\ (\tau \neq 0),\ c^{(d\setminus b)} = 0; \quad \Psi \to \infty,\ c^{(d\setminus b)} \to 1. \qquad (2.10)$$

Для завершения формулировки задачи (2.9), (2.10) необходимо добавить еще одно условие при $\tau = 0$ и $\Psi \neq 0$ (эквивалентное начальному условию в задаче теплопроводности). Значение $\tau = 0$ соответствует $\theta = \pi$, причем в случае фиксированного Y при $\theta \to \pi$ согласно второму равенству (2.5) имеем $\Psi(Y, \theta) \to 0$. Это связано с вырождением преобразования Мизеса на оси потока (при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$). С другой стороны, требование $\tau \to 0$ при $\Psi(Y, \theta) \neq 0$ соответствует одновременному стремлению $\theta \to \pi$ и $Y \to +\infty$, что естественным образом приводит к использованию условия сращивания решений в областях $d \setminus b$ и e:

$$c^{(d\setminus b)}(Y \to \infty,\ \theta \to \pi) = c^{(e)}. \qquad (2.11)$$

Возвращаясь к переменным τ, Ψ и учитывая (1.7), запишем это условие в виде

$$\tau = 0\ \ (\Psi \neq 0),\ c^{(d\setminus b)} = 1. \qquad (2.12)$$

Задача (2.9), (2.10), (2.12) имеет стандартную форму, ее решение известно:

$$c^{(d\setminus b)} = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad \operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-z^2)\,dz. \qquad (2.13)$$

Отметим, что при формулировке задачи (2.9), (2.10), (2.12) вместо условия сращивания (2.4) использовано условие (2.11). Это позволяет определять поле концентрации последовательно в областях $d \setminus b$ и b.

Вернемся к области b и условию (2.4). Используя соотношения (2.13), (2.5), (2.8), находим асимптотику распределения $c^{(d \setminus b)}$ на границе с областью передней критической точки:

$$c^{(d \setminus b)}(Y \leqslant O(1),\ \theta \to \pi) = \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2(\beta+1)}}\right). \quad (2.14)$$

Тем самым в соответствии с условием сращивания (2.4) определена асимптотика концентрации в области b при $X \to \infty$. Более того, решение задачи (2.2)—(2.4), (2.14), которая теперь полностью определена, совпадает с указанной асимптотикой, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Последнее означает, что в области передней критической точки диффузия в тангенциальном направлении несущественна; это приводит к заключению о возможности распространения решения (2.13) на эту область. Другими словами, формула (2.13) оказывается справедливой во всей области диффузионного пограничного слоя d: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ O(\varepsilon) \leqslant \theta\}$; в исходной системе сферических координат она имеет вид

$$c^{(d)} = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\mathrm{Pe}}{8(\beta+1)}}(r-1)\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}\right). \quad (2.15)$$

Этот результат был получен ранее [60] несколько иным путем. Отметим, что распространенное интуитивное соображение [60] о «необедненности потока в передней точке частицы» не следует понимать буквально. В действительности в области передней критической точки концентрация определяется выражением (2.14) и меняется от нуля на поверхности капли до единицы на границе с внешней областью. Конечный же результат (2.15) оказывается верным благодаря неявному использованию условия сращивания (2.11).

§ 3. Диффузионный след

Упрощение задачи в диффузионном пограничном слое было достигнуто благодаря возможности пренебречь тангенциальным диффузионным переносом по сравнению с радиальным. Такой подход становится непригодным в об-

ласти диффузионного следа капли W: $\{r-1 \leqslant O(\varepsilon), \theta \leqslant O(\varepsilon); O(\varepsilon) \leqslant r-1, \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$, где тангенциальная диффузия имеет такой же или даже более низкий порядок малости по сравнению с радиальной. В этом можно убедиться при переходе к растянутым переменным (1.5) и анализе порядков членов в уравнении (1.1) (или (1.4)). К аналогичному результату, очевидно, приводит и непосредственная подстановка решения (2.15) в уравнение (1.1) и оценка отношения слагаемых в фигурных скобках.

Равномерно пригодное для всей области W асимптотическое разложение искомой функции c в ряд по малому параметру ε построить не удается. Оказывается необходимым разбить область W на несколько областей $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (рис. 1.1) и строить асимптотические решения в каждой из них, сращивая асимптотики на их условных границах.

Сначала рассмотрим конвективно-погранслойную область диффузионного следа $W^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r-1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}), O(\varepsilon^2) \leqslant \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$. В этой области, как и во внешней, правая часть уравнения (1.4) несущественна, т. е. $\partial(c^{(1)}, \psi)/\partial(r, \theta) = 0$. Следовательно, концентрация в $W^{(1)}$ зависит лишь от функции тока. Конкретный вид этой зависимости определяется сращиванием с решением в диффузионном пограничном слое (2.13):

$$c^{(1)}(\Psi) = c^{(d)}(\Psi, \theta \to 0). \tag{3.1}$$

Учитывая равенство $\tau(\theta = 0) = \dfrac{2}{3(\beta+1)}$, которое следует из (2.8), получаем для распределения концентрации в конвективно-погранслойной области $W^{(1)}$

$$c^{(1)}(\Psi) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{8}(\beta+1)}\,\Psi\right), \qquad \Psi = \varepsilon^{-1}\psi. \tag{3.2}$$

Выражение для функции тока ψ приведено в формуле (1.2).

Отметим, что в области $W^{(1)}$ происходит перенос вещества, приходящего из диффузионного пограничного слоя, без изменения концентрации вдоль линий тока. Конвективно-погранслойное решение (3.2), как и решение для диффузионного пограничного слоя, становится непригодным вблизи оси диффузионного следа.

Анализ порядков конвективных и диффузионных членов путем перехода к переменным (1.5) или при помощи подстановки выражения (3.2) в уравнение (1.4) показывает,

что при $\hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)$ правой частью уравнения нельзя пренебречь по сравнению с левой. Поэтому необходимо выделить граничащую с конвективно-погранслойной областью окрестность оси следа — внутреннюю область диффузионного следа $W^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)\}$, в которой диффузия в радиальном направлении несущественна, а в тангенциальном направлении сравнима с конвективным переносом.

Запишем уравнение диффузии в переменных r, ψ при условии, что в скобках в правой части уравнения (1.4) можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым (последнее справедливо, в частности, в области $W^{(2)}$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial c}{\partial r} = \varepsilon^2 \sin\theta \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)\frac{\partial c}{\partial \psi} \right\}. \quad (3.3)$$

При выводе уравнения (3.3) были использованы соотношения

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \theta}\right)_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_r, \quad \frac{\partial (c, \psi)}{\partial (r, \theta)} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_\psi. \quad (3.4)$$

Все коэффициенты уравнения (3.3) должны быть выражены через r и ψ с использованием выражения для функции тока (1.2).

Как уже отмечалось, исследование области следа непосредственно связано с анализом поведения функции тока. В области $W^{(2)}$ малым значениям ψ соответствуют малые θ, поэтому с точностью до членов более высокого порядка

$$\psi = f(y)\,\theta^2, \quad (3.5)$$

где

$$y = r - 1, \quad f(y) = \frac{1}{2} y \left(1 + y - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta+1}\frac{2+y}{1+y}\right).$$

Подставляя (3.5) в (3.3), получаем уравнение для концентрации в области $W^{(2)}$:

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \Psi_2}\left(\Psi_2 \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \Psi_2}\right), \quad \Psi_2 = \varepsilon^{-2}\psi. \quad (3.6)$$

Координата Ψ_2 («растянутая» функция тока) введена здесь таким образом, что обе части уравнения имеют одинаковый порядок.

Переходим к формулировке граничных условий для уравнения (3.6). Прежде всего замечаем, что при решении задачи во всех областях, содержащих участки оси диффузионного следа ($\theta = 0$), т. е. в областях $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, $W^{(4)}$,

следует использовать условие симметрии

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \theta} = 0 \qquad (i = 2, 3, 4), \tag{3.7}$$

эквивалентное требованию ограниченности решения при $\theta \to 0$. Записанное через переменную Ψ_2, это граничное условие для области $W^{(2)}$ имеет вид

$$\Psi_2 = 0, \quad \Psi_2^{1/2} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \Psi_2} = 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условиям сращивания с решениями в прилегающих областях:

$$c^{(2)}(\Psi_2 \to \infty) = c^{(1)}(\Psi \to 0) = \varepsilon \sqrt{\frac{3}{2\pi}(\beta + 1)}\, \Psi_2, \tag{3.9}$$

$$c^{(2)}(y \to 0) = c^{(3)}(Y \to \infty) \quad (\theta = \text{const}). \tag{3.10}$$

Правая часть условия (3.9) получена на основании решения (3.2) с последующим учетом того, что $\Psi = \varepsilon \Psi_2$.

Видно, что использование условия (3.10) оказывается невозможным без анализа распределения концентрации в области задней критической точки $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$, где существенны как радиальный, так и тангенциальный конвективный и диффузионный переносы вещества. Ясно, что в области $W^{(3)}$ следует ввести растянутые координаты $Y = \varepsilon^{-1} y$, $S = \varepsilon^{-1}\theta$ (первая из них уже была использована выше при записи условия (3.10)). Тогда главный член разложения функции тока (1.2) по параметру ε примет вид

$$\psi = \frac{1}{2(\beta + 1)}\, y\theta^2 = \varepsilon^3 \frac{1}{2(\beta + 1)}\, YS^2. \tag{3.11}$$

С учетом (3.11) из (1.1), первого условия (1.3) и условия (3.7) получаем уравнение и граничные условия для концентрации в области $W^{(3)}$:

$$Y \frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y} - \frac{1}{2} S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S} = (\beta + 1)\left[\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial S} S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S}\right], \tag{3.12}$$

$$Y = 0, \quad c^{(3)} = 0; \quad S = 0, \quad \partial c^{(3)}/\partial S = 0,$$

сходные с уравнением и граничными условиями для концентрации в области передней критической точки (2.2).

Условия сращивания $c^{(3)}$ с решениями в прилегающих областях — области диффузионного пограничного слоя

и внутренней области диффузионного следа — имеют вид

$$c^{(3)}(S \to \infty) = c^{(d)}(\theta \to 0) = \varepsilon^2 \sqrt{\frac{3}{8\pi(\beta+1)}}\, YS^2, \quad (3.13)$$

$$c^{(3)}(Y \to \infty) = c^{(2)}(y \to 0) \quad (\theta = \text{const}). \quad (3.14)$$

Правая часть условия (3.13) представляет собой главный член асимптотики решения (2.15) при $\theta \to 0$.

Условие (3.14) показывает, что задачи в областях $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$ «зацепляются». Однако эту трудность можно теперь обойти, заметив, что согласно (3.6), (3.8), (3.9) решение в $W^{(2)}$ имеет порядок ε, а в соответствии с (3.12), (3.13) можно ожидать, что в области $W^{(3)}$ решение будет иметь порядок ε^2. В результате заключаем, что правую часть в условии (3.10) следует положить равной нулю. Тогда оно примет вид

$$c^{(2)}(y = 0,\ \Psi_2(y = 0,\ \theta)) = 0. \quad (3.15)$$

Возвращаясь теперь снова к области $W^{(2)}$, будем искать решение задачи (3.6), (3.8), (3.9), (3.15) в виде $c^{(2)} = Ay + B\Psi_2$. Нетрудно убедиться, что условия (3.8) и (3.15) удовлетворяются при любых A и B; из уравнения (3.6) следует, что $A = 2B$, а из условия (3.9) находим B. Окончательно для распределения концентрации в области $W^{(2)}$ имеем [31]

$$c^{(2)}(y, \Psi_2) = \varepsilon \sqrt{\frac{3}{2\pi}(\beta+1)}\,(2y + \Psi_2). \quad (3.16)$$

С учетом равенства $\Psi_2 = \varepsilon^{-2}\psi$ и соотношений (3.11), (3.16) условие сращивания (3.14) в области задней критической точки представим в виде

$$c^{(3)}(Y \to \infty) = \varepsilon^2 \sqrt{\frac{3}{8\pi(\beta+1)}}\, Y[4(\beta+1) + S^2]. \quad (3.17)$$

Прямой подстановкой асимптотики (3.17) в (3.12), (3.13) можно убедиться, что правая часть выражения (3.17) представляет распределение концентрации во всей области задней критической точки $W^{(3)}$.

Полученное решение (3.16) непригодно за пределами области $W^{(2)}$ ниже по потоку; в частности, оно не удовлетворяет условию на бесконечности (второе условие в (1.3)). Заметим, что определяемое формулой (3.2) решение $c^{(1)}(\Psi)$, хотя и удовлетворяет этому условию, тем не менее непригодно вне $W^{(1)}$, поскольку получено в пренебрежении диффузионным переносом, что неоправданно во всех других областях диффузионного следа; на оси потока

$c^{(1)}(\Psi(r, \theta = 0)) = 0$, следовательно, распределение концентрации за пределами $W^{(1)}$ ниже по потоку также не удовлетворяет второму граничному условию (1.3). Поэтому необходимо рассмотреть еще область смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r, \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$. В этой области, так же как и в $W^{(2)}$, радиальной диффузией можно пренебречь по сравнению с тангенциальной.

Введя переменные $\rho = \varepsilon r$, $\Psi = \varepsilon^{-1}\psi$ и используя уравнение (3.6) и условие (3.7), получаем следующее уравнение и граничное условие для $c^{(4)}$:

$$\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \rho} = 2\frac{\partial}{\partial \Psi}\Psi\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \Psi}; \quad \Psi = 0, \quad \Psi^{1/2}\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \Psi} = 0. \tag{3.18}$$

Условия сращивания имеют вид

$$c^{(4)}(\Psi \to \infty) = c^{(e)} = 1,$$

$$c^{(4)}(\rho \to 0) = \tag{3.19}$$

$$= \begin{cases} c^{(1)}(\Psi) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{8}(\beta+1)\Psi}\right), & O(\varepsilon) < \Psi \leqslant O(1), \\ c^{(2)}(y \to \infty) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}(\beta+1)}(\Psi + 2\rho), & 0 \leqslant \Psi < O(\varepsilon). \end{cases}$$

Здесь использованы формулы (3.2) и (3.16), нижнее выражение в фигурной скобке определяет условие сращивания с $W^{(2)}$ и соответствует решению во внутренней области диффузионного следа, где переменные ρ и Ψ одного порядка малости, равного ε. Это следует из того, что $\rho = \varepsilon y$, $\Psi = \varepsilon\Psi_2$, а в области $W^{(2)}$ справедливы соотношения $y = O(1)$, $\Psi_2 = O(1)$.

Выражение

$$c^{(4)}(\Psi, \rho) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho}\exp\left(-\frac{\Psi + z}{2\rho}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\Psi z}}{\rho}\right) \times$$

$$\times \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{8}(\beta+1)}\, z\right) dz, \tag{3.20}$$

в котором I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, удовлетворяет уравнению и граничному условию (3.18), а также первому условию в (3.19). При фиксированном Ψ и $\rho \to 0$ имеем $c^{(4)}(\Psi, \rho) \to c^{(1)}(\Psi)$ [185]. Как и в [33], легко показать, что при $\rho \to 0$ и $\Psi / \rho = O(1)$ формула (3.20) приводит к выражению, стоящему в нижней строке фигурной скобки (3.19). Для этого в интеграле (3.20) делаем замену переменной $z = \rho^2\Psi^{-1}u^2$, затем используем разложение erf $x =$

$= 2\pi^{-1/2} x + o(x)$, приводя интеграл к табличному [7]:

$$\int_0^\infty u^{\delta-1} \exp(-\varkappa u^2) I_0(u)\, du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)\varkappa^{-\delta/2} \exp\left(\frac{1}{4\varkappa}\right)\Phi\left(1-\frac{\delta}{2},\ 1,\ -\frac{1}{4\varkappa}\right) \quad (3.21)$$

при $\delta = 4$, $\varkappa = {}^1/_2\, \rho/\Psi$. Здесь $\Phi(a, b, c)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $\Phi(-1, 1, x) = 1 - x$.

Из приведенного рассмотрения следует, что выражение (3.20) является точным решением задачи (3.18), (3.19) и дает распределение концентрации в области смешения диффузионного следа $W^{(4)}$.

Таким образом, в §§ 2, 3 получено распределение концентрации во всех характерных областях: d и $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Из формул (2.13), (3.16), (3.17), (3.20), описывающих поле концентрации в диффузионном пограничном слое, в области задней критической точки, в конвективно-погранслойной и внутренней областях диффузионного следа, видно, что во всем интервале изменения угла θ при $r \leqslant O(\varepsilon^{-1})$ распределение концентрации можно представить в виде равномерно пригодного составного разложения

$$\bar{c}(r, \theta) = \operatorname{erf}\left(\frac{\psi(r, \theta)}{2\varepsilon\sqrt{\tau(\theta)}}\right) + \varepsilon\sqrt{\frac{6}{\pi}(\beta+1)}(r-1), \quad (3.22)$$
$$r \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Функция тока ψ и выражение $\tau = \tau(\theta)$ определены в (1.2) и (2.8).

В каждой точке r, θ ($r \leqslant O(\varepsilon^{-1})$) формула (3.22) дает главный член разложения концентрации по малому параметру ε. Это означает следующее: во всех областях d и $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) выражение (3.22), записанное в соответствующих переменных порядка единицы, которые были введены ранее для изучения указанных областей, при $\varepsilon \to 0$ описывает распределение концентрации с точностью до членов более высокого порядка малости. Например, после введения переменных $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$, $S = \varepsilon^{-1}\theta$ в выражение (3.22) и разложения его в ряд при $\varepsilon \ll 1$, $Y = O(1)$, $S = O(1)$ получаем $\bar{c} = c^{(3)}(Y, S)(1 + o(1))$.

Из формул (3.20), (3.22) видно, что концентрация в области диффузионного следа отлична от нуля и при фиксированном расстоянии до поверхности капли дости-

гает минимума на оси потока ($\theta = 0$), где она растет линейно с расстоянием до поверхности капли для $r \leqslant O(\varepsilon^{-1})$. При этом имеет место довольно сложная зависимость распределения концентрации от вязкости капли, определенная выражениями (1.2), (3.20), (3.21); на оси потока за каплей при $r \leqslant O(\varepsilon^{-1})$ концентрация пропорциональна $(1+\beta)^{1/2}$.

§ 4. Асимптотическое разложение поля концентрации по числу Пекле. Учет сил инерции

Поле концентрации, полученное в §§ 1—3, является, по существу, нулевым приближением $c_0(r, \theta)$ решения задачи (1.1) — (1.3) в виде асимптотического ряда

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varepsilon)\, c_n \quad (\alpha_0 = 1;\ \alpha_{n+1}/\alpha_n \to 0 \ \text{ при } \varepsilon \to 0).$$

Функции $\alpha_n(\varepsilon)$, как и деформированные координаты, являющиеся аргументами функций c_n, — вообще говоря, свои для каждой области.

Определим теперь следующие члены этого ряда. Одновременно сделаем еще одно обобщение, существенное для приложений. А именно, найдем поле концентрации вокруг поглощающей капли, приняв во внимание в первом приближении по числу Рейнольдса инерционные эффекты при ее обтекании. С этой целью для поля скоростей используем результаты, полученные методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Рейнольдса Re. Вместо нулевого члена разложения функции тока по Re, полученного Рыбчинским и Адамаром, возьмем в качестве выражения для функции тока двучленное разложение [192]

$$\begin{aligned}
&\psi = \psi_0 + \mathrm{Re}\,\psi_1 \quad (\mathrm{Re} = aU_\infty/\nu),\\
&\psi_0 = \frac{1}{2}(r-1)\left[r - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta+1}\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]\sin^2\theta,\\
&\psi_1 = \frac{1}{8}\frac{3\beta+2}{\beta+1}\psi_0 - \frac{1}{16}\frac{3\beta+2}{\beta+1}(r-1)\times\\
&\times\left[r - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta+1} - \frac{1}{10}\frac{\beta}{(\beta+1)^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{5\beta+6}{r^4}\right)\right]\sin^2\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{4.1}$$

(нулевым приближением для функции тока служит функция $\psi_0(r, \theta)$ (1.2), использованная в §§ 1—3, число Вебера считается достаточно малым).

Разбиение всего поля концентрации на области, указанные в § 1, здесь сохраняется в том же виде, при той же вспомогательной функции $\hat{\varphi}(r, \theta)$ (1.6).

Во внешней области, как и ранее, имеем для концентрации значение, равное значению в набегающем потоке, т. е.

$$c_n^{(e)} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

В диффузионном пограничном слое будем, как и прежде, искать решение в переменных Y, θ, представив функцию тока (4.1) в виде ряда

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y^n \lambda_n(\theta),$$

$$\lambda_n(\theta) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n}\bigg|_{r=1}, \quad Y = \varepsilon^{-1}(r-1),$$

$$\lambda_1(\theta) = \frac{1}{2(\beta+1)} \left\{1 + \frac{1}{8} \mathrm{Re}\, \gamma(\beta)[1 - \gamma_1(\beta)\cos\theta]\right\} \sin^2\theta, \tag{4.3}$$

$$\lambda_2(\theta) = \frac{1}{4}\gamma(\beta)\left\{1 + \frac{1}{8}\mathrm{Re}\,\gamma(\beta)[1 - \gamma_2(\beta)\cos\theta]\right\}\sin^2\theta, \ldots;$$

$$\gamma(\beta) = \frac{3\beta+2}{\beta+1}, \quad \gamma_1(\beta) = \frac{4\beta+5}{5\beta+5}, \quad \gamma_2(\beta) = \frac{5\beta+2}{3\beta+2}\gamma_1(\beta).$$

Для того чтобы свести исходную задачу к последовательному решению уравнений типа уравнения теплопроводности, введем новые переменные

$$\Psi = A(\tau) Y, \quad \tau = \tau(\theta) = \int_{\theta}^{\pi} \lambda_1(x) \sin x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2(\beta+1)}\left(\frac{2}{3} + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right) + \frac{\mathrm{Re}}{16}\frac{\gamma(\beta)}{\beta+1}\left(\frac{2}{3} + \cos\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^3\theta}{3} + \gamma_1(\beta)\frac{\sin^4\theta}{4}\right), \tag{4.4}$$

где $A(\tau) = \lambda_1(\theta(\tau))$, а функция $\theta(\tau)$ задается неявно второй формулой (4.4). Отметим, что при $\mathrm{Re} = 0$ переменные Ψ, τ совпадают с соответствующими переменными, введенными формулами (2.5) и (2.8).

Решение уравнения (1.1) с функцией тока (4.3) в диффузионном погранслое ищем в виде

$$c^{(d)}(\Psi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_n^{(d)}(\Psi, \tau). \tag{4.5}$$

Очевидно, нулевой член ряда (4.5) при $\mathrm{Re} = 0$ соответствует решению в области диффузионного погранслоя, полученному в § 1.

Переходя к переменным (4.4), из (1.1), (1.2), (4.3) после подстановки (4.5) с учетом (4.2) можно, приравняв нулю коэффициенты при ε^n, получить следующие уравнения и граничные условия для последовательного определения членов ряда (4.5):

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right) c_n^{(d)} = F_n\left(c_0^{(d)}(\Psi, \tau), \ldots, c_{n-1}^{(d)}(\Psi, \tau)\right) = f_n(\Psi, \tau),$$

$$\Psi = 0 \quad (\tau \neq 0), \quad c_n^{(d)} = 0; \quad \Psi \to \infty, \quad c_n^{(d)} \to \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\tau = 0 \quad (\Psi \neq 0), \quad c_n^{(d)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geqslant 1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Первое граничное условие (при $\Psi = 0$) есть условие поглощения, соответствующее первому условию в (1.3), второе (при $\Psi \to \infty$) и третье (при $\tau = 0$) получены так же, как в § 2, из условий сращивания решений в области диффузионного пограничного слоя и во внешней области.

Выражения для первых двух функций F_n имеют вид [41]

$$F_0 = 0, \quad F_1(c_0^{(d)}) = \frac{2}{A(\tau)}\left\{[1 - B(\tau)]\,\Psi\frac{\partial}{\partial\tau}\left[1 + \frac{1}{2}A(\tau)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{d\tau}\left(\frac{B(\tau)}{A(\tau)}\right)\Psi^2\frac{\partial}{\partial\Psi}\right\} c_0^{(d)}(\Psi, \tau) = f_1(\Psi, \tau), \tag{4.7}$$
$$A(\tau) = \lambda_1(\theta(\tau)), \quad B(\tau) = \lambda_2(\theta(\tau))\,[A(\tau)]^{-1}.$$

Решение задачи (4.6), (4.7) имеет вид

$$c_0^{(d)}(\Psi, \tau) = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

$$c_n^{(d)}(\Psi, \tau) = \int_0^\infty\int_0^\tau [G(\Psi, x, \tau - t) -$$
$$- G(\Psi, -x, \tau - t)]\, f_n(x, t)\, dt\, dx, \quad n \geqslant 1, \tag{4.8}$$
$$G(\Psi, x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(\Psi - x)^2}{4\tau}\right\},$$
$$f_1(x, t) = \frac{2}{A(t)\sqrt{\pi t}}\left\{1 + (B(t) - 1 + tA(t)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{dt}\left[\frac{B(t)}{A(t)}\right]\right)\frac{x^2}{2t}\right\}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Распределение концентрации в областях диффузионного следа $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) может быть получено мето-

дом, аналогичным использованному в §§ 3, 4. В каждой из этих областей оно ищется в виде асимптотического ряда, приведенного в начале этого параграфа. Уравнения и граничные условия для каждого члена соответствующих разложений получаются аналогично тому, как это делалось для диффузионного пограничного слоя. При этом соответствующие однородные уравнения для каждого члена разложения в исследуемой области будут совпадать с уравнением для нулевого приближения; правая часть уравнения будет зависеть от всех предыдущих членов данного разложения.

Приведем в нулевом приближении по ε окончательные выражения для распределения концентрации в области диффузионного погранслоя и в областях $W^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, когда функция тока имеет вид (4.1):

$$c_0^{(d)}(\Psi) = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad c_0^{(1)} = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau(0)}}\right),$$

$$c_0^{(2)}(r, \Psi_2) = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi\tau(0)}} [\Psi_2 + 2(r-1)], \tag{4.9}$$

$$c_0^{(3)}(Y, S) = \varepsilon^2 \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \left[(\beta+1)\left(1 + \frac{1}{8}\operatorname{Re}\gamma(\beta)\right)\right]^{-1/2} Y \times$$

$$\times \left\{\left[1 + \frac{1}{8}\operatorname{Re}\gamma(\beta)(1 - \gamma_1(\beta))\right] S^2 + 4(\beta+1)\right\},$$

$$\tau(0) = \frac{2}{3(\beta+1)}\left(1 + \frac{1}{8}\operatorname{Re}\gamma(\beta)\right),$$

$$\Psi_2 = \varepsilon^{-1}\Psi = \varepsilon^{-2}\psi, \quad S = \varepsilon^{-1}\theta.$$

Функция тока ψ, переменная Y и коэффициенты $\gamma(\beta)$, $\gamma_1(\beta)$ определены в (4.1), (4.3), а зависимость $\tau = \tau(\theta)$ дается второй формулой (4.4). Выражения (4.9) совпадают при $\operatorname{Re} = 0$ с полученными ранее в § 3.

§ 5. Локальный и полный диффузионные потоки вещества на поверхность капли. Число Шервуда

Одной из главных задач теории массообмена капли является определение локального (дифференциального) и полного (интегрального) диффузионных потоков растворенного в жидкости вещества на поверхность капли. В безразмерном виде эти величины определяются формулами

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1}, \quad I = \int_S j\, ds = 2\pi \int_0^\pi j(\theta) \sin\theta\, d\theta. \tag{5.1}$$

Здесь S — поверхность капли. Безразмерные j, I и размерные j^*, I^* потоки связаны так: $j = j^* a/(DC_\infty)$, $I = I^*/(DC_\infty a)$, где C_∞ — концентрация растворенного вещества вдали от капли. Локальный поток $j = j(\theta)$ зависит от угла θ и определяет интенсивность удельного (отнесенного к единице поверхности) массообмена капли с потоком в разных точках поверхности капли; интегральный поток I характеризует суммарный массообмен капли с потоком.

В приложениях обычно используется безразмерный коэффициент массообмена капли с потоком в форме числа Шервуда

$$\mathrm{Sh} = \frac{\alpha_c a}{D} = \frac{I}{4\pi}, \tag{5.2}$$

где α_c — коэффициент массообмена, a — радиус капли. Отметим, что при определении безразмерных чисел Рейнольдса, Пекле, Шервуда, Нуссельта и др. в качестве масштаба длины в литературе часто используется также диаметр капли $2a$.

Расчет диффузионных потоков по формулам (5.1) базируется на знании распределения концентрации в прилегающих к поверхности капли областях d и $W^{(3)}$ (см. рис. 1.1), которое определяется формулами (4.5), (4.8) и (4.9). На основании этих формул можно получить выражения для главных членов асимптотических разложений величин локальных диффузионных потоков в диффузионном пограничном слое и области задней критической точки. С точностью до членов порядка $\mathrm{Pe}^{-1/2}$ имеем [38, 41]

$$\begin{aligned}
j(\theta) &= \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1} = j_0(\theta) + \mathrm{Pe}^{-1/2} j_1(\theta), \\
j_0(\theta) &= \left[\frac{\mathrm{Pe}}{2\pi(\beta+1)}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{1}{8}\,\mathrm{Re}\,\gamma(\beta)(1-\gamma_1(\beta)\cos\theta)\right] \times \\
&\quad \times (1-\cos\theta)\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}\,\mathrm{Re}\,\gamma(\beta)\right)(2-\cos\theta) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}\,\mathrm{Re}\,\gamma(\beta)\,\gamma_1(\beta)(1-\cos\theta)^2\right]^{-1/2}, \qquad (5.3) \\
\mathrm{Pe}^{-1/2} j_1(\theta) &= \lambda_1(\theta) \int_0^\infty \int_0^\tau \Lambda(x, \tau - t)\, f_1(x, t)\, dt\, dx, \\
\Lambda(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right).
\end{aligned}$$

Функции $\tau = \tau(\theta)$, $\lambda_1(\theta)$, $f_1(x, t)$ и коэффициенты $\gamma(\beta)$, $\gamma_1(\beta)$ определены в формулах (4.3), (4.4), (4.8). Из выражения (5.3) следует, что $j \sim \mathrm{Pe}^{1/2}$.

При написании формул (5.3) учтено, что локальный диффузионный поток вблизи задней критической точки на два порядка (по параметру $\varepsilon = \mathrm{Pe}^{-1/2}$) меньше, чем в области передней критической точки. Это следует из анализа формулы (4.9) для распределения концентрации в области $W^{(3)}$. Из (4.9), в частности, получаем, что в задней критической точке ($\theta = 0$) локальный диффузионный поток достигает своего минимального значения и равен

$$j_{\min} = \left[\frac{6}{\pi}(\beta + 1)\right]^{1/2}\left(1 + \frac{1}{8}\,\mathrm{Re}\,\gamma(\beta)\right)^{-1/2}\mathrm{Pe}^{-1/2} + O(\mathrm{Pe}^{-1}).$$

При расчете интегрального диффузионного потока также ограничимся двумя членами асимптотического ряда. Из предшествующего следует, что вклад области задней критической точки в полный диффузионный поток порядка $\mathrm{Pe}^{-1/2}$, поэтому в указанном приближении формула для интегрального потока имеет вид

$$I = I_0 + \mathrm{Pe}^{-1/2} I_1, \quad I_0 = \int_S j_0\, ds, \quad I_1 = \int_S j_1\, ds. \tag{5.4}$$

С учетом конкретного вида функций $j_0(\theta)$ и $j_1(\theta)$ для величин I_0 и I_1 можно получить [38, 41]

$$I_0 = 8\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{\beta+1} + \frac{3\beta+2}{(\beta+1)^2}\,\frac{\mathrm{Re}}{8}\right]^{1/2}\mathrm{Pe}^{1/2},$$
$$\mathrm{Pe}^{-1/2} I_1 = \frac{8}{\tau(0)}\int_0^{\tau(0)} \frac{\sqrt{\tau[\tau(0)-\tau]}}{A(\tau)}\,[1 + B(\tau)]\,d\tau. \tag{5.5}$$

Функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ определены в формуле (4.7), величина $\tau(0)$ — в формуле (4.9).

Используя соотношения (4.3), (4.4), можно показать, что при $\mathrm{Re} = 0$ величина I_1 линейно зависит от отношения вязкостей капли и потока β. Поэтому удобно представить зависимость I_1 от параметров β и Re в виде

$$\mathrm{Pe}^{-1/2} I_1 = 2\pi\,[0{,}825 + 0{,}620\beta + 2\Phi(\beta, \mathrm{Re})]. \tag{5.6}$$

Все коэффициенты и функция $\Phi(\beta, \mathrm{Re})$ в этом выражении получены численно. Функция $\Phi(\beta, \mathrm{Re})$ представлена на рис. 1.2 (число в круглых скобках указывает величину $\Phi(\beta, 100)$). Видно, что величина Φ растет с ростом числа Рейнольдса, однако ее вклад в I_1 при $0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10$ не превышает 7%.

Воспользовавшись формулами (5.2), (5.5), (5.6), запишем выражение для числа Шервуда массообмена капли

с потоком при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса с точностью до членов порядка $\mathrm{Pe}^{-1/2}$:

$$\mathrm{Sh} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left[\frac{1}{\beta+1} + \frac{3\beta+2}{(\beta+1)^2}\frac{\mathrm{Re}}{8}\right]^{1/2}\mathrm{Pe}^{1/2} + \\ + 0{,}41\left(\frac{3}{4}\beta + 1\right) + \Phi(\beta, \mathrm{Re}). \quad (5.7)$$

При использовании приведенных выше результатов следует помнить, что они получены из решения записанного в приближении диффузионного пограничного слоя уравнения конвективной диффузии, в котором поле скоростей вблизи поверхности капли описывалось функцией тока (4.1), представленной в виде разложения (4.3). Относительная величина последовательных членов этого разложения существенно зависит от отношения вязкостей β. Так, при $\beta \to \infty$ (переход от капли к твердой частице) первый член разложения, линейный по $r - 1$, стремится к нулю и главным членом разложения становится второй член, квадратичный по $r - 1$.

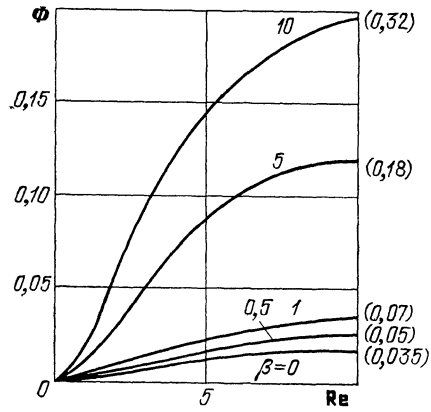


Рис. 1.2. Графики зависимости функции Φ от числа Рейнольдса Re при разных значениях отношения вязкостей капли и окружающей жидкости.

Из этого свойства функции (4.1) следует, что полученные выше результаты, в частности формулы (5.5), (5.7), оказываются справедливыми при не слишком больших значениях β. Ограничение на область допустимых значений β может быть определено из неравенства $I_0 \gg \mathrm{Pe}^{-1/2} I_1$ и записано в виде $\beta\,\mathrm{Pe}^{1/3} < O(1)$ при $\mathrm{Re} = O(1)$. Из сказанного следует также, что случаи массопереноса к твердой частице ($\beta = \infty$) и каплям жидкости с достаточно большой вязкостью нуждаются в специальном анализе.

Отметим, что в работе [39а] проведен расчет диффузии к поверхности твердой частицы, покрытой жидкой пленкой. Получено выражение для числа Шервуда, которое при радиусе частицы, стремящемся к нулю, соответствует капле.

§ 6. Диффузия в потоке с градиентом скорости

Осесимметричное деформационное течение. Рассмотрим установившуюся конвективную диффузию растворенного в потоке вещества к поверхности сферической капли в поле осесимметричного деформационного течения [29]. Как отмечено во введении, наряду с поступательным потоком такое течение является примером сравнительно простого движения вязкой жидкости, которое используется при модельном описании широкого класса реальных течений (течение с растяжением в теории турбулентности, поток вблизи оси диффузора или конфузора и т. п.). Аналогичная структура потока встречается и в некоторых прикладных задачах магнитной гидродинамики (см., например, [70]).

В прямоугольной декартовой системе координат, связанной с каплей, распределение скоростей невозмущенного (на больших расстояниях от капли) осесимметричного деформационного течения описывается линейной функцией координат и представляется в виде скалярного произведения постоянного тензора второго ранга $\boldsymbol{E}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$:

$$r \to \infty, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{r}; \quad \boldsymbol{E} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}E & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{Vmatrix}, \tag{6.1}$$

где величина E является мерой интенсивности осевого растяжения ($E > 0$) или сжатия ($E < 0$).

Функция тока поля скоростей обтекания капли, удовлетворяющая на бесконечности условию (6.1), в стоксовом приближении в безразмерной форме имеет вид [189]

$$\psi_E = \operatorname{sign} E g(r) \sin^2\theta \cos\theta,$$
$$g(r) = r^3 - \frac{5}{2}\frac{\beta + 2/5}{\beta + 1} + \frac{3}{2}\frac{\beta}{\beta + 1}\frac{1}{r^2}. \tag{6.2}$$

Здесь r, θ — сферические координаты, связанные с центром капли, причем угол θ отсчитывается от оси растяжения или сжатия, которая служит осью симметрии задачи ($\theta = \pi/2$ — плоскость симметрии), β — отношение вязкостей жидкостей внутри и вне капли; в качестве масштабов длины и скорости взяты радиус капли a и величина $^1/_2 \mid E \mid a$.

Поле течения (6.2) характеризуется двумя критическими точками $r = 1$, $\theta = 0$ и $r = 1$, $\theta = \pi$ и одной критической линией $r = 1$, $\theta = \pi/2$, в которых линии тока, со-

ответствующие значению $\psi_E = 0$, приходят на поверхность капли или уходят с нее. При $E > 0$ линия $r = 1$, $\theta = \pi/2$ будет критической линией натекания, при $E < 0$ — критической линией стекания, соответственно точки $r = 1$, $\theta = 0$ и $r = 1$, $\theta = \pi$ — критическими точками стекания и натекания (рис. 1.3).

Найдем распределение концентрации растворенного в жидкости вещества и диффузионный поток на каплю,

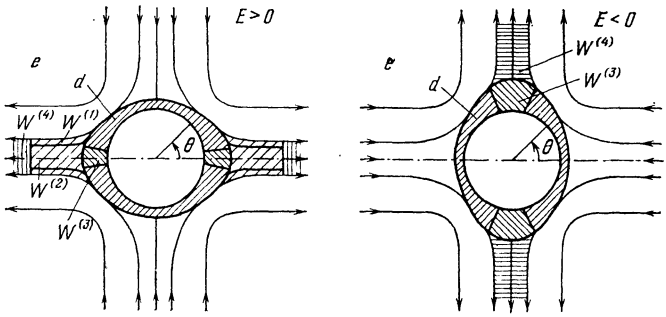


Рис. 1.3. Схема разбиения поля концентрации вне капли на области с различной структурой асимптотических решений для осесимметричного деформационного течения. Стрелками показаны линии тока, штрих-пунктиром — ось симметрии задачи.

находящуюся в поле течения (6.2), в предположении, что на поверхности происходит полное поглощение вещества, концентрация которого вдали от капли постоянна. Распределение концентрации в потоке определяется решением задачи (1.1), (1.3), (6.2). Будем считать, что число Пекле $\mathrm{Pe}_E = {}^1/_2 \mid E \mid a^2/D = \varepsilon^{-2}$ велико. С учетом наличия малого параметра $\varepsilon \ll 1$ приближенное решение задачи может быть построено методом, описанным в §§ 1—3.

Аналогичный асимптотический анализ показывает, что в рассматриваемом случае в поле течения также могут быть выделены характерные зоны с различными механизмами массообмена. Очевидно, расположение и конфигурация характерных зон будут существенно зависеть от знака параметра E, определяющего геометрию течения. Так, при $E > 0$ пограничный слой будет начинаться в окрестности критической линии, а при $E < 0$ — в окрестности критических точек. Соответственно, в первом случае диффузионный след будет располагаться вдоль

линий $r > 1$, $\theta = 0$ и $r > 1$, $\theta = \pi$, а во втором случае — вдоль плоскости $r > 1$, $\theta = \pi/2$ (рис. 1.3).

Можно показать, что, как и в случае поступательного потока, для приближенного расчета интенсивности массообмена капли достаточно рассмотреть перенос вещества в диффузионном пограничном слое, в то время как полное решение задачи о концентрации включает построение решения и в области диффузионного следа.

Рассмотрим сначала диффузионный пограничный слой. Введя растянутую координату $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$ и ограничиваясь первыми членами разложения, из уравнения (1.1), граничных условий (1.3) и выражения для функции тока (6.2) в диффузионном пограничном слое после преобразования Мизеса получим

$$-\frac{\partial c^{(d)}}{\partial \theta} = \frac{3}{\beta + 1} \operatorname{sign} E \sin^3\theta \cos\theta \frac{\partial^2 c^{(d)}}{\partial \Psi_E^2}, \qquad (6.3)$$

$$\Psi_E = 0, \quad c^{(d)} = 0; \quad \Psi_E \to \infty, \quad c^{(d)} \to 1,$$

где

$$\Psi_E = \varepsilon^{-1} |\psi_E| = \frac{3}{\beta + 1} Y \sin^2\theta |\cos\theta|.$$

Формулировка задачи (6.3) должна быть дополнена условием сращивания решения в диффузионном пограничном слое с решением во внешней области вблизи критической точки (линии) натекания. В данном случае это условие дает

$$\theta = \theta^-, \quad \Psi_E \neq 0, \quad c^{(d)} = 1, \qquad (6.4)$$

$$\theta^- = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } E > 0,$$

$$\theta^- = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ \pi, & \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \quad \text{при } E < 0.$$

Для решения задачи (6.3), (6.4) введем новую переменную

$$\tau = \frac{3}{\beta + 1} A(\theta), \qquad (6.5)$$

где

$$A(\theta) = \operatorname{sign} E \int_{\theta}^{\theta^-} \sin^3 x \cos x \, dx = \begin{cases} 1/4 - 1/4 \sin^4\theta & \text{при } E > 0, \\ 1/4 \sin^4\theta & \text{при } E < 0. \end{cases}$$

В переменных Ψ_E, τ уравнение (6.3) сводится к уравнению теплопроводности, и задача (6.3), (6.4) имеет авто-

модельное решение

$$c^{(d)} = \operatorname{erf}\left(\frac{|\Psi_E|}{2\sqrt{\tau}}\right) = \operatorname{erf}\left(\left(\frac{3\mathrm{Pe}_E}{\beta+1}\right)^{1/2}(r-1)\,\Theta(\theta)\right), \quad (6.6)$$

где

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \sin^2\theta\,(1+\sin^2\theta)^{-1/2} & \text{при } E>0, \\ |\cos\theta| & \text{при } E<0. \end{cases}$$

Формула (6.6) описывает распределение концентрации в диффузионном пограничном слое и позволяет найти дифференциальный и интегральный потоки вещества на поверхности капли, а также число Шервуда

$$j(\theta) = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}(\beta+1)^{-1/2}\Theta(\theta)\,\mathrm{Pe}_E^{1/2},$$
$$\mathrm{Sh} = \frac{I}{4\pi} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}(\beta+1)^{-1/2}\,\mathrm{Pe}_E^{1/2}, \quad (6.7)$$
$$\mathrm{Pe}_E = \frac{|^1/_2|E|a^2}{D}.$$

Видно, что значения числа Шервуда в случаях $E>0$ и $E<0$ одинаковы, несмотря на существенное различие локальных диффузионных потоков как по максимальным значениям, равным $j(\theta^-)$, так и по распределению по поверхности капли (максимальные значения достигаются на критической линии при $E>0$ или в критических точках при $E<0$, причем в первом случае величина $j(\theta^-)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем во втором). Это различие иллюстрируется рис. 1.4, где приведены нормированные распределения $j(\theta)/\mathrm{Sh}$ при $E>0$ и $E<0$ (сплошные линии), а также, для сравнения, в случае поступательного потока согласно формуле (5.3) при $\mathrm{Re}=0$ (штриховая линия).

Аналогично тому, как это делалось в случае поступательного потока, можно показать, что решение в диффузионном пограничном слое (6.6) остается справедливым в окрестности точек (линии) натекания и становится непригодным в окрестности точек (линии) стекания, координаты которых $r=1$, $\theta=\theta^+$, где

$$\theta^+ = \begin{cases} 0, & 0\leqslant\theta<\pi/2, \\ \pi, & \pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi, \end{cases} \quad \text{при } E>0,$$
$$\theta^+ = \pi/2 \text{ при } E<0.$$

Исследование диффузионного следа при $E>0$, когда точки стекания являются изолированными критическими

точками, вполне аналогично случаю обтекания капли поступательным потоком (см. § 3). Структура диффузионного следа и порядок характерных размеров соответствующих областей $W^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ остаются теми же

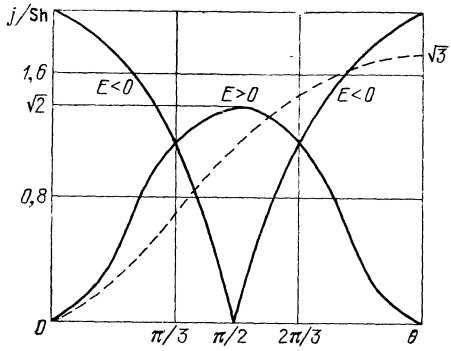


Рис. 1.4. Распределение локального диффузионного потока по поверхности капли в случае осесимметричного деформационного течения.

(рис. 1.3). Можно указать также сходное с (3.21) составное разложение, равномерно пригодное (по параметру ε) в областях d, $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$:

$$\tilde{c} = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\beta+1}{3}}\,\mathrm{Pe}\, g(r)\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\right) + \\ + 4\sqrt{\frac{\beta+1}{3\pi\,\mathrm{Pe}}}(r-1), \quad (6.8)$$

$$r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{1/2}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \quad E > 0.$$

Функция $g(r)$ определена формулой (6.2).

В случае $E < 0$, отличающемся от предыдущих благодаря наличию линии, а не точки стекания, граница области диффузионного следа, как и прежде, определяется равенством $\psi_E = O(\varepsilon)$. Однако диффузионный след состоит всего из двух областей — окрестности линии стекания $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \theta - \pi/2 \leqslant O(\varepsilon)\}$ и области смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1, \quad g(r)(\pi/2 - \theta) \leqslant O(\varepsilon)\}$; конвективно-погранслойная и внутренняя области отсутствуют (рис. 1.3).

В области $W^{(3)}$, введя переменные $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$, $S = \varepsilon^{-1}(\pi/2 - \theta)$ и выделяя из уравнения (1.1) с учетом (6.2) главные члены разложения по малому параметру ε,

получаем следующую краевую задачу для определения поля концентрации:

$$
\begin{gathered}
Y\frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y}-S\frac{\partial c^{(3)}}{\partial S}=\frac{\beta+1}{3}\left[\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial S^2}\right],\\
Y=0,\quad c^{(3)}=0;\quad S=0,\quad \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S}=0;\\
c^{(3)}(S\to\infty)=c^{(d)}\left(\theta\to\frac{\pi}{2}\right)\to 2\varepsilon\sqrt{\frac{3}{\pi(\beta+1)}}\,YS,\\
Y\to\infty,\quad \left[\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2}\Big/\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial S^2}\right]\to 0.
\end{gathered}
\tag{6.9}
$$

Второе граничное условие (при $S = 0$) есть условие симметрии относительно плоскости $\theta = \pi/2$, третье получено из условия сращивания с решением в диффузионном пограничном слое (6.6), четвертое вытекает из условия сращивания с решением в примыкающей к $W^{(3)}$ области смешения $W^{(4)}$, где переносом по нормали к поверхности капли можно пренебречь по сравнению с тангенциальным переносом (соответствующее уравнение см. ниже).

Вид третьего граничного условия показывает, что решение задачи (6.9) следует искать в форме

$$
c^{(3)}(Y, S)=2\varepsilon\sqrt{\frac{3}{\pi(\beta+1)}}\,YF(S).
$$

Для определения функции F имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение и граничные условия:

$$
\begin{gathered}
F''_{SS}+\frac{3}{\beta+1}SF'_S-\frac{3}{\beta+1}F=0,\\
S=0,\quad F'_S=0;\quad S\to\infty,\ F\to S.
\end{gathered}
$$

Это уравнение имеет частное решение $F = S$, поэтому легко найти и его общее решение. Окончательно для распределения концентрации в области $W^{(3)}$ получим [76]

$$
\begin{gathered}
c^{(3)}(Y, S)=\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{\pi}YG\left(\sqrt{\frac{3}{\beta+1}}\,S\right);\\
G(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+x\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2\right)d\tau.
\end{gathered}
\tag{6.10}
$$

Видно, что в плоскости симметрии ($S = 0$) концентрация не зависит от вязкости капли и растет линейно с рас-

стоянием от ее поверхности. Для локального диффузионного потока в окрестности линии стекания имеем

$$j(S)=\varepsilon^{-1}\frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y}\Big|_{Y=0}=j(0)G\left(\sqrt{\frac{3}{\beta+1}}\,S\right),\qquad j(0)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \tag{6.11}$$

Локальный диффузионный поток минимален в плоскости симметрии ($S=0$) и увеличивается с ростом S по закону, который быстро (экспоненциально) становится линейным по S. Как и прежде, вклад области $W^{(3)}$ в полный диффузионный поток на поверхность капли отличен от нуля лишь в третьем члене разложения по параметру ε.

Распределение концентрации в области $W^{(4)}:\{O(\varepsilon)\leqslant \leqslant r-1,\ g(r)(\theta-\pi/2)\leqslant O(\varepsilon)\}$, где существен только тангенциальный перенос вещества к поверхности капли, а нормальным переносом можно пренебречь, определяется выражением

$$c^{(4)}(|\Psi_E|,\ h(r))=\frac{1}{\sqrt{\pi h(r)}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Psi_E^2+z^2}{4h(r)}\right)\times$$
$$\times\ \mathrm{ch}\left(\frac{|\Psi_E|z}{2h(r)}\right)\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\beta+1}{3}}\,z\right)dz,$$

где $h(r)=\int_1^r g(x)\,dx$.

Анализ диффузионного следа при $E<0$ показывает, что с ростом расстояния от поверхности капли в окрестности плоскости, проходящей через линию стекания, концентрация значительно быстрее приближается к невозмущенному значению, чем в окрестности выходящей из задней критической точки линии тока в случае поступательного потока (см. § 3).

Поступательно-сдвиговый поток [40, 138]. В качестве обобщения полученных выше результатов представляет интерес задача о диффузии вещества к поверхности капли, обтекаемой поступательно-сдвиговым потоком, когда поле течения на больших расстояниях от капли представляет собой суперпозицию поступательного потока со скоростью U_∞ и осесимметричного деформационного течения, характеризуемого интенсивностью осевого растяжения (сжатия) E, причем поступательный поток направлен вдоль оси деформационного течения. В этом случае в прямоугольной декартовой системе координат, связанной

с каплей, поле скоростей вдали от капли имеет вид

$$r \to \infty, \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) = \\ = (-{}^1/_2 Ex_1, \quad -{}^1/_2 Ex_2, \quad U_\infty + Ex_3). \quad (6.12)$$

В стоксовом приближении в сферической системе координат функция тока обтекания капли потоком (6.12) будет равна сумме функций тока (1.2) и (6.2), соответствующих обтеканию капли каждым из составляющих течений

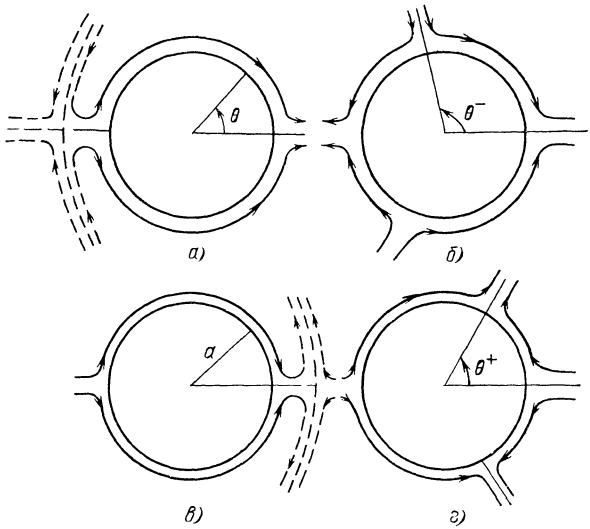


Рис. 1.5. Схема линий тока течения, представляющего собой суперпозицию поступательного и осесимметричного деформационного течений.

в отдельности (напомним, что при записи (1.2) и (6.2) приняты разные масштабы скорости). Выбрав в качестве масштабов длины и скорости величины a и U_∞, безразмерную функцию тока для поступательно-сдвигового потока можно вблизи поверхности капли представить в виде

$$\psi = \frac{1}{2(\beta+1)}(r-1)(1+\omega\cos\theta)\sin^2\theta + O((r-1)^2). \quad (6.13)$$

Безразмерный параметр $\omega = 3EaU_\infty^{-1}$ характеризует относительную интенсивность деформационного течения. В зависимости от величины этого параметра возможны четыре типа обтекания капли; линии тока для каждого типа течения схематически показаны на рис. 1.5.

Переход от одного типа обтекания к другому определяется неравенствами (в скобках приведены угловые координаты точек или линий натекания (θ^-) и стекания (θ^+)):

а) $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ $(\theta^- = \pi,\ \theta^+ = 0)$;

б) $\omega \geqslant 1$ $(\theta^- = \arccos(-1/\omega),\ \theta_1^+ = 0,\ \theta_2^+ = \pi)$;

в) $-1 \leqslant \omega \leqslant 0$ $(\theta^- = \pi,\ \theta^+ = 0)$;

г) $\omega \leqslant -1$ $(\theta_1^- = 0,\ \theta_2^- = \pi,\ \theta^+ = \arccos(-1/\omega))$.

В этом случае задача о массообмене капли с потоком при больших числах Пекле: $\max(\mathrm{Pe}, \mathrm{Pe}_E) \gg 1$ ($\mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1}$, $\mathrm{Pe}_E = {}^1/_2 \mid E \mid a^2 D^{-1}$) в предположении о полном поглощении вещества на поверхности капли также может быть исследована асимптотическим методом, аналогичным изложенному. По сравнению с рассмотренными выше случаями конфигурация характерных зон с различными механизмами массообмена будет существенно более сложной, в частности, форма диффузионного пограничного слоя будет зависеть от типа обтекания.

Не приводя полного анализа задачи, дадим здесь лишь выражения для главных членов разложений величины локального потока вещества на поверхность капли и числа Шервуда.

Для случаев обтекания а) и в) распределение диффузионного потока на поверхности капли имеет вид

$$j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta + 1)^{-1/2} \mathrm{Pe}^{1/2} \frac{(1 - \cos\theta)(1 + \omega\cos\theta)}{[(2 - \cos\theta)/3 - \omega(1 - \cos\theta)^2/4]^{1/2}}. \tag{6.14}$$

В случае б) распределение диффузионного потока на передней и задней частях поверхности капли описывается формулой

$$j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta + 1)^{-1/2} \mathrm{Pe}^{1/2} \times \\ \times \frac{\omega^{3/2} \sin^2\theta}{[\omega^2(2 - \cos^2\theta)/4 - (1 - 2\omega\cos\theta)/12]^{1/2}}. \tag{6.15}$$

В случае г) распределение диффузионного потока на передней и задней частях поверхности капли соответственно имеет вид

$$j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta + 1)^{-1/2} \mathrm{Pe}^{1/2} \times \\ \times \frac{(1 - \cos\theta)(1 - \mid\omega\mid\cos\theta)}{([2 - \cos\theta)/3 + \mid\omega\mid(1 - \cos\theta)^2/4]^{1/2}}, \quad \theta^+ < \theta \leqslant \pi, \tag{6.16}$$

$$j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\beta+1)^{-1/2}\,\mathrm{Pe}^{1/2} \times$$

$$\times \frac{(1+\cos\theta)(|\omega|\cos\theta - 1)}{[-(2+\cos\theta)/3 + |\omega|(1+\cos\theta)^2/4]^{1/2}}, \quad 0 < \theta < \theta^+, \qquad (6.17)$$

где $\theta^+ = \arccos(1/|\omega|)$.

Используя формулы (6.14) — (6.17), после интегрирования по поверхности капли для числа Шервуда можно получить выражения

$$\mathrm{Sh} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}(\beta+1)^{-1/2}\,\mathrm{Pe}^{1/2} \quad \text{при} \quad |\omega| \leqslant 1; \qquad (6.18)$$

$$\mathrm{Sh} = \sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left[\left(1+\frac{1}{|\omega|}\right)^{3/2}\left(|\omega| - \frac{1}{3}\right)^{1/2} + \left(1-\frac{1}{|\omega|}\right)^{3/2}\left(|\omega| + \frac{1}{3}\right)^{1/2}\right](\beta+1)^{-1/2}\,\mathrm{Pe}^{1/2} \quad \text{при} \quad |\omega| \geqslant 1. \qquad (6.19)$$

Видно, что при изменении величины ω число Шервуда при $|\omega| \leqslant 1$ остается постоянным, сохраняя значение, равное числу Шервуда в случае однородного поступательного потока, и растет с ростом $|\omega|$ при $|\omega| > 1$. Соответствующая зависимость показана на рис. 1.6 сплошной линией.

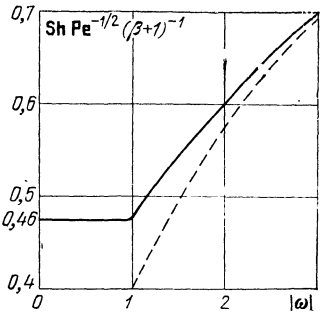


Рис. 1.6. Зависимость среднего числа Шервуда для капли от относительной интенсивности деформационного и поступательного течений.

В предельном случае деформационного течения ($\omega \gg 1$) формула (6.19) согласуется с полученным ранее выражением (6.7), которому отвечает штриховая линия на рис. 1.6. Сопоставление зависимостей (6.19) и (6.7) показывает, что уже при $|\omega| > 3$ влиянием скорости поступательного потока на диффузию к капле в условиях обтекания поступательно-сдвиговым потоком практически можно пренебречь (с ошибкой менее 1,3%). Таким образом, совместное влияние поступательного и деформационного течений на интенсивность массообмена (величину числа Шервуда) следует учитывать лишь при $^1/_3 U_\infty < |E|\, a < U_\infty$.

Глава 2

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КАПЕЛЬ И ИХ ДИФФУЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА МАССООБМЕН С ПОТОКОМ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

Анализ процесса массообмена капли с потоком в гл. 1 был основан на ряде упрощающих предположений, в том числе на предположении о наличии в потоке только одной частицы и ее сферической форме. В реальных ситуациях эти предположения далеко не всегда отражают условия межфазного массообмена в дисперсной системе. Так, при барботаже форма газовых пузырей может существенно отличаться от сферической. При наличии в потоке многих частиц на массообмен отдельной частицы могут влиять соседние частицы, присутствие которых возмущает не только поле скоростей жидкости, но и поле концентрации растворенного вещества (гидродинамическое и диффузионное взаимодействие частиц). Описанный в гл. 1 асимптотический метод диффузионного пограничного слоя позволяет наряду с задачей о массообмене уединенной сферической капли рассматривать другие задачи, например о массообмене капли несферической формы и массообмене капли с потоком с учетом ее диффузионного взаимодействия с соседними каплями. Таким задачам посвящена данная глава.

§ 1. Диффузия к капле (пузырю) в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой несжимаемой жидкостью. Общие соотношения

Определим диффузионный приток растворенного в потоке вещества к поверхности деформированной капли, предполагая, что обтекание стационарное, ламинарное; на поверхности капли происходит полное поглощение растворенного компонента, капля и поток обладают осевой симметрией.

Перейдем к безразмерным переменным, введя масштаб длины a — характерный размер капли (в качестве последнего обычно выбирают радиус эквивалентной по объему сферы a_e) и масштаб скорости U — характерную скорость

(вдали от капли); концентрацию отнесем к ее значению на бесконечности.

Используем ортогональную криволинейную систему безразмерных координат ξ, η, λ, связанную с каплей. Координата η направлена вдоль поверхности капли, а ξ — по внешней нормали к ней; при этом поверхность капли задается фиксированным значением координаты ξ: $\xi = \xi_s$. Азимутальная координата λ меняется в пределах от 0 до 2π, причем в силу осевой симметрии азимутальная составляющая скорости и производные по λ от концентрации равны нулю. Обтекание капли считается ламинарным, без застойных зон (т. е. около капли отсутствуют области с замкнутыми линиями тока).

Безразмерное уравнение стационарной диффузии и граничные условия в системе координат ξ, η, λ с учетом осевой симметрии запишем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} v_\xi \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} v_\eta \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\xi\xi}} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\eta\eta}} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right) \right\} \qquad (1.1)$$

$$\left(v_\xi = -\sqrt{\frac{g_{\xi\xi}}{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \sqrt{\frac{g_{\eta\eta}}{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad v_\lambda = 0 \right),$$

$$\xi = \xi_s, \; c = 0; \quad \xi \to \infty, \; c \to 1.$$

Здесь $g_{\xi\xi}$, $g_{\eta\eta}$, $g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора, $g = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\lambda\lambda}$; $\varepsilon^{-2} = \mathrm{Pe} = aUD^{-1}$, Pe — число Пекле, ψ — безразмерная функция тока.

Как следует из результатов гл. 1, при больших числах Пекле основной вклад в диффузионный интегральный поток на поверхность капли вносит тонкая (толщиной порядка ε) область диффузионного пограничного слоя, которую и будем рассматривать в дальнейшем.

В общем случае осесимметричного обтекания функцию тока вблизи поверхности капли можно представить в виде

$$\psi(\xi, \eta) = (\xi - \xi_s) f(\eta) + o(\xi - \xi_s). \qquad (1.2)$$

Отметим, что при обтекании вязкой жидкостью представление функции тока в виде разложения (1.2), содержащего в главном члене первую степень величины $\xi - \xi_s$, справедливо только для жидкой капли. В случае твердой частицы главный член такого разложения будет квадратичным по $\xi - \xi_s$ (а иногда может иметь и более высокий порядок; см. гл. 4). Это означает, что тангенциальная

скорость в диффузионном пограничном слое у поверхности капли в главном приближении имеет постоянное значение , равное скорости потока непосредственно на поверхности, в то время как в диффузионном пограничном слое у поверхности твердой частицы тангенциальная скорость

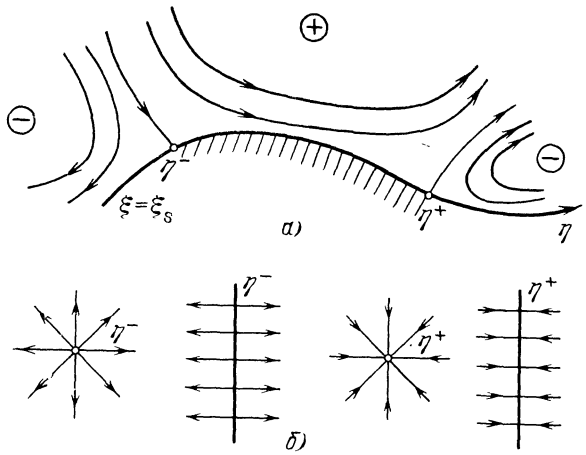


Рис. 2.1. *а*) Схема течения вблизи поверхности капли в окрестности критических точек или линий натекания (с координатой η^-) и стекания (с координатой η^+); стрелки показывают направление вектора скорости. *б*) Распределение тангенциальной компоненты скорости жидкости вблизи критических точек или линий поверхности тела.

в главном приближении зависит линейно (а иногда квадратично) от расстояния до поверхности, обращаясь в нуль на поверхности.

Рассмотрим подробнее геометрию течения вблизи капли. Нули функции $f(\eta)$ определяют η-координаты критических точек или линий на поверхности капли, причем в случае критических линий координатные поверхности $\eta = \eta_*$ ($f(\eta_*) = 0$) разделяют области, в которых главный член разложения (1.2) сохраняет знак. Эти критические точки и линии играют важную роль в теории диффузионного пограничного слоя. Они могут быть двух типов: в их малой окрестности нормальная компонента скорости жидкости направлена либо к поверхности капли (точки или линии «натекания» с координатами $\eta_1^-, \eta_2^-, \ldots$), либо от нее (точки или линии «стекания» с η-координатами $\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots$). Очевидно, что в силу закона сохранения массы тангенциальная компонента скорости жидкости на поверх-

ности капли v_η^s в окрестности точки или линии натекания (стекания) направлена от этой точки или линии (соответственно к ней), а сами точки или линии натекания и стекания должны чередоваться (рис. 2.1).

Отметим, что ввиду осевой симметрии задачи на поверхности капли (на оси симметрии) всегда имеются две изолированные критические точки. В потоке с достаточно существенным градиентом скорости между этими точками может лежать критическая линия (окружность в плоскости, нормальной к оси симметрии). Таким образом, в соответствии со сказанным выше возможны следующие ситуации: 1) $\eta^- < \eta^+$; 2) $\eta_1^- < \eta^+ < \eta_2^-$; 3) $\eta_1^+ < \eta^- < \eta_2^+$ (здесь и далее нижний индекс опускается, если имеется только одна точка или линия данного типа). Все эти случаи встречались при анализе модельных течений, рассмотренных в гл. 1, где $\theta = \pi - \eta$. Случаи большего числа критических точек или линий на односвязной поверхности частицы исследуются аналогично.

Рассмотрим случай двух критических точек (случай 1)). Тогда $\xi \geqslant \xi_s$, $\eta^- \leqslant \eta \leqslant \eta^+$; $\psi \geqslant 0$.

Используя для функции тока представление (1.2), перейдем в диффузионном пограничном слое к переменным Мизеса Ψ, η, где $\Psi = \varepsilon^{-1}\psi$. С точностью до $O(\varepsilon)$ для левой части уравнения (1.1) получаем

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)c = \frac{1}{\sqrt{g^s}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{f(\eta)}{\sqrt{g^s}}\frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{v_\eta^s}{\sqrt{g_{\eta\eta}^s}}\frac{\partial c}{\partial\eta},$$

где

$$g_{\xi\xi}^s = O(1), \quad g_{\eta\eta}^s = O(1), \quad g_{\lambda\lambda}^s = O(1).$$

Здесь и далее индекс s означает, что соответствующая величина берется на поверхности капли, т. е. при $\xi = \xi_s$.

Преобразуем правую часть уравнения (1.2), оставляя старшие члены разложения по степеням ε и используя замену переменной

$$\tau = \tau(\eta, \eta^-) = \int_{\eta^-}^{\eta} f(\eta)\Lambda(\eta)\,d\eta \equiv$$

$$\equiv \int_{\eta^-}^{\eta} v_\eta^s(\eta)\, g_{\lambda\lambda}^s(\eta)\sqrt{g_{\eta\eta}^s(\eta)}\,d\eta, \qquad \Lambda(\eta) = \frac{\sqrt{g^s}}{g_{\xi\xi}^s}. \qquad (1.3)$$

В результате, как и в гл. 1, сведем исходную задачу о диффузии (1.1) к следующей краевой задаче для

диффузионного пограничного слоя:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2}; \quad c(0, \tau) = 0, \quad c(\infty, \tau) = 1, \quad c(\Psi, 0) = 1, \quad (1.4)$$

где первое граничное условие соответствует условию полного поглощения вещества на поверхности капли, второе и третье — условиям сращивания решения в диффузионном пограничном слое с решением во внешней области.

Задача (1.4) имеет автомодельное решение

$$c(\Psi, \tau) = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (1.5)$$

которое вместе с соотношениями (1.2), (1.3) определяет поле концентраций в области диффузионного пограничного слоя

$$d \cdot \{0 \leqslant \xi - \xi_s \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2}), \quad \eta^- \leqslant \eta, \quad \eta^+ - \eta \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2})\}$$

в случае, когда на поверхности капли имеются только две критические точки.

Если помимо двух критических точек есть еще и критическая линия (случаи 2) и 3)), функция $f(\eta)$, а следовательно, $\Psi(\xi, \eta)$ и $\tau(\eta)$ могут менять знак при переходе через критическую линию. Решение (1.5) в диффузионном

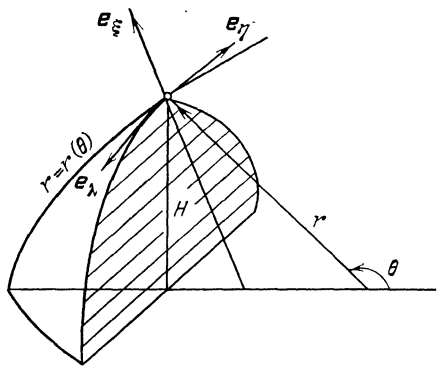


Рис. 2.2. Система координат, связанная с поверхностью капли.

пограничном слое при этом сохраняется, но под Ψ и τ подразумеваются модули соответствующих величин.

Полученные выше формулы записаны в произвольной ортогональной криволинейной системе координат при учете лишь осевой симметрии. В приложениях часто оказывается удобным использование сферической системы

координат. Приведем соответствующее выражение для переменной τ.

Пусть в сферической системе координат r, θ, φ капля имеет форму $r = R(\theta)$ и поле скоростей жидкости вне капли определяется вектором $v = \{v_r, v_\theta, 0\}$ (рис. 2.2). С учетом соотношений (которые для простоты приведены в случае естественного задания метрики, т. е. при $g_{\eta\eta} \equiv 1$)

$$g^s_{\eta\eta} = H^2 = R^2 \sin\theta, \quad v^s_\eta = \frac{v^s_\theta R(\theta) + v^s_r R'}{\sqrt{R^2(\theta) + R'^2}},$$

$$d\eta = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2}\, d\theta$$

из формул (1.3) получаем

$$\tau(\theta, \theta^-) = \int_{\theta^-}^{\theta} R^2(\theta) \sin\theta \,[v^s_\theta R(\theta) + v^s_r R']\, d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_{\theta^-}^{\theta} R^2 \sin\theta \sqrt{R^2(\theta) + R'^2}\, v^s_\eta(\theta)\, d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_{\theta^-}^{\theta} \sin\theta \,[R^2(\theta) + R'^2] \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R(\theta)} d\theta. \qquad (1.6)$$

Здесь для удобства приведено несколько видов записи переменной τ; θ^- — угол, соответствующий точке (линии) натекания, $R' = dR/d\theta$.

Формула (1.6) будет использована далее в § 3 при решении задачи о диффузии к слабодеформированной капле.

Безразмерный локальный диффузионный поток в общем случае определяется производной по нормали от концентрации на поверхности капли и имеет вид

$$j(\eta) = \left(\frac{\partial c}{\partial n}\right)_{\xi=\xi_s} = \frac{1}{\sqrt{g^s_{\xi\xi}}} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_s} = \frac{\mathrm{Pe}^{1/2} f(\eta)}{\sqrt{\pi g^s_{\xi\xi}(\eta)\, \tau(\eta, \eta^-)}}. \qquad (1.7)$$

В случае 1) для безразмерного полного потока на поверхность капли $S = \{\xi = \xi_s,\ \eta^- \leqslant \eta \leqslant \eta^+\}$ имеем

$$I(S) = \iint_S j\, ds = 2\pi \int_{\eta^-}^{\eta^+} j(\eta) \Lambda(\eta) \sqrt{g^s_{\xi\xi}(\eta)}\, d\eta =$$

$$= 2\sqrt{\pi\, \mathrm{Pe}} \int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{f(\eta)}{\sqrt{\tau(\eta, \eta^-)}} \Lambda(\eta)\, d\eta = 4\sqrt{\pi\, \mathrm{Pe}} \sqrt{\tau(\eta^+, \eta^-)}. \qquad (1.8)$$

В случае 2), когда на поверхности капли имеется линия стекания, последняя разбивает область течения вблизи поверхности капли на два участка: $\eta_1^- \leqslant \eta \leqslant \eta^+$ и $\eta^+ \leqslant \eta \leqslant \eta_2^-$. Используя на каждом из участков вышеуказанные преобразования, можно определить локальный и полный диффузионные потоки на всю каплю. Для полного диффузионного потока на всю поверхность капли имеем

$$I = 4\sqrt{\pi\,\mathrm{Pe}}\,[\sqrt{|\tau(\eta^+, \eta_1^-)|} + \sqrt{|\tau(\eta^+, \eta_2^-)|}]. \quad (1.9)$$

В случае 3) имеем, очевидно, аналогичное выражение, меняя местами индексы плюс и минус.

Среднее число Шервуда определяется по формуле

$$\mathrm{Sh} = IS_e^{-1}, \quad (1.10)$$

где S_e — безразмерная площадь поверхности сферы (эквивалентного радиуса), объем которой совпадает с объемом исходного тела. Такое определение среднего числа Шервуда для проведения численных расчетов удобнее, чем аналогичное определение через полную поверхность тела S.

Если за масштаб длины выбран радиус эквивалентной сферы, то имеет место равенство $S_e = 4\pi$; для сферы оба определения (через S_e и S) совпадают и соответствуют числу Шервуда, определенному по ее радиусу.

Следует отметить, что полученные здесь результаты распространяются на все случаи, когда для функции тока справедливо представление (1.1) (линейная зависимость функции тока вблизи частицы от нормальной координаты), т. е. наряду с рассмотренным случаем вязкого обтекания жидкой частицы они применимы, например, в случаях невязкого или фильтрационного обтекания твердых частиц (см. гл. 3).

Легко показать также, что результаты этого параграфа остаются справедливыми и в плоском случае. Считая, что в ортогональных координатах ξ и η, связанных с поверхностью капли, уравнение $\xi = \xi_s = \mathrm{const}$ по-прежнему задает поверхность капли, для полного диффузионного потока на единицу длины жидкого цилиндра имеем

$$I = 2\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\sum_{i=1}^{k-1}\left|\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}}\sqrt{g_{\eta\eta}^s}\,v_\eta^s\,d\tau\right|^{1/2}. \quad (1.11)$$

Здесь учтено, что $g_{\lambda\lambda} = 1$, $\lambda \in [0, 1]$; значения $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \leqslant \eta_k$ соответствуют критическим точкам поверхности капли.

Формула (1.9) и ее обобщение на случай бо́льшего числа критических точек, а также формула (1.11), удобны для практических расчетов. Видно, что для определения полного диффузионного потока на поверхность капли достаточно найти все корни $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \leqslant \eta_k$ уравнения $f(\eta) = 0$, вычислить по формуле (1.5) значения $\tau(\eta_2, \eta_1)$, $\tau(\eta_3, \eta_2)$, ... и выполнить суммирование согласно формуле (1.9) или (1.11). При этом не нужно определять соответствие корней линиям (точкам) натекания и стекания. Последнее требуется только для вычисления локального потока (1.7) и поля концентрации.

В заключение сформулируем три полезных следствия формул (1.5), (1.9), (1.11).

Следствие 1. При изменении направления скорости жидкости на обратное, что соответствует замене ψ на $-\psi$, величина полного диффузионного потока на каплю не меняется, т. е. $I(f) = I(-f)$.

Следствие 2. Если форма тела симметрична относительно средней линии $\eta^0 = {}^1/_2 \mid \eta_k - \eta_1 \mid$, где η_1 и η_k — минимальный и максимальный корни уравнения $f(\eta) = 0$, определяющие изолированные особые точки натекания или стекания (лежащие на оси симметрии), то полные диффузионные потоки, соответствующие функциям

$$f(\eta) \quad \text{и} \quad \varphi(\eta) = f(\mid \eta_k - \eta_1 \mid - \eta),$$

будут совпадать, т. е.

$$I(f) = I(\varphi).$$

В частности, для сферической капли в сдвиговом и поступательно-сдвиговом потоке этот вывод был получен в гл. 1.

Следствие 3. Пусть поле обтекания капли имеет только две критические точки η^- и η^+ на поверхности капли, а ее форма симметрична относительно средней линии $\eta^0 = {}^1/_2 \mid \eta^+ - \eta^- \mid$. Если при этом функция $f = f(\eta)$ зависит от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таким образом, что сумма $f(\eta) + f(\mid \eta^+ - \eta^- \mid - \eta)$ от этих параметров не зависит, то полный диффузионный поток также не зависит от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Например, среднее число Шервуда для сферической капли в поступательно-сдвиговом потоке в случаях *a* и *b* (гл. 1, § 6) не зависит от параметра ω (отрезок прямой линии на рис. 1.6).

§ 2. Диффузионный поток на деформированную каплю при малых числах Рейнольдса и Вебера

На одном важном примере покажем, как применяется метод, описанный в § 1, для расчета массообмена несферической капли с потоком. Рассмотрим, используя результаты работы [186], диффузию растворенного в жидкости вещества к поверхности деформированной капли при ее медленном движении в вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = a_e U_\infty \nu^{-1}$ и Вебера $\mathrm{We} = a_e \rho U_\infty^2 \sigma^{-1}$ (a_e — радиус сферы, объем которой равен объему капли, U_∞ — установившаяся скорость капли, ρ, ν — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости вне капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения).

Задача о медленном прямолинейном движении капли или пузыря с постоянной скоростью в покоящейся жидкости исследовалась в [192] методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Рейнольдса. Было показано, что при малых числах Вебера ($\mathrm{We} = O(\mathrm{Re}^{-2})$) граничное условие для нормальных напряжений на поверхности капли выполняется лишь при учете малых деформаций ее поверхности. Уравнение деформированной поверхности в сферической системе координат r, θ, φ, связанной с центром капли (r — безразмерная радиальная координата, a_e — масштаб длины), записывается в виде

$$r = R(\theta) = 1 - \delta\,\mathrm{We}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, \qquad (2.1)$$

где

$$\delta = \frac{1}{4(\beta+1)^3}\left\{\left(\frac{81}{80}\beta^3 + \frac{57}{20}\beta^2 + \frac{103}{40}\beta + \frac{3}{4}\right) - \frac{\gamma-1}{12}(\beta+1)\right\},$$

γ и β — отношение плотностей и вязкостей капли и окружающей ее жидкости соответственно.

Согласно соотношению (2.1) при малых числах Вебера капля близка по форме к сплюснутому в направлении движения эллипсоиду вращения, отношение большой и малой полуосей которого зависит от числа Вебера следующим образом:

$$\chi = 1 + \frac{3}{2}\delta\,\mathrm{We}.$$

Безразмерная функция тока, определяющая поле скоростей жидкости вблизи деформированной капли с точ-

ностью до o (We), имеет вид [192]

$$\psi = -\frac{1}{2}\left[2r^2 - \frac{3\beta+2}{\beta+1}r + \frac{\beta}{\beta+1}\frac{1}{r}\right]Q_1(\mu) + \\ + \frac{\delta\, We}{10(\beta+1)^2}\left[(3\beta^2-\beta+3)r - 3(\beta^2-\beta+2)\frac{1}{r}\right]Q_1(\mu) - \\ - \frac{6\delta\, We}{5(\beta+1)}\left[\left(\frac{3\beta}{2}+\frac{9}{7}\right)\frac{1}{r} - \left(\frac{3\beta}{2}+\frac{2}{7}\right)\frac{1}{r^3}\right]Q_3(\mu), \quad (2.2)$$

$$\mu = \cos\theta, \quad Q_1(\mu) = \frac{1}{2}(\mu^2-1), \quad Q_3(\mu) = \frac{1}{8}(\mu^2-1)(5\mu^2-1).$$

Определим теперь полный диффузионный приток растворенного в жидкости вещества на реагирующую каплю, поверхность которой описывается уравнением (2.1). Для того чтобы использовать общие соотношения § 1, достаточно при помощи выражения (2.2) определить тангенциальную компоненту скорости жидкости на поверхности капли.

Учитывая выражение для скорости на поверхности капли (см. формулу, предшествующую (1.6)) и пренебрегая членами порядка We^2 и выше, получаем

$$v_\eta^s = v_\theta^s + v_r^s\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d}{d\mu}[\delta\, We\, P_2(\mu)] = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\left\{-\frac{Q_1(\mu)}{\beta+1} + \delta\, We\left[\frac{Q_1(\mu)\,P_2(\mu)}{\beta+1}(3\beta+1) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{Q_1(\mu)}{5(\beta+1)^2}(3\beta^2+2\beta+7) - \frac{6Q_3(\mu)}{35(\beta+1)}(21\beta-3)\right]\right\}, \quad (2.3)$$

где $P_2(\mu) = {}^1/_2\,(3\mu^2-1)$.

Воспользовавшись второй формулой в (1.6), пренебрегая членами порядка We^2, из (1.9), (1.10) получаем следующее выражение для среднего числа Шервуда:

$$Sh = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}(\beta+1)^{-1/2}\left[1 + \delta\, We\,\frac{3}{5}\,\frac{\beta-1}{\beta+1}\right]Pe^{1/2} = \\ = \left[1 + \delta\, We\,\frac{3}{5}\,\frac{\beta-1}{\beta+1}\right]Sh_e, \quad Sh_e = \left[\frac{2Pe}{3\pi(\beta+1)}\right]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Величина Sh_e соответствует находящейся в аналогичных условиях сферической капле эквивалентного радиуса.

Из выражения (2.4) видно, что деформация капли малой вязкости, т. е. при значениях параметра $\beta \leqslant 1$ (здесь принято, что $\delta(\beta, \gamma) \geqslant 0$), приводит к уменьшению полного диффузионного потока на ее поверхность, а для капли большой вязкости (при $\beta > 1$) — к увеличению пото-

ка. В частности, для газового пузыря ($\beta = \gamma = 0$) имеем

$$\mathrm{Sh} = \left(1 - \frac{1}{8}\,\mathrm{We}\right)\mathrm{Sh}_e. \qquad (2.5)$$

§ 3. Диффузионный поток на деформированный газовый пузырь при больших числах Рейнольдса

Рассмотрим теперь другой предельный случай — диффузию к пузырю, всплывающему в жидкости при больших числах Рейнольдса [35]. Известно, что форма пузыря существенно зависит от величины числа Вебера. При малых We форма пузыря близка к сферической; при больших We он принимает вид сферического сегмента, что связано также с явлениями отрыва в кормовой части пузыря.

Значения чисел Вебера порядка единицы составляют важную для практики промежуточную область изменения We, когда пузырь, будучи существенно деформированным, сохраняет симметрию относительно своего миделева сечения. Для таких значений We форма пузыря хорошо аппроксимируется сплюснутым в направлении потока эллипсоидом вращения

$$(x^2 + y^2)\,\chi^{-2} + z^2 = a^2, \qquad \chi \geqslant 1. \qquad (3.1)$$

Здесь a — малая полуось эллипсоида, x, y, z — размерные прямоугольные декартовы координаты, ось z направлена вдоль потока. При этом оказывается, что требование выполнения граничного условия для нормальных напряжений в передней и задней критических точках, а также вдоль границы миделева сечения пузыря приводит к следующей зависимости между числом Вебера We и отношением χ большой и малой полуоси эллипсоида [157]:

$$\mathrm{We} = 2\chi^{-4/3}\,(\chi^3 + \chi - 2)\quad[\chi^2\,\mathrm{arcsec}\;\chi - (\chi^2 - 1)^{1/2}]^2 \times \\ \times (\chi - 1)^{-3}.$$

Численные оценки показывают [157], что максимальное отклонение истинной кривизны от соответствующего значения для аппроксимирующего эллипсоида не превышает 10% при $\mathrm{We} \leqslant 1{,}4$ ($\chi \leqslant 2$) и 5% при $\mathrm{We} \leqslant 1$ ($\chi \leqslant 1{,}5$).

В соответствии с [35, 157] отметим, что при

$$\mathrm{Re} = a_e U_\infty \nu^{-1} \geqslant 0{,}55\,M^{-1/6} \qquad (M = g\rho^3\nu^4\sigma^{-3})$$

происходит отклонение формы пузыря от сферической более чем на 5% ($\chi \geqslant 1{,}05$) (Re — число Рейнольдса, g — ускорение поля внешних сил, M — безразмерный параметр,

зависящий лишь от свойств жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости).

При больших значениях M (например, для нефти $M = O(10^{-2})$) деформация пузыря становится существенной уже при малых числах Re (этот случай рассматривался в § 2), а при больших Re форма пузыря значительно отличается от эллипсоидальной.

Для рассматриваемого в этом параграфе случая малых M (например, для воды $M = O(10^{-10})$) деформацию необходимо принимать во внимание, начиная с $\mathrm{Re} = O(10^2)$. При таких значениях Re в свою очередь становятся существенными полученные Муром [157] поправки к полю скоростей потенциального обтекания пузыря.

Далее, как и в § 2, в качестве характерного размера длины выбирается радиус эквивалентной по объему сферы

$$a_e = a\chi^{2/3}. \tag{3.2}$$

В ортогональной системе безразмерных координат ξ, η, λ, связанной с исходными декартовыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned} x &= a_e\chi^{-2/3}\xi_s^{-1}[(1+\xi^2)(1-\eta^2)]^{1/2}\cos\lambda,\\ y &= a_e\chi^{-2/3}\xi_s^{-1}[(1+\xi^2)(1-\eta^2)]^{1/2}\sin\lambda,\\ z &= a_e\chi^{-2/3}\xi_s^{-1}\xi\eta,\ \xi_s = (\chi^2-1)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

поверхность пузыря задается уравнением $\xi = \xi_s = \mathrm{const}$, $-1 \leqslant \eta \leqslant +1$ (точкам натекания и стекания соответствуют $\eta^- = -1$, $\eta^+ = 1$); оно получается в результате подстановки соотношений (3.3) с учетом (3.2) в уравнение (3.1).

Для капельных жидкостей числа Шмидта велики (например, для воды $\nu/D \sim 10^3$), поэтому толщина диффузионного пограничного слоя $\delta_P \sim \mathrm{Pe}^{-1/2}$ значительно меньше толщины гидродинамического пограничного слоя $\delta_R \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ [60, 157], в котором существенны поправки к потенциальному обтеканию. Отсюда следует, что для определения параметров диффузионного пограничного слоя достаточно знать лишь распределение (безразмерных) скоростей на границе пузыря $v_\eta^s = v_\eta^s(\eta)$ (см. § 1). Оно имеет вид [157]

$$v_\eta^s = v_0(\eta) + \mathrm{Re}^{-1/2}\, v_1(\eta), \tag{3.4}$$

где

$$v_0(\eta) = \frac{p(\xi_s)}{1+\xi_s^2}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi_s^2+\eta^2}\right)^{1/2},$$

$$v_1(\eta) = \left[\frac{2}{3}\frac{p(\xi_s)}{\xi_s}\frac{\xi_s^2+\eta^2}{1-\eta^2}\right]^{1/2}\chi^{1/3}u(\xi_s,\eta),$$

$$p(\xi_s) = [\operatorname{arcctg}\xi_s - \xi_s(1+\xi_s^2)^{-1}]^{-1},$$

$$u(\xi_s,\eta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{\eta}\frac{\xi_s^2(1-t)^2}{(\xi_s^2+t^2)^2}\frac{dt}{\sqrt{x(\eta)-x(t)}},$$

$$x(t) = \frac{2}{9}(t+1)^2(2-t).$$

Для определения полного диффузионного потока на пузырь (см. § 1) должны быть использованы выражения для метрических коэффициентов на его поверхности $\xi = \xi_s$:

$$g^s_{\xi\xi} = \chi^{-4/3}\xi_s^{-2}\frac{\xi_s^2+\eta^2}{1+\xi_s^2}, \quad g^s_{\eta\eta} = \chi^{-4/3}\xi_s^{-2}\frac{\xi_s^2+\eta^2}{1-\eta^2},$$
$$g^s_{\lambda\lambda} = \chi^{-4/3}\xi_s^{-2}(1+\xi_s^2)(1-\eta^2). \tag{3.5}$$

Используя выражения (3.4), (3.5) и учитывая, что на поверхности пузыря имеются лишь две критические точки, соответствующие значениям $\eta^{\pm} = \pm 1$, полный диффузионный поток можно найти по формулам (1.5), (1.8). Для среднего числа Шервуда (1.10) в нулевом приближении, соответствующем потенциальному обтеканию пузыря ($\mathrm{Re} = \infty$), имеем

$$\mathrm{Sh}_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Omega(\chi)\,\chi^{-1/3}\,\mathrm{Pe}^{1/2} \quad (\mathrm{Pe} = a_e U_\infty D^{-1}), \tag{3.6}$$

где

$$\Omega(\chi) = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\chi^2-1)^{3/4}}{\chi^{2/3}}\left[\operatorname{arctg}(\chi^2-1)^{1/2} - \frac{(\chi^2-1)^{1/2}}{\chi^2}\right]^{-1/2}.$$

Из этой формулы видно, что $\Omega(\chi) \to 1$ при $\chi \to 1$, что соответствует сферическому пузырю [195].

Для вычисления поправок к полному потоку при конечных числах Рейнольдса в формуле (3.4) нужно учесть второй член в разложении для v^s_η. Отметим, что представление (3.4) становится непригодным при $1-\eta \leqslant \leqslant O(\mathrm{Re}^{-1/3})$. Поэтому локальный диффузионный поток (1.7) может быть вычислен с использованием (1.5), (3.4) лишь при меньших значениях η. Однако интегралы в (1.5), (1.7) сходятся, и можно показать [35], что вычисление

полного диффузионного потока по формуле (1.8) дает правильный результат с точностью до $O(\mathrm{Re}^{-1/2})$.

Как следует из (1.5), (1.8), (3.4), (3.5), выражение для среднего числа Шервуда имеет вид

$$\mathrm{Sh} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Omega(\chi)\,\lambda^{-1/3}\,[1 - \mathrm{Re}^{-1/2}\Omega_1(\chi)\,\chi^{1/3}]^{1/2}\,\mathrm{Pe}^{1/2}. \quad (3.7)$$

Здесь Ω_1 — функция отношения полуосей пузыря (или числа Вебера), которая определяет учитывающую влияние конечных чисел Рейнольдса поправку к полному потоку, рассчитанному для потенциального обтекания.

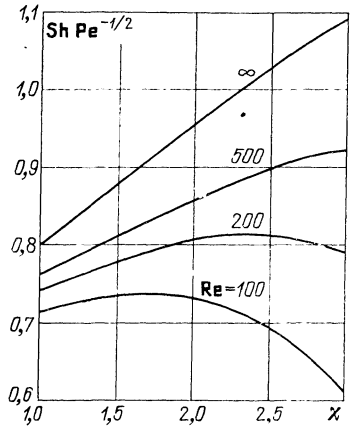


Рис. 2.3. Зависимость среднего числа Шервуда от отношения полуосей пузыря при разных числах Рейнольдса.

При $\chi = 1$ (сферический пузырь) получаем [195]

$$\Omega(1) = 1, \quad \Omega_1(1) = \frac{72}{5\sqrt{6\pi}}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \approx 2{,}05.$$

При $\chi \neq 1$ выражения (1.5), (1.8), определяющие Ω_1, рассчитывались численно. Соответствующие результаты приведены в [35], где показано, что во всем рассматриваемом интервале чисел Вебера ($0 \leqslant \mathrm{We} \leqslant 1{,}5$) можно использовать следующие аппроксимации:

$$\Omega(\chi) = \frac{1}{2}(\chi + 1), \quad \Omega_1(\chi) = \frac{1}{5}(\chi^2 + 3\chi + 6).$$

Максимальное отклонение от точных значений при этом не превышает 3%.

На рис. 2.3 и 2.4 показана зависимость среднего числа Шервуда от отношения полуосей пузыря χ и числа Вебера We соответственно. Сплошные кривые соответствуют значениям Re, равным 100, 200, 500, ∞. Штриховая линия соответствует случаю малых чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 0$ (см. § 2).

Из результатов численного анализа (см. рис. 2.4) следует, что при больших числах Рейнольдса в области

$0 \leqslant \mathrm{We} < 1{,}5$ среднее число Шервуда с достаточной степенью точности может быть представлено в виде следующей линейной зависимости от числа Вебера:

$$\mathrm{Sh} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\{1 - \mathrm{Re}^{-1/2} + (0{,}03 - 0{,}2\,\mathrm{Re}^{-1/2})\,\mathrm{We}\}\,\mathrm{Pe}^{1/2}. \quad (3.8)$$

Полученные результаты определяют зависимость диффузионного потока на пузырь от чисел Вебера и Рейнольдса при $M \leqslant O(10^{-10})$. Следует подчеркнуть, что рассматриваемый здесь интервал изменения числа Вебера соответствует случаям, при которых форма пузыря еще достаточно близка к эллипсоиду вращения.

Приведенные в §§ 2, 3 результаты свидетельствуют о значительном снижении полного диффузионного потока

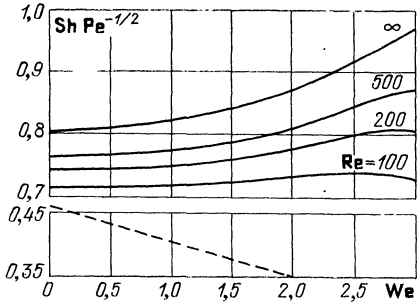


Рис. 2.4. Зависимость среднего числа Шервуда от числа Вебера при разных числах Рейнольдса для газового пузыря.

на газовый пузырь при уменьшении чисел Рейнольдса, причем это снижение наиболее существенно при больших деформациях пузыря, т. е. при больших числах Вебера. При фиксированном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \geqslant 50$ с увеличением числа Вебера в диапазоне $0 \leqslant \mathrm{We} \leqslant 1{,}5$ полный диффузионный поток монотонно растет (см. рис. 2.4). Можно полагать, что при меньших числах Рейнольдса диффузионный поток достигает максимума при некотором критическом значении $\mathrm{We}_*(\mathrm{Re})$ и уменьшается при дальнейшем увеличении числа Вебера.

Следует отметить, что в работе [21] исследовалось растворение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости; там же получено выражение для среднего числа Шервуда в случае «дискообразного пузыря».

§ 4. Массоперенос к каплям, движущимся одна за другой

В литературе отсутствуют примеры строгого анализа чрезвычайно сложной задачи о массообмене нескольких жидких частиц в случаях, когда частицы оказывают существенное гидродинамическое и диффузионное влияние друг на друга и их нельзя считать одиночными. Изложенный в первой главе асимптотический метод позволяет рассмотреть некоторые модельные задачи такого типа и получить расчетные формулы для оценки взаимного влияния соседних частиц на массообмен каждой из них с потоком. Предполагается, что обтекание частиц и диффузию реагента можно считать установившимися и что эти процессы характеризуются малыми числами Рейнольдса и большими числами Пекле. Массообмен в системе движущихся капель при больших числах Пекле сильно зависит от расположения особых линий тока, начинающихся и оканчивающихся на поверхностях капель. Из результатов гл. 1 следует, что в окрестности особой линии тока, выходящей из расположенной в кормовой части капли критической точки стекания, образуется протяженный след, в котором концентрация реагента существенно ниже, чем в натекающем потоке. При этом, если в потоке существуют цепочки капель, связанных критическими линиями тока, выходящими из кормовой точки стекания одной капли и приходящими в точку натекания другой капли, то интенсивность массообмена капель цепочки с потоком может сильно уменьшиться из-за взаимодействия диффузионных следов и погранслоев капель.

Такая ситуация может встретиться на практике, например, при экстракции из капель и растворении газа из пузырьков, в частности, когда в экстракционной колонне ввод капель осуществляется в одних и тех же точках через равные промежутки времени, а при барботаже — в случае постоянного расхода барботирующего газа, что позволяет приближенно считать размер образующихся пузырей и расстояние между ними в каждой цепочке одинаковыми. Следуя результатам работ [33, 74, 137] и используя метод, описанный в § 1, рассмотрим процесс диффузии растворенного в потоке вещества к поверхностям осесимметричных капель (пузырей), движущихся одна за другой в покоящейся вязкой жидкости. Разумеется, практическое использование результатов такого анализа сильно ограничено тем, что, во-первых,

в реальных условиях расстояния между каплями в цепочке меняются с течением времени и стационарный режим обтекания нарушается и, во-вторых, часто не соблюдается «центровка» капель, требующая, чтобы траектория стекания для предыдущей капли переходила в траекторию натекания для последующей.

Обтекание капель будем считать ламинарным, без застойных зон (в потоке отсутствуют замкнутые линии тока); поле скоростей, определяемое функцией тока ψ, будем предполагать известным из решения соответствующей гидродинамической задачи (см., например, [141, 168, 179, 193]). В рассматриваемом случае на поверхности

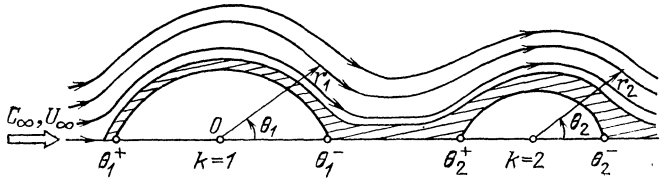


Рис. 2.5. Схема поля обтекания двух капель.

каждой капли имеются только две изолированные особые точки, натекания и стекания, лежащие на оси симметрии (рис. 2.5).

Для каждой капли может быть введена сферическая система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид $r_k = R_k(\theta_k)$ (k — номер капли; нумерация ведется вдоль по потоку), где R_k является однозначной функцией угла θ_k, полярный угол θ_k отсчитывается от критической точки стекания, т. е. $\theta_k^- = 0$, $\theta_k^+ = \pi$.

Для каждой частицы функция тока в области, не захватывающей другие частицы, обладает следующими свойствами:

$$r \to R(\theta), \quad \psi(\tau, \theta) \to [r - R(\theta)]\, f(\theta), \tag{4.1}$$

$$\theta \to 0, \quad \psi(r, \theta) \to A(r)\,\theta^2 \equiv \hat{\psi}(r, \theta), \tag{4.2}$$

$$f(\theta) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=R(\theta)}, \quad A(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=0}.$$

Здесь и далее, где это не приводит к путанице, индекс k будем опускать; свойство (4.1) следует из условия равенства нулю нормальной составляющей скорости на поверхности капли; свойство (4.2) следует из осевой симметрии задачи. В частном случае одиночной сферической

капли в однородном стоксовом потоке эти свойства следуют из формулы для функции тока (см. гл. 1).

Как и прежде, будем считать, что скорость массообмена капель с потоком лимитируется процессом диффузии во внешнем потоке. Тогда распределение концентрации в потоке определяется решением уравнения стационарной конвективной диффузии с граничными условиями постоянства концентрации вдали от капель и полного поглощения растворенного вещества на их поверхностях.

Определение диффузионного притока вещества к каждой из капель в рассматриваемом случае следует проводить последовательно, начиная с первой капли, так как условие для концентрации растворенного вещества в натекающем потоке для каждой капли зависит от ее относительного положения в цепочке и устанавливается из решения задачи о диффузии к каплям, расположенным выше по потоку.

Случай двух капель. В соответствии с результатами гл. 1 в окрестности первой капли можно выделить семь областей с различными механизмами массопереноса.

На рис. 2.5 показана качественная картина обтекания двух капель. Область основного изменения концентрации, расположенная вблизи поверхностей капель и оси потока и содержащая области диффузионных следов и погранслоев капель, заштрихована.

Опуская промежуточные выкладки, которые с использованием свойств функций тока (4.1), (4.2) проводятся аналогично выкладкам гл. 1, приведем окончательные выражения для главных членов асимптотического разложения распределения концентрации в областях $W_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) диффузионного следа первой капли. Далее, число Пекле $\mathrm{Pe} = \varepsilon^{-2}$ определяется по характерному линейному размеру капель (например, по радиусу сферы, объем которой равен объему одной из капель).

В конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W_1^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r_1 - R_{10} \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ O(\varepsilon^2) \leqslant \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$, где $R_{10} = R_1(\theta_1 = 0)$, а величина $\hat{\psi}$ определена в (4.2), распределение концентрации имеет вид

$$c_1^{(1)} = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau_1(0)}}\right), \qquad \Psi = \varepsilon^{-1}\psi,$$
$$\tau_1(0) = \int_0^{\pi} \sin x \left[R_1^2(x) + \left(\frac{dR_1}{dx}\right)^2\right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r_1 = R_1(x)} dx. \tag{4.3}$$

Во внутренней области диффузионного следа $W_1^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r_1 - R_{10} \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)\}$ *и окрестности задней критической точки* $W_1^{(3)}$: $\{\theta_1 \leqslant O(\varepsilon),\ r_1 - R_{10} \leqslant O(\varepsilon)\}$ концентрация задается единой формулой

$$c_1^{(2,3)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\tau_1(0)}}(\Psi_2 + 2y), \quad \Psi_2 = \varepsilon^{-2}\psi, \quad y = r_1 - R_{10}. \quad (4.4)$$

В области смешения диффузионного следа $W_1^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r_1 - R_{10},\ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon)\}$ концентрация определяется выражением, аналогичным формуле (3.20) гл. 1.

В окрестности второй капли также можно выделить области b_2, d_2, $W_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Как и в случае одиночной капли, диффузионный приток вещества на поверхность второй капли с точностью до поправок более высокого порядка малости определяется массообменом в области ее диффузионного пограничного слоя и, следовательно, зависит от концентрации растворенного в жидкости вещества, поступающего в погранслой, т. е. от распределения концентрации вблизи расположенной на оси симметрии особой линии тока, приходящей в критическую точку натекания второй капли.

При симметричном обтекании двух капель линия тока, вышедшая из задней критической точки (точки стекания) первой капли, попадает в переднюю критическую точку (точку натекания) второй капли. Ввиду того, что за первой каплей вблизи оси симметрии имеется диффузионный след W_1 толщиной $O(\varepsilon)$, для определения распределения концентрации около второй капли необходимо произвести сращивание решений в областях передней критической точки b_2 и диффузионного пограничного слоя d_2 второй капли с решениями в областях $W_1^{(1)}$, $W_1^{(2)}$ или $W_1^{(4)}$ (в зависимости от расстояния между каплями) первой капли (рис. 2.6). Если ограничиться нахождением главного члена разложения полного диффузионного потока на вторую каплю по степеням ε, то достаточно получить решение задачи в диффузионном пограничном слое второй капли.

Рис. 2.6, *а* соответствует случаю, когда безразмерное расстояние между каплями удовлетворяет условию $O(1) < l_1 < O(\varepsilon^{-1})$, а рис. 2.6, *б* — случаю $l_1 > O(\varepsilon^{-1})$. Для удобства на рисунках использованы переменные $\hat{\psi}$, y, поэтому условными границами всех областей с различными механизмами массопереноса являются отрезки, параллельные одной из осей.

Рассмотрим сначала случай $l_1 > O(\varepsilon^{-1})$, который соответствует сращиванию конвективно-погранслойной области диффузионного следа первой капли с диффузионным пограничным слоем второй. Так как отношение толщины внутренней области диффузионного следа первой

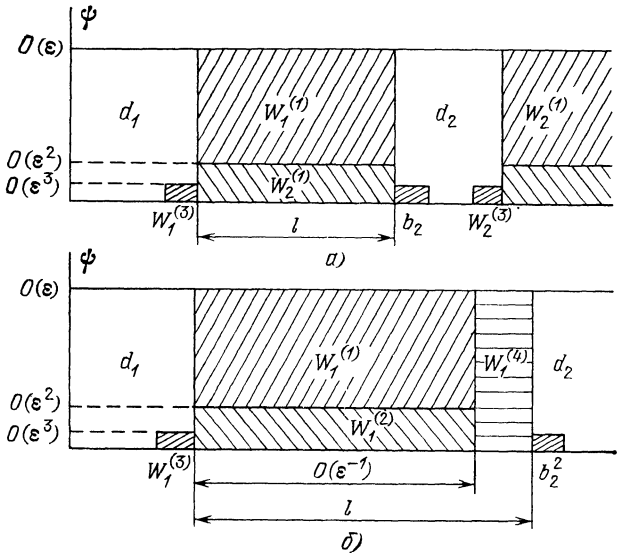


Рис. 2.6. Схема разбиения поля концентрации на области с различной структурой асимптотических решений в случае двух капель при условии: *а*) $l < O(\mathrm{Pe}^{1/2})$, *б*) $l > O(\mathrm{Pe}^{1/2})$.

капли $W_1^{(2)}$ к толщине конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W_1^{(1)}$ является малой величиной порядка ε (см. рис. 2.6, *а*), то распределение концентрации в области $W_1^{(2)}$ не влияет на старший член разложения решения в диффузионном пограничном слое второй капли d_2. Аналогично тому, как это было сделано в гл. 1, можно показать, что распределение концентрации в области передней критической точки не влияет на распределение концентрации в области d_2.

Уравнение диффузионного пограничного слоя в окрестности второй капли выводится с помощью процедуры, описанной в § 1; граничные условия полного поглощения растворенного в потоке вещества на поверхности капли и постоянства концентрации вдали от нее (в об-

ласти e) остаются теми же, что и для одиночной частицы. Условие сращивания решений в областях $W_1^{(1)}$ и d_2 задает начальное условие на «входе» в диффузионный погранслой второй капли, которое определяется выражением (4.3).

Полная формулировка погранслойной задачи для второй капли имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_2} - \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right) c_2^{(d)} = 0,$$

$$c_2^{(d)}(0, \tau_2) = 0, \quad c_2^{(d)}(+\infty, \tau_2) = 1,$$

$$c_2^{(d)}(\Psi, 0) = c_1^{(1)}(\Psi) = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau_1(0)}}\right), \qquad (4.5)$$

$$\Psi = \varepsilon^{-1}\psi, \quad \tau_2 = \tau_2(\theta_2) =$$

$$= \int_{\theta_2}^{\pi} \sin x \left[R_2^2(x) + \left(\frac{dR_2}{dx}\right)^2\right] \left[\frac{\partial\psi}{\partial r_2}\right]_{r_2=R_2(x)} dx.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решением задачи (4.5) является функция

$$c_2^{(d)}(\Psi, \tau_2) = \operatorname{erf}\left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau_1(0) + \tau_2(\theta_2)}}\right). \qquad (4.6)$$

Случай, когда расстояние между каплями удовлетворяет условию $l_1 > O(\varepsilon^{-1})$, соответствует взаимодействию области смешения диффузионного следа первой капли $W_1^{(4)}$ с диффузионным погранслоем второй d_2 (см. рис. 2.6, *б*). При этом условие сращивания решений в этих областях определяет начальное условие на «входе» в диффузионный погранслой d_2 и задается формулой для $c_1^{(4)}$; уравнение и первые два граничных условия при $\Psi = 0$ и $\Psi = \infty$ будут теми же, что и в выражении (4.5).

Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое второй капли определяется решением задачи (4.5) с условием $c_2^{(d)}(\Psi, 0) = c_1^{(4)}(\Psi, \rho_1)$, $\rho_1 = \varepsilon l_1$, и может быть записано в виде

$$c_2^{(d)}(\Psi, \tau_2) = \boldsymbol{L}(\Psi, \tau_2) * c_1^{(4)}(\Psi, \varepsilon l_1), \quad \Psi = \varepsilon^{-1}\psi, \quad (4.7)$$

где

$$\boldsymbol{L}(\Psi, \tau) * u(\Psi) \equiv \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\Psi z}}{2\tau} \exp\left(-\frac{\Psi^2 + z^2}{4\tau}\right) I_{1/2}\left(\frac{\Psi z}{2\tau}\right) u(z)\, dz. \qquad (4.8)$$

При известной функции тока, описывающей обтекание обеих капель, формулы (4.6) и (4.7) дают возможность рассчитать распределение концентрации вблизи поверхностей капель и далее, воспользовавшись стандартными формулами (5.1), (5.2) гл. 1, определить интенсивности локального и интегрального массообменов каждой из капель.

Цепочка капель. Описанные выше результаты нетрудно обобщить на случай произвольного числа реагирующих капель, движущихся одна за другой. Считаем, что характерные размеры капель цепочки имеют одинаковый порядок величины.

Как и прежде, рассмотрим сначала случай, когда безразмерные расстояния между каплями l_k удовлетворяют условию $O(1) < l_k < O(\varepsilon^{-1})$, т. е. условие на входе в диффузионный пограничный слой каждой капли d_k определяется распределением концентрации в конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W_{k-1}^{(1)}$ предыдущей капли.

Рекуррентная система уравнений, описывающая распределение концентрации в диффузионном пограничном слое k-й капли цепочки, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k} - \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right) c_k^{(d)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$
$$c_k^{(d)}(0, \tau_k) = 0, \quad c_k^{(d)}(+\infty, \tau_k) = 1,$$
$$c_k^{(d)}(\Psi, 0) = c_{k-1}^{(d)}(\Psi, \tau_{k-1}(0)), \quad c_0^{(d)} \equiv 1, \tag{4.9}$$
$$\Psi = \varepsilon^{-1}\psi,$$
$$\tau_k = \tau_k(\theta_k) = \int_{\theta_k}^{\pi} \sin x \left[R_k^2 + \left(\frac{dR_k}{dx}\right)^2\right] \left(\frac{\partial\psi}{\partial r_k}\right)_{r_k = R_k(x)} dx.$$

Здесь учтено, что концентрация в конвективно-погранслойной области каждой капли $W_k^{(1)}$ переносится без изменения вдоль линий тока и определяется значениями на выходе из ее диффузионного пограничного слоя d_k.

Введение новой переменной

$$\tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i(0) + \tau_k(\theta_k) \tag{4.10}$$

сводит краевую задачу (4.8) к задаче для одного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} - \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right) c = 0; \quad c(0, \tilde{\tau}) = 0, \quad c(+\infty, \tilde{\tau}) = 1, \quad c(\Psi, 0) = 1, \tag{4.11}$$

решение которого дает распределение концентрации в диффузионном погранслое k-й капли:

$$c_k^{(d)}(\Psi, \tau_k) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\Psi\left\{\sum_{i=1}^{k-1}\tau_i(0) + \tau_k(\theta_k)\right\}^{-1/2}\right). \quad (4.12)$$

Локальный и полный диффузионные потоки на k-ю каплю даются выражениями

$$j_k(\theta_k) = \left(\frac{\partial c_k^{(d)}}{\partial n}\right)_{r_k = R_k(\theta)} =$$

$$= f_k(\theta_k)\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\left[1 + \frac{1}{R_k^2}\left(\frac{dR_k}{d\theta_k}\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{k-1}\tau_i(0) + \tau_k(\theta_k)\right]^{-1/2}; \quad (4.13)$$

$$I_k = \iint_{S_k} j_k\, dS_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)},$$

$$I_\Sigma^{(k)} = \sum_{i=1}^{k}\iint_{S_i} j_i\, dS_i = 4\sqrt{\pi\,\mathrm{Pe}}\left(\sum_{i=1}^{k}\tau_i(0)\right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Здесь $I_\Sigma^{(k)}$ — суммарный диффузионный поток на первые k капель цепочки.

В случае, когда безразмерное расстояние l_k между каплями удовлетворяет неравенству $O(\varepsilon^{-1}) < l_k$, условие на входе в диффузионный погранслой каждой капли d_k определяется распределением концентрации в области смешения диффузионного следа предыдущей капли $W_{k-1}^{(4)}$. Рассуждая так же, как и в случае двух капель, можно получить рекуррентную цепочку уравнений для распределения концентрации в d_k, аналогичную (4.10); при этом уравнение и два первых граничных условия останутся теми же, а начальное условие при $\tau_k = 0$ будет следующим:

$$c_k^{(d)}(\Psi, 0) = c_{k-1}^{(4)}(\Psi, \varepsilon l_{k-1}).$$

В этом случае уже нельзя получить такого простого решения, как (4.12), однако для концентрации $c_k^{(d)}$ можно записать рекуррентную формулу

$$c_k^{(d)}(\Psi, \tau_k) = \boldsymbol{L}(\Psi, \tau_k) * c_{k-1}^{(4)}(\Psi, \varepsilon l_{k-1}), \quad c_0^{(4)} \equiv 1, \quad (4.15)$$

в которой интегральный оператор $\boldsymbol{L}$ определен формулой (4.8).

Для иллюстрации полученных формул рассмотрим цепочку капель сферической формы с безразмерными радиусами R_k ($k = 1, 2, \ldots$), движущихся на расстояниях $O(1) < l_k < O(\varepsilon^{-1})$ одна за другой в режиме стоксова обтекания; вязкости капель одинаковы. В сферической системе координат, связанной с центром k-й капли, функция тока имеет вид

$$\psi_k = \frac{R_k}{2(\beta+1)}[r_k - R_k]\sin^2\theta_k + O(\tilde{l}^{-1}) + O((r_k - R_k)^2),$$
$$\tilde{l} = \min_k l_k, \quad R_1 = 1.$$

Учитывая соотношения

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_k}\right)_{r_k=R_k} = \frac{R_k}{2(\beta+1)}\sin^2\theta_k, \quad \tau_k(0) = \frac{2}{3(\beta+1)}R_k^3$$

и используя формулы (4.14), для полных диффузионных потоков на капли получаем формулы

$$I_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)}, \quad I_\Sigma^{(k)} = I_1\left[\sum_{i=1}^{k} R_i^3\right]^{1/2}, \quad I_1 = 4\sqrt{\frac{2\pi\,\mathrm{Pe}}{3(\beta+1)}}. \tag{4.16}$$

Здесь I_1 — полный диффузионный поток на поверхность первой капли ($\beta = 0$ соответствует газовым пузырям).

Для цепочки капель (пузырей) равного радиуса, движущихся с одинаковой скоростью, получим, полагая в формулах (4.16) $R_k = 1$:

$$I_k = I_1[k^{1/2} - (k-1)^{1/2}], \quad I_\Sigma^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 k^{1/2}. \tag{4.17}$$

Видно, что суммарный диффузионный поток пропорционален квадратному корню из общего числа капель в цепочке, т. е. значительно меньше суммы потоков на капли в случае, если бы они рассматривались как одиночные. Таким образом, в цепочках капель (пузырей) имеет место существенное торможение процесса массообмена по сравнению с изолированной каплей, что связано с тем, что находящиеся вверх по потоку капли экранируют последующие. В силу (4.17) полный диффузионный поток на k-ю каплю цепочки убывает при больших k по закону

$$k \to \infty, \quad I_k \approx \frac{\partial}{\partial k} I_\Sigma^{(k)} \to \frac{1}{2} I_1 k^{-1/2}. \tag{4.18}$$

Видно, что полный диффузионный поток на вторую каплю более чем в два раза меньше, чем на первую, а на третью каплю уже в три раза меньше, чем на первую.

Найдем теперь среднее число Шервуда для цепочки капель равного радиуса, определяя его аналогично (1.9):

$$\mathrm{Sh} = I_\Sigma S_\Sigma^{-1}, \tag{4.19}$$

где I_Σ — суммарный безразмерный диффузионный поток на все капли системы, а S_Σ — суммарная безразмерная площадь поверхностей капель.

Учитывая, что для цепочки сферических капель равного радиуса $S_\Sigma^{(k)} = 4\pi k$, а $I_\Sigma^{(k)}$ определяется по формуле (4.17), из выражения (4.19) получаем

$$\mathrm{Sh}_k = \frac{1}{4\pi} I_1 k^{-1/2}, \tag{4.20}$$

т. е., как и следовало ожидать, вследствие взаимного экранирования среднее число Шервуда для цепочки капель может быть как угодно малым при достаточно большом числе капель.

В заключение отметим, что наличие областей замкнутой циркуляции за каплями цепочки ослабляет затормаживающее влияние диффузионных следов. Это происходит вследствие существенного насыщения концентрации в следе в ε-окрестности особой поверхности — границы стационарного вихря за каплей. В отличие от диффузионного следа, расположенного в окрестности изолированной особой линии тока, в окрестности границы области замкнутой циркуляции отсутствует конвективно-пограничная область диффузионного следа, в которой концентрация переносилась бы без изменений вдоль линий (поверхностей) тока. При этом следует учитывать, что при наличии в цепочке областей замкнутой циркуляции за каплями интенсификация массопереноса к цепочке происходит не только благодаря влиянию диффузионных пограничных слоев и следов капель, но и вследствие увеличения скорости жидкости вблизи поверхностей капель по сравнению со случаем обтекания без застойных зон.

Глава 3

ДИФФУЗИЯ К ТВЕРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ И КРУГОВОМУ ЦИЛИНДРУ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

В этой главе излагаются результаты приближенного аналитического исследования задачи о стационарном массообмене твердой сферической частицы и кругового цилиндра с ламинарным потоком жидкости при больших числах Пекле. Как и в гл. 1, предполагается, что на поверхности частицы протекает химическая реакция или процесс адсорбции (десорбции), в котором участвует вещество, растворенное в потоке, и что скорость этого процесса определяется диффузией реагента к поверхности частицы (диффузионный режим). Рассмотрены типичные простые случаи обтекания реагирующих частиц, которые часто используются при моделировании встречающихся на практике ситуаций и допускают сравнительно простой теоретический анализ. Целью анализа является получение приближенных формул для определения поля концентрации и диффузионного притока растворенного в жидкости вещества к поверхности сферы и кругового цилиндра.

§ 1. Сферическая частица в поступательном стоксовом потоке. Поле концентрации

Рассмотрим задачу о стационарной диффузии к поверхности сферической частицы, обтекаемой однородным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Как и в предыдущих главах, будем считать, что число Пекле велико: $\mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1} \gg 1$.

Безразмерное уравнение стационарной конвективной диффузии в сферической системе координат r, θ, φ, связанной с центром сферы, может быть записано в виде

$$\frac{\partial(c, \psi)}{\partial(r, \theta)} = \varepsilon^3 \sin\theta \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial c}{\partial\theta}\right)\right], \quad \varepsilon = \mathrm{Pe}^{-1/3}. \tag{1.1}$$

В левой части уравнения (1.1) стоит якобиан безразмерной концентрации c и безразмерной функции тока ψ;

в качестве характерных масштабов длины, скорости и концентрации выбраны радиус сферы, скорость набегающего потока и величина концентрации вдали от частицы; угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности.

Безразмерные граничные условия в предположении полного поглощения вещества на поверхности сферы и постоянства концентрации вдали от нее имеют вид

$$r = 1, \quad c = 0; \qquad r \to \infty, \quad c \to 1. \tag{1.2}$$

В частном случае стоксова обтекания сферы поступательным потоком функция тока ψ, фигурирующая в уравнении (1.1), имеет вид (см., например, [107])

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4}(r-1)^2\left(2 + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta. \tag{1.3}$$

Решение задачи (1.1) — (1.3) позволит описать распределение концентрации вещества в потоке, содержащем частицу, и рассчитать интенсивность массообмена частицы с потоком. Видно, что формулировка задачи (1.1) — (1.3) отличается от формулировки соответствующей задачи для жидкой частицы (гл. 1, § 1) лишь переходом к пределу при $\beta \to \infty$ в выражении для функции тока и новым определением малого параметра ε. Как и в случае капли, оценка толщины диффузионного пограничного слоя у поверхности твердой частицы приводит к величине порядка ε^{-1}.

Построение приближенного аналитического решения проводится методом сращиваемых асимптотических разложений, подробно описанным в гл. 1. Применить этот метод позволяет наличие в уравнении (1.1) малого параметра ε. При этом необходимо предварительное исследование задачи для выделения в потоке областей с различной структурой асимптотических решений, описывающих распределение концентрации. Каждое из них находится в результате решения приближенной, более простой, чем (1.1) — (1.3), задачи с применением процедуры сращивания.

Как и в случае жидкой частицы, в потоке около твердой сферы существуют семь областей с различной структурой асимптотических решений, соответствующих разным механизмам массопереноса. Это внешняя область e, область передней критической точки b, диффузионный пограничный слой с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$ и область диффузионного следа

W, которая в свою очередь состоит из областей $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). В каждой из областей уравнение (1.1) заменяется приближенным уравнением в результате выделения главных членов разложений по малому параметру ε. Характерные размеры областей и их условные грани-

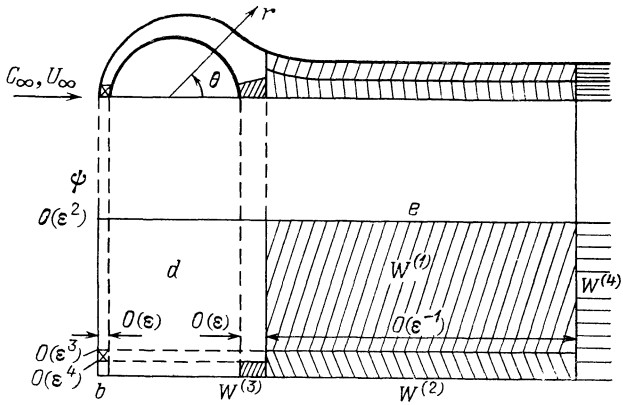


Рис. 3.1. Схема разбиения поля концентрации на области с различным механизмом массопереноса в случае твердой сферы в однородном поступательном потоке.

цы в задаче (1.1) — (1.3) определяются из соображений, подробно изложенных в гл. 1, с использованием вспомогательной функции

$$\hat{\psi}(r, \theta) = (r - 1)^2 \theta^2, \qquad (1.4)$$

являющейся в указанных выше областях наиболее простой комбинацией сферических координат, обладающей одинаковыми свойствами с функцией тока обтекания твердой частицы (1.3) при соответствующих деформациях координат r, θ.

На рис. 3.1 изображены характерные области с различными механизмами массопереноса, показанные также и в связанной с функцией тока $\hat{\psi}(r, \theta)$ системе координат, в которой все характерные области имеют вид прямоугольников.

Во внешней области e: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1,\ O(\varepsilon^2) \leqslant \hat{\psi}\}$ в главном приближении по параметру ε в уравнении (1.1) существен лишь конвективный член, откуда следует, что в этой области концентрация равна значению на бесконечности

$$c^{(e)} = 1. \qquad (1.5)$$

В области передней критической точки b: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon),\ \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ в упрощенном уравнении (1.1) сохраняются конвективные члены, а также члены, соответствующие молекулярной диффузии в тангенциальном и радиальном направлениях.

В диффузионном пограничном слое с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon),\ O(\varepsilon) \leqslant \theta,\ \pi - \theta \geqslant O(\varepsilon)\}$ в уравнении (1.1) можно пренебречь тангенциальным диффузионным переносом вещества по сравнению с диффузией в радиальном направлении.

В конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ O(\varepsilon^{-3}) \leqslant \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^{2})\}$ существенны лишь конвективные члены, поэтому концентрация здесь зависит лишь от функции тока и вдоль линии тока сохраняет постоянное значение, которое определяется величиной концентрации на выходе из диффузионного пограничного слоя.

Во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^{3})\}$ можно пренебречь радиальным переносом вещества к поверхности сферы.

В области задней критической точки $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant \leqslant O(\varepsilon),\ \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ в уравнении (1.1) сохраняются члены, описывающие диффузию в радиальном и тангенциальном направлениях.

В области смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r,\ \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^{2})\}$ оказывается несущественным радиальный перенос вещества.

Следуя процедуре, аналогичной описанной в гл. 1, найдем распределение концентрации в указанных выше областях с различными механизмами массопереноса и получим формулы для расчета интенсивности массообмена частицы с потоком [32, 72, 73, 160, 181].

Область передней критической точки и диффузионный пограничный слой. В области передней критической точки b: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ введем растянутые координаты

$$Y = \varepsilon^{-1}(r - 1), \quad X = \varepsilon^{-1}(\pi - \theta), \tag{1.6}$$

используя которые, запишем главный член разложения функции тока (1.3) по степеням ε в виде

$$\psi = {}^{3}/_{4}\varepsilon^{4}Y^{2}X^{2}. \tag{1.7}$$

Далее запишем в переменных (1.6) с учетом выражения (1.7) приближенное уравнение, граничные условия

и условия сращивания для распределения концентрации в области передней критической точки:

$$\frac{3}{2} Y \left(-Y \frac{\partial c^{(b)}}{\partial Y} + X \frac{\partial c^{(b)}}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 c^{(b)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} X \frac{\partial c^{(b)}}{\partial X}, \tag{1.8}$$

$$Y = 0, \quad c^{(b)} = 0; \qquad X = 0, \quad \frac{\partial c^{(b)}}{\partial X} = 0;$$

$$c^{(b)} \ (Y \to \infty) = c^{(e)} = 1, \tag{1.9}$$

$$c^{(b)} \ (X \to \infty) = c^{(d \setminus b)} \ (\theta \to \pi). \tag{1.10}$$

Второе граничное условие в (1.8) является следствием симметрии задачи. Условия (1.9) и (1.10) следуют из условий асимптотического сращивания решения в рассматриваемой области b с решениями в прилегающих областях — внешней области e и области диффузионного пограничного слоя с исключенной областью передней критической точки $d \setminus b$ (рис. 3.1).

Условие при $X \to \infty$ содержит асимптотику распределения концентрации в области $d \setminus b$ при $\theta \to \pi$.

При изучении поля концентрации в области $d \setminus b$ воспользуемся переменными Мизеса θ, Ψ_2, где

$$\Psi_2 = \varepsilon^{-2} \psi = {}^3/_4 Y^2 \sin^2 \theta. \tag{1.11}$$

Выделение старших членов разложения по малому параметру из уравнения (1.1) с учетом (1.11), равенств $\theta = \theta = O(1)$, $\Psi_2 = O(1)$, а также соотношений

$$\frac{\partial (c, \psi)}{\partial (r, \theta)} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{\partial c}{\partial \theta} \right)_{\Psi_2}, \qquad \frac{\partial c}{\partial r} = \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{\partial c}{\partial \Psi_2} \right)_{\theta},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 3^{1/2} \varepsilon \sqrt{\Psi_2} \sin \theta,$$

приводит к следующему уравнению для концентрации:

$$-\frac{\partial c^{(d \setminus b)}}{\partial \theta} = \sqrt{3} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \Psi_2} \sqrt{\Psi_2} \frac{\partial c^{(d/b)}}{\partial \Psi_2},$$

которое в переменных

$$\zeta = \sqrt{\Psi_2}, \quad \tau(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\theta}^{\pi} \sin^2 z \, dz = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \tag{1.12}$$

примет вид

$$\frac{\partial c^{(d \setminus b)}}{\partial \tau} = \zeta^{-1} \frac{\partial^2 c^{(d \setminus b)}}{\partial \zeta^2}, \qquad \zeta = \varepsilon^{-1} \sqrt{\psi}. \tag{1.13}$$

Граничные условия для уравнения (1.13) следуют из условия полного поглощения на поверхности сферы (1.2) и условия сращивания с решением (1.5) во внешней области:

$$\zeta = 0 \quad (\tau \neq 0), \quad c^{(d \setminus b)} = 0; \qquad \zeta \to \infty, \quad c^{(d \setminus b)} \to 1. \tag{1.14}$$

Как и в случае жидкой частицы, формулировку задачи (1.13), (1.14) необходимо дополнить условием при $\tau = 0$ и $\zeta \neq 0$, следующим из условия сращивания решений в областях $d \setminus b$ и e:

$$c^{(d \setminus b)} \, (Y \to \infty, \, \theta \to \pi) = c^{(e)}.$$

С учетом (1.5) в переменных τ и ζ это условие запишем в виде

$$\tau = 0 \quad (\zeta \neq 0), \quad c^{(d \setminus b)} = 1. \tag{1.15}$$

Решение задачи (1.13) — (1.15) является автомодельным и оказывается справедливым во всей области диффузионного пограничного слоя d: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), \; O(\varepsilon) \leqslant \theta\}$. Оно имеет вид

$$c^{(d)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\zeta^3}{9\tau}\right), \tag{1.16}$$

где $\gamma(\alpha, x) = \int\limits_0^x e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ — неполная гамма-функция.

В исходной системе сферических координат распределение концентрации в диффузионном пограничном слое можно записать в форме

$$c^{(d)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\mathrm{Pe}}{3} \frac{(r-1)^3 \sin^3 \theta}{(\pi - \theta + {}^1/_2 \sin 2\theta)}\right). \tag{1.17}$$

В области передней критической точки b: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), \; \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ концентрация определяется выражением

$$c^{(b)} = c^{(d)} \, (Y = O(1), \theta \to \pi) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \mathrm{Pe} \, (r-1)^3\right)$$

и изменяется от нуля на поверхности сферы до единицы на расстоянии порядка $\mathrm{Pe}^{-1/3}$ (см. гл. 1, § 2).

Диффузионный след. Хотя протяженность области диффузионного следа W: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), \; \theta \leqslant O(\varepsilon); \; O(\varepsilon) \leqslant r - 1, \; \hat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)\}$ по порядку величины отличается от размеров диффузионного следа капли, ее структура

остается прежней, и приближенное решение строится в ней в виде совокупности решений в четырех аналогичных случаю капли подобластях $W^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

В конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ O(\varepsilon^3) \leqslant \widehat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^2)\}$, как и во внешней области e, имеем $\partial(c^{(1)}, \psi)/\partial(r, \theta) = 0$. Поэтому перенос приходящего из диффузионного пограничного слоя вещества в $W^{(1)}$ происходит без изменения концентрации вдоль линий тока. Явный вид распределения концентрации в этой области определяется сращиванием с решением в диффузионном пограничном слое (1.16) [181]:

$$c^{(1)}(\zeta) = c^{(d)}(\zeta, \theta \to 0) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\zeta^3}{9\tau(0)}\right), \qquad (1.18)$$

где

$$\zeta = \varepsilon^{-1}\sqrt{\psi}, \quad \tau(0) = \sqrt{3}\pi/8.$$

Решение (1.18), как и решение в диффузионном погранслое (1.16), непригодно вблизи оси диффузионного следа $\theta \approx 0$, где необходимо выделить внутреннюю область диффузионного следа $W^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ \widehat{\psi} \leqslant O(\varepsilon^3)\}$, в которой диффузия в радиальном направлении несущественна, а в тангенциальном направлении сравнима с тангенциальным конвективным переносом.

При анализе распределения концентрации в области следа, как и в гл. 1, запишем уравнение диффузии в переменных r, ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial c}{\partial r} = \varepsilon^3 \sin\theta \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 \frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial c}{\partial\psi}\right\}. \qquad (1.19)$$

Все коэффициенты в уравнении (1.19) должны быть выражены через r и ψ с использованием выражения для функции тока (1.3).

В области $W^{(2)}$ с точностью до главных членов разложения по ε выполняются равенства

$$\psi = f(y)\theta^2, \quad f(y) = \frac{1}{4}y^2(y+3)(y+1)^{-1}, \quad y = r - 1,$$
$$\theta \approx \sin\theta = \psi^{1/2} f^{-1/2}, \quad \operatorname{ctg}\theta \approx \theta^{-1} = \psi^{-1/2} f^{1/2}, \qquad (1.20)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 2f\theta = 2\psi^{1/2} f^{1/2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 2f.$$

С учетом соотношений (1.20) из уравнения (1.19) получим для распределения концентрации в области $W^{(2)}$,

уравнение

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \Psi_3}\Psi_3\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \Psi_3}, \qquad (1.21)$$

где

$$\Psi_3 = \varepsilon^{-3}\psi, \quad y = r - 1.$$

Выбор растянутой координаты Ψ_3 обеспечивает одинаковый порядок величин обеих частей уравнения (1.21).

Условие симметрии

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \theta} = 0 \quad (i = 2, 3, 4) \qquad (1.22)$$

и условия сращивания с решениями в прилегающих областях $W^{(1)}$ и $W^{(3)}$, записанные через переменную Ψ_3, в данном случае имеют вид

$$\Psi_3 = 0, \quad \Psi_3^{1/2}\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \Psi_3} = 0; \qquad (1.23)$$

$$c^{(2)}(\Psi_3 \to \infty) = c^{(1)}(\Psi_2 \to 0) = \varepsilon^{1/2}A\Psi_3^{1/2}, \quad A = 2\pi^{-1/3}3^{1/6}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}; \qquad (1.24)$$

$$\theta = \text{const}, \quad c^{(2)}(y \to 0) = c^{(3)}(Y \to \infty), \quad Y = \varepsilon^{-1}y. \qquad (1.25)$$

При получении граничного условия (1.24) использовано выражение для распределения концентрации в конвективно-погранслойной области $W^{(1)}$ (1.18) с учетом того, что на границе с внутренней областью переменная $\zeta = \varepsilon^{1/2}\Psi_3^{1/2} \leqslant 1$. Условие (1.24) содержит решение в области задней критической точки $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$, поэтому область задней критической точки $W^{(3)}$ и внутреннюю область диффузионного следа $W^{(2)}$ следует рассматривать совместно.

Растянутые координаты в области $W^{(3)}$ имеют вид

$$Y = \varepsilon^{-1}y, \quad S = \varepsilon^{-1}\theta. \qquad (1.26)$$

Первая из новых координат фигурировала ранее в граничном условии (1.25).

Главный член разложения функции тока (1.3) по параметру ε в переменных (1.26) ($Y = O(1)$, $S = O(1)$) определяется формулой (1.7) с заменой переменной X на S. В главном приближении по ε уравнение (1.1), первое

условие (1.2) и условие (1.22) в области $W^{(3)}$ примут вид

$$\frac{3}{2} Y \left(Y \frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y} - S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S} \right) = \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S}; \quad (1.27)$$

$$Y = 0, \quad c^{(3)} = 0; \quad S = 0, \quad \partial c^{(3)}/\partial S = 0.$$

Следует отметить, что уравнение (1.27) для концентрации в области $W^{(3)}$ отличается от соответствующего уравнения (1.8) для концентрации в области b заменой Y на $-Y$ и X на S. Условие сращивания для концентрации $c^{(3)}$ с решением в граничащей с $W^{(3)}$ внутренней области $W^{(2)}$ задается равенством (1.25), а условие сращивания с решением в области диффузионного пограничного слоя (1.16) — соотношением

$$c^{(3)} (S \to \infty) = c^{(d)} (\theta \to 0) \to {}^1/_2 \sqrt{3} \varepsilon A Y S. \quad (1.28)$$

В условии (1.28) правая часть представляет собой главный член асимптотики решения (1.16) при $\theta \to 0$ ($Y = \text{const}$).

Сравнивая теперь граничные условия (1.24) и (1.28), заключаем, что концентрация во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$ имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$, а в области задней критической точки — порядок ε. С учетом этого и из условия сращивания решений в этих областях (1.25) получаем, что правая часть (1.25) при $y \to 0$ должна обращаться в нуль, что и дает граничное условие для распределения концентрации в $W^{(2)}$:

$$y = 0, \quad \theta = \text{const}, \quad c^{(2)} (y, \Psi_3 (y, \theta)) = 0. \quad (1.29)$$

Решение задачи (1.21), (1.23), (1.29) для распределения концентрации в области $W^{(2)}$ может быть найдено в виде [72]

$$c^{(2)} (y, \Psi_3) = (2\varepsilon)^{1/2} A y^{1/2} F(x), \quad x = -\frac{\Psi_3}{2y}. \quad (1.30)$$

Для определения неизвестной функции $F(x)$ получаем уравнение

$$x \frac{d^2F}{dx^2} + (1 - x) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} F = 0, \quad x \in (-\infty, 0];$$

$$x = 0, \quad (-x)^{1/2} \frac{dF}{dx} = 0; \quad x \to -\infty, \quad F \to (-x)^{1/2}. \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) является вырожденным гипергеометрическим уравнением, поэтому для распределения

концентрации в области $W^{(2)}$ имеем

$$c^{(2)}(y, \Psi_3) = \varepsilon^{1/2} 2^{-1/2} \pi^{1/2} A y^{1/2} \Phi(-1/2, 1, -\Psi_3/(2y)), \tag{1.32}$$

где

$$\Phi(a, c, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

— вырожденная гипергеометрическая функция.

Используя теперь выражение (1.32) и условие сращивания решений в областях $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$ (1.25), получаем следующее граничное условие для концентрации в области задней критической точки:

$$Y \to \infty, \quad c^{(3)} \to \varepsilon 2^{-1/2} \pi^{1/2} A Y \Phi(-1/2, 1, -3/8 Y S^2). \tag{1.33}$$

При выводе условия (1.33) использованы равенство $\Psi_3 = \varepsilon^{-3}\psi$ и соотношения (1.3), (1.26).

В отличие от рассмотренного в гл. 1 случая диффузии к поверхности капли, решение задачи (1.27), (1.28), (1.33) для распределения концентрации в области $W^{(3)}$ не может быть получено в явном аналитическом виде. Численный анализ поведения концентрации $c^{(3)}$ был проведен в работе [181].

Решение (1.32) непригодно вне области $W^{(2)}$ ниже по потоку; в частности, оно не удовлетворяет условию на бесконечности (второе граничное условие (1.2)), так как на оси потока ($\Psi_3 = 0$) дает неограниченное возрастание концентрации с ростом y. Определяемое формулой (1.18) решение $c^{(1)}(\zeta)$ также непригодно вне области $W^{(1)}$, поскольку $c^{(1)}(\zeta(r, \theta = 0)) = 0$, т. е. оно также не удовлетворяет второму граничному условию (1.2). Поэтому необходимо рассмотреть еще область смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r, \psi \leqslant O(\varepsilon^2)\}$, где, как и в $W^{(2)}$, радиальной диффузией вдоль линий тока можно пренебречь по сравнению с тангенциальной. Уравнение и граничные условия для $c^{(4)}$ выводятся с использованием деформированных переменных

$$\zeta = \varepsilon^{-1} \sqrt{\psi}, \quad \rho = 1/2 \varepsilon (r - 1). \tag{1.34}$$

Из уравнения (1.19) и условий (1.2), (1.5), (1.22) получим следующее уравнение и граничные условия для $c^{(4)}$:

$$\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \zeta}, \tag{1.35}$$

$$\zeta = 0, \quad \partial c^{(4)}/\partial \zeta = 0; \qquad \zeta \to \infty, \quad c^{(4)} \to c^{(e)} = 1.$$

Воспользовавшись формулами (1.18), (1.32), для условия сращивания решения в области $W^{(4)}$ с решениями в соседних областях $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ (рис. 3.1) получим

$$\rho \to 0, \quad c^{(4)} = \begin{cases} c^{(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}\, \frac{\zeta^3}{9\tau(0)}\right), & O(\varepsilon^{1/2}) < \zeta \leqslant O(1), \\ c^{(2)} = \sqrt{\pi}\rho\Phi\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{\zeta^2}{4\rho}\right), & 0 \leqslant \zeta \leqslant O(\varepsilon^{1/2}). \end{cases} \tag{1.36}$$

Нижнее выражение определяет условие сращивания с решением во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$, на границе с которой переменная ρ принимает малые значения порядка ε и выполняется равенство $\rho = O(\zeta^2)$.

Решение задачи (1.35) имеет вид

$$c^{(4)}(\zeta, \rho) = \int_0^\infty \frac{\tilde{\zeta}}{2\rho} \exp\left(-\frac{\zeta^2 + \tilde{\zeta}^2}{4\rho}\right) I_0\left(\frac{\zeta\tilde{\zeta}}{2\rho}\right) c^{(1)}(\tilde{\zeta})\, d\tilde{\zeta}, \tag{1.37}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, при фиксированном ζ и $\rho \to 0$ имеет место свойство $c^{(4)}(\zeta, \rho) \to c^{(1)}(\zeta)$ [185].

Решение (1.37) удовлетворяет также и нижнему условию в (1.36), т. е. выполняется условие сращивания с решением в области $W^{(2)}$. При доказательстве этого свойства решения (1.37) примем во внимание, что на границе с областью $W^{(2)}$ выполняется соотношение $\varkappa = \rho\zeta^{-2} = O(1)$. Далее, в интеграле (1.37) делаем замену переменной $z = \zeta\tilde{\zeta}/(2\rho)$, переходим к пределу при $\rho \to 0$, $\varkappa = \text{const}$ и учитываем приведенное в гл. 1 (формула (3.21)) соотношение, связывающее интеграл, содержащий модифицированную функцию Бесселя, с вырожденной гипергеометрической функцией.

Ограничиваясь главным членом разложения при $\rho \to 0$, придем к нижнему равенству (1.36). Следовательно, выражение (1.37) является решением задачи (1.35), (1.36) и дает распределение концентрации в области смешения диффузионного следа $W^{(4)}$.

Таким образом, выше изучено распределение концентрации во всех областях, причем всюду, за исключением области задней критической точки $W^{(3)}$, оно описывается аналитическими выражениями. Из формул (1.32), (1.37) видно, что концентрация в области диффузионного следа отлична от нуля и при фиксированном расстоянии до поверхности сферы достигает минимума на оси потока ($\theta =$

$= 0$), где растет пропорционально квадратному корню из расстояния до поверхности сферы:

$$c = \frac{\varepsilon^{1/2}(24\pi)^{1/6}}{\Gamma(1/3)}(r-1)^{1/2} \qquad (1.38)$$

при $\theta = 0$, $r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1})$, причем зависимость концентрации от угла θ и радиальной координаты r (1.32), (1.37) оказывается достаточно сложной.

Из сопоставления с аналогичными результатами (гл. 1, § 3) для капли в области $r - 1 = O(1)$ видно, что в диффузионном следе за твердой частицей поток менее обеднен реагентом, чем в следе за каплей, а концентрация имеет порядок $\mathrm{Pe}^{-1/6}$ (для капли $\mathrm{Pe}^{-1/2}$). При этом за каплей на оси потока ($\theta = 0$) наблюдается линейный рост концентрации с увеличением расстояния от ее поверхности, в то время как концентрация за твердой сферой растет значительно медленнее (формула (1.38)).

Полученные выше выражения для концентрации в каждой из рассмотренных областей являются главными членами асимптотических разложений поля концентрации по параметру ε. Уравнения и граничные условия для следующих членов соответствующих разложений получаются методом, аналогичным описанному в § 4 гл. 1.

Двучленное разложение концентрации в диффузионном пограничном слое $c^{(d)} = c_0^{(d)} + \mathrm{Pe}^{-1/3}c_1^{(d)}$ при стоксовом обтекании сферы было получено в работе [114].

§ 2. Локальный и полный диффузионные потоки вещества на поверхность сферы. Учет сил инерции

Безразмерные диффузионные локальный и полный потоки вещества на поверхность сферы и число Шервуда определим по стандартным формулам (гл. 1, формулы (5.1), (5.2)).

Локальный диффузионный поток на поверхность сферы из области диффузионного пограничного слоя в главном приближении по параметру ε определяется при помощи формулы (1.16) и равен

$$j(\theta) = \left(\frac{\partial c^{(d)}}{\partial r}\right)_{r=1} =$$

$$= \varepsilon^{-1}3^{2/3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}\sin\theta\left[\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]^{-1/3} =$$

$$= 0{,}776\sin\theta\left[\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]^{-1/3}\mathrm{Pe}^{1/3},$$

$$O(\mathrm{Pe}^{-1/3}) \leqslant \theta \leqslant \pi. \qquad (2.1)$$

Для локального диффузионного потока в окрестности задней критической точки можно получить выражение

$$j(S)=3^{2/3}\pi^{1/3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}\left.\frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y}\right|_{Y=0}, \qquad S=\theta\,\mathrm{Pe}^{1/3}, \quad (2.2)$$

где величина $\partial c^{(3)}/\partial Y\,|_{Y=0}$ определяется из решения задачи (1.27), (1.28), (1.33) путем численного интегрирования [160, 181], причем

$$\left.\frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y}\right|_{Y=0}=\begin{cases}1{,}124 & \text{при } S=0,\\ S+0{,}406\,S^{-1} & \text{при } S\to\infty.\end{cases} \quad (2.3)$$

Видно, что локальный диффузионный поток в задней критической точке ($\theta = 0$, $r = 1$) имеет порядок единицы, однако вкладом решения в области $W^{(3)}$ в полный диффузионный поток на частицу можно пренебречь по сравнению с вкладом решения в области d. Действительно, в области d локальный поток (2.1) имеет порядок ε^{-1}, а площадь части поверхности сферы, ограничивающей область d, имеет порядок, равный единице. В то же время в области $W^{(3)}$ локальный поток (2.2) будет порядка единицы, а соответствующая площадь — порядка ε^2. Поэтому суммарный диффузионный поток из пограничного слоя ($I^{(d)} = O(\varepsilon^{-1})$) много больше суммарного потока из области задней критической точки ($I^{(3)} = O(\varepsilon^2)$).

Учитывая эти оценки, используя выражение (2.1), а также результаты [114] для второго члена асимптотического разложения концентрации в диффузионном пограничном слое по параметру ε, получаем следующую формулу для среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = 0{,}625\mathrm{Pe}^{1/3} + 0{,}461 + O(\mathrm{Pe}^{-1/3}). \quad (2.4)$$

Первый член этого разложения был впервые получен в работе [60], второй (путем численного интегрирования) — в [114].

Займемся теперь обобщением результатов на случай влияния сил инерции. Обобщение результатов, полученных выше для стоксова обтекания сферы поступательным потоком, на случай не исчезающе малых чисел Рейнольдса (приближенный учет инерционных членов) может быть достигнуто путем использования в уравнении конвективной диффузии (1.1) вместо функции тока (1.3) более общего выражения [95], представляющего собой двучленное разложение функции тока по числу Рейнольдса:

$$\psi=\psi_0+\frac{3}{8}\,\mathrm{Re}\,\psi_0\left[1-\left(1+\frac{1}{2r^2+r}\right)\cos\theta\right]. \quad (2.5)$$

Здесь ψ_0 — функция тока Стокса (1.3).

Следуя методу, описанному в § 1, и вводя переменные

$$\zeta = \varepsilon^{-1}\sqrt{\psi}, \quad \tau = \tau(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{7}{8}\,\mathrm{Re}\right)^{1/2} A(\pi - \theta,\ k),$$

где

$$A(\eta,\ k) = \int_0^{\eta} \sin^2 x \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{1/2} dx,$$

$$k^2 = \mathrm{Re}\left(1 + \frac{7}{8}\,\mathrm{Re}\right)^{-1},$$

можно установить, что в случае обтекания сферы с функцией тока (2.5) распределение концентрации в диффузионном пограничном слое дается решением задачи (1.13) — (1.15) и определяется формулой (1.16). Функция $A(\eta, k)$ выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$A(\eta,\ k) = \frac{2}{15}\left(1 - 3\cos\eta - \frac{2}{k^2}\right)\sin\eta\left(1 - k^2\sin^2\frac{\eta}{2}\right)^{1/2} - \frac{8}{15}\,\frac{(1-k^2)(2-k^2)}{k^4}\,\mathrm{F}\left(\frac{\eta}{2},\ k\right) + \frac{16}{15}\,\frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4}\,\mathrm{E}\left(\frac{\eta}{2},\ k\right). \tag{2.6}$$

Для локального и полного диффузионных потоков можно получить

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1} = j_0(\theta)\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{(1 + {}^7/_8\,\mathrm{Re})(\pi - \theta + {}^1/_2\sin 2\theta)}{2A(\pi - \theta,\ k)}\right]^{1/3}, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{Sh} = \frac{I}{4\pi} = \mathrm{Sh}_0\left(1 + \frac{7}{8}\,\mathrm{Re}\right)^{1/2}\left[\frac{2}{\pi}\right]^{2/3} B(k), \tag{2.8}$$

где

$$B(k) = \begin{cases} [A(\pi,\ k)]^{2/3} & \text{при } \mathrm{Re} \leqslant 8, \\ [k^{-3}A(\pi,\ k^{-1})]^{2/3} & \text{при } \mathrm{Re} \geqslant 8, \end{cases}$$

$$A(\pi,\ k) = -\frac{8}{15}\,\frac{(1-k^2)(2-k^2)}{k^4}\,\mathrm{K}(k) + \frac{16}{15}\,\frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4}\,\mathrm{E}(k).$$

Здесь K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, j_0 и Sh_0 — локальный диффузионный поток и число Шервуда в случае стоксова обтекания сферы ($\mathrm{Re} = k = 0$), определяемые первым членом в (2.1), (2.4). Соотношения (2.7), (2.8) были впервые получены в работе [27] и несколько позднее — в [2].

Изменение вида функции $B(k)$ в выражении (2.8) при $\mathrm{Re} > 8$ обусловлено тем, что, как следует из двучленной формулы (2.5), при $\mathrm{Re} > 8$ позади сферы образуется область с замкнутой циркуляцией — стационарный присоединенный вихрь, размеры которого увеличиваются при увеличении числа Рейнольдса. Поэтому формулы (2.7) имеют смысл лишь при $\theta^+ \leqslant \theta \leqslant \pi$, где $\theta^+ = 0$ при $\mathrm{Re} \leqslant 8$

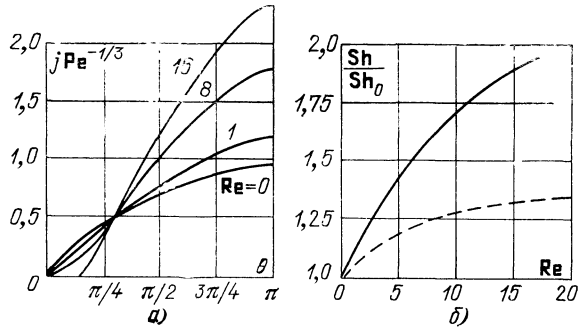


Рис. 3.2. Зависимости локального диффузионного потока на поверхность сферы и среднего числа Шервуда от числа Рейнольдса.

и $\theta^+ = \theta^+(\mathrm{Re}) = \arccos(3/4 + 2\mathrm{Re}^{-1})$ при $\mathrm{Re} > 8$. При вычислении полного потока на сферу при $\mathrm{Re} > 8$ область углов $\theta < \theta^+$ не учитывалась.

На рис. 3.2 показаны найденные по формулам (2.8) зависимости локального диффузионного потока на поверхность сферы и числа Шервуда от числа Рейнольдса Re.

Из формулы (2.7) и рис. 3.2 видно, что на большей части поверхности поток увеличивается с ростом числа Рейнольдса, а в областях, близких к кормовой части поверхности сферы, уменьшается; в частности, при $\mathrm{Re} > 8$ на границе стационарного вихря $\theta = \theta^+(\mathrm{Re})$ локальный поток обращается в нуль. Полный поток и число Шервуда с ростом Re монотонно возрастают, причем этот прирост является значительным и достигает 14% даже при $\mathrm{Re} = 1$.

Следует отметить, что использование двучленного разложения функции тока по числу Рейнольдса (2.5) при $\mathrm{Re} > 1$ является формальной экстраполяцией двучленного приближения функции тока, полученного путем использования метода сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру Re на значения числа Рейнольдса, существенно выходящие за пределы применимости указанного метода. Возможность такой экстраполяции, как и в случае задачи о массообмене капли, основывается на

сопоставлении поля скоростей (2.5) с имеющимися отдельными результатами численного расчета поля скоростей обтекания капли и частицы.

Пример численного расчета массообмена частицы с потоком в приближении диффузионного пограничного слоя при конечных числах Рейнольдса можно найти в работе [19]. В этой работе в качестве данных о поле скоростей в окрестности сферы при $\mathrm{Re} \leqslant 20$ использовались результаты численного интегрирования задачи об обтекании сферы ламинарным потоком [145]. На основе обработки численных данных о притоке вещества к поверхности сферы в [19] была предложена простая аппроксимационная формула для расчета среднего числа Шервуда

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0\left(1 + \frac{1}{8}\,\mathrm{Re}^{1/3}\right), \tag{2.9}$$

дающая хорошие результаты в диапазоне $0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 20$. Число Шервуда Sh_0 определено первым членом разложения (2.4). Результаты расчета интегрального потока по приближенной формуле (2.9) показаны на рис. 3.2 штриховой линией.

§ 3. Сферическая частица в потоке с градиентом скорости. Деформационное течение

Рассмотрим теперь стационарную диффузию вещества к поверхности сферы при деформационном обтекании [29].

В сферической системе координат r, θ, φ в стоксовом приближении поле скоростей обтекания сферы, удовлетворяющее граничным условиям прилипания на поверхности сферы и переходящее в однородное деформационное течение (формула (6.1) гл. 1) вдали от нее, определяется функцией тока, выражение для которой

$$\psi_E = \mathrm{sign} E\, g(r) \sin^2\theta \cos\theta,$$
$$g(r) = r^3 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^2}, \tag{3.1}$$

следует из формулы (6.2) гл. 1 при $\beta \to \infty$.

Поле течения (3.1), как и в случае капли, симметрично относительно плоскости $\theta = \pi/2$ и характеризуется двумя изолированными критическими точками $r = 1$, $\theta = 0$ и $r = 1$, $\theta = \pi$ (это точки стекания при $E > 0$ и натекания при $E < 0$) и одной критической линией $r = 1$, $\theta = \pi/2$ (это линия натекания при $E > 0$ и стекания при $E < 0$).

Получим асимптотические выражения для распределения концентрации растворенного в жидкости вещества и диффузионного потока на сферу в поле деформационного течения в предположении, что на ее поверхности происходит полное поглощение вещества, концентрация которого постоянна вдали от частицы. Распределение концентрации вещества в потоке определяется решением задачи (1.1), (1.2), (3.1). Введем число Пекле и малый параметр ε по формуле $\mathrm{Pe}_E = {}^1/_2 \mid E \mid a^2 D^{-1} = \varepsilon^{-3} \gg 1$. Асимптотический анализ показывает, что в данном случае, как и для капли, в поле течения могут быть выделены характерные области с различными механизмами массопереноса. При $E > 0$ диффузионный пограничный слой будет начинаться в окрестности критической линии, а при $E < 0$ — в окрестности критических точек.

Диффузионный пограничный слой. Локальный и полный диффузионные потоки на поверхность сферы. Введем растянутую координату $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$ и ограничимся главными членами разложения по малому параметру ε; тогда из уравнения (1.1), граничных условий (1.2) и выражения для функции тока (3.1) в переменных Мизеса

$$\theta, \quad \Psi_2 = \varepsilon^{-2} \mid \psi_E \mid = \frac{15}{2} Y^2 \sin^2\theta \mid \cos\theta \mid \tag{3.2}$$

получаем следующее уравнение и граничные условия для концентрации в пограничном слое:

$$-\frac{\partial c^{(d)}}{\partial \theta} = 30^{1/2} \sin^2\theta \mid \cos\theta \mid^{1/2} \frac{\partial}{\partial \Psi_2} \sqrt{\Psi_2} \frac{\partial c^{(d)}}{\partial \Psi_2}, \tag{3.3}$$

$$\Psi_2 = 0, \quad c^{(d)} = 0; \qquad \Psi_2 \to \infty, \quad c^{(d)} \to 1.$$

Условие сращивания решения в диффузионном пограничном слое с решением во внешней области вблизи критической точки (линии) натекания дает

$$\theta = \theta^-, \quad \Psi_2 \neq 0, \quad c^{(d)} = 1, \tag{3.4}$$

где

$$\theta^- = \frac{\pi}{2} \text{ при } E > 0, \quad \theta^- = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ \pi, & \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \text{ при } E < 0.$$

Введем переменные

$$\zeta = \sqrt{\Psi_2} = \varepsilon^{-1} \sqrt{\mid \psi_E \mid}, \quad \tau(\theta) = \frac{\sqrt{30}}{4} A(\theta), \tag{3.5}$$

где

$$A(\theta) = \left| \int_{\theta}^{\theta^-} \sin^2\theta \,|\cos\theta|^{1/2}\, d\theta \right|.$$

Можно показать, что

$$A(\theta) = \begin{cases} \Omega(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ \Omega(\pi - \theta), & \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \quad \text{при } E > 0,$$

$$A(\theta) = \begin{cases} \Omega(\theta) - \Omega(0), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ \Omega(\pi - \theta) - \Omega(0), & \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \quad \text{при } E < 0, \tag{3.6}$$

$$\Omega(\theta) = \int_{\theta}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^{1/2}\theta \, d\theta =$$

$$= \Omega(0) + \frac{2}{5}\sin\theta\cos^{3/2}\theta - \frac{4}{5} E\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$\Omega(0) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{3/2}\left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right]^{-2},$$

где $E(\theta, k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Тогда уравнение и граничные условия (3.3), (3.4) могут быть приведены к виду (1.13) — (1.15). Поэтому распределение концентрации в диффузионном пограничном слое сферы в поле деформационного течения (3.1) определяется формулами (1.16), (3.5), (3.6). Отсюда следуют выражения для локального потока вещества на поверхность сферы и среднего числа Шервуда [29]:

$$j(\theta) = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/3} \mathrm{Pe}_E^{1/3} \frac{\sin\theta\,|\cos\theta|^{1/2}}{[A(\theta)]^{1/3}}, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Sh} = \frac{I}{4\pi} = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/3}\left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1}\Omega^{2/3}(0)\,\mathrm{Pe}_E^{1/3} \approx 1{,}22\,\mathrm{Pe}_E^{1/3}, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Pe}_E = {}^1/_2\,|E|a^2D^{-1}.$$

Как и следовало ожидать по аналогии со случаем капли, значения числа Шервуда при $E > 0$ и $E < 0$ одинаковы, несмотря на существенное различие локальных диффузионных потоков как по максимальным значениям, так и по распределению по поверхности сферы.

На рис. 3.3 приведены нормированные распределения $j(\theta)/\mathrm{Sh}$ при $E > 0$ и $E < 0$ (сплошные линии); штриховая линия соответствует случаю поступательного стоксова потока (2.1).

Отметим, что согласно экспериментальным данным [53, 54, 152] зависимость (3.8) при соответствующем выборе масштаба скорости может быть использована для определения среднего числа Шервуда в случае неподвижной сферической частицы в поле простого сдвига.

Диффузионный след. Исследование диффузионного следа при $E > 0$, когда точки стекания являются изолированными критическими точками, аналогично случаю

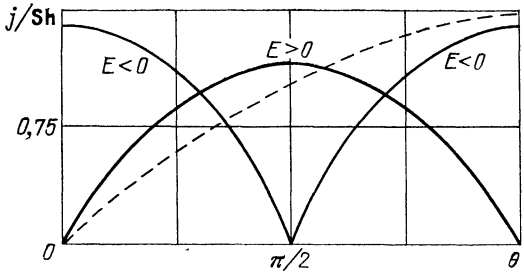


Рис. 3.3. Распределение локального диффузионного потока по поверхности сферы в случае осесимметричного деформационного течения.

обтекания сферы поступательным потоком. Структура диффузионного следа, число и порядок характерных размеров соответствующих областей $W^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ остаются теми же. При этом распределение концентрации в конвективно-погранслойной области $W^{(1)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ O(\varepsilon^3) \leqslant |\psi_E| \leqslant O(\varepsilon^2)\}$ и внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{-1}),\ |\psi_E| \leqslant O(\varepsilon^3)\}$ дается формулами

$$c^{(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3},\ \frac{|\psi_E|^{3/2}}{9\varepsilon^3 \tau(0)}\right), \tag{3.9}$$

$$c^{(2)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{\tau(0)}\right)^{1/3} (r-1)^{1/2} \times \Phi\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{|\psi_E|}{2\varepsilon^3 (r-1)}\right), \tag{3.10}$$

где

$$\tau(0) = \frac{\sqrt{30}}{4}\,\Omega(0) = 2\pi^{3/2}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{-2} \approx 0{,}656.$$

Распределение концентрации в области критических точек стекания $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \theta \leqslant O(\varepsilon);\ r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \pi - \theta \leqslant O(\varepsilon)\}$ определяется уравнением и граничными условиями (1.27), (1.28), (1.33), где $A =$

$= 3^{1/3}[\Gamma(1/3)]^{-1}(\tau(0))^{-1/3}$, а в области смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon^{-1}) \leqslant r,\ |\psi_E| \leqslant O(\varepsilon^2)\}$ — формулами (1.37), (3.9).

При $E < 0$ диффузионный след состоит из двух характерных областей — окрестности линии стекания $W^{(3)}$: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon),\ \theta - \pi/2 \leqslant O(\varepsilon)\}$ и непосредственно примыкающей к областям d и $W^{(3)}$ области смешения $W^{(4)}$: $\{O(\varepsilon) \leqslant r - 1,\ \psi_E \leqslant O(\varepsilon^2)\}$; при этом конвективно-пограничная и внутренняя области следа, как и в случае капли, отсутствуют (здесь в силу симметрии задачи относительно плоскости $\theta = \pi/2$ рассматривается лишь область $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, где $\psi_E \geqslant 0$).

В области $W^{(3)}$, введя переменные $Y_* = \varepsilon^{-1}(15)^{1/3} \times (r - 1)$, $S_* = \varepsilon^{-1}(15)^{1/3}(\theta - \pi/2)$ и выделяя в уравнении (1.1) с учетом (3.1) главные члены разложения по малому параметру ε, получаем следующую краевую задачу для определения поля концентрации (ср. с уравнениями (1.8), (1.27)):

$$Y_*\left(\frac{1}{2}Y_*\frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y_*} - S_*\frac{\partial c^{(3)}}{\partial S_*}\right) = \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y_*^2} + \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial S_*^2},$$

$$Y_* = 0,\quad c^{(3)} = 0;\quad S_* = 0,\quad \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S_*} = 0,$$

$$S_* \to \infty,\quad c^{(3)} = c^{(d)}(\theta \to \pi/2) \to \varepsilon^{1/2}\bar{A}Y_*S_*^{1/2}, \quad (3.11)$$

$$Y_* \to \infty,\quad \left[\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y_*^2} \Big/ \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S_*^2}\right] \to 0,$$

$$\bar{A} = 3^{1/3}2^{-1/2}[\Gamma(1/3)]^{-1}(\tau(0))^{-1/3} \approx 0{,}493.$$

Второе граничное условие есть условие симметрии задачи относительно плоскости $\theta = \pi/2$, третье получено из условия сращивания с решением в диффузионном пограничном слое, четвертое является следствием условия сращивания с решением в примыкающей к $W^{(3)}$ области смешения $W^{(4)}$.

К задаче, аналогичной (3.11), приводит исследование поля концентрации в окрестности линии стекания для кругового цилиндра. Решение этой задачи было получено численными методами в работе [160], согласно результатам которой для локального диффузионного потока имеем

$$j^{(3)} = (15)^{1/3}\bar{A}\varepsilon^{-1/2}h(S_*), \quad (3.12)$$

где

$$h(S_*) = \begin{cases} 0{,}819 & \text{при } S_* = 0, \\ S_*^{1/2} - 0{,}124S_*^{-1/2} & \text{при } S_* \to \infty. \end{cases}$$

Асимптотическое поведение концентрации в области $W^{(3)}$ при $Y \to \infty$ исследуется так же, как в случае капли, и определяется выражением

$$c^{(3)} = 0{,}436\,\varepsilon^{1/2} Y_*^{3/4} \Phi\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8} Y_* S_*^2\right) \quad (Y_* \to \infty).$$

Наконец, в области $W^{(4)}$ при помощи метода, аналогичного использованному в случае капли, для распределения концентрации можно получить следующее выражение [73]:

$$c^{(4)}(\tau, \Psi_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\Psi_2^2 + \widetilde{\Psi}_2^2}{4\tau}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\Psi_2 \widetilde{\Psi}_2}{2\tau}\right) \times$$

$$\times \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\widetilde{\Psi}_2}{9\tau(0)}\right) d\widetilde{\Psi}_2, \quad (3.13)$$

где $\Psi_2 = \varepsilon^{-2} |\psi_E|$, $\tau = \tau(r) = \varepsilon^{-1} \int_1^r g(r)\, dr$.

Как следует из формулы (3.13), в случае $E < 0$ основное изменение концентрации в области $W^{(4)}$ происходит на малых расстояниях $r - 1 \leqslant O(\varepsilon^{1/3})$ от поверхности сферы. Сравнение с аналогичными результатами для жидкой капли (гл. 1, § 6) показывает, что диффузионный след капли в случае сдвигового потока при $E < 0$ имеет протяженность порядка единицы и оказывается значительно интенсивнее, чем диффузионный след за твердой сферой, где его протяженность имеет порядок $\varepsilon^{1/3} \ll 1$.

§ 4. Сфера в поступательно-сдвиговом потоке и потоке с параболическим профилем скорости

Поступательно-сдвиговый поток. В качестве обобщения результатов §§ 1—3 рассмотрим задачу о диффузии вещества к поверхности сферы, находящейся в однородном поступательно-сдвиговом потоке [40], поле скоростей которого на больших расстояниях от сферы дается формулой (6.12) гл. 1. В стоксовом приближении функция тока определяется суммой выражений (1.3) и (3.1) и вблизи поверхности сферы записывается в следующей безразмерной форме (масштабами длины и скорости служат радиус частицы и скорость потока на бесконечности):

$$\psi = {}^3/_4\,(r - 1)^2(1 + \omega \cos\theta) \sin^2\theta.$$

Здесь

$$\omega = 5EaU_\infty^{-1}\ , \qquad (4.1)$$

— характерный параметр, позволяющий выделить четыре качественно различных типа обтекания твердой сферы; он отличается от аналогичного параметра для капли лишь числовым множителем.

Каждый из возможных типов течения реализуется, как и в случае капли, при выполнении соответствующих соотношений а) — г), приведенных в § 6 гл. 1; линии тока для каждого из них схематически показаны на рис. 1.5.

Решая задачу о массообмене сферы с потоком при больших числах Пекле: $\max(\mathrm{Pe}, \mathrm{Pe}_E) \gg 1$ ($\mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1}, \mathrm{Pe}_E = {}^1/_2|E|a^2D^{-1}$) в предположении о полном поглощении вещества поверхностью сферы, можно получить следующие выражения для главного члена разложения локального потока вещества на поверхность частицы в указанных выше случаях.

Случай а) $0 \leqslant \omega \leqslant 1$:

$$j(\theta) = \frac{j^0}{(\omega+1)^{1/6}} \frac{\sin\theta\,(1+\omega\cos\theta)^{1/2}}{[\tilde{A}(\theta,\ p)]^{1/3}}, \qquad p^2 = \frac{2\omega}{\omega+1}, \qquad (4.2)$$

где $j^0 = 6^{-1/3}[\Gamma(4/3)]^{-1}\,\mathrm{Pe}^{1/3}$, $\tilde{A}(\theta,\ p) = A(\pi,\ p) - A(\theta,\ p)$, функция $A(\theta,\ p)$ определена формулой (2.6).

Случай б) $\omega \geqslant 1$. Распределение диффузионного потока по поверхности сферы имеет различный вид на лобовой ($\theta^- \leqslant \theta \leqslant \pi$) и кормовой ($0 \leqslant \theta \leqslant \theta^-$) частях сферы. Используя соотношение

$$\tilde{A}(\theta,\ k) = k^{-3}\tilde{A}\left(2\arcsin\left(k\sin\frac{\theta}{2}\right),\ k^{-1}\right),$$

получаем

$$j(\theta) = j^0 \frac{(2\omega)^{1/2}}{(\omega-1)^{2/3}} \frac{\sin\theta\,(1+\omega\cos\theta)^{1/2}}{\left[\tilde{A}\left(2\arcsin\left(q^{-1}\cos\frac{\theta}{2}\right),\ q\right)\right]^{1/3}},$$

$$q^2 = \frac{\omega-1}{2\omega}, \qquad \theta^- \leqslant \theta < \pi; \qquad (4.3)$$

$$j(\theta) = j^0 \frac{(2\omega)^{1/2}}{(\omega+1)^{2/3}} \frac{\sin\theta\,(1+\omega\cos\theta)^{1/2}}{\left[\tilde{A}\left(2\arcsin\left(p\sin\frac{\theta}{2}\right),\ p^{-1}\right)\right]^{1/3}},$$

$$p^2 = \frac{2\omega}{\omega+1}, \qquad 0 < \theta \leqslant \theta^-,$$

где $\theta^- = \arccos(-\omega^{-1})$.

Случай в) $-1 \leqslant \omega \leqslant 0$:

$$j(\theta) = \frac{j^0}{(|\omega|+1)^{1/6}} \frac{\sin\theta\,(1-|\omega|\cos\theta)^{1/2}}{[\bar{A}(0,\ p)]^{1/3}}, \qquad p^2 = \frac{2|\omega|}{|\omega|+1}. \tag{4.4}$$

Случай г) $\omega \leqslant -1$. Для распределения локального диффузионного потока на лобовой ($\theta^+ < \theta \leqslant \pi$) и кормовой ($0 \leqslant \theta < \theta^+$) частях сферы справедливы соотношения

$$j(\theta) = j^0 \frac{(2|\omega|)^{1/2}}{(|\omega|+1)^{2/3}} \frac{\sin\theta\,(1-|\omega|\cos\theta)^{1/2}}{\left[\bar{A}(0,\ p^{-1}) - \bar{A}\left(2\arcsin\left(p\cos\frac{\theta}{2}\right),\ p^{-1}\right)\right]^{1/3}},$$

$$p^2 = \frac{2|\omega|}{|\omega|+1}, \qquad \theta^+ < \theta \leqslant \pi; \tag{4.5}$$

$$j(\theta) = j^0 \frac{(2|\omega|)^{1/2}}{(|\omega|-1)^{2/3}} \frac{\sin\theta\,(|\omega|\cos\theta-1)^{1/2}}{\left[\bar{A}(0,\ q) - \bar{A}\left(2\arcsin\left(q^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right),\ q\right)\right]^{1/3}},$$

$$q^2 = \frac{|\omega|-1}{2|\omega|}, \qquad 0 \leqslant \theta < \theta^+,$$

где $\theta^+ = \arccos(-\omega^{-1})$.

Используя формулы (4.2)—(4.5), (2.6), для среднего числа Шервуда получаем следующие выражения:

$$\mathrm{Sh} = 3^{2/3}2^{-7/2}\left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1}(|\omega|+1)^{1/3}B\left(\sqrt{\frac{2|\omega|}{|\omega|+1}}\right)\mathrm{Pe}^{1/3}$$
при $|\omega| \leqslant 1$; (4.6)

$$\mathrm{Sh} = 3^{2/3}2^{-9/2}\left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1}|\omega|^{-1}\left\{(|\omega|-1)^{4/3}B\left(\sqrt{\frac{|\omega|-1}{2|\omega|}}\right) + (|\omega|+1)^{4/3}B\left(\sqrt{\frac{|\omega|+1}{2|\omega|}}\right)\right\}\mathrm{Pe}^{1/3} \quad \text{при } |\omega| \geqslant 1,$$

где

$$B(k) = [\bar{A}(0,\ k)]^{2/3} = [A(\pi,\ k)]^{2/3} = \left[\frac{8}{15}\frac{(1-k^2)(2-k^2)}{k^4}\mathrm{K}(k) - \frac{16}{15}\frac{k^4-k^2+1}{k^4}\mathrm{E}(k)\right]^{2/3}$$

(K (k) и E (k) — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно).

Зависимость величины $\mathrm{Sh}\,\mathrm{Pe}^{-1/3}$ от $|\omega|$ представлена на рис. 3.4.

Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии градиентов скорости на массообмен сферы с потоком. В частном случае $|\omega| = 0$ формулы (4.6) переходят в соответствующее выражение для поступа-

тельного потока, определяемое первым членом разложения (2.4), а при $|\omega| \to \infty$ соответствуют формуле (3.8) для сферы в однородном сдвиговом потоке.

Интересно отметить, что поле скоростей жидкости вблизи поверхности непроводящей сферы при обтекании ее вязкой несжимаемой электропроводной жидкостью, через которую проходит электрический ток, можно интерпретировать как поле обтекания сферы поступательно-сдвиговым потоком, для которого параметр E определяется плотностью электрического тока на бесконечности. Задача о диффузии к сфере в этом случае [4] полностью аналогична рассмотренной выше.

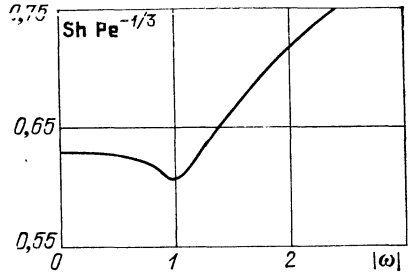


Рис. 3.4. Зависимость среднего числа Шервуда от значения параметра ω.

Сфера в потоке с параболическим профилем скоростей [30]. Рассмотрим еще один характерный пример массообмена частицы с потоком — диффузию к поверхности сферы в случае, когда поле скоростей вдали от нее имеет вогнутый параболический профиль, ось симметрии которого проходит через центр сферы. В связанной с центром сферы декартовой системе координат x, y, z, у которой ось z направлена по оси потока, для распределения скорости на больших расстояниях от частицы имеем

$$r \to \infty, \quad v \to Te_z (x^2 + y^2), \tag{4.7}$$

где параметр T характеризует кривизну профиля на оси симметрии, e_z — орт оси z. Поле течения в этом случае служит первым приближением в методе «зеркальных отражений» [107] для частицы, движущейся по оси течения Пуазейля, причем скорость частицы совпадает со скоростью жидкости на оси.

Для поля течения воспользуемся полученными в стоксовом приближении результатами [129, 182], которые приводят к следующему выражению для функции тока.

$$\psi = \frac{1}{4} r^4 \sin^4\theta \left(1 - \frac{7}{2}\frac{1}{r^5} + \frac{5}{2}\frac{1}{r^7}\right) - \frac{1}{2} r \sin^2\theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2. \tag{4.8}$$

Вблизи сферы получим

$$r \to 1, \quad \psi \approx -2(r-1)^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{35}{16}\sin^2\theta\right). \qquad (4.9)$$

Формулы (4.8), (4.9) записаны в безразмерном виде в сферической системе координат, связанной с центром сферы, где полярный угол θ отсчитывается от оси потока, как показано на рис. 3.5, а за характерные масштабы дли-

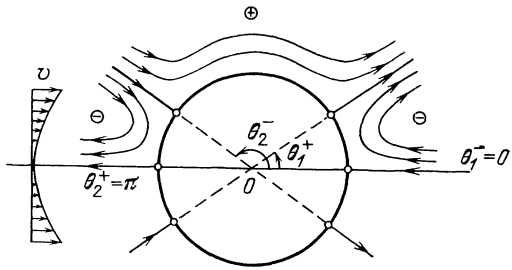


Рис. 3.5. Схема обтекания частицы в случае параболического профиля скоростей натекающего потока.

ны и скорости выбраны радиус сферы a и характерная скорость a^2T соответственно.

Из выражения (4.9) видно, что траекториями натекания в этом случае являются луч $\theta = \theta_1^-$ и образующие конуса $\theta = \theta_2^-$, а траекториями стекания — образующие конуса $\theta = \theta_1^+$ и луч $\theta = \theta_2^+$, причем

$$\theta_1^- = 0, \quad \theta_2^- = \pi - \arcsin(4/\sqrt{35}), \qquad \theta_1^+ = \arcsin(4/\sqrt{35}), \quad \theta_2^+ = \pi. \qquad (4.10)$$

В предельном случае больших чисел Пекле решение задачи о распределении концентрации у поверхности частицы может быть найдено так же, как и решения рассмотренных выше задач, путем выделения зон с различным асимптотическим поведением решений и построения приближенного решения в виде совокупности решений в каждой из зон. Наиболее важной для расчета интенсивности массообмена здесь также является область диффузионного пограничного слоя.

Следуя изложенному в гл. 1 методу, можно показать, что распределение концентрации в диффузионном пограничном слое в этом случае будет определяться формулой (1.16), в которой переменные ζ и τ следует задать

следующим образом:

$$\zeta = |\psi|^{1/2}\mathrm{Pe}^{1/3}, \quad \mathrm{Pe} = a^3 T D^{-1} \gg 1,$$
$$\tau = \tau(\theta, \theta^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{\theta^-}^{\theta} \sin^2 x \left| 1 - \frac{35}{16} \sin^2 x \right|^{1/2} dx \right|. \tag{4.11}$$

В качестве нижнего предела в интеграле (4.11) в области $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1^+$ выбирается значение θ_1^-, а в области $\theta_1^+ \leqslant \theta \leqslant \pi$ — величина θ_2^-.

Используя формулы (1.16), (4.11), получим выражение для полного диффузионного потока реагирующего вещества на поверхность сферы, обтекаемой стоксовым потоком с параболическим профилем скоростей на бесконечности:

$$I = 2\pi 3^{1/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{-1} \mathrm{Pe}^{1/3} [\tau^{2/3}(0, \theta_1^+) + \tau^{2/3}(\theta_1^+, \theta_2^-) + \tau^{2/3}(\theta_2^-, \pi)] = 12{,}02\,\mathrm{Pe}^{1/3}, \tag{4.12}$$

где

$$|\tau(0, \theta_1^+)| = |\tau(\theta_2^-, \pi)| = \frac{1}{6\sqrt{70}} \left[27\mathrm{E}\left(\frac{4}{\sqrt{35}}\right) - 19\mathrm{K}\left(\frac{4}{\sqrt{35}}\right) \right],$$
$$|\tau(\theta_1^+, \theta_2^-)| = \frac{1}{6\sqrt{70}} \left[27\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{19}{35}}\right) - 8\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{19}{35}}\right) \right]$$

(K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно).

Из (4.12) для среднего числа Шервуда найдем

$$\mathrm{Sh} = 0{,}957\,\mathrm{Pe}^{1/3}.$$

Отметим, что такой же суммарный приток вещества к поверхности сферы, находящейся в поле чисто деформационного течения, будет при $E = 0{,}965\,aT$.

§ 5. Массоперенос к частицам, взвешенным в турбулентном потоке

Применим полученные выше результаты анализа процесса массообмена частиц в потоке с градиентом скорости к расчету массопереноса к частицам, взвешенным в турбулентном потоке.

Суспензии, интенсивно перемешиваемые в смесительных аппаратах, широко используются в ряде технологических процессов для экстракции растворимого компонента твердой фазы, а также для проведения гетерогенно-каталитических реакций в реакторах с мешалками.

Примерами могут служить технологические процессы в гидрометаллургии (извлечение золота из руды в цианистый раствор, растворение серной кислотой алюминия, содержащегося в бокситах, и др.), в сахарном производстве, в процессах гидрирования жиров и т.д. Основной задачей расчета таких процессов является оценка скорости массопередачи к поверхности мелких частиц, обтекаемых жидкостью, движение которой определяется случайными пульсациями и характеризуется статистическими параметрами турбулентного потока.

Предполагаем, что определенное по скорости относительного движения частицы и жидкости число Рейнольдса мало, а число Пекле велико. Турбулентное движение жидкости, несущей взвешенные частицы, можно считать в среднем установившимся, хотя и не обязательно однородным, причем взвешенная частица последовательно попадает в различные участки поля течения, так что в среднем скорость обтекания частицы постоянна. Эти предположения справедливы для широкого класса систем, встречающихся на практике, в частности для суспензий в аппаратах с мешалками разных типов.

Поле течения вблизи частицы. Как уже отмечалось во введении, скорость конвективного массопереноса к частицам, движущимся в потоке жидкости, определяется полем течения вблизи частицы, причем существенны лишь относительные скорости обтекания. Это поле течения обусловлено как движением частиц в жидкости под действием внешних сил, например силы тяжести, так и градиентами скорости, которые имеют место в невозмущенном потоке (в отсутствие частиц).

Для турбулентного потока статистические свойства тензора градиентов скорости, а также старших производных от скорости определяются микромасштабными характеристиками турбулентности и описываются, согласно теории А. Н. Колмогорова [55], двумя размерными параметрами: коэффициентом кинематической вязкости жидкости ν и средней локальной скоростью диссипации энергии ϵ. Отношение членов, содержащих вторые производные от скорости обтекания, к членам, пропорциональным градиентам скоростей, в разложении поля скоростей вблизи частицы в ряд Тейлора будет порядка $a\epsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$, или $(a^2|E|/\nu)^{1/2}$, где a — радиус частицы, $|E| = O(\epsilon^{1/2}/\nu^{1/2})$ — мера средней локальной скорости растяжения-сжатия, характеризующая поле турбулентного течения [13]. Величина $^1/_2\, a^2 |E|/\nu$ представляет собой число Рей-

нольдса частицы в поле чисто деформационного течения (см. § 3). Таким образом, из предположения о малости числа Рейнольдса следует, что размер частицы мал по сравнению с размерами самых мелких вихрей, характерное время a^2/ν мало по сравнению с временным масштабом последних, и скорость жидкости относительно частицы можно аппроксимировать линейной функцией пространственных координат, т. е. считать градиенты скорости турбулентного обтекания частицы не зависящими от координат функциями времени [117].

Далее, тензор градиентов скорости (в размерной форме) можно представить в виде суммы симметричного $\boldsymbol{E}_*$ и антисимметричного $\boldsymbol{\Omega}_*$ тензоров, причем последний характеризует вращение жидкости как твердого тела с угловой скоростью, равной половине вектора вихря. Свободно взвешенная в жидкости сферическая частица будет стремиться прийти во вращение с такой же угловой скоростью. Благодаря инерции частицы скорость ее вращения будет подстраиваться к скорости вращения жидкости с временем релаксации, равным произведению отношения плотностей частицы и среды на характерное время a^2/ν. Однако, как было отмечено выше, при малых числах Рейнольдса, рассчитанных по радиусу частицы и скорости ее относительного движения, величина a^2/ν мала по сравнению с временным масштабом мелких вихрей, а для взвесей частиц в капельных жидкостях отношение плотностей частиц и среды будет порядка единицы. Отсюда следует, что время релаксации много меньше временного масштаба мелких вихрей, т. е. скорость вращения частицы можно считать всегда совпадающей с локальной скоростью вращения жидкости.

Таким образом, в случае частицы, взвешенной в турбулентном потоке, при весьма общих предположениях скорость жидкости в системе координат, связанной с центром частицы, можно представить в виде [117]

$$\boldsymbol{v}_* (\boldsymbol{r}_*) = \boldsymbol{U}_* + \boldsymbol{v}_{*T} + \boldsymbol{\Omega}_* \cdot \boldsymbol{r}_* + \boldsymbol{r}_* \cdot \boldsymbol{E}_* + \boldsymbol{v}_{*E},$$

где $\boldsymbol{U}_*$ — скорость поступательного потока ($-\boldsymbol{U}_*$ — скорость поступательного движения частицы относительно жидкости), $\boldsymbol{v}_{*T}$ и $\boldsymbol{v}_{*E}$ — вносимые частицей возмущения скорости поступательного потока и деформационного течения соответственно. Подчеркнем, что здесь параметры течения $\boldsymbol{U}_*$, $\boldsymbol{\Omega}_*$ и $\boldsymbol{E}_*$ зависят от времени.

Вращение частицы приводит к некоторому подавлению конвективного переноса растворенного вещества к ее по-

верхности, поскольку благодаря тенденции к замыканию траекторий жидких элементов затрудняется подвод необедненного раствора. При ненулевой завихренности невозмущенного потока жидкости траектории элементов жидкости вблизи поверхности частицы представляют собой слегка деформированные винтовые линии с малым шагом. В результате этого конвективный перенос, обусловленный некоторыми компонентами тензора $\boldsymbol{E}_*$, подавляется. Действительно, представим общее деформационное течение, описываемое тензором $\boldsymbol{E}_*$, в виде суперпозиции осесимметричного растяжения-сжатия, в котором ось симметрии направлена вдоль вектора вихря, и другого деформационного течения с нулевой скоростью растяжения по направлению вектора вихря. Можно заключить, что только первая из указанных составляющих течения приводит к тому, что элементы жидкости приближаются к поверхности частицы, а затем удаляются от нее, давая основной вклад (в главном приближении по числу Пекле) в скорость массопереноса. Аналогичные рассуждения показывают, что в случае, когда невозмущенное поле течения представляет собой суперпозицию поступательного потока и вращения жидкости как твердого тела, основной вклад в скорость массопереноса дает составляющая скорости потока, направленная вдоль вектора вихря.

Отмеченные выше особенности структуры поля течения вблизи частицы, играющие важную роль при исследовании процесса массопереноса, были установлены Бэтчелором сначала для случаев стационарного [116], а затем и нестационарного [117] поля течения. Согласно этим результатам процесс массопереноса к частице, взвешенной в турбулентном потоке, в главном приближении по числу Пекле полностью определяется полем течения, представляющим собой суперпозицию поступательного потока со скоростью $\langle U_\omega \rangle$ в направлении вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ и деформационного осесимметричного течения со скоростью осевого растяжения (сжатия), равной $\langle E_\omega \rangle$, в том же направлении (угловые скобки означают усреднение по промежутку времени порядка $|\boldsymbol{\omega}|^{-1}$). Таким образом, задача о массопереносе к частице, взвешенной в турбулентном потоке, сводится к рассмотренной в § 4 задаче о диффузии к частице в поступательно-сдвиговом потоке, параметры которого

$$\langle U_\omega \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{U}_* \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \right\rangle \text{ и } \langle E_\omega \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{E}_* \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \right\rangle .$$

Теперь необходимо связать параметры $\langle U_\omega \rangle$ и $\langle E_\omega \rangle$ со свойствами турбулентности, а параметр $\langle U_\omega \rangle$ также и с относительной разностью плотностей частицы и жидкости. Локальная завихренность турбулентного потока обусловлена в основном мелкими вихрями, и статистическое распределение вектора $\boldsymbol{\omega}$ изотропно. Отсюда можно сделать вывод [117], что $\langle U_\omega \rangle = 0$, т. е. в главном приближении по числу Пекле скорость массопереноса не зависит от относительной разности плотностей частицы и жидкости. Величина $\langle E_\omega \rangle$ является параметром турбулентного потока, не зависящим от физических свойств взвешенных частиц, и широко используется в теории турбулентности как средняя скорость растяжения вихревых линий. Можно показать [13], что для локально однородной и изотропной турбулентности $\langle E_\omega \rangle = \dfrac{7}{6\sqrt{15}} S \left(\dfrac{\epsilon}{\nu}\right)^{1/2}$, где параметр S, согласно теории А. Н. Колмогорова [55], является универсальной постоянной турбулентного движения при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda = u'\lambda/\nu$, определяемых по среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций u'^2 и масштабу длины $\lambda = (15\nu u'^2/\epsilon)^{1/2}$. На основании экспериментальных данных, полученных в широком диапазоне значений Re_λ, можно принять [117] $S = 0{,}60$; тогда

$$\langle E_\omega \rangle = 0{,}18\ (\epsilon/\nu)^{1/2}. \tag{5.1}$$

Число Шервуда. Сравнение с экспериментом. Для определения поля концентрации вблизи сферической частицы, взвешенной в турбулентном потоке, и числа Шервуда теперь достаточно воспользоваться результатами § 3, в которых под величиной $|E|$, характеризующей интенсивность осевого растяжения (сжатия) в деформационном течении, следует подразумевать среднюю скорость растяжения вихревых линий $\langle E_\omega \rangle$, определяемую через локальную скорость диссипации энергии ϵ по формуле (5.1). Выражение (3.8) для числа Шервуда принимает вид [117]

$$\mathrm{Sh} = 0{,}55 \left(\frac{a^2 \epsilon^{1/2}}{D\nu^{1/2}}\right)^{1/3}. \tag{5.2}$$

Соотношение (5.2) получено в предположении, что число Пекле Pe_E деформационного течения велико, а число Рейнольдса Re_E мало, причем

$$\mathrm{Pe}_E = \frac{a^2 \epsilon^{1/2}}{D\nu^{1/2}}, \quad \mathrm{Re}_E = \frac{a^2 \epsilon^{1/2}}{\nu^{3/2}}. \tag{5.3}$$

Заметим, однако, что в предельном случае $\mathrm{Pe}_E \to 0$ массоперенос к частице определяется только молекулярной диффузией, как в покоящейся жидкости, и в этом случае число Шервуда равно единице (см. гл. 6, где исследуется диффузия при малых числах Пекле). Поэтому можно предложить следующую интерполяционную формулу:

$$\mathrm{Sh} = 1 + 0{,}55\,\mathrm{Pe}_E^{1/3} = 1 + 0{,}55\,\mathrm{Sc}^{1/3}\mathrm{Re}_E^{1/3}, \qquad (5.4)$$

которая соответствует асимптотическим значениям числа Шервуда в обоих предельных случаях $\mathrm{Pe}_E \to 0$ и $\mathrm{Pe}_E \to \infty$;

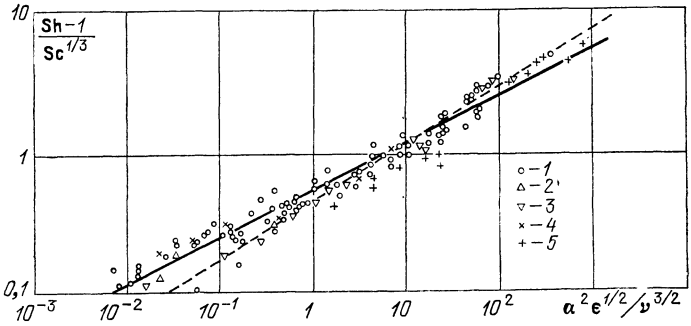


Рис. 3.6. Сравнение среднего числа Шервуда, рассчитанного по формуле (5.4) (сплошная линия), с экспериментальными данными при разных числах Рейнольдса и Шмидта [117]. Штриховая линия соответствует эмпирической зависимости, предложенной в работе [155]. Точками представлены экспериментальные данные [142]: *1* — ионообмен в воде ($\mathrm{Sc} = 0{,}52 \cdot 10^3$), *2* — ионообмен в 0,21% растворе метилцеллюлозы ($\mathrm{Sc} = 3{,}67$), *3* — ионообмен в 0,35% растворе метилцеллюлозы ($\mathrm{Sc} = 11{,}3$), *4* — ионообмен в глицерине ($\mathrm{Sc} = 1{,}08 \cdot 10^2$), *5* — бензойная кислота в воде ($\mathrm{Sc} = 1{,}3$).

здесь Sc — число Шмидта. Интерполяционные формулы такого типа для других условий массопереноса к частице приводятся в гл. 6.

Для практических расчетов по формуле (5.4) необходимо в каждом конкретном случае оценить среднюю локальную скорость диссипации энергии ϵ турбулентного течения, фигурирующую в определении чисел Пекле и Рейнольдса (5.3). Подчеркнем, что турбулентность не обязана быть однородной, достаточно лишь, чтобы твердая частица проходила по всем участкам рассматриваемого объема суспензии примерно с одинаковым временем пребывания в каждом участке. Например, в широко распространенных на практике смесительных аппаратах с ме-

шалками турбулентность неоднородна, однако вследствие интенсивного крупномасштабного движения частиц указанное выше условие приближенно выполняется. В этом случае величину ϵ можно принять равной полной энергии, подводимой к мешалке, отнесенной ко всему объему жидкости в аппарате.

На рис. 3.6 показан результат сравнения величины $(Sh-1)/Sc^{1/3}$, рассчитанной по формуле (5.4) (сплошная линия), с экспериментальными данными по массопереносу к частицам, взвешенным в аппаратах с мешалками, при разных числах Рейнольдса Re_E и Шмидта Sc. Штриховая линия соответствует эмпирической зависимости, предложенной Левинсом и Гластонбери [155] на основании собственных экспериментов, точками представлены экспериментальные данные Харриотта [142]. Видно, что, несмотря на сделанное при выводе зависимости (5.4) предположение о малости чисел Рейнольдса, она хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до значений $Re_E = 10^2$, а при $Re_E > 10^2$ дает слегка заниженный результат, как это и следовало ожидать, по аналогии с данными по влиянию числа Рейнольдса на массообмен частицы с поступательным потоком (§ 2). Таким образом, зависимость (5.4) можно рекомендовать для практических расчетов скорости массопереноса к частицам, взвешенным в турбулентном потоке жидкости, в широком диапазоне чисел Пекле и Рейнольдса.

§ 6. Диффузия к круговому цилиндру в поступательном потоке

Рассмотрим плоскую задачу о стационарной диффузии при больших числах Пекле к поверхности кругового цилиндра, обтекаемого нормальным к его оси поступательным потоком при полном поглощении растворенного в потоке вещества на поверхности цилиндра и постоянной концентрации вдали от него. Эта задача является модельной в химической технологии для расчета массопереноса к реагирующим частицам удлиненной формы, но особенно широко она используется в механике аэрозолей при анализе процесса диффузионного осаждения аэрозолей на волокнах фильтра [105, 108]. Такая модель эффективно применяется также при исследовании ряда биологических процессов, например при оценке собирательной способности антенн самца бабочки тутового шелкопряда при улавливании молекул бомбикола — полового аттрактан-

та, испускаемого самкой, на очень больших (до километра) расстояниях [65, 180].

Безразмерное уравнение диффузии при наличии конвективного переноса вещества и граничные условия в полярной системе координат r, θ, связанной с осью цилиндра, имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial c}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \varepsilon^3\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}\right], \qquad (6.1)$$

$$r = 1, \quad c = 0; \quad r \to \infty, \quad c \to 1 \qquad (6.2)$$

$$(\varepsilon = \mathrm{Pe}_m^{-1/3}, \quad \mathrm{Pe}_m = aUD^{-1}).$$

Угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности, в качестве масштабов длины и концентрации выбраны радиус цилиндра a и величина концентрации вдали от него, масштаб скорости U будем выбирать поразному в каждом конкретном случае обтекания; Pe_m — модифицированное (с учетом выбора масштаба U) число Пекле.

Рассмотрим сначала обтекание цилиндра при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU_\infty \nu^{-1}$ (U_∞ — скорость потока на бесконечности). В этом случае удобно в качестве масштаба скорости принять величину

$$U = U_\infty\left(\frac{1}{2} - \gamma + \ln\frac{4}{\mathrm{Re}}\right)^{-1}, \qquad (6.3)$$

где $\gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Тогда выражение для безразмерной функции тока вблизи поверхности цилиндра (при $r = O(1)$) можно записать в виде (см., например, [105, 108])

$$\psi = \left(r\ln r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)\sin\theta + O(\mathrm{Re}). \qquad (6.4)$$

При малых ε поле концентрации можно построить, решая задачу (6.1), (6.2) методом сращиваемых асимптотических разложений, аналогичным использованному в § 1. Ограничимся здесь исследованием решения в области диффузионного пограничного слоя d: $\{r - 1 \leqslant O(\varepsilon), O(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. Введя растянутую координату $Y = \varepsilon^{-1}(r - 1)$ для старшего члена разложения функции тока (6.4) по ε и Re, получаем

$$\psi = \varepsilon^2\Psi_2, \quad \Psi_2 = Y^2\sin\theta. \qquad (6.5)$$

Перейдем, как обычно, в уравнении (6.1) к переменным Мизеса Ψ_2, θ. В главном приближении по ε с учетом

соотношений (6.5) и преобразований

$$\frac{\partial c}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial c}{\partial \theta}\frac{\partial c}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}\left(\frac{\partial c}{\partial \theta}\right)_{\psi},$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{\theta} = \varepsilon^{-2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\left(\frac{\partial c}{\partial \Psi_2}\right)_{\theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2\varepsilon \Psi_2^{1/2}\sin^{1/2}\theta$$

получим следующее уравнение для концентрации в диффузионном пограничном слое (индекс d опускаем):

$$-\frac{\partial c}{\partial \theta} = 2\sin^{1/2}\theta\frac{\partial}{\partial \Psi_2}\left(\Psi_2^{1/2}\frac{\partial c}{\partial \Psi_2}\right).$$

В переменных

$$\zeta = \Psi_2^{1/2}, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\sin^{1/2} x\, dx$$

это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \zeta^{-1}\frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2}. \tag{6.6}$$

Граничные условия следуют из условия полного поглощения растворенного вещества на поверхности цилиндра (первое условие (6.2)), условия сращивания с решением $c = 1$ во внешней области (при $Y \to \infty$) и условия в передней критической точке, соответствующего сращиванию с решением во внешней области вдоль луча $\theta = \pi$ (т. е. вдоль траектории натекания), и записываются в форме

$$\begin{aligned} &\zeta = 0 \quad (\tau \neq 0), \quad c = 0; \quad \zeta \to \infty, \quad c \to 1; \\ &\tau = 0 \quad (\zeta \neq 0), \quad c = 1. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Задача (6.6), (6.7) совпадает с рассмотренной выше задачей (1.13) — (1.15), поэтому можно сразу записать ее автомодельное решение, выраженное через неполную гамма-функцию в виде (1.16). В исходных полярных координатах получим

$$c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\mathrm{Pe}_m (r-1)^3 \sin^{3/2}\theta\left(\int_0^{\theta}\sin^{1/2} x\, dx\right)^{-1}\right). \tag{6.8}$$

(Фигурирующий здесь интеграл может быть выражен через эллиптические интегралы первого и второго рода.)

Безразмерные локальный и интегральный потоки вещества на поверхность цилиндра, отнесенные к его длине,

и число Шервуда определим по формулам

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1}, \quad I = 2\int_0^{\pi} j(\theta)\, d\theta, \quad \mathrm{Sh} = \frac{I}{2\pi}. \qquad (6.9)$$

Используя соотношение (6.8), для локального диффузионного потока на поверхность цилиндра (за исключением окрестности задней критической точки) получим

$$j(\theta) = \frac{6^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \mathrm{Pe}_m^{1/3} \sin^{1/2}\theta \left[\int_{\theta}^{\pi} \sin^{1/2} x\, dx\right]^{-1/3} =$$

$$= \frac{0{,}678}{(2{,}00 - \ln 2\,\mathrm{Re})^{1/3}} \mathrm{Pe}^{1/3} \sin^{1/2}\theta \left[\int_{\theta}^{\pi} \sin^{1/2} x\, dx\right]^{-1/3} \qquad (6.10)$$

$$(O(\mathrm{Pe}^{-1/3}) \leqslant \theta \leqslant \pi; \quad \mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1}, \quad \mathrm{Re} = aU_\infty \nu^{-1}).$$

Локальный диффузионный поток на поверхность цилиндра в окрестности задней критической точки, согласно вычислениям [160], с точностью до постоянного множителя определяется формулой (2.3).

Как и следовало ожидать по аналогии с процессом массопереноса к сфере, вклад окрестности задней критической точки в полный диффузионный поток на поверхность цилиндра несуществен, и им можно пренебречь, рассматривая разложение полного потока по малому параметру ε с точностью до члена порядка ε.

В главном приближении по ε среднее число Шервуда находится непосредственно по формулам (6.9), (6.10) и имеет вид

$$\mathrm{Sh} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{4/3}} \mathrm{Pe}_m^{1/3} = 0{,}580\ \mathrm{Pe}_m^{1/3}. \qquad (6.11)$$

При вычислении использовано значение интеграла

$$2\int_0^{\pi} \sin^{1/2}\theta \left(\int_{\theta}^{\pi} \sin^{1/2} x\, dx\right)^{-1/3} d\theta = -3\int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta}\left[2\tau(\theta)\right]^{2/3} d\theta =$$

$$= 3\left[2\tau(0)\right]^{2/3} = 3\left[\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\right]^{2/3}.$$

Выражение (6.11) было получено в [67, 134]. Следующий член (порядка единицы) разложения Sh в ряд по ε был

вычислен в [100]. Приведем двучленное разложение числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = \frac{0{,}580}{(2{,}00 - \ln 2\,\mathrm{Re})^{1/3}}\,\mathrm{Pe}^{1/3} + 0{,}0993. \qquad (6.12)$$

Массоперенос к цилиндру при больших числах Рейнольдса рассматривался в работе [115] на основании одной из моделей ламинарного пограничного слоя с отрывом при $\theta \approx 75°$. Для числа Шервуда, характеризующего диффузионный поток на часть поверхности цилиндра до точек отрыва, получено выражение $\mathrm{Sh} = 0{,}605\,\mathrm{Re}^{1/6}\mathrm{Pe}^{1/3}$.

При безотрывном потенциальном обтекании цилиндра поступательным потоком идеальной жидкости в соответствии с известным решением Буссинеска $\mathrm{Sh} = 4\pi^{-3/2}\mathrm{Pe}^{1/2} = 0{,}718\,\mathrm{Pe}^{1/2}$.

§ 7. Диффузия к закрепленному и свободно вращающемуся цилиндрам в произвольном стационарном линейном сдвиговом потоке

Массообмен закрепленного цилиндра [87]. Рассмотрим диффузию к поверхности закрепленного твердого кругового цилиндра радиуса a, обтекаемого стационарным однородным линейным сдвиговым потоком в плоскости, нормальной к оси цилиндра. Распределение скоростей такого течения вдали от цилиндра в декартовой системе безразмерных координат x_1, x_2, x_3 (a — масштаб длины) может быть представлено в виде

$$r \to \infty, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r} + o(1), \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Omega}, \qquad (7.1)$$

где

$$\boldsymbol{G} = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & -E_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix},$$

$$E_1 = G_{11} = -G_{22}, \quad E_2 = \frac{1}{2}(G_{12} + G_{21}), \quad \Omega = \frac{1}{2}(G_{21} - G_{12}).$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ и G_{ij} — безразмерные скорость и компоненты тензора сдвига, способ нормировки которых будет указан далее; равенство суммы диагональных элементов нулю является следствием несжимаемости жидкости ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$). Тензор $\boldsymbol{G}$ в (7.1) записан в виде суммы симметричного $\boldsymbol{E}$ и антисимметричного $\boldsymbol{\Omega}$ тензоров, которые соответствуют чисто деформационной и чисто вращательной составляющим движения жидкости на бесконечности. В общем слу-

чае тензор G определяется заданием трех независимых величин: E_1, E_2, Ω.

В стоксовом приближении решение гидродинамической задачи о распределении скоростей потока с граничными условиями на бесконечности (7.1) и прилипания ($v = 0$ на поверхности цилиндра $r = 1$) можно получить, используя результаты работы [129], что приводит к следующему выражению для функции тока:

$$\psi = \frac{1}{2} E_1 \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\theta - \frac{1}{2} E_2 \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cos 2\theta - \\ - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1 - 2 \ln r) = \frac{1}{2} \bar{E} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\bar{\theta} - \\ - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1 - 2 \ln r); \qquad (7.2)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \bar{E} = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2}, \quad \bar{\theta} = \theta + \Delta\theta$$
$$\left(\frac{E_1}{\bar{E}} = \cos(2\Delta\theta), \quad -\frac{E_2}{\bar{E}} = \sin(2\Delta\theta)\right).$$

Система координат r, $\bar{\theta}$, полученная из исходной путем поворота на угол $\Delta\theta$, связана с главными осями симметричного тензора $\boldsymbol{E}$ (в главных осях тензор $\boldsymbol{E}$ приводится к диагональному виду с элементами $\bar{E}$ и $-\bar{E}$). Величина $\bar{E}$ определяется способом нормировки компонент тензора $\boldsymbol{E}$, а параметр Ω соответствует безразмерной угловой скорости вращения потока на бесконечности. Простой сдвиг задается значениями $E_1 = 0$, $E_2 = -\Omega = {}^1/_2 G_{12}$, $\bar{E} = |E_2|$ в выражениях (7.1), (7.2).

Структура линий тока $\psi = \text{const}$ существенным образом зависит от отношения параметров $\bar{E}$ и Ω. Далее без ограничения общности полагаем в выражении (7.2) $\bar{E} = 1$, что соответствует следующему способу введения безразмерных величин в (7.1):

$$G_{ij} = \frac{G_{ij}^*}{\hat{E}}, \quad E_i = \frac{E_i^*}{\hat{E}}, \quad \Omega = \frac{\Omega^*}{\hat{E}}, \quad \bar{E} = 1,$$
$$E_1^* = G_{11}^* = -G_{22}^*, \quad E_2^* = \frac{1}{2}(G_{12}^* + G_{21}^*), \quad \Omega^* = \frac{1}{2}(G_{21}^* - G_{12}^*), \qquad (7.3)$$
$$\hat{E} = (E_1^{*2} + E_2^{*2})^{1/2}, \quad U = a\hat{E},$$

где звездочкой помечены аналогичные размерные величины, U — характерная скорость потока.

Функция тока (7.2) обладает следующими предельными свойствами:

вблизи поверхности цилиндра

$$r \to 1, \quad \psi \approx (2 \sin 2\bar{\theta} - \Omega)(r-1)^2 \quad (\bar{E} = 1); \quad (7.4)$$

на бесконечности

$$r \to \infty, \quad \psi \approx {}^1/_2 r^2 (\sin 2\bar{\theta} - \Omega) \quad (\bar{E} = 1). \quad (7.5)$$

Исследуем теперь массообмен кругового цилиндра, обтекаемого произвольным сдвиговым потоком (7.1), (7.2), в зависимости от параметра Ω при больших числах Пекле

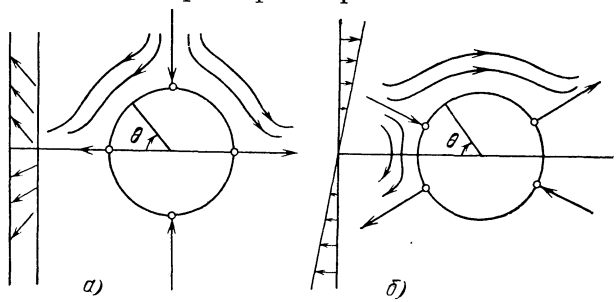


Рис. 3.7. Схема обтекания закрепленного кругового цилиндра линейным сдвиговым потоком: *а*) деформационное течение ($\Omega = 0$), *б*) простой сдвиг ($|\Omega| = 1$).

$\mathrm{Pe} = a^2 \hat{E} D^{-1}$. Далее ограничимся случаем $0 \leqslant |\Omega| \leqslant 1$, когда все линии тока разомкнуты и на поверхности цилиндра имеются четыре особые критические точки (рис. 3.7). В силу четности среднего числа Шервуда по параметру Ω достаточно изучить область $\Omega \geqslant 0$.

При $0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ на поверхности цилиндра имеются четыре критические точки:

$$\bar{\theta}_1 = \alpha, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \bar{\theta}_3 = \pi + \alpha, \quad \bar{\theta}_4 = \frac{3\pi}{2} - \alpha,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\Omega}{2}, \quad (7.6)$$

где значения $\bar{\theta}_2$ и $\bar{\theta}_4$ соответствуют траекториям натекания, а $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}_3$ — стекания. Увеличение угловой скорости вращения потока на бесконечности от нуля до единицы сдвигает критическую точку стекания на поверхности цилиндра $\bar{\theta}_1$ против часовой стрелки на 15°.

Введем в диффузионном пограничном слое растянутую координату $Y = \mathrm{Pe}^{1/3}(r-1)$ и, учитывая асимптотику функции тока вблизи поверхности цилиндра (7.4), выделим главные члены разложения из уравнения конвектив-

ной диффузии (6.1), (6.2) при больших числах Пекле. В результате несложных преобразований для распределения концентрации получаем задачу (6.6), (6.7), решение которой дается формулой (1.16), где

$$\zeta = \mathrm{Pe}^{1/3} |\psi|^{1/2} = \mathrm{Pe}^{1/3} |2 \sin 2\bar{\theta} - \Omega|^{1/2} (r - 1),$$

$$\tau = \tau(\bar{\theta}, \bar{\theta}^-) = \frac{1}{2} \left| \int_{\bar{\theta}^-}^{\bar{\theta}} |2 \sin 2\bar{\theta} - \Omega|^{1/2} d\bar{\theta} \right|,$$

$$\bar{\theta}^- = \begin{cases} {}^1/_2\pi - \alpha & \text{при} \quad \alpha \leqslant \bar{\theta} \leqslant \pi + \alpha, \\ {}^3/_2\pi - \alpha & \text{при} \quad \pi + \alpha \leqslant \bar{\theta} \leqslant 2\pi + \alpha. \end{cases}$$

Поэтому для локального диффузионного потока на поверхность цилиндра получаем

$$j = \frac{3^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{|2 \sin 2\bar{\theta} - \Omega|^{1/2}}{\tau^{1/3}(\bar{\theta}, \bar{\theta}^-)} \mathrm{Pe}^{1/3}.$$

Интегрирование этого выражения по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) приводит к следующей формуле для среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = \frac{3^{4/3}}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - |\Omega|}\right) - \left(1 + \frac{|\Omega|}{2}\right) \mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - |\Omega|}\right) \right]^{2/3} + \left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 + |\Omega|}\right) - \left(1 - \frac{|\Omega|}{2}\right) \mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 + |\Omega|}\right) \right]^{2/3} \right\} \mathrm{Pe}^{1/3}, \qquad (7.7)$$

$$\mathrm{Pe} = a^2 \hat{E} D^{-1} \quad (0 \leqslant |\Omega| \leqslant 1).$$

В частных случаях чисто деформационного ($\Omega = 0$) и простого ($|\Omega| = 1$) линейного сдвигового обтекания цилиндра выражение (7.7) переходит в результаты работ [162, 163]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh} &= 0{,}920\ \mathrm{Pe}^{1/3} \qquad (\Omega = 0), \\ \mathrm{Sh} &= 0{,}908\ \mathrm{Pe}^{1/3} \qquad (|\Omega| = 1). \end{aligned} \qquad (7.8)$$

Из формулы (7.7) следует, что рост абсолютной величины безразмерной угловой скорости вращения сдвигового потока Ω приводит к небольшому снижению интенсивности массо- и теплообмена цилиндра с окружающей жидкостью. При этом, как видно из (7.8), среднее число Шервуда очень слабо меняется в рассматриваемом диапазоне $-1 \leqslant \Omega \leqslant 1$ (относительное приращение сред-

него числа Шервуда при увеличении $|\Omega|$ от нуля до единицы составляет всего 1,3%). Последнее обстоятельство позволяет для приближенного вычисления среднего числа Шервуда, соответствующего обтеканию закрепленного кругового цилиндра произвольным сдвиговым потоком, использовать первую формулу (7.8).

Случай $|\Omega| > 1$, который характеризуется наличием окружающих цилиндр замкнутых линий тока, будет рассмотрен в конце этого параграфа.

Массообмен свободно вращающегося цилиндра [163]. Исследуем теперь конвективный массоперенос к поверхности кругового цилиндра, свободно взвешенного в произвольном линейном сдвиговом потоке. Распределение скоростей жидкости такого течения вдали от цилиндра, как и ранее, задается соотношением (7.1). На поверхности цилиндра должны соблюдаться следующие граничные условия:

$$r = 1, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = \Omega, \tag{7.9}$$

которые являются следствием условия прилипания жидкости на поверхности свободно взвешенного в однородном сдвиговом потоке кругового цилиндра с учетом того, что он вращается с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения потока на бесконечности.

Нетрудно показать, что решение гидродинамической задачи об обтекании свободно вращающегося цилиндра произвольным сдвиговым стоксовым потоком с граничными условиями (7.1), (7.9) определяется выражениями

$$\psi = \frac{1}{2} E_1 \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\theta - \frac{1}{2} E_2 \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cos 2\theta - \\ - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1) = \frac{1}{2} \bar{E} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\bar{\theta} - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1), \tag{7.10}$$

$$v_r = \frac{\bar{E}}{r} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cos 2\bar{\theta}, \quad v_{\bar{\theta}} = \Omega r - \bar{E} r \left(1 - \frac{1}{r^4}\right) \sin 2\bar{\theta},$$

где параметры E_1, E_2, Ω, $\bar{E}$ и координата $\bar{\theta}$ описаны в формулах (7.1), (7.2). Видно, что функция тока (7.10) отличается от функции тока для закрепленного цилиндра (7.2) только отсутствием последнего логарифмического члена $\Omega \ln r$. Как и ранее, будем считать, что безразмерные величины, входящие в (7.10), введены по правилу (7.3), т. е. $\bar{E} = 1$.

Главный член асимптотики функции тока вдали от цилиндра определяется выражением (7.5). В данном слу-

чае на поверхности цилиндра при $\Omega \neq 0$ отсутствуют критические точки и имеются два качественно различных типа течения, которые характеризуются величиной угловой скорости Ω. А именно, при $0 < |\Omega| \leqslant 1$ в потоке имеются как замкнутые, так и разомкнутые линии тока; при этом существует примыкающая к поверхности цилиндра

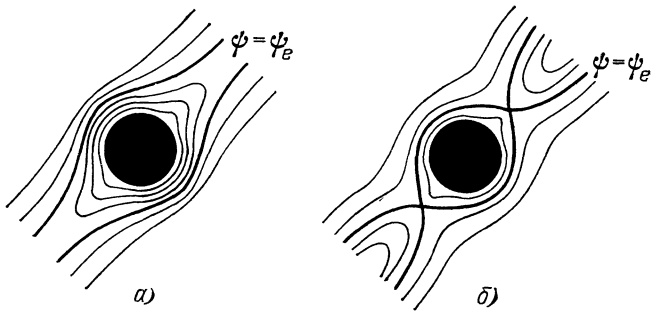


Рис. 3.8. Схема обтекания свободно вращающегося кругового цилиндра линейным сдвиговым потоком (предельные линии тока $\psi = \psi_e$ выделены): *а*) простой сдвиг ($|\Omega| = 1$), *б*) общий случай плоского сдвигового течения ($0 < |\Omega| < 1$).

область с полностью замкнутыми линиями тока, а вдали от цилиндра линии тока разомкнуты (рис. 3.8); при $|\Omega| > 1$ все линии тока замкнуты.

Рассмотрим сначала случай $0 \leqslant |\Omega| \leqslant 1$. Как следует из формул (7.10), в потоке существуют две критические точки с координатами

$$\bar{\theta}_1^0 = -\frac{\pi}{4}, \quad \bar{\theta}_2^0 = \frac{5\pi}{4}, \quad r_{1,2}^0 = \left(\frac{1}{1-\Omega}\right)^{1/4} \quad (0 \leqslant \Omega \leqslant 1,\ \bar{E}=1), \tag{7.11}$$

в которых скорость жидкости обращается в нуль: $v_r^0 = v_\theta^0 = 0$. Эти особые точки являются точками самопересечения предельной линии тока, которая разграничивает области с замкнутыми и разомкнутыми линиями тока (рис. 3.8).

Значение функции тока, соответствующее предельной линии тока, найдем путем подстановки координат критических точек (7.11) в выражение (7.10). В результате получим

$$\psi_e = {}^1/_2\Omega - 1 + (1-\Omega)^{1/2}. \tag{7.12}$$

При $\Omega \to 0$ из формул (7.11), (7.12) имеем $r^0_{1,2} \to 1$, $\psi_e \to 0$, т. е. при уменьшении угловой скорости вращения потока критические точки стремятся к поверхности цилиндра. В другом предельном случае $\Omega \to 1$, что соответствует простому сдвигу, получаем $r^0_{1,2} \to \infty$, $\psi_e \to -1/2$ (т. е. критические точки уходят на бесконечность).

Внутри примыкающей к поверхности цилиндра области замкнутой циркуляции $\psi_e \leqslant \psi \leqslant 0$ все линии тока в силу (7.10) могут быть записаны в явном параметрическом виде

$$r = r(\bar{\theta}, \psi) = \left\{ \frac{\Omega - 2\psi - 2\sin 2\bar{\theta} + [(\Omega - 2\psi)^2 + 8\psi \sin 2\bar{\theta}]^{1/2}}{2(\Omega - \sin 2\bar{\theta})} \right\}^{1/2}. \tag{7.13}$$

При анализе конвективного массопереноса к поверхности свободно вращающегося кругового цилиндра в произвольном сдвиговом потоке необходимо учитывать следующее важное обстоятельство: внутри примыкающей к поверхности цилиндра области с замкнутыми линиями тока не происходит формирования диффузионного пограничного слоя при больших числах Пекле (диффузионный пограничный слой всегда «порождается» критическими линиями тока, которые приходят из бесконечности на поверхность тела).

В случае $0 \leqslant \Omega \leqslant 1$ в области с разомкнутыми линиями тока $-\infty < \psi \leqslant \psi_e$ концентрация постоянна и равна своему значению на бесконечности. Поэтому граничное условие $c = 1$ вдали от частицы «сносится» на поверхность $\psi = \psi_e$.

Для анализа распределения концентрации в области циркуляции ($\psi_e < \psi \leqslant 0$) перейдем от цилиндрической системы координат r, $\bar{\theta}$ к новой ортогональной системе координат ψ, φ, где координата φ отсчитывается вдоль линии тока. В новой системе координат вектор скорости жидкости будет иметь лишь одну отличную от нуля компоненту $v_\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}/g}$, а уравнение диффузии (6.1) и граничные условия записываются в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \right\}, \quad g = g_{\psi\psi} g_{\varphi\varphi}, \tag{7.14}$$

$$\psi = 0, \quad c = 0; \quad \psi = \psi_e, \quad c = 1. \tag{7.15}$$

Решение задачи (7.14), (7.15) ищем в виде регулярного асимптотического разложения по обратным степеням числа Пекле:

$$c = c_0 + \mathrm{Pe}^{-1}c_1 + \ldots, \qquad \mathrm{Pe} = a^2\hat{E}D^{-1}. \tag{7.16}$$

Подставляя (7.16) в уравнение (7.14) и граничные условия (7.15) и выделяя члены при одинаковых степенях числа Пекле, для нулевого и первого членов разложения получаем

$$\frac{\partial c_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \psi = 0, \quad c_0 = 0; \quad \psi = \psi_e, \quad c_0 = 1; \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}}\frac{\partial c_1}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial c_0}{\partial \varphi}\right), \tag{7.18}$$

$$\psi = 0, \quad c_1 = 0; \quad \psi = \psi_e, \quad c_1 = 0.$$

Из уравнения (7.17) следует лишь, что нулевой член разложения концентрации зависит только от функции тока, т. е. $c_0 = c_0(\psi)$. Для получения дополнительной информации о нем обратимся к уравнению для следующего члена разложения — c_1 (7.18). Интегрирование этого уравнения по замкнутым линиям тока позволяет исключить величину c_1 и приводит к следующей краевой задаче для определения функции c_0 [161]:

$$\frac{d}{d\psi}\Gamma(\psi)\frac{dc_0}{d\psi} = 0; \quad \psi = 0, \quad c_0 = 0; \quad \psi = \psi_e, \quad c_0 = 1, \tag{7.19}$$

где

$$\Gamma(\psi) = \oint \frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{v_r^2 + v_{\bar{\theta}}^2}{v_{\bar{\theta}}}\right) r\,d\bar{\theta}. \tag{7.20}$$

Величины v_r, $v_{\bar{\theta}}$ и r в формуле (7.20) должны быть выражены как функции ψ и $\bar{\theta}$ путем подстановки зависимости (7.13) в соотношения (7.10).

Решение задачи (7.19), (7.20)

$$c_0 = \left\{\int_0^{\psi_e}\frac{d\psi}{\Gamma(\psi)}\right\}^{-1}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Gamma(\psi)} \tag{7.21}$$

дает выражение для асимптотического значения (при $\mathrm{Pe} \to \infty$) безразмерного интегрального диффузионного

потока на поверхность частицы:

$$I = \left| \int_0^{\psi_e} \frac{d\psi}{\Gamma(\psi)} \right|^{-1}, \quad \mathrm{Sh} = \frac{I}{2\pi}. \tag{7.22}$$

Важно отметить, что среднее число Шервуда, вычисляемое по формуле (7.22), в данном случае остается конечным при $\mathrm{Pe} \to \infty$, в отличие от его неограниченного возрастания с ростом Pe при наличии на поверхности частицы особых гидродинамических точек (см., например, формулы (4.3), (7.7)). Физически это обусловлено тем, что область циркуляции блокирует конвективный массо- и теплоперенос к частице, и в результате перенос вещества и тепла к поверхности частицы определяется в основном молекулярной диффузией, подобно случаю неподвижной жидкости.

Отметим, что возможность построения поля концентрации в виде регулярного асимптотического разложения по степеням малого параметра $\mathrm{Pe}\epsilon^{-1}$ связана с отсутствием критических точек на поверхности частицы. Наличие таких точек приводит к расходимости интеграла вдоль линий тока от величины $\sqrt{g}/g_{\psi\psi}$, которая в окрестности особых точек принимает бесконечно большие значения.

Для простого сдвига асимптотическое значение среднего числа Шервуда (7.22) было вычислено в работе [133]:

$$\mathrm{Sh} = 2{,}87 \qquad (|\,\Omega\,| = 1). \tag{7.23}$$

При малых угловых скоростях вращения потока из формул (7.22) с точностью до $O(\Omega)$ можно получить следующее двучленное разложение [163]:

$$\mathrm{Sh} = 7{,}79\,|\,\Omega\,|^{-1} - 2{,}97 \qquad (|\,\Omega\,| \to 0). \tag{7.24}$$

Подчеркнем, что асимптотические выражения (7.23), (7.24) получены для бесконечно больших чисел Пекле, причем разложение (7.24) имеет особенность при $\Omega = 0$. Вместе с тем случай $\Omega = 0$ соответствует чисто деформационному течению, когда цилиндр остается неподвижным, независимо от того, закреплен он или нет. Поэтому при $\Omega = 0$ остается справедливой первая формула (7.8), которая и дает в этом случае асимптотическое выражение для среднего числа Шервуда при $\mathrm{Pe} \gg 1$. Сопоставление этой формулы с выражением (7.24) показывает, что результат (7.22) применим при значениях угловой скорости вращения потока, удовлетворяющих условию $O(\mathrm{Pe}^{-1/3}) < |\,\Omega\,| \leqslant 1$.

Указанным выше асимптотическим выражениям (7.8), (7.23), (7.24) удовлетворяет следующая зависимость среднего числа Шервуда от числа Пекле и параметра Ω:

$$\mathrm{Sh} = \frac{7{,}8}{8{,}5\,\mathrm{Pe}^{-1/3} + |\Omega|} - \frac{3}{1 - 0{,}39\,|\Omega|}. \qquad (7.25)$$

Эту зависимость можно рассматривать как приближенную формулу для определения среднего числа Шервуда при больших числах Пекле и всех значениях $|\Omega| \leqslant 1$.

Как показывает сравнение с результатами [163], полученными численным интегрированием выражений (7.22) (сплошная линия на рис. 3.9), погрешность зависимости

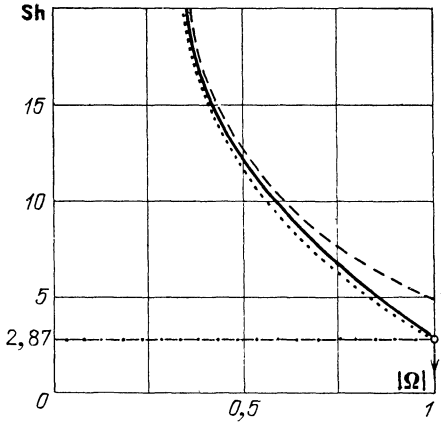


Рис. 3.9. Зависимость среднего числа Шервуда от величины вращательной составляющей сдвигового потока; сплошная линия — результаты численного счета [163], штриховая линия — расчет по асимптотической формуле (7.24), пунктирная — расчет по приближенной формуле (7.25).

(7.25) при $\mathrm{Pe} = \infty$ (показанной пунктиром) максимальна при промежуточных значениях $|\Omega|$ и не превышает 10%.

Согласно результатам, приведенным на рис 3.9, увеличение угловой скорости вращения потока, как и в случае закрепленного цилиндра, приводит к снижению интенсивности массообмена.

Отметим, что экспериментальная проверка [170, 171] независимости от числа Пекле главного члена асимптотического разложения среднего числа Шервуда (при $\mathrm{Pe} \gg 1$) для свободно вращающегося кругового цилиндра в поле простого сдвига ($|\Omega| = 1$) дала хорошее качественное и количественное подтверждение теоретических результатов [133]. Измеренное значение среднего числа Шервуда составило 2,65, что близко к соответствующему асимптотическому значению (7.23).

Случай $|\Omega| > 1$. При $|\Omega| > 1$ как закрепленный, так и свободно вращающийся цилиндр окружен замкнутыми

линиями тока, что следует из выражений для функции тока (7.2), (7.10). Анализ этой ситуации проводится следующим образом. Зададим сначала вместо граничного условия на бесконечности ($r \to \infty$, $c = 1$) граничное условие на линии тока $\psi = -A = \text{const}$ ($A > 0$) вдали от цилиндра

$$\psi = -A, \quad c = 1 \quad (r = 1, c = 0). \tag{7.26}$$

Решив диффузионную вспомогательную задачу с граничными условиями (7.26), вычисляем далее вспомогательное среднее число Шервуда $\mathrm{Sh}(A)$. Искомое среднее число Шервуда можно найти путем предельного перехода: $\mathrm{Sh} = \lim\limits_{A\to\infty} \mathrm{Sh}(A)$.

Для свободно вращающегося цилиндра при $|\Omega| > 1$ все линии тока замкнуты, поэтому при $\mathrm{Pe} \to \infty$ концентрация постоянна на каждой линии тока.

Среднее число Шервуда, соответствующее среднему потоку вещества на поверхность $\psi = 0$ свободно вращающегося цилиндра, определяется формулами (7.20), (7.22). Величину $\Gamma(\psi)$ (7.20) вдали от цилиндра можно оценить, используя асимптотику функции тока (7.5); в результате получим [163]

$$|\psi| \to \infty, \quad \Gamma(\psi) = \frac{2\pi|\psi|}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} + O(1). \tag{7.27}$$

Поэтому для вспомогательного среднего числа Шервуда, которое задается выражением (7.22) при $\psi_e = -A$, имеем $\mathrm{Sh}(A) = O(1/\ln A)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Sh} = \lim_{A\to\infty} \mathrm{Sh}(A) = 0. \tag{7.28}$$

Этот результат физически понятен и означает, что наличие в потоке только замкнутых линий тока практически полностью тормозит массоперенос к поверхности цилиндра. Более того, в этом случае распределение концентрации в потоке будет однородным, с концентрацией, равной концентрации на поверхности цилиндра (здесь уже нельзя задавать концентрацию на бесконечности произвольно).

Равенство нулю среднего числа Шервуда (7.28) проще всего пояснить, если рассмотреть предельный случай чистого вращения жидкости вокруг цилиндра, что соответствует значению $\bar{E} = 0$ в формуле (7.10). Функция тока такого течения зависит только от радиальной координаты r, а линии тока представляют собой соосные с цилиндром концентрические оружности. Распределение концент-

рации в потоке также зависит только от радиальной координаты r и удовлетворяет уравнению Лапласа (при $\partial/\partial\theta = 0$), общее решение которого имеет вид $c = H_1 + H_2 \ln r$, где H_1 и H_2 — произвольные постоянные. Отсюда следует, что распределение концентрации во всем потоке ограничено только при $H_2 = 0$, что соответствует однородному полю концентрации $c = \text{const}$.

Аналогичным образом в случае закрепленного кругового цилиндра, обтекаемого стационарным линейным сдвиговым потоком (7.2) при $|\Omega| > 1$, наличие области циркуляции с замкнутыми линиями тока (что следует из асимптотики функции тока (7.5)) также приводит к нулевому значению среднего числа Шервуда при больших числах Пекле.

Глава 4

МАССООБМЕН ОДИНОЧНЫХ РЕАГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ И СИСТЕМ ЧАСТИЦ С ЛАМИНАРНЫМ ПОТОКОМ

При сохранении общей постановки задачи результаты гл. 3 могут быть распространены на более широкий класс задач, встречающихся в приложениях, связанных с химической технологией, метеорологией, проблемой загрязнения окружающей среды.

Эти обобщения составляют содержание данной главы. Они основаны на использовании более общих предположений о форме частиц и характере их обтекания, а также включают учет диффузионного влияния соседних частиц на массообмен отдельной частицы. Рассмотрено общее уравнение диффузионного пограничного слоя при трехмерном обтекании реагирующей частицы произвольной формы, которое далее используется в конкретных примерах. Результаты включают, в частности, решение задачи о диффузии вещества к поверхности эллипсоидальной частицы и кругового тонкого диска при осесимметричном обтекании и к эллиптическому цилиндру и пластине при поперечном обтекании. Проведен расчет интенсивности массообмена сферической частицы и капли с трехмерным деформационным и простым сдвиговым потоком. Как и в других разделах, основным итогом являются приближенные формулы, позволяющие эффективно вычислять локальный и полный диффузионные потоки реагирующего вещества к поверхностям частиц, которые существенным образом зависят от формы частицы и поля течения вблизи ее поверхности, а также от взаимного расположения частиц в системе.

§ 1. Трехмерный диффузионный пограничный слой. Произвольная форма частиц

В главах 1—3 рассматривались двумерные (плоские и осесимметричные) задачи о массообмене капель и твердых частиц с потоком. Было показано, что при больших числах Пекле основной вклад в интегральный приток вещества на поверхность частицы вносит область диффузионного

пограничного слоя. Для решения уравнения диффузионного пограничного слоя использован метод, основанный на переходе от исходных независимых переменных — двух пространственных координат (сферических, цилиндрических и т. п.) к переменным Мизеса, одной из которых является функция тока, другой — пространственная координата.

В отличие от двумерного случая, трехмерное течение, вообще говоря, не может быть описано с помощью функции тока. Поэтому для решения трехмерных задач диффузионного пограничного слоя нельзя непосредственно использовать метод, описанный в гл. 1—3.

Для решения задач трехмерного диффузионного пограничного слоя может быть применен метод, который является естественным обобщением классического метода решения двумерных задач. Основная идея метода заключается в выборе криволинейной системы координат, связанной с линиями тока (обтекание предполагается известным), в которой одна компонента скорости жидкости тождественно равна нулю. Последнее обстоятельство позволяет при описании поля течения в диффузионном пограничном слое ввести аналог функции тока и записать уравнение трехмерного диффузионного пограничного слоя в форме, подобной уравнению двумерного пограничного слоя, с коэффициентами, параметрически зависящими от одной из криволинейных координат [87].

Постановка задачи. Выбор системы координат. Рассмотрим трехмерную задачу о стационарной конвективной диффузии к поверхности твердой или жидкой частицы произвольной формы, обтекаемой ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Как и ранее, предполагается, что число Пекле $\mathrm{Pe} = aUD^{-1}$ велико; здесь a — характерный размер частицы (в качестве которого обычно выбирается радиус эквивалентной по объему сферы a_e), U — характерная скорость потока (на бесконечности), D — коэффициент диффузии. Считается также, что на поверхности частицы и вдали от нее концентрация принимает постоянные значения, равные нулю и C_∞, а поле течения жидкости известно из решения соответствующей гидродинамической задачи об обтекании частицы.

При анализе, аналогично [74, 75], используем ортогональную криволинейную систему координат ξ, η, λ, связанную с поверхностью тела и линиями тока. Для этого укажем направления ортов e_ξ, e_η, e_λ в любой точке окружающего частицу потока жидкости (рис. 4.1). Нормаль

к поверхности частицы, проходящая через M, задает направление орта e_ξ. Направление орта e_η определяется проекцией вектора скорости жидкости в точке M на плоскость, перпендикулярную e_ξ, а орт e_λ выбирается так, что система векторов e_ξ, e_η, e_λ составляет ортогональную

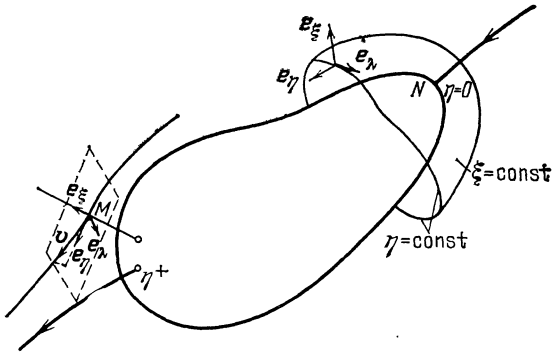


Рис. 4.1. Криволинейная ортогональная система координат ξ, η, λ, связанная с поверхностью тела и линиями тока.

правую тройку. Начало координат и правило, по которому ведется отсчет криволинейных координат (т. е. зависимость компонент метрического тензора $g_{\xi\xi}$, $g_{\eta\eta}$, $g_{\lambda\lambda}$ от ξ, η, λ), в каждом конкретном случае выбираются по-разному из соображений удобства; для определенности далее считаем, что поверхность частицы задается фиксированным значением $\xi = \xi_s$. В такой системе координат вектор скорости жидкости в каждой точке представляется в виде $\boldsymbol{v} = \{v_\xi, v_\eta, 0\}$.

Учтем теперь, что в выбранной системе координат уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v_\xi\sqrt{\frac{g}{g_{\xi\xi}}}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(v_\eta\sqrt{\frac{g}{g_{\eta\eta}}}\right)\right] = 0, \tag{1.1}$$

$$g = g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\lambda\lambda}.$$

Определим функцию $\psi(\xi, \eta, \lambda)$ как решение системы

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = v_\eta\sqrt{\frac{g}{g_{\eta\eta}}}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -v_\xi\sqrt{\frac{g}{g_{\xi\xi}}}. \tag{1.2}$$

Тогда уравнение наразрывности (1.1), которое совпадает с условием интегрируемости системы (1.2), удовлетворяется автоматически. Постоянную интегрирования в (1.2)

выбираем так, чтобы функция ψ обращалась в нуль на поверхности частицы при $\xi = \xi_s$.

Поверхности $\psi(\xi, \eta, \lambda) = \text{const}$ целиком состоят из линий тока. Функция ψ имеет простой физический смысл, а именно, она является трехмерным аналогом функции тока и будет далее называться функцией тока. В плоском и осесимметричном случаях ψ совпадает с обычной функцией тока.

В безразмерных переменных уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия в криволинейной системе координат ξ, η, λ записываются следующим образом:

$$\frac{v_\xi}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\mathrm{Pe}^{-1}}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\xi\xi}}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\eta\eta}}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\lambda\lambda}}\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)\right\}, \tag{1.3}$$

$$\xi = \xi_s, \quad c = 0; \quad \xi \to \infty, \quad c \to 1, \tag{1.4}$$

где $c = C/C_\infty$ — безразмерная концентрация.

Асимптотический анализ задачи (1.3), (1.4) проводится существенно различным образом в зависимости от того, имеются или отсутствуют на поверхности частицы особые (критические) гидродинамические точки. Исследуемый здесь случай характеризуется наличием таких точек и приходящих из бесконечности на поверхность частицы особых линий тока, порождающих диффузионные пограничные слои.

Рассмотрим сначала наиболее простую ситуацию, когда на поверхности частицы имеются только две изолированные особые критические точки натекания и стекания соответственно (рис. 4.1). В окрестности точки натекания происходит «зарождение» расположенного вблизи поверхности частицы диффузионного пограничного слоя. Считаем, что точка натекания определяется координатой η^-, а стекания — координатой η^+.

При вязком обтекании на поверхности твердой (жидкой) частицы должно выполняться условие прилипания (непротекания), поэтому в случае несжимаемой жидкости (1.1) функцию тока ψ вблизи поверхности тела можно с учетом (1.2) представить в виде

$$\xi \to \xi_s, \quad \psi(\xi, \eta, \lambda) \to (\xi - \xi_s)^n f(\eta, \lambda) \quad (n \geqslant 1). \tag{1.5}$$

При ламинарном вязком обтекании гладких твердых частиц параметр n обычно равен двум; существует также несколько примеров обтекания, когда $n = 3$ (см. § 2). При обтекании капли (пузыря) вязкой жидкостью и твердых частиц идеальной жидкостью $n = 1$.

Введем в диффузионном пограничном слое новую переменную Y:

$$Y = \mathrm{Pe}^{\nu}(\xi - \xi_s), \quad \nu = (n+1)^{-1}.$$

Выделяя из уравнения (1.3) с учетом (1.2), (1.5) старшие члены разложения по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-\nu}$ (при этом оказывается, что последними членами в фигурных скобках в правой части уравнения (1.3) можно пренебречь по сравнению с первым), получаем уравнение диффузионного пограничного слоя в следующей форме:

$$-\frac{\partial(c, Y^n f)}{\partial(Y, \eta)} = \frac{\sqrt{g^s}}{g^s_{\xi\xi}} \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) параметрически зависит от третьей криволинейной координаты λ. Здесь, как и прежде, индекс s означает, что соответствующая величина берется на поверхности частицы.

Используя новые переменные

$$\begin{aligned} \zeta &= Y f^{1/n}(\eta, \lambda) = \mathrm{Pe}^{\nu}\psi^{1/n}, \\ \tau &= \tau(\eta, \eta^-; \lambda) = \frac{1}{n}\int_{\eta^-}^{\eta} \frac{\sqrt{g^s}}{g^s_{\xi\xi}} f^{1/n}\, d\eta, \end{aligned} \tag{1.7}$$

сведем погранслойную задачу о диффузии (1.6), (1.4) к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} - \zeta^{1-n}\frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} = 0; \quad c(\zeta, 0) = 1; \quad c(0, \tau) = 0, \quad c(\infty, \tau) = 1. \tag{1.8}$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} c &= [\Gamma(\nu)]^{-1}\gamma\left(\nu, \nu^2\frac{\zeta^{n+1}}{\tau}\right), \qquad \nu = \frac{1}{n+1}, \\ \gamma(\nu, x) &= \int_0^x x^{\nu-1}e^{-x}\, dx, \quad \Gamma(\nu) = \gamma(\nu, \infty). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Следует отметить, что более сложный анализ трехмерного диффузионного пограничного слоя проводился в ра-

ботах [17, 18], где для уравнения стационарной конвективной диффузии, записанного в обычных погранслойных координатах (которые часто используются в аналогичных гидродинамических задачах и связаны только с поверхностью тела, но не связаны с линиями тока), было найдено преобразование, сводившее его к уравнению с разделяющимися переменными. В работе [116] для случая произвольного трехмерного обтекания твердой частицы, что соответствует значению $n = 2$ в (1.5), в пограничном слое использовалась локальная ортогональная криволинейная система координат, аналогичная ξ, η, λ.

Аналогичным образом рассматривается случай $\psi \leqslant 0$, а также случай, когда область течения вокруг частицы задается неравенством $\xi \leqslant \xi_s$. В общем случае, так же, как это делалось в гл. 2, можно показать, что для распределения концентрации остается справедливой формула (1.9), где переменные ζ и τ определяются выражениями

$$\zeta = \mathrm{Pe}^{\nu} |\psi|^{1/n},$$
$$\tau = \tau(\eta, \eta^-; \lambda) = \frac{1}{n} \left| \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{\sqrt{g^s}}{g^s_{\xi\xi}} |f|^{1/n} d\eta \right|. \tag{1.10}$$

Безразмерный локальный диффузионный поток определяется производной по нормали от концентрации (1.9), (1.10) на поверхности тела и равен

$$j(\eta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{g^s_{\xi\xi}}} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_s} = \nu^{(1-n)\nu} \frac{\mathrm{Pe}^{\nu} |f(\eta, \lambda)|^{1/n}}{\Gamma(\nu) \sqrt{g^s_{\xi\xi}(\eta, \lambda)}} \tau^{-\nu}(\eta, \eta^-; \lambda). \tag{1.11}$$

Для безразмерного полного диффузионного потока растворенного в жидкости вещества на поверхность частицы $S = \{\xi = \xi_s, \eta^- \leqslant \eta \leqslant \eta^+, 0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda\}$ имеем

$$I = \iint_S j \, dS = \int_{\eta^-}^{\eta^+} \int_0^{\Lambda} j(\eta, \lambda) \sqrt{g^s_{\eta\eta} g^s_{\lambda\lambda}} \, d\lambda \, d\eta =$$
$$= \nu^{-2n\nu} \frac{\mathrm{Pe}^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\Lambda} \tau^{n\nu}(\eta^+, \eta^-; \lambda) \, d\lambda, \qquad \nu = \frac{1}{n+1}. \tag{1.12}$$

В общем случае, когда на поверхности частицы имеется более двух критических точек и линий (т. е. функция тока меняет знак), разбиваем область течения вблизи поверхности тела на участки, в каждом из которых функция тока сохраняет знак. Нетрудно показать, что распре-

деление концентрации и локальный диффузионный поток на каждом из таких участков определяются формулами (1.9)—(1.11) при $\eta^- \to \eta_k^-$ ($k = 1, 2, \ldots$), где η_k^- — критическая точка (линия) натекания, расположенная внутри (на границе) участка. Полный интегральный поток вычисляется путем суммирования интегральных потоков по всем участкам.

В общем случае трехмерного течения для использования формул (1.9)—(1.12) необходимо решить вспомогательную задачу об определении криволинейной системы координат ξ, η, λ, найти разложение функции тока вблизи поверхности капель и частиц (1.5) и вычислить компоненты метрического тензора. Как правило, исходная информация о поле течения позволяет непосредственно получить лишь распределение скоростей жидкости вблизи частицы в некоторой фиксированной ортогональной системе координат ξ, μ, γ, неподвижно связанной только с ее поверхностью, но не с линиями тока. Ввиду сказанного часто возникает необходимость вычислять величины f и τ, входящие в формулы (1.9)—(1.12), в исходной ортогональной системе координат ξ, μ, γ. Поэтому покажем, как, используя знание асимптотики тангенциальной составляющей вектора скорости жидкости $\boldsymbol{v}_\parallel$ вблизи поверхности частицы,

$$\xi \to \xi_s, \quad \boldsymbol{v}_\parallel \to (\xi - \xi_s)^{n-1}(F_\mu \boldsymbol{e}_\mu + F_\gamma \boldsymbol{e}_\gamma), \quad (1.13)$$
$$F_\mu = F_\mu(\mu, \gamma), \quad F_\gamma = F_\gamma(\mu, \gamma),$$

определять функции (1.5), (1.10) в системе координат ξ, μ, γ.

Из сопоставления выражений (1.2), (1.5), (1.10), (1.13) получаем следующие формулы для функций f и τ:

$$f = \frac{1}{n} F \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}, \quad \tau = n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\eta^-}^{\eta} g_{\xi\xi}^{\frac{1-n}{2n}} g_{\lambda\lambda}^{\frac{1+n}{2n}} F^{\frac{1}{n}} g_{\eta\eta}^{\frac{1}{2}} d\eta \right|, \quad (1.14)$$
$$F = (F_\mu^2 + F_\gamma^2)^{1/2}.$$

Здесь и далее для сокращения записи индекс s у всех компонент метрического тензора опускается (напоминаем, что все эти величины берутся на поверхности частицы при $\xi = \xi_s$).

Учтем теперь, что, по определению, искомые ортогональные криволинейные координаты $\eta = \eta(\mu, \gamma)$ и $\lambda = \lambda(\mu, \gamma)$ должны удовлетворять соотношениям $\boldsymbol{v}_\parallel = \text{const} \cdot \nabla\eta$ и $(\boldsymbol{v}_\parallel \cdot \nabla\lambda) = 0$, что приводит к следующим

уравнениям для определения η и λ:

$$\frac{1}{F_\mu \sqrt{g_{\mu\mu}}} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} - \frac{1}{F_\gamma \sqrt{g_{\gamma\gamma}}} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{F_\mu}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \frac{F_\gamma}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} = 0. \tag{1.16}$$

Используем также то, что квадрат длины дуги на поверхности частицы сохраняется при переходе от старой (μ, γ) к новой (η, λ) ортогональной системе координат:

$$g_{\mu\mu} d\mu^2 + g_{\gamma\gamma} d\gamma^2 = g_{\eta\eta} d\eta^2 + g_{\lambda\lambda} d\lambda^2 \tag{1.17}$$

$$\left(d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} d\gamma, \quad d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} d\gamma \right).$$

Из равенства (1.17) с учетом (1.15), (1.16) после некоторых выкладок можно получить выражение для метрического коэффициента $g_{\lambda\lambda}$:

$$g_{\lambda\lambda} = g_{\mu\mu} \frac{F_\gamma^2}{F^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)^{-2} = g_{\gamma\gamma} \frac{F_\mu^2}{F^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} \right)^{-2}. \tag{1.18}$$

Аналогичные формулы для другого метрического коэффициента $g_{\eta\eta}$ получаются из (1.18) путем замены $\lambda \to \eta$, $\mu \to \gamma$, $\gamma \to \mu$.

В подынтегральном выражении для функции τ (1.14) перейдем от переменной интегрирования η к старой переменной μ, используя соотношения, справедливые при $\lambda = \text{const}$:

$$\sqrt{g_{\eta\eta}}\, d\eta = \sqrt{g_{\mu\mu}} \frac{F}{F_\mu} d\mu = \sqrt{g_{\gamma\gamma}} \frac{F}{F_\gamma} d\gamma, \tag{1.19}$$

которые выводятся из (1.17) с учетом того обстоятельства, что на интегральных кривых характеристического обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\sqrt{g_{\mu\mu}}}{F_\mu} d\mu = \frac{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}}{F_\gamma} d\gamma, \tag{1.20}$$

соответствующего уравнению в частных производных (1.16), выполняется равенство $\lambda = \text{const}$. В результате получим $\tau(\mu, \mu^-; \lambda) =$

$$= n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\mu^-}^{\mu} \left\{ g_{\xi\xi}^{\frac{1-n}{2n}} g_{\mu\mu}^{\frac{1+2n}{2n}} \frac{|F_\gamma|^{\frac{1+n}{n}}}{F_\mu} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)^{-\frac{n+1}{n}} \right\}_\lambda d\mu \right| =$$

$$= n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\mu^-}^{\mu} \left\{ g_{\xi\xi}^{\frac{1-n}{2n}} g_{\mu\mu}^{\frac{1}{2}} g_{\gamma\gamma}^{\frac{1+n}{2n}} |F_\mu|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} \right)^{-\frac{n+1}{n}} \right\}_\lambda d\mu \right|. \tag{1.21}$$

Здесь и далее индекс λ внизу после фигурных скобок означает, что соответствующая величина берется при $\lambda = \text{const}$ (т. е. γ должно быть выражено через μ и λ). Переход в подынтегральном выражении (1.14) от η к другой переменной γ осуществляется путем перемены мест координат μ и γ в (1.21).

Для исследования массопереноса к частице или капле (пузырю) сферической формы, обтекаемым произвольным трехмерным ламинарным потоком, полезно иметь формулы для определения функции τ в сферической системе координат r, θ, φ, связанной с центром частицы. В этом случае имеем (метрические коэффициенты берутся на поверхности частицы)

$$\xi = r - 1, \quad \mu = \theta, \quad \gamma = \varphi;$$
$$g_{\xi\xi} = 1, \quad g_{\mu\mu} = 1, \quad g_{\gamma\gamma} = \sin^2\theta. \qquad (1.22)$$

Используя выражение (1.21) с учетом (1.22) для переменной τ, получаем следующие формулы:

$$\tau = n^{-(n+1)/n} \left| \int_{\theta^-}^{\theta} \left\{ (\sin\theta)^{(n+1)/n} \, |F_\theta|^{1/n} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \right)^{-(n+1)/n} \right\}_\lambda d\theta \right| =$$

$$= n^{-(n+1)/n} \left| \int_{\theta^-}^{\theta} \left\{ \frac{|F_\varphi|^{(n+1)/n}}{F_\theta} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)^{-(n+1)/n} \right\}_\lambda d\theta \right| =$$

$$= n^{-(n+1)/n} \left| \int_{\varphi^-}^{\varphi} \left\{ (\sin\theta)^{(2n+1)/n} \frac{|F_\theta|^{(n+1)/n}}{F_\varphi} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \right)^{-(n+1)/n} \right\}_\lambda d\varphi \right| =$$

$$= n^{-(n+1)/n} \left| \int_{\varphi^-}^{\varphi} \left\{ \sin\theta \, |F_\varphi|^{1/n} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)^{-(n+1)/n} \right\}_\lambda d\varphi \right|. \qquad (1.23)$$

Таким образом, в общем случае при вычислении интегрального потока на поверхность частицы (числа Шервуда) необходимо представить тангенциальную составляющую скорости жидкости вблизи поверхности частицы в форме (1.13), найти общее решение характеристического уравнения (1.20), заменить в нем произвольную постоянную на λ, получив тем самым зависимость $\lambda = \lambda(\mu, \gamma)$, определить переменную τ по формуле (1.21), в которой подынтегральное выражение должно быть записано через координату λ и переменную, по которой ведется интегрирование, и, наконец, воспользоваться формулами (1.11), (1.12).

Плоский и осесимметричный случаи. В плоском и осесимметричном случаях все величины не зависят от коорди-

наты λ. При заданной функции тока ψ компоненты метрического тензора, необходимые для расчета диффузионных потоков вещества, также оказываются заранее известными. Это существенно упрощает вычисление диффузионных потоков по формулам (1.10)—(1.12). В частности, выражение (1.12) принимает вид

$$I = \Lambda \nu^{-2n\nu} [\Gamma(\nu)]^{-1} \tau^{n\nu} (\eta^+, \eta^-)\, \mathrm{Pe}^{\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{n+1}, \quad (1.24)$$

$$\Lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{в осесимметричном случае,} \\ 1 & \text{в плоском случае.} \end{cases}$$

Переменная τ вычисляется по формуле (1.7) или (1.10). При записи выражения (1.24) было учтено, что в плоском случае полный диффузионный поток принято вычислять на единицу длины цилиндра ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$).

Следует отметить, что формулы для распределения концентрации и диффузионных потоков в случае произвольного двумерного обтекания тел любой формы, записанные в тех или иных обозначениях в разных системах координат, фигурировали во многих работах (см., например, [30, 50, 89, 94, 110, 114, 136]).

Формула (1.24) записана в произвольной ортогональной криволинейной системе координат, связанной с поверхностью тела. При решении конкретных осесимметричных и плоских задач полезно иметь выражения для переменных ζ и τ в сферической и цилиндрической системах координат.

Пусть в сферической (r, θ, φ) или цилиндрической (r, θ, z) системе координат форма тела описывается уравнением $r = R(\theta)$. Тогда поле скоростей жидкости вблизи поверхности тела определяется функцией тока $\psi = [r - R(\theta)]^n f(\theta)$. Для переменной τ получим [30, 94]:

в сферических координатах

$$\tau = \tau(\theta, \theta^-) = \frac{1}{n} \left| \int_{\theta^-}^{\theta} \sin\theta \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right] |f(\theta)|^{1/n} d\theta \right|; \quad (1.25)$$

в цилиндрических координатах

$$\tau = \tau(\theta, \theta^-) = \frac{1}{n} \left| \int_{\theta^-}^{\theta} R \left[1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right] |f(\theta)|^{1/n} d\theta \right|. \quad (1.26)$$

Здесь θ^- — угловая координата точки (линии) натекания на поверхности тела.

Отметим, что если параметр n, фигурирующий в формуле (1.5) и последующих формулах этой главы, имеет одинаковое значение на всей поверхности частицы, то, как нетрудно убедиться, полный диффузионный поток на поверхность частицы удовлетворяет свойствам инвариантности, сформулированным для частного случая капли в § 1 гл. 2.

§ 2. Конвективная диффузия к эллипсоидальной частице и круговому тонкому диску

В этом параграфе рассмотрено несколько представляющих интерес для приложений частных задач о массообмене частиц с потоком, решение которых основано на применении общих формул § 1.

Эллипсоидальная частица [89]. Рассмотрим осесимметричную задачу о диффузии к твердой эллипсоидальной частице в однородном поступательном стоксовом потоке. Частица представляет собой эллипсоид вращения, а ее

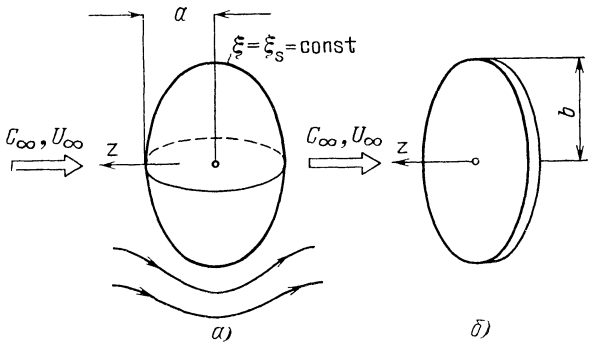


Рис. 4.2. Схема обтекания: *а*) сплюснутого эллипсоида вращения ($\chi \geqslant 1$), *б*) диска ($\chi = +\infty$).

поверхность в размерных цилиндрических координатах z, r, φ (ось z направлена против потока, a и b — полуоси эллипсоида, ориентированные вдоль и поперек потока соответственно, рис. 4.2, *а*) описывается уравнением

$$(z/a)^2 + (r/b)^2 = 1, \quad b/a = \chi.$$

Далее, в качестве характерного масштаба длины и скорости выбираем радиус эквивалентной по объему сферы $a_e = a\chi^{2/3}$ и скорость потока на бесконечности U_∞.

В зависимости от величины параметра χ будем проводить анализ этой задачи в ортогональных сопряженных системах координат вращения [107]: в системе координат ξ, η, λ сплюснутого (при $\chi \geqslant 1$) и вытянутого (при $\chi \leqslant 1$) эллипсоидов вращения, связанных с исходными цилиндрическими координатами соотношениями:

а) при $\chi \geqslant 1$

$$za_e^{-1} = \chi^{-2/3} u_s^{-1} u \cos\eta, \quad ra_e^{-1} = \chi^{-2/3} u_s^{-1} (u^2+1)^{1/2} \sin\eta,$$
$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = \chi^{-4/3} u_s^{-2} (u^2 + \cos^2\eta), \qquad (2.1а)$$
$$g_{\lambda\lambda} = \chi^{-4/3} u_s^{-2} (u^2+1) \sin^2\eta;$$

б) при $\chi \leqslant 1$

$$za_e^{-1} = \chi^{-2/3} u_s^{-1} u \cos\eta, \quad ra_e^{-1} = \chi^{-2/3} u_s^{-1} (u^2-1)^{1/2} \sin\eta,$$
$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = \chi^{-4/3} u_s^{-2} (u^2 - \cos^2\eta), \qquad (2.1б)$$
$$g_{\lambda\lambda} = \chi^{-4/3} u_s^{-2} (u^2-1) \sin^2\eta.$$

Параметры u и u_s определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sh}\xi, \quad u_s = \operatorname{sh}\xi_s = (\chi^2-1)^{-1/2} \text{ при } \chi \geqslant 1, \\ u &= \operatorname{ch}\xi, \quad u_s = \operatorname{ch}\xi_s = (1-\chi^2)^{-1/2} \text{ при } \chi \leqslant 1. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

В этих системах координат поверхность рассматриваемого эллипсоида при всех значениях параметра χ задается уравнением

$$\xi = \xi_s \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi). \qquad (2.3)$$

В стоксовом приближении поле скоростей жидкости при обтекании эллипсоида вращения задается следующей безразмерной функцией тока [107]:

$$\psi = \frac{1}{2} \chi^{-4/3} |\chi^2 - 1| [u^2 + \operatorname{sign}(\chi - 1)] \times$$
$$\times \left[1 - \frac{\mathcal{A}(u, u_s)}{\mathcal{A}(u_s, u_s)}\right] \sin^2\eta, \qquad (2.4)$$

$$\mathcal{A}(u, u_s) =$$
$$= \begin{cases} (u_s^2+1)\, u\, (u^2+1)^{-1} + (1-u_s^2) \operatorname{arcctg} u & \text{при } \chi \geqslant 1, \\ -(u_s^2-1)\, u\, (u^2-1)^{-1} + \frac{1}{2}(1+u_s^2) \ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) & \text{при } \chi \leqslant 1. \end{cases}$$

Разлагая это выражение в ряд по $\xi - \xi_s$, получаем следующую формулу для фигурирующей в (1.5)

функции f:

$$n = 2,\ f(\eta) = \chi^{-4/3} \mid \chi^2 - 1 \mid^{1/2} [A(u_s, u_s)]^{-1} \sin^2 \eta, \tag{2.5}$$

знание которой необходимо для вычисления диффузионных потоков на поверхность частицы.

Учитывая, что траектория натекания определяется значением $\eta^- = 0$, а траектория стекания — значением $\eta^+ = \pi$, и используя формулы (1.7), (1.11), определяем локальный диффузионный поток на поверхность частицы:

$$j(\eta) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \chi^{1/9} \mid \chi^2 - 1 \mid^{1/6} [A(u_s,\ u_s)]^{-1/3} \times$$
$$\times [1 + (\chi^2 - 1)\cos^2 \eta]^{-1/2} j_e(\eta), \tag{2.6}$$
$$j_e(\eta) = 3^{2/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \sin \eta \left(\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta\right)^{-1/3} \mathrm{Pe}_e^{1/3},$$
$$\mathrm{Pe}_e = a_e U_\infty D^{-1}.$$

Здесь $j_e(\eta)$ — безразмерный локальный поток на сферу эквивалентного радиуса a_e, обтекаемую поступательным стоксовым потоком со скоростью U_∞ вдали от частицы.

Учитывая соотношения (2.1), (2.2), (2.5) и используя формулы (1.7), (1.24), получаем следующие выражения для полного диффузионного потока на поверхность частицы и среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = \frac{I}{4\pi} = K(\chi)\,\mathrm{Sh}_e, \quad \mathrm{Sh}_e = \frac{3^{5/3}\pi^{2/3}}{8\Gamma(1/3)} \mathrm{Pe}_e^{1/3},$$
$$K(\chi) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \chi^{-2/9} (\chi^2 - 1)^{1/3} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{\chi^2 - 2}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\chi^2 - 1}\right)\right]^{-1/3} \text{ при } \chi \geqslant 1, \tag{2.7}$$
$$K(\chi) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \chi^{-2/9} (1 - \chi^2)^{1/3} \times$$
$$\times \left[-1 + \frac{2 - \chi^2}{2\sqrt{1 - \chi^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \chi^2}}{1 - \sqrt{1 - \chi^2}}\right]^{-1/3} \text{ при } \chi \leqslant 1.$$

Здесь K — коэффициент формы, Sh_e — число Шервуда для сферы радиуса a_e.

Формулы (2.7) позволяют определить интегральный диффузионный приток реагирующего вещества на поверхность эллипсоида вращения при любом значении отношения его полуосей $0 < \chi < \infty$.

Для коэффициента формы $K = K(\chi)$ выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} &\chi \to 1, \quad K \approx 1 + \frac{2}{45}(\chi - 1), \\ &\chi \to \infty, \quad K \approx 2(3\pi)^{-1/3}\chi^{1/9}, \\ &\chi \to 0, \quad K \approx (4/3)^{1/3}\chi^{-2/9}[-2\ln\chi + 2\ln 2 - 1]^{-1/3}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

На рис. 4.3 показана зависимость коэффициента формы K эллипсоида вращения от отношения его полуосей χ согласно формулам (2.7). Видно, что в интервале $0{,}5 \leqslant \chi \leqslant 3$ коэффициент формы с погрешностью до 0,8% может

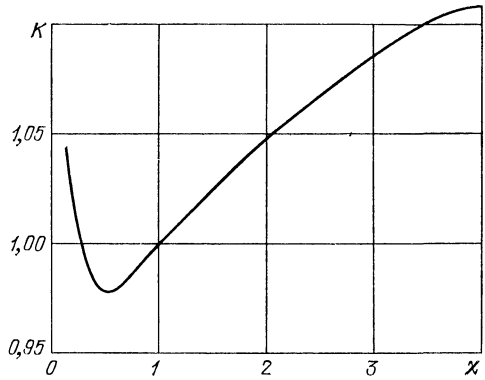


Рис. 4.3. Зависимость коэффициента формы K от отношения полуосей эллипсоида χ.

быть представлен асимптотикой при $\chi \to 1$, определяемой первой формулой (2.8). Отметим также, что при $\chi \leqslant 0{,}15$ и $\chi \geqslant 4$ с той же точностью можно использовать асимптотические соотношения для K соответственно при $\chi \to 0$ и $\chi \to \infty$ (третья и вторая формулы (2.8)).

Исследуем теперь характер изменения локального диффузионного потока (2.6) на поверхность эллипсоида в зависимости от величины параметра χ и координаты η.

* Можно показать, что знак производной от локального потока по координате η совпадает со знаком функции

$$F(\chi, \eta) = \chi^2 \cos\eta - \frac{2}{3}\sin^3\eta\,[1 + (\chi^2 - 1)\cos^2\eta]\left(\eta - \frac{1}{2}\sin^2\eta\right)^{-1},$$

которая в окрестности передней критической точки

представляется в виде

$$\eta \to 0, \quad F(\chi, \eta) \approx \left(-1 + \frac{4}{5}\chi^2\right)\eta^2.$$

Из этого представления следует, что при $0 \leqslant \chi \leqslant \chi_* = \sqrt{5/2} \approx 1{,}118$ локальный диффузионный поток (2.6) принимает максимальное значение в передней критической точке (т. е. при $\eta = 0$) и монотонно убывает с увеличением расстояния от нее вдоль поверхности эллипсоида (т. е. с ростом координаты η). При $\chi_* < \chi$ изменение локального диффузионного потока (2.6) по координате η происходит немонотонно: возрастание потока на участке $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_m$ сменяется убыванием на участке $\eta_m < \eta < \pi$, причем максимум достигается на окружности $\eta = \eta_m$, $\xi = \xi_s$, где $\eta_m = \eta_m(\chi)$ — ненулевой корень уравнения $F(\chi, \eta_m) = 0$.

При $\chi \to \infty$ для величины η_m имеет место асимптотическое равенство

$$\chi \to \infty, \quad \eta_m \to \frac{\pi}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)\chi^{-2},$$

из которого следует, что с увеличением отношения полуосей χ происходит сдвиг расположения максимума локального диффузионного потока вплоть до окружности миделева сечения эллипсоида $\eta = \pi/2$, $\xi = \xi_s$. Этот сдвиг для сплюснутого эллипсоида при $\chi > \chi_*$ от обычного расположения максимума в точке натекания (как это имеет место для сферы) обусловлен тем, что в окрестности передней критической точки сплюснутого эллипсоида происходит значительно более интенсивное торможение потока по сравнению со случаем сферы. Последнее приводит к соответствующему уменьшению интенсивности конвективного переноса вещества в этой области. В результате поток жидкости вблизи поверхности обедняется в меньшей степени, что приводит к повышению локальной концентрации вещества вдали от точки натекания (т. е. при увеличении координаты η). В то же время вблизи контура миделева сечения эллипсоида скорость жидкости увеличивается.

Величина локального диффузионного потока определяется локальной концентрацией вещества и локальной скоростью жидкости вблизи поверхности частицы. Для сплюснутого эллипсоида совместное действие обоих этих факторов приводит к снижению локального диффузионного потока в окрестности передней критической точки и его повышению на части поверхности эллипсоида вблизи ми-

делева сечения, что в результате и обусловливает сдвиг максимума локального потока вещества в направлении течения жидкости вдоль поверхности.

На рис. 4.4 показаны положение максимума η_m локального диффузионного потока (2.6) на поверхности эллипсои-

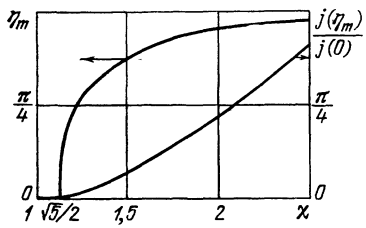


Рис. 4.4. Положение максимума локального диффузионного потока на поверхности эллипсоида вращения и относительная величина этого максимума при разных отношениях полуосей эллипсоида χ.

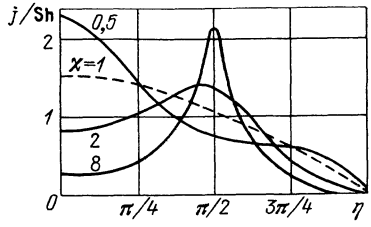


Рис. 4.5. Распределение локального диффузионного потока по поверхности эллипсоида вращения при разных отношениях полуосей эллипсоида χ.

да и относительная величина этого максимума $j(\eta_m)/j(0)$ в зависимости от параметра χ. Видно, что с увеличением степени сжатия эллипсоида величина η_m очень быстро приближается к своему предельному значению $\pi/2$, а максимальная величина локального диффузионного потока $j(\eta_m)$ резко возрастает по сравнению с локальным диффузионным потоком $j(0)$ в передней критической точке. При этом имеет место асимптотическое соотношение

$$\chi \to \infty, \quad \frac{j(\eta_m)}{j(0)} \approx \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{1/3} \chi.$$

Распределение локального диффузионного потока (2.6) при разных χ иллюстрируется рис. 4.5, где приведены нормированные распределения $j(\eta)/Sh$. Штриховой линией выделен случай $\chi = 1$ (сферическая частица).

Следует иметь в виду, что для сильно сплюснутого или сильно вытянутого эллипсоида вращения приведенный выше анализ становится непригодным. Рассмотрим эти предельные случаи.

Круговой тонкий диск [89]. Рассмотрим подробнее случай $\chi \to \infty$ (т. е. $a \to 0$, $b = a\chi = \text{const}$), соответствующий круговому плоскому диску, расположенному поперек потока (рис. 4.2, *б*).

Если выражение (2.7) для полного диффузионного потока на поверхность эллипсоида переписать в размерном виде и устремить к нулю полуось эллипсоида a, ориентированную по направлению скорости на бесконечности, то выполняется предельное соотношение

$$a \to 0, \quad I_* \sim C_\infty a^{1\ 3} b U_\infty^{1\ 3} D^{2/3} O\ (1) \to 0. \qquad (2.9)$$

Из физических соображений ясно, однако, что полный диффузионный поток должен быть конечной и положительной величиной при $a = 0$. Следует поэтому проверить пригодность приведенного ранее решения в данном предельном случае. Действительно, из формулы (2.5) видно, что $f_* = U_\infty a_{ef}^2 f(\eta) \to 0$ при $a \to 0$. Поэтому в рассматриваемом предельном случае для определения диффузионного потока необходимо учесть следующий член разложения функции тока в ряд по $\xi - \xi_s$. Как следует из выражения для функции тока (2.4), поле течения при $a = 0$ (в этом случае $\xi_s = 0$) вблизи поверхности диска представляется в виде (1.5), где

$$n = 3, \quad f_b(\eta) = 2(3\pi)^{-1} \sin^2 \eta \quad (a = 0). \qquad (2.10)$$

В качестве характерного масштаба длины выбран радиус диска b, что отмечается здесь и в дальнейшем индексом b.

Используя формулу (1.11), с учетом (2.10) получаем следующее выражение для локального диффузионного потока на переднюю часть поверхности диска ($0 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$):

$$j(\eta) = 2^{3/2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{-1} \frac{\sin^{2/3}\eta}{\cos\eta} [\varkappa(\eta)]^{-1/4} \mathrm{Pe}_b^{1/4}, \quad \mathrm{Pe}_b = \frac{bU_\infty}{D}, \qquad (2.11)$$

$$\varkappa(\eta) = \pi \left[B\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) - B\left(\cos^2\eta; \frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)\right];$$

$$B(x; p, q) = \int_0^x \bar{x}^{p-1}(1 - \bar{x})^{q-1} d\bar{x},$$

$$B(p, q) \equiv B(1; p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

где $B(x; p, q)$ — неполная бета-функция, $B(p, q)$ — бета-функция.

Из формулы (2.11) следует, что в передней критической точке диска ($\eta = 0$) локальный диффузионный поток ко-

нечен и равен $j(0) = 2^{3/4}[\Gamma(1/4)]^{-1}\pi^{-1/4}\mathrm{Pe}_b^{1/4}$, а при приближении к кромке диска (т. е. при $\eta \to \pi/2$) величина потока неограниченно возрастает. Последнее означает, что толщина диффузионного пограничного слоя на кромке диска обращается в нуль и формула (2.11) непригодна в малой окрестности кромки.

Отметим два существенных отличия диффузионного потока на поверхность диска (2.11) по сравнению с потоком на сферу.

Во-первых, при удалении от передней критической точки вдоль поверхности диска локальный диффузионный поток монотонно возрастает, а не уменьшается, как это имело место в случае сферы. Это свойство нетрудно понять, если вспомнить, что для сплюснутого эллипсоида вращения расположение максимума локального диффузионного потока определялось значением η_m, которое с ростом χ возрастало, стремясь к своему предельному значению $\lim\limits_{\chi\to\infty} \eta_m(\chi) = \pi/2$.

Во вторых, диффузионный поток на диск оказывается пропорциональным числу Пекле в степени $^1/_4$, а не $^1/_3$, как было получено ранее для твердых частиц с гладкой поверхностью. Такое снижение диффузионного потока обусловлено существенно более интенсивным торможением потока жидкости вблизи диска и соответствующим качественным изменением зависимости функции тока от координаты, нормальной к поверхности диска (ср. формулы (2.5) и (2.10)).

В силу свойства $j(\pi/2) = \infty$ формула для локального диффузионного потока (2.11) становится непригодной в области $|\pi/2 - \eta| \leqslant O(\mathrm{Pe}_b^{-1/4})$ вблизи острой кромки диска. Из физических соображений ясно, что величина $j(\eta)$ должна быть конечной при $\eta \to \pi/2$. Действительно, вблизи кромки становится существенным тангенциальный перенос растворенного в жидкости вещества к поверхности диска, что приводит к непригодности приближения диффузионного пограничного слоя (1.6) и необходимости рассматривать в этой области полное уравнение конвективной диффузии (1.3).

Следует отметить, однако, что для определения главного члена асимптотического разложения полного диффузионного потока по числу Пекле на переднюю часть поверхности диска $0 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$ нет необходимости знать точное выражение для локального диффузионного потока $\hat{j}$. Для дальнейшего вычисления достаточно неравенства

$\tilde{j}(\eta) \leqslant j(\eta)$ в области $|\pi/2 - \eta| \leqslant O(\mathrm{Pe}_b^{-1/4})$ (которое следует из непрерывности и конечности величины j при $\eta \to \pi/2$ и свойства $j(\pi/2) = +\infty$). Здесь величина $j(\eta)$ определена формулой (2.11), а $\tilde{j}$ — истинный локальный диффузионный поток.

В силу сходимости несобственного интеграла (1.12), (2.11) замена истинного значения локального потока $\tilde{j}$ на (бо́льшую) величину j (2.11) в области $|\eta - \pi/2| \leqslant O(\mathrm{Pe}_b^{-1/4})$ не приведет к изменению главного члена асимптотического разложения по числу Пекле для интегрального потока (1.12) на переднюю часть поверхности диска. Проведя интегрирование в (1.12) с учетом (2.11), получаем

$$I = \frac{1}{3} 2^{7/2} \pi^{3/4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{-1} \mathrm{B}^{3/4}\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) \mathrm{Pe}_b^{1/4} \approx 3{,}66\ \mathrm{Pe}_b^{1/4}. \tag{2.12}$$

Формулы (2.11), (2.12) не могут быть получены простым предельным переходом в (2.6), (2.7) при стремлении к нулю длины соответствующей полуоси. Такая ситуация полностью аналогична той, которая имеет место при анализе тепломассообмена капли и твердой частицы с окружающей жидкостью (см. § 5 гл. 1 и работы [41, 49]), а именно, существует промежуточная область малой кривизны ($\chi \to \infty$) поверхности эллипсоида вращения, в которой для вычисления полного диффузионного потока необходимо учитывать два первых члена разложения функции тока (2.4) в ряд по степеням $\xi - \xi_s$. Это связано с тем, что при $\chi \to \infty$ второй член разложения функции тока в ряд становится сравнимым с первым членом, и обусловлено неравномерностью предельного перехода при $\chi \to \infty$ и $\xi \to \xi_s$ в (2.4).

Для определения области применимости формул (2.6), (2.7) и (2.11), (2.12) нужно сравнить асимптотику для полного потока I (2.7) при $\chi \to \infty$ ($a \to 0$) с выражением (2.12). С учетом (2.9) получаем, что при $\chi < O(\mathrm{Pe}_b^{1/4})$ справедлива формула (2.7), а при $\chi > O(\mathrm{Pe}_b^{1/4})$ следует пользоваться формулой (2.12).

Вытянутый по потоку эллипсоид вращения. Рассмотрим теперь другой предельный случай: $\chi \to 0$ (т. е. $b = \mathrm{const}$, $a \to \infty$ или $b \to 0$, $a = \mathrm{const}$), соответствующий сильно вытянутому по потоку эллипсоиду вращения. Из выражения (2.7) с учетом (2.8) при $\chi \to 0$ получаем следующую асимптотическую формулу для полного

диффузионного потока в размерных переменных:

$$I_* = 3^{4/5}\pi^{5/3}2^{-1/3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} C_\infty (ab)^{2/3} U_\infty^{1/3} D^{2/3} \times \\ \times \left[2\ln\left(\frac{a}{b}\right) + 2\ln 2 - 1\right]^{-1/3}. \quad (2.13)$$

Следует отметить, что для достаточно вытянутого эллипсоида неприменимо приближение диффузионного пограничного слоя, так как характерный линейный масштаб в любой точке поверхности эллипсоида определяется ее радиусом кривизны, который в точке натекания $\eta = 0$ определяется выражением $R_{\text{кр}} = b^2 a^{-1}$ и стремится к нулю при $\chi \to 0$ (т. е. стремится к нулю локальное число Пекле). Это накладывает ограничения по χ на область применимости формулы (2.13), а граница этой области определяется из равенства $\mathrm{Pe}_{R_{\text{кр}}} = b^2 a^{-1} U_\infty D^{-1} = O(1)$. Это приводит к неравенствам $\chi < O(1)$, $O(1) < \chi^2 \mathrm{Pe}_a$, $\mathrm{Pe}_a = aU_\infty D^{-1}$, при выполнении которых может использоваться формула (2.13).

§ 3. Массоперенос к твердой сферической частице и капле в поле трехмерного деформационного течения

Используем результаты § 1 для решения конкретных задач трехмерного диффузионного пограничного слоя. Рассмотрим массоперенос к сферической капле или твердой частице в произвольном деформационном линейном сдвиговом потоке, распределение скоростей которого на бесконечности имеет вид

$$r \to \infty, \quad v_i = E_{ij} x_j + o(1); \quad E_{ij}\delta_{ij} = 0, \quad E_{ij} = E_{ji}, \quad (3.1)$$

где v_i и E_{ij} — безразмерные компоненты скорости и тензора сдвига, при нормировке которых в каждом конкретном случае выбираются подходящие значения, записанные в декартовой системе координат, связанной с центром частицы (здесь и далее по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$ ведется суммирование), δ_{ij} — символ Кронекера. Равенство нулю суммы диагональных элементов тензора следует из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$, симметрия компонент тензора сдвига относительно перестановки индексов i и j соответствует отсутствию вращательной составляющей скорости жидкости на бесконечности (деформационное течение).

Решение гидродинамической задачи об обтекании сферической капли деформационным стоксовым потоком (3.1) имеет вид [14]

$$v_i = E_{ij}x_j\left(1 - \frac{\beta}{\beta+1}\frac{1}{r^5}\right) - \\ - \frac{5}{2}E_{jk}x_i r_j x_k\left(\frac{\beta+{}^2/_5}{\beta+1}\frac{1}{r^5} - \frac{\beta}{\beta+1}\frac{1}{r^7}\right) \quad (3.2)$$
$$\left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right),$$

где β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости, значение $\beta = \infty$ соответствует твердой частице, а $\beta = 0$ — газовому пузырю.

Симметричный тензор $\boldsymbol{E}$ путем поворота системы координат может быть приведен к диагональному виду с компонентами E_m $(m = 1, 2, 3)$, которые определяются путем решения кубического уравнения $\det \| E_{ij} - E_m\delta_{ij} \| = 0$. Диагональные элементы E_1, E_2, E_3 приведенного к главным осям тензора $\boldsymbol{E}$ определяют интенсивность растягивающего (сжимающего) движения вдоль осей координат. В соответствии с условием несжимаемости только два диагональных элемента из трех являются независимыми. Симметричный тензор сдвига имеет три инварианта:

$$J_1 = E_{ij}\delta_{ij} = E_1 + E_2 + E_3 = 0,$$
$$J_2 = (E_{ij}E_{ij})^{1/2} = (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)^{1/2}, \quad (3.3)$$
$$J_3 = |\det \| E_{ij} \| |^{1/3} = |E_1E_2E_3|^{1/3},$$

которые остаются неизменными при любых поворотах (с отражениями) исходной системы координат.

Декартову систему координат, связанную с главными осями тензора сдвига, обозначаем X_1, X_2, X_3. Без ограничения общности будем считать, что $E_1 \geqslant E_2 \geqslant 0$, $E_3 < 0$ (т. е. $|E_3| = \max\limits_m |E_m|$). В сферической системе координат, связанной с главными осями тензора сдвига, старшие члены разложения тангенциальных составляющих скорости жидкости (3.2) вблизи поверхности капли и твердой частицы даются формулами (при $r \to 1$)

$$v_\theta = \frac{1}{2}q(n)\xi^{n-1}\sin 2\theta\{-3E_3 + (E_1 - E_2)\cos 2\varphi\},$$
$$v_\varphi = q(n)\xi^{n-1}(E_2 - E_1)\sin\theta\sin 2\varphi, \quad (3.4)$$
$$q(1) = \frac{1}{2(\beta+1)}, \quad q(2) = \frac{5}{2}, \quad \xi = r - 1,$$

где значение $n = 1$ соответствует капле умеренной вязкости ($\beta \leqslant O(1)$), а $n = 2$ — твердой частице ($\beta = \infty$).

Из выражений (3.4) видно, что поле течения трехмерно при $E_1 \neq E_2$. Следует отметить, что осесимметричный случай, соответствующий значениям $E_1 = E_2 = -{}^1/_2 E_3$, рассматривался ранее для капли в § 6 гл. 1, а для твердой сферы — в § 3 гл. 3.

Из соотношения (3.4) следует, что на поверхности сферической капли или твердой частицы имеются шесть изолированных особых критических точек, расположенных на главных осях тензора сдвига: 1) $\theta = 0$; 2) $\theta = \pi$; 3) $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$; 4) $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi$; 5) $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$; 6) $\theta = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$, первые две из которых являются точками натекания, две последующие — точками стекания, а последние две — нейтральными точками (особенность типа седла). В предельном осесимметричном случае $E_1 = E_2$ вместо последних четырех изолированных критических точек на экваторе капли ($\theta = \pi/2$) появляется критическая линия стекания.

Характеристическое уравнение, определяющее зависимость искомой криволинейной координаты λ от сферических координат θ и φ, одинаково для случая капли и твердой сферы:

$$\frac{2d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{-3E_3 + (E_2 - E_1)\cos 2\varphi}{(E_1 - E_2)\sin 2\varphi}\, d\varphi. \qquad (3.5)$$

При выводе этого уравнения использованы соотношения (1.20), (1.22), (3.4).

Нетрудно показать, что общее решение уравнения (3.5) может быть представлено в форме

$$C = \operatorname{tg}^2\theta \operatorname{tg}^{\varkappa}\varphi \sin 2\varphi, \qquad \varkappa = 3\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2}, \qquad (3.6)$$

где C — произвольная постоянная; при записи показателя $\varkappa$ была исключена компонента E_3 путем использования первого равенства (3.3). Зависимость криволинейной координаты λ от сферических координат получаем, полагая в (3.6) $C \equiv \lambda$ (естественно, можно положить и $\lambda = \Phi(C)$, где Φ — любая достаточно «хорошая» функция).

На рис. 4.6 показано качественное поведение предельных линий тока на поверхности капли или твердой частицы в первом квадранте $0 \leqslant \theta, \varphi \leqslant \pi/2$; величина переменной $\lambda = C$ (3.6) изменяется в пределах от нуля до бесконечности. Интегральный диффузионный поток на эту часть

поверхности вычисляется путем использования выражения (1.12) при $\Lambda = +\infty$. Подынтегральную функцию в (1.12) определяем по последней формуле (1.23) с учетом соотношения $\partial\lambda/\partial\theta = 4\lambda/\sin 2\theta$ (которое является

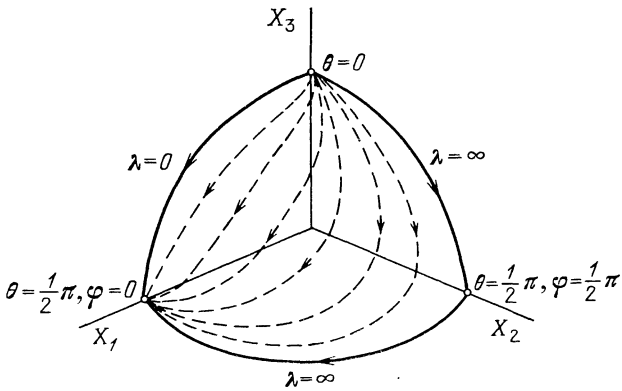


Рис. 4.6. Предельные линии тока на поверхности сферической частицы (капли), обтекаемой произвольным деформационным линейным сдвиговым потоком.

следствием (3.6) при $C = \lambda$), а также того, что в рассматриваемой области координата φ изменяется в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Для функции $\tau(\eta^+, \eta^-; \lambda)$ получаем

$$\tau(\eta^+, \eta^-; \lambda) =$$

$$= \frac{[|E_1 - E_2|\, q(n)]^{1/n}}{(4n\lambda)^{\frac{n+1}{n}}} \int_0^{\pi/2} \{\sin\theta \sin 2\theta\}_\lambda^{\frac{n+1}{n}} \sin^{\frac{1}{n}} 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{[|E_1 - E_2|\, q(n)]^{\frac{1}{n}}}{4\,(2n)^{\frac{n+1}{n}}} \int_0^1 \frac{z^{\frac{\varkappa n+\varkappa-n+3}{4n}} (1-z)^{\frac{\varkappa n+\varkappa-2n}{2n}}}{\left[z^{\frac{\varkappa+1}{2}} + \frac{\lambda}{2}(1-z)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\right]^{\frac{3(n+1)}{2n}}} dz. \quad (3.7)$$

В случае капли, обтекаемой плоским сдвиговым потоком (трехмерное поле течения), что соответствует значениям $n = 1$, $\varkappa = 3$ ($E_1 = -E_3$, $E_2 = 0$), интеграл (3.7) можно выразить в элементарных функциях:

$$\tau(\eta^+, \eta^-; \lambda) = \frac{|E_1|}{32\Delta^2(\beta+1)} [-3\varepsilon + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\,\Xi], \quad (3.8)$$

$$\Xi = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left[\operatorname{arth}\left(\dfrac{2-\varepsilon}{\sqrt{-\Delta}}\right) - \operatorname{arth}\left(\dfrac{-\varepsilon}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right] & \text{при } \Delta < 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2-\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] & \text{при } \Delta > 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = \frac{\lambda}{4}(8-\lambda), \quad \operatorname{arth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Вычисление интегрального диффузионного потока на всю поверхность капли проводится по формулам (1.12), (3.8) при $\Lambda = \infty$ с учетом того, что интегральный поток на рассматриваемую часть поверхности (рис. 4.6) составляет 1/8 от полного потока. В результате вычислений для среднего числа Шервуда $\mathrm{Sh} = I\,(4\pi)^{-1}$ получаем [87]

$$\mathrm{Sh} = 0{,}731\,(\beta+1)^{-1/2}\mathrm{Pe}^{1/2}, \quad \mathrm{Pe} = a^2|E_1^*|D^{-1} \qquad (3.9)$$
$$(E_1^* = -E_3^*, \quad E_2^* = 0),$$

где звездочкой помечены размерные компоненты тензора сдвига.

Выбирая за характерный масштаб сдвига второй размерный инвариант (3.3) $J_2^* = \sqrt{2}\,|E_1^*|$, формулу (3.9) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\mathrm{Sh} = 0{,}615\,\mathrm{Pe}_m^{1/2}\,(\beta+1)^{-1/2}, \qquad (3.10)$$

где модифицированное число Пекле Pe_m определяется выражением

$$\mathrm{Pe}_m = a^2 J_2^* D^{-1}, \quad J_2^* = (E_{ij}^* E_{ij}^*)^{1/2}. \qquad (3.11)$$

Если результаты § 6 гл. 1, полученные для среднего числа Шервуда в случае сферической капли при осесимметричном деформационном обтекании ($E_{11}^* = E_{22}^* = -{}^1/_2\,E_{33}^*$), переписать через модифицированное число Пекле (3.11) $\mathrm{Pe}_m = a^2\sqrt{6}\,|E_{11}^*|D^{-1}$, то окажется, что оно отличается от (3.10) лишь числовым множителем, равным 0,624, т. е. менее чем на 1,5%. Поэтому формулу

$$\mathrm{Sh} = 0{,}62\,\mathrm{Pe}_m^{1/2}\,(\beta+1)^{-1/2}, \qquad (3.12)$$

которая дает отличие от точных результатов для осесимметричного и плоского деформационных течений менее 1%, по-видимому, можно использовать для приближенного определения среднего числа Шервуда для сферической капли, обтекаемой произвольным деформационным сдвиговым потоком (3.2). При этом параметр Pe_m вычисляется согласно выражению (3.11).

Для случая твердой сферы, обтекаемой плоским сдвиговым потоком ($n = 2$, $\varkappa = 3$), зависимость переменной τ (η^+, η^-; λ) от криволинейной координаты λ определялась численно в работе [116] по первой формуле (1.23). Последующее интегрирование по поверхности сферы с учетом выражения (1.12) привело к следующему значению среднего числа Шервуда [116, 162]:

$$\mathrm{Sh} = 0{,}899\,\mathrm{Pe}_m^{1/3}, \qquad (3.13)$$

где модифицированное число Пекле вычисляется по формуле (3.11), т. е. $\mathrm{Pe}_m = a^2\sqrt{2}\,|E_1^*|\,D^{-1}$.

Соответствующие результаты § 3 гл. 3 для осесимметричного сдвига отличаются от (3.13) коэффициентом 0,905, т. е. менее чем на 1%. Это замечательное обстоятельство, как и в случае капли, позволяет высказать предположение [116], что среднее число Шервуда для сферической частицы очень слабо зависит от третьего инварианта (3.3) и для любой симметричной матрицы коэффициентов сдвига (3.1) может приближенно определяться с помощью формул (3.11), (3.13) (в последней из которых вместо численного коэффициента 0,899 удобнее взять просто 0,9).

§ 4. Массоперенос к сферической частице, свободно взвешенной в простом сдвиговом потоке

Исследуем теперь массообмен частицы, которая окружена областью течения с полностью замкнутыми линиями тока. В этом случае на поверхности частицы отсутствуют особые гидродинамические точки (или линии) торможения потока. Рассматриваемая ситуация качественно аналогична диффузии к круговому цилиндру, свободно вращающемуся в простом сдвиговом потоке (см. § 7 гл. 3), и характерна тем, что здесь при больших числах Пекле не происходит формирования диффузионного пограничного слоя вблизи поверхности частицы.

Распределение концентрации в области с замкнутыми линиями тока представляется в виде регулярного разложения по обратным степеням числа Пекле:

$$c = c_0 + \mathrm{Pe}^{-1}c_1 + \ldots \qquad (\mathrm{Pe} \to \infty).$$

Подстановка этого ряда в уравнение конвективной диффузии с последующим выделением членов при одинаковых степенях малого параметра Pe^{-1} показывает, что главный член разложения удовлетворяет уравнению $(v\cdot\nabla)c_0 = 0$.

Поэтому концентрация c_0 принимает постоянные значения на линиях тока. Однако этой информации оказывается недостаточно для определения c_0. Выписывая уравнение для следующего члена разложения c_1 и интегрируя его далее по замкнутым линиям тока (см. § 7 гл. 3), можно вывести уравнение эллиптического типа для функции c_0. В общем трехмерном случае решение соответствующей краевой задачи для определения главного члена разложения концентрации c_0 нельзя представить в явном аналитическом виде (при необходимости следует использовать численные методы). Тем не менее с учетом структуры разложения концентрации c и отмеченных выше свойств функции c_0 можно сделать очень важный качественный вывод: в тех случаях, когда частица (капля) окружена областью течения с замкнутыми линиями тока, среднее число Шервуда при $\mathrm{Pe} \to \infty$ стремится к некоторому конечному постоянному значению, т. е. выполняется равенство

$$\lim_{\mathrm{Pe}\to\infty} \mathrm{Sh} = \mathrm{const} \neq \infty. \tag{4.1}$$

Это предельное свойство среднего числа Шервуда коренным образом отличается от соответствующего поведения величины Sh при наличии особых гидродинамических точек, когда среднее число Шервуда неограниченно возрастает при увеличении числа Пекле (ср. формулы (1.12) и (4.1)).

Пусть твердая сферическая частица свободно вращается в простом сдвиговом потоке, распределение скоростей которого на бесконечности имеет вид

$$r \to \infty, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = x_1, \quad v_3 = 0. \tag{4.2}$$

На поверхности частицы требуется выполнение равенства нулю момента вязких сил трения. В стоксовом приближении решение соответствующей гидродинамической задачи об обтекании сферы получено в работе [130], где было, в частности, показано, что линии тока такого течения образуются путем пересечения следующих двух однопараметрических семейств поверхностей:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi = \pm r\tilde{f}(r)\,[A + \tilde{g}(r)]^{1/2},$$
$$x_3 = r\cos\theta = Br\tilde{f}(r),$$

$$\tilde{f}(r) = \left(r^3 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^2}\right)^{-1/3}, \quad \tilde{g}(r) = \int_r^\infty y^{-3}\tilde{f}(y)\,dy, \tag{4.3}$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

где A и B — параметры, а $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — монотонно убывающие функции r, обладающие такими свойствами:

вблизи поверхности сферы (при $r \to 1$)

$$\tilde{f} = \left(\frac{2}{15}\right)^{1/3}(r-1)^{-2/3}\left\{1+\frac{2}{9}(r-1)+O((r-1)^2)\right\},$$

$$\tilde{g} = \tilde{g}(1) - 3\left(\frac{2}{15}\right)^{1/3}(r-1)^{1/3}\left\{1-\frac{25}{36}(r-1)+O((r-1)^2)\right\}, \tag{4.4}$$

$$\tilde{g}(1) = 1{,}047;$$

на бесконечности (при $r \to \infty$)

$$\tilde{f} = r^{-1} + \frac{5}{6}r^{-4} + O(r^{-6}), \quad \tilde{g} = \frac{1}{3}\cdot r^{-3} + \frac{5}{36}r^{-6} + O(r^{-8}). \tag{4.5}$$

Распределение скоростей жидкости такого течения дается формулой (2.5) гл. 6.

Из выражений (4.3)—(4.5) видно, что все линии тока разомкнуты при $A > 0$ и замкнуты при $-\tilde{g}(1) \leqslant A \leqslant 0$. Значение $A = -\tilde{g}(1)$ соответствует поверхности сферы, а величина $A = 0$ определяет состоящую из линий тока трехмерную предельную поверхность, которая разграничивает области с замкнутыми и разомкнутыми линиями тока. В области с замкнутыми линиями тока параметр B изменяется в пределах от $-B^0$ до $+B^0$, где $B^0\tilde{f}(r^0) = 1$ при $A + \tilde{g}(r^0) = 0$, $-\tilde{g}(1) \leqslant A \leqslant 0$.

Как уже отмечалось ранее, концентрация вдоль каждой замкнутой линии тока стремится к постоянной величине при $\mathrm{Pe} \to \infty$. Так как параметры A и B фиксированы на каждой линии тока, то главный член асимптотического разложения концентрации является функцией только этих параметров, т. е. $c_0 = c_0(A, B)$. Учитывая формулы (4.3), сферические координаты r и θ следует выразить через φ, A, B. Записывая далее уравнение для следующего члена разложения c_1 и интегрируя его после умножения на $r\sin\theta v_\varphi^{-1}$ по отрезку $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, можно вывести уравнение и граничные условия для старшего члена разложения:

$$\alpha_1\frac{\partial^2 c_0}{\partial A^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 c_0}{\partial A\,\partial B} + \alpha_3\frac{\partial^2 c_0}{\partial B^2} + \alpha_4\frac{\partial c_0}{\partial A} + \alpha_5\frac{\partial c_0}{\partial B} = 0; \tag{4.6}$$

$$A = -\tilde{g}(1), \quad c_0 = 0 \text{ (на поверхности сферы)},$$

$$A = 0, \quad c_0 = 1 \text{ (на предельной поверхности)}$$

(здесь коэффициенты α_i ($i = 1, \ldots, 5$) зависят только от A и B).

Наличие дополнительного перекрестного члена $\frac{\partial^2 c_0}{\partial A\,\partial B}$ в уравнении (4.6) обусловлено использованием в данном случае неортогональной системы координат, для которой $(\nabla A \cdot \nabla B) \neq 0$.

Коэффициенты α_i в (4.6) были выписаны в работе [111] в виде нескольких первых членов разложения по нормированным величинам $\zeta = \tilde{g}\,(1) + A$ и $\sigma = B\zeta^{-2}$ вблизи поверхности частицы (при $r \approx 1$). После этого решение задачи (4.6) отыскивалось в виде соответствующего степенного ряда $c_0 = a_1(\sigma)\,\zeta^3 + a_2(\sigma)\,\zeta^6 + \ldots$, подстановка которого в уравнение (4.6) позволила найти зависимость $a_1 = a_1(\sigma)$ (второй коэффициент разложения $a_2(\sigma)$ не определялся). В результате для среднего числа Шервуда было получено значение

$$\mathrm{Sh} = 4{,}5. \tag{4.7}$$

Массообмен сферы, свободно взвешенной в произвольном плоском сдвиговом течении, рассматривался в работе [163]. Было показано, что увеличение угловой скорости вращения потока приводит к снижению интенсивности массопереноса к сфере.

§ 5. Плоский случай. Конвективная диффузия к эллиптическому цилиндру и пластине

Рассмотрим стационарную конвективную диффузию к поверхности тела, имеющего форму эллиптического цилиндра, обтекаемого в поперечном направлении поступательным потоком со скоростью U_∞ на бесконечности [89].

Сечение цилиндра в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z (координата z направлена по оси цилиндра перпендикулярно плоскости сечения) задается уравнением

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1, \qquad b = a\chi, \tag{5.1}$$

где a и b — полуоси эллиптического цилиндра, ориентированные вдоль и поперек набегающего потока соответственно.

В качестве характерного масштаба длины и скорости выбираем радиус эквивалентного по площади поперечного сечения кругового цилиндра $a_e = a\chi^{1/2}$ и характерную скорость жидкости

$$U(\mathrm{Re},\ \chi) = \frac{U_\infty}{\varkappa(\chi) - \ln \mathrm{Re}}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{a_e U_\infty}{\nu}.$$

Здесь Re — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости; функция $\varkappa = \varkappa(\chi)$ должна определяться путем асимптотического анализа при $\mathrm{Re} \to 0$ соответствующей гидродинамической задачи об обтекании цилиндра. Отметим, что для кругового цилиндра ($\chi = 1$) выполняется соотношение $\varkappa(1) = 2\ln 2 - \gamma + {}^1/_2 \approx 1{,}31$, $\gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера (см. § 6 гл. 3).

В безразмерной системе координат ξ, η сплюснутого или вытянутого эллиптического цилиндра

$$xa_e^{-1} = \chi^{-1/2} u_s^{-1} u \cos\eta, \quad ya_e^{-1} = \chi^{-1/2} u_s^{-1} (u^2 + \sigma)^{1/2} \sin\eta, \quad (5.2)$$

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = \chi^{-1} u_s^{-2} (u^2 + \sigma\cos^2\eta), \quad \sigma = \mathrm{sign}\,(\chi - 1),$$

поверхность (5.1) при всех значениях параметра χ задается уравнением (2.3) ($0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$) (параметры $u = u(\xi)$ и $u_s = u(\xi_s)$ определяются выражениями (2.2)).

Распределение скоростей жидкости при обтекании эллиптического цилиндра (5.1) в системе координат (5.2), (2.2) определяется безразмерной функцией тока [118]

$$\psi = \sigma\chi^{-1/2} |\chi^2 - 1|^{1/2} (u^2 + \sigma)^{1/2} [u_s (u_s^2 + \sigma) - (u_s^2 + \sigma) u (u^2 + \sigma)^{-1/2} + \sigma(\xi - \xi_s)] \sin\eta. \quad (5.3)$$

Разлагая это выражение в ряд по $\xi - \xi_s$, для функции f (1.5) получаем

$$n = 2, \quad f(\eta) = \chi^{-1/2} \sin\eta \quad (0 \leqslant \chi < \infty). \quad (5.4)$$

Учитывая, что в данном случае на поверхности цилиндра имеются лишь две критические точки $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = \pi$, которые разбивают область течения на участки (η_1, η_2) и (η_2, η_3), где точка $\eta_3 = 2\pi$ геометрически совпадает с η_1, но должна учитываться в формулах (1.11), (1.24), для локального и полного диффузионных потоков на единицу длины цилиндра получаем

$$j(\eta) = \frac{(12\chi)^{1/3} |\sin\eta|^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(1 + |\chi^2 - 1|\cos^2\eta)^{1/2}} \times \times \left[B\left(\sin^2\eta; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right]^{-1/3} \mathrm{Pe}_m^{1/3},$$

$$I = \frac{4\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{4/3}} \chi^{-1/6} \mathrm{Pe}_m^{1/3} = \quad (5.5)$$

$$= \frac{3{,}64\chi^{-1/6}}{[\varkappa(\chi) - \ln \mathrm{Re}]^{1/3}} \mathrm{Pe}_e^{1/3}, \quad \mathrm{Pe}_e = \frac{a_e U_\infty}{D}.$$

Здесь $B(x;\ p,\ q)$ — неполная бета-функция, $\mathrm{Pe}_m = a_e UD^{-1}$ — модифицированное число Пекле.

Из анализа выражения для локального диффузионного потока (5.5) следует, что с ростом параметра χ изменение величины $j(\eta)$ аналогично изменению, которое имело место в случае однородного стоксова обтекания эллипсоида вращения (см. § 2). А именно, при $0 \leqslant \chi < \gamma_* = (7/5)^{1/2} \approx 1{,}183$ максимум локального диффузионного потока расположен в передней критической точке цилиндра ($\eta = 0$) и $j(\eta)$ монотонно уменьшается с ростом параметра η в области $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$ ($j(\eta) = j(2\pi - \eta)$); при $\chi > \gamma_*$ с ростом η сначала происходит рост локального потока вплоть до некоторой точки $\eta_* = \eta_*(\gamma)$ $[(\partial j(\eta, \chi)/\partial\eta]_{\eta=\eta^*} = 0)$, который далее сменяется (при $\eta > \eta_*$) монотонным убыванием. Можно показать, что при $\chi \to \infty$ выполняются следующие асимптотические соотношения: $\eta_* \to \pi/2$, $j(\eta_*)/j(0) \sim \chi \cdot O(1)$.

Из формулы (5.5) следует, что $I \to 0$ при $\chi \to \infty$. Рассмотрим подробнее этот предельный случай, соответствующий поперечно обтекаемой пластине бесконечной длины и шириной $2b$. Из выражения (5.4) видно, что $f \to 0$ при $\chi \to \infty$. Эта ситуация также полностью аналогична той, которая имела место в случае конвективной диффузии к эллипсоидальной частице при малых значениях кривизны ее поверхности в точке натекания (см. § 2). Поэтому для определения полного диффузионного потока необходимо учесть следующий член разложения функции тока в ряд по $\xi - \xi_s$. Поле течения в этом предельном случае ($a = 0$, $\xi_s = 0$) вблизи пластины представляется в виде (1.5), где

$$n = 3, \quad f(\eta) = \frac{1}{3}\sin\eta. \tag{5.6}$$

Используя формулы (1.24), (1.7) и (5.6), получаем следующее выражение для безразмерного интегрального потока на переднюю часть поверхности пластины ($0 \leqslant \eta < \pi/2$, $3\pi/2 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$):

$$I = \frac{16\pi^{3/8}}{3^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\right]^{3/4} \mathrm{Pe}_{mb}^{1/4} = 1{,}78\,\mathrm{Pe}_{mb}^{1/4}. \tag{5.7}$$

Здесь за характерный масштаб длины выбрана половина ширины пластины b, $\mathrm{Pe}_{mb} = bUD^{-1}$.

Из формулы (5.7) следует, что для поперечно обтекаемой пластины полный диффузионный поток пропорционален числу Пекле в степени $^1/_4$, т. е. меньше, чем для эллиптического цилиндра с конечным радиусом кривизны в точке натекания (5.5), для которого соответствующий показатель степени равен $^1/_3$.

Диффузия к поверхности продольно обтекаемой плоской полубесконечной пластины при больших числах Рейнольдса (течение Блазиуса) рассматривалась в [154] (см. также [60, 109]).

§ 6. Диффузия в системе параллельных круговых цилиндров

На практике часто приходится учитывать взаимное влияние поперечно обтекаемых цилиндрических тел на процесс диффузии растворенного вещества к их поверхности. При этом рассмотренная в § 6 гл. 3 модель диффузии к одиночному цилиндру в неограниченном потоке оказывается недостаточной и нуждается в уточнении. Так, расстояние между трубками теплообменника может составлять от долей диаметра до нескольких диаметров трубки. Расстояния между волокнами фильтров, применяемых для промышленной очистки газов от аэрозольных частиц, обычно также не превышает нескольких диаметров волокна. Такого же порядка и расстояния между обонятельными волосками шелкопряда [65, 180].

В практических ситуациях цилиндры обычно расположены в пространстве либо случайным образом, либо так, что соседние цилиндры не следуют один за другим в направлении потока. Поэтому главным фактором, влияющим на интенсивность массопереноса к поверхности цилиндра в системе является изменение поля течения, определяющего конвективный перенос вещества. Для упорядоченных систем, устроенных таким образом, что соседние цилиндры следуют один за другим в направлении потока, пришлось бы учитывать также и эффект взаимодействия диффузионного следа предыдущего цилиндра с диффузионным пограничным слоем следующего, подобно тому, как это делалось для цепочек капель в § 4 гл. 2 (см. также анализ процесса массопереноса в цепочках сфер в следующем § 7).

Таким образом, основная трудность исследования процесса массопереноса в системе цилиндров заключается

в определении поля течения, поскольку точные аналитические решения соответствующей гидродинамической задачи отсутствуют даже в случае малых чисел Рейнольдса. Поэтому приходится строить различные модели поля течения. Две такие модели, пригодные для описания поля течения в предельных случаях больших и малых расстояний между поверхностями цилиндров по сравнению с их диаметром, рассматриваются ниже.

Разреженная система параллельных цилиндров. Рассмотрим систему параллельных круговых цилиндров одинакового диаметра в поступательном потоке, направленном по нормали к их осям. Цилиндры расположены в потоке случайным образом на больших по сравнению с их диаметром расстояниях. Для построения поля течения в такой системе используем так называемую ячеечную модель [107]. Согласно этой модели каждый цилиндр считается расположенным на оси коаксиальной с ним цилиндрической ячейки, внутри которой локализованы возмущения поля течения, вносимые данным цилиндром. Предполагается, что все ячейки равноправны, имеют одинаковые размеры и плотно заполняют выделенный объем системы. Для простоты принимается, что ячейки тоже имеют форму кругового цилиндра. Тогда радиус ячейки легко определяется для случайного расположения цилиндров по известной доле φ объема, занятого твердой фазой, и равен половине среднего расстояния между их осями $b = a\varphi^{-1/2}$ (a — радиус цилиндра). В рамках ячеечной модели задача построения поля течения сводится к решению уравнений Навье — Стокса, граничные условия для которых на поверхности цилиндра формулируются обычным образом, а вместо условий на бесконечности, соответствующих одиночному цилиндру, необходимо поставить граничные условия на поверхности ячейки. Именно эти граничные условия определяют характер гидродинамического взаимодействия между цилиндрами. Одно из них тривиально вытекает из условия сохранения массы жидкости, а строгая формулировка второго граничного условия принципиально невозможна без решения задачи обтекания системы тел в полной постановке. Поэтому приходится использовать интуитивные соображения, которые, помимо своей нестрогости, не приводят к однозначному результату, вследствие чего существуют различные ячеечные модели [107]. Наиболее часто используется модель Хаппеля [107, 139], в которой поверхность ячейки считается свободной от касательных напряжений, и модель

Кувабары [153], в которой на поверхности ячейки обращается в нуль вектор вихря.

Интересно отметить, что для плоской задачи построение поля течения в рамках ячеечной модели оказывается более простым, чем в случае обтекания одиночного цилиндра (поскольку в первом случае может быть построено решение в стоксовом приближении). При этом разные модели дают близкие между собой результаты.

Согласно расчету по ячеечной модели Хаппеля [139] в стоксовом приближении безразмерная функция тока вблизи поверхности цилиндра в системе случайно расположенных параллельных цилиндров с точностью до главного члена $O((r-1)^2)$ имеет такой же вид, как и для одиночного цилиндра (формула (6.5) гл. 3), если масштаб скорости определить следующим образом:

$$U = U_\infty \left(-\frac{1}{2} \ln \varphi - \frac{1}{2} \right)^{-1}. \qquad (6.1)$$

Здесь U_∞ — скорость фильтрации (т. е. средняя скорость потока в расчете на полное поперечное сечение системы, как если бы цилиндров не было), φ — доля объема, занятого цилиндрами ($1-\varphi$ — пористость системы). В модели Кувабары [153] последнее слагаемое в скобках в (6.1) заменяется на $-3/4$. Близкие к этому результаты дают и другие модели, например модель точечных сил [188].

Таким образом, в рамках ячеечной модели решение задачи о диффузии к одиночному цилиндру, приведенное в § 6 гл. 3, сохраняет силу и для системы цилиндров, если для определения масштаба скорости вместо формулы (6.3) гл. 3 использовать приведенную здесь формулу (6.1). Для числа Шервуда, согласно формуле (6.11) гл. 3, получим следующее выражение через стандартное число Пекле, определенное по скорости фильтрации U_∞ [106]:

$$\mathrm{Sh} = \frac{0{,}580}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \varphi \right)^{1/3}} \mathrm{Pe}^{1/3}. \qquad (6.2)$$

Отметим, что зависимость (6.2) применима лишь для достаточно разреженных систем, поскольку уже при $\varphi \approx 0{,}37$ (для модели Кувабары при $\varphi \approx 0{,}22$) эта зависимость дает бесконечно большое значение числа Шервуда.

Концентрированная система параллельных цилиндров [26]. В связи с отмеченными недостатками ячеечных моделей рассмотрим другой предельный случай, когда расстояние между поверхностями соседних цилиндров

мало по сравнению с их диаметром; построим модель течения и найдем число Шервуда.

Сначала исследуем движение жидкости в узком зазоре между двумя параллельными цилиндрами, оси которых нормальны к плоскости течения.

Методами гидродинамической теории смазки нетрудно показать, что при малых числах Рейнольдса, определенных по ширине зазора, распределение продольной составляющей скорости в прямоугольной декартовой системе координат x, y, представленной на рис. 4.7 (область II), дается формулой (в размерной форме)

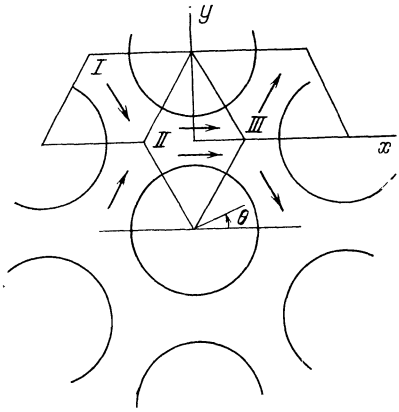


Рис. 4.7. Модель обтекания системы цилиндров.

$$v_x = -\frac{1}{2\mu}(h^2 - y^2)\frac{\partial p}{\partial x},$$

где $h = h(x)$ — локальная полуширина зазора, $\partial p/\partial x$ — продольная составляющая градиента давления, зависящая только от x, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости. Поскольку расход жидкости в зазоре на единицу длины цилиндра постоянен и равен $q = \frac{2}{3\mu} h^3 \frac{\partial p}{\partial x}$, для продольной составляющей скорости внутри зазора имеем

$$v_x = \frac{3}{4} q (h^2 - y^2) h^{-3}. \qquad (6.3)$$

Заметим, что при соответствующем определении функции $h = h(x)$ выражение (6.3) справедливо для цилиндров любого поперечного сечения при условии, что полуширина зазора мала по сравнению с радиусом кривизны; для круговых цилиндров одинакового радиуса $h = b - (a^2 - x^2)^{1/2}$, где $2b$ — расстояние между осями цилиндров, x — расстояние по оси зазора от минимального поперечного сечения.

Рассмотрим для определенности систему параллельных круговых цилиндров (например, цилиндрических волокон фильтра), расположенных в шахматном порядке, когда ось каждого цилиндра проходит через центр пра-

вильного шестиугольника, в вершинах которого лежат оси соседних цилиндров, так что расстояния между осями равны $2b$ (рис. 4.7). Жидкость проходит по системе геометрически подобных «горизонтальных» (типа II) и «наклонных» (типов I, III) каналов. В силу симметрии ясно, что расходы жидкости в каналах типов I, III равны половине расхода в канале типа II, причем последний равен $q = 2bU_\infty$ (на единицу длины цилиндра), где U_∞ — скорость фильтрации. Таким образом, формула (6.3) для распределения продольной составляющей скорости в каналах типа II определяет значение v_x также и для каналов типов I, III, если заменить q на $^1/_2 q$ и выполнить соответствующее преобразование координат.

Будем рассматривать диффузию к верхней половине цилиндра, показанного на рис. 4.7. Перейдем к безразмерным переменным, введя в качестве масштабов длины, скорости и концентрации соответственно радиус цилиндра a, скорость фильтрации U_∞ и исходную концентрацию C_∞. Введем безразмерную полярную систему координат r, θ, связанную с центром цилиндра, отсчитывая, как обычно, угол θ от направления скорости фильтрации, как показано на рис. 4.7.

Определим безразмерную функцию тока ψ согласно соотношению (6.3) и условию несжимаемости жидкости таким образом, чтобы на рассматриваемой поверхности полуцилиндра выполнялось равенство $\psi = 0$. Получим для области II

$$\psi = \frac{3}{2}\sigma^{-1/2}(r-1)^2[\sin\theta(\sigma^{-1/2} - \sin\theta)]^{-2} + O((r-1)^3),$$

$$\pi/3 < \theta < 2\pi/3, \quad \sigma = a^2/b^2.$$

В соответствии со сказанным выше функцию тока вблизи поверхности полуцилиндра можно определить выражением

$$\psi = (r-1)^2 f(\theta) + O((r-1)^3), \tag{6.4}$$

где

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{3}{4}\sigma^{-1/2}\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\left[\sigma^{-1/2} - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{-2}, & 0<\theta<\frac{\pi}{3}, \\ \frac{3}{2}\sigma^{-1/2}\{\sin\theta[\sigma^{-1/2} - \sin\theta]\}^{-2}, & \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}, \\ \frac{3}{4}\sigma^{-1/2}\left\{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\left[\sigma^{-1/2} - \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{-2}, & \frac{2\pi}{3}<\theta<\pi. \end{cases} \tag{6.5}$$

Следует отметить, что рассматриваемая модель течения, основанная на методах гидродинамической теории смазки, становится все менее точной при приближении к лучам $\theta = 0$, $\theta = \pi/3$, $\theta = 2\pi/3$ и $\theta = \pi$, а на этих лучах непригодна при любой сколь угодно малой величине зазора между цилиндрами. Из физического смысла задачи ясно, однако, что луч $\theta = \pi$ всегда является траекторией натекания, поэтому можно считать функцию $f(\theta)$ (6.5) соответствующим образом доопределенной и локально сглаженной при $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$. Очевидно, что для решения диффузионной задачи в приближении диффузионного пограничного слоя вид такого доопределения и сглаживания несуществен, важно лишь, что точка $\theta = \pi$, $r = 1$ является точкой натекания.

При больших числах Пекле $\mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1}$ и условии полного поглощения на поверхности цилиндра соответствующая диффузионная задача аналогична рассмотренной ранее в § 6 гл. 3, и к ней может быть применен общий метод, описанный в конце § 1.

В переменных

$$\zeta = \Psi_2^{1/2}, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_\theta^\pi f^{1/2}(x)\,dx, \tag{6.6}$$

где $\Psi_2 = \mathrm{Pe}^{2/3}(r-1)^2 f(\theta)$, эта задача сводится к задаче (1.8) при $n = 2$, и ее автомодельное решение выражается через неполную гамма-функцию в виде (1.9). Для среднего числа Шервуда, используя формулу (1.24), с учетом соотношений (6.5), (6.6) получим

$$\mathrm{Sh} = \frac{3^{5/3}(1+2^{1/2})^{2/3}}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\sigma^{1/6}\left\{\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{\sin\theta\,(1-\sigma^{1/2}\sin\theta)}\right\}^{2/3}\mathrm{Pe}^{1/3},$$

или, после вычисления интеграла,

$$\mathrm{Sh} = 0{,}667\sigma^{1/6}\left\{\ln 3 + 2\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^{1/2}\operatorname{arcctg}\frac{3^{1/2}-2\sigma^{1/2}}{(1-\sigma)^{1/2}}\right\}^{2/3}\mathrm{Pe}^{1/3}. \tag{6.7}$$

Зависимость величины $\mathrm{Sh}\,\mathrm{Pe}^{-1/3}$ от коэффициента заполнения пространства цилиндрическими волокнами φ (при шахматном расположении цилиндров $\varphi = (\pi\sqrt{3}/6)\,\sigma = 0{,}907\sigma$), согласно соотношению (6.7), показана на рис. 4.8 сплошной линией. Для сравнения дана

соответствующая зависимость (6.2) для разреженной системы, полученная в рамках ячеечной модели (штриховая линия), а также величина $\mathrm{Sh}\,\mathrm{Pe}^{-1/3}$ для модели одиночного цилиндра при разных числах Рейнольдса, определяемая соотношением (6.12) гл. 3 в главном приближении по большому числу Пекле (штрих-пунктирные прямые).

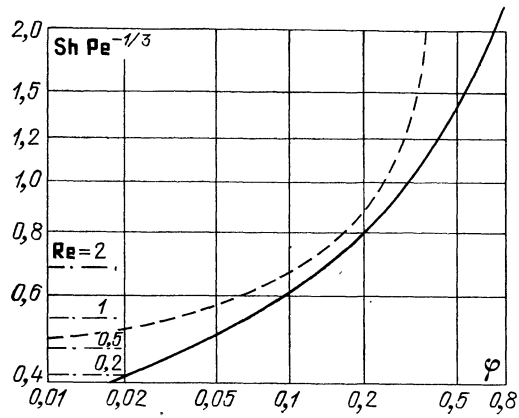


Рис. 4.8. Зависимость среднего числа Шервуда от коэффициента заполнения пространства цилиндрическими волокнами при шахматном расположении цилиндров (сплошная линия), штриховая линия — зависимость (6.2).

Видно, что, несмотря на принципиальное различие моделей течения, на которых основаны зависимости (6.2) и (6.7), они дают практически совпадающие результаты в промежуточной области изменения концентрации волокон (при $\varphi = 0{,}1 \div 0{,}2$); при удалении от этой области результаты расчета по разным моделям все сильнее отличаются один от другого.

Интересно отметить, что, в отличие от модели изолированного цилиндра, в обеих моделях, учитывающих взаимодействие цилиндров, число Шервуда в соответствии с экспериментальными данными не зависит от числа Рейнольдса (достаточно малого). Модель, основанная на методах гидродинамической теории смазки, дает возможность оценить влияние взаимодействия цилиндров на пределы применимости результатов по числу Рейнольдса. Действительно, длины входных участков в зазорах (вблизи лучей $\theta = k\pi/3$, $k = 0, 1, \ldots, 5$), имеющие порядок $(b - a)\,\mathrm{Re}_g$, где $\mathrm{Re}_g = (b - a)\,U_\infty \nu^{-1}$ — число Рей-

нольдса, рассчитанное по полуширине зазора, должны быть малыми по сравнению с длиной каналов a. Отсюда следует условие $\mathrm{Re}_g < O\,(a/(b-a))$, т. е. для числа Рейнольдса, определенного обычным образом по радиусу цилиндра, получим $\mathrm{Re} < O\,(\varphi/(1-\varphi))$. Таким образом, допустимый верхний предел чисел Рейнольдса растет с ростом концентрации (уменьшением пористости) системы, что также соответствует экспериментальным данным.

Для практических расчетов массопереноса в системе цилиндров можно использовать модель одиночного цилиндра (формула (6.12) гл. 3) при концентрациях $\varphi < 0{,}02$, ячеечную модель (формула (6.2)) при $0{,}01 < \varphi < 0{,}2$ и модель, основанную на гидродинамической теории смазки (формула (6.7)), при $\varphi > 0{,}1$.

§ 7. Массообмен цепочки твердых частиц с потоком

Как и в случае массообмена капли, большой интерес для практики представляет расчет массообмена частиц с потоком в условиях, когда в системе имеется много частиц и при исследовании движения и массообмена частиц с потоком каждая из них не может рассматриваться как одиночная, находящаяся в потоке с постоянной концентрацией и однородным распределением скорости на бесконечности. Как уже отмечалось, взаимное влияние частиц проявляется в появлении обусловленных присутствием других частиц возмущений распределений скорости и концентрации около каждой частицы. В системе многих частиц, где даже установившееся движение часто оказывается локально нестационарным, при решении задачи о движении и массотеплообмене целесообразным является переход к средним величинам; примеры такого перехода можно найти, например, в работах [68, 167]. При этом весьма важным является исследование упрощенных модельных задач, решения которых играют определяющую роль при проведении усреднения. К таким задачам наряду с рассмотренными выше задачами о массотеплообмене одиночных частиц различной формы при различных законах обтекания относятся также модельные задачи о массообмене простых систем частиц, состоящих из двух и более частиц. Получение решений задач о массотеплообмене совокупности частиц существенно опирается на знание обтекания таких конфигураций частиц и на возможность считать его стационарным хотя бы на отрезках времени, достаточных для установления процессов теп-

ломассообмена. При всей условности подобных постановок задач, решения которых могут быть непосредственно использованы лишь при описании массообмена в системах с упорядоченным расположением частиц, их анализ позволяет выявить некоторые важные закономерности процесса тепломассообмена в системе частиц, которые оказываются вне поля зрения при рассмотрении дисперсной системы как набора одиночных частиц, находящихся в однородном потоке со средними постоянными значениями скорости и концентрации.

В данном параграфе приводятся результаты решения некоторых модельных задач об установившемся массотеплообмене в системе двух и более осесимметричных реагирующих частиц, расположенных друг за другом на оси поступательного на бесконечности потока. Как и ранее, обтекание частиц предполагается известным (см., например, [107, 135, 140]) и таким, что в потоке отсутствуют области с замкнутыми линиями тока. Приводятся лишь окончательные результаты, в основном касающиеся формул для расчета интенсивности массообмена каждой частицы и совокупности частиц в целом, поскольку ход приводящих к этим результатам рассуждений и выкладок в значительной мере аналогичен изложенному в разделе гл. 2, посвященном массообмену цепочки капель. При изложении используются результаты работ [32, 75, 137].

Рассмотрим стационарную диффузию растворенного в потоке вещества к поверхностям нескольких осесимметричных частиц, расположенных одна за другой на оси ламинарного поступательного потока вязкой несжимаемой жидкости. Для каждой частицы введем сферическую систему координат r, θ, в которой уравнение поверхности частицы в безразмерной форме имеет вид $r = R(\theta)$.

Вблизи каждой частицы функция тока обладает следующими свойствами:

$$r \to R(\theta), \quad \psi(r, \theta) \to [r - R(\theta)]^2 f(\theta), \tag{7.1}$$

$$\theta \to 0, \quad \psi(r, \theta) \to g(r)\,\theta^2 = \hat{\psi}(r, \theta), \tag{7.2}$$

$$f(\theta) \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right]_{r=R(\theta)}, \qquad g(r) \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=0}.$$

Как уже отмечалось, свойство (7.1) следует из условия прилипания на поверхности частицы, а свойство (7.2) является следствием осесимметричности задачи.

Распределение концентрации в потоке жидкости определяется решением уравнения стационарной конвектив-

ной диффузии с граничными условиями постоянства концентрации вдали от частиц и полного поглощения на их поверхностях.

Так как число Пекле по-прежнему считается большим, то, следуя гл. 3 при асимптотическом анализе поля концентрации в окрестности каждой частицы (например, частицы с номером k), можно выделить семь областей с различными механизмами массопереноса: внешнюю область e, где концентрация равна своему значению на бесконечности, область передней критической точки b_k и область задней критической точки $W_k^{(3)}$, вклад которых в полный диффузионный поток на поверхность частицы несущественен; область диффузионного пограничного слоя d_k, конвективно-погранслойную область диффузионного следа $W_k^{(1)}$, в которой отсутствует диффузия и концентрация вдоль линий тока сохраняет постоянные значения, равные значениям на выходе из диффузионного пограничного слоя, внутреннюю область диффузионного следа $W_k^{(2)}$ и область смешения $W_k^{(4)}$, в которых конвективный перенос вещества потоком и поперечная диффузия играют основную роль в механизме массообмена. В области $W_k^{(4)}$ происходит постепенное увеличение концентрации до ее необедненного значения в однородном потоке.

При осесимметричном обтекании цепочки частиц линия тока, вышедшая из задней критической точки частицы, расположенной выше по потоку, попадает в переднюю критическую точку следующей частицы. Следовательно, при определении поля концентрации в окрестности k-й частицы необходимо учесть ослабляющее влияние на ее массообмен диффузионного следа $(k-1)$-й частицы W_{k-1}, в котором концентрация существенно меньше необедненной. Поэтому расчет диффузионного притока вещества к поверхности каждой из частиц в цепочке должен проводиться последовательно, начиная с первой частицы. Если при расчете полного диффузионного потока на цепочку частиц ограничиться нахождением главного члена в разложении по степеням $\mathrm{Pe}^{-1/3} = \varepsilon$, то достаточно получить распределение концентрации в диффузионном пограничном слое каждой частицы методом, аналогичным описанному в § 1.

При этом условие для концентрации в потоке, поступающем в диффузионный пограничный слой каждой частицы (условие натекания), зависит от ее положения и устанавливается из решения задачи о диффузии к частицам,

расположенным выше по потоку. В зависимости от расстояния между частицами при выводе этого условия следует произвести сращивание решений в областях передней критической точки b_k и диффузионного пограничного слоя d_k частицы с решениями в областях диффузионного следа $W_{k-1}^{(1)}$, $W_{k-1}^{(2)}$ или $W_{k-1}^{(4)}$ предыдущей частицы.

Схематически разбиение поля концентрации в потоке на области с различным асимптотическим поведением решений для двух частиц в цепочке показано на рис. 4.9.

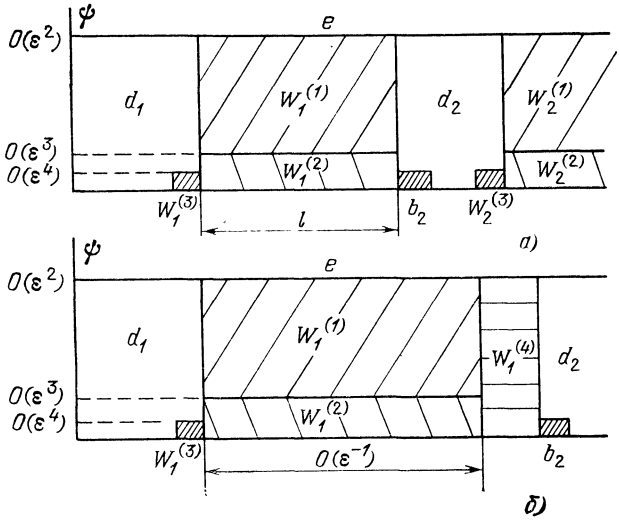


Рис. 4.9. Схема разбиения поля концентрации на области с различной структурой асимптотических решений в случае двух частиц при условии: *а*) $l < O\ (\mathrm{Pe}^{1/3})$, *б*) $l > O\ (\mathrm{Pe}^{1/3})$.

Рисунок 4.9, *а* соответствует случаю, когда безразмерное расстояние между частицами удовлетворяет условию $l < O\ (\varepsilon^{-1})$, а рис. 4.9, *б* — случаю $l > O\ (\varepsilon^{-1})$. Как и в случае капель, на рисунке использованы переменные ψ, y.

При анализе задачи о массообмене переход от капель к частицам приводит к изменению асимптотических границ зон с различными механизмами массопереноса и вида приближенных уравнений, описывающих массообмен в каждой из зон. Характер этих изменений устанавливается из сравнения результатов §§ 2, 3 гл. 1 и § 1 гл. 3, а также рис. 2.6 и 4.9.

Следует отметить, что в рассматриваемом приближении протяженность диффузионного следа за частицей, так же как и за каплей, существенно больше характерной длины гидродинамического взаимодействия соседних частиц между собой. Поэтому при расчете массообмена частиц цепочки с потоком обтекание частиц во многих случаях можно считать независимым и в качестве функции тока использовать функцию тока обтекания уединенной частицы (для сферической частицы в стоксовом потоке — формула (1.3) гл. 3).

Приведем несколько формул для расчета массообмена цепочки частиц с потоком, полученных аналогично соответствующим формулам для капель в § 4 гл. 2.

Если расстояние между частицами l_k удовлетворяет неравенству $l_k < O(\varepsilon^{-1})$, которое означает, что условие на входе в диффузионный пограничный слой каждой частицы d_k (условие натекания) задается распределением концентрации в конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W_{k-1}^{(1)}$ предыдущей частицы, то распределение концентрации в диффузионном пограничном слое k-й частицы определяется решением следующей задачи [75, 137]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} - \zeta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)c^{(d)} = 0; \quad c^{(d)}(0,\tilde{\tau}) = 0, \quad c^{(d)}(\infty,\tilde{\tau}) = 1,$$
$$c^{(d)}(\zeta,0) = 1; \tag{7.3}$$
$$\zeta = \varepsilon^{-1}\sqrt{\psi}, \quad \tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{k-1}\tau_i(0) + \tau_k(\theta_k),$$
$$\tau_k = \tau_k(\theta_k) = \frac{1}{2}\int_{\theta_k}^{\pi}\sin x\,(R_k^2 + R_{kx}'^2)\,f_k^{1/2}(x)\,dx.$$

Это решение имеет вид

$$c_k^{(d)}(\zeta,\tau_k) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}\gamma\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\zeta^3\left(\sum_{i=1}^{k-1}\tau_i(0) + \tau_k(\theta_k)\right)^{-1}\right]. \tag{7.4}$$

Локальный и интегральный диффузионные потоки на k-ю частицу даются выражениями

$$j_k(\theta_k) = \left(\frac{\partial c_k^{(d)}}{\partial n}\right)_{r_k = R_k(\theta_k)} = \varepsilon^{-1}f_k^{1/2}(\theta_k)\left(1 + \frac{R_{k\theta_k}'^2}{R_k^2}\right)^{1/2} \times$$
$$\times\, 3^{1/3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1}\tau_i(0) + \tau_k(\theta_k)\right]^{-1/3}, \tag{7.5}$$

$$I_k = \iint\limits_{S_k} j_k \, dS_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)},$$

$$I_\Sigma^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_k} j_k \, dS_i = \varepsilon^{-1} 2\pi 3^{4/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \tau_i(0) \right)^{2/3}.$$

Здесь $I_\Sigma^{(k)}$ — суммарный диффузионный поток на первые k частиц цепочки.

Когда расстояние l_k между частицами удовлетворяет неравенству $O(\varepsilon^{-1}) < l_k$, условие «натекания» на входе в диффузионный погранслой каждой частицы d_k определяется распределением концентрации в области смешения диффузионного следа предыдущей частицы $W_{k-1}^{(4)}$.

В этом случае для концентрации $c_k^{(d)}$ можно записать следующие рекуррентные формулы:

$$c_k^{(d)}(\zeta, \tau_k) = \int_0^\infty \tilde{\zeta} \frac{(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2}}{3\tau_k} \exp\left(-\frac{\zeta^3 + \tilde{\zeta}^3}{9\tau_k} \right) I_{1/3}\left(\frac{2(\zeta\tilde{\zeta})^{3/2}}{9\tau_k} \right) \times$$

$$\times \, c_{k-1}^{(4)}(\tilde{\zeta}, \rho_{k-1}) \, d\tilde{\zeta}, \quad c_0^{(4)} \equiv 1, \qquad (7.6)$$

$$c_k^{(4)}(\zeta, \rho_k) = \int_0^\infty \frac{\tilde{\zeta}}{2\rho_k} \exp\left(-\frac{\zeta^2 + \tilde{\zeta}^2}{4\rho_k} \right) I_0\left(\frac{\zeta\tilde{\zeta}}{2\rho_k} \right) c_k^{(d)}(\tilde{\zeta}, \tau_k(0)) \, d\tilde{\zeta}.$$

Здесь I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν, $\rho_k = \varepsilon l_k/2$.

Для иллюстрации результатов рассмотрим цепочку сфер с безразмерными радиусами R_k, расположенных на расстояниях $O(1) < l_k < O(\varepsilon^{-1})$ одна за другой на оси поступательного стоксова потока. В сферической системе координат, связанной с центром k-й сферы, безразмерная функция тока вблизи ее поверхности может быть представлена в виде

$$\psi_k = \frac{3}{4}(r_k - R_k)^2 \sin^2\theta_k + O((r_k - R_k)^3).$$

Используя формулы (7.3) — (7.5), можно получить следующие выражения для локальных и полных диффузионных потоков на поверхности сфер:

$$j_k = \varepsilon^{-1} 3^{2/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{-1} \sin\theta_k \left[\pi \sum_{i=1}^{k-1} R_i^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\pi - \theta_k + \frac{1}{2}\sin 2\theta_k \right) R_k^2 \right]^{-1/3}, \qquad (7.7)$$

$$I_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)},\ I_\Sigma^{(k)} = I_1 \Big[\sum_{i=1}^{k} R_i^2\Big]^{2/3}. \qquad (7.8)$$

Здесь I_1 — полный диффузионный поток на поверхность сферы единичного радиуса, обтекаемой поступательным стоксовым потоком.

Для цепочки сфер одинакового радиуса $R_k = 1$ найдем

$$j_k = \varepsilon^{-1} 3^{2/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \sin\theta_k \left(\pi k - \theta_k + \frac{1}{2}\sin 2\theta_k\right)^{-1/3}, \qquad (7.9)$$

$$I_k = I_1 [k^{2/3} - (k-1)^{2/3}],\quad I_\Sigma^{(k)} = I_1 k^{2/3}. \qquad (7.10)$$

Из формулы для локального диффузионного потока (7.9) видно, что взаимодействие диффузионного пограничного слоя каждой сферы с диффузионным следом предыдущей частицы приводит к существенному уменьшению интенсивности массообмена и изменению распределения потока по поверхности по сравнению с изолированной сферой. Максимальная величина локального потока на поверхность каждой сферы оказывается равной

$$j_{\max}^{(k)} = \max_{\theta_k} j_k(\theta_k) = -\varepsilon^{-1} 2^{-1/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} (\cos\theta_k^*)^{1/3} \qquad (7.11)$$

и достигается при значении полярного угла $\theta = \theta_k^*$, которое определяется следующим трансцендентным уравнением:

$$\Omega(\theta_k^*) = 0,$$
$$\Omega(\theta) = \pi k - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{2}{3}\sin^2\theta\,\mathrm{tg}\,\theta. \qquad (7.12)$$

Видно, что угол θ_k^*, задающий экстремальное значение локального диффузионного потока (7.11), монотонно уменьшается от величины $\theta_1^* = \pi$ (при $k = 1$), определяющей переднюю критическую точку натекания сферы, до величины $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k^{(*)} = \pi/2$, задающей экваториальное (миделево) сечение сферы; соответствующие углам θ_k^* максимумы локального диффузионного потока монотонно уменьшаются от своего предельного значения при $k = 1$ до нуля при $k \to \infty$. При этом имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$k \to \infty,\quad \theta_k^* \to \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3\pi} k^{-1},$$
$$j_{\max}^{(k)} \to \varepsilon^{-1}\pi^{-1/3} 3^{2/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} k^{-1/3}. \qquad (7.13)$$

Из формулы (7.9) видно, что при $k \geqslant 2$ локальный диффузионный поток в передней критической точке сфер $\theta_k = \pi$ становится равным нулю. Это говорит о том, что при $k \geqslant 2$ в лобовой части сферы происходит существенное снижение интенсивности массопереноса к ее поверхности ввиду уменьшения концентрации растворенного в жидкости вещества в области диффузионного следа предыдущей частицы за счет его поглощения на поверхностях впереди идущих частиц.

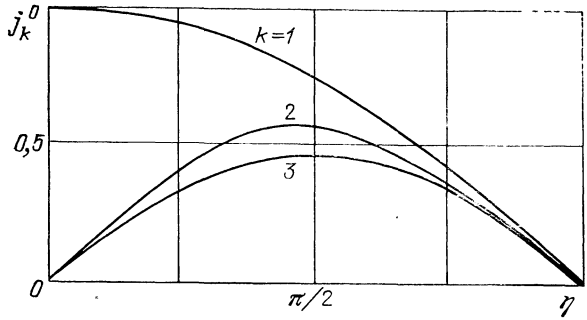


Рис. 4.10. Распределение локального диффузионного потока на поверхностях сфер; кривые *1*, *2*, *3* соответствуют первой, второй и третьей сферам цепочки.

В качестве иллюстрации этого эффекта на рис. 4.10 показано распределение нормированного локального диффузионного потока (7.9) $j_k^0 = j_k(\eta)/j_1(0)$ ($\eta = \pi - \theta$) на поверхности первых трех сфер цепочки.

Из формулы (7.10) видно, что суммарный диффузионный поток ко всем частицам цепочки пропорционален числу частиц в цепочке в степени $^2/_3$, что значительно меньше суммарного потока, вычисляемого без учета взаимодействия диффузионных следов и погранслоев частиц. С ростом порядкового номера сферы полный диффузионный поток на ее поверхность убывает по закону

$$k \to \infty, \quad I_k \to \frac{2}{3} k^{-2/3} I_1. \tag{7.14}$$

Расположенные впереди по потоку частицы как бы экранируют последующие, в результате чего интегральный поток на их поверхности монотонно убывает: $I_1 > I_2 > \ldots > I_k > I_{k+1} > \ldots$ и стремится к нулю с ростом порядкового номера.

Из формулы (7.10) следует, что полный диффузионный поток на вторую сферу почти в два раза меньше полного диффузионного потока на первую, а на седьмую — уже более чем в три раза меньше, чем на первую. В соответствии с (7.10) среднее число Шервуда для всей цепочки, состоящей из сферических частиц одинакового радиуса, равно

$$\mathrm{Sh}_k = \frac{1}{4\pi} I_1 k^{-1/3} = \mathrm{Sh}_1 k^{-1/3}. \qquad (7.15)$$

Среднее число Шервуда для цепочки частиц может быть как угодно малым при достаточно большом числе сфер, что обусловлено торможением процесса массообмена в упорядоченных системах частиц.

Отметим, что диффузия вещества в потоке к поверхностям периодически расположенных в пространстве на (безразмерных) расстояниях $l > O\,(\mathrm{Pe}^{1/3})$ друг от друга поглощающих сфер рассматривалась в работе [20]. Указанное ограничение на расстояние между сферами позволяет приближенно считать распределение концентрации в окрестности каждой сферы вне ее диффузионного пограничного слоя однородным, мало меняющимся на периоде решетки. Поэтому частицы могут быть представлены в виде точечных стоков растворенного в потоке вещества (такое представление соответствует второму члену разложения (первый равен единице) в выражении для распределения концентрации в области смешения диффузионного следа при $l \to \infty$).

Глава 5

МАССООБМЕН, ОСЛОЖНЕННЫЙ ПРОТЕКАЮЩЕЙ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТНОЙ ИЛИ ОБЪЕМНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИЕЙ

В предыдущих главах при анализе процесса переноса вещества к поверхности реагирующей частицы использовалось предположение о бесконечной скорости поверхностной реакции (адсорбции, растворения). Кроме того, не рассматривались химические реакции, протекающие в объеме. Наряду с этими случаями в приложениях важную роль играют массообменные процессы, в которых скорости изменения концентрации реагента при химическом превращении и диффузионного подвода реагента к поверхности частицы оказываются сравнимыми. Большое значение имеют также процессы с объемными химическими реакциями, протекающими с конечной скоростью.

В данной главе в приближении диффузионного пограничного слоя (большие числа Пекле) исследуется поле концентрации в окрестности движущейся частицы при протекании на ее поверхности химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от концентрации диффундирующего вещества. Получена зависимость полного диффузионного потока на поверхность частицы от скорости химической реакции и числа Пекле. Исследованы режимы протекания реакции на поверхностях сферической частицы, капли и кругового цилиндра в поступательном стоксовом потоке. Установлена приближенная формула, позволяющая с хорошей точностью определять число Шервуда при любой кинетике реакции во всем диапазоне значений константы скорости химической реакции и числа Пекле.

Рассмотрено влияние гомогенных реакций на интенсивность конвективного массообмена частиц с потоком. В приближении диффузионного пограничного слоя получено решение задачи о массообмене капли при протекании в окружающей жидкости объемной химической реакции первого порядка. Приведена приближенная формула для числа Шервуда при произвольной зависимости скорости объемной химической реакции от концентрации.

Анализируются качественные особенности конвективного массообмена между каплей и сплошной средой в случае, когда сопротивление переносу реагента полностью сосредоточено внутри капли, где протекает произвольная объемная химическая реакция (внутренняя задача конвективного массо- и теплообмена).

§ 1. Постановка задачи. Метод решения

Рассмотрим диффузию к частице в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Пусть на поверхности частицы протекает химическая реакция с конечной скоростью $F_{s*}(C)$, где функция F_{s*} определяется механизмом реакции. Например, для реакции порядка $\varkappa$

$$F_{s*}(C) = K_s C^{\varkappa}, \tag{1.1}$$

где K_s — константа скорости поверхностной химической реакции.

Как и в предыдущих главах, будем считать, что обтекание частицы известно из решения гидродинамической задачи и может быть описано заданной функцией тока ψ.

В приближении диффузионного пограничного слоя безразмерное уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия в криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, λ, связанной с поверхностью тела $\xi = \xi_s$ и линиями тока (см. § 1 гл. 4), имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial(\psi, z)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}, \tag{1.2}$$

$$\xi = \xi_s, \quad -\frac{\partial z}{\partial \xi} = F(z); \qquad \xi \to \infty, \quad z \to 0, \tag{1.3}$$

$$\psi = (\xi - \xi_s)^n f(\eta), \quad g^s = g^s(\eta) = (g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\lambda\lambda})_{\xi=\xi_s},$$

$$z = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU}{D}, \quad F(z) \equiv \frac{aF_{s*}(C)}{C_\infty D}. \tag{1.4}$$

Здесь, как и прежде, значение $n = 1$ соответствует жидкой, а $n = 2$ — твердой частице; U — характерная скорость потока, C — концентрация, C_∞ — концентрация на бесконечности, z — степень превращения реагента, использование которой при описании поля концентрации приводит к сокращению записи формул. При записи уравнения (1.2) и первого граничного условия (1.3) предполагалось, что координата ξ вблизи поверхности $\xi = \xi_s$ выбрана так, что величина $\xi - \xi_s$ определяет расстояние между точкой поверхности тела (ξ_s, η) и точкой в потоке

(ξ, η) (т. е. предполагается выполненным условие $(g_{\xi\xi})_{\xi=\xi_s} = 1$).

В случае реакции порядка $\varkappa$ (1.1) безразмерная скорость поверхностной химической реакции задается выражением

$$F(z) = k(1-z)^{\varkappa}, \quad k = K_s a C_\infty^{\varkappa-1} D^{-1}. \tag{1.5}$$

Отметим, что условие полного поглощения растворенного в жидкости вещества (реагента) на поверхности частицы с учетом вида функции F (1.5) соответствует предельному переходу при $k \to \infty$ в первом граничном условии (1.3).

Далее принимается, что рассматриваемая область течения задается неравенствами $\xi_s \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ и при этом выполняются свойства $f(\eta) > 0$ при $0 < \eta < \eta_0$ и $f(0) \geqslant 0$ (т. е. значение $\eta = 0$, соответствующее точке зарождения диффузионного пограничного слоя на поверхности частицы, не обязательно определяет критическую точку натекания).

Введя новые переменные

$$\tau = \tau(\eta) = \frac{1}{n}\int_0^{\eta} f^{1/n}(\eta)\,[g^s(\eta)]^{1/2}\,d\eta,$$
$$x = \frac{2}{n+1}\,\mathrm{Pe}^{1/2}\,\psi^{(n+1)/(2n)}, \tag{1.6}$$

приходим к следующей краевой задаче для определения неизвестной функции $z(x, \tau)$:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{1.7}$$

$$\tau = 0, \quad z = 0; \qquad x \to \infty, \ z \to 0; \tag{1.8}$$

$$x = 0, \quad x^{1-2\nu}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{Pe}^{-\nu}(2\nu)^{1-2\nu}\zeta_n(\tau)F(z) = 0, \tag{1.9}$$
$$\zeta_n(\tau) = f^{-1/n}(\eta(\tau)), \quad \nu = (n+1)^{-1}.$$

Функция $\zeta_n = \zeta_n(\tau)$, входящая в граничное условие на поверхности частицы (1.9), определяется путем разрешения параметрической зависимости переменных $\zeta_n = f^{-1/n}(\eta)$, $\tau = \tau(\eta)$ (1.6) относительно параметра η $(0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0)$.

Известно несколько различных методов решения задачи (1.7) — (1.9). В частности, метод интегральных преобразований Сэттона [185], который применялся в работе [62] для исследования химической реакции первого поряд-

ка на поверхности плоской пластины, обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Другой метод, основанный на применении преобразования Лапласа по переменной τ для уравнения (1.7), использовался при исследовании массотеплообмена пластины с потоком в работах [113, 125].

Далее для решения задачи (1.7) — (1.9) используем метод интегральных преобразований [185], который позволяет одновременно исследовать случай как жидкой ($n = 1$), так и твердой ($n = 2$) частиц.

Представим функцию $z(x, \tau)$ в виде

$$z(x, \tau) = \Lambda_\nu(x, \tau) * \Phi(\tau),$$

$$\Lambda_\nu(x, \tau) * w(\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{2^{2\nu-1}}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^\tau w(\lambda)(\tau - \lambda)^{\nu-1} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau-\lambda)}\right] d\lambda, \qquad (1.10)$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция.

В работе [185] показано, что функция z (1.10) является решением уравнения (1.7) и удовлетворяет граничным условиям (1.8) при любом ограниченном ядре $\Phi(\tau)$. При этом выполняются предельные соотношения

$$\lim_{x\to 0} z = \Lambda_\nu(0, \tau) * \Phi(\tau), \quad \lim_{x\to 0}\left(x^{1-2\nu}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\Phi(\tau). \qquad (1.11)$$

Подставляя выражение (1.10) в граничное условие на поверхности частицы (1.9) и учитывая свойства (1.11), приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению для ядра:

$$-\Phi(\tau) + \mathrm{Pe}^{-\nu}(2\nu)^{1-2\nu}\zeta_n(\tau) F(\Lambda_\nu(0, \tau) * \Phi(\tau)) = 0. \qquad (1.12)$$

Решив это уравнение, по формулам (1.6), (1.10) можно получить распределение концентрации в диффузионном пограничном слое частицы.

§ 2. Интегральные уравнения для поверхностной концентрации и локального диффузионного потока. Примеры точных решений

Вместо уравнения (1.12) для ядра интегрального оператора (1.10) Φ более удобно рассматривать непосредственно уравнения для поверхностной концентрации и локального диффузионного потока — величин, имеющих ясный физический смысл.

В силу (1.6) и (1.10) поверхностная концентрация определяется выражением

$$z_s = z_s(\tau) \equiv z(0, \tau) = \Lambda_\nu(0, \tau) * \Phi(\tau). \qquad (2.1)$$

Действуя оператором $\Lambda_\nu(0, \tau)$ на оба члена уравнения (1.12) и используя равенство (2.1), получаем уравнение для нахождения поверхностной концентрации:

$$z_s = \mathrm{Pe}^{-\nu}(2\nu)^{1-2\nu}\Lambda_\nu(0, \tau) * [\zeta_n(\tau) F(z_s)]. \qquad (2.2)$$

Действуя оператором $\Lambda_\nu^{-1}(0, \tau)$ на обе части этого уравнения, приходим к следующему эквивалентному интегральному уравнению:

$$j_\infty(\tau)\tau^\nu \Xi_\nu(\tau) * z_s = F(z_s), \quad \Xi_\nu \equiv \Gamma(\nu) 2^{2\nu-1}\Lambda^{-1}(0, \tau), \qquad (2.3)$$

$$\Xi_\nu(\tau) * w(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau}\int_0^\tau w(\lambda)(\tau - \lambda)^{-\nu} d\lambda =$$

$$= \frac{w(0)}{\tau^\nu} + \int_0^\tau \frac{dw}{d\lambda}(\tau - \lambda)^{-\nu} d\lambda.$$

Здесь $j_\infty = j_\infty(\tau)$ — локальный диффузионный поток, соответствующий чисто диффузионному режиму реакции (т. е. граничному условию на поверхности частицы $\xi = \xi_s$, $z = 1$):

$$j_\infty = \nu^{2\nu-1}[\Gamma(\nu)]^{-1}\mathrm{Pe}^\nu \zeta_n^{-1}(\tau)\tau^{-\nu} =$$

$$= \nu^{2\nu-1}[\Gamma(\nu)]^{-1}\mathrm{Pe}^\nu f^{1/n}(\eta)\tau^{-\nu}(\eta). \qquad (2.4)$$

Следует отметить, что формула (2.4) была выведена ранее в § 1 гл. 4.

Функция $j_\infty = j_\infty(\tau)$, входящая в уравнение (2.3), определяется путем подстановки в формулу (2.4) зависимости $\eta = \eta(\tau)$, которая находится обращением выражения (1.6) для переменной $\tau = \tau(\eta)$, т. е. $j_\infty(\tau) \equiv j_\infty(\eta(\tau))$.

Из уравнений (2.2) — (2.4) видно, что в случае реакции порядка $\varkappa$ характерным параметром задачи (1.2) — (1.5) является комплекс $k\,\mathrm{Pe}^{-\nu}$, значение которого полностью определяет степень превращения на поверхности $z_s = z_s(\eta, k\,\mathrm{Pe}^{-\nu})$, а следовательно, и поверхностную концентрацию.

В силу равенства

$$j = F(z_s) \qquad (2.5)$$

из уравнения (2.2) получаем связь между поверхностной

концентрацией и локальным диффузионным потоком:

$$z_s = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\tau \frac{j(\lambda)}{j_\infty(\lambda)} \lambda^{-\nu} (\tau - \lambda)^{\nu-1} d\lambda. \qquad (2.6)$$

При выводе этого соотношения использовалось тождество $\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu) = \pi/\sin(\pi\nu)$.

Подстановка равенства (2.6) в правую часть выражения (2.5) приводит к интегральному уравнению для локального диффузионного потока на поверхность частицы:

$$j = F\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\tau \frac{j(\lambda)}{j_\infty(\lambda)} \lambda^{-\nu} (\tau - \lambda)^{\nu-1} d\lambda\right). \qquad (2.7)$$

При $\mathrm{Pe} \to \infty$ имеем $j_\infty \to \infty$. Поэтому из уравнения (2.7) следует, что в главном приближении по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-\nu}$ локальный диффузионный поток и поверхностная концентрация постоянны на всей поверхности частицы (явление «насыщения»):

$$j(\tau) = F(z)\,|_{\xi\to\infty} = F(0), \qquad z_s = z\,|_{\xi\to\infty} = 0. \quad (2.8)$$

Эти равенства для реакции порядка $\varkappa$ означают, что при $k \ll \mathrm{Pe}^\nu$ режим протекания реакции на всей поверхности частицы (за исключением малой окрестности точки стекания) близок к кинетическому. Последнее объясняется тем, что при увеличении числа Пекле диффузионный поток может увеличиваться лишь до тех пор, пока лимитирующей стадией процесса массопереноса не становится поверхностная реакция.

Легко показать, что если предельный локальный диффузионный поток постоянен на части поверхности тела:

$$j_\infty(\tau) = j_\infty = \mathrm{const} \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0), \qquad (2.9)$$

то решение нелинейного интегрального уравнения (2.7) сводится к решению алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$j = F(j/j_\infty) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0). \qquad (2.10)$$

В силу (2.4), (2.10) поверхностная концентрация в случае (2.9) также определяется путем решения алгебраического уравнения

$$z_s = j_\infty^{-1} F(z_s). \qquad (2.11)$$

Из уравнений (2.10), (2.11) видно, что если предельный диффузионный поток j_∞ постоянен на части поверхности

тела (2.9), то в этой же области будут постоянными поверхностная концентрация и локальный поток при любой кинетике поверхностной химической реакции во всем диапазоне изменения константы скорости реакции k.

Приведем теперь два примера точного решения задачи конвективной диффузии при произвольных условиях поглощения (1.2) — (1.4).

1°. Рассмотрим двумерное растекание по плоскости $\xi = 0$ нормально натекающего из бесконечности потока идеальной жидкости; координата η отсчитывается от критической точки. Размерная функция тока в этом случае имеет вид

$$\psi = A\xi\eta, \quad g^s = 1 \quad (n = 1), \quad A = \text{const}, \qquad (2.12)$$

где оси ξ и η направлены соответственно вдоль и поперек набегающего потока.

Задача о диффузии к поверхности $\xi = 0$ (1.2) — (1.4), (2.12) имеет не зависящее от η точное решение (более того, оно является также точным решением полной задачи в непогранслойной постановке). Хотя эта задача и не имеет характерного линейного масштаба, тем не менее можно воспользоваться уравнением (2.10), где сначала формально следует положить

$$j_\infty = 2\,(\mathrm{Pe}/\pi)^{1/2}, \quad \mathrm{Pe} = a^2AD^{-1} \qquad (2.13)$$

(a — произвольная величина размерности длины), затем сделать замену по формуле $j = aj_*/(DC_\infty)$ и решать далее полученное модифицированное уравнение (которое уже не зависит от параметра a) относительно размерного диффузионного потока j_*.

2°. Рассмотрим конвективную диффузию к поверхности плоского диска, вращающегося с постоянной скоростью ω. В этом случае распределение концентрации (в пренебрежении концевыми эффектами) не зависит от радиальной и угловой координат и будет функцией только расстояния ξ от поверхности диска [60]. В безразмерных переменных соответствующая задача формально сводится к уравнению (1.2) с граничными условиями (1.3), (1.4), где

$$\psi = \alpha\eta\xi^2, \quad g^s = 1, \quad \alpha = 0{,}51, \quad a = \left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2}, \quad U = (\nu\Omega)^{1/2}, \qquad (2.14)$$

$$\mathrm{Pe} = aUD^{-1} = \nu D^{-1} = \mathrm{Sc} \quad (n = 2)$$

(ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости).

Предельный диффузионный поток (2.9), входящий в уравнение (2.10) и соответствующий задаче (1.2) — (1.4), (2.14), определяется формулой [60, 104]

$$j_\infty = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} (9\alpha \mathrm{Sc})^{1/3}. \qquad (2.15)$$

Поверхностная концентрация и локальный диффузионный поток в точке зарождения диффузионного пограничного слоя $\eta = 0$ на поверхности частицы определяются путем решения алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$z_s(0) = [j_\infty(0)]^{-1} F(z_s(0)), \qquad (2.16)$$

$$j(0) = F(j(0)/j_\infty(0)), \qquad (2.17)$$

которые являются следствием интегральных уравнений (2.2), (2.7) в пределе при $\tau = 0$.

Из уравнения (2.16) видно, что поток приходит необедненным в точку зарождения диффузионного пограничного слоя $\eta = 0$ только в том случае, если $j_\infty(0) = \infty$ (здесь считается, что $F(0) \neq 0$; в противном случае тривиальное решение $z = 0$ является точным решением исходной задачи (1.2) — (1.4)).

Из формулы для предельного локального диффузионного потока (2.4) видно, что равенство $j_\infty(0) = \infty$ будет выполняться, например, в тех случаях, когда справедливо неравенство $f(0) > 0$. Последнее имеет место в случаях, когда

1) значение $\eta = 0$ не соответствует передней критической точке поверхности тела (например, пластина или сфера с лакированным включением в окрестности передней критической точки натекания [60]); в этом случае выполняется неравенство $0 < f(0) < \infty$;

2) значение $\eta = 0$ соответствует геометрической сингулярности поверхности тела в точке натекания; при этом выполняется равенство $f(0) = \infty$ (например, в случае обтекания плоской пластинки поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Пекле (решение Блазиуса)). Главный член разложения функции тока вблизи поверхности пластинки в этом случае определяется формулой (1.4) при $n = 2$ и $f(\eta) = \mathrm{const}\ \eta^{-1/2}$ [60].

Следует особо подчеркнуть, что в тех случаях, когда предельный локальный диффузионный поток обращается

в бесконечность в точке зарождения диффузионного пограничного слоя, само приближение диффузионного пограничного слоя (1.2) — (1.4) в окрестности $\eta = 0$, как правило (см. далее § 3), оказывается некорректным, а соответствующее решение в этой же области не является равномерно пригодным по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-\nu}$. Это приводит к необходимости в области $0 \leqslant \eta \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-\nu})$ рассматривать содержащее член $\partial^2 z/\partial\eta^2$ полное уравнение конвективной диффузии, решение которого необходимо для корректной формулировки граничного условия «натекания» для погранслойной задачи (1.2) — (1.4).

Первая и третья главы книги были посвящены изучению массопереноса к движущейся в жидкости твердой сферической частице и капле для диффузионного режима поверхностной реакции (что соответствует предельному переходу при $k \to \infty$ в (1.3), (1.5)); при этом предельный локальный диффузионный поток в передней критической точке натекания принимал конечные значения.

Можно показать, что в общем случае частиц гладкой формы, когда значение $\eta = 0$ соответствует критической точке натекания на поверхности частицы ($f(0) = 0$), предельный локальный диффузионный поток (1.4) при $\eta = 0$ принимает конечные значения $0 < j_\infty(0) < \infty$. Некоторые характерные случаи такого рода, имеющие практическое значение, будут рассмотрены далее в §§ 4, 5.

Аналогично [166] (см. также гл. 1 и 3) можно показать, что приближение диффузионного пограничного слоя (1.2) — (1.4) оказывается равномерно пригодным (по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-\nu}$) в окрестности передней критической точки натекания $\eta = 0$ ($\tau = 0$, $f(0) = 0$) для частицы гладкой формы.

В общем случае при немонотонной функции $F = F(z)$ и $j_\infty(0) \neq \infty$ уравнение (2.16) может, вообще говоря, иметь несколько различных корней на интервале $[0, 1]$. Эти корни будут определять несколько режимов химической реакции на поверхности частицы. Далее для простоты считается, что $F'_z \leqslant 0$, т. е. уравнение (2.16) при любом k имеет единственный корень $z_s(0)$, $0 \leqslant z_s(0) \leqslant 1$.

Из уравнений (2.16), (2.17) следует, что диффузионный поток в окрестности передней критической точки в случае реакции порядка $\varkappa$ растет с увеличением безразмерной константы скорости реакции k и уменьшается при увеличении порядка реакции $\varkappa$ (предполагается, что $j_\infty(0) \neq \neq \infty$),

В частном случае реакции первого порядка ($\varkappa = 1$) имеем

$$z_s(0) = \frac{k}{k + j_\infty(0)}, \quad j(0) = \frac{k j_\infty(0)}{k + j_\infty(0)}.$$

Следовательно, $j(0) = F(z_s(0)) \neq F(z)|_{\xi \to \infty} = k$ и кинетический режим в окрестности передней критической точки в общем случае отсутствует. Отметим, что в случае конвективной диффузии к плоской пластине [60, 104, 113, 125] окрестность передней критической точки всегда является областью кинетического режима поверхностной реакции. Для твердой частицы гладкой формы кинетический режим в области передней критической точки существует только при $k \ll \mathrm{Pe}^{1/3}$.

Из уравнения (2.3) следует, что в области задней критической точки стекания η^+ локальный диффузионный поток для любой кинетики поверхностной химической реакции F равен нулю. Можно показать, что, как и в случае диффузионного режима реакции на поверхности частицы, в этой области само приближение диффузионного пограничного слоя теряет пригодность.

§ 3. Метод численного интегрирования уравнений для поверхностной концентрации и локального потока

В общем случае при $j_\infty = j_\infty(\tau) \neq \mathrm{const}$ нельзя получить точное аналитическое решение интегральных уравнений для поверхностной концентрации (2.2) — (2.4), (2.7). Поэтому приходится использовать методы численного или приближенного интегрирования этих уравнений.

На практике для приближенного определения поверхностной концентрации и локального диффузионного потока часто используют метод «локальной равнодоступной поверхности» [104]. Суть этого метода заключается в том, что сначала по формуле (2.4) определяется предельный локальный диффузионный поток $j_\infty = j_\infty(\tau)$, потом это выражение подставляется в уравнения (2.10), (2.11), т. е. вместо исходных интегральных уравнений (2.2) — (2.4), (2.7) решаются алгебраические (или трансцендентные) уравнения (2.4), (2.10), (2.11).

Из сопоставления с результатами § 2 видно, что приближенные алгебраические уравнения (1.5), (2.4), (2.10), (2.11) правильно описывают асимптотическое поведение исходных интегральных уравнений (2.2) — (2.4), (2.7) при

$k \to \infty$ (Pe = const) и Pe $\to \infty$ (k = const). Кроме того, «метод равнодоступной поверхности» дает точные значения для поверхностной концентрации и локального диффузионного потока в передней и задней критических точках (в точках натекания и стекания) поверхности тела. В последнем нетрудно убедиться, если сравнить формулы (2.16) — (2.19) с решениями уравнений (2.4), (2.10), (2.11) при $\eta = \eta^- = 0$ и $\eta = \eta^+$. Уравнения (2.4), (2.10), (2.11) являются точными также в случае, когда предельный локальный диффузионный поток (2.9) постоянен на всей поверхности частицы, т. е. когда поверхность частицы является однородной — «равнодоступной» в диффузионном отношении. Последнее свойство уравнений (2.4), (2.10), (2.11) послужило причиной названия этого метода «методом локальной равнодоступной поверхности».

Сопоставление результатов численного решения точных интегральных (2.2) — (2.4), (2.7) и приближенных алгебраических (2.4), (2.10), (2.11) уравнений для целого ряда характерных случаев показало удовлетворительную точность метода «локальной равнодоступной поверхности» [104, 113, 125] (для сравнительно простых реакций ошибка, как правило, не превышала 20%). Довольно хорошее совпадение приближенного и точного решений не следует переоценивать, так как приближенные уравнения (2.4), (2.10), (2.11) значительно отличаются от точных (2.2) — (2.4), (2.7). В работе [113] приведен пример сложной химической реакции на поверхности плоской пластины, обтекаемой однородным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, для которого ошибка метода «локальной равнодоступной поверхности» составляет более 100%.

Остановимся теперь на методе численного интегрирования уравнения для поверхностной концентрации (2.3), (2.4); локальный диффузионный поток при этом будет определяться из равенства (2.5).

Используем уравнение (2.3) в следующем виде:

$$j_\infty(\tau)\left\{z_s(0) + \tau^\nu \int_0^\tau \frac{dz_s(\lambda)}{d\lambda}(\tau - \lambda)^{-\nu}\, d\lambda\right\} = F(z_s). \qquad (3.1)$$

Уравнение (3.1) является естественным обобщением результатов работы [113] на случай $z_s(0) \neq 0$ и $n \neq 2$. Присутствие здесь дополнительного по сравнению с [113] члена $z_s(0)$ в левой части уравнения (3.1) обусловлено отличием в общем случае концентрации в точке натекания

от невозмущенной концентрации в потоке вдали от частицы: $z_s(\tau = 0) \neq z(\xi \to \infty) = 0$.

Из уравнения (3.1) можно определить степень превращения на поверхности $z_s = z_s(\tau)$. Численное решение проводится аналогично [113] в следующей последовательности. Вначале разобьем отрезок $[0, \tau_0]$, $\tau_0 = \tau(\eta_0)$, на M равных интервалов $[(i-1)\Delta\tau, i\Delta\tau)$ $(i = 1, \ldots, M)$ длиной $\Delta\tau = \tau_0 M^{-1}$ и приведем уравнение (3.1) к виду

$$z_s(0) + (m\Delta\tau)^{\nu} \sum_{i=1}^{m} \int_{(i-1)\Delta\tau}^{i\Delta\tau} \frac{dz_s}{d\lambda} (m\Delta\tau - \lambda)^{-\nu} d\lambda = \frac{F(z_s)}{j_\infty(m\Delta\tau)}. \tag{3.2}$$

Далее аппроксимируем производную $dz_s/d\lambda$ на каждом интервале $(i-1)\Delta\tau \leqslant \lambda \leqslant i\Delta\tau$ выражением

$$\frac{dz_s(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta\tau} \{z_s(i\Delta\tau) - z_s((i-1)\Delta\tau)\}$$

и интегрируем уравнение (3.2). После некоторых преобразований получаем

$$\frac{1-\nu}{m^{\nu}} z_s(0) - z_s(0)\{m^{1-\nu} - (m-1)^{1-\nu}\} + \sum_{i=1}^{m-1} z_s(i\Delta\tau) A_{m-i} =$$

$$= -z_s(m\Delta\tau) + \frac{1-\nu}{m^{\nu}} \frac{F(z_s(m\Delta\tau))}{j_\infty(m\Delta\tau)}, \qquad \nu = \frac{1}{n+1}, \tag{3.3}$$

$$A_m = -2m^{1-\nu} + (m+1)^{1-\nu} + (m-1)^{1-\nu}$$
$$(m = 1, \ldots, M-1).$$

Алгебраическое уравнение (3.3) решается для $m = 1, 2, 3, \ldots$ относительно степени превращения $z_s(m\Delta\tau)$ на поверхности частицы при $\tau = m\Delta\tau$. Левая часть уравнения (3.3) содержит значения $z_s(i\Delta\tau)$ для $1 \leqslant i \leqslant m-1$, которые предварительно уже вычислены, в то время как правая часть уравнения содержит неизвестную величину $z_s(m\Delta\tau)$. Численное решение уравнения (3.3) начинается с предварительного определения величины поверхностной концентрации $z_s(0)$ в точке зарождения диффузионного пограничного слоя ($\tau = 0$) путем решения вспомогательного уравнения (2.16); далее решение проводится последовательно при $m = 1, 2, 3, \ldots$, причем оно является прямым решением в том смысле, что не требует повторных расчетов. Точность расчетов, естественно, зависит от значения $\Delta\tau$.

В приведенном в работе [113] методе численного интегрирования соответствующего интегрального уравнения при $n = 2$ (см. формулу (11) в [113]) поверхностная концентрация в передней критической точке априорно предполагалась известной и равной невозмущенной концентрации вдали от частицы: $z_s(0) = 0$. Как уже отмечалось ранее в § 2, это предположение оправдывается лишь в одном частном случае, когда предельный локальный диффузионный поток в точке натекания обращается в бесконечность. В общем же случае значение $z_s(0)$ следует определять путем решения алгебраического уравнения (2.16), которое в принципе может иметь несколько корней.

В случае плоской пластины, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса, который приводился в качестве иллюстрации в [113], для произвольного вида функции F на передней кромке имеет место равенство $z_s(0) = 0$. Отсутствие влияния кинетики реакции на концентрацию в точке натекания в этом случае обусловлено двумя причинами: 1) непригодностью используемого в работе выражения для функции тока, полученного в приближении гидродинамического погранслоя в окрестности точки натекания; 2) неприменимостью приближения диффузионного погранслоя в окрестности передней критической точки пластины. Обе указанные причины имеют сходный характер и связаны с тем, что числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_x = xU_\infty \nu^{-1}$$

и Пекле

$$\mathrm{Pe}_x = xU_\infty D^{-1}$$

(x — координата, отсчитываемая вдоль по пластине) в окрестности передней критической точки пластины ($x = 0$) являются малыми.

Численное интегрирование уравнения для поверхностной концентрации (3.1) по схеме (3.3) будет использовано далее для определения локальных и интегральных диффузионных потоков на поверхность реагирующих капель и частиц для некоторых характерных случаев, когда в передней критической точке выполняется условие $z_s(0) \neq 0$ и приближение диффузионного пограничного слоя является корректным.

§ 4. Диффузия к капле при конечной скорости поверхностной химической реакции

Рассмотрим конвективную диффузию растворенного в жидкости вещества к сферической капле радиуса a, обтекаемой поступательным стоксовым потоком. Предполагается, что скорость жидкости U_∞ и концентрация растворенного в потоке вещества C_∞ постоянны вдали от капли. Функция тока, определяющая поле скоростей жидкости вне капли, в этом случае задается выражением (1.2) гл. 1.

При больших числах Пекле перенос реагента к капле при протекании на ее поверхности произвольной химической реакции определяется уравнением диффузионного пограничного слоя и граничными условиями, которые в безразмерных переменных (в сферической системе координат, неподвижно связанной с центром капли) имеют вид (1.2)—(1.4), где

$$\psi = \frac{1}{2}(r-1)\sin^2\theta, \quad f(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad g^s = \sin^2\theta, \quad n = 1, \tag{4.1}$$

$$\eta = \pi - \theta, \quad \xi = r - 1, \quad \mathrm{Pe}_m = (\beta+1)^{-1} a U_\infty D^{-1}$$

(угол θ, как и ранее, отсчитывается от направления потока на бесконечности). Здесь в качестве масштабов выбраны радиус капли a, характерная скорость жидкости вблизи поверхности капли $U = (\beta+1)^{-1}U_\infty$; β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости.

Новые переменные (1.6) в случае капли (4.1) имеют вид

$$\tau = \tau(\theta) = \frac{1}{6}(2-\cos\theta)(1+\cos\theta)^2, \quad x = \mathrm{Pe}_m^{1/2}\psi. \tag{4.2}$$

Функция $\zeta_1(\tau) \equiv f^{-1}(\theta)$, входящая после преобразования (4.2) в граничное условие на поверхности капли (1.9), в силу (4.1), (4.2) задается параметрически:

$$\zeta_1(\lambda) = \frac{2}{1-\lambda^2}, \quad \tau(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \lambda - \frac{\lambda^3}{3}\right); \quad -1 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{4.3}$$

и обладает свойствами

$$\tau \to 0, \quad \zeta_1 \to \sum_{m=0}^{\infty} a_m \tau^{(m-1)/2}; \quad \tau \to \tau_0, \quad \zeta_1 \to \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\tau_0 - \tau)^{(m-1)/2}, \tag{4.4}$$

$$a_0 = 2^{-1/2}, \quad a_1 = {}^1/_3, \ldots; \qquad = \tau(0) = 2/3.$$

Подставляя разложение (4.4) при $\tau \to 0$ в уравнения (2.2), (2.3), (2.8), можно получить выражение для локального диффузионного потока (или поверхностной концентрации) в виде ряда $b_0 + b_1\tau^{1/2} + b_2\tau + \ldots$, локально сходящегося в окрестности передней критической точки капли.

В случае реакции произвольного порядка решение интегрального уравнения для поверхностной концентрации (2.3) было получено в [46] методом численного интегрирования, описанным в § 3. При этом обе части разностного уравнения (3.3) предварительно умножались на величину $j_\infty(m\Delta\tau)$, которая обращается в нуль в задней критической точке (стекания) на поверхности капли $\theta = 0$. Поверхностная концентрация в передней критической точке капли $\theta = \pi$ ($\tau = 0$) определялась путем решения алгебраического уравнения (2.16), (1.5), где значение величины предельного локального диффузионного потока было получено из формулы (5.3) гл. 1 и равнялось $j_\infty(0) = (2\mathrm{Pe}_m/\pi)^{1/2}$. Среднее число Шервуда

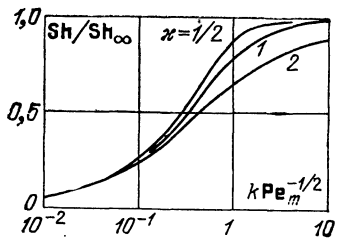


Рис. 5.1. Зависимость нормированного среднего числа Шервуда для сферической капли в поступательном стоксовом потоке от величины $k\,\mathrm{Pe}_m^{-1/2}$.

$$\mathrm{Sh} = \frac{1}{2}\int_0^\pi j(\theta)\sin\theta\, d\theta \qquad (4.5)$$

определялось путем пересчета локального диффузионного потока по формуле (2.5).

Зависимости нормированного среднего числа Шервуда от параметра $k\,\mathrm{Pe}_m^{-1/2}$ для реакций порядка $\varkappa = 1/2,\ 1,\ 2$ приведены на рис. 5.1, где $\mathrm{Sh}_\infty = (2\mathrm{Pe}_m/(3\pi))^{1/2}$ — число Шервуда при условии полного поглощения на поверхности капли ($k \to \infty$).

Как следует из результатов численных расчетов, приведенных на рис. 5.1, среднее число Шервуда для капли возрастает с увеличением константы скорости реакции k и уменьшается с ростом порядка реакции $\varkappa$; с увеличением числа Пекле среднее число Шервуда растет и при $\mathrm{Pe}_m \to \infty$ стремится к своему предельному значению, равному k (явление насыщения).

Следует отметить, что уравнение (1.7) с граничными условиями (1.8), (1.9) при $n = 1$ ($\nu = 1/2$), $F_{s*} = \text{const}$ ($C_\infty^4 - C^4$) описывает нелинейную тепловую задачу (C — температура) о лучистом теплообмене, следующем закону Стефана — Больцмана [102, 124].

§ 5. Диффузия к твердой сфере и круговому цилиндру. Интерполяционная формула для среднего числа Шервуда

Случай изотермической химической реакции первого порядка на поверхности плоской пластины, продольно обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Пекле и Рейнольдса, рассматривался в работах [62, 125]; аналогичное исследование для произвольной кинетики поверхностной реакции было проведено в [113] (см. также книги [6, 60] и обзор [98]).

Рассмотрим массообмен твердой сферической частицы, обтекаемой однородным поступательным стоксовым потоком со скоростью U_∞ и концентрацией C_∞ на бесконечности. Функция тока задается выражением (1.3) гл. 3.

В сферической системе координат, связанной с центром частицы, перенос реагента к частице при протекании на ее поверхности произвольной химической реакции определяется безразмерными уравнениями и граничными условиями (1.2) — (1.4), где

$$\psi = \frac{3}{4}(r-1)^2 \sin^2\theta, \quad f(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad g^s = \sin^2\theta,$$
$$n = 2, \quad \eta = \pi - \theta, \quad \xi = r - 1, \quad \mathrm{Pe} = aU_\infty D^{-1}. \quad (5.1)$$

Здесь в качестве масштабов длины и скорости выбраны радиус сферы a и скорость потока вдали от частицы $U = U_\infty$.

Новые переменные (1.6) в этом случае определяются формулами

$$\tau = \tau(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right], \quad x = \frac{2}{3}\mathrm{Pe}^{1/2}\psi^{3/4}. \quad (5.2)$$

Функция $\zeta_2(\tau) \equiv f^{-1/2}(\theta)$, входящая в граничное условие на поверхности сферы (1.9), в силу (5.1), (5.2)

задается в параметрическом виде

$$\zeta_2(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{3}\sin\lambda},\quad \tau(\lambda)=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\pi-\lambda+\frac{1}{2}\sin 2\lambda\right);$$
$$0\leqslant\lambda\leqslant\pi. \tag{5.3}$$

Функция $\zeta_2(\tau)$ (5.3) в окрестности передней критической точки сферы $\theta=\pi$ ($\tau=0$) может быть представлена в виде ряда

$$\tau=0,\quad \zeta_2\to\sum_{m=0}^{\infty}a_m\tau^{(2m-1)/3};\quad a_0=2^{1/3}3^{-2/3},\quad a_1=-\frac{1}{5}a_0^2,\ldots \tag{5.4}$$

Используя разложение (5.4) в уравнении (1.12), можно получить выражение для ядра Ф интегрального оператора (1.10) в виде локально сходящегося ряда в окрестности $\tau=0$ для случая поверхностной реакции первого [92] и произвольного [93] порядков.

Локальный диффузионный поток в передней критической точке сферы определяется путем решения алгебраического уравнения (1.5), (2.17), где величина предельного локального потока вычисляется по формуле $j_\infty(0)=3\,[\Gamma(1/3)]^{-1}\,(\mathrm{Pe}/2)^{1/3}$ (см. формулу (4.1) гл. 3). В [166] показано, что приближение диффузионного пограничного слоя (1.2) — (1.4), (5.1) равномерно пригодно по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-1/3}$ в передней критической точке $\theta=\pi$ сферы.

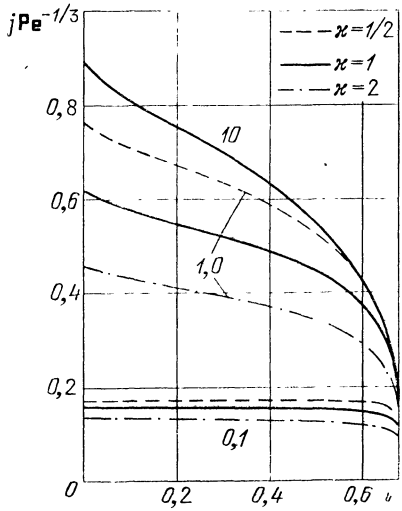


Рис. 5.2. Распределение локального диффузионного потока по поверхности сферической частицы, обтекаемой поступательным стоксовым потоком.

В случае реакции произвольного порядка (1.1) решение интегрального уравнения для локального диффузионного потока (2.8) при $n=2$ было получено в работах [92, 93, 166]. Среднее число Шервуда вычислялось по формуле

(2.5). Зависимость локального диффузионного потока j от τ для реакции порядка $\varkappa = 1/2,\ 1,\ 2$ представлена на рис. 5.2 штриховыми, сплошными и штрих-пунктирными линиями соответственно при указанных значениях $\overline{k} = 3^{-1/3}\,[\Gamma\,(2/3)]^{-1} k\,\mathrm{Pe}^{-1/3} = 0{,}1;\ 1{,}0;\ 10$.

Отметим, что локальный диффузионный поток в малой окрестности задней критической точки сферы $\theta = 0$ превышает локальный поток в условиях полного поглощения вещества поверхностью частицы. Последнее объясняется тем, что в окрестности задней критической точки всегда существует область диффузионного режима протекания реакции (т. е. $z \to 1$ при $\theta \to 0$, $r = 1$), а поток жидкости в этой области обеднен менее чем в случае полного поглощения.

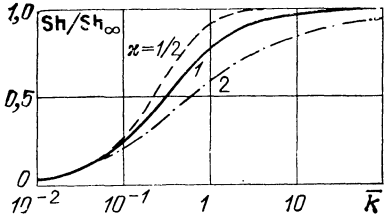


Рис. 5.3. Зависимость нормированного среднего числа Шервуда от параметра $\overline{k} = 3^{-1/3}\,[\Gamma\,(2/3)]^{-1} \times k\,\mathrm{Pe}^{-1/3}$ для твердой сферы.

Зависимость нормированного среднего числа Шервуда от параметра $\overline{k}$ для тех же значений порядка реакции $\varkappa$ приведена на рис. 5.3, где $\mathrm{Sh}_\infty = 0{,}625\,\mathrm{Pe}^{1/3}$ — среднее число Шервуда, соответствующее условию полного поглощения на поверхности сферы ($k \to \infty$).

Из результатов численных расчетов, приведенных на рис. 5.2 и 5.3, следуют качественные выводы, аналогичные сделанным в случае стоксова обтекания сферической капли (см. § 4).

В работе [45] рассмотрена плоская задача о диффузии к круговому цилиндру, обтекаемому в поперечном направлении потоком при малых числах Рейнольдса, в случае поверхностной химической реакции порядка $\varkappa$. В этом случае в уравнении диффузионного пограничного слоя и граничных условиях (1.2) — (1.4) фигурируют величины (см. § 6 гл. 3)

$$\psi = (r-1)^2 \sin\theta,\quad f(\theta) = \sin\theta,\quad g^s = 1,\quad n = 2,$$
$$\eta = \pi - \theta,\quad \xi = r - 1,\quad \mathrm{Pe}_m = aUD^{-1}, \tag{5.5}$$

где U — характерная скорость, определяемая формулой (6.3) гл. 3 (при записи (1.2) — (1.4), (5.5) используется полярная система координат, значение $\theta = \pi$ соответствует точке натекания).

Зависимости нормированного интегрального диффузионного потока $I/I_\infty = \mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_\infty$ на единицу длины цилиндра от комплекса $k\,\mathrm{Pe}_m^{-1/3}$, полученные численным интегрированием (1.2) — (1.5), (5.5) [45], приведены на рис. 5.4 для реакций половинного, первого и второго порядков. Здесь Sh_∞ — среднее число Шервуда при условии полного поглощения растворенного в жидкости вещества на поверхности цилиндра, определяемое формулой (6.11) гл. 3.

Интерполяционная формула для среднего числа Шервуда. В работах [47, 166] было предложено определять приближенное значение среднего числа Шервуда путем решения следующего алгебраического интерполяционного уравнения:

$$\mathrm{Sh} = F\left(\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_\infty}\right), \qquad \mathrm{Sh} = \frac{I}{S}, \qquad (5.6)$$

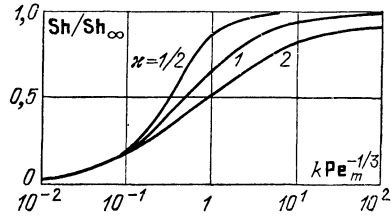


Рис. 5.4. Зависимость нормированного среднего числа Шервуда от величины $k\,\mathrm{Pe}_m^{-1/3}$ для обтекания кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса в случае степенного закона поверхностной химической реакции.

где $\mathrm{Sh}_\infty = I_\infty S^{-1}$ — среднее число Шервуда при условии полного поглощения вещества на поверхности частицы, I — безразмерный интегральный диффузионный поток, S — безразмерная площадь поверхности частицы.

В частном случае реакции первого порядка $\varkappa = 1$ (1.5) решение уравнения (5.6) совпадает с формулой, предложенной в [101, 104]:

$$\mathrm{Sh} = \frac{k\,\mathrm{Sh}_\infty}{k + \mathrm{Sh}_\infty}. \qquad (5.7)$$

Уравнение (5.6) полностью аналогично по структуре уравнению для локальных диффузионных потоков в случае равнодоступной поверхности (2.10) и уравнению для локальных потоков в передней критической точке частицы (2.17) и может быть получено путем формальной замены локальных потоков в (2.10), (2.17) соответствующими средними числами Шервуда.

Из указанных аналогий следует, что интерполяционное уравнение (5.6) для реакции произвольного порядка (1.5) правильно описывает асимптотическое поведение средне-

го числа Шервуда при больших значениях константы скорости реакции k (при $\mathrm{Pe} = \mathrm{const}$) и числа Пекле Pe ($k = \mathrm{const}$). Кроме того, уравнение (5.6) дает точный результат во всех случаях, когда поверхность S равнодоступна в диффузионном отношении (так как в этом случае локальный диффузионный поток совпадает со средним числом Шервуда).

При больших числах Пекле (в приближении диффузионного пограничного слоя) в случае изотермической реакции порядка $\varkappa = 1/2, 1, 2$ проверка пригодности интерполяционного уравнения (5.6) проводилась во всем диапазоне изменения параметра k путем сравнения его корня Sh с точными результатами, полученными в §§ 4, 5 для среднего числа Шервуда численным интегрированием соответствующих интегральных уравнений в случае поступательного стоксова обтекания сферы, кругового цилиндра, капли и пузыря. Результаты сопоставления точных и приближенных значений числа Шервуда показывают, что максимальное отклонение корня уравнения (5.6) от точного решения наблюдается при $k\,\mathrm{Pe}^{-\nu} = 1 \div 5$ и не превышает 10%.

Пригодность приближенного уравнения (5.6) при промежуточных значениях чисел Пекле и Рейнольдса в случае поступательного вязкого обтекания твердой сферы проверялась путем сравнения с известными результатами численного решения соответствующей задачи для поверхностной химической реакции первого порядка ($\varkappa = 1$) при $\mathrm{Pe} = 10, 20, 50$ (этим значениям числа Пекле соответствовали значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10, 20, 1/2$). Из таблицы 13, приведенной в книге [12], следует, что использование уравнения (5.6) приводит к очень хорошим результатам (ошибка не превосходит 1,5%).

Далее будет показано (см. гл. 6), что уравнение (5.6) является асимптотически точным при малых числах Пекле для любой кинетики химической реакции на поверхности частицы во всем диапазоне значений константы скорости реакции. В этом случае оно может быть непосредственно выведено методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Пекле из полного уравнения конвективной диффузии.

Уравнение (5.6) может быть успешно использовано также для приближенного определения среднего числа Шервуда для капли или частицы произвольной формы [47].

Отметим, что в работе [71] рассматривалась неизотермическая химическая реакция на поверхности плоской плас-

тины, обтекаемой потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса (течение Блазиуса) в случае, когда константа скорости поверхностной реакции зависит от температуры по закону Аррениуса. Решение интегрального уравнения для поверхностной концентрации строилось итерационным методом.

§ 6. Массоперенос в потоке с объемной химической реакцией

Рассмотрим установившийся массообмен между частицей (каплей) и потоком жидкости в случае, когда вещество, диффундирующее от поверхности частицы, испытывает в потоке химическое превращение. При ряде упрощающих предположений, в частности при предположении о диффузионном режиме растворения реагента на поверхности частицы, диффузия в потоке может быть описана следующими уравнениями и граничными условиями:

$$k_v F_v(c) + \mathrm{Pe}\,(v\cdot\nabla)\,c = \Delta c, \tag{6.1}$$

$$r = r_s(\theta, \varphi), \quad c = 1; \tag{6.2}$$

$$r \to \infty, \quad c \to 0, \tag{6.3}$$

$$c = \frac{C}{C_s}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU}{D}, \quad k_v = \frac{a^2 F_{v*}(C_s)}{DC_s}, \quad F_v(c) = \frac{F_{v*}(C)}{F_{v*}(C_s)},$$

где C_s — концентрация на поверхности частицы, F_{v*} — скорость объемной химической реакции. Для реакции порядка $\varkappa$ имеем $F_v = c^{\varkappa}$.

Задача (6.1) — (6.3) содержит два безразмерных параметра Pe, k_v, определяющих характер распределения концентрации в потоке. В предельном случае $\mathrm{Pe} \gg 1$, $k_v = \mathrm{const}$ интенсивность массообмена частицы с потоком в основном определяется диффузией от поверхности частицы, где концентрация сохраняет постоянное значение, число Шервуда в главном приближении не зависит от скорости объемной химической реакции и может быть найдено из решения задачи о распределении концентрации в диффузионном пограничном слое, рассмотренной в предыдущих главах.

В другом предельном случае $\mathrm{Pe} = \mathrm{const}$, $k_v \gg \mathrm{Pe}$ изменение концентрации реагента, поступающего в поток с поверхности частицы, в главном приближении не зависит от числа Pe и сосредоточено в тонком слое толщиной порядка $1/\sqrt{k_v}$.

Используем локальную, связанную с поверхностью частицы, ортогональную систему координат ξ, η, λ, в которой орт e_ξ направлен по нормали, а орты e_η и e_λ лежат в касательной плоскости к поверхности частицы $\xi = \xi_s$.

Введем в уравнении (6.1) переменную

$$x = k_v^{1/2} (\xi - \xi_s). \tag{6.4}$$

Выделяя старшие члены разложения по большому параметру $k_v \gg 1$ при $x = O(1)$, из (6.1) — (6.3) можно прийти к следующей задаче для распределения концентрации в тонком слое вблизи поверхности частицы:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = F_v(c), \quad x = 0, \quad c = 1; \qquad x \to \infty, \quad c \to 0. \tag{6.5}$$

Граничное условие на бесконечности для уравнения (6.5) следует из условия сращивания с решением в ядре потока.

Решение задачи (6.5) можно получить в неявном виде

$$x = x(c), \qquad x(c) = \int_{c_s}^{1} \left[2 \int_0^{c'} F_v(c'')\, dc'' \right]^{-1/2} dc'. \tag{6.6}$$

Среднее число Шервуда, соответствующее решению (6.6), определяется формулой

$$\mathrm{Sh} = \frac{I}{S} = \left(2k_v \int_0^1 F_v(c)\, dc \right)^{1/2}, \tag{6.7}$$

где I и S — безразмерные полный диффузионный поток на частицу и площадь ее поверхности.

В общем случае сравнимых значений величин Pe и k_v получить достаточно обоснованное аналитическое решение задачи (6.1) — (6.3) не удается. Однако для капли умеренной вязкости при больших числах Пекле в случае объемной химической реакции первого порядка приближенное асимптотическое решение задачи о массообмене капли с потоком может быть построено. Оно дает возможность рассчитать интенсивность притока вещества к поверхности капли и оценить сравнительную роль диффузии и объемной химической реакции в формировании поля концентрации в окрестности капли. Рассмотрим этот случай более подробно.

В приближении диффузионного пограничного слоя уравнение и граничные условия (6.1) — (6.3) могут быть

записаны в виде

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\sqrt{g^s}}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial c}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial c}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 c}{\partial\xi^2}-k_v c; \qquad (6.8)$$

$$\xi=\xi_s, \quad c=1; \quad \xi\to\infty, \quad c\to 0.$$

Здесь использована система координат ξ, η, описанная в гл. 4; функция тока в (6.8) равна

$$\psi=(\xi-\xi_s)\,f(\eta). \qquad (6.9)$$

Переход к новым переменным по формулам (1.6) при $n=1$ приводит задачу (6.8) к следующему виду:

$$\frac{\partial c}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-k_v\,\mathrm{Pe}^{-1}f^{-2}(\tau)\,c; \quad \tau=0, \quad c=0; \quad x=0, \quad c=1, \qquad (6.10)$$

$$\tau=\tau(\eta)=\int_0^\eta f\sqrt{g^s}\,d\eta, \quad x=\mathrm{Pe}^{1/2}\psi, \quad f(\tau)\equiv f(\eta(\tau)).$$

Решение задачи (6.10) может быть найдено в виде произведения

$$c(\tau, x)=G(\tau)\,u(\tau, x), \qquad (6.11)$$

где функция G удовлетворяет уравнению

$$G'_\tau+k_v\mathrm{Pe}^{-1}f^{-2}(\tau)\,G=0 \qquad (6.12)$$

и равна

$$G(\tau)=\exp\left\{-\frac{k_v}{\mathrm{Pe}}\int_0^\tau f^{-2}(\tau)\,d\tau\right\}\equiv\exp\left\{-\frac{k_v}{\mathrm{Pe}}\int_0^\eta\sqrt{g^s}f^{-1}(\eta)\,d\eta\right\}. \qquad (6.13)$$

Тогда краевая задача для функции u принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \tau=0, \quad u=0; \quad x=0, \quad u=G^{-1}(\tau). \qquad (6.14)$$

Решение линейной задачи (6.14) известно, поэтому для распределения концентрации в потоке получим

$$c(\tau, x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,G(\tau)\int_0^\tau\frac{x}{(\tau-\lambda)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4(\tau-\lambda)}\right\}G^{-1}(\lambda)\,d\lambda. \qquad (6.15)$$

Для вычисления локального диффузионного потока на поверхность капли внесем функцию $G(\tau)$ в (6.15) под знак интеграла и произведение $G(\tau)\,G^{-1}(\lambda)$ представим в виде

суммы двух слагаемых, одно из которых обращается в нуль при $\tau = \lambda$:

$$G(\tau)\,G^{-1}(\lambda) \equiv 1 + [G(\tau)\,G^{-1}(\lambda) - 1]. \qquad (6.16)$$

Воспользовавшись (6.16), представим интеграл в (6.15) в виде суммы двух интегралов. Первый из этих интегралов легко вычисляется и выражается через дополнительный интеграл вероятностей в виде $\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{\tau})$, а второй не имеет особенности при $\tau = \lambda$. Дифференцируя полученное таким образом выражение по ξ, можно получить следующую формулу для локального диффузионного потока на поверхность капли:

$$j = -\frac{\partial c}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\xi_s} = \frac{f(\tau)}{\sqrt{\pi\tau}}\,\mathrm{Pe}^{1/2} + J(k_v, \mathrm{Pe}, \tau), \qquad (6.17)$$

$$J(k_v, \mathrm{Pe}, \tau) = \frac{f(\tau)}{2\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Pe}^{1/2}\int_0^{\tau}(\tau-\lambda)^{-3/2}\times$$

$$\times\left[1 - \exp\left(-\frac{k_v}{\mathrm{Pe}}\int_{\lambda}^{\tau}\frac{d\lambda_1}{f^2(\lambda_1)}\right)\right]d\lambda.$$

Здесь первое слагаемое соответствует диффузионному потоку на каплю при отсутствии объемной химической реакции ($k_v = 0$), J — часть локального потока, обусловленная протеканием химической реакции в жидкости; функция $\tau = \tau(\eta)$ определена в (6.10), а $f(\tau) = f(\eta(\tau))$.

Формулы для полного диффузионного потока и среднего числа Шервуда могут быть получены интегрированием выражения (6.17) по поверхности капли.

Нестационарный аналог задачи (6.8) о диффузии к сферической капле, обтекаемой поступательным стоксовым потоком (полная функция тока для этого обтекания определяется формулой (2.1) гл. 1), рассматривался в работе [57]. Переменная $\tau = \tau(\theta)$ ($\eta = \pi - \theta$) и функции $f(\theta)$ и $g^{(s)}(\theta)$, соответствующие стационарному решению [57] и фигурирующие в формуле для диффузионного потока (6.10), (6.17), определяются выражениями (4.1), (4.2).

Результаты расчета нормированного среднего числа Шервуда $\mathrm{Sh}(k_v, \mathrm{Pe}_m)/\mathrm{Sh}(0, \mathrm{Pe}_m)$ в зависимости от безразмерного комплекса k_v/Pe_m (за масштаб скорости выбиралась величина $(\beta + 1)^{-1} U_\infty$) для химической реакции первого порядка в случае поступательного стоксова обтекания сферической капли приведены на рис. 5.5 (необходимые данные, соответствующие решению [57], пересчитаны

по результатам работы [22] и показаны на рисунке точками; $\mathrm{Sh}\,(0, \mathrm{Pe}_m)$ — среднее число Шервуда для капли при отсутствии объемной химической реакции при $k_v = 0$). При $k_v \mathrm{Pe}_m^{-1} \geqslant 1$ с точностью до 3,8% для среднего числа Шервуда можно пользоваться асимптотикой (6.7) (при $F_v = 1$) $\mathrm{Sh} \cong \sqrt{k_v}$.

В работе [51] для определения среднего числа Шервуда для капли или твердой частицы произвольной формы при больших числах Пекле в случае протекания в жидкости объемной химической реакции с произвольной скоростью $F_v = F_v(c)$ была предложена следующая простая формула:

$$\mathrm{Sh}\,(k_v, \mathrm{Pe}) = \left[\mathrm{Sh}^2\,(0, \mathrm{Pe}) + 2k_v \int_0^1 F_v(c)\,dc\right]^{1/2}. \qquad (6.18)$$

Исследуем поведение приближенного выражения для среднего числа Шервуда (6.18) в предельных случаях больших и малых значений числа Пекле и параметра k_v.

При $k_v = 0$ формула (6.18) дает точный результат. При $k_v \to \infty$ ($\mathrm{Pe} = \mathrm{const}$) первым членом в правой части (6.18) можно пренебречь, и оставшаяся часть формулы совпадает с соответствующим точным асимптотическим результатом (6.7). Нетрудно проверить, что формула (6.18) дает правильный асимптотический результат и при $\mathrm{Pe} \to \infty$, $k_v = \mathrm{const}$ (в этом случае $\mathrm{Sh}\,(0, \mathrm{Pe}) \to \infty$ и $\mathrm{Sh}\,(k_v, \mathrm{Pe}) \to \mathrm{Sh}\,(0, \mathrm{Pe})$).

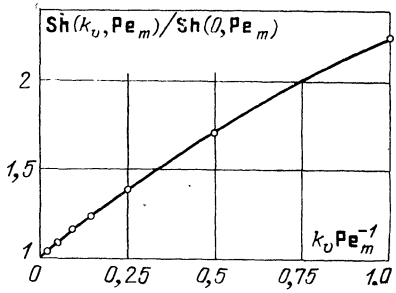


Рис. 5.5. Зависимость нормированного среднего числа Шервуда для сферической капли от величины $k_v \mathrm{Pe}_m^{-1}$ в случае объемной химической реакции первого порядка.

В частном случае реакции порядка $\varkappa$ формула (6.18) принимает вид

$$\mathrm{Sh}\,(k_v, \mathrm{Pe}) = \left[\mathrm{Sh}^2\,(0, \mathrm{Pe}) + \frac{2k_v}{\varkappa + 1}\right]^{1/2}. \qquad (6.19)$$

Сопоставление приближенного выражения (6.19) с результатами, полученными в [22, 57] при больших числах Пекле (в приближении диффузионного пограничного слоя) в случае объемной химической реакции первого порядка

($\varkappa = 1$) для поступательного стоксова обтекания сферической капли приведено в таблице. Все данные соответствуют значению $\mathrm{Pe} = 2 \cdot 10^4$, $\mathrm{Sh}(0, \mathrm{Pe}) = 65{,}15$. Видно, что максимальная погрешность формулы (6.19) в этом случае составляет около 7%.

$k_v \cdot 10^{-4}$	5	2	1	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05
По [22]	226	147	111,5	90	81	75,5	70,5	68
По формуле (6.19)	232,9	155,7	119,3	96,1	85,1	79,0	72,4	68,9
Погрешность, %	3,0	5,9	7,0	6,8	5,1	4,6	2,7	1,3

Из сопоставления с результатами численного анализа, проведенного в работе [149], где рассматривался конвективный массоперенос к сферической капле, осложненный объемной химической реакцией порядка $\varkappa = 1/2$, следует, что погрешность приближенной формулы (6.19) в этом случае составляет около 5%.

В работе [147] дано численное решение приведенной во Введении стационарной системы двух уравнений (1.1) при $F_{vm*} = K_{vm} C_1 C_2$ ($m = 1, 2$). Эта система описывает процесс, при котором растворенный в капле экстрагент, диффундируя в сплошную фазу, вступает там в химическую реакцию второго порядка с хемосорбентом.

Распределение концентрации в диффузионном следе сферической капли, обтекаемой поступательным стоксовым потоком, при протекании в жидкости объемной химической реакции первого порядка рассматривалось в работе [52].

§ 7. Качественные особенности внутренних задач конвективного массопереноса, осложненного объемной химической реакцией

В предыдущем параграфе исследовались внешние задачи конвективного массопереноса, когда объемная химическая реакция протекает в окружающем каплю или твердую частицу потоке жидкости.

Рассмотрим теперь внутреннюю задачу стационарного конвективного массообмена между каплей и сплошной средой, когда основное сопротивление переносу сосредоточено внутри капли, где протекает объемная химическая

реакция с конечной скоростью. В безразмерных переменных процесс переноса реагента внутри капли описывается уравнением (6.1) с граничным условием на поверхности (6.2). Будем считать, что распределение скоростей жидкости v внутри капли известно из решения соответствующей гидродинамической задачи. В частном случае однородного поступательного стоксова обтекания, когда распределение скоростей жидкости внутри сферической капли соответствует решению Адамара — Рыбчинского, для функции тока имеем

$$\psi = \frac{1}{4} r^2 (1 - r^2) \sin^2 \theta, \quad v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$
$$v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \left(0 \leqslant \psi \leqslant \frac{1}{16}\right). \tag{7.1}$$

При записи безразмерных выражений (7.1) за характерный масштаб скорости была принята величина $(\beta + 1)^{-1} U_\infty$, где U_∞ — невозмущенная скорость внешнего потока на бесконечности, β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости.

Выведем одну формулу для среднего числа Шервуда, которая понадобится далее. Для этого проинтегрируем уравнение (6.1) по объему капли $V = \{r \leqslant r_s\}$ с последующим переходом по формуле Остроградского — Гаусса к поверхностному интегралу (по $r = r_s$) с учетом того, что в силу несжимаемости жидкости ($\operatorname{div} v = 0$) конвективный член может быть записан в дивергентном виде $(v \cdot \nabla) c = \operatorname{div}(vc)$. Кроме того, используем условие непротекания жидкости через поверхность капли $(v \cdot n)_{r=r_s} = 0$. В результате получим

$$\mathrm{Sh} = \frac{k_v}{S} \int_V F_v(c)\, dV, \tag{7.2}$$

где S — площадь поверхности капли.

Из этой формулы с учетом неравенства $F_v(c) \leqslant F_v(1)$ при $0 \leqslant c \leqslant 1$ получаем следующую грубую оценку для среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} \leqslant \frac{k_v}{S} F_v(1)\, V, \tag{7.3}$$

где V — объем капли.

В случае реакции нулевого порядка знак равенства в формуле (7.3) при $F_v(1) = 1$ соответствует точному результату. Важно отметить, что оценка (7.3) не зависит от числа Пекле.

В предельном случае $k_v \to 0$ ($\mathrm{Pe} = \mathrm{const}$) концентрация внутри капли становится равной концентрации на ее поверхности, т. е. $\lim\limits_{k_v \to 0} c = 1$. Соответствующая асимптотика для среднего числа Шервуда получается подстановкой значения $c = 1$ в формулу (7.2), что для сферической капли ($S = 4\pi$, $V = 4\pi/3$) дает

$$k_v \to 0, \quad \mathrm{Sh} = \frac{1}{3} k_v F_v(1) + o(k_v). \tag{7.4}$$

В предельном случае больших значений константы скорости объемной химической реакции $k_v \to \infty$ ($\mathrm{Pe} = \mathrm{const}$) можно показать, что среднее число Шервуда определяется той же асимптотикой, что и для внешней задачи (6.7).

Точные решения задачи (6.1), (6.2) для неподвижной жидкости внутри сферической оболочки (при $\mathrm{Pe}=0$) можно получить лишь для реакции первого ($\varkappa = 1$) и пятого ($\varkappa = 5$) порядков. В частности, при $\varkappa = 1$ имеем

$$c = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{k_v} r)}{\mathrm{sh}(\sqrt{k_v})}, \quad \mathrm{Sh} = -1 + \sqrt{k_v} \operatorname{cth} \sqrt{k_v}. \tag{7.5}$$

Исследуем теперь случай больших чисел Пекле и умеренных значений константы скорости объемной химической реакции $k_v = O(1)$. Для анализа, помимо сферической системы координат r, θ, φ, введем еще ортогональную систему координат ψ, χ, φ, связанную с линиями тока (линии $\chi = \mathrm{const}$ ортогональны линиям тока $\psi = \mathrm{const}$). В такой системе координат уравнение (6.1) принимает вид

$$k_v F_v(c) + \frac{\mathrm{Pe}}{\sqrt{g}} \frac{\partial c}{\partial \chi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\chi\chi}} \frac{\partial c}{\partial \chi} \right) \right\}, \tag{7.6}$$

$$v = (0, v_\chi, 0), \quad v_\chi = \left(\frac{g_{\chi\chi}}{g} \right)^{1/2}, \quad g = g_{\psi\psi} g_{\chi\chi} g_{\varphi\varphi}.$$

Уравнение (6.1) в форме (7.6) справедливо для любого двумерного течения (т. е. для любой функции тока ψ при соответствующем выборе координаты χ: $(\nabla\psi \cdot \nabla\chi) = 0$, в том числе и для плоского случая, где $g_{\varphi\varphi} = 1$). Для поля течения Адамара — Рыбчинского (7.1) криволинейная координата χ и метрические коэффициенты $g_{\psi\psi}$, $g_{\chi\chi}$, $g_{\varphi\varphi}$

определяются выражениями [151]

$$g_{\psi\psi} = \frac{4}{r^2 \sin^2\theta \Xi}, \quad g_{\chi\chi} = \frac{(2r^2-1)^4}{16 r^6 \cos^6\theta \Xi}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$$

$$\chi = \frac{r^4 \cos^4\theta}{2r^2 - 1}, \tag{7.7}$$

$$\Xi = \Xi(r, \theta) = (1 - r^2)^2 \cos^2\theta + (2r^2 - 1)^2 \sin^2\theta.$$

Отметим, что в работе [151] вместо ψ использовалась нормированная функция тока $\bar{\psi} = 16\psi$, а остальные координаты были введены так же.

Стандартный асимптотический анализ уравнения (6.1) (или (7.7)) показывает, что внутри капли можно выделить

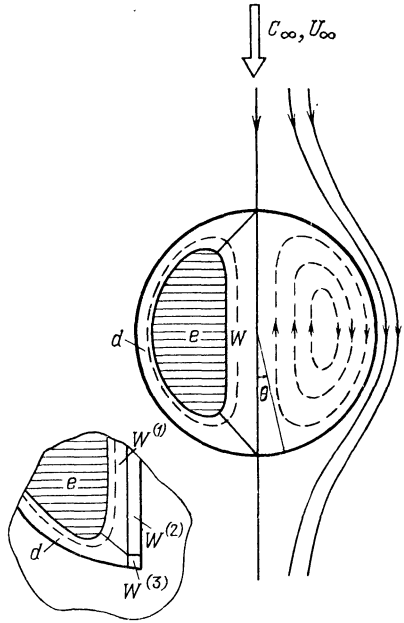


Рис. 5.6. Структура поля концентрации внутри капли.

ядро потока e: $\{O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant \psi\}$, область диффузионного пограничного слоя d: $\{1 - r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2}), O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant \theta, O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant \pi - \theta\}$ и область диффузионного следа W: $\{O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant 1 - r, \psi \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2})\}$ (рис. 5.6).

Решение в ядре потока ищем в виде регулярного асимптотического разложения по обратным степеням числа

Пекле:

$$c = c_0^{(e)} + \mathrm{Pe}^{-1} c_1^{(e)} + \ldots, \quad \frac{c_1^{(e)}}{c_0^{(e)}} = O(1). \tag{7.8}$$

Подставляя (7.8) в уравнение (7.6) и выделяя члены при одинаковых степенях числа Пекле, для главных членов разложения в ядре потока получаем

$$\frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \chi} = 0,$$

$$\frac{\partial c_1^{(e)}}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\chi\chi}} \frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \chi}\right) - k_v \sqrt{g} F_v (c_0^{(e)}). \tag{7.9}$$

Из первого уравнения (7.9) следует, что

$$c_0^{(e)} = c_0^{(e)}(\psi). \tag{7.10}$$

Выписывая соответствующие уравнения и используя условия асимптотического сращивания решений на смежных границах с учетом граничного условия на поверхности капли (6.2) и структуры решения (7.10), можно показать, что главные члены разложения для распределения концентрации в областях диффузионного пограничного слоя и следа имеют вид $c_0^{(d)} = c_0^{(W)} = 1$. В силу этого условия сращивания решений в областях e, d и W в явном виде задают граничное условие для уравнения в ядре потока:

$$\psi = 0, \quad c_0^{(e)} = 1. \tag{7.11}$$

Первого уравнения (7.9), общее решение которого имеет вид (7.10), оказывается недостаточно для определения поля концентрации в ядре потока. Для получения необходимой дополнительной информации о нулевом члене разложения $c_0^{(e)}$ (помимо (7.10)) воспользуемся уравнением (7.9) для следующего члена разложения $c_1^{(e)}$. При этом учтем, что область изменения координаты χ внутри капли определяется неравенствами $-\infty < \chi < +\infty$. Кроме того, ввиду непрерывности решения задачи (6.1), (6.2) вдоль фиксированной линии тока $\psi = \mathrm{const}$ должно выполняться равенство

$$c(\psi, \chi = -\infty) = c(\psi, \chi = +\infty), \tag{7.12}$$

которое означает, что разные точки $(\psi, -\infty)$ и $(\psi, +\infty)$ в новой системе координат ψ, χ соответствуют одной и той

же точке $(1/\sqrt{2}, \theta)$ в старой сферической системе координат r, θ.

Интегрирование второго уравнения (7.9) по χ от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом равенства (7.12) (следствием которого являются аналогичные соотношения для всех членов разложения в ядре потока) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для $c_0^{(e)}$:

$$\frac{d}{d\psi}\left[\Gamma(\psi)\frac{dc_0^{(e)}}{d\psi}\right] - k_v J(\psi) F_v(c_0^{(e)}) = 0, \qquad (7.13)$$

$$\Gamma(\psi) = \oint \frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}}\, d\chi, \quad J(\psi) = \oint \sqrt{g}\, d\chi,$$

где интегрирование по замкнутой линии тока сводится к интегрированию по χ от $-\infty$ до $+\infty$.

В случае течения внутри капли (7.1) явные выражения для коэффициентов $\Gamma(\psi)$ и $J(\psi)$ приведены в работе [151] (см. также [12]); здесь они ввиду их громоздкости опускаются. В этом случае коэффициенты имеют следующие особенности:

$$\psi \to 0, \quad J(\psi) = O(\ln \psi); \quad \psi \to \frac{1}{16}, \quad \Gamma(\psi) = O\left(\frac{1}{16} - \psi\right),$$

и локальный анализ уравнения (7.13) показывает, что первая производная $c_0^{(e)}$ в нуле конечна, а вторая бесконечна и имеет логарифмическую особенность; вторая особенность в точке вырождения $\psi = 1/16$ определяет два линейно независимых решения, одно из которых неограничено при $\psi \to 1/16$. Последнее означает, что помимо граничного условия (7.11) для уравнения (7.13) следует добавить условие ограниченности решения при $\psi = 1/16$.

Следует отметить, что решение задачи (7.11), (7.13) равномерно пригодно (по большому числу Пекле) во всей области течения внутри капли вплоть до ее границы (в том числе и во всех областях диффузионного следа), и при $\mathrm{Pe} \to \infty$, $k_v = O(1)$ диффузионный пограничный слой во внутренней задаче конвективного массо- и теплообмена фактически отсутствует. В силу этого замечания в уравнении (7.13) вместо $c_0^{(e)}$ можно писать просто c_0. Из граничного условия (7.11) следует также, что при больших числах Пекле граничное условие с поверхности капли (6.2) как бы «сносится» внутрь капли на ось потока.

В линейном случае объемной химической реакции первого порядка ($\varkappa = 1$) для поля течения Адамара — Рыб-

чинского внутри капли (7.1) решение уравнения (7.13) приводит к следующему выражению для среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = \frac{1}{3} k_v \left(1 - \frac{3}{2} k_v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{k_v + \lambda_n}\right). \qquad (7.14)$$

Значения первых пяти членов ряда, пересчитанные по данным численного решения соответствующей нестационарной задачи (см. замечание в конце § 1 гл. 7) [12], таковы: $\alpha_1 = 0{,}4554$; $\alpha_2 = 0{,}0654$; $\alpha_3 = 0{,}0542$; $\alpha_4 = 0{,}0412$; $\alpha_5 = 0{,}0038$; $\lambda_1 = 26{,}844$; $\lambda_2 = 137{,}91$; $\lambda_3 = 315{,}66$; $\lambda_4 = 724{,}98$; $\lambda_5 = 1205{,}2$. При $n = 1, 2$ значения этих коэффициентов, близкие к выписанным, были приведены в [151].

Из приведенного анализа следует, что при $\mathrm{Pe} \to \infty$, $k_v = O(1)$ концентрация постоянна на линиях тока и, что наиболее важно, среднее число Шервуда для капли для любой монотонно возрастающей функции $F_v(c)$ равномерно (по числу Пекле) ограничено сверху: $\mathrm{Sh} \leqslant \mathrm{const} \cdot k_v$ (7.3). Последнее означает, что одним увеличением интенсивности циркуляции (т. е. увеличением скорости жидкости, что соответствует $\mathrm{Pe} \to \infty$) при $k_v = O(1)$ не может быть сформирован диффузионный пограничный слой внутри капли. Указанное свойство среднего числа Шервуда типично для всех внутренних задач, что коренным образом отличается от поведения величины Sh для соответствующей внешней задачи о массообмене капли, где при $\mathrm{Pe} \to \infty$, $k_v = O(1)$ вблизи поверхности капли, как правило, возникает тонкий пограничный слой и справедлива формула $\mathrm{Sh} = O(\mathrm{Pe}^{1/2})$ [57] (см. также § 6).

На рис. 5.7 приведена зависимость среднего числа Шервуда Sh от безразмерной константы скорости объемной химической реакции k_v для линейной ($F_v(c) = c$) задачи о массопереносе внутри капли для поля течения Адамара — Рыбчинского (7.1) в случае предельных значений числа Пекле $\mathrm{Pe} = 0$ (формула (7.5)) и $\mathrm{Pe} = \infty$ (формула (7.14)). Штриховая линия соответствует грубой оценке сверху для среднего числа Шервуда (7.3), которая определяется главным членом асимптотики (7.4) при $F_v(1) = 1$. При промежуточных числах Пекле $0 < \mathrm{Pe} < \infty$ среднее число Шервуда попадает в заштрихованную область, ограниченную предельными кривыми при $\mathrm{Pe} = 0$ и $\mathrm{Pe} = \infty$. Видно, что изменение параметра Pe (при $k_v = O(1)$)

слабо влияет на средний приток реагента к поверхности капли, т. е. никаким увеличением числа Пекле нельзя добиться существенного увеличения числа Шервуда. В частности, при $k_v = 10$ максимальное относительное приращение среднего числа Шервуда за счет увеличения числа Пекле от нуля до бесконечности составляет всего около 25%. Последнее означает, что главным механизмом, влияющим на поведение основных характеристик интенсивности массопереноса внутри капли, является химическая реакция, в то время как интенсивность циркуляции (скорость течения) и геометрия потока слабо влияют на поведение этих характеристик.

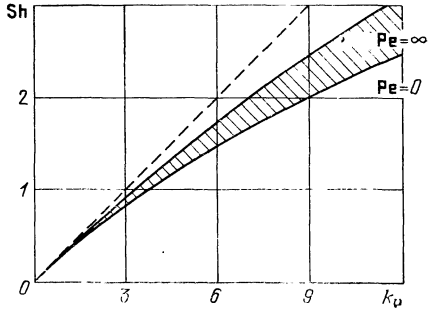


Рис. 5.7. Зависимость среднего числа Шервуда от безразмерной константы скорости объемной химической реакции первого порядка (сплошные линии) для внутренней задачи при $k_v = O(1)$; штриховая линия соответствует $\varkappa = 0$.

В случае реакции нулевого порядка ($\varkappa = 0$) среднее число Шервуда определяется равенством в (7.3), что соответствует подстановке значения $F_v = 1$ в выражение (7.2). Для химической реакции произвольного порядка из асимптотической формулы (6.7) ($k_v \to \infty$, $\mathrm{Pe} = O(1)$) следует, что среднее число Шервуда монотонно уменьшается с ростом порядка реакции $\varkappa$; аналогичным свойством обладает и решение задачи (7.11), (7.13). Это означает, что при $0 < \varkappa < 1$ кривые, соответствующие предельному числу Шервуда при $\mathrm{Pe} = \infty$, расположены между штриховой линией (соответствующей реакции нулевого порядка) и верхней сплошной кривой (реакция первого порядка, формула (7.14)). При уменьшении порядка реакции $\varkappa$ сплошные кривые, соответствующие среднему числу Шервуда при $\mathrm{Pe} = 0$ и $\mathrm{Pe} = \infty$, постепенно сближаются и поднимаются вверх к штриховой линии. В предельном случае $\varkappa = 0$ все три кривые сливаются в одну, т. е. для реакции нулевого порядка среднее число Шервуда вообще не зависит от числа Пекле.

При больших значениях константы скорости объемной химической реакции k_v вблизи поверхности капли возникает тонкий пограничный слой, толщина которого при

малых и умеренных числах Пекле $\mathrm{Pe} \leqslant O(1)$ имеет порядок $k_v^{-1/2}$ и внутри которого растворенное в жидкости вещество успевает полностью прореагировать. При дальнейшем увеличении числа Пекле за счет интенсивной циркуляции жидкости внутри капли вещество уже не успевает полностью прореагировать в пограничном слое и начинает, выходя из погранслоя, проникать в глубь капли, переносясь вдоль линий тока, расположенных вблизи оси потока. При достаточно развитой циркуляции внутри капли возникает полностью сформировавшийся диффузионный след с существенно неоднородным распределением концентрации, который «пронизывает» всю каплю и через области передней и задней критических точек соединяет оба конца пограничного слоя (рис. 5.6). Последнее физически означает, что, несмотря на сильную химическую реакцию, растворенное в жидкости вещество при достаточно больших скоростях течения не успевает полностью прореагировать при его переносе вдоль линий тока вблизи оси потока. Следует отметить, что и в этом случае, ввиду равномерной по числу Пекле оценки (7.3), интенсивность массопереноса внутри капли в основном определяется скоростью химической реакции и слабо зависит от скорости движения жидкости.

В важном случае объемной химической реакции первого порядка анализ конвективного массопереноса внутри капли (течение Адамара — Рыбчинского) для больших значений числа Пекле и константы скорости химической реакции ($\mathrm{Pe} \gg 1$, $k_v \gg 1$) был проведен методом сращиваемых асимптотических разложений (по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-1/2}$) в работе [22]. При этом внутри капли выделялись области с различными механизмами массопереноса, показанные на рис. 5.6. Уравнение диффузионного пограничного слоя внутри капли d совпадает с соответствующим уравнением (6.8) для внешней задачи, однако «начальное» условие при $\tau = 0$ здесь уже не задается концентрацией в ядре потока ($c\,|_{\tau=0} \neq 0$), а должно определяться в ходе решения задачи путем сращивания решений в области d и конвективно-погранслойной области следа $W^{(1)}$ при $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi$. (Области задней и передней критических точек b и $W^{(3)}$, а также внутренняя область диффузионного следа $W^{(2)}$, прилегающие непосредственно к оси потока, не вносят вклада в главный член асимптотического разложения концентрации в области диффузионного погранслоя d.) Используя общее решение уравнения пограничного слоя (6.8) с произвольным «начальным» условием,

а также общее решение уравнения для концентрации в области $W^{(1)}$, в работе [22] было получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода для «начальной» концентрации (поступающей на вход в диффузионный погранслой d), которое далее уже решалось численным методом.

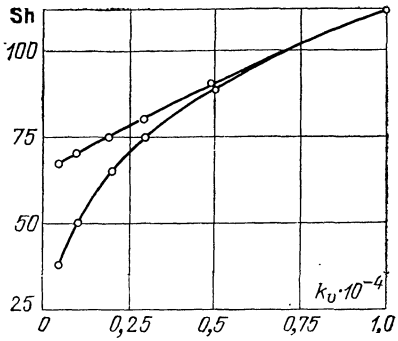


Рис. 5.8. Зависимость среднего числа Шервуда от величины k_v для внутренней (нижняя кривая) и внешней (верхняя кривая) задач, полученная для больших значений k_v [22].

Результаты расчета среднего числа Шервуда Sh для $\mathrm{Pe} = 2 \cdot 10^4$ представлены на рис. 5.8 точками. Для сравнения здесь приведены также численные значения среднего числа Шервуда, соответствующего решению внешней задачи (верхняя кривая). Видно, что при $k_v < 10^4$ средние числа Шервуда для внутренней и внешней задач о диффузии к поверхности капли заметно различаются.

Глава 6

МАССОТЕПЛООБМЕН РЕАГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

В данной главе излагаются результаты теоретического анализа массотеплообмена между средой и частицей, обтекание которой характеризуется малыми числами Пекле. Как и выше, при описании поля скоростей используются известные решения задач об обтекании частиц при малых числах Рейнольдса. Оценка реальных значений чисел Рейнольдса и Пекле показывает, что в этом случае основной областью применимости полученных результатов является массотеплообмен частицы с движущимся газом.

В первых двух параграфах рассматривается изотермический массообмен поступательного и сдвигового потоков со сферической частицей, на поверхности которой протекает химическая реакция первого порядка. В третьем параграфе рассмотрен пример решения задачи о неизотермическом массо- и теплообмене сферы. Далее в § 4 полученные в первых трех параграфах результаты обобщаются на случай нескольких неизотермических реакций с нелинейной зависимостью скорости химической реакции от температуры и концентраций. Устанавливаются простые соотношения для приближенного расчета интегральных потоков реагентов и тепла на поверхность частицы. В § 5 получены некоторые общие соотношения, позволяющие по известной силе сопротивления движущейся несферической частицы оценить интенсивность ее массообмена с потоком. В § 6 даны интерполяционные формулы для числа Шервуда при промежуточных значениях числа Пекле.

§ 1. Массоперенос к сферической частице в поступательном потоке. Поверхностная химическая реакция первого порядка

Постановка задачи. Метод решения. Рассмотрим установившийся процесс диффузии в потоке вязкой несжимаемой жидкости, обтекающем твердую сферическую частицу

радиуса a, на поверхности которой протекает гетерогенная химическая реакция первого порядка с константой скорости реакции K_s. На большом расстоянии от сферы скорость потока равна U_∞, концентрация диффундирующего компонента — C_∞.

В безразмерных переменных уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\Delta z = -\frac{\mathrm{Pe}}{r^2}\frac{\partial(\psi, z)}{\partial(r, \mu)}, \quad z = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU_\infty}{D}, \quad \mu = \cos\theta. \tag{1.1}$$

Здесь r — безразмерная (отнесенная к радиусу частицы) радиальная координата, θ — угловая координата (которая отсчитывается от направления набегающего потока), Δ — оператор Лапласа, D — коэффициент диффузии, ψ — безразмерная (отнесенная к a^2U_∞) функция тока, C — концентрация диффундирующего вещества. Граничные условия имеют вид:

на бесконечности

$$r \to \infty, \quad z \to 0; \tag{1.2}$$

на поверхности сферы

$$r = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = k(z - 1) \quad \left(k = \frac{aK_s}{D}\right). \tag{1.3}$$

При $k \to \infty$ условие (1.3) принимает вид $z(1) = 1$ и соответствует диффузионному режиму поглощения вещества, а также теплообмену потока со сферой, температура которой T_s поддерживается постоянной (в последнем случае под D следует понимать коэффициент температуропроводности, а под z — отношение $(T_\infty - T_*)/(T_\infty - T_s)$, где T_* — температура потока, T_∞ — температура на бесконечности).

Если функция тока $\psi = \psi(r, \mu)$ известна, то уравнение (1.1) с условиями (1.2), (1.3) полностью определяет распределение концентрации в потоке. Точное решение задачи (1.1) — (1.3) невозможно, даже если в качестве распределения скоростей вязкого обтекания сферы принять простейшее из известных приближенных решений — решение Стокса.

Найдем приближенное аналитическое решение задачи (1.1) — (1.3) методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Pe во внутренней $\Omega^{(i)} = \{1 \leqslant r \leqslant \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1})\}$ и внешней $\Omega^{(e)} = \{O(\mathrm{Pe}^{-1}) \leqslant r\}$ областях течения. Будем предполагать, что обтекание частицы удов-

летворяет условию $\mathrm{Re} < O(1)$ и что $\mathrm{Re} \sim \mathrm{Pe}$. При этом разбиение пространства около частицы на внешнюю и внутреннюю области для гидродинамической и диффузионной задач будет одинаковым. Для поля скоростей во внутренней и внешней областях используем решения, полученные методом сращиваемых асимптотических разложений в работе [95].

Во внутренней области сохраним прежние переменные r, θ, а во внешней введем вместо r сжатую радиальную координату $\rho = \mathrm{Pe}\, r$.

Будем искать внутреннее и внешнее разложения распределения концентрации соответственно в виде

$$z^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(i)}(r, \mu) \text{ в } \Omega^{(i)}, \tag{1.4}$$

$$z^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(e)}(\rho, \mu) \text{ в } \Omega^{(e)}. \tag{1.5}$$

Относительно функций $\varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})$ и $\varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})$, определяющих порядок величин последовательных членов разложений (1.4), (1.5), предполагается лишь, что

$$\frac{\varepsilon_{n+1}^{(i)}}{\varepsilon_n^{(i)}} \to 0, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}^{(e)}}{\varepsilon_n^{(e)}} \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Pe} \to 0.$$

Члены разложения (1.4) определяются путем решения уравнения (1.1) с граничным условием (1.3). Для поля скоростей в (1.1) воспользуемся трехчленным внутренним разложением функции тока [95]:

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{4}(r-1)^2(1-\mu^2)\left[\left(1 + \frac{3}{8\,\mathrm{Sc}}\mathrm{Pe} + \frac{9}{40\,\mathrm{Sc}^2}\mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(2 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{8\,\mathrm{Sc}}\mathrm{Pe}\left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\mu\right] + O(\mathrm{Pe}^2), \quad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}. \tag{1.6}$$

Здесь Sc — число Шмидта, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Внешнее разложение (1.5) определяется из уравнения (1.1), в котором функция тока ψ задается двучленным внешним разложением, и условия (1.2). Используя сжатую радиальную координату $\rho = \mathrm{Pe}\, r$ и нормированную функцию тока $\psi^{(e)} = \mathrm{Pe}^2 \psi$, запишем (1.1), (1.2) в виде

$$\Delta_\rho z^{(e)} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\psi^{(e)}, z^{(e)})}{\partial(\rho, \mu)}; \quad \rho \to \infty, \quad z^{(e)} \to 0, \tag{1.7}$$

$$\psi^{(e)}=\frac{1}{2}\rho^2(1-\mu^2)-\frac{3}{2}\,\mathrm{Sc}\,\mathrm{Pe}\,(1+\mu)\times$$
$$\times\left[1-\exp\left(-\frac{\rho}{\mathrm{Sc}}\,\frac{1-\mu}{2}\right)\right]+O(\mathrm{Pe}^2). \qquad (1.7)$$

Здесь Δ_ρ — осесимметричный сферический оператор Лапласа, получающийся из Δ заменой r на ρ.

Возникающие при решении задач (1.1), (1.3), (1.6) и (1.7) произвольные константы определяются в результате сращивания внутреннего (1.4) и внешнего (1.5) разложений, которое в данном случае сводится к выполнению условия

$$z^{(i)}\ (r\to\infty)\cong z^{(e)}\ (\rho\to 0). \qquad (1.8)$$

Заметим, что здесь и далее при сравнении окончательных выражений для асимптотик при сращивании следует перейти к одинаковой переменной, внешней или внутренней.

Нулевое приближение. Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (1.5). В данном случае, очевидно, задаче (1.7) удовлетворяет решение

$$z_0^{(e)}=0. \qquad (1.9)$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (1.4). Из (1.1), (1.3), (1.6) при $\mathrm{Pe}=0$ находим

$$\Delta z_0^{(i)}=0;\quad r=1,\quad \frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial r}=k\,(z_0^{(i)}-1). \qquad (1.10)$$

Общее решение задачи (1.10) можно представить в виде

$$z_0^{(i)}=\frac{k}{k+1}\,\frac{1}{r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(r^n+\frac{n-k}{n+1+k}\,r^{-n-1}\right)\mathrm{P}_n(\mu), \qquad (1.11)$$

где $\mathrm{P}_n(\mu)$ — полиномы Лежандра.

Выражение (1.11) содержит произвольные константы a_n, которые должны быть определены сращиванием (1.11) с (1.9) по правилу (1.8). Для сращивания внешнее решение разложим в ряд по ρ. Затем значения констант установим из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\rho\to 0$ и членов разложения (1.11) при $r\to\infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально; получим $a_n=0$ $(n=0, 1, \ldots)$. Следовательно,

$$z_0^{(i)}=\frac{q}{r},\quad q=\frac{k}{k+1}. \qquad (1.12)$$

Первое приближение. Определим сначала, воспользовавшись процедурой сращивания, явный вид коэффициента $\varepsilon_1^{(e)}(\mathrm{Pe})$ во внешнем разложении. Для этого в решении (1.12) перейдем к внешней переменной. Тогда из (1.12) следует, что $\varepsilon_1^{(e)} = \mathrm{Pe}$, поэтому первое приближение для внешнего разложения следует искать в виде

$$\tilde{z}_1^{(e)} = \mathrm{Pe}\, z_1^{(e)}. \tag{1.13}$$

Здесь и далее для сумм первых N членов разложений (1.4) и (1.5), представляющих последовательные приближения к решению задачи, используются обозначения в виде черты сверху, т. е.

$$\tilde{z}_N^{(i)} = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(i)}(r, \mu), \quad \tilde{z}_N^{(e)} = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(e)}(\rho, \mu).$$

Подставляя (1.13) в (1.7) и удерживая слагаемые порядка Pe, получим

$$\Lambda z_1^{(e)} = 0; \quad \rho \to \infty, \quad z_1^{(e)} \to 0, \tag{1.14}$$

$$\Lambda \equiv \Delta_\rho - \mu \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mu}.$$

Общее решение задачи (1.14) имеет вид

$$z_1^{(e)} = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) \mathrm{P}_n(\mu), \tag{1.15}$$

$$\mathrm{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!\, m!\, \rho^m}.$$

Здесь $\mathrm{K}_{n+1/2}(x)$ — функция Макдональда. Константы A_n должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (1.13) при $\rho \to 0$ и функции (1.12) при $r \to \infty$. Нетрудно установить, что $A_0 = q\pi^{-1}$, $A_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно,

$$z_1^{(e)} = \frac{q}{\rho} \exp\left[\frac{1}{2}\rho(\mu - 1)\right]. \tag{1.16}$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Для этого перейдем в выражении для функции $\tilde{z}_1^e$ к внутренней переменной r и представим $\tilde{z}_1^{(e)}$ в виде ряда по Pe. Тогда из (1.13) и (1.16) найдем, что $\varepsilon_1^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$. Следовательно, первое приближение для внутрен-

него разложения следует искать в виде

$$\bar{z}_1 = z_0^{(i)} + \mathrm{Pe}\, z_1^{(i)}. \qquad (1.17)$$

Подставив (1.17) в (1.1) и (1.3) с учетом (1.6) и сохранив члены порядка Pe, получим уравнение и граничное условие для $z_1^{(i)}$:

$$\Delta z_1^{(i)} = -\frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu, \qquad (1.18)$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial r} = k z_1^{(i)}. \qquad (1.19)$$

Решение уравнения (1.18) может быть представлено в виде

$$z_1^{(i)} = q\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} - \frac{1}{8r^2}\right)\mu + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1})\, \mathrm{P}_n(\mu). \qquad (1.20)$$

Граничное условие (1.19) позволяет установить линейные соотношения между постоянными a_n и b_n:

$$(1-k)\, a_1 + \frac{3}{8} q\,(k+3) = (2+k)\, b_1, \qquad (1.21)$$

$$(n-k)\, a_n = (n+1+k)\, b_n \quad (n = 0, 2, 3, \ldots).$$

Для определения явного выражения коэффициентов в (1.20) произведем сращивание выражений (1.17) при $r \to \infty$ и (1.13) при $\rho \to 0$. Используя (1.16), (1.20) и (1.21), получим

$$a_0 = -\frac{1}{2} q, \quad b_0 = \frac{1}{2} q^2, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{3}{8}(k+3)(k+2)^{-1} q,$$

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$z_1^{(i)} = -\frac{q}{2} + \frac{q^2}{2r} + q\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3}{8}\frac{k+3}{k+2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8r^3}\right)\mu. \qquad (1.22)$$

Второе приближение для внешнего разложения. Двучленное внутреннее разложение $\bar{z}_1^{(i)}$ во внешних переменных на основании (1.17), (1.12) и (1.22) имеет вид

$$\bar{z}_1^{(i)} = \mathrm{Pe}\frac{q}{\rho} - \mathrm{Pe}\, q\frac{1-\mu}{2} + \mathrm{Pe}^2 \frac{q}{4\rho}(2q - 3\mu) + \ldots \qquad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что $\varepsilon_2^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^2$. Подставляя трехчленное внешнее разложение

$$\bar{z}_2^{(e)} = z_0^{(e)} + \mathrm{Pe}\, z_1^{(e)} + \mathrm{Pe}^2 z_2^{(e)},$$

где $z_0^{(e)}$ и $z_1^{(e)}$ определяются формулами (1.9) и (1.16), в (1.17), получим для $z_2^{(e)}$

$$\Lambda z_2^{(e)} = -\frac{3}{4}\frac{q\,\mathrm{Sc}}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{Sc}+1}{\mathrm{Sc}} + \frac{2}{\rho} - \frac{\mathrm{Sc}-1}{\mathrm{Sc}}\mu\right)\exp\left(\rho\frac{\mathrm{Sc}+1}{\mathrm{Sc}}\frac{\mu-1}{2}\right) -$$
$$- \frac{3}{4}\frac{q\,\mathrm{Sc}}{\rho^3}\left(1 + \frac{2}{\rho} - \mu\right)\exp\left(\rho\frac{\mu-1}{2}\right); \quad \rho \to \infty, \quad z_2^{(e)} \to 0. \tag{1.24}$$

При решении задачи (1.24) используется замена

$$z_2^{(e)}(\rho, \mu) = \exp\left(\frac{1}{2}\rho\mu\right) x(\rho, \mu).$$

В результате уравнение (1.24) сводится к неоднородному уравнению Гельмгольца для x. Правая часть этого уравнения разлагается в ряд по полиномам Лежандра $\mathsf{P}_n(\mu)$ и решение его отыскивается также в виде ряда по $\mathsf{P}_n(\mu)$.

После вычислений получим

$$z_2^{(e)}(\rho, \mu) = q\rho^{-1/2}\exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n(\rho)\,\mathsf{P}_n(\mu),$$

$$\eta_n(\rho) = \mathsf{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\int_{\rho}^{B_n}\mathsf{I}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)L_n(\rho)\,d\rho -$$
$$- \mathsf{I}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)\int_{\rho}^{\infty}\mathsf{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right)L_n(\rho)\,d\rho, \tag{1.25}$$

$$L_n(\rho) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{Sc}\,\rho^{-5/2}\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)\left[\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\delta_{n0} - \frac{\rho}{2}\delta_{n1}\right] -$$
$$- \frac{3(2n+1)}{2}\pi^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{3/2}\rho^{-3}\exp\left(-\rho\frac{\mathrm{Sc}+1}{2\,\mathrm{Sc}}\right)\left[\rho\frac{\mathrm{Sc}-1}{2\,\mathrm{Sc}}\mathsf{I}_{n+3/2}\left(\frac{\rho}{2\,\mathrm{Sc}}\right) -\right.$$
$$\left. -\left(1+\rho\frac{\mathrm{Sc}+1}{2\,\mathrm{Sc}} - n\,\mathrm{Sc} + n\right)\mathsf{I}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2\,\mathrm{Sc}}\right)\right], \quad \delta_{ni} = \begin{cases} 0, & n \neq i, \\ 1, & n = i. \end{cases}$$

Здесь $\mathsf{I}_{n+1/2}$ — модифицированная функция Бесселя.

Постоянные B_n определяются путем сращивания решения $\bar{z}_2^{(e)}(\rho, \mu)$ с (1.23). Для этого необходимо разло-

жить функцию $z_2^{(e)}(\rho, \mu)$ в ряд по малым ρ. При записи ряда используется разложение функции $\eta_n(\rho)$ в ряд по ρ, которое имеет вид

$$\eta_n(\rho) = A_n \mathrm{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) + \rho^{1/2} \sum_{i=0}^{2} \delta_{ni} R_i(\rho) + O(\rho^{3/2}),$$

$$R_0(\rho) = \frac{f(\mathrm{Sc})}{\rho} - \frac{\ln \rho}{2} + \frac{f(\mathrm{Sc})}{2} + \frac{\ln \mathrm{Sc}}{2} + \frac{7}{6} - \frac{\gamma}{2},$$

$$R_1(\rho) = -\frac{3}{4\rho} + \frac{3}{16\,\mathrm{Sc}} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{20\,\mathrm{Sc}} - \frac{1}{40\,\mathrm{Sc}^2}\right)\rho \ln \rho, \quad (1.26)$$

$$R_2(\rho) = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}\,\mathrm{Sc}^{-1},$$

$$f(\mathrm{Sc}) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Sc}^2 + \frac{1}{8}\,\mathrm{Sc} + \frac{1}{4}(\mathrm{Sc}+1)^2(\mathrm{Sc}-2) \times \ln(1+\mathrm{Sc}^{-1}) - \frac{1}{2}\ln \mathrm{Sc}.$$

Здесь A_n — постоянные, однозначным образом связанные с B_n, $\gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Ряд (1.26) можно неограниченно продолжить, однако выписанных выше членов достаточно для проведения сращивания.

После сращивания $\bar{z}_2^{(e)}(\rho, \mu)$ с $\bar{z}_1^{(i)}(r, \mu)$ найдем постоянные A_n:

$$A_0 = \pi^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\,q - f(\mathrm{Sc})\right], \quad A_n = 0 \quad (n \geqslant 1). \quad (1.27)$$

При этих значениях A_n внешнее асимптотическое разложение сращивается с внутренним с точностью до членов порядка Pe^2. Явное выражение для асимптотики функции $z_2^{(e)}(\rho, \mu)$ при $\rho \to 0$ имеет вид

$$z_2^{(e)}(\rho, \mu) = \frac{q}{2\rho}\left(q - \frac{3}{2}\,\mu\right) - \frac{q}{2}\ln \rho + q\zeta(q, \mathrm{Sc}) + \frac{q}{4}\left[q + \frac{3}{4\,\mathrm{Sc}} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5\,\mathrm{Sc}} - \frac{1}{10\,\mathrm{Sc}^2}\right)\rho \ln \rho\right]\mu - \frac{5q}{24}\left(1 + \frac{3}{10\,\mathrm{Sc}}\right)\frac{3\mu^2 - 1}{2} + O(\rho),$$

$$\zeta(q, \mathrm{Sc}) = \frac{25}{24} - \frac{\gamma}{2} - \frac{q}{4} - \frac{\mathrm{Sc}^2}{4} + \frac{\mathrm{Sc}}{8} + \frac{1}{4}(\mathrm{Sc}+1)^2(\mathrm{Sc}-2)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Sc}}\right). \quad (1.28)$$

Второе и третье приближения для внутреннего разложения. Из формулы (1.28) видно, что во втором приближении для внешнего разложения наряду со степенной

особенностью появляется логарифмическая. Это расщепление особенностей имеет место и в гидродинамической задаче об обтекании тела. Каждая из особенностей порождает соответствующий член во внутреннем разложении. При этом оказывается возможным определить сразу два последовательных приближения для внутреннего разложения. Ниже будет видно, что расщепление особенностей сохраняется и на последующих этапах решения. Переходя в (1.28) к внутренней переменной, определим коэффициент $\varepsilon_2^{(i)}(\mathsf{Pe})$ во внутреннем разложении (1.4):

$$\varepsilon_2^{(i)}(\mathsf{Pe}) = \mathsf{Pe}^2 \ln \mathsf{Pe}. \tag{1.29}$$

Из (1.1), (1.3) найдем, что функция $z_2^{(i)}(r, \mu)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с однородным граничным условием

$$\Delta z_2^{(i)} = 0; \quad r = 1, \quad \frac{\partial z_2^{(i)}}{\partial r} = k z_2^{(i)}. \tag{1.30}$$

Общее решение задачи (1.30) имеет вид

$$z_2^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r^n + \frac{n-k}{n+1+k} \frac{1}{r^{n+1}} \right) \mathsf{P}_n(\mu).$$

Постоянные a_n определяются путем сращивания $\bar{z}_2^{(i)}(r, \mu)$ при $r \to \infty$ с $\bar{z}_2^{(e)}(\rho, \mu)$ при $\rho \to 0$. Находим $a_0 = -q/2$, $a_n = 0$ $(n \geqslant 1)$. Таким образом,

$$z_2^{(i)} = \frac{1}{2} q (q r^{-1} - 1). \tag{1.31}$$

Как следует из (1.28), третье приближение для внутреннего разложения должно иметь порядок

$$\varepsilon_3^{(i)}(\mathsf{Pe}) = \mathsf{Pe}^2. \tag{1.32}$$

Функция $z_3^{(i)}(r, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta z_3^{(i)} = q \sum_{n=0}^{2} X_n(r) \mathsf{P}_n(\mu), \tag{1.33}$$

$$X_0(r) = \frac{1}{3r} - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{48} \frac{23+7k}{2+k} \frac{1}{r^4} + \frac{1}{8r^5} - \frac{3}{16} \frac{3+k}{2+k} \frac{1}{r^6} + \frac{1}{12r^7},$$

$$X_1(r) = \left(\frac{q}{4} + \frac{3}{16\mathsf{Sc}} \right) \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r^5} \right),$$

$$X_2(r) = -\frac{1}{3r} + \frac{5}{4r^2} - \frac{3}{8}\frac{12+5k}{2+k}\frac{1}{r^3} + \frac{5}{48}\frac{35+13k}{2+k}\frac{1}{r^4} - \frac{5}{16r^5} - \frac{3}{16}\frac{3+k}{2+k}\frac{1}{r^6} + \frac{5}{48r^7} + \frac{3}{16\,\mathrm{Sc}}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^5} + \frac{1}{r^6}\right).$$

Граничное условие:

$$r = 1, \quad \frac{\partial z_3^{(i)}}{\partial r} = k z_3^{(i)}. \tag{1.34}$$

Общее решение уравнения (1.33) имеет вид

$$z_3^{(i)} = q \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_n(r) + a_n r^n + b_n r^{-n-1}]\, \mathsf{P}_n(\mu), \tag{1.35}$$

$$\xi_0(r) = \frac{r}{6} - \frac{\ln r}{2} + \frac{7k+23}{k+2}\frac{1}{96r^2} + \frac{1}{48r^3} - \frac{k+3}{k+2}\frac{1}{64r^4} + \frac{1}{240r^5},$$

$$\xi_1(r) = \left(q + \frac{3}{4\,\mathrm{Sc}}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8r} - \frac{1}{16r^3}\right),$$

$$\xi_2(r) = \frac{r}{12} - \frac{5}{24} + \frac{5k+12}{k+2}\frac{1}{16r} - \frac{13k+35}{k+2}\frac{5}{192r^2} + \frac{\ln r}{16r^3} - \frac{k+3}{k+2}\frac{1}{32r^4} + \frac{5}{672r^5} + \frac{3}{16\,\mathrm{Sc}}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{4r^2} + \frac{\ln r}{5r^3} + \frac{1}{6r^4}\right),$$

$$\xi_n(r) \equiv 0, \quad n \geqslant 3.$$

В силу граничного условия (1.34) постоянные a_n и b_n связаны линейной зависимостью

$$(n-k)\,a_n + \left(\frac{d\xi_n}{dr}\right)_{r=1} - k\xi_n(1) = (n+1+k)\,b_n. \tag{1.36}$$

Для определения a_n и b_n необходимо провести сращивание внутреннего и внешнего асимптотических разложений. Для этого перейдем в (1.35) к внешней переменной. Учитывая (1.4), (1.23), (1.31), (1.32), (1.35), (1.36), получим

$$\bar{z}_3^{(i)} = q \sum_{n=2}^{\infty} a_n \rho^n \mathsf{P}_n(\mu)\, \mathsf{Pe}^{-n+2} + q\left[\rho^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{\rho}{6} + \left(\frac{1}{2} + a_1\rho\right)\mathsf{P}_1(\mu) + \frac{1}{12}\rho \mathsf{P}_2(\mu)\right]\mathsf{Pe} + q\left[\frac{q}{2\rho} - \frac{\ln\rho}{2} + a_0 + \frac{1}{4}\left(q + \frac{3}{4\,\mathrm{Sc}}\right)\mathsf{P}_1(\mu) - \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{16\,\mathrm{Sc}}\right)\mathsf{P}_2(\mu)\right]\mathsf{Pe}^2 + \frac{q^2}{2\rho}\mathsf{Pe}^3 \ln \mathsf{Pe} + O(\mathsf{Pe}^3). \tag{1.37}$$

Из (1.37) видно, что внутреннее разложение $\bar{z}_3^{(i)}$ сращивается с точностью до членов порядка Pe^2 с внешним разложением $z_2^{(e)}$, определяемым формулами (1.5), (1.13), (1.16), (1.25), если

$$a_0 = \zeta(q,\ \mathrm{Sc}),\quad a_1 = -\frac{1}{4},\quad a_n = 0\ (n \geqslant 2). \tag{1.38}$$

Постоянные b_n найдем при помощи соотношений (1.35), (1.36), (1.38):

$$\begin{aligned} b_0 &= -q\zeta(q,\ \mathrm{Sc}) - \frac{239}{960} - \frac{79}{240}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{32}\frac{1}{(k+1)(k+2)}, \\ b_1 &= \frac{7}{16} + \frac{9}{64\,\mathrm{Sc}}\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) - \frac{3}{4}\frac{1}{k+2} - \\ &\qquad - \frac{3}{8}\frac{1}{(k+1)(k+2)}, \\ b_2 &= \frac{235}{1344} - \frac{1}{64\,\mathrm{Sc}}\left(1 + \frac{13}{5}\frac{1}{k+3}\right) + \frac{3}{14}\frac{1}{k+3} + \\ &\qquad + \frac{3}{16}\frac{1}{(k+2)(k+3)}, \\ b_n &= 0 \quad (n \geqslant 3). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Функция $z_3^{(i)}(r, \mu)$ полностью определяется формулами (1.35), (1.38), (1.39), функция $\zeta(q, \mathrm{Sc})$ определена в (1.28).

Приближения высшего порядка. Из (1.37) следует, что

$$\varepsilon_3^{(e)} = \mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}. \tag{1.40}$$

Подстановка ряда (1.5) в соотношения (1.7) с учетом формул (1.9) и (1.40) приводит к выводу, что искомая функция $z_3^{(e)}(\rho, \mu)$ удовлетворяет тому же уравнению и граничному условию (1.14), что и функция $z_1^{(e)}(\rho, \mu)$. Следовательно, эти функции совпадают с точностью до множителя, величина которого определяется сращиванием $\bar{z}_3^{(e)}(\rho, \mu)$ с (1.37). Используя формулу (1.16), после сращивания получим

$$z_3^{(e)} = \frac{q^2}{2\rho}\exp\left[\frac{1}{2}\rho(\mu - 1)\right]. \tag{1.41}$$

Из (1.40) и (1.41) следует, что

$$\varepsilon_4^{(i)} = \mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}. \tag{1.42}$$

После подстановки ряда (1.4) в (1.1), (1.3) с учетом (1.6) получим уравнение и граничное условие для $z_4^{(i)}$:

$$\Delta z_4^{(i)} = -\left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40\,\mathrm{Sc}^2}\right)\frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu, \quad (1.43)$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial z_4^{(i)}}{\partial r} = k z_4^{(i)}. \quad (1.44)$$

Уравнение (1.43) отличается от (1.18) лишь множителем в правой части, а граничные условия (1.44) и (1.19) совпадают. Поэтому, используя (1.20), (1.21), для $z_4^{(i)}$ найдем

$$z_4^{(i)} = a_0 - a_0\frac{q}{r} + \left[a_1 r - \frac{k}{k+2}\frac{a_1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40\,\mathrm{Sc}^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{3}{4}\frac{k+3}{k+2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4r^3}\right)\right]\mu + $$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(r^n + \frac{n-k}{n+1+k} r^{-n-1}\right) \mathrm{P}_n(\mu). \quad (1.45)$$

Постоянные a_n определяются сращиванием разложений $\bar{z}_4^{(i)}$ и $\bar{z}_3^{(e)}$. Переходя в (1.45) к внешней переменной, после сращивания получим

$$a_0 = -\frac{1}{4}q^2, \quad a_n = 0 \ (n \geqslant 1). \quad (1.46)$$

Из изложенного видно, что нахождение третьего приближения для функции $z^{(e)}(\rho, \mu)$ и четвертого для $z^{(i)}(r, \mu)$ не связано с громоздкими выкладками благодаря появлению логарифмической особенности. Очевидно, что отыскание приближений более высокого порядка потребует больших вычислений. При этом задача осложнится необходимостью предварительного определения высших членов внутреннего и внешнего асимптотических разложений функции тока, что представляет собой самостоятельную проблему. Ограничимся здесь лишь указанием на то, что, как вытекает из (1,6), (1.7), (1.37), (1.41), (1.42), (1.45), следующие приближения для $z^{(e)}(\rho, \mu)$ и $z^{(i)}(r, \mu)$ должны иметь порядок

$$\varepsilon_4^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \varepsilon_5^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}\,\epsilon^3. \quad (1.47)$$

Кроме того, как следует из (1.41) и (1.45), функция $z_5^{(i)}(r, \mu)$ будет содержать члены вида $^9/_{80} q\mu\,\mathrm{Sc}^{-2}\ln r$, что приведет к полному сращиванию $\bar{z}_5^{(i)}(r, \mu)$ с $\bar{z}_4^{(e)}(\rho, \mu)$.

Поле концентрации (температуры). Поток вещества (тепла) на поверхность частицы. Резюмируя полученные выше результаты, запишем выражение для распределения концентрации (температуры) в потоке, обтекающем сферу.

Вдали от сферы (внешнее асимптотическое разложение) имеем

$$z^{(e)} = \frac{q}{\rho}\left(\mathrm{Pe} + \frac{q}{2}\mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}\right) \exp\left[\frac{1}{2}\rho(\mu - 1)\right] + \\ + \mathrm{Pe}^2 z_2^{(e)} + O(\mathrm{Pe}^3), \quad (1.48)$$

где функция $z_2^{(e)} = z_2^{(e)}(\rho, \mu)$ определяется (1.28).

Вблизи сферы (внутреннее асимптотическое разложение) имеем

$$z^{(i)} = \frac{q}{r} + \frac{q}{2}\left(\frac{q}{r} - 1\right)\left(\mathrm{Pe} + \mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe} + \frac{q}{2}\mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}\right) + \\ + \frac{q}{2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{3}{4}\frac{k+3}{k+2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4r^3}\right) \times \\ \times \mu\left[\mathrm{Pe} + \left(\frac{q}{2} + \frac{9}{40\,\mathrm{Sc}^2}\right)\mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}\right] + q\left[\xi_0 + \zeta + \frac{b_0}{r} + \right. \\ \left. + \left(\xi_1 - \frac{r}{4} + \frac{b_1}{r^2}\right)\mu + \left(\xi_2 + \frac{b_2}{r^3}\right)\frac{3\mu^2 - 1}{2}\right]\mathrm{Pe}^2 + O(\mathrm{Pe}^3). \quad (1.49)$$

Величины ξ_n и b_n задаются формулами (1.35) и (1.39), функция $\zeta = \zeta(q, \mathrm{Sc})$ определена в (1.28).

Выражение (1.49) позволяет рассчитать величины безразмерных локального j и интегрального I потоков активного компонента к поверхности реагирующей сферы. Для практических приложений наиболее важной характеристикой массообмена частицы с окружающей средой является среднее число Шервуда (в задачах о теплообмене — среднее число Нуссельта), которое определяется приходящимся на единицу поверхности частицы средним значением диффузионного потока:

$$\mathrm{Sh} = \langle j \rangle = \frac{I}{4\pi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial z^{(i)}}{\partial r}\right)_{r=1} d\mu. \quad (1.50)$$

После интегрирования приходим к следующему выражению, полученному в работах [28, 138, 138а]:

$$\mathrm{Sh} = q + \frac{1}{2}q^2(\mathrm{Pe} + \mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}) + \frac{1}{2}q^2 Q(q, \mathrm{Sc})\mathrm{Pe}^2 + \\ + \frac{1}{4}q^3 \mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe} + O(\mathrm{Pe}^3),$$

$$Q(q,\ \mathrm{Sc}) = -\frac{119}{80} + \gamma + \frac{1}{2}q - \frac{3}{32}\frac{1}{2-q} + \tag{1.51}$$
$$+ \frac{\mathrm{Sc}^3}{2} - \frac{\mathrm{Sc}}{4} - (\mathrm{Sc}+1)^2\left(\frac{\mathrm{Sc}}{2} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Sc}}\right).$$

Полученная формула пригодна для любых значений безразмерной константы скорости реакции на поверхности частицы (т. е. при любых значениях кинетического параметра q: $0 \leqslant q \leqslant 1$).

Частный случай диффузионного режима реакции на поверхности сферы соответствует предельному переходу в (1.51) при $k \to \infty$ ($q \to 1$) и определяет также среднее число Нуссельта в случае теплообмена сферической частицы со средой при постоянной температуре поверхности частицы [169]:

$$\mathrm{Nu} = 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{Pe}_T + \mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T) + \frac{1}{2}Q(1,\ \mathrm{Pr})\,\mathrm{Pe}_T^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}\mathrm{Pe}_T^3 \ln \mathrm{Pe}_T + O(\mathrm{Pe}_T^3), \tag{1.52}$$
$$Q(1,\ \mathrm{Pr}) = -\frac{173}{160} + \gamma + \frac{\mathrm{Pr}^2}{2} - \frac{\mathrm{Pr}}{4} -$$
$$- (\mathrm{Pr}+1)^2\left(\frac{\mathrm{Pr}}{2} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right),$$
$$\mathrm{Pr} = \nu/\chi, \quad \mathrm{Pe}_T = aU_\infty/\chi.$$

Здесь Pr — число Прандтля, Pe_T — тепловое число Пекле.

В предельном случае стоксова обтекания сферы ($\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = \infty$) формулы (1.51), (1.52) переходят в результаты, полученные в работах [115, 190].

Соотношения (1.51), (1.52) позволяют проследить зависимость полного потока вещества (тепла) на поверхность частицы от числа Рейнольдса. На рис. 6.1 показано относительное приращение среднего числа Шервуда $\Delta\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}\,(\mathrm{Sc},\ \mathrm{Pe})\ \mathrm{Sh}^{-1}\,(\infty,\ \mathrm{Pe}) - 1$, обусловленное конечностью Re при $q = 1$ (что соответствует диффузионному режиму протекания реакции на поверхности сферы или теплообмену сферы) и разных числах Sc и Pe. Видно, например, что при $\mathrm{Sc} \leqslant 0{,}7$ и $\mathrm{Pe} = 1$ это приращение составляет около 10%.

Влияние скорости течения на число Шервуда показано на рис. 6.2 при $\mathrm{Sc} = 1$ и различных значениях безразмерной константы скорости поверхностной химической реакции.

Отметим, что число Шмидта впервые появляется в выражениях (1.49), (1.51) лишь в четвертом слагаемом, порядок которого равен Pe^2. Это означает, что в случае обтекания сферы газовым потоком, когда справедливо соотношение $\mathrm{Sc} \sim 1$, использование стоксова приближения для поля скоростей (нулевой член разложения, полученный при $\mathrm{Re} = 0$) в уравнении (1.1) при малых числах Рейнольдса вносит погрешность в решение

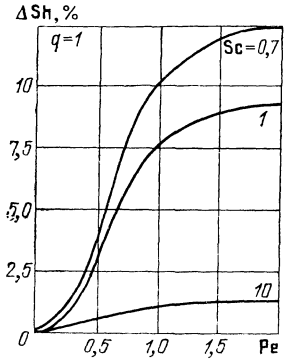


Рис. 6.1. Зависимость относительного приращения среднего числа Шервуда от числа Пекле для диффузионного режима реакции на поверхности сферы ($k = \infty$).

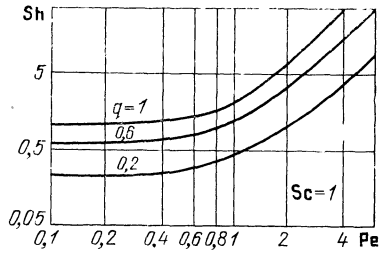


Рис. 6.2. Зависимость среднего числа Шервуда от числа Пекле для различных режимов протекания поверхностной химической реакции.

соответствующей диффузионной задачи порядка Re^2. В отличие от гидродинамической задачи об обтекании, где случай $\mathrm{Re} = 0$ соответствовал движению частицы под действием вязких сил в пренебрежении силами инерции, в диффузионной задаче значение $\mathrm{Pe} = 0$ соответствует покоящейся частице в неподвижной среде. Поэтому для получения нетривиальной информации о влиянии движения на массообмен частицы со средой при $\mathrm{Re} \sim \mathrm{Pe} < O(1)$ необходимо по меньшей мере определить нулевой и первый члены разложения поля концентрации (числа Шервуда) по числу Пекле.

Как уже отмечалось, использованный здесь метод решения задачи о массообмене движущейся частицы применим при анализе широкого класса сходных по постановке задач. Например, в работе [143] рассматривалось обтекание сферы потоком вязкого диссоциирующего газа с учетом каталитической реакции первого порядка на ее поверхности; полученные результаты предполагалось использовать для создания теоретической основы экспе-

римента по определению каталитической эффективности различных поверхностей. В [191] рассматривалась задача о массообмене частицы с потоком с учетом проскальзывания жидкости на поверхности сферы.

§ 2. Массообмен сферической частицы при сдвиговом обтекании

Массоперенос к частице в поступательном потоке, рассмотренный в § 1, хорошо моделирует многие реальные процессы в дисперсных средах в случаях, когда основную роль в конвективном переносе играет скорость поступательного движения частиц относительно жидкости (скорость «межфазного скольжения»), а градиенты невозмущенного поля скоростей несущественны, т. е. когда в разложении невозмущенной скорости, представленном формулой (1.1) из введения, преобладающим является первое слагаемое. На практике часто встречаются также случаи, когда частицы практически полностью увлекаются потоком, т. е. скоростью межфазного скольжения можно пренебречь, и определяющим становится конвективный перенос, обусловленный сдвиговым движением потока, которое в случае линейного сдвига описывается вторым слагаемым упомянутой формулы. В таких случаях при исследовании массообмена частицы с потоком удобно связать систему координат с центром тяжести частицы таким образом, чтобы эта система двигалась со скоростью частицы поступательно, а сама частица могла свободно вращаться вокруг начала координат. В случае линейного сдвигового потока невозмущенному полю течения в безразмерных переменных соответствует следующее распределение скорости жидкости на бесконечности:

$$r \to \infty, \quad v_i = G_{ij}x_j + O(r^{-1}), \quad G_{ij}\delta_{ij} = 0, \qquad (2.1)$$

$$G_{ij} = G^*_{ij}G^{-1}, \quad G = \max_{i,\,j} |\, G^*_{ij} \,|, \quad U = aG \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь G^*_{ij} — размерные элементы матрицы коэффициентов сдвига, $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартова система координат с началом в центре частицы, U — характерная скорость потока, обусловленная сдвигом, a — характерный размер частицы, δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющимся индексам i, j производится суммирование, равенство суммы диагональных элементов G_{ii} нулю следует из уравнения неразрывности жидкости, физический смысл

и интерпретация элементов G_{ij} были приведены во введении.

Весьма распространенным случаем рассматриваемого движения является простой сдвиг — линейный плоский сдвиговый поток, который определяется соотношениями

$$G_{12} = 1; \quad G_{ij} = 0 \text{ при } i \neq 1, \quad j \neq 2. \tag{2.2}$$

Рассмотрим движение сферической частицы в простом сдвиговом потоке (2.1), (2.2). Граничные условия для компонент скорости жидкости имеют вид

$$r \to \infty, \quad v_1 \to x_2, \quad v_2 \to 0, \quad v_3 \to 0, \tag{2.3}$$

$$r = 1, \quad v_1 = \frac{1}{2} x_2, \quad v_2 = -\frac{1}{2} x_1, \quad v_3 = 0. \tag{2.4}$$

Условие (2.3) соответствует невозмущенному полю течения (2.1), (2.2). Условие (2.4) есть условие прилипания на поверхности сферической частицы, в котором принято во внимание, что свободно взвешенная в простом сдвиговом потоке частица вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости вращения потока как твердого тела.

При записи уравнений наряду с декартовой будет использоваться сферическая система координат r, θ, φ, в которой направление оси x_1, выходящей из центра частицы, совпадающей с направлением сдвигового потока, служит осью, от которой ведется отсчет угла θ.

Решение задачи об обтекании расположенной в начале координат сферической частицы простым сдвиговым потоком (2.3), (2.4) в главном приближении метода сращиваемых асимптотических разложений (стоксово приближение) приводит к следующим выражениям для компонент скорости жидкости [130]:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{5}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^4}\right)\sin^2\theta \sin 2\varphi, \\ v_\theta &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r^4}\right)\sin\theta\cos\theta\sin 2\varphi, \\ v_\varphi &= -\frac{1}{2} r \sin\theta + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r^4}\right)\sin\theta\cos 2\varphi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Математическая формулировка задачи о массообмене реагирующей сферической частицы с простым сдвиговым потоком имеет следующий вид:

$$\Delta z = \mathrm{Pe}\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, z, \tag{2.6}$$

$$r \to \infty, \quad z \to 0, \tag{2.7}$$

$$r=1, \quad \frac{\partial z}{\partial r}=k(z-1), \tag{2.8}$$

$$k=\frac{aK_s}{D}, \quad \mathrm{Pe}=\frac{a^2G}{D}, \quad z=\frac{C_\infty - C}{C_\infty},$$

где v — заданное формулами (2.5) поле скоростей обтекания, z, как и ранее — степень превращения, использование которой при описании поля концентрации приводит к сокращению записи формул.

Граничное условие (2.8) соответствует протеканию на поверхности частицы реакции первого порядка; в случае диффузионного режима реакции в (2.8) следует перейти к пределу при $k \to \infty$.

Отметим, что в рассматриваемом случае простого сдвигового течения, в отличие от ситуации, рассмотренной в § 1, распределение скорости как в невозмущенном потоке, так и в окрестности частицы не обладает осевой симметрией; аксиальная компонента скорости отлична от нуля, в выражении для всех трех компонент скорости v_r, v_θ, v_φ сохраняется зависимость от трех координат r, θ, φ.

Решение задачи (2.5) — (2.8) при малых значениях числа Пекле может быть найдено методом сращиваемых асимптотических разложений во внутренней и внешней областях. Сравнительный анализ поведения отдельных членов в уравнении (2.6) с учетом (2.5) при $\mathrm{Pe} \ll 1$, $r \to \infty$ показывает, что в рассматриваемом случае порядки величин конвективных и диффузионных членов в (2.6) становятся одинаковыми при $r \sim \mathrm{Pe}^{-1/2}$. Поэтому разбиение всей области течения на внутреннюю $\Omega^{(i)}$ и внешнюю $\Omega^{(e)}$ области определяется соответственно неравенствами $1 \leqslant r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2})$ и $O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant r$. Система сжатых координат во внешней области вводится следующим образом:

$$\rho = \mathrm{Pe}^{1/2} r = (X_1, X_2, X_3), \quad \text{где} \quad X_m = \mathrm{Pe}^{1/2} x_m \quad (m = 1, 2, 3).$$

Как и в случае поступательного потока, решения во внутренней и внешней областях строятся в виде асимптотических рядов

$$z^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(i)}(r, \theta, \varphi) \text{ в области } \Omega^{(i)}, \tag{2.9}$$

$$z^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(e)}(\rho, \theta, \varphi) \text{ в области } \Omega^{(e)}, \tag{2.10}$$

где, как обычно, $\lim\limits_{\mathrm{Pe}\to 0} \dfrac{\varepsilon_{n+1}^{(i)}}{\varepsilon_n^{(i)}} = \lim\limits_{\mathrm{Pe}\to 0} \dfrac{\varepsilon_{n+1}^{(e)}}{\varepsilon_n^{(e)}} = 0.$

Решение во внутренней области должно удовлетворять уравнению (2.6) и граничному условию на поверхности сферы (2.8). Распределение концентрации во внешней области определяется следующим уравнением и граничным условием:

$$\Delta_\rho z^{(e)} - X_2 \frac{\partial z^{(e)}}{\partial X_1} = -\frac{5}{4}\,\mathrm{Pe}^{3/2}\rho^{-2}\sin^2\theta\sin 2\varphi\,\frac{\partial z^{(e)}}{\partial \rho} + \\ + \frac{1}{4}\,\mathrm{Pe}^{5/2}\left(3\rho^{-4}\sin^2\theta\sin 2\varphi\,\frac{\partial z^{(e)}}{\partial \rho} - \rho^{-5}\sin 2\theta\sin 2\varphi\,\frac{\partial z^{(e)}}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - 2\rho^{-5}\cos 2\varphi\,\frac{\partial z^{(e)}}{\partial \varphi}\right); \quad \rho\to\infty, \quad z^{(e)}\to 0, \qquad (2.11)$$

которые получены путем перехода в (2.5), (2.6), (2.7) к сжатым (внешним) переменным ρ и X_m.

Неизвестные постоянные, возникающие при решении задач для членов внешнего $z_n^{(e)}$ (2.10) и внутреннего $z_n^{(i)}$ (2.9) асимптотических разложений, определяются путем использования процедуры сращивания (1.8).

Нулевой член внешнего разложения равен нулю: $z_0^{(e)} = 0$. Старший член внутреннего разложения, как и в случае поступательного обтекания сферы, определяется решением задачи (2.6)—(2.8) при $\mathrm{Pe} = 0$ и задается формулой (1.12), описывающей распределение концентрации в неподвижной среде.

Перейдем теперь к определению следующего члена внешнего разложения, порядок которого устанавливается из условия сращивания (1.8), что приводит к равенству $\varepsilon_1^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^{1/2}$. Подставив разложение (2.10) в уравнение (2.11) и собирая члены при одинаковых степенях малого параметра Pe, получаем следующее уравнение для первого члена внешнего разложения:

$$\Delta_\rho z_1^{(e)} - X_2\frac{\partial z^{(e)}}{\partial X_1} = 0; \quad \rho\to\infty, \quad z_1^{(e)}\to 0. \qquad (2.12)$$

Однопараметрическое семейство решений уравнения (2.12) имеет вид [69, 132]

$$z_1^{(e)} = A_1\zeta(\rho), \qquad (2.13)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left\{-\left[\frac{(X_1 - {}^1/_2X_2\xi)^2}{4\xi\,(1+{}^1/_{12}\xi^2)} + \frac{X_2^2+X_3^2}{4\xi}\right]\right\}\times \\ \times\frac{d\xi}{(1+{}^1/_{12}\xi^2)^{1/2}\xi^{3/2}},$$

где ζ — фундаментальное решение уравнения (2.12), соответствующее точечному источнику в сдвиговом потоке, а A_1 — произвольная постоянная, которая будет определена из сращивания с решением во внутренней области. Исследование асимптотики функции ζ приводит к следующему результату [133]:

$$\rho \to 0, \quad \zeta \to \frac{1}{\rho} - \alpha + O(\rho),$$
$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[1 - \left(1 + \frac{1}{12}\xi^2\right)^{-1/2}\right] \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = 0{,}257. \tag{2.14}$$

Процедура сращивания нулевого члена внутреннего разложения (1.12) и первого члена внешнего разложения (2.13) с учетом (2.14) дает возможность найти значение фигурирующей в формуле (2.13) константы A_1:

$$A_1 = q \quad \left(q = \frac{k}{k+1}\right), \tag{2.15}$$

что позволяет определить порядок первого члена внутреннего разложения:

$$\varepsilon_1^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^{1/2}. \tag{2.16}$$

Следует отметить, что по аналогии с гидродинамической задачей об обтекании частицы при малых числах Рейнольдса распределение концентрации (2.13), (2.15) соответствует озееновскому приближению и может интерпретироваться как поле концентрации, порожденное точечным источником, интенсивность которого равна $4\pi q$, находящимся в однородном сдвиговом потоке (функция ζ соответствует источнику интенсивности 4π).

Распределение концентрации $z_1^{(e)}$ обладает своеобразными свойствами. В частности, асимптотическое поведение функции ζ при больших ρ существенно зависит от выбора направления радиуса-вектора, и, в отличие от случая массообмена частицы в поступательном потоке, концентрация на больших расстояниях от частицы уменьшается не экспоненциально, а по степенному закону [133].

Продолжим построение решения во внутренней области. Подставляя двучленное внутреннее разложение $z_0^{(i)} + \mathrm{Pe}^{1/2} z_1^{(i)}$ в (2.6) и (2.8), придем к следующему уравнению и граничному условию на поверхности частицы для

первого члена внутреннего разложения:

$$\Delta z_1^{(i)} = 0; \quad r = 1, \quad \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial r} = k z_1^{(i)}. \tag{2.17}$$

Из формул (2.13), (2.14) с учетом условия сращивания (1.8) получаем граничное условие на бесконечности для функции $z_1^{(i)}$:

$$r \to \infty, \quad z_1^{(i)} \to -\alpha q. \tag{2.18}$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что решение задачи (2.17), (2.18) имеет вид

$$z_1^{(i)} = \alpha q\,(qr^{-1} - 1). \tag{2.19}$$

Таким образом, с точностью до членов порядка $\mathrm{Pe}^{1/2}$ (двучленное приближение) распределение концентрации в простом сдвиговом потоке во внутренней и внешней областях около реагирующей частицы описывается соответственно выражениями

$$z^{(i)} = \frac{q}{r} + \mathrm{Pe}^{1/2} q\alpha\left(\frac{q}{r} - 1\right), \quad z^{(e)} = \mathrm{Pe}^{1/2} q\zeta(\rho), \tag{2.20}$$

где функция $\zeta(\rho)$ определяется формулой (2.13), число α — последней формулой (2.14). Из (2.20), в частности, следует, что в двучленном приближении сдвиговое течение, как и поступательное (ср. с результатами [§ 1), проявляется во втором члене и приводит к существенному изменению распределения концентрации в окрестности частицы, но в отличие от случая поступательного потока не нарушает сферической симметрии распределения концентрации и имеет порядок величины $\mathrm{Pe}^{1/2}$, а не Pe.

Воспользовавшись выражением (2.20) для распределения концентрации во внутренней области, рассчитаем интенсивность массообмена частицы с потоком. По определению, для числа Шервуда можно получить [79]

$$\mathrm{Sh} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial z^{(i)}}{\partial r}\right)_{r=1} d\mu = q(1 + q\alpha\,\mathrm{Pe}^{1/2}). \tag{2.21}$$

Второй член в скобках в правой части (2.21) дает поправку к величине интенсивности массообмена, обусловленную сдвиговым течением. Видно, что обтекание сдвиговым потоком приводит к увеличению притока вещества к поверхности реагирующей частицы, пропорциональному корню квадратному из интенсивности сдвига, а зависимость поправочного члена от кинетического параметра q является квадратичной.

Для диффузионного режима реакции на поверхности сферы ($q = 1$) двучленная формула для среднего числа Шервуда (2.21) была получена в [133].

Последовательное определение членов асимптотических рядов — решений во внутренней и внешней областях может быть продолжено. При этом, как показывает анализ, определение явного вида этих членов наталкивается на серьезные трудности. Однако в выражении для числа Шервуда оказывается возможным получить в аналитической форме еще два слагаемых, не выходя за пределы точности, обеспечиваемой использованием для поля скоростей стоксова приближения (2.5).

Из явного вида двучленного внутреннего разложения (2.20) и условия сращивания следует, что $\varepsilon_2^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$. Учитывая это и подставляя внешнее трехчленное разложение (2.10) в уравнение (2.11), можно убедиться, что задача для определения функции $z_2^{(e)}$ будет полностью аналогична задаче для определения $z_1^{(e)}$. Следовательно, явный вид функции $z_2^{(e)}$ и ее асимптотика будут совпадать с точностью до постоянного множителя с видом и асимптотикой $z_1^{(e)}$. Далее, используя условие сращивания и стандартную процедуру получения уравнений для последующих членов разложений, можно найти также, что $\varepsilon_2^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$, $\varepsilon_3^{(i)} = \varepsilon_3^{(e)} = \mathrm{Pe}^{3/2}$, функция $z_3^{(e)}$ совпадает с $z_1^{(e)}$ с точностью до постоянного множителя, а функции $z_2^{(i)}$, $z_3^{(i)}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\Delta z_n^{(i)} = -\frac{q}{r^3} v_j x_j \qquad (n = 2, 3) \tag{2.22}$$

и одинаковым граничным условиям на поверхности частицы

$$r = 1, \quad \frac{\partial z_n^{(i)}}{\partial r} = k z_n^{(i)} \qquad (n = 2, 3). \tag{2.23}$$

В соответствии со сказанным решение во внешней области можно представить в следующей форме:

$$z^{(e)} = \mathrm{Pe}^{1/2} Q(\mathrm{Pe}) \{\zeta(\rho) + O(\mathrm{Pe}^{3/2})\}, \tag{2.24}$$
$$Q(\mathrm{Pe}) = q + A_2 \mathrm{Pe}^{1/2} + A_3 \mathrm{Pe},$$

где A_2, A_3 — произвольные константы, функция $\zeta(\rho)$ определена формулой (2.13). Решение во внутренней

области будет иметь вид

$$z^{(i)} = \frac{q}{r} + \mathrm{Pe}^{1/2}\alpha q\left(\frac{q}{r} - 1\right) + \mathrm{Pe}\, z_2^{(i)} + \mathrm{Pe}^{3/2} z_3^{(i)} + o\left(\mathrm{Pe}^{3/2}\right). \tag{2.25}$$

Каждый из членов ряда (2.25) приводит к появлению слагаемого того же порядка в выражении для числа Шервуда. При этом оказывается, что значения этих слагаемых могут быть установлены без знания явного вида функций $z_2^{(i)}$ и $z_3^{(i)}$. Рассмотрим наряду с $z_2^{(i)}$ и $z_3^{(i)}$ средние значения этих функций на сфере произвольного радиуса r, определенные по формуле

$$\langle z\rangle = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\Sigma_r} z\, d\Sigma_r = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} z(r,\ \mu,\ \varphi)\, d\varphi\, d\mu \quad (\mu = \cos\theta), \tag{2.26}$$

где Σ_r — поверхность сферы радиуса r. Отметим, что в силу сферической симметрии функций $z_0^{(i)}$ и $z_1^{(i)}$ определенное по (2.26) среднее значение этих функций совпадает с самими функциями.

Интегрируя уравнения (2.22) по сфере радиуса r и учитывая равенство $\langle v_j x_j\rangle = 0$, которое является следствием уравнения неразрывности $(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = 0$ и условия непротекания жидкости через поверхность сферы $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})_s = 0$, получаем следующие уравнения для средних значений $\langle z_2^{(i)}\rangle$ и $\langle z_3^{(i)}\rangle$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d\langle z_n^{(i)}\rangle}{dr} = 0 \quad (n = 2, 3). \tag{2.27}$$

Общее решение уравнения (2.27) имеет вид

$$\langle z_n^{(i)}\rangle = a_n + b_n r^{-1}, \tag{2.28}$$

где a_n, b_n $(n = 2, 3)$ — произвольные константы.

Усредняя (2.25) и используя (2.28), для средней концентрации во внутренней области получаем

$$\langle z^{(i)}\rangle = \frac{q}{r} + \mathrm{Pe}^{1/2}\alpha q\left(\frac{q}{r} - 1\right) + \mathrm{Pe}\left(\frac{b_2}{r} + a_2\right) + \\ + \mathrm{Pe}^{3/2}\left(\frac{b_3}{r} + a_3\right) + o\left(\mathrm{Pe}^{3/2}\right). \tag{2.29}$$

Сращивая (2.29) с осредненной по правилу (2.26) асимптотикой распределения концентрации во внешней области (2.24) при $\rho \to 0$, последовательно найдем следующие

соотношения для констант (учитывая представление (2.14)):

$$a_2 = -\alpha^2 q^2, \quad a_3 = -\alpha b_2, \quad (A_2 = \alpha q^2, \; A_3 = b_2). \tag{2.30}$$

Оставшиеся неизвестными постоянные b_2 и b_3 определяются из граничного условия на поверхности частицы (2.8) и имеют вид

$$b_2 = \alpha^2 q^3, \quad b_3 = \alpha^3 q^4. \tag{2.31}$$

Используя формулы (2.29) — (2.31), получаем следующее окончательное выражение для среднего значения концентрации во внутренней области:

$$\langle z^{(i)} \rangle = \frac{q}{r} + \mathrm{Pe}^{1/2} \alpha q \left(\frac{q}{r} - 1 \right) + \mathrm{Pe}\, \alpha^2 q^2 \left(\frac{q}{r} - 1 \right) + \\ + \mathrm{Pe}^{3/2} \alpha^3 q^3 \left(\frac{q}{r} - 1 \right) + o(\mathrm{Pe}^{3/2}). \tag{2.32}$$

Из (2.32) для среднего числа Шервуда находим

$$\mathrm{Sh} = -\left(\frac{d \langle z^{(i)} \rangle}{dr} \right)_{r=1} = \\ = q + \alpha q^2 \mathrm{Pe}^{1/2} + \alpha^2 q^3 \mathrm{Pe} + \alpha^3 q^4 \mathrm{Pe}^{3/2} + O(\mathrm{Pe}^2). \tag{2.33}$$

Формула (2.33) была получена в работе [79]; она устанавливает аналитическую зависимость среднего числа Шервуда от числа Пекле, кинетического параметра q и константы α, характеризующей простой сдвиговый поток. В предельном случае диффузионного режима реакции на поверхности сферы ($k = \infty$, $q = 1$) выражение (2.33) переходит в результаты [112] и дает, в частности, выражение для среднего числа Нуссельта для частицы с постоянной температурой на поверхности:

$$\mathrm{Nu} = -\left(\frac{d \langle T^{(i)} \rangle}{dr} \right)_{r=1} = \frac{1}{1 - \alpha \mathrm{Pe}_T^{1/2}} + O(\mathrm{Pe}_T^2), \quad \mathrm{Pe}_T = \frac{a^2 G}{\chi}. \tag{2.34}$$

В формуле (2.34) использована более краткая форма записи ряда (2.33).

Из проведенного выше рассмотрения следует, что в задаче о массообмене частицы с простым сдвиговым потоком конкретный вид стоксова распределения поля скоростей вблизи частицы при построении приближенного решения с точностью до членов $\mathrm{Pe}^{3/2}$ оказывается несущественным. В этом приближении используются лишь

сведения о поле скоростей невозмущенного потока и порядке величины возмущения скорости на больших расстояниях от частицы.

Определение главного и трех последующих членов в приближенной асимптотической формуле для числа Шервуда (2.33) в значительной мере основано на использовании решения задачи о поле концентрации точечного источника единичной интенсивности, находящегося в сдвиговом потоке. Асимптотика этого решения при $\rho \to 0$ с учетом условия сращивания (1.8) задает граничные условия на бесконечности для распределения концентрации во внутренней области и, в конечном счете, после перехода к поверхностным средним величинам, определяет явное выражение для числа Шервуда.

Указанные свойства и процедура решения сохраняют силу и в общем случае массообмена сферической частицы с произвольным однородным линейным сдвиговым потоком, распределение скоростей которого вдали от частицы имеет вид (2.1).

Процедура построения решения в виде внутреннего и внешнего разложений остается прежней. Более сложный вид тензора сдвига проявляется при определении явного вида функций $z_n^{(e)}$ ($n = 0, 1, 2, 3$), с точностью до постоянных множителей совпадающих с решением задачи об установившемся поле концентрации точечного источника, находящегося в произвольном линейном сдвиговом потоке. Формулировка этой задачи имеет вид

$$\Delta\zeta = G_{ij}X_j\frac{\partial\zeta}{\partial X_i}\,; \quad \rho \to \infty, \quad \zeta \to 0. \tag{2.35}$$

В общем случае фундаментальное решение уравнения (2.35) (удовлетворяющее условию $\zeta \to \rho^{-1}$ при $\rho \to 0$) может быть записано в виде интегральной формулы, позволяющей провести исследование его асимптотики, необходимой для проведения сращивания с решением во внутренней области. При получении решения весьма полезной оказывается его интерпретация как установившегося решения нестационарной задачи о поле концентрации точечного источника единичной интенсивности, включенного в начале координат в начальный момент времени [116].

Используя указанную аналогию и метод трехмерного преобразования Фурье по пространственным координатам X_i, можно получить явное выражение для функции ζ

в следующем виде [116]:

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{X_i X_j}{4} \frac{b_{ij}}{B} \right\} \frac{dt}{B^{1/2}}, \qquad (2.36)$$

$$B = \det \| B_{ij} \| \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь b_{ij} — алгебраические дополнения матричных элементов B_{ij}, которые определяются путем решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от компонент тензора сдвига G_{ij}:

$$\frac{dB_{ij}}{dt} = \delta_{ij} + G_{il}B_{jl} + G_{jl}B_{il}; \quad t \to 0, \quad B_{ij} \to \delta_{ij}t \qquad (2.37)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Выражение (2.36) может быть представлено в другой форме, более удобной для исследования его асимптотического поведения:

$$\zeta = \frac{1}{\rho} + I(\rho):$$

$$I(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{B^{1/2}} \exp\left(\frac{\rho^2}{4t} - \frac{X_i X_j b_{ij}}{4B} \right) - \frac{1}{t^{3/2}} \right\} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\rho^2}{4t} \right) dt. \qquad (2.38)$$

С учетом начальных условий в (2.37), следствием которых является предельное свойство $\lim\limits_{t \to 0} (tb_{ij}B^{-1}) = \delta_{ij}$, из формулы (2.38) при $\rho \to 0$ можно получить [116]

$$\rho \to 0, \quad \zeta \to \frac{1}{\rho} - \alpha + O(\rho), \qquad (2.39)$$

где параметр $\alpha = \alpha(G_{ij})$, зависящий от типа сдвигового течения и характеризующий интенсивность массообмена частицы со средой, определяется формулой

$$\alpha = \alpha(G_{ij}) = -\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left| 1 - \left(\frac{t^3}{B} \right)^{1/2} \right| \frac{dt}{t^{3/2}}. \qquad (2.40)$$

Соотношения (2.39), (2.40) обобщают на случай произвольного линейного сдвига полученные ранее формулы (2.14) для простого сдвига.

В общем случае обтекания сферической частицы произвольным линейным сдвиговым потоком (2.1), повторяя рассуждения, использованные ранее при анализе массообмена сферы с простым сдвиговым потоком, можно показать, что распределение концентрации во внешней области задается формулами (2.24), (2.36), а распределение средней концентрации во внутренней области и среднее число Шервуда определяются выражениями (2.32) и (2.33), где коэффициент α вычисляется по формуле (2.40). Отметим, что в случае диффузионного режима реакции на поверхности сферы ($k = \infty$, $q = 1$) двучленное разложение среднего числа Шервуда по малому параметру $\mathrm{Pe}^{1/2}$ (2.21), (2.40) было получено в [116], а четырехчленное разложение (2.33), (2.40) — в [112].

В общем случае при заданных значениях элементов матрицы коэффициентов сдвига G_{ij}, определяющих тип линейного сдвигового обтекания частицы, формулы (2.37), (2.38), (2.40) позволяют рассчитать величину α путем решения системы дифференциальных уравнений (2.37) и последующего вычисления интеграла (2.40), а затем по формуле (2.33) определить среднее число Шервуда.

Следует отметить, что величина параметра α не меняется при изменении знаков всех элементов матрицы сдвига на обратные, т. е. $\alpha\,(G_{ij}) = \alpha\,(-G_{ij})$.

Рассмотрим теперь конкретные примеры вычисления фигурирующего в формуле для среднего числа Шервуда (2.33) параметра α для некоторых типов сдвиговых течений, представляющих практический интерес. Прежде всего нетрудно убедиться, что в частном случае простого сдвига (2.1), (2.2) решение системы (2.37) имеет вид $B_{11} = t\left(1 + \frac{1}{3}t^2\right)$, $B_{22} = t$, $B_{33} = t$, $B_{12} = \frac{1}{2}t^2$, $B_{23} = B_{31} = 0$ и формула (2.40) для параметра α переходит в (2.14).

Деформационный сдвиговый поток. Другим, не менее важным случаем обтекания является деформационный (без вращения) линейный сдвиговый поток, характеризующийся симметричным тензором сдвига ($G_{ij} = G_{ji}$). В системе координат, связанной с главными осями тензора сдвига, имеем

$$G_{ii} = E_i, \quad G_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \ (i, j = 1, 2, 3),$$

где диагональные элементы E_i определяют интенсивности деформации растяжения-сжатия потока вдоль осей координат. В соответствии с условием несжимаемости жидкости в этом случае только два диагональных элемента из

трех будут независимы: $E_1 + E_2 + E_3 = 0$. Из уравнений (2.37) можно найти

$$B_{ii} = \frac{\exp(2E_i t) - 1}{2E_i}; \quad B_{ij} = 0, \quad i \neq j \ (i, j = 1, 2, 3),$$

$$B = B_{11}B_{22}B_{33} = \frac{\operatorname{sh}(E_1 t)\operatorname{sh}(E_2 t)\operatorname{sh}(E_3 t)}{E_1 E_2 E_3}. \tag{2.41}$$

Подставляя (2.41) в интеграл (2.40), для параметра α получаем следующее выражение:

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{1 - \left[\frac{E_1 E_2 E_3 t^3}{\operatorname{sh}(E_1 t)\operatorname{sh}(E_2 t)\operatorname{sh}(E_3 t)}\right]^{1/2}\right\} \frac{dt}{t^{3/2}} \tag{2.42}$$

$$(E_3 = -E_1 - E_2).$$

В общем случае произвольных E_1 и E_2 значение α находится путем численного интегрирования в (2.42).

Для плоского двумерного деформационного потока с растяжением-сжатием вида

$$E_1 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_3 = 0 \tag{2.43}$$

из формулы (2.42) можно получить

$$\alpha = 0{,}428. \tag{2.44}$$

Для осесимметричного потока с растяжением-сжатием, которое задается соотношениями

$$E_1 = \frac{1}{2}, \quad E_2 = \frac{1}{2}, \quad E_3 = -1, \tag{2.45}$$

распределение скоростей жидкости вне сферы в стоксовом приближении было получено Эйнштейном и определяется функцией тока (3.1) гл. 3. Используя выражения (2.42), (2.45), в этом случае для параметра α можно получить

$$\alpha = 0{,}399. \tag{2.46}$$

В работе [116] предложена следующая простая приближенная формула, позволяющая определять параметр α для произвольного деформационного течения, т. е. при $G_{ij} = E_{ij}$ ($E_{ij} = E_{ji}$):

$$\alpha = 0{,}36\,(E_{ij}E_{ij})^{1/4}. \tag{2.47}$$

Здесь по обоим индексам $i, j = 1, 2, 3$ ведется суммирование. В системе координат, связанной с главными осями тензора сдвига, в (2.47) следует положить $E_{ij}E_{ij} =$

$= E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$. Можно убедиться, что в случаях (2.43), (2.45) приближенная формула (2.47) приводит к точным соотношениям (2.44) и (2.46).

Плоский сдвиговый поток. Рассмотрим еще один важный случай плоского сдвига со следующими значениями матричных элементов тензора сдвига:

$$G_{12} = 1, \quad G_{21} = w, \quad G_{11} = G_{22} = 0 \quad (-1 \leqslant w \leqslant 1). \tag{2.48}$$

Для удобства интерпретации соотношение (2.48) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$G_{12} = E + \Omega, \quad G_{21} = E - \Omega \tag{2.49}$$
$$\left(E = \frac{1}{2}(1 + w), \quad \Omega = \frac{1}{2}(1 - w)\right),$$

где параметр E характеризует деформацию потока, а параметр Ω — вращение. Значению $w = -1$ соответствует вращение потока как твердого тела, а значению $w = 1$ — растяжение-сжатие. Для простого сдвига (2.2), рассмотренного ранее, $w = 0$.

В работе [116] показано, что зависимость величины α от w определяется интегралом

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{1 - 2t \left[\left(\frac{w+1}{w} \operatorname{sh}\left(\sqrt{wt}\right)\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(w-1)^2}{w} t^2\right]^{-1/2}\right\} \frac{dt}{t^{3/2}}. \tag{2.50}$$

Из формулы (2.50) видно, что в случае вращения ($w = -1$) имеем $\alpha = 0$, так что, как и следовало ожидать, среднее число Шервуда согласно формуле (2.33) будет в этом случае при любых числах Пекле совпадать с числом Шервуда для покоящейся сферы в неподвижной среде.

При слабых деформациях потока из формулы (2.50) имеем $w \to -1$, $\alpha = {}^1/_{15}(1 + w)^2 + o((1 + w)^2)$. Максимальное значение коэффициента $\alpha = 0{,}428$ достигается при значении $w = 1$, соответствующем деформационному течению.

При промежуточных значениях параметра w зависимость $\alpha = \alpha(w)$ показана сплошной линией на рис. 6.3; она получена численным интегрированием выражения (2.50), выполненным в [122]. Штриховая линия на рис. 6.3 соответствует деформационной части сдвигового течения

(2.48), которая характеризуется тем, что $E = {}^1/_2 (1 + w)$, $\Omega = 0$ в (2.49). Видно, что при вычислении среднего числа Шервуда нельзя пренебрегать вращательной частью сдвигового течения, которая при $-1 \leqslant w \leqslant 0$ приводит к существенному снижению интенсивности массообмена

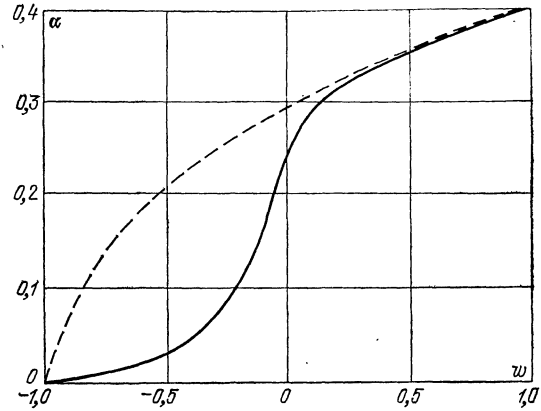


Рис. 6.3. Зависимость коэффициента α от параметра w в случае деформационно-вращательного течения (сплошная линия) и деформационного течения (штриховая линия).

частицы со средой. Например, при $w = -1/2$ пренебрежение вращательной составляющей потока дает более чем в семь раз увеличенное значение параметра α, что согласно формуле (2.33) для фиксированного значения числа Шервуда соответствует значениям числа Пекле, уменьшенным более чем в два с половиной раза.

§ 3. Поле температур, обусловленное тепловым эффектом реакции на поверхности сферы. Диффузионный режим реакции

В §§ 1, 2 исследовалось поле концентраций при протекании изотермической химической реакции на поверхности сферы, находящейся в потоках различного типа. Во многих случаях поверхностная химическая реакция сопровождается выделением или поглощением тепла. Ниже рассматривается простая модельная задача [37] о распределении температуры вне и внутри теплопроводящей сферической частицы, которое обусловлено тепловым эффектом поверхностной реакции, протекающей в диффузионном режиме.

Вдали от частицы поток предполагается однородным со скоростью, концентрацией и температурой равными соответственно U_∞, C_∞ и T_∞. Предполагается, что коэффициенты теплопроводности и диффузии имеют постоянные значения. Для описания распределения скорости в потоке, как и прежде, будут использоваться внутренние и внешние асимптотические разложения (1.6) и (1.7) для функции тока, полученные при малых числах Рейнольдса [95]. В рассматриваемом случае поле концентраций не зависит от распределения температуры и для чисел Шмидта, удовлетворяющих условию $\mathrm{Sc} \geqslant O(1)$, определяется формулами (1.48), (1.49) при $k \to \infty$ ($q = 1$).

В безразмерных переменных уравнения теплопроводности вне и внутри сферы можно записать соответственно в виде

$$\Delta T = \frac{\mathrm{Pe}_T}{r^2} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(r, \mu)}, \quad 1 < r < \infty \ (\mu = \cos\theta), \tag{3.1}$$

$$\Delta T_p = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{3.2}$$

$$T = \frac{T_\infty - T_*}{T_\infty}, \quad T_p = \frac{T_\infty - T_{p*}}{T_\infty}, \quad \mathrm{Pe}_T = \frac{aU_\infty}{\chi}.$$

Здесь T_* и T_{p*} — температура в потоке и внутри частицы, Pe_T — тепловое число Пекле, χ — коэффициент температуропроводности среды.

Граничные условия, выражающие однородность температуры вдали от частицы, непрерывность температуры и баланс тепла на ее поверхности, а также ограниченность температуры в центре частицы, имеют вид

$$r \to \infty, \quad T \to 0, \tag{3.3}$$

$$r = 1, \quad T = T_p, \tag{3.4}$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial r} - \delta \frac{\partial T_p}{\partial r} = h \frac{\partial z}{\partial r}, \tag{3.5}$$

$$r = 0, \quad |T_p| < \infty, \tag{3.6}$$

$$z = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \delta = \frac{\lambda_p}{\lambda}, \quad h = H \frac{DC_\infty}{\lambda T_\infty}.$$

Здесь λ_p и λ — коэффициенты теплопроводности частицы и потока, H — теплота реакции ($H < 0$ — реакция экзотермическая, $H > 0$ — эндотермическая). Отметим, что температура на поверхности частицы заранее не известна и определяется в ходе решения задачи.

В граничное условие (3.5) входит величина нормальной составляющей градиента концентрации на поверхности

частицы. Для определения этой величины воспользуемся результатами § 1, ограничившись случаем реакции, протекающей в диффузионном режиме. Полагая в формуле (1.49) $q = 1$, что соответствует бесконечно большим значениям безразмерной константы скорости реакции ($k = \infty$), можно получить

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r=1} = -1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mu\right)\mathrm{Le}\,\mathrm{Pe}_T - \frac{1}{2}\mathrm{Le}^2\,\mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T - \left\{\frac{1}{2}[Q + \ln \mathrm{Le}] + \frac{9}{16}\left(1 - \frac{1}{4\mathrm{Sc}}\right)\mu - \frac{1}{64}\left(\frac{33}{7} - \frac{13}{5\mathrm{Sc}}\right)\frac{3\mu^2 - 1}{2}\right\}\mathrm{Le}^2\,\mathrm{Pe}_T^2 - \frac{1}{4}\left[1 - \frac{3}{4}\left(1 + \frac{9}{20\mathrm{Sc}^2}\right)\mu\right]\mathrm{Le}^3\,\mathrm{Pe}_T^3 \ln \mathrm{Pe}_T + O(\mathrm{Pe}_T^3),$$

$$\mathrm{Le} = \chi D^{-1}, \quad \mathrm{Sc} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Le}, \quad (3.7)$$

$$Q = -\frac{173}{160} + \gamma + \frac{\mathrm{Sc}^2}{2} - \frac{\mathrm{Sc}}{4} - (\mathrm{Sc} + 1)^2\left(\frac{\mathrm{Sc}}{2} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Sc}}\right).$$

Здесь Le — число Льюиса, Pr — число Прандтля.

Сформулированная выше задача (3.1) — (3.7), (1.6), (1.7) близка к рассмотренной в § 1. Поэтому, ограничившись, как и прежде, случаем $\mathrm{Pe}_T \ll 1$, $\mathrm{Le} \sim O(1)$, используем для ее решения метод сращиваемых асимптотических разложений.

После температуры вне сферы находится в виде внешнего и внутреннего разложений, в которых порядок малости последовательных членов по числу Pe_T будет таким же, как и порядок членов по числу Pe в разложениях для распределения концентрации (1.48), (1.49). Решение внутри сферы, как показывают граничные условия на поверхности (3.4), (3.5), следует искать в виде асимптотического разложения с такими же коэффициентами $\varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe}_T)$, как и во внутреннем разложении вне сферы.

Уравнения для трех первых членов внешнего и внутреннего разложений температуры с точностью до переобозначений $z \to T$, $\rho \to \rho_T$ ($\rho_T = \mathrm{Pe}_T r$ — сжатая радиальная координата) совпадают с соответствующими уравнениями для концентрации, которые приведены в § 1. Из уравнения (3.2) следует, что все члены асимптотического разложения температуры внутри сферы удовлетворяют уравнению Лапласа, общее решение которого может быть представлено в виде ряда по полиномам Лежандра.

Учитывая сказанное и опуская промежуточные выкладки, в основном аналогичные приведенным в § 1, можно получить следующие выражения для распределения температуры в потоке вблизи частицы:

$$T^{(i)} = h\left\{\frac{1}{r} + \mathrm{Pe}_T\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Le}}{2r} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3\eta}{8r^2} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{8r^3}\right)\mu\right) + \mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Le}^2}{2r}\right) +$$
$$\left. + \mathrm{Pe}_T^2\left[\zeta - \frac{r}{4} + \sum_{m=0}^{2}\left[\varphi_{3,\,m}(r) + b_{3m}r^{-m-1}\right] P_m(\mu)\right]\right\},$$

$$\varphi_{3,\,0} = \frac{r}{6} - \frac{\ln r}{2} + \frac{3}{32}\left(\eta - \frac{2}{9}\right)\frac{1}{r^2} +$$
$$+ \frac{1}{48r^3} - \frac{\eta}{64r^4} + \frac{1}{240r^5},$$

$$\varphi_{3,\,1} = \left(\frac{\mathrm{Le}}{4} + \frac{3}{16\mathrm{Pr}}\right)\left(1 - \frac{3}{2r} - \frac{1}{4r^3}\right), \quad \eta = \frac{3 + \delta - \mathrm{Le}}{2 + \delta}, \tag{3.8}$$

$$\varphi_{3,\,2} = \frac{r}{12} - \frac{5}{24} + \frac{1}{8}\left(\eta + \frac{3}{2}\right)\frac{1}{r} - \frac{15}{64}\left(\eta + \frac{4}{9}\right)\frac{1}{r^2} +$$
$$+ \frac{\ln r}{16r^3} - \frac{\eta}{32r^4} + \frac{5}{672r^5} + \frac{3}{16\mathrm{Pr}}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2r} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4r^2} + \frac{\ln r}{5r^3} + \frac{1}{6r^4}\right),$$

$$b_{30} = -\frac{\eta + 3}{8} + \frac{\mathrm{Le}^2}{2}(Q + \ln \mathrm{Le}),$$

$$b_{31} = \frac{9\eta}{64\mathrm{Pr}} + \left(1 - \frac{3}{4}\eta\right)\left(1 + \frac{3}{4}\mathrm{Le}\right) + \frac{9\mathrm{Le}^2}{16}\,\frac{1 + \delta}{2 + \delta},$$

$$b_{32} = \frac{1}{3 + 2\delta}\left(\frac{87 + 46\delta}{672} + \frac{15 + 9\delta}{32}\eta - \frac{2 + \delta}{32\mathrm{Pr}}\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{2 + 3\mathrm{Le}}{320\mathrm{Pr}} - \frac{33\mathrm{Le}^2}{448}\right),$$

$$\zeta(\mathrm{Le}, \mathrm{Pr}) = -\frac{1}{4}\mathrm{Pr}^2 + \frac{1}{8}\mathrm{Pr} + \frac{25}{24} - \frac{\mathrm{Le}}{4} - \frac{\gamma}{2} +$$
$$+ \frac{1}{4}(\mathrm{Pr} + 1)^2(\mathrm{Pr} - 2)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right),$$

для распределения температуры внутри частицы

$$T_p = h\left\{1 + \mathrm{Pe}_T(\mathrm{Le} - 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\,\frac{r\mu}{2 + \delta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T(\mathrm{Le}^2 - 1) + \mathrm{Pe}_T^2 \sum_{m=0}^{2} A_{3m} r^m P_m(\mu)\right\}, \tag{3.9}$$

$$A_{30} = -\frac{49}{240} - \frac{3\eta}{64}\left[\zeta + \frac{\mathrm{Le}^2}{2}(Q + \ln \mathrm{Le})\right],$$

$$A_{31} = \frac{1 - \mathrm{Le}}{64\mathrm{Pr}(2+\delta)}(9 - 12\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Le} - 16\mathrm{Pr}),$$

$$A_{32} = \frac{1 - \mathrm{Le}}{64(3+2\delta)}\left[\frac{33}{7}(\mathrm{Le}+1) + \frac{3}{2+\delta} - \frac{13}{5\mathrm{Pr}}\right]$$

и для распределения теплового потока по поверхности частицы

$$j_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} = h\left\{1 + \mathrm{Pe}_T\left[\frac{\mathrm{Le}}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\,\frac{3+\delta-\mathrm{Le}}{2+\delta}\right)\mu\right] + \frac{\mathrm{Le}^2}{2}\mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T + \right.$$
$$+ \mathrm{Pe}_T^2\left\{\frac{\mathrm{Le}^2}{2}(Q + \ln \mathrm{Le}) - \frac{3}{4(2+\delta)}\left[\delta\left(\frac{\mathrm{Le}}{4} + \frac{3}{16\mathrm{Pr}} - 1\right) + \right.\right.$$
$$+ \frac{3\mathrm{Le}}{8\mathrm{Pr}} - \frac{3\mathrm{Le}^2}{2}\Big]\mu - \frac{3}{4(3+2\delta)}\left[\frac{29 + 11\delta - 7\mathrm{Le}}{56(2+\delta)}\delta - \right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{13\delta}{120\mathrm{Pr}} + \frac{\mathrm{Le}^2}{16}\left(\frac{33}{7} - \frac{13}{5\mathrm{Pr}\,\mathrm{Le}}\right)\right]\frac{3\mu^2 - 1}{2}\right\}\right\}. \quad (3.10)$$

В формулах (3.8) — (3.10) $\gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера, Pr, Sc, Pe_T, Le — числа Прандтля, Шмидта, Пекле и Льюиса.

Формулы (3.8) — (3.10) позволяют проследить влияние различных характеристик на поле температуры вне и внутри движущейся сферической частицы с поверхностной химической реакцией. Из (3.8), (3.9) следует, в частности, что движение приводит как к изменению средней температуры частицы, так и к появлению разности температур между точками на ее лобовой и кормовой поверхностях. Величина и знак этого эффекта определяются тепловым эффектом и величиной числа Льюиса по сравнению с единицей, обращаясь в нуль при $\mathrm{Le} = 1$.

Из формулы (3.10) видно, что локальный тепловой поток сложным образом зависит от числа Льюиса, числа Прандтля, теплового числа Пекле, отношения коэффициентов теплопроводности сферы и окружающей среды и безразмерной теплоты реакции.

Для иллюстрации результатов на рис. 6.4 показаны распределения локального теплового потока на поверхности сферы при различных числах Льюиса в предельных случаях большой ($\delta \to \infty$) и малой ($\delta \to 0$) теплопроводности сферы (соответствующие рис. 6.4 значения локального потока j_T вычислены при $\delta = \infty$ и $\delta = 0$ по формуле (3.8)). Значения Pr, h и диффузионного числа Пекле фик-

сированы: $\mathrm{Pr} = h = 1$, $\mathrm{Pe} = 1/2$; при этом $\mathrm{Pe}_T = \mathrm{Pe}/\mathrm{Le} = {}^1/_2\,\mathrm{Le}^{-1}$. Числа Льюиса в пределах от 0,5 до 2 соответствуют реальным значениям для многих газов.

Графики показывают, что при $\delta \to \infty$ в точке набегания потока на частицу ($\theta = \pi$) локальный тепловой поток

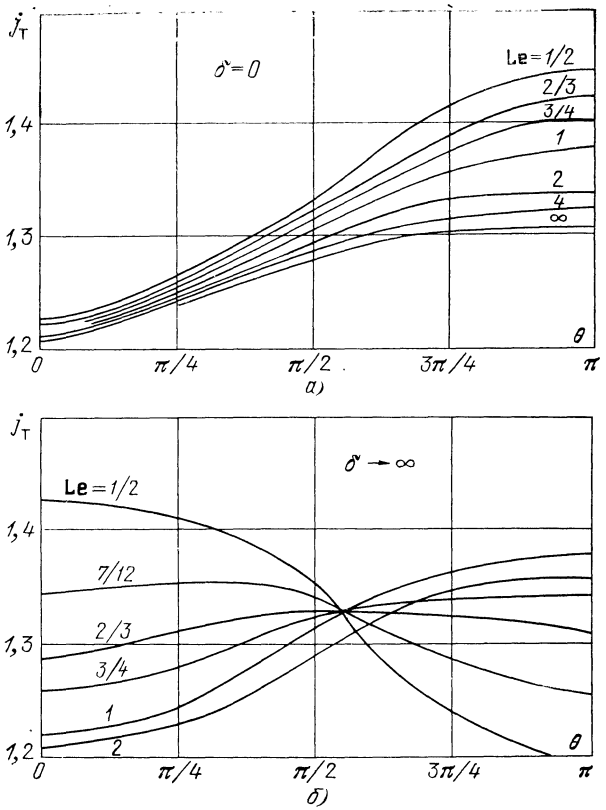


Рис. 6.4. Распределение локального теплового потока по поверхности сферической частицы в предельных случаях большой ($\delta \to \infty$) и малой ($\delta \to 0$) теплопроводности сферы.

с ростом числа Льюиса сначала растет, потом, когда число Льюиса становится больше единицы, начинает уменьшаться.

В лобовой части частиц существует такое значение угла $\theta \approx 103°$, при котором j_T практически не зависит от числа Льюиса для всех $\mathrm{Le} \leqslant 1$. В кормовой точке ($\theta = 0$) плотность теплового потока с ростом Le уменьшается.

В случае $\delta = 0$ локальный тепловой поток на частицу с ростом Le уменьшается; кроме того, для каждого значения Le он уменьшается от своего наибольшего значения в точке набегания потока ($\theta = \pi$) до наименьшего в кормовой точке ($\theta = 0$).

Несмотря на существенное качественное различие поведения распределения температуры и локального теплового потока при разных значениях отношения коэффициентов теплопроводности частицы и окружающей ее среды, среднее число Нуссельта не зависит от этого отношения и определяется формулой

$$\mathrm{Nu} = h\,\mathrm{Sh} \quad \left(\mathrm{Nu} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} d\mu\right), \qquad (3.11)$$

где среднее число Шервуда задается выражением (1.51) при $q = 1$.

Формула (3.11) справедлива при любых числах Пекле и произвольной кинетике гетерогенной химической реакции и является следствием баланса интегральных потоков тепловой энергии и энтальпии на поверхности частицы.

§ 4. Тепломассообмен сферической частицы с потоком. Неизотермическая поверхностная химическая реакция

Обобщая результаты предыдущих разделов, рассмотрим перенос тепла и компонентов к теплопроводящей реагирующей сферической частице в потоке несжимаемого газа при протекании на ее поверхности неизотермической химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от температуры и концентраций реагирующих компонентов. По-прежнему предполагается, что концентрации реагентов достаточно малы, так что реакция не влияет на параметры потока и частицы; не учитывается также влияние термо- и бародиффузии и т. п. Ограничимся здесь стоксовым приближением для поля скоростей.

Безразмерные уравнения диффузии и теплопроводности, а также граничные условия, выражающие постоянство температуры и концентраций вдали от частицы, непрерывность температуры, наличие химической реакции и баланс вещества и тепла на ее поверхности, а также ограниченность температуры в центре частицы, имеют

вид [123]

$$\Delta z_m = \mathrm{Pe}_m (v\cdot\nabla) z_m \quad (1 < r < \infty),\ m = 1, \ldots, M, \tag{4.1}$$

$$\Delta T = \mathrm{Pe}_T (v\cdot\nabla) T \qquad (1 < r < \infty), \tag{4.2}$$

$$\Delta T_p = 0 \qquad (0 \leqslant r < 1), \tag{4.3}$$

$$r \to \infty, \quad z_m \to 0, \ T \to 0, \tag{4.4}$$

$$r = 1, \quad T = T_p, \tag{4.5}$$

$$r = 1, \quad -\frac{\partial z_m}{\partial r} = F_m (z_1, \ldots, z_M, T), \tag{4.6}$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial r} - \delta \frac{\partial T_p}{\partial r} = \sum_{m=1}^{M} h_m \frac{\partial z_m}{\partial r}, \tag{4.7}$$

$$r = 0, \ | T_p | < \infty, \tag{4.8}$$

$$z_m = \frac{C_{m\infty} - C_m}{C_{m\infty}}, \quad T = \frac{T_\infty - T_*}{T_\infty}, \quad T_p = \frac{T_\infty - T_{p*}}{T_\infty},$$

$$\mathrm{Pe}_m = \frac{aU}{D_m}, \quad \mathrm{Pe}_T = \frac{aU}{\chi}, \quad \delta = \frac{\lambda_p}{\lambda}, \quad h_m = H_m \frac{D_m C_{m\infty}}{\lambda T_\infty},$$

$$F_m (z_1, \ldots, z_M, T) = \frac{a}{D_m C_{m\infty}} F_{sm*} (C_1, \ldots, C_M, T).$$

Здесь C_m и $C_{m\infty}$ — концентрации участвующих в реакции веществ в потоке и на бесконечности, T_* и T_{p*} — температура потока и частицы, T_∞ — невозмущенная температура на бесконечности, Pe_m и Pe_T — диффузионные и тепловое числа Пекле, U — характерная скорость потока, D_m — коэффициент диффузии m-компонента; величины H_m определяются теплотой каждой реакции и стехиометрическими коэффициентами для m-компонента; F_{sm*} — суммарная скорость поверхностной химической реакции по m-компоненту ($F_{sm*} < 0$, если реагент m потребляется в ходе химической реакции, и $F_{sm*} > 0$, если он образуется в ходе реакции), M — число реагентов, участвующих в реакции.

При сохранении предположения о малости и одинаковом порядке величины всех чисел Пекле:

$$\mathrm{Pe} < O(1), \quad \mathrm{Pe}_n \mathrm{Pe}^{-1} = O(1) \ (n = 1, \ldots, M, T)$$

процедура получения приближенного асимптотического решения задачи (4.1) — (4.8) в основных чертах повторяет процедуру решения, подробно изложенную в §§ 1, 2. После разбиения всей области течения на внешнюю и внутреннюю, которые существенным образом зависят от типа

обтекания, и введения во внешней области соответствующих сжатых переменных $\rho_n = \mathrm{Pe}_n^{\nu} r$ ($n = 1, \ldots, M, T$) (значение $\nu = 1$ соответствует поступательному потоку, а $\nu = 1/2$ — сдвиговому) концентрации z_m и температуры T, T_p представляются в виде внешних и внутренних асимптотических разложений, аналогично тому, как это делалось раньше.

Для членов разложений одинакового порядка малости по числу Пекле уравнения (4.1), (4.2) во внутренней и внешней областях сведутся к более простым. При этом, поскольку взаимосвязь между концентрациями и температурой проявляется лишь в граничном условии на поверхности реагирующей частицы, вид этих уравнений и их общих решений будет совпадать с видом уравнений и решений, полученных в §§ 1, 2 в более простых задачах. После применения стандартного условия сращивания внешних и внутренних разложений число произвольных констант в решениях уменьшится. Оставшиеся неопределенными константы должны быть найдены из граничных условий (4.5) — (4.7), устанавливающих в общем случае нелинейные зависимости между концентрациями и температурой на поверхности частицы. Возможность аналитического определения констант из нелинейных граничных условий (4.6) связана с тем, что поправки к главному члену в асимптотических рядах являются малыми и, следовательно, граничные условия (4.6) могут быть линеаризованы. При этом задача об отыскании остающихся неизвестными произвольных констант сведется к решению трансцендентного (или алгебраического) уравнения для главного члена разложения, соответствующего величине концентрации и температуры на поверхности покоящейся частицы, и решению линейных уравнений для констант в последующих членах, учитывающих влияние обтекания. Очевидно, что, как и в рассмотренных ранее более простых задачах, используемый метод позволяет получить лишь несколько первых членов в представляющих решение разложениях, что связано, как правило, с нарастающими трудностями при переходе к отысканию членов ряда более высокого порядка малости. Не приводя уравнений и общего вида решений для последовательных членов асимптотических разложений концентраций и температуры в потоке, ограничимся получением соотношений для приближенного определения наиболее важных с практической точки зрения величин — интегральных характеристик массо- и теплообмена — чисел Шервуда для

каждого реагента и числа Нуссельта. Нахождение этих характеристик, так же как и в § 2, основывается на использовании усредненных величин $\langle z_m \rangle$ и $\langle T \rangle$.

Рассмотрим отдельно случаи поступательного и сдвигового потоков.

Поступательный поток [80, 164]. Распределение скорости v в задаче (4.1) — (4.8) во внутренней ($1 \leqslant r \leqslant O(\mathsf{Pe}^{-1})$) и внешней ($O(\mathsf{Pe}^{-1}) \leqslant r$) областях определяется формулами (1.6) и (1.7) соответственно. Воспользовавшись результатами § 1, можно убедиться, что для осредненных по поверхности сферы постоянного радиуса значений концентрации $\langle z_m \rangle$ и температуры $\langle T \rangle$ оказывается возможным получить удовлетворяющее условию сращивания трехчленное разложение во внутренней области:

$$\langle z_m \rangle = \frac{b_{m0}}{r} + \mathsf{Pe}_m \left(\frac{b_{m1}}{r} - \frac{b_{m0}}{2} \right) + \\ + \mathsf{Pe}_m^2 \ln \mathsf{Pe}_m \left(\frac{b_{m2}}{r} - \frac{b_{m0}}{2} \right) + O(\mathsf{Pe}_m^2), \\ \langle T \rangle = \frac{b_{T0}}{r} + \mathsf{Pe}_T \left(\frac{b_{T1}}{r} - \frac{b_{T0}}{2} \right) + \\ + \mathsf{Pe}_T^2 \ln \mathsf{Pe}_T \left(\frac{b_{T2}}{r} - \frac{b_{T0}}{2} \right) + O(\mathsf{Pe}_T^2) \\ (m = 1, 2, \ldots, M). \tag{4.9}$$

Здесь b_{ml}, b_{Tl} ($m = 1, 2, \ldots, M$; $l = 0, 1, 2$) — произвольные константы, которые должны быть найдены из граничных условий на поверхности частицы.

Прежде чем перейти к определению этих констант, заметим, что в соответствии с видом решений для концентрации и температуры (4.9) числа Шервуда Sh_m и Нуссельта Nu представляются в виде

$$\mathsf{Sh}_m = \mathsf{Sh}_{m0} + \mathsf{Pe}_m \mathsf{Sh}_{m1} + \mathsf{Pe}_m^2 \ln \mathsf{Pe}_m \, \mathsf{Sh}_{m2}, \\ \mathsf{Nu} = \mathsf{Nu}_0 + \mathsf{Pe}_T \mathsf{Nu}_1 + \mathsf{Pe}_T^2 \ln \mathsf{Pe}_T \, \mathsf{Nu}_2. \tag{4.10}$$

Используя (4.9), (4.10) и определения чисел Шервуда и Нуссельта, найдем

$$b_{m0} = \mathsf{Sh}_{m0}, \quad b_{m1} = \mathsf{Sh}_{m1}, \quad b_{m2} = \mathsf{Sh}_{m2}, \\ b_{T0} = \mathsf{Nu}_0, \quad b_{T1} = \mathsf{Nu}_1, \quad b_{T2} = \mathsf{Nu}_2. \tag{4.11}$$

Соотношения (4.11) показывают, что определение констант b_{ml}, b_{Tl} ($m = 1, 2, \ldots, M$; $l = 0, 1, 2$) из граничных условий полностью эквивалентно определению вычислен-

ных с различной точностью асимптотических значений чисел Шервуда и Нуссельта. С учетом равенств (4.11) выражения для $\langle z_m \rangle$ и $\langle T \rangle$ могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \langle z_m \rangle &= \mathrm{Sh}_m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_m - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_m^2 \ln \mathrm{Pe}_m \right), \\ \langle T \rangle &= \mathrm{Nu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_T - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T \right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Здесь следует помнить, что выражения (4.12) содержат дополнительные по отношению к (4.9) члены, однако порядок этих членов выше $\mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}$, так что с принятой точностью формулы (4.12) и (4.9) совпадают.

При осреднении граничных условий на поверхности частицы (4.5) — (4.7) учитывается, что: 1) для сферической частицы в случае поступательного потока первый член внутренних разложений концентраций и температуры зависит только от радиальной координаты r (в случае сдвигового потока — два первых члена); 2) для любых функций W, зависящих только от r, справедливо равенство $\langle W(r) \rangle = W(r)$; 3) оператор осреднения (2.26) перестановочен с оператором дифференцирования по координате r; 4) для любой функции f справедливо равенство

$$\langle f(z_1^{(i)}, \ldots, z_M^{(i)}, T^{(i)}) \rangle = f(\langle z_1^{(i)} \rangle, \ldots, \langle z_M^{(i)} \rangle, \langle T^{(i)} \rangle) + O(\mathrm{Pe}^2),$$

которое доказывается непосредственной проверкой путем разложения его обеих частей в ряды по малым числам Пекле с учетом структуры разложений функций $z_m^{(i)}$, $T^{(i)}$ во внутренней области.

С точностью до членов порядка Pe^2 осредненные по поверхности частицы граничные условия (4.6), (4.7) могут быть записаны в виде ($\langle \ \rangle_s = \langle \ \rangle_{r=1}$)

$$\mathrm{Sh}_m = F_m(\langle z_1 \rangle_s, \ldots, \langle z_M \rangle_s, \langle T \rangle_s), \quad \mathrm{Nu} = \sum_{m=1}^{M} h_m \mathrm{Sh}_m. \tag{4.13}$$

Принимая во внимание (4.12), вместо (4.13) можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_m = F_m \Big\{ &\left(1 - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_1 - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_1^2 \ln \mathrm{Pe}_1\right) \mathrm{Sh}_1, \ldots \\ &\ldots, \left(1 - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_M - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_M^2 \ln \mathrm{Pe}_M\right) \mathrm{Sh}_M, \\ &\left(1 - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_T - \frac{1}{2} \mathrm{Pe}_T^2 \ln \mathrm{Pe}_T\right) \mathrm{Nu} \Big\}, \quad \mathrm{Nu} = \sum_{m=1}^{M} h_m \mathrm{Sh}_m, \end{aligned} \tag{4.14}$$

которая при известных зависимостях скоростей поверхностных реакций от концентраций и температуры позволяет в случае поступательного обтекания частицы рассчитать асимптотические значения чисел Шервуда и Нуссельта с точностью до членов порядка Pe^2.

Сдвиговый поток [81, 164]. В этом случае разбиение потока на внутреннюю и внешнюю области определяется неравенствами $1 \leqslant r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2})$ и $O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant r$. Используем решение задачи о поле концентрации точечного источника, находящегося в произвольном линейном сдвиговом потоке (2.36). По аналогии с результатами § 2 во внутренней области можно получить удовлетворяющие условию сращивания четырехчленные выражения для осредненных по поверхности сферы постоянного радиуса значений концентрации и температуры $\langle z_m \rangle$, $\langle T \rangle$:

$$\langle z_m \rangle = \frac{b_{m0}}{r} + \mathrm{Pe}_m^{1/2}\left(\frac{b_{m1}}{r} - b_{m0}\alpha\right) + \mathrm{Pe}_m\left(\frac{b_{m2}}{r} - b_{m1}\alpha\right) + \mathrm{Pe}_m^{3/2}\left(\frac{b_{m3}}{r} - b_{m2}\alpha\right) + O(\mathrm{Pe}_m^2), \tag{4.15}$$

$$\langle T \rangle = \frac{b_{T0}}{r} + \mathrm{Pe}_T^{1/2}\left(\frac{b_{T1}}{r} - b_{T0}\alpha\right) + \mathrm{Pe}_T\left(\frac{b_{T2}}{r} - b_{T1}\alpha\right) + \mathrm{Pe}_T^{3/2}\left(\frac{b_{T3}}{r} - b_{T2}\alpha\right) + O(\mathrm{Pe}_T^2).$$

Константы b_{ml}, b_{Tl} ($m = 1, 2, \ldots, M$; $l = 0, 1, 2, 3$) должны быть найдены из граничных условий на поверхности частицы; значение константы α определяется видом сдвигового потока (см. § 2).

Установив, как и в случае поступательного потока, соответствие между константами b_{ml}, b_{Tl} и вычисленными с различной точностью значениями чисел Шервуда и Нуссельта, а также представив граничные условия (4.6), (4.7) с точностью до членов порядка Pe_n^2 ($n = 1, 2, \ldots, M, T$) в форме (4.13), можно записать уравнения для определения асимптотических значений чисел Шервуда и Нуссельта в виде

$$\mathrm{Sh}_m = F_m\{(1 - \alpha\,\mathrm{Pe}_1^{1/2})\,\mathrm{Sh}_1, \ldots, (1 - \alpha\mathrm{Pe}_M^{1/2})\,\mathrm{Sh}_M, (1 - \alpha\,\mathrm{Pe}_T^{1/2})\,\mathrm{Nu}\}, \quad \mathrm{Nu} = \sum_{m=1}^{M} h_m\,\mathrm{Sh}_m. \tag{4.16}$$

Уравнения (4.14), (4.16) для приближенного, с точностью до членов порядка Pe^2, расчета чисел Шервуда

(Нуссельта) для реагирующей частицы, находящейся в поступательном или сдвиговом потоке, могут быть представлены в единой компактной форме, если заметить, что (как следует из результатов §§ 1, 2) число Шервуда для частицы с поверхностной химической реакцией, протекающей в диффузионном режиме (бесконечная скорость химической реакции, $k \to \infty$), равно в поступательном потоке

$$\mathrm{Sh}_{m,\infty} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_m + \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_m^2 \ln \mathrm{Pe}_m + O(\mathrm{Pe}_m^2) = \\ = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_m - \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_m^2 \ln \mathrm{Pe}_m} + O(\mathrm{Pe}_m^2), \qquad (4.17)$$

а в сдвиговом потоке

$$\mathrm{Sh}_{m,\infty} = 1 + \alpha \mathrm{Pe}_m^{1/2} + \alpha^2 \mathrm{Pe}_m + \alpha^3 \mathrm{Pe}_m^{3/2} + O(\mathrm{Pe}_m^2) = \\ = \frac{1}{1 - \alpha \mathrm{Pe}_m^{1/2}} + O(\mathrm{Pe}_m^2) \qquad (4.18)$$

(здесь $m = 1, 2, \ldots, M, T$).

Тогда вместо (4.14), (4.16) можно записать [80, 81, 164]:

$$\mathrm{Sh}_m = F_m\left(\frac{\mathrm{Sh}_1}{\mathrm{Sh}_{1,\infty}}, \ldots, \frac{\mathrm{Sh}_M}{\mathrm{Sh}_{M,\infty}}, \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Sh}_{T,\infty}}\right), \qquad (4.19)$$

$$\mathrm{Nu} = \sum_{m=1}^{M} h_m \mathrm{Sh}_m. \qquad (4.20)$$

Здесь величина $\mathrm{Sh}_{T,\infty}$ формально определяется формулами (4.17), (4.18) при $m = T$ и соответствует числу Нуссельта для частицы с постоянной температурой поверхности.

Таким образом, из анализа исходной системы уравнений в частных производных и граничных условий (4.1) — (4.8) установлено, что в случае заданной кинетики поверхностной химической реакции при обтекании сферической частицы поступательным или сдвиговым потоком при малых числах Пекле для приближенного определения интегральных притоков реагента и тепла к поверхности частицы с точностью до $O(\mathrm{Pe}^2)$ достаточно решить систему алгебраических (или трансцендентных) уравнений (4.19), (4.20).

Из (4.19), (4.20) видно, в частности, что отношение коэффициентов теплопроводности частицы и окружающей среды не влияет на интегральные характеристики процесса. Очевидно, что изменение величины этого отношения

(параметра δ в граничном условии (4.7)) может приводить лишь к перераспределению локальных теплового и диффузионных потоков по поверхности сферы при неизменности соответствующих полных потоков. Уравнения (4.19), (4.20) являются обобщением уравнений для расчета интенсивности тепломассообмена неподвижной частицы и переходят в них при $\mathrm{Pe} = 0$. Как и в случае массотеплообмена покоящейся реагирующей частицы, решение системы (4.19), (4.20) в общем случае может быть неединственным. Число решений соответствует числу стационарных режимов тепломассообмена реагирующей частицы с потоком. Среди этих режимов могут оказаться как устойчивые, так и неустойчивые.

Например, в случае неизотермической поверхностной химической реакции первого порядка, скорость которой зависит от температуры по закону Аррениуса $F_{s*}(C, T_*) = K_s C \exp[-E/(RT_*)]$ система уравнений (4.19), (4.20) примет вид

$$\mathrm{Sh} = \frac{aK}{D}\left(1 - \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_\infty}\right)\exp\left(-\beta\frac{1}{1 - \mathrm{Nu}/\mathrm{Sh}_\infty}\right), \quad (4.21)$$

$$\mathrm{Nu} = h\,\mathrm{Sh}; \quad \beta = \frac{E}{RT_\infty}, \quad k = \frac{aK_s}{D},$$

где E — энергия активации, R — газовая постоянная. При различных значениях параметров β, k уравнения (4.21) для Sh и Nu могут иметь одно, два или три решения.

В случае изотермической ($h = 0$) поверхностной химической реакции, скорость которой определяется функцией $F(z)$, для числа Шервуда из (4.19) получаем уравнение

$$\mathrm{Sh} = F\left(\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_\infty}\right). \quad (4.22)$$

Для сферической частицы в поступательном потоке, разлагая функцию F в ряд в окрестности значения $\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0$, где Sh_0 — число Шервуда для частицы в покоящейся среде, определяемое как корень уравнения $\mathrm{Sh}_0 = F(\mathrm{Sh}_0)$, из (4.22) найдем [44]

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}_0\,\frac{(\partial F/\partial z)_{z=\mathrm{Sh}_0}}{1 + (\partial F/\partial z)_{z=\mathrm{Sh}_0}}(\mathrm{Pe} + \mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}). \quad (4.23)$$

Аналогичным образом может быть установлено выражение для числа Шервуда реагирующей частицы, находящейся в сдвиговом потоке [79]. Отметим, что при практических

расчетах удобно находить число Шервуда Sh путем непосредственного аналитического или численного решения уравнения (4.22), не прибегая к разложению в ряд правой части этого уравнения.

В случае поверхностной реакции порядка $\varkappa$ уравнение (4.22) принимает вид

$$\mathrm{Sh} = k\left(1 - \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_\infty}\right)^{\varkappa}, \qquad k = \frac{aK_s C_\infty^{\varkappa-1}}{D}. \tag{4.24}$$

При $\varkappa = 1/2,\ 1,\ 2$ из (4.24) можно получить соответственно

$$\mathrm{Sh} = k\left[\left(\frac{k^2}{4\,\mathrm{Sh}_\infty^2} + 1\right)^{1/2} - \frac{k}{2\,\mathrm{Sh}_\infty}\right], \quad \varkappa = \frac{1}{2}. \tag{4.25}$$

$$\mathrm{Sh} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\mathrm{Sh}_\infty}\right)^{-1}, \quad \varkappa = 1. \tag{4.26}$$

$$\mathrm{Sh} = \frac{\mathrm{Sh}_\infty^2}{4k}\left[\left(\frac{4k}{\mathrm{Sh}_\infty} + 1\right)^{1/2} - 1\right]^2, \quad \varkappa = 2. \tag{4.27}$$

На рис. 6.5 показана зависимость нормированного среднего числа Шервуда от отношения безразмерной константы скорости химической реакции k к параметру Sh_∞ при

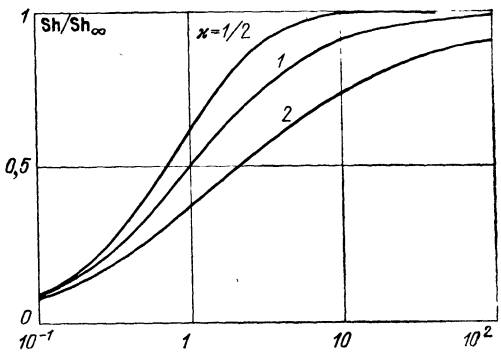


Рис. 6.5. Зависимость нормированного среднего числа Шервуда от отношения k/Sh_∞ безразмерной константы скорости химической реакции к величине среднего числа Шервуда для диффузионного режима при степенной зависимости скорости химической реакции от концентрации.

разных значениях показателя $\varkappa$. Видно, что среднее число Шервуда растет при увеличении безразмерной константы скорости реакции и убывает с ростом порядка реакции. В связи с этим примером отметим, что для гетеро-

генной химической реакции углерода с кислородом, протекающей на поверхности частицы угля, имеем: $1/3 \leqslant \varkappa \leqslant 1/2$ [104, 148].

Отметим, что среднее число Шервуда в случае поступательного потока с точностью до членов порядка $\mathrm{Pe}^3 \ln \mathrm{Pe}$ включительно было вычислено в работе [96].

§ 5. Массоперенос к поверхности реагирующей частицы произвольной формы

Рассмотрим установившуюся диффузию реагента в потоке вязкой несжимаемой жидкости, обтекающем твердую частицу или жидкую каплю произвольной формы при протекании на ее поверхности химической реакции первого порядка. Задача о расчете интенсивности массообмена частицы с потоком, как и прежде, сводится к решению уравнения конвективной диффузии с граничными условиями на бесконечности и на поверхности частицы:

$$\Delta z = \mathrm{Pe}\,(v \cdot \nabla) z; \quad z = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU}{D}; \qquad (5.1)$$

$$r \to \infty, \; z \to 0;$$

$$r = r_s(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial z}{\partial n} = k(z - 1).$$

Здесь a — характерный размер частицы, $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности частицы S, $r = r_s(\theta, \varphi)$ — уравнение поверхности частицы в сферической системе координат r, θ, φ; $k = aK_s/D$. Остальные обозначения прежние.

В случае частицы несимметричной формы дифференциальные операторы Лапласа и Гамильтона в задаче (5.1), а также распределения скорости v и концентрации z зависят от трех пространственных координат. Переход от сферы к частице другой формы приводит к значительному усложнению задачи, связанному в первую очередь с более сложным видом поля течения. Для некоторых частных случаев формы частиц (например, эллипсоидальных) могут быть определены в замкнутом аналитическом виде как поле обтекания (в стоксовом приближении), так и выражение для распределения концентрации, позволяющие найти локальный и интегральный потоки реагента на поверхность частицы. Соответствующий анализ будет отличаться от проведенного в § 1 большей громоздкостью выкладок из-за необходимости выбора более сложных

специальных ортогональных систем координат, связанных с поверхностью частицы. В приложениях при расчете массообмена часто нет необходимости в детальном исследовании распределения концентрации в окрестности частицы и локального потока реагента на ее поверхность. В большинстве случаев достаточно знания интегральной интенсивности диффузионного потока реагента на поверхность частицы. Анализ показывает, что для медленно движущихся частиц произвольной формы в задаче (5.1) оказывается возможным получить приближенную формулу для среднего числа Шервуда Sh, которое выражается через число Пекле Pe и вспомогательное число Шервуда Sh_0, соответствующее массопереносу к неподвижной частице [36, 112, 119].

Возможность получения этой формулы основывается на том, что в случае поверхностной химической реакции величина суммарного притока реагента к частице сохраняет постоянное значение на любой поверхности, охватывающей частицу, например, на сфере большого радиуса. Поэтому для приближенного расчета интегрального массообмена реагирующей частицы произвольной формы с окружающей средой можно воспользоваться знанием асимптотического поведения распределения концентрации на больших расстояниях от частицы, которое в случае медленного движения частицы может быть выражено через более простую интегральную характеристику реагирующей частицы — Sh_0.

Поступательный поток. В случае стоксова обтекания капли или твердой частицы произвольной формы поступательным потоком распределение скоростей вдали от нее определяется выражением [120]

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \frac{3}{4r}\left[\boldsymbol{f} + \frac{1}{r^2}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\right] + O(r^{-2}), \qquad \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{f}_*}{6\pi\mu_* a U_\infty}. \tag{5.2}$$

Здесь $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор, направленный вдоль скорости потока на бесконечности, $\boldsymbol{f}$ — безразмерный вектор, равный отношению силы сопротивления $\boldsymbol{f}_*$ данной частицы к величине стоксовой силы сопротивления твердой сферы радиуса a, μ_* — динамический коэффициент вязкости жидкости.

На поверхности твердой или жидкой частицы нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю (условие непротекания)

$$r = r_s, \quad (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) = 0, \tag{5.3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности частицы; здесь и далее для сокращения записи аргументы 0 и φ у функции $r_s \equiv \equiv r_s(\theta, \varphi)$ опускаются.

Скорость потока удовлетворяет также условию несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.4}$$

Цель этого параграфа заключается в вычислении среднего числа Шервуда

$$\mathrm{Sh} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla z \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{5.5}$$

Здесь и далее для сокращения записи круглые скобки у скалярного произведения векторов (в подынтегральных выражениях) опускаются.

Ниже будет показано, что сведений о поле скоростей (5.2) — (5.4) достаточно, чтобы для задачи (5.1) — (5.4) выразить с определенной точностью число Шервуда Sh через число Пекле и число Шервуда Sh_0, соответствующее массообмену реагирующей частицы с неподвижной средой.

Приближенное асимптотическое решение задачи (5.1)—(5.4) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Пекле во внутренней $\Omega^{(i)} = \{r_s \leqslant \leqslant r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1})\}$ и внешней $\Omega^{(e)} = \{O(\mathrm{Pe}^{-1}) \leqslant r\}$ областях течения.

Внутреннее и внешнее разложения соответственно имеют вид

$$z^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(i)}(r, \theta, \varphi), \tag{5.6}$$

$$z^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})\, z_n^{(e)}(\rho, \theta, \varphi), \qquad \rho = \mathrm{Pe}\, r; \tag{5.7}$$

$$\lim_{\mathrm{Pe}\to 0} \frac{\varepsilon_{n+1}^{(i)}}{\varepsilon_n^{(i)}} = \lim_{\mathrm{Pe}\to 0} \frac{\varepsilon_{n+1}^{(e)}}{\varepsilon_n^{(e)}} = 0.$$

Члены внутреннего разложения должны последовательно определяться, как и прежде, из уравнения (5.1) с граничным условием на поверхности частицы. Уравнение и граничное условие на бесконечности для членов внешнего разложения представляются в форме

$$\Delta_\rho z^{(e)} = (\boldsymbol{v}^{(e)} \cdot \nabla_\rho) z^{(e)}; \quad \rho \to \infty, \quad z^{(e)} \to 0; \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{v}^{(e)} = \mathrm{Pe}^{-1} \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}\mathrm{Pe}^{-1}),$$

где Δ_ρ и ∇_ρ — операторы Лапласа и Гамильтона, записанные с использованием переменной ρ.

Возникающие при решении задачи неизвестные постоянные определяются последовательным сращиванием разложений (5.6) и (5.7).

Нулевые и первые члены асимптотических разложений. Найдем нулевое приближение для внутреннего разложения функции z. Из (5.1) и (5.6) при $\mathrm{Pe} = 0$ для определения $z_0^{(i)}$ получаем следующее уравнение и граничное условие:

$$\Delta z_0^{(i)} = 0; \quad r = r_s, \quad \frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial n} = k\,(z_0^{(i)} - 1) \quad (\varepsilon_0^{(i)} = 1). \qquad (5.9)$$

Кроме того, функция $z_0^{(i)}$ должна удовлетворять условию сращивания с нулевым членом внешнего разложения, равным $z_0^{(e)} = 0$, т. е. обращаться в нуль на бесконечности.

Следует подчеркнуть, что здесь и далее при решении задач для функций $z_n^{(i)}$, $z_n^{(e)}$ находятся не точные решения, строго удовлетворяющие всем условиям соответствующей задачи, а приближенные асимптотические решения, не дающие детального описания распределения концентрации реагента около частицы, но достаточные для расчета интегрального диффузионного притока реагента к частице.

Как следует из теории потенциала (см., например, [103]), выбирая надлежащим образом точку отсчета радиуса-вектора (начало координат), выражение для $z_0^{(i)}$ (как для гармонической функции, стремящейся к нулю при $r \to \infty$) можно записать в виде, не содержащем членов $O\,(r^{-2})$:

$$z_0^{(i)} = Qr^{-1} + O\,(r^{-3}), \qquad (5.10)$$

где Q — постоянная, которая будет определена позднее. При этом в фактическом определении соответствующей точки отсчета радиуса-вектора нет необходимости, важно лишь, что такая точка существует.

Решение (5.10) имеет простой физический смысл: оно описывает распределение концентрации на больших расстояниях от покоящейся в неподвижной среде частицы, на поверхности которой протекает химическая реакция (сток реагента). При этом постоянная Q равна числу Шервуда для покоящейся частицы в неподвижной среде:

$$Q = \mathrm{Sh}_0. \qquad (5.11)$$

Действительно, учитывая отсутствие источников концентрации в объеме, ограниченном поверхностью частицы S и поверхностью содержащей частицу сферы Σ_R (радиус которой R может быть сделан сколь угодно большим), и используя соотношение $\nabla\cdot(\nabla z_0^{(i)}) = 0$, получим, что при определении числа Шервуда интегрирование в (5.5) можно проводить по поверхности Σ_R. Подстановка в (5.5) выражения (5.10) после предельного перехода при $R \to \infty$ приводит к равенству (5.11).

Из вида выражения для $z_0^{(i)}$, записанного во внешних переменных, следует, что $\varepsilon_1^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$, поэтому первое приближение для внешнего разложения следует искать в форме

$$\bar{z}_1^{(e)} = \mathrm{Pe}\, z_1^{(e)}. \tag{5.12}$$

Здесь, как и прежде, черта сверху использована для обозначения частичных сумм (5.6), (5.7), представляющих приближенное решение задачи.

Подставляя (5.12) в (5.8) и удерживая члены порядка Pe, для $z_1^{(e)}$ имеем следующую задачу:

$$\Delta_\rho z_1^{(e)} = (\boldsymbol{i}\cdot\nabla_\rho) z_1^{(e)}; \quad \rho \to \infty, \ z_1^{(e)} \to 0. \tag{5.13}$$

Решение задачи (5.13), которое сращивается с (5.10), имеет вид

$$z_1^{(e)} = \frac{\mathrm{Sh}_0}{\rho} \exp\left[-\frac{1}{2}\rho(1-\mu)\right], \quad \mu = \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i})}{r} = \cos\theta. \tag{5.14}$$

Из (5.14), переходя к внутренней переменной, получим, что $\varepsilon_1^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$, поэтому первое приближение для внутреннего разложения будем искать в виде

$$\bar{z}_1^{(i)} = z_0^{(i)} + \mathrm{Pe}\, z_1^{(i)}. \tag{5.15}$$

Из (5.1) и (5.6), удерживая члены порядка Pe, получаем уравнение и граничное условие для первого члена внутреннего разложения:

$$\Delta z_1^{(i)} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, z_0^{(i)}; \quad r = r_s, \quad \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial n} = k z_1^{(i)}. \tag{5.16}$$

Для завершения формулировки краевой задачи для $z_1^{(i)}$ необходимо установить поведение этой функции на бесконечности. Для этого используем условие сращивания $\bar{z}_1^{(i)}$ и $\bar{z}_1^{(e)}$. Учитывая (5.10), (5.12), (5.14), получим

$$r \to \infty, \quad z_1^{(i)} \to -\frac{\mathrm{Sh}_0}{2}(1-\mu). \tag{5.17}$$

Обратимся к определению числа Шервуда в первом приближении.

Подставляя выражение (5.15) для $\bar{z}_1^{(i)}$ в формулу (5.5), для среднего числа Шервуда получаем разложение по числу Пекле:

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0 + \mathrm{Pe}\,\mathrm{Sh}_1 + o(\mathrm{Pe});$$
$$\mathrm{Sh}_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_S \nabla z_0^{(i)} \cdot d\boldsymbol{S}, \quad \mathrm{Sh}_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_S \nabla z_1^{(i)} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{5.18}$$

Покажем, что связанная с движением частицы поправка первого порядка к среднему числу Шервуда Sh_1 выражается через Sh_0. Для этого воспользуемся уравнением (5.16), которое после умножения на $z_0^{(i)}$ с учетом тождества

$$z_0^{(i)}\Delta z_1^{(i)} = \nabla\cdot(z_0^{(i)}\nabla z_1^{(i)}) - \nabla\cdot(z_1^{(i)}\nabla z_0^{(i)}) + z_1^{(i)}\Delta z_0^{(i)},$$

а также в силу гармоничности функции $z_0^{(i)}$ (5.9) и условия несжимаемости жидкости (5.4) запишем в виде

$$\nabla\cdot\left[z_0^{(i)}\nabla z_1^{(i)} - z_1^{(i)}\nabla z_0^{(i)} - \frac{1}{2}(z_0^{(i)})^2\boldsymbol{v}\right] = 0. \tag{5.19}$$

Применяя теорему Остроградского — Гаусса к интегралу от левой части (5.19), взятому по объему, заключенному между поверхностями S и Σ_R, получим

$$\sum_{j=1}^{6} I_j = 0, \tag{5.20}$$
$$I_1 = -\int_S z_0^{(i)}\nabla z_1^{(i)}\cdot d\boldsymbol{S}, \quad I_2 = \int_S z_1^{(i)}\nabla z_0^{(i)}\cdot d\boldsymbol{S},$$
$$I_3 = \frac{1}{2}\int_S (z_0^{(i)})^2\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}, \quad I_4 = \int_{\Sigma_R} z_0^{(i)}\nabla z_1^{(i)}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}_R,$$
$$I_5 = -\int_{\Sigma_R} z_1^{(i)}\nabla z_0^{(i)}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}_R, \quad I_6 = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_R}(z_0^{(i)})^2\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}_R.$$

Сумму первых двух интегралов по поверхности частицы S преобразуем, подставляя вместо первых сомножителей их значения согласно граничным условиям в (5.9) и (5.16)

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{k}\int_S\left(\frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial n}\nabla z_1^{(i)} - \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial n}\nabla z_0^{(i)}\right)d\boldsymbol{S} - \int_S \nabla z_1^{(i)}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{5.21}$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, второй выражается через Sh_1, согласно определению (5.18). Замечая далее, что интеграл I_3 обращается в нуль в силу условия непротекания жидкости через поверхность частицы (5.3), находим, что

$$I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi \mathrm{Sh}_1. \tag{5.22}$$

Для вычисления интегралов по поверхности Σ_R используем асимптотики функций $z_0^{(i)}$ и $z_1^{(i)}$, определяемые формулами (5.10) и (5.17), а также асимптотическое выражение (5.2) для скорости $\boldsymbol{v}$. Поскольку $d\Sigma_R = O(R^2)$, выписанных членов этих асимптотик оказывается достаточно, чтобы в результате предельного перехода $R \to \infty$ получить

$$I_4 = I_6 = 0, \quad I_5 = -2\pi \mathrm{Sh}_0^2. \tag{5.23}$$

Воспользовавшись формулами (5.20) — (5.23), находим, что $\mathrm{Sh}_1 = \mathrm{Sh}_0^2/2$. Следовательно, выражение (5.18) может быть записано в виде

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0^2 \mathrm{Pe} + o(\mathrm{Pe}). \tag{5.24}$$

Чтобы найти следующие члены разложения числа Шервуда по числу Пекле, необходимо рассмотреть приближения более высокого порядка для функций $z^{(i)}$ и $z^{(e)}$, определив предварительно с большей точностью асимптотическое поведение функции $z_1^{(i)}$ при больших r из задачи (5.16), (5.17).

Для определения $z_1^{(i)}$ подставим в правую часть уравнения (5.16) выражения (5.2) и (5.10) для поля скоростей и функции $z_0^{(i)}$. Учитывая вид граничного условия (5.17), ищем решение задачи (5.16), (5.17) в виде суммы

$$z_1^{(i)} = z_{11}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0 (z_{12}^{(i)} - 1), \tag{5.25}$$

в которой функции $z_{11}^{(i)}$ и $z_{12}^{(i)}$ представляют собой решения следующих задач:

$$\Delta z_{11}^{(i)} = -\mathrm{Sh}_0 \frac{\mu}{r^2} + \frac{3}{2}\mathrm{Sh}_0 \frac{(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r})}{r^4} + O\left(\frac{1}{r^4}\right); \tag{5.26}$$

$$r = r_s, \quad \frac{\partial z_{11}^{(i)}}{\partial n} = k z_{11}^{(i)}; \quad r \to \infty, \quad z_{11}^{(i)} \to \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0 \mu;$$

$$\Delta z_{12}^{(i)} = 0; \tag{5.27}$$

$$r = r_s, \quad \frac{\partial z_{12}^{(i)}}{\partial n} = k (z_{12}^{(i)} - 1); \quad r \to \infty, \quad z_{12}^{(i)} \to 0.$$

Замечая, что частный интеграл уравнения (5.26) удовлетворяет условию на бесконечности, запишем с точностью до членов порядка r^{-2} решение задачи (5.26) в виде

$$z_{11}^{(i)} = \frac{A}{r} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}_0\,\mu - \frac{3}{4}\,\mathrm{Sh}_0\,\frac{(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r})}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.28)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует главному члену асимптотики общего решения однородного уравнения.

Чтобы найти постоянную A, обратимся сначала к задаче (5.27), совпадающей с задачей для определения функции $z_0^{(i)}$. Используя поэтому (5.10) и (5.11), имеем

$$z_{12}^{(i)} = \mathrm{Sh}_0\,\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (5.29)$$

Таким образом, согласно (5.25), (5.28), (5.29) имеем выражение для $z_1^{(i)}$, содержащее одну неизвестную постоянную A. Проинтегрируем величину $\nabla z_1^{(i)}$ по поверхности Σ_R сферы большого радиуса. Затем, убеждаясь при помощи уравнения (5.16), что (как и в случае для Sh_0) в определении (5.18) для Sh_1 интегрирование по S равносильно интегрированию по Σ_R, получим $A = 0$.

Вторые члены асимптотических разложений. Среднее число Шервуда. Из выражения для $z_1^{(i)}$, переходя к внешней переменной, находим, что $\varepsilon_2^{(e)}\,(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^2$. Введем внешнюю переменную в выражение для поля скоростей жидкости (5.2). Воспользовавшись формулой (5.14), для определения второго члена внешнего разложения $z_2^{(e)}$ из (5.8) получим следующее уравнение и граничное условие:

$$\left(\Delta_\rho - \mu\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right) z_2^{(e)} = -\frac{3}{4\rho}\,\mathrm{Sh}_0\left[\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\right]\cdot$$
$$\cdot\,\nabla_\rho\left\{\frac{1}{\rho}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\rho\,(1-\mu)\right]\right\}; \qquad \mu = \cos\theta, \quad (5.30)$$
$$\rho \to \infty, \quad z_2^{(e)} \to 0.$$

Второе граничное условие для функции $z_2^{(e)}$ следует из условия сращивания разложения $\bar{z}_2^{(e)} = \mathrm{Pe}\,z_1^{(e)} + \mathrm{Pe}^2 z_2^{(e)}$ при $\rho \to 0$ с разложением $\bar{z}_1^{(i)} = z_0^{(i)} + \mathrm{Pe}\,z_1^{(i)}$ при $r \to \infty$. Оно имеет вид

$$\rho \to 0, \quad z_2^{(e)} \to \frac{1}{4}\,\mathrm{Sh}_0\left[\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Sh}_0 - \frac{3}{\rho^2}\,(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\rho})\right]. \quad (5.31)$$

Задача (5.30), (5.31) совпадает с соответствующей задачей для случая бесконечно большой скорости химической реакции на поверхности частицы, рассмотренной в работе [119]. Ее решение находится аналогично описанному в § 1 и при малых значениях ρ имеет вид

$$z_2^{(e)} = \mathrm{Sh}_0 \left[\frac{1}{2\rho}\mathrm{Sh}_0 - \frac{3}{4\rho^2}(f\cdot\rho) - \frac{1}{2}(f\cdot i)\ln\rho + \right.$$
$$+ \left(\frac{23}{48} - \frac{\gamma}{2}\right)(f\cdot i) - \frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0 + \frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0\,\mu -$$
$$\left. - \frac{5}{16\rho}(f\cdot\rho)\,\mu + O(\rho)\right]. \qquad (5.32)$$

Знание асимптотики (5.32) позволяет найти второй член внутреннего разложения концентрации. Переходя в (5.32) к переменной r, можно установить, что наличие логарифмического члена меняет степенной характер разложения концентрации по числу Пекле во внутренней области так, что $\varepsilon_2^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}$. Поэтому для определения $z_2^{(i)}$ имеем следующую задачу:

$$\Delta z_2^{(i)} = 0, \qquad (5.33)$$

$$r = r_s, \quad \frac{\partial z_2^{(i)}}{\partial n} = k z_2^{(i)}; \quad r\to\infty, \quad z_2^{(i)} \to -\frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0 (f\cdot i).$$

Последнее условие следует из условия сращивания внутреннего разложения $\tilde{z}_2^{(i)}$ с внешним разложением $\tilde{z}_2^{(e)}$.

Замена $z_2^{(i)} = {}^1/_2\,\mathrm{Sh}_0\,(f\cdot i)(\tilde{z} - 1)$ приводит задачу (5.33) к задаче, аналогичной (5.9). Поэтому имеем

$$z_2^{(i)} = \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\,(f\cdot i)\,(z_0^{(i)} - 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\,(f\cdot i)\left(-1 + \mathrm{Sh}_0\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \qquad (5.34)$$

Используя полученные асимптотические по r выражения для $z_0^{(i)}$, $z_1^{(i)}$, $z_2^{(i)}$, можно следующим образом записать трехчленное разложение поля концентрации во внутренней области:

$$\tilde{z}_2^{(i)} = \mathrm{Sh}_0\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\left[-1 + \mu + \mathrm{Sh}_0\frac{1}{r} - \right.$$
$$- \frac{3}{2r^2}(f\cdot r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\Big]\mathrm{Pe} + \frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\,(f\cdot i)\times$$
$$\left.\times\left[-1 + \mathrm{Sh}_0\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]\right]\mathrm{Pe}^2\ln\mathrm{Pe}. \qquad (5.35)$$

В том же приближении для среднего числа Шервуда найдем [36]

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pe}\,\mathrm{Sh}_0^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}\,\mathrm{Sh}_0^2\,(f \cdot i) + O(\mathrm{Pe}^2). \quad (5.36)$$

Формула (5.36) позволяет рассчитать интенсивность массообмена реагирующей частицы произвольной формы с поступательным потоком, когда на поверхности частицы протекает химическая реакция первого порядка, если известна сила сопротивления частицы f и среднее число Шервуда Sh_0, соответствующее массообмену покоящейся частицы с неподвижной средой. В случае теплообмена формула (5.36) определяет число Нуссельта для частицы произвольной формы при фиксированной температуре поверхности частицы и линейном законе теплообмена частицы с окружающей средой. Формула (5.36) обобщает результаты работы [119], где рассматривался диффузионный режим реакции на поверхности сферы (что соответствует предельному переходу при $k \to \infty$ в задаче (5.1)).

Линейный сдвиговый поток. При сдвиговом обтекании частицы произвольной формы поле скоростей жидкости на бесконечности определяется выражением (2.1). Как и в случае поступательного потока, сведений о поле скоростей (2.1), (5.3), (5.4) оказывается достаточно для получения приближенного выражения для среднего числа Шервуда в виде трехчленного разложения по малому числу Пекле.

При сдвиговом обтекании во внутренней $\Omega^{(i)} = \{r_s \leqslant r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1/2})\}$ и внешней $\Omega^{(e)} = \{O(\mathrm{Pe}^{-1/2}) \leqslant r\}$ областях потока решение ищем в виде внутреннего (5.6) и внешнего (5.7) асимптотических разложений, в которых сжатая радиальная координата и порядки величин первых слагаемых таковы:

$$\rho = \mathrm{Pe}^{1/2} r, \quad \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^{n/2} \quad (n = 0, 1, 2); \quad (5.37)$$

$$z_0^{(e)} = 0.$$

Нулевой член внутреннего разложения $z_0^{(i)}$, как и в случае поступательного потока, определяется формулами (5.10), (5.11).

Принимая во внимание (2.1) и подставляя внутреннее разложение (5.6) в уравнение (5.1), находим, что частичная сумма $\bar{z}_2^{(i)}$ удовлетворяет следующему неоднородному уравнению Лапласа и граничному условию на поверхности частицы:

$$\Delta \bar{z}_2^{(i)} = \mathrm{Pe}\,(v \cdot \nabla)\, z_0^{(i)}; \quad r = r_s, \quad \frac{\partial \bar{z}_2^{(i)}}{\partial n} = k(\bar{z}_2 - 1). \quad (5.38)$$

Подстановка внешнего разложения (5.7) в уравнение (5.1) показывает, в силу представления для поля скоростей (2.1), что первые четыре члена разложения функции $z^{(e)}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (2.35) с граничным условием затухания решения на бесконечности. Поэтому приближенное решение задачи во внешней области можно представить в следующем виде:

$$z^{(e)} = \mathrm{Pe}^{1/2}\, Q(\mathrm{Pe})\,\zeta + O(\mathrm{Pe}^2), \qquad Q(0) = \mathrm{Sh}_0, \tag{5.39}$$

где ζ — фундаментальное решение уравнения (2.35), а $Q(\mathrm{Pe})$ — полином второй степени относительно величины $\mathrm{Pe}^{1/2}$, коэффициенты которого определяются в ходе решения задачи.

Учитывая представление (2.39), (2.40) для функции ζ при малых значениях ρ, из выражения (5.39) получаем граничное условие на бесконечности для частичной суммы $\bar{z}_2^{(i)}$ внутреннего разложения:

$$r \to \infty, \quad \bar{z}_2^{(i)} = Q(\mathrm{Pe})(r^{-1} - \alpha \mathrm{Pe}^{1/2}). \tag{5.40}$$

Проинтегрируем уравнение (5.38) по контрольному объему жидкости V: $\{r_s \leqslant r \leqslant R\}$. Используя равенство $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)z_0^{(i)} = \nabla\cdot(\boldsymbol{v}z_0^{(i)})$, которое следует из уравнения неразрывности (5.4), и переходя к поверхностным интегралам при помощи формулы Остроградского — Гаусса, с учетом условия непротекания жидкости через поверхность частицы (5.3) и представления (5.10) для нулевого члена внутреннего разложения, для функции $Q(\mathrm{Pe})$ в (5.40) можно получить следующее выражение

$$Q(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Sh}. \tag{5.41}$$

(Напомним, что погрешность формул (5.40) и (5.41) имеет порядок Pe^2.)

Умножим уравнение (5.38) на $z_0^{(i)}$ и проинтегрируем его по контрольному объему жидкости V с последующим переходом к поверхностным интегралам по S и Σ_R. В результате получим равенство нулю суммы шести интегралов I_j, которые соответствуют формальной замене функций $z_1^{(i)}$ и $\boldsymbol{v}$ в формуле (5.20) на $\bar{z}_2^{(i)}$ и $\mathrm{Pe}\,\boldsymbol{v}$ соответственно. Сумму первых двух интегралов преобразуем, используя граничные условия на поверхности частицы (5.9), (5.38), аналогично тому, как это делалось ранее

для поступательного потока. В результате получим

$$I_1 + I_2 = -\int_S z_0^{(i)} \nabla \bar{z}_2^{(i)} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_S \bar{z}_2^{(i)} \nabla z_0^{(i)} \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int_S (-\nabla \bar{z}_2^{(i)} + \nabla z_0^{(i)}) \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi (\mathrm{Sh} - \mathrm{Sh}_0) + O(\mathrm{Pe}^{3/2}). \quad (5.42)$$

Третий интеграл I_3 обращается в нуль ввиду условия непротекания жидкости через поверхность частицы (5.3). Четвертый интеграл I_4 также равен нулю в силу представлений (5.10) и (5.40) для функций $z_0^{(i)}$ и $\bar{z}_2^{(i)}$, которые справедливы вдали от частицы. Шестой интеграл I_6 обращается в нуль ввиду равенства (5.10) с учетом того, что интеграл от нормальной составляющей вектора скорости жидкости $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})$ по поверхности сферы Σ_R равен нулю (это следует из условия непротекания (5.3) и уравнения неразрывности (5.4)). Пятый интеграл вычисляется путем предельного перехода при $R \to \infty$ с учетом асимптотических свойств функций $z_0^{(i)}$ (5.10), (5.18) и $\bar{z}_2^{(i)}$ (5.40), (5.41); он имеет вид

$$I_5 = -4\pi\alpha \mathrm{Pe}^{1/2} \mathrm{Sh}_0 \mathrm{Sh} \quad (I_3 = I_4 = I_6 = 0). \quad (5.43)$$

Используя соотношения (5.42), (5.43) и разрешая уравнение $I_1 + I_2 + I_5 = 0$ для числа Шервуда Sh частицы, находящейся в сдвиговом потоке, получим следующую формулу [164]:

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_0 + \alpha \mathrm{Sh}_0^2 \mathrm{Pe}^{1/2} + \alpha^2 \mathrm{Sh}_0^3 \mathrm{Pe} + O(\mathrm{Pe}^{3/2}). \quad (5.44)$$

Такая же формула справедлива и для числа Нуссельта, соответствующего теплообмену частицы произвольной формы со средой при фиксированной температуре ее поверхности [112].

Отметим, что хотя формула (5.44) была получена для случая стационарного обтекания сдвиговым потоком неподвижной (закрепленной) частицы, она, как показано в [112], остается справедливой и для свободно взвешенной в сдвиговом течении частицы произвольной формы, которая в общем случае непрерывно меняет свою ориентацию в пространстве и массотеплообмен которой описывается нестационарными уравнениями диффузии и теплопроводности.

Вычисление среднего числа Шервуда для некоторых конкретных случаев. Определение среднего числа Шервуда для частицы заданной формы по формулам (5.36) и (5.44) сводится к вычислению числа Шервуда Sh_0, соответствую-

щего массообмену неподвижной частицы в покоящейся среде. Кроме того, в случае поступательного потока необходимо знать зависящую от ориентации частицы величину проекции силы сопротивления частицы на направление невозмущенного потока на бесконечности $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{i})$, а в случае сдвигового потока — определяемый формулой (2.40) коэффициент α, зависящий от типа сдвигового обтекания. Значения α для некоторых типов сдвигового обтекания приведены в § 2.

Следует отметить, что формулы (5.36) и (5.44) в явном виде не содержат константу k, так что зависимость числа Шервуда от скорости поверхностной химической реакции проявляется в зависимости $\mathrm{Sh}_0 = \mathrm{Sh}_0(k)$. Форма зависимости числа Шервуда от Sh_0 совпадает с соответствующей зависимостью в случае диффузионного режима реакции на поверхности частицы и переходит в нее при $k \to \infty$. Интересно отметить, что, как следует из результатов [112, 119], асимптотические выражения среднего числа Шервуда для частиц произвольной формы (формулы (5.36), (5.44)) в рамках использованного приближения не могут быть улучшены, так как информации о поле скоростей поступательного (соотношения (5.2) — (5.4)) и сдвигового (соотношения (2.1), (5.3), (5.4)) потоков оказывается недостаточно для получения следующих членов разложения.

Очевидно, что из формул (5.36), (5.44) в качестве частных случаев могут быть получены выражения для интенсивности массообмена частиц сферической формы с потоком. Так, для сферической капли имеем

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{k}{k+1}, \quad (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{i}) = \frac{2+3\beta}{3+3\beta}, \tag{5.45}$$

где β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости; значение $\beta = \infty$ соответствует твердой сфере, $\beta = 0$ — газовому пузырю.

Для сферической частицы, покрытой жидкой пленкой [39],

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{k}{k+1}, \quad (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{i}) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{\beta}\,\frac{1-\delta}{1+\delta}\left(1 + \frac{5}{2}\,\frac{\delta}{2+\delta+2\delta^3}\right)\right]^{-1}. \tag{5.46}$$

Здесь δ — отношение радиусов частицы и пленки; значение $\delta = 1$ (или $\beta = \infty$) соответствует твердой частице, $\delta = 0$ — капле.

Прежде чем перейти к примерам расчета интенсивности массообмена несферических частиц, отметим, что если

ось частицы, представляющей собой тело вращения, составляет угол ω с направлением невозмущенного потока (рис. 6.6), то направляющий вектор скорости жидкости на бесконечности можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\tau} \sin \omega + \boldsymbol{n} \cos \omega, \qquad (5.47)$$

где единичные векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ направлены соответственно перпендикулярно и параллельно оси вращения тела.

Для медленных течений в стоксовом приближении уравнения движения линейны, поэтому определение поля обтекания частицы можно свести к двум вспомогательным задачам со следующими условиями вдали от частицы и на ее поверхности:

$$r \to \infty, \quad \boldsymbol{v}_\perp \to \boldsymbol{n} \cos \omega;$$
$$r = r_s, \quad \boldsymbol{v}_\perp = 0, \qquad (5.48а)$$

$$r \to \infty, \quad \boldsymbol{v}_\parallel \to \boldsymbol{\tau} \sin \omega;$$
$$r = r_s, \quad \boldsymbol{v}_\parallel = 0, \qquad (5.48б)$$

которые соответствуют отдельным слагаемым в (5.47). Суперпозиция решений этих задач будет определять полное решение исходной задачи. Обозначим теперь через $f_\perp$ и $f_\parallel$ безразмерные силы сопротивления частицы, обтекаемой соответственно перпендикулярным ($\boldsymbol{i} = \boldsymbol{n}$, $\omega = 0$) и параллельным ($\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\tau}$, $\omega = \pi/2$) оси вращения частицы потоком. Можно убедиться, что имеют место равенства $\boldsymbol{f}_\parallel = f_\parallel \boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{f}_\perp = f_\perp \boldsymbol{n}$, второе из которых справедливо лишь в стоксовом приближении [107]. Полная сила сопротивления осесимметричной частицы определяется векторной суммой

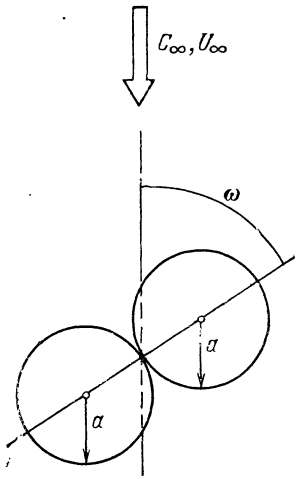


Рис. 6.6. Ориентация частицы в потоке (гантелевидная частица).

$$\boldsymbol{f} = f_\perp \boldsymbol{n} \cos \omega + f_\parallel \boldsymbol{\tau} \sin \omega, \qquad (5.49)$$

слагаемые которой находятся из решений задач об обтекании при граничных условиях (5.48а) и (5.48б) соответственно. Проекция силы сопротивления частицы (5.49) на направление набегающего потока равна

$$(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{i}) = f_\perp \cos^2 \omega + f_\parallel \sin^2 \omega. \qquad (5.50)$$

Формула (5.50) показывает, что в случае тел вращения, произвольно ориентированных в пространстве, для оп-

ределения величины $(f \cdot i)$, входящей в среднее число Шервуда (5.36), достаточно знать угол ω между осью частицы и направлением невозмущенного потока на бесконечности и абсолютную величину силы сопротивления для случаев перпендикулярного и параллельного расположения оси частицы и потока.

Приведем теперь некоторые конкретные значения величин Sh_0 и $(f \cdot i)$, необходимые для расчета среднего числа Шервуда движущихся реагирующих осесимметричных частиц, произвольно ориентированных в поступательном потоке.

Тонкий круговой диск [36]. Для того чтобы воспользоваться формулой (5.36), определим сначала число Шервуда Sh_0 для неподвижного диска, на поверхности которого протекает реакция первого порядка. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, x, так, чтобы диск находился в плоскости $x = 0$, а начало координат совпало с центром диска. За характерный масштаб длины выберем радиус диска.

Концентрация не зависит от угла θ, поэтому уравнение для безразмерной концентрации и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad (5.51)$$

$$\frac{\partial z}{\partial |x|} = k(z-1) \text{ при } x = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1;$$

$$z \to 0 \text{ при } |x| \to \infty \text{ или } r \to \infty.$$

Общее решение уравнения (5.51), затухающее на бесконечности, можно записать в виде

$$z = \int_0^\infty e^{-\xi|x|} J_0(\xi r)\, \Psi(\xi)\, d\xi,$$

где J_0 — функция Бесселя. Функцию $\Psi(\xi)$ найдем из граничного условия на поверхности диска. В результате получим

$$z = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi|x|} J_0(\xi r) \frac{\sin \xi\, d\xi}{(\xi + k)\,\xi}.$$

Используя определение (5.5) для числа Шервуда, отсюда имеем следующее выражение:

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{2k}{\pi} \int_0^1 r\, dr \int_0^\infty J_0(\xi r) \frac{\sin \xi\, d\xi}{\xi + k} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty J_1(\xi) \frac{\sin \xi\, d\xi}{(\xi + k)\,\xi}. \qquad (5.52)$$

Из (5.52) при больших значениях безразмерной константы скорости реакции k можно получить

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-1/2} + O(k^{-3/2})\right). \qquad (5.53)$$

Безразмерная сила сопротивления тонкого кругового диска, ось которого произвольно ориентирована в потоке (рис. 6.7), определяется формулой (5.49), в которой в соответствии с [107] следует положить

$$f_\perp = \frac{8}{3\pi} \approx 0{,}849, \quad f_\parallel = \frac{16}{9\pi} \approx 0{,}566. \qquad (5.54)$$

Здесь $f_\perp$ и $f_\parallel$ — силы сопротивления диска соответственно в случаях, когда плоскость диска перпендикулярна и параллельна набегающему потоку.

Формулы (5.36), (5.50), (5.52), (5.54) позволяют вычислять среднее число Шервуда для произвольно ориентированного в потоке тонкого кругового диска в случае протекания гетерогенной химической реакции первого порядка на его поверхности. Для диска, плоскость которого нормальна ($\omega = 0$) и параллельна ($\omega = \pi/2$) набегающему потоку, зависимости среднего числа Шервуда от безразмерной скорости реакции в логарифмическом масштабе представлены на рис. 6.8 сплошными и штриховыми линиями при разных значениях числа Пекле. Видно, что массообмен частицы в потоке существенно зависит от ее ориентации и скорости поверхностной реакции.

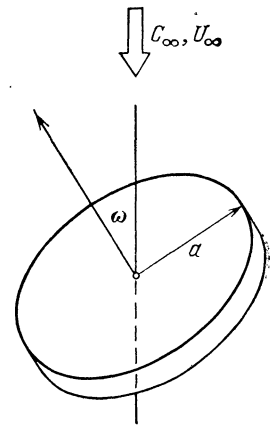


Рис. 6.7. Ориентация тонкого кругового диска в потоке.

Эллипсоид вращения. Число Шервуда Sh_0 и безразмерная сила сопротивления эллипсоида вращения с полуосями a и b (a — экваториальный радиус) даются формулами [107, 184]

$$\mathrm{Sh}_0 = \begin{cases} (\chi^2+1)^{-1/2}\,(\mathrm{arcctg}\,\chi)^{-1}, & a \geqslant b, \\ (\chi^2-1)^{-1/2}\,(\mathrm{arcth}\,\chi)^{-1}, & a \leqslant b; \end{cases} \qquad (5.55)$$

$$f_\parallel = \begin{cases} {}^4/_3\,(\chi^2+1)^{-1/2}\,[\chi - (\chi^2-1)\,\mathrm{arcctg}\,\chi]^{-1}, & a \geqslant b, \\ {}^4/_3\,(\chi^2-1)^{-1/2}\,[(\chi^2+1)\,\mathrm{arcth}\,\chi - \chi]^{-1}, & a \leqslant b, \end{cases}$$

$$\chi = \left|\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right|^{-1/2}, \quad \mathrm{arcth}\,\chi = \frac{1}{2}\ln\frac{\chi+1}{\chi-1},$$

при записи которых в качестве масштаба длины был выбран радиус a.

В случае произвольной ориентации эллипсоида вращения в поступательном потоке в формуле (5.50) значение $f_{\parallel}$ задается выражением (5.55), а зависимость безразмерной силы сопротивления $f_{\perp}$ от отношения a/b приведена в таблице 5.1.11 работы [107]. Следует указать, что применимость формулы (5.55) для Sh_0 ограничена случаем диффузионного режима протекания реакции ($k \to \infty$).

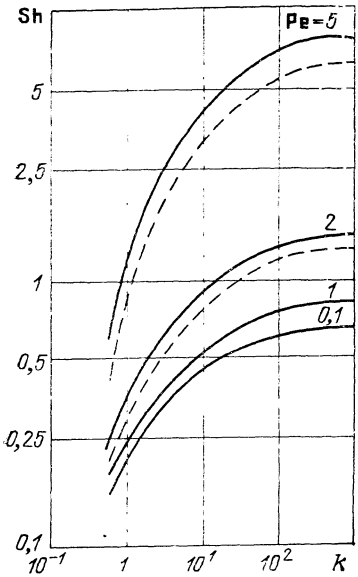


Рис. 6.8. Зависимость среднего числа Шервуда от константы скорости химической реакции при различных числах Пекле для кругового диска, ориентированного перпендикулярно и параллельно потоку (сплошные и штриховые линии соответственно).

«Гантелевидная» частица. Для «гантелевидной» частицы, состоящей из двух соприкасающихся сфер равных радиусов, вспомогательное число Шервуда Sh_0 выражается приближенной формулой

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{(\ln 2)\, k}{0{,}787 + k}, \quad (5.56)$$

которая описывает зависимость Sh_0 от безразмерной константы скорости химической реакции k, обеспечивая точный результат при $k = 0$ и правильную асимптотику при $k \to \infty$ [158, 178]. При записи (5.56) в качестве характерного масштаба длины выбран удвоенный радиус $2a$. Для гантелевидной частицы, ось которой (проходящая через центры сфер) произвольно ориентирована в пространстве и составляет угол ω с направлением набегающего потока (рис. 6.6), в формуле (5.50) следует положить [107]

$$f_{\perp} \approx 0{,}707, \quad f_{\parallel} \approx 0{,}645. \quad (5.57)$$

Частица, состоящая из двух соприкасающихся сфер разных радиусов. В случае частицы, состоящей из двух соприкасающихся сфер разных радиусов a_1 и a_2, вспомо-

гательное число Шервуда для диффузионного режима реакции ($k = \infty$) равно [158, 178]

$$\mathrm{Sh}_0 = -\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2}\left[\psi\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) + \psi\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) + 2\gamma\right] \quad (5.58)$$

$$\left(\lim_{x\to 0} x\psi(x) = -1, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2, \ \psi(1) = -\gamma\right).$$

В качестве масштаба длины выбрана сумма радиусов сфер; $\psi(x) = d\ln(\Gamma(x)/dx)$ — логарифмическая производная гамма-функции, γ — постоянная Эйлера.

Формулы для расчета проекции силы сопротивления на направление скорости невозмущенного поступательного потока в случае произвольной ориентации частицы рассматриваемого типа приведены в [107].

Напомним, что приведенные выше результаты могут быть использованы и при расчете числа Нуссельта в задаче о теплообмене частицы произвольной формы при фиксированной температуре ее поверхности.

Заметим также, что при $k \to \infty$ число Шервуда Sh_0 (или число Нуссельта Nu_0 для частицы с фиксированной температурой поверхности), соответствующее покоящейся частице в неподвижной среде, совпадает с безразмерной величиной электрической емкости тела и может быть измерено методами электростатики.

В [82, 83] исследовался теплообмен частицы любой формы в поступательном и сдвиговом потоках при произвольной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. Для среднего числа Нуссельта были получены три первых члена асимптотического разложения по малому числу Пекле. В работе [8] в предположении постоянства чисел Шмидта и Прандтля и степенного закона изменения вязкости от температуры рассматривалась задача о совместном тепломассопереносе к сферической частице в потоке сжимаемого газа при малых числах Рейнольдса. Совместный тепломассообмен частицы любой формы с поступательным (и сдвиговым) потоком вязкого теплопроводного газа в случае произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры изучался в [83, 85, 91, 165]. Считалось, что температура и концентрация на поверхности частицы и вдали от нее постоянны [83, 85, 165] или на поверхности частицы протекает химическая реакция (в диффузионном режиме), которая сопровождается тепловыделением [91]. Для чисел Шервуда и Нуссельта найдено два старших члена асимптотического разложения по малым числам Пекле.

§ 6. Некоторые интерполяционные формулы для числа Шервуда при промежуточных значениях числа Пекле

Основываясь на полученных ранее асимптотических формулах для интегральных характеристик массо (тепло) обмена частицы с потоком — чисел Шервуда (Нуссельта) при больших (главы 1—5) и малых (глава 6) числах Пекле, можно предложить приближенные интерполяционные формулы, позволяющие с удовлетворительной для практики точностью определять среднее число Шервуда для частицы (капли) при любых значениях числа Пекле, изменяющихся в интервале $0 \leqslant \mathrm{Pe} < \infty$.

Ограничимся сначала случаем массообмена потока с частицей (каплей), реагирующей в диффузионном режиме при изотермических условиях.

Наиболее простые приближенные формулы можно получить, если взять сумму главных членов асимптотик среднего числа Шервуда при малых и больших числах Пекле. Однако как показывает сравнение с известными численными результатами, такой способ построения интерполяционных формул дает значительную погрешность. В частности, для твердой сферической частицы, обтекаемой поступательным стоксовым потоком, соответствующая двучленная формула имеет вид

$$\mathrm{Sh} = 1 + 0{,}625\mathrm{Pe}^{1/3}. \qquad (6.1)$$

Сопоставление приближенного выражения (6.1) с численными результатами решения соответствующей краевой задачи [1, 12, 118а] показывает, что максимальная погрешность формулы (6.1) составляет более 35%.

Основная причина такого расхождения связана с тем, что асимптотика среднего числа Шервуда при $\mathrm{Pe} \to \infty$ дается выражением $\mathrm{Sh} = \mathrm{const}\,\mathrm{Pe}^m$ (см., например, главы 1—4), где $0 < m < 1$. Это, в свою очередь, приводит к тому, что двучленные аппроксимационные формулы типа (6.1) имеют бесконечную производную при $\mathrm{Pe} = 0$. В то же время точные асимптотические формулы при малых числах Пекле показывают, что соответствующая производная числа Шервуда обычно конечна: $(d\,\mathrm{Sh}/d\,\mathrm{Pe})_{\mathrm{Pe}=0} \neq \neq \infty$ (см. выражение (1.51)). Указанные обстоятельства приводят к тому, что интерполяционные формулы типа (6.1) дают завышенные значения числа Шервуда при конечных числах Пекле $\mathrm{Pe} \sim 1$.

Применим здесь более точный метод построения приближенных формул, заключающийся в более полном использовании имеющейся информации об асимптотическом поведении среднего числа Шервуда. При малых числах Пекле асимптотика среднего числа Шервуда с точностью до $o(\mathrm{Pe}^n)$ определяется выражением

$$\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_0} = 1 + A\,\mathrm{Pe}^n, \tag{6.2}$$

где Sh_0 — среднее число Шервуда, соответствующее случаю неподвижной частицы (для частицы сферической формы $\mathrm{Sh}_0 = 1$), а параметры A и n зависят от формы частицы и типа течения. С учетом (6.2) приближенную интерполяционную зависимость среднего числа Шервуда от числа Пекле будем искать в виде следующей простой формулы [88]:

$$\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_0} = 1 + A\,\mathrm{Pe}^n\,\frac{1}{1 + B\,\mathrm{Pe}^m}, \tag{6.3}$$

которая сохраняет тот же порядок точности при $\mathrm{Pe} \to 0$, что и (6.2) (асимптотика производной выражения (6.3) при $\mathrm{Pe} \to 0$ является точной). Неизвестные коэффициенты B и m находятся путем предельного перехода в (6.3) при $\mathrm{Pe} \to \infty$ с учетом требования, чтобы при этом главный член асимптотики выражения (6.3) совпадал с главным членом соответствующего точного асимптотического ряда. Приведем несколько примеров.

Твердая сфера в поступательном потоке. В случае твердой сферы ($\beta = \infty$) в поступательном стоксовом потоке из асимптотических выражений для числа Шервуда при малых и больших числах Пекле (формула (1.52) данной главы и формула (2.4) главы 3) имеем $A = 1/2$, $n = 1$, $B = 0{,}8$, $m = 2/3$, что приводит к следующей приближенной формуле для среднего числа Шервуда:

$$\mathrm{Sh} = 1 + \frac{0{,}5\,\mathrm{Pe}}{1 + 0{,}8\,\mathrm{Pe}^{2/3}}. \tag{6.4}$$

Из сравнения расчета по формуле (6.4) с результатами численного решения на ЭВМ соответствующей задачи о массообмене сферы [1, 12, 118а] следует, что максимальная погрешность выражения (6.4) во всем диапазоне изменения числа Пекле составляет 10—12%. Таким образом, точность приближенного выражения (6.4) в три раза выше точности двучленной формулы (6.1), получен-

ной суммированием главных членов асимптотик среднего числа Шервуда при малых и больших числах Пекле.

Капля умеренной вязкости в поступательном потоке. Для сферической капли, реагирующей в диффузионном режиме и обтекаемой поступательным стоксовым потоком, сопоставляя выражение (6.3) при $\mathrm{Pe} \to \infty$ и $\mathrm{Pe} \to 0$ с соответствующими асимптотиками, определяемыми формулой (6.7) главы 1 и формулой (1.52) данной главы, можно найти, что

$$A = 1/2, \quad n = 1, \quad B = 1{,}1\,(1+\beta)^{1/2}, \quad m = 1/2,$$

а для среднего числа Шервуда получить выражение

$$\mathrm{Sh} = 1 + \frac{0{,}5\,\mathrm{Pe}}{1 + 1{,}1\,(1+\beta)^{1/2}\,\mathrm{Pe}^{1/2}} \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant 1), \qquad (6.5)$$

где значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю.

Пригодность приближенного выражения (6.5) при промежуточных значениях чисел Пекле проверялась путем сравнения (6.5) с результатами численного решения [12, 160а] соответствующей задачи о массообмене сферической капли. Из сопоставления следует, что максимальная погрешность формулы (6.5) для случая газового пузыря ($\beta = 0$) составляет менее 12% и увеличивается с ростом параметра β, достигая 16% при $\beta = 1$.

Твердая сфера в простом сдвиговом потоке. Установим значения коэффициентов в формуле (6.3) в случае реагирующей в диффузионном режиме твердой сферической частицы, свободно взвешенной в простом линейном сдвиговом потоке, поле скоростей которого в стоксовом приближении определяется формулами (2.5). С учетом асимптотик при малых (формулы (2.21), (2.14)) и при больших (формула (4.7) главы 4) числах Пекле из (6.3) для среднего числа Шервуда получаем

$$\mathrm{Sh} = 1 + \frac{0{,}26\,\mathrm{Pe}^{1/2}}{1 + 0{,}074\,\mathrm{Pe}^{1/2}}. \qquad (6.6)$$

Твердая сфера в произвольном деформационном линейном сдвиговом потоке. В случае произвольного чисто деформационного сдвигового течения, когда поле скоростей жидкости вдали от частицы определяется выражением (2.1), в котором компоненты тензора сдвига симметричны ($G_{ij} \equiv E_{ij} = E_{ji}$) для построения интерполяционной формулы для среднего числа Шервуда используем точную

асимптотику при малых числах Пекле (формулы (2.21), (2.47) при $q = 1$), а также полученные в приближении диффузионного пограничного слоя (большие числа Пекле) результаты § 3 главы 4. С учетом представления (6.3) приходим к следующему выражению:

$$\mathrm{Sh} = 1 + \frac{0{,}36\,\mathrm{Pe}_m}{1 + 0{,}4\,\mathrm{Pe}_m^{2/3}}, \quad \mathrm{Pe}_m = \frac{a^2 E^*}{D}, \tag{6.7}$$

$$E^* = (E_{ij}^* E_{ij}^*)^{1/2} = (E_1^{*2} + E_2^{*2} + E_3^{*2})^{1/2},$$

где Pe_m — модифицированное число Пекле, E_{ij}^* — размерные компоненты тензора сдвига.

В частном случае осесимметричного сдвигового потока $E_1^* = E_2^* = -{}^1/_2\, E_3^*$ в формуле (6.7) следует положить $E^* = \sqrt{6}\,|E_1^*|$.

Случай плоского сдвигового деформационного течения $E_1^* = -E_2^*$, $E_3^* = 0$ соответствует значению $E^* = \sqrt{2}\,|E_1^*|$ в (6.7).

Выражения (6.6), (6.7) позволяют приближенно вычислять среднее число Шервуда для реагирующей в диффузионном режиме твердой сферической частицы, обтекаемой линейными сдвиговыми течениями различного типа, во всем диапазоне изменения числа Пекле $0 \leqslant \mathrm{Pe} < \infty$. В литературе отсутствуют численные результаты, позволяющие оценить точность предложенных формул (6.6), (6.7). По аналогии с поступательным потоком следует ожидать, что максимальная погрешность этих приближенных выражений составляет около 10%.

Используя описанный выше метод, нетрудно получить приближенные формулы типа (6.3) для среднего числа Шервуда в случае частиц несферической формы, например, для эллипсоида вращения и плоского диска, оси которых направлены вдоль потока. При этом следует использовать приведенные в главах 4 и 6 точные асимптотические результаты для величины Sh, справедливые при больших и малых числах Пекле соответственно.

Предложенные до сих пор интерполяционные формулы относились к случаю диффузионного режима реакции на поверхности твердых частиц, капель и пузырей. Рассмотрим теперь более общий случай гетерогенной химической реакции, скорость которой конечна и произвольным образом зависит от температуры и концентрации. Основные предположения и математическая формулировка соответ-

ствующей задачи о массотеплообмене реагирующей частицы с потоком приведены в § 4 данной главы.

Сопоставление результатов §§ 4, 5 главы 5 и § 4 данной главы, полученных в предельных случаях больших и малых чисел Пекле [1]), наводит на мысль использовать алгебраическую систему (4.19), (4.20) в качестве интерполяционных уравнений для приближенного определения средних чисел Шервуда и Нуссельта во всем диапазоне чисел Пекле $0 \leqslant \mathrm{Pe}_m < \infty$ при наличии в потоке не слишком большого числа реагентов и простой кинетике реакций. При этом в качестве параметров $\mathrm{Sh}_{m\infty}$, Nu_∞, входящих в систему (4.19), (4.20), следует использовать значения для средних чисел Шервуда и Нуссельта, полученных из решения вспомогательной линейной и существенно более простой задачи, соответствующей диффузионному режиму реакции на поверхности сферы (теплообмену частицы при фиксированной температуре ее поверхности).

В настоящее время известно достаточно большое число решений указанной вспомогательной задачи, полученных численными, аналитическими или приближенными методами для разных случаев обтекания. В частности, для приближенного определения вспомогательных параметров $\mathrm{Sh}_{m\infty}$ и Nu_∞ могут быть использованы формулы (6.4) — (6.8), где следует положить $\mathrm{Pe} = \mathrm{Pe}_m$ $(m = 1, \ldots, M, T)$.

Для изотермической реакции порядка $\varkappa = 1/2, 1, 2$ проверка пригодности интерполяционного уравнения (4.22) при больших числах Пекле проводилась во всем диапазоне изменения параметра $k = aK_s D^{-1} C_\infty^{\varkappa-1}$ путем сравнения его корня Sh с полученными в приближении диффузионного пограничного слоя результатами §§ 4, 5 главы 5 в случае поступательного стоксова обтекания твердой сферической частицы, капли (пузыря) и кругового цилиндра. Из указанного сопоставления следует, что максимальная погрешность приближенного уравнения для среднего числа Шервуда (4.22) наблюдается при $k = 1{,}5 \div 5{,}0$ и составляет около 10%.

Пригодность приближенного уравнения (4.19) при промежуточных значениях чисел Пекле и Рейнольдса в случае поступательного обтекания сферы проверялась

[1]) Следует отметить, что в изотермическом случае асимптотическое уравнение (4.22) совпадает с предложенным ранее интерполяционным уравнением (5.6) главы 5, которое хорошо описывает полученные в приближении диффузионного пограничного слоя соответствующие численные результаты.

путем сравнения с известными результатами численного решения соответствующей "задачи" для реакции первого порядка ($\varkappa = 1$) на поверхности сферы при $\mathrm{Pe} = 10,\ 20,\ 50$. Из таблицы 13, приведенной в книге [12], следует, что использование уравнения (4.19) приводит к хорошим результатам (ошибка не превосходит 1,5%).

Напомним, что при малых числах Пекле система (4.19), (4.20) является асимптотически точной (в том смысле, что правильно дает несколько старших членов соответствующего асимптотического разложения) для любой кинетики гетерогенной химической реакции в случае произвольного обтекания твердой или жидкой сферической частицы.

В работах [47, 164] предлагалась модификация уравнения (4.22), которую можно использовать для приближенного расчета интенсивности массопереноса к реагирующим частицам произвольной формы.

Глава 7

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ МАССОТЕПЛООБМЕН КАПЕЛЬ, ПУЗЫРЕЙ И ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ

Неустановившиеся, переходные режимы конвективного массо- и теплообмена частиц дисперсной фазы с окружающей их жидкостью или газом, а также нестационарные процессы конвективного переноса вещества и тепловой энергии внутри движущихся капель играют важную роль в ряде промышленных процессов. Нестационарность процессов переноса может быть обусловлена как неустановившимся полем скоростей, так и неустановившимся режимом поглощения (выделения) вещества или тепла в объеме дисперсной или сплошной фазы либо на межфазной поверхности.

На практике все эти факторы могут проявляться в любых комбинациях как следствие неустойчивости или переходного характера течения среды либо хода физико-химических процессов, а также в результате движения межфазной поверхности, вызванного массотеплообменом; они могут быть и следствием искусственных периодических воздействий на систему. Примерами могут служить нестационарность массотеплопереноса на начальной и конечной стадиях процесса (являющаяся одной из причин так называемого концевого эффекта), изменение объема дисперсной фазы, вызванное ростом или растворением капель и пузырей, наложение пульсаций на поток жидкости. Важно подчеркнуть также, что процесс массопереноса внутри капли даже при стационарных внешних условиях обычно оказывается существенно нестационарным.

Ниже будут рассмотрены процессы как внешнего, так и внутреннего нестационарного массо- и теплообмена капель (§§ 1—4), а также внешнего нестационарного массо- и теплообмена пузырей и твердых частиц (§§ 5—7) при больших числах Пекле. Нестационарный массо- и теплоперенос при малых числах Пекле будет рассмотрен в § 8.

§ 1. Постановка задачи о массо- и теплопереносе к каплям и пузырям. Метод решения нестационарных двумерных задач диффузионного (теплового) пограничного слоя при помощи вспомогательных переменных

Рассматривается нестационарный процесс массообмена капли (или пузыря) с потоком несжимаемой жидкости при больших числах Пекле. Поле течения, в общем случае нестационарное, предполагается известным, задача считается двумерной (плоской или осесимметричной). Вдали от капли задана концентрация растворенного компонента, а также ее распределение вне и внутри капли в начальный момент времени. Массоперенос может при этом лимитироваться сопротивлением непрерывной или дисперсной фазы либо проходить в условиях, когда эти сопротивления соизмеримы.

Как обычно (см., например, гл. 2), введем ортогональную криволинейную систему безразмерных координат ξ, η, λ, связанную с каплей. Координата ξ отсчитывается по внешней нормали к поверхности капли, определяемой уравнением $\xi = \xi_s$, причем для области вне капли $\xi > \xi_s$, внутри капли $\xi < \xi_s$; координата η отсчитывается вдоль поверхности по направлению потока. Безразмерную функцию тока при нестационарном обтекании можно вблизи поверхности капли представить в виде

$$\xi \to \xi_s, \quad \psi = (\xi - \xi_s) f(t, \eta) + o(\xi - \xi_s), \qquad (1.1)$$

где t — безразмерное время; в качестве масштаба времени служит отношение a/U характерного размера капли и характерной скорости потока. Отметим, что, несмотря на различный вид функции тока в областях вне и внутри капли, функция $f(t, \eta)$ универсальна для обеих областей в силу условия непрерывности скорости жидкости при переходе через поверхность раздела фаз.

В приближении диффузионного пограничного слоя вне или внутри капли безразмерное уравнение нестационарной диффузии с учетом конвективного переноса запишем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{g_s}} \frac{\partial (c, \psi)}{\partial (\xi, \eta)} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU}{D}, \qquad (1.2)$$

где $g_s = (g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\lambda\lambda})_{\xi=\xi_s}$; $g_{\xi\xi}$, $g_{\eta\eta}$, $g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора.

Постановка задачи завершается формулировкой соответствующих начальных и граничных условий, которые пока конкретизировать не будем.

Решение краевых задач теории нестационарного диффузионного пограничного слоя на внешней или внутренней поверхностях капли в принципе может быть получено разными методами. Так, для определения диффузионного потока к поверхности капли в установившемся стоксовом потоке при внезапном включении реакции в [61] было использовано преобразование Лапласа по времени. Анализ конвективной теплопередачи к криволинейной стенке при потенциальном обтекании проводился в [183] при помощи синус-преобразования Фурье по поперечной координате. Однако наиболее удобным и быстро ведущим к цели является метод введения вспомогательных функций координат и времени в качестве новых переменных. Эти функции выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись определенные дифференциальные соотношения. В результате для отыскания зависимости искомого поля концентрации или температуры от вспомогательных функций получаем более простое, по сравнению с исходным, дифференциальное уравнение. Очевидно, что в каждой конкретной задаче число этих функций и сами они могут выбираться по-разному — важно лишь, чтобы как промежуточные дифференциальные соотношения, так и итоговое уравнение для искомой функции имели достаточно простую структуру.

По-видимому, впервые последовательное применение этого подхода для решения задач нестационарного конвективного массо- и теплообмена капли при стационарном обтекании дано в работе [126], хотя в несколько более ранних работах [172, 173, 175] уже вводилась вспомогательная функция по аналогии с автомодельной переменной, вводимой в стационарных задачах. В дальнейшем метод, аналогичный предложенному в [126], использовался в работах [174, 177].

Очевидным образом обобщая метод работы [126] на случай произвольной осесимметричной формы капли и нестационарного обтекания [42, 43], введем функции ζ, τ, q, где

$$\zeta = \mathrm{Pe}^{1/2} (\xi - \xi_s)\, q(t, \eta), \quad \tau = \tau(t, \eta). \qquad (1.3)$$

Рассматривая ζ и τ как новые независимые переменные, подставим $c = c(\zeta(\xi, t, \eta), \tau(t, \eta))$ в уравнение (1.2) с условием (1.1) и подчиним функции $q(t, \eta)$, $\tau(t, \eta)$

следующим дифференциальным соотношениям:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{f(t, \eta)}{\sqrt{g_s}} \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{g_s}} \frac{\partial f(t, \eta)}{\partial \eta} q,$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{f(t, \eta)}{\sqrt{g_s}} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = q^2. \qquad (1.4)$$

Тогда уравнение (1.2) в новых переменных приводится к стандартному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2},$$

причем в рассматриваемых задачах, как правило, достаточно использовать его автомодельное решение

$$c = A \operatorname{erf} \frac{|\zeta|}{2\sqrt{\tau}} + c_s, \qquad (1.5)$$

где A и c_s — постоянные, определяемые из начальных и граничных условий, причем в силу соотношений (1.3) постоянная c_s имеет смысл безразмерной концентрации на поверхности раздела.

Что касается вспомогательных функций ζ и τ (1.3), то для их определения необходимо последовательно решить дифференциальные уравнения первого порядка (1.4). Решение этих уравнений проще всего можно получить методом характеристик, определяя возникающие произвольные константы и функции наиболее удобным образом в каждом конкретном случае и в соответствии с начальными и граничными условиями задачи.

Отметим, что функцию q можно выбрать не зависящей от времени t в широком классе задач стационарного обтекания капель, а также в ряде задач нестационарного обтекания при условии, что функция $f(t, \eta)$ представима в виде произведения $f^{(1)}(t) f^{(2)}(\eta)$ (это условие выполняется, например, для поступательного или сдвигового потока, в том числе неустановившегося). Тогда из первого уравнения (1.4) получаем простое выражение

$$q = Bf^{(2)}(\eta), \qquad (1.6)$$

где B — произвольная постоянная, выбор которой несущественен и обычно диктуется соображениями удобства интегрирования второго уравнения (1.4).

Вспоминая представление для функции тока (1.1), можно заметить, что для задач указанного класса вспомогательная функция ζ согласно (1.3) и (1.6) совпадает с

главной частью выражения для функции тока с точностью до множителя, не зависящего от координат. Таким образом, в этом случае ζ — непосредственный аналог переменной Мизеса. Второе уравнение (1.4) эквивалентно системе уравнений в полных дифференциалах, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\eta}{g_s^{-1/2} f^{(1)}(t) f^{(2)}(\eta)} = \frac{d\tau}{(Bf^{(2)}(\eta))^2} \tag{1.7}$$

и легко интегрируется.

Необходимо подчеркнуть, что описанный метод дает возможность построить решения уравнений (1.1), (1.2) вида $c\,(\mathrm{Pe}^{1/2}(\xi - \xi_s)\, q(t, \eta), \tau(t, \eta))$, в том числе и некоторые неавтомодельные решения. Если же с самого начала ограничиться отысканием автомодельных решений, то достаточно ввести [172, 173, 175] лишь первую из вспомогательных функций (1.3), причем построение новой функции $q(t, \eta)$ окажется равносильным построению комбинации $q(t, \eta)\,\tau^{-1/2}(t, \eta)$ из старых функций. Таким образом, для автомодельных задач методы [172, 173, 175] и [126, 174, 177] по существу идентичны.

Некоторые обобщения [*77*, *78*, *90*, *165а*]. При решении некоторых задач нестационарного пограничного слоя использование двух новых переменных (1.3), (1.4) может оказаться недостаточным, и для построения поля концентрации необходимо дополнительно к (1.3) ввести третью (циклическую) переменную

$$\omega = \omega(t, \eta), \tag{1.8}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{f}{\sqrt{g_s}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.2) после замен (1.3), (1.4), (1.8), (1.9) принимает вид приведенного выше стандартного уравнения теплопроводности, которое не содержит в явном виде циклическую координату ω. При этом искомая функция зависит уже от трех переменных

$$c = c(\tau, \zeta, \omega). \tag{1.10}$$

Зависимость новых переменных τ, ζ, ω от исходных координат ξ, η и времени t получается в результате решения системы уравнений в частных производных первого

порядка (1.4), (1.9) и имеет вид

$$q = A_q(\omega)\exp\left\{\int_{\eta_0}^{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\ln f\right)_{(\omega)}d\eta\right\},$$
$$\tau = \int_{\eta_0}^{\eta}\left(\sqrt{g_s}\,f^{-1}q^2\right)_{(\omega)}d\eta + A_\tau(\omega), \qquad \omega = -t + t(\eta). \tag{1.11}$$

Запись вида $S_{(\omega)}\,d\eta$ в подынтегральных выражениях означает, что функция $S(t, \eta)$ при помощи зависимости $\omega = \omega(t, \eta)$ записана в переменных ω и η (при интегрировании ω рассматривается как параметр), η_0 — произвольная постоянная, $t(\eta)$ — любое нетривиальное решение характеристического обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{\sqrt{g_s}}{f}, \tag{1.12}$$

соответствующего уравнению для ω (1.9); $A_q(\omega)$ и $A_\tau(\omega)$ — произвольные функции аргумента ω, которые выбираются по-разному в зависимости от начальных и граничных условий.

Нестационарный массообмен в случае объемной химической реакции первого порядка. Отметим, что результаты решения нестационарных задач конвективного массопереноса к каплям, пузырям и твердым частицам могут быть использованы для исследования более сложных нестационарных задач, соответствующих протеканию в жидкости объемной химической реакции первого порядка. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{Pe}\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,c = \Delta c - k_v c \tag{1.13}$$

с начальными и граничными условиями

$$t = 0, \quad c = 0; \quad r = r_s(\theta, \varphi), \quad c = 1; \quad r \to \infty, \quad c \to 0, \tag{1.14}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости жидкости, соответствующий стационарному полю течения.

Нетрудно убедиться, что решение задачи (1.13), (1.14) может быть представлено в виде [131]

$$c = k_v\int_0^t \exp(-k_v t)\,\bar{c}\,dt + \bar{c}\exp(-k_v t), \tag{1.15}$$

где вспомогательная функция $\tilde{c}$ удовлетворяет уравнению (1.13) при $k_v = 0$ и условиям (1.14).

Из формулы (1.15) следует, что среднее число Шервуда Sh, соответствующее решению задачи (1.13), (1.14) при $k_v \neq 0$, может быть выражено через вспомогательное число Шервуда $\widetilde{\mathrm{Sh}}$ для диффузии без химической реакции (при $k_v = 0$)

$$\mathrm{Sh} = k_v \int_0^t \exp(-k_v t)\, \widetilde{\mathrm{Sh}}\, dt + \widetilde{\mathrm{Sh}} \exp(-k_v t). \qquad (1.16)$$

Следует подчеркнуть, что зависимости (1.15), (1.16) носят общий характер и справедливы во всем диапазоне изменения числа Пекле и константы скорости объемной химической реакции ($0 \leqslant \mathrm{Pe}, k_v < \infty$).

Переходя в формулах (1.15) и (1.16) к пределу при $t \to \infty$, можно получить связь между решением нестационарной задачи без химической реакции (1.13), (1.14) (при $k_v = 0$) и решением соответствующей стационарной задачи ($\partial c/\partial t = 0$) с химической реакцией.

Опираясь на описанный выше метод, рассмотрим далее решения основных задач внутреннего и внешнего нестационарного массообмена капель и пузырей с потоком жидкости.

§ 2. Нестационарная диффузия к сферической капле при установившемся стоксовом обтекании и в потенциальном потоке. Приближение диффузионного пограничного слоя

Формулировка задачи. Переход к безразмерным переменным. Исследуем неустановившееся поле концентрации растворенного в жидкости вещества вне и внутри сферической капли радиуса a, движущейся с постоянной скоростью U_∞ в неограниченной жидкой среде. Вдали от капли концентрация поддерживается постоянной и равной C_∞. В начальный момент времени $t_* = 0$ концентрация вне капли всюду однородна и равна C_∞, внутри капли концентрация также однородна и равна $C_0 \neq C_\infty$, т. е. на поверхности капли при $t_* = 0$ имеется скачок концентрации.

Введем сферическую систему координат r_*, θ, φ, связанную с центром капли (как обычно, угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности, т. е. $\eta = \pi - \theta$). Соответствующая краевая задача в приближении

диффузионного пограничного слоя записывается в виде [61, 126]

$$\frac{\partial C_1}{\partial t_*} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial (C_1, \psi_*)}{\partial (r_*, \theta)} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial r_*^2}, \quad r_* > a, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t_*} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial (C_2, \psi_*)}{\partial (r_*, \theta)} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial r_*^2}, \quad r_* < a, \tag{2.2}$$

$$t_* = 0, \quad C_1 = C_\infty, \quad C_2 = C_0, \tag{2.3}$$

$$r_* = \infty, \quad C_1 = C_\infty; \quad r_* = -\infty, \quad C_2 = C_0, \tag{2.4}$$

$$r_* = a, \quad \alpha C_1 = C_2, \quad D_1 \frac{\partial C_1}{\partial r_*} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial r_*}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\pi} = \frac{\partial C_2}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\pi} = 0. \tag{2.6}$$

Индекс 1 соответствует непрерывной фазе, 2 — дисперсной фазе.

Уравнения (2.1) и (2.2) отражают баланс растворенного вещества вне и внутри капли. Начальное условие (2.3) соответствует начальному скачку концентрации на поверхности капли. Равенства (2.4) отвечают условиям асимптотического сращивания распределений концентрации в диффузионных пограничных слоях вне и внутри капли с соответствующими невозмущенными полями концентрации вне пограничных слоев (в ядре потока, обтекающего каплю, и в ядре тороидального вихря внутри нее). Первое условие (2.5) представляет собой условие фазового равновесия на поверхности капли (закон Генри) с коэффициентом распределения α, зависящим от физических свойств жидкостей вне и внутри капли, а также от температуры; второе условие (2.5) отражает непрерывность диффузионных потоков на поверхности капли. Условия (2.6) вытекают из симметрии задачи.

Совершенно аналогична постановка задачи о теплообмене, причем концентрации заменяются температурами, коэффициенты диффузии D_1, D_2 в уравнениях (2.1), (2.2) — коэффициентами температуропроводности χ_1, χ_2, коэффициенты диффузии в условиях (2.5) — коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2, коэффициент $\alpha \equiv 1$.

Рассмотрим здесь два режима обтекания капли: в стоксовом приближении (решение Рыбчинского — Адамара) и в потенциальном потоке (внутри капли — вихрь Хилла), т. е. соответственно при малых и больших числах Рейнольдса. Для функции тока вблизи поверхности капли имеем:

в стоксовом приближении

$$r_* \to a, \quad \psi_* = \frac{U_\infty a}{2(\beta+1)}(r_* - a)\sin^2\theta + o(r_* - a), \quad (2.7)$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (газовому пузырю соответствует $\beta = 0$), U_∞ — скорость жидкости вдали от капли;

в потенциальном потоке

$$r_* \to a, \quad \psi_* = \frac{3U_\infty a}{2}(r_* - a)\sin^2\theta + o(r_* - a). \quad (2.8)$$

Для решения каждой из задач (2.1) — (2.7) и (2.1) — (2.6), (2.8) введем безразмерные переменные и параметры

$$c_1 = \frac{C_1 - C_\infty}{C_0 - \alpha C_\infty}, \quad c_2 = \frac{C_2 - \alpha C_\infty}{C_0 - \alpha C_\infty}, \quad \psi = \frac{\psi_*}{a^2 U}, \quad (2.9)$$

$$\xi = \frac{r_* - a}{a}, \quad t = \frac{U t_*}{a}, \quad \mathrm{Pe}_1 = \frac{aU}{D_1}, \quad \mathrm{Pe}_2 = \frac{aU}{D_2}.$$

При записи (2.9) предполагается, что начальный скачок концентрации выводит систему из состояния фазового равновесия, т. е. $C_0 \neq \alpha C_\infty$ (очевидно, что в противном случае решение задач (2.1) — (2.7) и (2.1) — (2.6), (2.8) тривиально: концентрации сохраняют свое значение во все моменты времени). В качестве характерной скорости U удобно выбрать

$$U = \begin{cases} \dfrac{U_\infty}{\beta+1} & \text{для стоксова обтекания,} \\ 3U_\infty & \text{для потенциального обтекания.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда оба выражения для функции тока (2.7), (2.8) в безразмерной форме описываются единой формулой (1.1) при

$$\xi_s = 0, \quad f = \frac{1}{2}\sin^2\theta. \quad (2.11)$$

В задаче теплообмена безразмерные величины (2.9) вводятся аналогичным образом при замене концентраций температурами, D_1, D_2 на χ_1, χ_2 и при $\alpha \equiv 1$. Кроме (2.9), понадобится еще один безразмерный параметр, характеризующий отношение коэффициентов переноса в дисперсной и непрерывной фазах. Его удобно взять в таком виде:

$$\gamma = \begin{cases} \left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)^{1/2} & \text{в задаче массообмена,} \\ \left(\dfrac{\chi_2}{\chi_1}\right)^{1/2} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} & \text{в задаче теплообмена.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Теперь исходную краевую задачу массо- или теплообмена сферической капли при стоксовом или потенциальном обтекании можно записать в следующей единой безразмерной форме:

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial (c_k, \psi)}{\partial (\xi, \theta)} = \frac{1}{\mathrm{Pe}_k}\frac{\partial^2 c_k}{\partial \xi^2} \quad (k = 1, 2),$$

$$t = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1;$$

$$\xi = \infty, \quad c_1 = 0; \quad \xi = -\infty, \quad c_2 = 1; \qquad (2.13)$$

$$\xi = 0, \quad \alpha c_1 = c_2, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \xi} = \gamma \left(\frac{\mathrm{Pe}_1}{\mathrm{Pe}_2}\right)^{1/2} \frac{\partial c_2}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\pi} = \frac{\partial c_2}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\pi}.$$

Безразмерная функция тока описывается выражениями (1.1), (2.11).

Определение полей концентрации (температуры). Для решения задачи (2.13) используем метод вспомогательных функций [126], описанный в § 1. В рассматриваемом случае $f^{(1)}(t) = 1$, и функция $f = f^{(2)}(\theta)$ определяется формулой (2.11). Выбирая постоянную B в (1.6) равной $\sqrt{2}$, для первой из функций (1.3) имеем

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Pe}_k^{1/2} \xi \sin^2\theta \quad (k = 1, 2), \qquad (2.14)$$

а вторая определяется из решения системы (1.7), принимающей вид

$$\frac{dt}{1} = -\frac{d\theta}{1/2 \sin\theta} = \frac{d\tau}{1/2 \sin^4\theta}. \qquad (2.15)$$

Интегрируя левое и правое равенства, получаем общее решение системы (2.15)

$$\tau = \mu - \frac{1}{3}\mu^3 + \Phi\left(\frac{1+\mu}{1-\mu} e^{-t}\right), \quad \mu = \cos\theta, \qquad (2.16)$$

где Φ — произвольная функция.

При выборе частного решения следует обратить внимание на форму окончательного выражения для поля концентрации (1.5). Имея в виду необходимость удовлетворить начальным условиям (2.3), выберем частное решение так, чтобы при $t = 0$ величина $\tau = 0$. Тогда из (2.16) получим

$$\Phi\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) = -\mu + \frac{1}{3}\mu^3, \text{ или } \Phi(x) = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$$

и после преобразований запишем функцию $\tau\,(t,\,\theta)$ в виде

$$\tau = \frac{1}{3}(1+\mu)^2\,[2-\mu-\Delta(t,\,\mu)], \qquad (2.17)$$

где

$$\Delta(t,\,\mu) = 4\,\frac{3(1-\mu)+(1+\mu)\,e^{-t}}{[1-\mu+(1+\mu)\,e^{-t}]^3}\,e^{-2t}. \qquad (2.18)$$

Таким образом, обе вспомогательные функции найдены, и искомые поля концентрации $c_1\,(\zeta_1,\,\tau)$ и $c_2\,(\zeta_2,\,\tau)$ определяются в виде (1.5). Остается найти неизвестные постоянные в (1.5), используя начальные и краевые условия из (2.13), которые в новых переменных записываются в виде

$$\tau = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1;$$
$$\zeta_1 = \infty, \quad c_1 = 0; \quad \zeta_2 = -\infty, \quad c_2 = 1;$$
$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \quad \alpha c_1 = c_2, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \zeta_1} = \gamma\,\frac{\partial c_2}{\partial \zeta_2}$$

(можно убедиться, что $\partial\zeta_i/\partial\theta = \partial\tau/\partial\theta = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т. е. условия симметрии (2.6) удовлетворяются). Получаем

$$c_{1s} = -A_1 = \frac{\gamma}{1+\alpha\gamma}, \quad c_{2s} = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}, \quad A_2 = \frac{1}{1+\alpha\gamma}. \qquad (2.19)$$

Из выражений (2.19) следует, что во всех точках поверхности капли концентрация одинакова и не зависит от времени, но при переходе через поверхность терпит разрыв. Значения концентрации на наружной (C_{1s}) и внутренней (C_{2s}) сторонах поверхности капли таковы:

$$C_{1s} = \frac{1}{1+\alpha\gamma}(C_\infty + \gamma C_0), \quad C_{2s} = \frac{\alpha}{1+\alpha\gamma}(C_\infty + \gamma C_0). \qquad (2.20)$$

Эти значения удобно использовать в системе отсчета концентрации. Тогда после перехода к исходным переменным получаем выражения для полей концентрации вне и внутри капли в следующей симметричной и наглядной форме:

$$z_1 = \frac{C_1 - C_\infty}{C_{1s} - C_\infty} =$$
$$= \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{8}\,\mathrm{Pe}_1}\,(r-1)\,\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta-\Delta}}\right), \qquad r \geqslant 1; \qquad (2.21)$$

$$z_2 = \frac{C_2 - C_0}{C_{2s} - C_0} =$$

$$= \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{8}\,\mathrm{Pe}_2}\,(1-r)\,\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta-\Delta}}\right), \quad r \leqslant 1. \qquad (2.22)$$

Аналогичными выражениями (при $\alpha = 1$) описывается поле температур. Экспоненциально затухающая функция $\Delta\,(t, \cos\theta)$ определена формулой (2.18), параметр γ — формулами (2.12).

Нетрудно обобщить решение на случай нелинейной связи между концентрациями на поверхности раздела [84] — тогда первое из условий (2.5) заменяется на следующую связь между концентрациями на обеих сторонах поверхности раздела фаз:

$$C_{2s} = F\,(C_{1s}), \qquad (2.23)$$

где F — заданная функция (например, для некоторых пар жидкостей $F\,(C_{1s}) = \alpha C_{1s}^{n}$, где $\alpha = \mathrm{const}$, а n лежит в пределах от 0,5 до 2 [12]). В этом случае решение в форме (2.21), (2.22) по-прежнему удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.2) и граничным условиям (2.3), (2.4), (2.6), а условие (2.23) и второе условие (2.5) служат для определения C_{1s} и C_{2s}. Из второго условия (2.5) при помощи (2.21), (2.22) получим, используя (2.23), алгебраическое уравнение для определения C_{1s}:

$$C_{1s} + \gamma F\,(C_{1s}) = C_\infty + \gamma C_0. \qquad (2.24)$$

Таким образом, в данном случае в формулы (2.21), (2.22) следует вместо (2.20) подставить значения C_{1s} и C_{2s}, определяемые соотношениями (2.23), (2.24). Заметим, что последние переходят в (2.20) при $F\,(C_{1s}) = \alpha C_{1s}$.

На рис. 7.1 показано изменение радиальных профилей безразмерной концентрации с течением времени при разных значениях угловой координаты. Соответствующие зависимости даны в виде

$$z_k = z_k\,(t,\ Y_k,\ \theta) \quad (Y_k = \sqrt{\mathrm{Pe}_k}\,|\,r-1\,|,\ k = 1,\ 2)$$

согласно формулам (2.21), (2.22), (2.18).

Как и следовало ожидать по аналогии с результатами исследования стационарного массообмена капли с потоком (гл. 1), как с внешней, так и с внутренней стороны поверхности капли (за исключением окрестности задней критической точки) имеется четко выраженный пограничный слой толщиной порядка $\mathrm{Pe}_k^{-1/2}$. Радиальные профили кон-

центрации становятся все более пологими по мере уменьшения угловой координаты, и вблизи задней критической точки, а именно, при $\theta \leqslant O\,(\mathrm{Pe}_k^{-1/2})$, приближение диффузионного пограничного слоя становится непригодным. Распределение концентрации в диффузионном следе (включая область задней критической точки) вне и внутри кап-

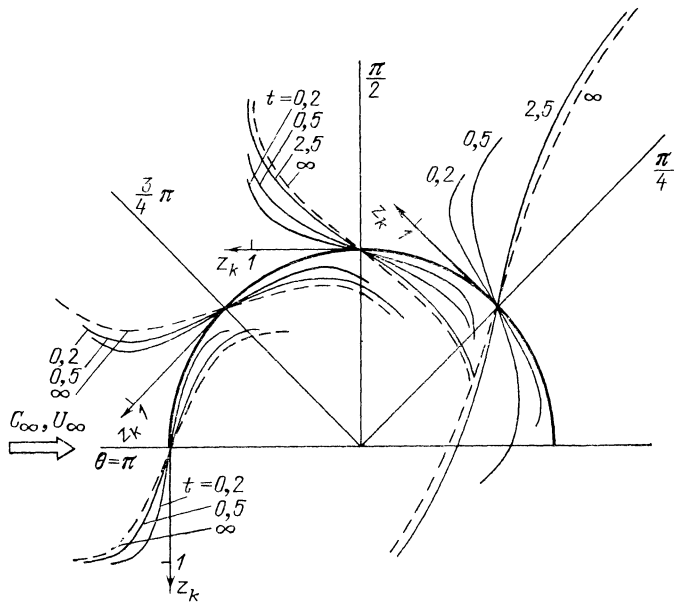


Рис. 7.1. Распределение концентрации вблизи поверхности капли в разные моменты времени (приближение диффузионного пограничного слоя).

ли можно получить в результате асимптотического анализа, аналогичного детально описанному в гл. 1. Такой анализ будет проведен в § 3 для внутреннего следа.

Из выражения для функции $\Delta\,(t, \cos\theta)$ (2.18) следует, что время релаксации t_r профилей концентрации определяется значением $t = 1/2$, т. е.

$$t_r = \begin{cases} (\beta+1)\,a/(2U_\infty) & \text{для стоксова потока,} \\ a/(6U_\infty) & \text{для потенциального потока,} \end{cases} \qquad (2.25)$$

что было впервые отмечено в работе [61].

Необходимо подчеркнуть, что построенное решение (2.21), (2.22) справедливо (равномерно пригодно) во всей

области диффузионного пограничного слоя, включая переднюю критическую точку и ее окрестность, т. е. при всех $|r-1| \leqslant O(\mathrm{Pe}_k^{-1/2})$, $O(\mathrm{Pe}_k^{-1/2}) \leqslant \theta \leqslant \pi$. В окрестности передней точки, как и всюду в пограничном слое, в полном соответствии с физическим смыслом с течением времени происходит постепенная эволюция нестационарного профиля концентрации, и выход его на стационарный профиль определяется временем релаксации (2.25). Ошибочность вывода автора работы [126] о мгновенном установлении профиля концентрации при $\theta = \pi$ обусловлена тем, что решение задачи было получено им в громоздкой и труднообозримой форме, содержащей в передней точке устранимую особенность, не замеченную автором [126]. Ошибки такого типа восходят к неправильному представлению о «необедненности потока» в передней критической точке [60], о чем уже говорилось в § 2 гл. 1.

Локальный и полный диффузионные потоки на поверхность капли. Определим безразмерный локальный поток на поверхность капли, используя, например, параметры для внешней области. Тогда, действуя аналогично случаю стационарного массообмена (гл. 1, § 5), после дифференцирования выражения (2.21) по радиальной координате получим

$$j = j_* \frac{a}{D_1 (C_\infty - C_{1s})} = -\left(\frac{\partial z_1}{\partial r}\right)_{r=1} = \sqrt{\frac{3\,\mathrm{Pe}_1}{2\pi}} \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta-\Delta}}. \quad (2.26)$$

В несколько иной форме этот результат был впервые представлен в работе [61].

При помощи соответствующего асимптотического анализа, так же как в гл. 1, можно показать, что локальный диффузионный поток в области задней критической точки имеет порядок $\mathrm{Pe}_k^{-1/2}$, т. е. пренебрежимо мал по сравнению с главным членом асимптотического разложения потока в области диффузионного пограничного слоя, где, как это следует из (2.26), он имеет порядок $\mathrm{Pe}_k^{1/2}$. Тогда, определяя по-прежнему среднее число Шервуда как безразмерный средний интегральный диффузионный поток на поверхность капли S и интегрируя выражение (2.26), получим

$$\mathrm{Sh} = \frac{1}{4\pi} \int_S j\, ds = \mathrm{Sh}_{\mathrm{st}} h(t), \quad \mathrm{Sh}_{\mathrm{st}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Pe}_1}{3\pi}}. \quad (2.27)$$

Функция $h(t)$ представляет собой отношение значений среднего числа Шервуда при нестационарном и соответствующем значению $t \to \infty$ стационарном режиме, рассмотренном в гл. 1, и выражается интегралом

$$h(t) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} \frac{1-\mu}{\sqrt{2-\mu-\Delta(t,\mu)}}\, d\mu \qquad (h(\infty) = 1). \quad (2.28)$$

При малых значениях t можно получить разложение

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2/3\, t}} \left[1 + \frac{5}{72} t^2 - \frac{7}{1920} t^4 + O(t^6)\right]. \quad (2.29)$$

На рис. 7.2 представлена зависимость отношения Sh/Sh_{st} от времени, полученная в результате вычисления интеграла (2.28) (согласно данным работы [126]). Штриховой линией показано разложение (2.29). Видно, что при $t = 5/2$, что соответствует пятикратному времени релаксации (2.25), процесс массообмена практически выходит на стационарный режим (при $t > 5/2$ нестационарное значение среднего числа Шервуда отличается от соответствующего стационарного значения не более чем на 3,5%). С другой стороны, при $t < 5/2$ трехчленное разложение (2.29) дает почти точное совпадение со значением интеграла (2.28), т. е. полностью описывает нестационарный процесс.

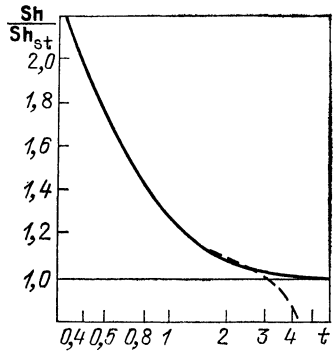


Рис. 7.2. Отношение среднего числа Шервуда при нестационарной диффузии к среднему числу Шервуда для стационарного режима в зависимости от времени.

Отметим, что в работе [127] был предложен приближенный метод получения разложений поля концентрации при малых значениях времени, который приводит к результатам, близким к (2.29).

Первый член разложения (2.29) отвечает начальной стадии процесса, когда можно пренебречь конвективным переносом, и соответствует известной формуле Хигби [12].

§ 3. Общая картина процесса конвективного массотеплопереноса внутри капли при больших числах Пекле. Пределы применимости приближения диффузионного пограничного слоя

Опираясь на результаты, полученные в § 2, а также на общие представления о механизме переноса вещества и структуре поля концентрации (гл. 1), рассмотрим картину изменения поля концентрации внутри движущейся капли с течением времени, следуя работе [121]. Цель этого анализа состоит в том, чтобы установить пределы применимости теории диффузионного пограничного слоя для области внутри капли и перейти затем к модели, пригодной для описания процесса массопереноса при больших значениях времени.

В общем случае капля в начальный период времени движется ускоренно или замедленно, достигая установившейся скорости движения. Анализ процесса переноса в течение этого периода осложнен нестационарностью поля скоростей. Не проводя здесь такого анализа (он будет дан позднее, в § 6, для области вне пузыря), заметим лишь, что безразмерные (отнесенные к радиусу) расстояния от поверхности капли, на которых происходит изменение концентрации в этот период, будут порядка $\mathrm{Sc}_k^{-1/2}$, где Sc_k — числа Шмидта. Последнее вытекает из сопоставления времени релаксации поля скоростей $a^2\nu^{-1}$ и характерного времени $y_*^2 D_k^{-1}$ проникания вещества на глубину y_* за счет диффузии. Таким образом, глубина проникания будет мала по сравнению с толщиной диффузионного пограничного слоя при условии $\mathrm{Sc}_k^{-1/2} \ll \mathrm{Pe}_k^{-1/2}$, справедливом при малых числах Рейнольдса и любых числах Шмидта или при любых числах Рейнольдса, но больших числах Шмидта.

Как следует из результатов § 2, поверхность капли представляет собой поверхность разрыва концентрации растворенного вещества, причем на внешней и внутренней сторонах этой поверхности образуются диффузионные пограничные слои, безразмерная толщина которых порядка $\mathrm{Pe}_k^{-1/2}$. Жидкость в этих пограничных слоях движется по направлению к области задней критической точки, после достижения которой уносится от поверхности капли соответственно на бесконечность (образуя внешний диффузионный след, подробно изученный в гл. 1) и внутрь кап-

ли (образуя внутренний диффузионный след, аналогичный внешнему следу до области смешения $W^{(4)}$). Общая схема расположения диффузионных пограничных слоев и диффузионных следов вне и внутри капли показана на рис. 7.3.

Основное отличие системы внутренний пограничный слой — внутренний след от рассмотренной в гл. 1 системы внешний пограничный слой — внешний след заключается в том, что первая из них с течением времени оказывается в известном смысле замкнутой. Действительно,

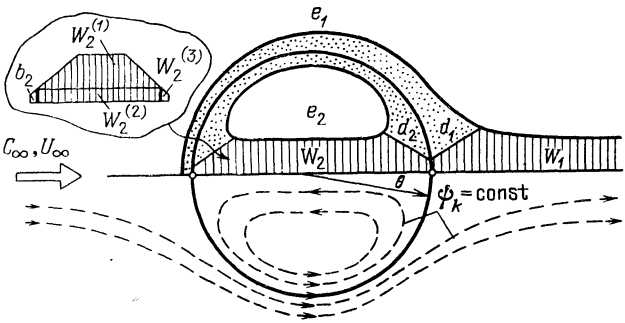


Рис. 7.3. Схема течения вне и внутри капли и структура поля концентрации.

продольный конвективный перенос вещества во внутреннем следе, пронизывающем каплю вдоль ее оси, приводит к «замыканию» полей концентрации в задней и передней внутренних областях критических точек. Указанное обстоятельство существенным образом влияет на всю картину изменения поля концентрации внутри капли и в значительной мере ограничивает возможности применения теории диффузионного пограничного слоя.

Внутренний диффузионный след. В связи со сказанным рассмотрим внутренний диффузионный след подробнее. Подобно внешнему следу он имеет толщину порядка $\mathrm{Pe}^{-1/4}$, т. е. значительно большую, чем толщина диффузионного пограничного слоя O $(\mathrm{Pe}^{-1/2})$ (здесь и всюду далее индекс 2 опускаем). Изменение концентрации при переходе из диффузионного пограничного слоя во внешнюю область e (которой здесь служит ядро тороидального циркуляционного потока внутри капли) будет того же порядка, что и при переходе из области следа во внешнюю область. Поэтому градиенты концентрации в пограничном слое будут

больше, чем в следе. В результате содержание растворенного в жидкости вещества в процессе движения жидкости вдоль внутренней поверхности капли будет меняться значительно быстрее, чем в следе. Это означает, что когда жидкость движется в области внутреннего следа вдоль оси капли от задней критической точки к передней, концентрация в ней остается относительно неизменной. Отсюда следует важный вывод, что концентрации во внутренних областях задней и передней критических точек в главном приближении по обратному числу Пекле становятся одинаковыми (с точностью $O(\mathrm{Pe}^{-1/2})$ [121]) по истечении времени, достаточного для прохождения жидкой частицы от внутренней области передней критической точки через внутренний диффузионный пограничный слой, внутреннюю область задней критической точки, область внутреннего следа и возвращения во внутреннюю область передней критической точки.

Действительно, из результатов гл. 1 непосредственно следует, что линии тока, ограничивающие систему внутренний диффузионный пограничный слой — внутренний диффузионный след, проходят на расстоянии порядка $\mathrm{Pe}^{-1/6}$ от задней критической точки. В самой внутренней области задней критической точки $W^{(3)}$ изменение концентрации за счет диффузии будет порядка $\mathrm{Pe}^{-2/3}$. Жидкая частица находится в области $W^{(3)}$ в течение времени порядка $\ln s$ (в качестве масштаба времени, как и в § 2, выбираем a/U; s — безразмерное расстояние, отсчитываемое от задней критической точки внутрь капли вдоль ее оси). Следовательно, за время пребывания частицы жидкости в области $W^{(3)}$ концентрация изменится на величину порядка $\mathrm{Pe}^{-2/3} \ln s$. Поэтому при переходе из области диффузионного пограничного слоя, где $s = O(\mathrm{Pe}^{-1/2})$, в область следа за пределами $W^{(3)}$, где $s = O(1)$, изменение концентрации будет порядка $\mathrm{Pe}^{-2/3} \ln \mathrm{Pe}$. Аналогичным будет и изменение концентрации при дальнейшем движении жидкой частицы в область передней критической точки. Эти изменения меньше, чем те, которые возникают при движении в следе (в $O(\mathrm{Pe}^{1/6}/\ln \mathrm{Pe})$ раз). На основании изложенного можно заключить, что концентрация во внутреннем следе будет постоянной с точностью до величины порядка $\mathrm{Pe}^{-1/2}$ и совпадающей с концентрациями во внутренних областях задней и передней критических точек.

Механизм переноса вещества внутри капли. Теперь можно описать общий механизм процесса переноса вещества и получить необходимые в дальнейшем оценки интен-

сивности переноса в различных областях внутри капли.

Пусть, для определенности, разность концентраций на внутренней поверхности капли и на границе внутреннего диффузионного пограничного слоя с ядром тороидального вихря равна $\Delta c^{(d)}$. Следовательно, градиент концентрации поперек пограничного слоя будет порядка $\Delta c^{(d)}\mathrm{Pe}^{1/2}$, а изменение концентрации растворенного вещества, переносимого жидкой частицей при ее движении во внутреннем диффузионном пограничном слое за время $t = O(1)$ $(t_* = O(a/U))$ будет порядка $\Delta c^{(d)}$. Сравним эту величину с изменением концентрации в ядре внутреннего вихря за счет диффузии. Градиенты концентрации в ядре будут иметь порядок разности $\Delta c^{(e)}$ между концентрациями в ядре и на внутренней поверхности капли. Поэтому за то же время $t = O(1)$ изменение концентрации в ядре за счет диффузии составит величину порядка $\Delta c^{(e)}\,(a/U)\,(D/a^2) = \Delta c^{(e)}\mathrm{Pe}^{-1}$.

На основании изложенного ясно, что если изменения концентрации $\Delta c^{(d)}$ и $\Delta c^{(e)}$ одного порядка, то перенос вещества в пограничном слое будет осуществляться значительно быстрее, чем внутри ядра циркуляционного течения. Такая ситуация имеет место в течение короткого начального периода процесса. В этот период растворенное вещество переносится из внутреннего пограничного слоя к поверхности капли и, поскольку скорость переноса из ядра тороидального вихря слишком мала, чтобы компенсировать убыль концентрации в пограничном слое, концентрация в последнем падает до весьма низкого значения. В связи с тем, что внутренний след образован частицами жидкости, которые прошли через весь внутренний диффузионный пограничный слой, он так же быстро, в течение короткого начального периода, теряет большую часть растворенного вещества.

Пределы применимости автомодельного решения, полученного в приближении диффузионного пограничного слоя. Оценим теперь продолжительность начального периода, о котором только что шла речь. Согласно сказанному выше она совпадает с промежутком времени, необходимым для того, чтобы жидкость в системе внутренний пограничный слой — внутренний след совершила один оборот. Другими словами, требуется вычислить время циркуляции жидкости вдоль линии тока, проходящей на расстоянии $O(\mathrm{Pe}^{-1/2})$ от поверхности капли в ее миделевом сечении (или, что то же, на расстоянии $O(\mathrm{Pe}^{-1/6})$ от передней или

задней критической точки и на расстоянии $O(\mathrm{Pe}^{-1/4})$ от оси капли). Такие линии тока определяются выражением

$$\psi = O(\mathrm{Pe}^{-1/2}). \tag{3.1}$$

Здесь ψ — безразмерная функция тока для области внутри капли, записываемая с использованием масштаба скорости (2.10) и длины a в виде

$$\psi = \frac{1}{4} r^2 (1 - r^2) \sin^2 \theta. \tag{3.2}$$

Подчеркнем, что выражение (3.2) справедливо как для малых, так и для больших чисел Рейнольдса (в стоксовом приближении и в условиях потенциального обтекания соответственно). Искомое время определяется интегралом

$$t_c = \oint \frac{ds_\varphi}{v}, \tag{3.3}$$

где ds_φ — дифференциал длины дуги, отсчитываемой вдоль линии тока, v — скорость жидкости, а интеграл берется по замкнутой линии тока, удовлетворяющей условию (3.1). Простая оценка этого интеграла дает [121]

$$t_c = O(\ln \mathrm{Pe}). \tag{3.4}$$

По определению, t_c представляет собой время «замыкания» системы внутренний диффузионный пограничный слой — внутренний диффузионный след. При $t > t_c$ концентрация во внутренней области передней критической точки, согласно сказанному выше, совпадает с пониженной концентрацией во внутреннем следе и области задней критической точки. Вместе с тем при построении автомодельного решения в приближении диффузионного пограничного слоя, как было детально разъяснено в гл. 1, существенно использовалась процедура сращивания асимптотического разложения поля концентрации в области передней критической точки с невозмущенным полем. По указанным выше причинам такая процедура сращивания по истечении времени «замыкания» становится невозможной, и построенное в § 2 автомодельное решение для диффузионного пограничного слоя внутри капли перестает быть пригодным при $t > O(\ln \mathrm{Pe})$. Поэтому при больших значениях времени необходимо использовать другие приближенные методы решения задачи о массопереносе внутри капли.

Массоперенос внутри капли при умеренных значениях времени $(O(\ln \mathrm{Pe}) < t < O(\mathrm{Pe}))$. *Влияние объемной хи-*

мической реакции. При временах, превышающих O (ln Pe), но еще не настолько больших, чтобы произошло существенное изменение концентрации в ядре тороидального вихря, можно по-прежнему рассматривать диффузионный пограничный слой на внутренней поверхности капли с примыкающим к нему ядром потока, причем концентрация в ядре постоянна и равна своему первоначальному значению. Однако, согласно сказанному выше, концентрацию на входе в пограничный слой уже нельзя считать невозмущенной. Ее необходимо определять из условия сращивания с полем концентрации во внутреннем диффузионном следе. Задача осложняется тем, что концентрация в последнем, в свою очередь, зависит от распределения концентрации в диффузионном пограничном слое.

Эту трудность можно преодолеть путем использования метода вспомогательных функций, аналогичного описанному в § 1 и позволяющего свести уравнение диффузионного пограничного слоя к уравнению типа теплопроводности. При этом концентрацию на входе в пограничный слой задаем как некоторую неизвестную функцию вспомогательных переменных. Построим далее обычным методом поля концентрации во внутреннем диффузионном пограничном слое и внутреннем следе, в выражения для которых войдет эта неизвестная функция, и осуществим процедуру асимптотического сращивания распределений концентрации в окрестности передней критической точки и в следе. В результате получается интегральное уравнение для определения введенной функции [23, 84, 86], решив которое найдем искомое поле концентраций внутри капли.

Решение соответствующего интегрального уравнения было получено численным методом в работе [23], причем при расчете авторы ограничились первым приближением по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-1/2}$. Результаты расчета полного потока вещества на внутреннюю поверхность капли показаны на рис. 7.4 в виде зависимости величины $\mathrm{Sh}\,\mathrm{Pe}^{-1/2}$ от безразмерного времени t при разных значениях числа Пекле.

На рис. 7.4 видно, что в полном соответствии с проведенным выше качественным анализом процесса массопереноса внутри капли в начальной стадии процесса, т. е. при $t < O$ (ln Pe), зависимость величины $\mathrm{Sh}\,\mathrm{Pe}^{-1/2}$ от времени универсальна относительно Pe и совпадает с результатом, полученным в § 2 согласно автомодельному решению для диффузионного пограничного слоя, на входе ко-

торого концентрация является невозмущенной. Процесс массопереноса в пограничном слое выходит на стационарный режим при $t \approx 5/2$ и остается стационарным до момента $t = O(\ln \mathrm{Pe})$. Начиная с этого момента на вход пограничного слоя поступает поток с возмущенной концентрацией (в связи с завершением формирования внутреннего диффузионного следа). В результате процесс вновь

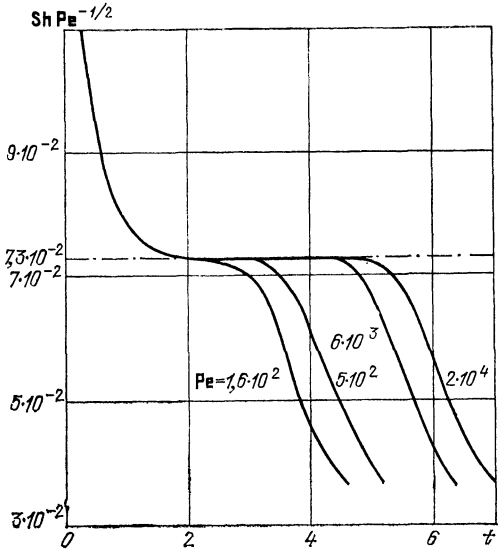


Рис. 7.4. Среднее число Шервуда для внутренней задачи в зависимости от безразмерного времени (объемная реакция отсутствует).

становится нестационарным, причем при $t > O(\ln \mathrm{Pe})$ полный поток вещества на внутреннюю поверхность капли начинает быстро уменьшаться.

Следует однако подчеркнуть, что нет никаких оснований ожидать, что такое уменьшение потока вещества будет продолжаться и далее. Действительно, с течением времени концентрация уменьшается не только в пограничном слое, но и в ядре тороидального вихря, и построенное решение, основанное на допущении о сохранении невозмущенной концентрации в ядре, перестает быть пригодным. Более того, как будет показано далее в § 4, вследствие новой перестройки механизма массопереноса при $t > O$ (Pe) полный поток на внутреннюю поверхность капли вновь приближается к стационарному значению.

Интересно отметить, что в случае объемной химической реакции первого порядка внутри капли вторичный выход на стационарный режим массопереноса можно проследить, оставаясь при этом в рамках только что описанной модели. Основным исходным уравнением служит безразмерное уравнение нестационарной диффузии, в котором член,

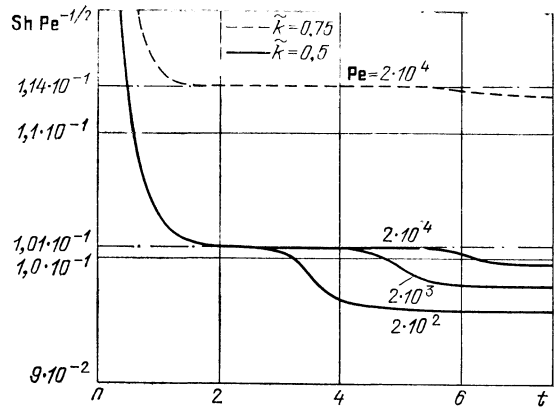


Рис. 7.5. Среднее число Шервуда для внутренней задачи в зависимости от безразмерного времени при наличии объемной химической реакции первого порядка внутри капли, $\tilde{k} = k_v/\mathrm{Pe}$.

описывающий диффузионный перенос, дополнен слагаемым — $\tilde{k}c$, где $\tilde{k} = k_v/\mathrm{Pe}$ — модифицированная безразмерная константа скорости объемной химической реакции. Простым преобразованием (например $c \to ce^{-\tilde{k}t}$) это уравнение сводится к уравнению диффузии без реакции, поэтому его решение может быть получено методом, аналогичным описанному в конце § 1. После соответствующего изменения начальных и граничных условий вновь вводится неизвестная функция, описывающая концентрацию на входе в диффузионный пограничный слой, и общая процедура расчета сохраняется. Более того, в этом случае можно с еще большим основанием ограничиться первым приближением при решении интегрального уравнения.

Результаты такого расчета [23] — зависимости $\mathrm{ShPe}^{-1/2}$ от безразмерного времени t — представлены на рис. 7.5 при разных значениях Pe и $\tilde{k}$ (первичный выход на стационарный режим соответствует результатам работы [57]).

Видно, что рост безразмерной константы скорости объемной химической реакции, так же как рост числа Пекле, приводит к более позднему проявлению влияния диффузионного следа на полный диффузионный поток к поверхности капли. Ясно виден также вторичный выход диффузионного потока на стационарный режим.

Поле концентрации внутри капли при больших значениях времени. Оценим необходимые для дальнейшего порядки величин концентрации в диффузионном следе и диффузионном пограничном слое внутри капли, рассматривая соответствующие диффузионные потоки. Безразмерный диффузионный поток из системы внутренний пограничный слой — внутренний след имеет порядок $\Delta c^{(e)}$, а диффузионный поток из внутреннего пограничного слоя к поверхности капли, а затем во внешний пограничный слой — величина порядка $\Delta c^{(d)}\mathrm{Pe}^{1/2}$. В отсутствие источников вещества указанные два потока должны совпадать, т. е.

$$\Delta c^{(d)} = \Delta c^{(e)} O\,(\mathrm{Pe}^{-1/2})$$

в соответствии с результатом, полученным в § 2. Это означает, что в системе внутренний пограничный слой — внутренний след концентрация мала по сравнению с концентрацией в ядре тороидального вихря. В случаях, когда фигурирующий в граничном условии (2.5) коэффициент распределения $\alpha = O\,(1)$, концентрации во внутреннем и внешнем пограничных слоях будут одного порядка, т. е. порядка $\Delta c^{(d)}$. Следовательно, принимая концентрацию во внутреннем и внешнем пограничных слоях равной концентрации во внешней области, мы вносим ошибку порядка $\Delta c^{(e)} O\,(\mathrm{Pe}^{-1/2})$, которая пренебрежимо мала в главном приближении при больших числах Пекле. Этот результат будет далее использован при формулировке граничного условия для концентрации на внешней границе ядра тороидального вихря.

Отметим еще, что внутренний след при больших значениях времени практически не оказывает влияния на перенос вещества внутри капли. Действительно, общий механизм переноса из ядра потока в след тот же, что и переноса из ядра в диффузионный пограничный слой, однако поверхность следа пренебрежимо мала (порядка $\mathrm{Pe}^{-1/4}$ по сравнению с поверхностью пограничного слоя).

§ 4. Диффузионный механизм переноса вещества внутри капли при больших числах Пекле на заключительной стадии процесса (модель Кронига — Бринка)

Асимптотический анализ изменения поля концентрации в различных областях внутри капли с течением времени, проведенный в § 3, дает возможность перейти к построению модели процесса переноса вещества внутри капли при больших значениях времени. Основная идея состоит в том, чтобы исключить из рассмотрения конвективный перенос вещества, полагая, во-первых, что концентрация остается постоянной на поверхностях тока (замкнутых внутри капли) и, во-вторых, пренебрегая наличием диффузионного пограничного слоя. Эти условия были впервые сформулированы Кронигом и Бринком [151],

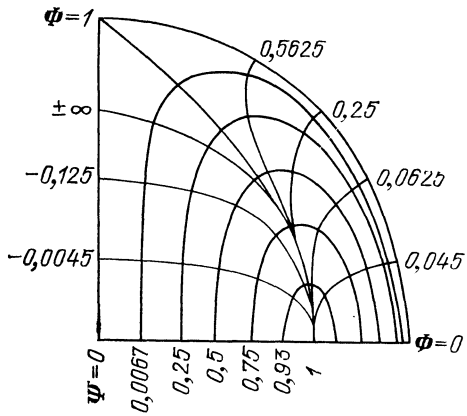


Рис. 7.6. Система криволинейных координат внутри капли в модели Кронига — Бринка.

давшими также некоторые предварительные оценки пределов их применимости. Далее используются как результаты Кронига и Бринка, так и более строгое их обоснование, данное в работах [86, 121].

Формулировка краевой задачи для модели Кронига — Бринка и обоснование исходных гипотез. При формулировке краевой задачи используется безразмерная ортогональная система криволинейных координат Ψ, Φ, λ, в которой $\Psi = 16\psi$, где ψ — безразмерная функция тока для течения внутри капли, $\Phi = \text{const}$ — поверхности, ортогональные поверхностям тока, λ — азимутальная коорди-

ната (рис. 7.6). Функция тока внутри капли в стоксовом приближении и в условиях потенциального обтекания описывается сферическим вихрем Хилла (3.2). После введения масштабов скорости (2.10) и длины (радиус капли) получаем следующие выражения координат Ψ, Φ через исходные сферические координаты:

$$\Psi = 4r^2(1-r^2)\sin^2\theta, \quad \Phi = \frac{r^4\cos^4\theta}{2r^2-1}. \qquad (4.1)$$

Поле безразмерной концентрации внутри капли с учетом осевой симметрии задачи описывается уравнением диффузии в следующей форме (безразмерная концентрация вводится согласно формуле (2.9) для c_2, индекс 2 опускаем):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{v_\Phi}{\sqrt{g_{\Phi\Phi}}}\frac{\partial c}{\partial \Phi} = \frac{1}{\mathrm{Pe}\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\Psi\Psi}}\frac{\partial c}{\partial\Psi}\right) + \frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\Phi\Phi}}\frac{\partial c}{\partial\Phi}\right)\right]. \qquad (4.2)$$

Коэффициенты метрического тензора имеют вид

$$g_{\Psi\Psi} = \frac{1}{4\Delta\sin^2\theta}, \quad g_{\Phi\Phi} = \frac{(r^{-1}-2r)^4}{\Delta\cos^6\theta}, \quad g_{\lambda\lambda} = r^2\sin^2\theta, \qquad (4.3)$$

$$\Delta = 16r^2[(1-r^2)^2 + r^2(3r^2-2)\sin^2\theta],$$

$$g = g_{\Psi\Psi}g_{\Phi\Phi}g_{\lambda\lambda}.$$

В левой части уравнения (4.2) отсутствует слагаемое, описывающее конвективный перенос в направлении изменения координаты Ψ, поскольку в силу выбора системы координат $v_\Psi = 0$.

На основании результатов анализа поля концентрации внутри капли, проведенного в § 3, функцию $c(t, \Psi, \Phi)$ можно представить в виде регулярного разложения по обратному числу Пекле:

$$c(t, \Psi, \Phi) = \bar{c}(t, \Psi) + \mathrm{Pe}^{-1}\delta c(t, \Psi, \Phi), \qquad (4.4)$$

где $\bar{c}(t, \Psi)$ — усредненное по поверхности тока значение концентрации, $\delta c(t, \Psi, \Phi)$ — локальное возмущение этого среднего значения, причем $\oint\sqrt{g}\delta c(t, \Psi, \Phi)\,d\Phi = 0$ (здесь и ниже интеграл берется по линии тока $\Psi = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$).

Представление (4.4) справедливо при условии, что время t_*, истекшее с начала процесса, достаточно для выравнивания концентрации вдоль поверхности тока за

счет циркуляционных движений, т. е. оно должно быть велико по сравнению с характерным временем диффузии a^2/D. Отсюда получаем условие $t_* \geqslant O\,(a^2/D)$, или в безразмерном виде (после введения масштаба времени согласно (2.9))

$$t \geqslant O\,(\mathrm{Pe}). \tag{4.5}$$

Теперь проинтегрируем все члены уравнения (4.2) по линии тока. Учитывая представление (4.4) и условие несжимаемости жидкости, получим в главном приближении по числу Пекле

$$H(\Psi)\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial}{\partial \Psi}\Gamma(\Psi)\frac{\partial \bar{c}}{\partial \Psi}, \tag{4.6}$$

где

$$H(\Psi) = \oint \sqrt{g}\, d\Phi, \quad \Gamma(\Psi) = \oint \frac{\sqrt{g}}{g_{\Psi\Psi}}\, d\Phi.$$

Используя соотношения (4.3) для коэффициентов метрического тензора, нетрудно выразить $H(\Psi)$, $\Gamma(\Psi)$ через известные функции [151]

$$H(\Psi) = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\Psi}}}\mathrm{K}(k), \quad k = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\Psi}}{1+\sqrt{\Psi}}}, \tag{4.7}$$

$$\Gamma(\Psi) = \frac{2}{3}\sqrt{1+\sqrt{\Psi}}\,[(4-3\Phi)\,\mathrm{E}(k) - (4\sqrt{\Psi} - 3\Psi)\mathrm{K}(k)],$$

где $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Сформулируем граничные и начальные условия для полученного уравнения (4.6), (4.7), имея при этом в виду, что во введенной системе координат (4.1) (рис. 7.6) поверхности капли и ее оси соответствует значение $\Psi = 0$, осевой линии ядра тороидального вихря — значение $\Psi = 1$. Вновь обращаясь к результатам качественного анализа поля концентрации внутри капли, проведенного в § 3, заметим, что вблизи поверхности капли и ее оси, где проходит граница между ядром вихря и системой внутренний диффузионный пограничный слой — внутренний диффузионный след, т. е. при $\Psi = O\,(\mathrm{Pe}^{-1/2})$, концентрация отличается от своего значения на поверхности капли на величину $O\,(\mathrm{Pe}^{-1/2})$. Поэтому с той же точностью должно выполняться условие

$$\Psi = 0, \quad \bar{c} = 0. \tag{4.8}$$

На оси вихря функция $\bar{c}\,(t, \Psi)$ должна быть регулярной. Отсюда следует условие

$$\Psi = 1, \quad \bar{c} < \infty. \tag{4.9}$$

Наконец, в качестве начального условия зададим невозмущенное значение концентрации внутри капли в начальный момент (см. § 2), пренебрегая тем самым умень-

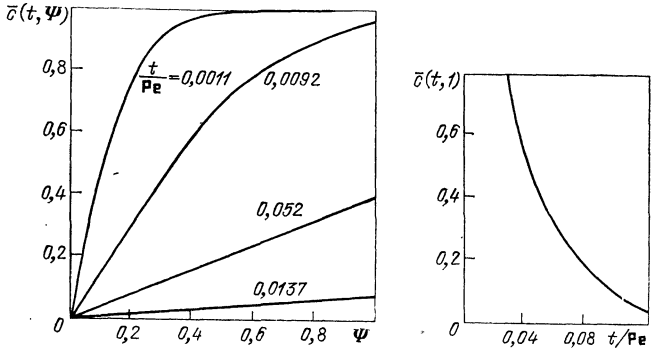


Рис. 7.7. Распределение концентрации $\bar{c}\,(t, \Psi)$ внутри капли и зависимость концентрации на оси тороидального вихря $\bar{c}\,(t, 1)$ от безразмерного времени.

шением концентрации в пределах диффузионного пограничного слоя:

$$t = 0, \quad \bar{c} = 1. \tag{4.10}$$

Решение сформулированной краевой задачи для уравнения параболического типа (4.6) с переменными коэффициентами (4.7) при граничных и начальных условиях (4.8) — (4.10) может быть построено в виде бесконечного ряда методом разделения переменных [151] или численно [121].

Изменение распределения концентрации внутри капли с течением времени. Диффузионный поток вещества через поверхность капли. Методом разделения переменных с последующим определением собственных значений в задаче Штурма — Лиувилля с привлечением квадратичной аппроксимации по Ψ функции $\bar{c}\,(t, \Psi)$ по методу Ритца можно построить решение краевой задачи (4.6) — (4.10) в виде

$$\bar{c}\,(t, \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\mu_n \frac{t}{Pe}\right), \tag{4.11}$$

где $A_1 = 0{,}653$; $A_2 = 0{,}200$; ...; $\mu_1 = 26{,}85$; $\mu_2 = 157{,}3$; ... [151]. Близкие результаты получены в этой задаче и другими методами [12, 121].

На рис. 7.7 показаны зависимости концентрации $\bar{c}(t, 1)$ на оси тороидального вихря от безразмерного времени t и распределение концентрации $\bar{c}(t, \Psi)$ внутри капли при разных значениях t [121]. Следует отметить, что с

Модели массопереноса внутри движущейся капли при больших числах Пекле и пределы их применимости

Интервал времени	Модель	Концентрация в ядре вихря	Режим диффузионного потока на поверхность капли
$0 \leqslant t \leqslant 5{,}2$	Диффузионный погранслой при невозмущенной концентрации на входе	Постоянная	Нестационарный
$5{,}2 < t < O(\ln \mathrm{Pe})$		Постоянная	Промежуточный стационарный
$O(\ln \mathrm{Pe}) \leqslant t < O(\mathrm{Pe})$	Диффузионный погранслой при возмущении концентрации на входе за счет влияния внутреннего диффузионного следа	В начале периода постоянная, в конце падает с течением времени	Нестационарный
$O(\mathrm{Pe}) \leqslant t$	Диффузионный механизм переноса вещества по нормали к поверхности тока	Падает с течением времени	Нестационарный с выходом на стационарный режим

ростом t/Pe концентрация внутри капли быстро падает, причем в силу неравенства (4.5) данные при малых t/Pe носят условный характер.

Скорость экстракции растворенного в капле вещества характеризуется полным диффузионным потоком через поверхность капли. В главном приближении по числу Пекле полный поток получается интегрированием локального потока по поверхности $\Psi = 0$, т. е. в безразмерном

виде

$$I = \oint_c \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial r}\right)_{r=1} ds = -\frac{64}{3}\pi \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \Psi}\right)_{\Psi=0}. \qquad (4.12)$$

Наглядным показателем скорости экстракции вещества из капли может служить время, в течение которого концентрация вещества в капле уменьшится в e раз по сравнению с первоначальной концентрацией. Простой расчет на основании результата (4.11) показывает [151], что это время составляет (в безразмерной форме) $t_e = 0{,}022\ \mathrm{Pe}$, т. е. в 2,5 раза меньше, чем в случае экстракции из неподвижной капли в среде с бесконечным коэффициентом диффузии. При конечном коэффициенте диффузии во внешней среде это различие возрастает.

Следует отметить, что нестационарные задачи конвективного массо- и теплопереноса внутри капли исследовались различными конечно-разностными методами на ЭВМ во многих работах (см., например, [10, 11, 58, 97, 146, 194]).

Завершая анализ процесса диффузии внутри движущейся капли, отметим, что каждая из рассмотренных моделей массопереноса справедлива лишь для определенного интервала времени, поэтому дискуссия (см., например, [12]) о том, какая из них более правильно описывает весь процесс в целом, лишена оснований. Сводка моделей и пределов их применимости приведена в таблице.

Заметим, что отсутствуют аналитические решения для модели диффузионного пограничного слоя, учитывающей изменение концентрации внутри вихря за счет массообмена с пограничным слоем. Модель стационарного внутреннего диффузионного пограничного слоя, рассматривавшаяся во многих работах, справедлива лишь на интервале времени $5/2 < t < O\ (\ln \mathrm{Pe})$ и самостоятельного интереса не представляет, поскольку полностью охватывается моделью нестационарного диффузионного пограничного слоя.

§ 5. Массоперенос к поверхности растущей капли

На практике часто встречаются дисперсные системы, в которых межфазная поверхность растет или уменьшается в процессе массо- или теплопереноса. Примером может служить теплоперенос к растущим паровым пузырькам, всплывающим в кипящей жидкости, а также тепло- и

массообмен пузырей с окружающей их средой в псевдоожиженном слое, когда размеры пузырей растут по мере их подъема в результате коалесценции и притока газа из окружающей среды. Интересным в практическом отношении случаем является массоперенос к поверхности капли, вытекающей из тонкого капилляра в чистую жидкость или раствор. Эта задача имеет непосредственные приложения в теории концевого эффекта (т. е. интенсификации массопереноса в процессе формирования капель в массообменном аппарате, например, при жидкостной экстракции) и в теории полярографического метода, широко применяемого в электрохимии (см., например, [60]). В отличие от задач, рассмотренных в §§ 2—4, здесь и в § 6 мы будем иметь дело с неустановившимся полем течения вокруг капли.

Хорошей моделью процесса вытекания капли из капилляра во многих случаях может служить сферическая капля, растущая в результате наличия в ее центре источника постоянной интенсивности [60, 144]. Пусть m — заданный постоянный массовый расход источника (расход через отверстие капилляра). Тогда зависимость радиуса капли a от времени t_* определится из уравнения сохранения массы

$$\rho \frac{d}{dt_*}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = m$$

(ρ — плотность капли), откуда

$$a(t_*) = bt_*^{1/3}, \tag{5.1}$$

где

$$b = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \tag{5.2}$$

(начальный размер капли в момент $t_* = 0$ включения источника равен нулю). Скорость радиального движения поверхности капли

$$v_{s*}(t_*) = \frac{da}{dt_*} = \frac{1}{3} bt_*^{-2/3}. \tag{5.3}$$

Предполагая, что радиальное расширение капли происходит в среде, покоящейся на бесконечности относительно центра капли, заключаем, что скорость жидкости будет иметь только радиальную составляющую v_{r*}, зависящую только от радиальной координаты r_*. Из уравнения неразрывности теперь следует

$$v_{r*}(r_*) = v_{s*}(t_*)\frac{a^2(t_*)}{r_*^2}. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) вместе с соотношениями (5.1) — (5.3) полностью описывает поле скоростей жидкости вне растущей капли в системе координат, связанной с центром капли.

Удобно перейти к безразмерным переменным, введя в качестве масштаба длины характерный размер капли l, в качестве масштабов времени и скорости — соответственно величины l^3/b^3 и b^3/l^2. Тогда безразмерные переменные связаны с соответствующими размерными переменными следующими соотношениями:

$$R = \frac{a}{l}, \quad r = \frac{r_*}{l}, \quad t = \frac{m}{{}^4/_3\,\pi l^3 \rho}\, t_*, \quad v = \frac{{}^4/_3\,\pi l^2 \rho}{m}\, v_*, \tag{5.5}$$

а зависимости (5.1), (5.3), (5.4) запишутся в виде

$$R(t) = t^{1/3}, \quad v_s(t) = \frac{1}{3}\, t^{-2/3}, \quad v_r(r) = v_s(t)\, \frac{R^2(t)}{r^2}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим процесс диффузии к поверхности расширяющейся капли, считая, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация раствора постоянна и равна концентрации C_∞ вдали от капли, а на поверхности капли при $t > 0$ концентрация не зависит от времени и равна C_s. Выбрав в качестве масштаба концентрации величину C_∞, запишем уравнение диффузии с начальным и граничными условиями в следующей безразмерной форме:

$$\begin{gathered} \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} = \mathrm{Pe}^{-1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r}\right); \\ t = 0, \quad c = 1; \\ r = R(t), \quad t > 0, \quad c = c_s; \quad r \to \infty, \ c = 1. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Здесь

$$\mathrm{Pe} = \frac{b^3}{lD} = \frac{m}{{}^4/_3\,\pi \rho l D} \tag{5.8}$$

— число Пекле, которое, в отличие от числа Пекле в рассмотренных выше случаях, обратно пропорционально масштабу длины.

Поскольку построить аналитическое решение задачи (5.7) во всем диапазоне чисел Пекле не удается, рассмотрим, как обычно, случай больших чисел Пекле, т. е. случай достаточно малых размеров капли или больших расходов источника. Удобно связать систему координат с поверхностью капли, введя безразмерную координату ξ,

отсчитываемую по нормали к поверхности: $\xi = [r_* - a(t)]/l = r - R(t)$. Тогда в приближении диффузионного пограничного слоя краевую задачу (5.7) запишем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left(v_r - \frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \mathrm{Pe}^{-1}\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}; \tag{5.9}$$

$$t = 0, \quad c = 1; \tag{5.10}$$

$$\xi = 0, \quad t > 0, \quad c = c_s; \tag{5.11}$$

$$\xi \to \infty, \quad c = 1. \tag{5.12}$$

При этом согласно зависимостям (5.6)

$$v_r - \frac{dR}{dt} = \frac{1}{3}t^{-2/3}\left(1 + \frac{\xi}{R(t)}\right)^{-2} - \frac{1}{3}t^{-2/3} = \\ = -\frac{2}{3}t^{-1}\xi + O(\xi^2). \tag{5.13}$$

Для решения задачи (5.7) — (5.13) применим метод вспомогательных переменных, описанный в § 1. В рассматриваемом случае зависимость от угловой координаты отсутствует, поэтому для вспомогательных функций ζ, τ и q вместо (1.3) имеем

$$\zeta = \mathrm{Pe}^{1/2}\xi q(t), \quad \tau = \tau(t), \tag{5.14}$$

а дифференциальные соотношения (1.4) принимают вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{2}{3}t^{-1}q, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = q^2. \tag{5.15}$$

Искомое поле концентрации в новых переменных $c = c(\zeta(\xi, t), \tau(t))$ удовлетворяет стандартному одномерному уравнению теплопроводности, автомодельное решение которого (1.5), удовлетворяющее граничным условиям на поверхности капли (5.11) и вдали от нее (5.12), записывается в виде

$$c = (1 - c_s)\,\mathrm{erf}\left[\frac{\mathrm{Pe}^{1/2}\xi q(t)}{2\sqrt{\tau(t)}}\right] + c_s.$$

Осталось найти функции $q(t)$, $\tau(t)$. Интегрируя последовательно уравнения (5.15) и определяя постоянные интегрирования с учетом начального условия (5.10) таким образом, чтобы $q(0) = \tau(0) = 0$, получаем

$$q(t) = t^{2/3}, \\ \tau(t) = \frac{3}{7}t^{7/3}. \tag{5.16}$$

В результате решение краевой задачи (5.9) — (5.12)

можно представить следующим образом:

$$c = (1 - c_s)\,\mathrm{erf}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\,\mathrm{Pe}^{1/2}(r - t^{1/3})\,t^{-1/2}\right] + c_s. \quad (5.17)$$

Для безразмерного среднего потока на поверхность капли

$$\mathrm{Sh} = j = \frac{\partial c}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \sqrt{\frac{7}{3\pi}}\,(1 - c_s)\,\mathrm{Pe}^{1/2} t^{-1/2}, \quad (5.18)$$

откуда, возвращаясь к исходным переменным, имеем выражение для полного потока (в размерной форме) [144]:

$$I_* = 4\pi a^2(t_*)\, j\,\frac{DC_\infty}{l} = \\ = 4{,}17\left(\frac{m}{\rho}\right)^{2/3} D^{1/2} t_*^{1/6}(C_\infty - C_s). \quad (5.19)$$

Эта формула служит теоретической основой полярографического метода, широко используемого для количественного анализа растворов, и хорошо подтверждается экспериментальными данными. Анализ этих данных и обсуждение пределов применимости формулы для расчета капельного полярографа можно найти в [60].

Необходимо отметить, что условие применимости приближения диффузионного пограничного слоя накладывает ограничение снизу на величину числа Пекле. Согласно определению (5.8) отсюда следует ограничение сверху на размер капли

$$\frac{3m}{4\pi\rho Da\,(t_*)} = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\frac{1}{Dt_*^{1/3}} \gg 1$$

(например, при расчете капающего ртутного электрода это соответствует ограничению на размер капли при отрыве или на период капания).

Полученный выше результат (5.17) представляет собой главный член разложения поля концентрации в ряд по малому параметру $\mathrm{Pe}^{-1/2}$. Методом сращиваемых асимптотических разложений, аналогичным описанному в § 4 гл. 1, можно получить следующие члены этого ряда. При помощи вспомогательных функций (5.14), (5.16) задача сводится к решению одномерного уравнения теплопроводности с источником при однородных начальном и граничных условиях. Соответствующий расчет при нулевом начальном радиусе капли дает поправку к формуле (5.19) в виде множителя $\left[1 + 1{,}6\left(\frac{\rho}{m}\right)^{1/3} D^{1/2} t_*^{1/6}\right]$, впервые указанного в работе [150]. Отметим, что вывод указанной поправ-

ки и, в частности, выражение для плотности диффузионного потока к капле приведены в [60] с ошибками.

В случае, когда на поверхности расширяющейся капли протекает реакция первого порядка, определение поля концентрации в главном приближении по параметру $\mathrm{Pe}^{-1/2}$ сводится к решению краевой задачи, аналогичной (5.9) — (5.12) при замене граничного условия (5.11) на соответствующее условие третьего рода. Решение этой задачи, построенное в рядах [60], показывает, что при больших значениях времени полный поток дается выражением, совпадающим с формулой (5.19).

Попытка [24] (см. также [176], где повторен вывод работы [24]) обобщения формулы (5.19) на случай движения центра масс растущей капли (например, из-за удаления центра масс от края капилляра) несостоятельна, поскольку для определения поля скоростей использовались уравнения Стокса, а поправка оказывается пропорциональной квадрату числа Рейнольдса.

§ 6. Диффузия к капле в неустановившемся потоке

Исследуем процесс тепломассообмена капли при больших числах Пекле с неустановившимся потоком, когда нестационарность процесса обусловлена нестационарным характером исходного, невозмущенного поля скоростей жидкости (размер капли фиксирован). Рассмотрим, в частности, случаи поступательного и деформационного течений в стоксовом приближении. Форму капли будем считать сферической.

Постановка задачи. Общее решение. Пусть сферическая капля радиуса a находится в потоке жидкости, представляющем собой суперпозицию некоторого установившегося потока с характерной скоростью U (определяемой, например, в случае поступательного потока формулой (2.10), а для чисто деформационного течения $U = {}^1/_2 | E | a$) и неустановившегося потока. На поверхности капли происходит полное поглощение растворенного в потоке вещества, концентрация которого вдали от капли задана и равна постоянной величине C_∞. С учетом сказанного во введении нетрудно переформулировать эту задачу для случая растворения капли в потоке или теплообмена капли с заданной температурой ее поверхности.

В приближении диффузионного пограничного слоя в безразмерных переменных уравнение диффузии с граничными и начальным условиями можно записать в

следующем виде, аналогичном приведенному в §§ 1, 2:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(c, \psi)}{\partial(\xi, \theta)} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}, \tag{6.1}$$

$$\xi = \infty, \quad c = 1, \tag{6.2}$$

$$\xi = 0, \quad c = 0, \tag{6.3}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta^-} = 0, \tag{6.4}$$

$$t = 0, \quad c = c_i(\xi, \theta). \tag{6.5}$$

Здесь использована связанная с центром капли сферическая система координат r, θ, где $r = 1 + \xi$, угол θ отсчитывается от направления в точку стекания $(1, \theta^+)$ (т. е. от направления потока на бесконечности в случае поступательного потока), θ^- — угловая координата точки натекания (см. гл. 2). Масштабами длины, скорости, времени и концентрации служат величины a, U, a/U и C_∞ соответственно.

Функция $c_i(\xi, \theta)$, определяющая начальное распределение концентрации, может быть задана в виде

$$c_i(\xi, \theta) = 1, \tag{6.6а}$$

что соответствует случаю, когда при $t < 0$ концентрация в потоке постоянна, а при $t = 0$ скачком начинается реакция на поверхности капли. Представляет интерес также случай

$$c_i(\xi, \theta) = c_{\mathrm{st}}(\xi, \theta), \tag{6.6б}$$

где $c_{\mathrm{st}}(\xi, \theta)$ — стационарное распределение концентрации, соответствующее режиму массообмена капли, на поверхности которой происходит полное поглощение растворенного вещества, с установившимся потоком, имевшим место при $t < 0$, скорость которого равнялась скорости рассматриваемого неустановившегося потока в момент $t = 0$. Таким образом, в отличие от случая (6.6а), в котором нестационарность поля концентрации обусловлена двумя факторами: переходным режимом химической реакции и неустановившимся обтеканием, в случае (6.6б) эта нестационарность связана только с нестационарностью поля скоростей. Обе эти возможности реализуются в приложениях и будут рассмотрены ниже.

Для решения задачи (6.1) — (6.5) используем метод вспомогательных функций, описанный § 1. Безразмерную функцию тока вблизи поверхности капли в соответствии

с (1.1) представим в виде

$$\psi = \xi f(t, \theta), \tag{6.7}$$

причем в дальнейшем для простоты ограничимся классом задач, в которых $f(t, \theta)$ — функция с разделяющимися переменными, т. е.

$$f(t, \theta) = f^{(1)}(t) f^{(2)}(\theta) \tag{6.8}$$

(к этому классу относятся и рассматриваемые ниже задачи массопереноса к пузырю в поле поступательного или чисто деформационного течения).

Вводя вспомогательные функции (1.3) и подчинив их дифференциальным соотношениям (1.4), используем соотношения (1.6), (1.7), выбрав постоянную B равной единице. В результате получим вспомогательные функции в следующем виде:

$$\zeta = \mathrm{Pe}^{1/2}\xi f^{(2)}(\theta), \quad \tau = \tau(t, \theta), \tag{6.9}$$

причем функция $\tau(t, \theta)$ определяется из решения системы уравнений в полных дифференциалах

$$\frac{dt}{1} = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{f^{(1)}(t) f^{(2)}(\theta)} = \frac{d\tau}{(f^{(2)}(\theta))^2}. \tag{6.10}$$

Интегрируя левое и правое равенства, получим общее решение системы (6.10)

$$\tau = -\int_{\theta_2}^{\theta} \frac{f^{(2)}(\lambda)\sin\lambda}{f^{(1)}(t(\lambda, \mathscr{E}))}\, d\lambda + \Phi\left(\int_0^t f^{(1)}(\lambda)\, d\lambda + x(\theta)\right), \tag{6.11}$$

где

$$x(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\lambda}{f^{(2)}(\lambda)}\, d\lambda, \tag{6.12}$$

Φ — произвольная функция, причем можно показать [42], что $\Phi(\infty) = 0$; θ_1 и θ_2 — произвольные значения угловой координаты, причем $\theta_1 \neq \theta^-, \theta^+$, а функция $t(\theta, \mathscr{E})$ получена разрешением интеграла

$$\int_0^t f^{(1)}(\lambda)\, d\lambda + x(\theta) = \mathscr{E} \tag{6.13}$$

относительно t.

Учитывая теперь граничные условия (6.2) — (6.4), заключаем, что следует выбрать $\theta_2 = \theta^-$, и решение,

согласно (1.5), принимает вид

$$c(\tau, \zeta) = \operatorname{erf} \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}. \qquad (6.14)$$

Поскольку функция $\zeta(\xi, \theta)$ известна (первое равенство (6.9)), осталось найти τ как функцию времени и угловой координаты, используя начальное условие (6.5), (6.6а) или (6.5), (6.6б) для определения функции Φ в соотношениях (6.11), (6.12) (выбор постоянной θ_1 несуществен). Для этого рассмотрим функцию $\tau(0, \theta)$ согласно равенству (6.11).

В случае (6.6а), очевидно, имеем $\operatorname{erf} \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} = 1$, откуда

$$\tau(0, \theta) = 0. \qquad (6.15а)$$

В случае (6.6б) величина $\tau(0, \theta)$ должна быть такой, чтобы функция $\operatorname{erf} \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau(0, \theta)}}$ совпадала с выражением для установившегося распределения концентрации в поле течения с функцией тока вблизи поверхности капли $\psi = \xi f(0, \theta)$. Поэтому согласно результатам, полученным в § 1 гл. 2, имеем в этом случае

$$\tau(0, \theta) = -\frac{1}{f^{(1)}(0)} \int_{\theta-}^{\theta} f^{(2)}(\lambda) \sin\lambda \, d\lambda. \qquad (6.15б)$$

Используя соотношения (6.11), (6.12), получаем

$$\Phi(x) = \int_{\theta-}^{\theta(x)} \frac{f^{(2)}(\lambda) \sin\lambda}{f^{(1)}(t(\lambda, x))} \, d\lambda + \tau(0, \theta(x)), \qquad (6.16)$$

где функция $\theta = \theta(x)$ определяется как обратная для функции $x = x(\theta)$ (6.12); функция $\tau(0, \theta(x))$ в зависимости от вида начального условия находится по формуле (6.15а) или (6.15б).

Рассмотрим далее нестационарную диффузию к пузырю в неустановившемся потоке, скорость которого вблизи поверхности пузыря зависит от времени по закону [42]

$$f^{(1)}(t) = (1 + \omega t)^{-1}, \quad \omega = \text{const}, \qquad (6.17)$$

т. е. поле течения соответствует суперпозиции установившегося и неустановившегося течений с функциями тока вблизи поверхности $\psi_{st} = y f^{(2)}(\theta)$ и $\tilde{\psi} = -\omega t (1 + \omega t)^{-1} \times y f^{(2)}(\theta)$. При $\omega = 0$ имеем установившееся течение.

Отметим, что в стоксовом приближении метод определения функции $f^{(1)}(t)$ по известной временной зависимости скорости течения вдали от пузыря приведен в работах [159, 187] для поступательного потока и в [42] для осесимметричного деформационного течения. В связи с тем, что этот метод требует применения численных расчетов, мы здесь не будем конкретизировать соответствующую функции (6.17) временную зависимость во всем диапазоне t. Заметим однако, что в интересном для практики случае малых значений времени эта зависимость легко строится аналитически [42] и соответствует равноускоренному течению с функцией тока вдали от пузыря

$$\psi \to (1 + ut)\psi_{st} \text{ при } r \to \infty, \tag{6.18}$$

причем

$$f^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 + 3ut & \text{для поступательного потока,} \\ 1 + {}^5/_3\, ut & \text{для чисто деформационного течения.} \end{cases} \tag{6.19}$$

Поступательный поток. Функция тока определяется выражениями (6.7), (6.8), (6.17) и $f^{(2)}(\theta) = {}^1/_2 \sin^2\theta$; точке натекания соответствует угол $\theta^- = \pi$. Для поля концентрации получаем

$$c = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{4}(r-1)\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\tau(t,\theta)}}\right), \tag{6.20}$$

где

$$\tau(t,\theta) = 4(1+\omega t)\operatorname{tg}^{2\omega}\frac{\theta}{2}\left[\mathrm{B}\left(\cos^2\frac{\theta}{2};\ 2+\omega,\ 2-\omega\right) - \right.$$
$$\left. - \mathrm{B}(b_1(t,\theta);\ 2+\omega,\ 2-\omega)\right] + \tau_*, \tag{6.21}$$

$$\tau_* = \begin{cases} 0 & \text{в случае (6.6а),} \\ 2b_1^2(t,\theta) - {}^1/_3\, b_1^3(t,\theta) & \text{в случае (6.6б),} \end{cases}$$

$$b_1(t,\theta) = \left[1 + (1+\omega t)^{1/\omega}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1}.$$

Здесь $\mathrm{B}(x;\ p,\ q) = \int\limits_0^x \lambda^{p-1}(1-\lambda)^{q-1}\,d\lambda$ — неполная бета-функция.

При $\omega \to 0$ получаем решение задачи для стационарного обтекания, причем в случае (6.6а) приходим к резуль-

татам, приведенным в § 2, а в случае (6.6б) имеем стационарную диффузию, исследованную в гл. 1.

Равноускоренному течению с функцией тока вдали от пузыря, определяемой формулой (6.18), соответствует поле концентрации (6.20) при малых t, причем из сопоставления формул (6.17) и (6.19) следует, что $\omega = -3u$. Нетрудно найти асимптотическое разложение функции $\tau(t, \theta)$ при $t \to 0$, определяющее соответствующее разложение поля концентрации. Для числа Шервуда получим

$$\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_{\mathrm{st}}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2/3\,t}}\left(1 + \dfrac{5}{72}t^2 + \dfrac{7}{24}ut^3 + O(t^4)\right) & \text{в случае (6.6а)}, \\ 1 + \dfrac{9}{5}(2\sqrt{3} - 3)ut^2 + O(t^3) & \text{в случае (6.6б)}, \end{cases} \tag{6.22}$$

где Sh_{st} — число Шервуда при стационарном обтекании ($u = 0$) и стационарном режиме поглощения вещества на поверхности пузыря (см. гл. 1).

Осесимметричное деформационное течение. В этом случае $f^{(2)}(\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$; точкам натекания соответствует угол $\theta^- = \pi/2$, точкам стекания — углы $\theta_1^+ = 0$ и $\theta_2^+ = \pi$ (при смене знака величины коэффициента сдвига точки натекания и стекания меняются местами, и ситуация аналогична рассмотренной в гл. 2: поля концентрации и локальные диффузионные потоки при $E > 0$ и $E < 0$ различаются, а полные потоки совпадают). Поле концентрации определяется по формуле

$$c = \operatorname{erf}\left(\frac{3\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}(r-1)\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{\tau(t,\theta)}}\right), \tag{6.23}$$

где

$$\tau(t,\theta) = \frac{3}{2}(1+\omega t)\,\mathrm{tg}^{\omega/3}\theta\left[\mathrm{B}\left(\cos^2\theta;\ 1+\frac{\omega}{6},\ 1-\frac{\omega}{6}\right) - \mathrm{B}\left(b_2(t,\theta);\ 1+\frac{\omega}{6},\ 1-\frac{\omega}{6}\right)\right] + \tau_*;$$

$$\tau_* = \begin{cases} 0 & \text{в случае (6.6а)}, \\ {}^3/_2\, b_2(t,\theta) - {}^3/_4\, b_2^2(t,\theta) & \text{в случае (6.6б)}, \end{cases} \tag{6.24}$$

$$b_2(t,\theta) = [1 + (1+\omega t)^{-2/(3\omega)}\,\mathrm{tg}^2\,\theta]^{-1}.$$

При $\omega \to 0$ имеем решение задачи при установившемся обтекании, для которого в случае (6.6а)

$$\tau(t, \theta) = -\frac{3}{4}[\sin^4\theta - (1 + e^{-6t}\operatorname{ctg}^2\theta)^{-2}], \qquad (6.25)$$

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}_{\mathrm{st}} \operatorname{cth}^{1/2} 3t.$$

Видно, что время релаксации профилей концентрации и полного диффузионного потока к стационарным значениям составляет $t_r = 1/(6E)$ (ср. с соответствующими результатами для поступательного потока, формулы (2.17), (2.18), (2.27), (2.28)). Зависимость $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_{\mathrm{st}}$ от времени согласно второй формуле (6.25) показана на рис. 7.8.

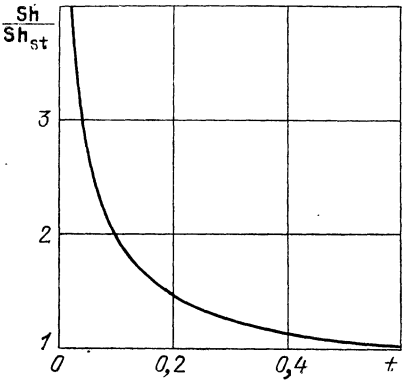


Рис. 7.8. Отношение среднего числа Шервуда при нестационарном и соответствующем стационарном режиме в зависимости от времени для осесимметричного деформационного течения.

Случай (6.6б) при $\omega \to 0$ соответствует стационарной диффузии, исследованной в гл. 1.

При малых t для равноускоренного течения с функцией тока вдали от пузыря, определяемой формулой (6.18), полагая согласно зависимостям (6.17), (6.19) $\omega = -5/3\, u$, получим

$$\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_{\mathrm{st}}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3t}}\left[1 + \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{7}{2}ut^3 + O(t^4)\right] & \text{в случае (6.6а),} \\ 1 + \dfrac{5}{4}(3\pi - 8)\,ut^2 + O(t^3) & \text{в случае (6.6б).} \end{cases} \qquad (6.26)$$

Из формул (6.22), (6.26) видно, в частности, что, как и следовало ожидать, при обтекании с ускорением ($u > 0$) интенсивность массообмена растет, а при обтекании с замедлением ($u < 0$) уменьшается.

§ 7. Массоперенос к твердым частицам. Приближенный метод интегрирования нестационарных уравнений диффузионного пограничного слоя

При анализе нестационарного процесса массопереноса к твердым частицам, движущимся в вязкой жидкости при больших числах Пекле, использованный выше метод вспомогательных функций непосредственно неприменим, поскольку зависимость функции тока вблизи поверхности частицы от поперечной координаты уже не будет линейной. Однако можно применить общий приближенный метод интегрирования нестационарных уравнений диффузионного пограничного слоя [34], основанный на усреднении исходного уравнения диффузии по поперечной координате. Такой метод оказывается достаточно эффективным для исследования процессов массообмена капель, пузырей и твердых частиц, причем для капель и пузырей (а также для твердых частиц в идеальной жидкости) он сводится к обычному методу вспомогательных функций и обеспечивает точный результат.

Постановка задачи. Общее решение. Аналогично тому, как это делалось в § 1, рассмотрим двумерную задачу массообмена частицы с потоком, считая заданной концентрацию C_∞ растворенного вещества вдали от частицы; начальное (при $t = 0$) распределение концентрации в потоке всюду постоянно и равно C_∞. На поверхности частицы в начальный момент $t = 0$ начинается химическая реакция, протекающая в диффузионном режиме.

Связав с частицей ортогональную криволинейную систему координат ξ, η, λ, в которой координата ξ отсчитывается от поверхности ($\xi_s = 0$), безразмерную функцию тока вблизи поверхности частицы запишем в виде

$$\psi = \xi^n f^{(1)}(t)\, f^{(2)}(\eta) + o(\xi^n), \qquad f^{(1)}(0) = 1, \qquad (7.1)$$

т. е. для простоты рассматриваем лишь такие течения, для которых переменные t и η в выражении для ψ разделяются. Значение $n = 1$ соответствует каплям (пузырям) умеренной вязкости в потоке вязкой несжимаемой жидкости и частицам, движущимся в идеальной жидкости, $n = 2$, 3 — твердым частицам в вязком потоке (гл. 4).

В приближении диффузионного пограничного слоя распределение безразмерной концентрации растворенного вещества в потоке описывается уравнением (1.2) с

граничными и начальным условиями

$$\xi = \infty, \quad c = 1; \quad \xi = 0, \quad c = 0; \quad \left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta^-} = 0; \tag{7.2}$$

$$t = 0, \quad c = 1. \tag{7.3}$$

Для построения приближенного решения этой задачи запишем уравнение (1.2) для величины степени превращения $z = 1 - c$ и проинтегрируем по ξ от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$ аналогично тому, как это делается в теории гидродинамического пограничного слоя [63, 64, 109]. С учетом граничных условий (7.2) получаем интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty (1-c)\,d\xi + \frac{1}{\sqrt{g_s}}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(1-c)\,d\xi = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial c}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}, \tag{7.4}$$

которое и будет рассматриваться в дальнейшем вместо исходного дифференциального уравнения диффузионного пограничного слоя.

Теперь для определения концентрации c, удовлетворяющей интегральному соотношению (7.4), применим метод вспомогательных функций, аналогичный описанному в § 1. Опираясь при этом на общие представления о структуре соответствующего решения стационарной задачи (гл. 4), введем переменные $\zeta = \mathrm{Pe}^{1/(n+1)} \times \xi\,[f^{(2)}(\eta)]^{1/n}$, $\tau = \tau(t, \eta)$ и будем искать автомодельное решение в виде

$$c = \left[\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1}\gamma\left[\frac{1}{n+1}, \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\frac{\zeta^{n+1}}{\tau(t,\eta)}\right], \tag{7.5}$$

где $\gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция; $\Gamma(x) = \gamma(x, \infty)$.

Подставляя выражение (7.5) в (7.4) и выполняя интегрирование с учетом соотношения (7.1) и равенств

$$\int_0^\infty \xi^k (1-c)\,d\xi =$$

$$= \frac{\mathrm{Pe}^{-(k+1)/(n+1)}}{k+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-2(k+1)/(n+1)}[f^{(2)}(\eta)]^{-(k+1)/n} \times$$

$$\times\, \tau^{(k+1)/(n+1)}\Gamma\left(\frac{k+2}{n+1}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1},$$

получаем для определения вспомогательной функции

$\tau\,(t,\ \eta)$ систему уравнений в полных дифференциалах

$$\frac{dt}{A_n\tau^{-(n-1)/(n+1)}} = \frac{d\eta}{n^{-1/2}_s f^{(1)}\,(t)\,[f^{(2)}\,(\eta)]^{1/n}} = \frac{d\tau}{[f^{(2)}\,(\eta)]^{2/n}}, \qquad (7.6)$$

где

$$A_n = \Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right)\left[\frac{\mathrm{Pe}}{(n+1)^2}\right]^{(n-1)/(n+1)}. \qquad (7.7)$$

Начальным условием для системы (7.6) служит следствие условия (7.3)

$$\tau\,(0,\ \eta) = 0, \qquad (7.8)$$

а граничное условие должно быть выбрано так, чтобы выполнялись условия симметрии (последнее соотношение в (7.2)).

После того как функция $\tau\,(t,\ \eta)$ найдена, локальный диффузионный поток на поверхность частицы согласно (7.5) определяется по формуле

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-(n-1)/(n+1)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1}\mathrm{Pe}^{1/(n+1)}\times$$
$$\times\,[f_2\,(\eta)]^{1/n}\,[\tau\,(t,\ \eta)]^{-1/(n+1)}. \qquad (7.9)$$

Отметим, что при установившемся обтекании ($f^{(1)}\,(t) = 1$) характерное время выхода процесса массообмена на стационарный режим будет величиной порядка $\mathrm{Pe}^{(n-1)/(n+1)}$, т. е. в случае твердых частиц оно существенно выше, чем в случае капель ($O\,(\mathrm{Pe}^{1/3})$ и $O\,(1)$ соответственно).

Для капель и пузырей ($n = 1$) формула (7.5) совпадает с формулой (1.5) при $A = 1$ и $c_s = 0$, а вспомогательные функции ζ и τ будут теми же, что и указанные в § 1 (ср., например, систему (7.6) при $n = 1$ с системой (1.5)), т. е. в этом случае описанный метод сводится к методу, изложенному в § 1.

Для твердых частиц в вязком потоке ($n = 2$) описанный здесь метод дает приближенное решение. Чтобы получить представление о точности метода в этом случае, рассмотрим асимптотическое выражение для концентрации при $t \to 0$, т. е. когда можно пренебречь конвективным переносом. Тогда концентрация не будет зависеть от продольной координаты η, и для локального диффузионного потока согласно (7.6) — (7.9) получим

$$t \to 0, \quad j \to \left[\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1}\left[\Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right)\frac{n+1}{2}\,\frac{\mathrm{Pe}}{t}\right]^{1/2}.$$

С другой стороны, решение исходной задачи (1.2), (7.2),

(7.3) в пренебрежении конвективным переносом имеет вид

$$t \to 0, \quad j \to \left(\frac{\mathrm{Pe}}{\pi t}\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что при $t \to 0$ ошибка приближенной формулы (7.9) для твердой поверхности ($n = 2$) составляет менее 6% и, по-видимому, является максимальной во всем диапазоне $0 \leqslant t < \infty$.

Диффузия к сфере в окрестности передней критической точки. Рассмотрим локальный диффузионный поток в окрестности передней критической точки твердой сферы, обтекаемой поступательным установившимся потоком в стоксовом приближении. В сферической системе координат r, θ, φ, связанной с центром сферы, в окрестности точки $\theta = 0$, $r = 1$ имеем $g_s^{1/2} = \theta$, $f^{(1)} = 1$, $f^{(2)} = {}^3/_4\,\theta^2$, $n = 2$. Из формул (7.6) — (7.9) получаем

$$j\,(\theta = 0) = 3 \cdot 2^{-1/3}[1 + \Phi\,(t)]^{1/3}\,\mathrm{Pe}^{1/3}. \qquad (7.10)$$

Функция $\Phi = \Phi\,(t)$ определяется из уравнения

$$t = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\,\mathrm{Pe}\right)^{1/3} \int_0^{1/\Phi} x^{-1/3}(1 + x)^{-2/3}\,dx.$$

Приведем асимптотики этой функции при малых и больших значениях времени:

$$t \to 0, \quad \Phi \to \left(\frac{3}{2}\,\mathrm{Pe}\right)^{1/2} \Gamma^{3/2}\left(\frac{2}{3}\right) t^{-3/2},$$

$$t \to \infty, \quad \Phi \to \exp\left\{-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\,\mathrm{Pe}^{-1/3} t\right\}.$$

Диффузия к вращающемуся диску. Рассмотрим бесконечный плоский диск, вращающийся в вязкой несжимаемой жидкости с постоянной угловой скоростью Ω. На поверхности диска в момент $t = 0$ начинается химическая реакция, протекающая в диффузионном режиме.

Как и в случае стационарной диффузии [60], распределение концентрации в жидкости не зависит от радиальной и угловой координат и будет функцией только от расстояния от поверхности диска и времени.

В безразмерных переменных в приближении диффузионного пограничного слоя задача определения нестационарного поля концентрации сводится к решению

уравнения [60]

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha\xi^2 \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\mathrm{Sc}} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}; \quad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad \alpha = 0{,}51 \qquad (7.11)$$

с граничными и начальными условиями (7.2), (7.3). Здесь характерными масштабами длины, времени и скорости являются величины $L = (\nu/D)^{1/2}$, $T = \Omega^{-1}$, $U = (\nu\Omega)^{1/2}$; $\mathrm{Pe} = LUD^{-1} = \mathrm{Sc}$; ν — кинематическая вязкость жидкости.

Нетрудно заметить, что уравнение (7.11) может быть записано в виде (1.2), (7.1) при

$$g_s = 1, \quad \psi = \alpha\eta\xi^2, \quad c = c\,(t,\ \xi) \quad (n = 2). \qquad (7.12)$$

Как и ранее, приближенное решение задачи (7.11), (7.2), (7.3), (7.12) ищем, исходя из интегрального соотношения (7.4) в виде

$$c = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3},\ \frac{\mathrm{Sc}\,\xi^3}{9\tau}\right), \qquad \tau = \tau(t). \qquad (7.13)$$

При этом для определения функции $\tau\,(t)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{Sc}^{1/3}\tau^{-1/3}\frac{d\tau}{dt} + 3\alpha\tau = 1, \qquad \tau(0) = 0. \qquad (7.14)$$

В силу (7.9) решение задачи (7.14) приводит к следующему неявному выражению для локального диффузионного потока:

$$\tilde{t} = -\ln(1 - J) + \frac{1}{2}\ln(1 + J + J^2) + \\ + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + 2J}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \qquad (7.15)$$

Здесь

$$\tilde{t} = 3^{4/3}\alpha^{2/3}\left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}\mathrm{Sc}^{-1/3}t, \quad J = \frac{j}{j_{\mathrm{st}}},$$

$$j_{\mathrm{st}} = \lim_{t\to\infty} j = \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}(9\alpha\,\mathrm{Sc})^{1/3}$$

$$(\tilde{t} \to 0, \quad J \to (2\tilde{t}/3)^{-1/2}; \quad \tilde{t} \to \infty, \quad J \to 1 + \sqrt{3}\,e^{-\tilde{t}}).$$

На рис. 7.9 сплошной линией показана зависимость нормированного локального диффузионного потока от времени; j_{st} соответствует стационарному значению. Из формулы (7.15) следует, что при $\tilde{t} = \tilde{t}_r$, где $\tilde{t}_r = 2{,}6$, ло-

кальный поток менее чем на пять процентов отличается от своего стационарного значения.

Принимая $\tilde{t}_r$ за характерное время установления процесса, для t_r в силу (7.15) получаем $t_r = 1{,}27 \cdot \mathrm{Sc}^{1/3}$.

На рис. 7.9 штриховой линией показана зависимость j^0/j_{st} от $\tilde{t}$, где j^0 определяется приведенной выше точной асимптотикой локального потока при $t \to 0$.

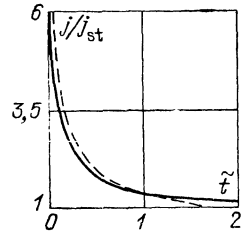


Рис. 7.9. Отношение нестационарного локального диффузионного потока к поверхности вращающегося диска к соответствующему стационарному значению в зависимости от безразмерного времени (сплошная кривая). Штриховой кривой показана асимптотика этого отношения при $\tilde{t} \to 0$.

Коснемся оценки погрешности описанного интегрального метода. Во-первых, здесь имеет место определенная аналогия с интегральными методами, неплохо зарекомендовавшими себя в теории гидродинамического пограничного слоя [63, 64, 109]. Во-вторых, как следует из результатов этого параграфа, в общем случае произвольного обтекания при $t \to 0$ для $n = 2$ погрешность метода составляет менее 6%. В-третьих, в задачах о диффузии к реагирующим каплям (пузырям) в ламинарном потоке вязкой жидкости и к частицам в идеальной жидкости (что соответствует значению $n = 1$ в выражении (7.5)) предлагаемый метод является точным. Это можно показать путем непосредственной подстановки формулы (7.5) в исходное уравнение (1.2), после чего придем к уравнению (7.6) для определения искомой функции τ. Следует отметить, что такого рода точные аналоги в нестационарных задачах гидродинамического пограничного слоя отсутствуют.

§ 8. Нестационарный массоперенос к частице при малых числах Пекле

Исследуем процесс установления стационарного режима массопереноса к сферической частице в установившемся поступательном потоке при малых числах Пекле и Рейнольдса в случае, когда в некоторый момент времени на поверхности частицы начинается химическая реакция первого порядка [25] (например, вследствие разогрева частицы до критической температуры). Решение этой за-

дачи дает, в частности, возможность оценить время выхода на рассмотренный в § 1 гл. 6 стационарный режим массообмена частицы с потоком.

В безразмерных переменных нестационарное уравнение диффузии при наличии конвективного переноса, начальное и граничные условия можно записать в виде

$$\Delta z = -\mathrm{Pe}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pe}}{r^2}\frac{\partial(\psi, z)}{\partial(r, \mu)}, \tag{8.1}$$

$$t = 0, \quad r \geqslant 1, \quad z = 0, \tag{8.2}$$

$$r \to \infty, \quad z \to 0, \tag{8.3}$$

$$t > 0, \quad r = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = k(z - 1), \tag{8.4}$$

$$z = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{aU_\infty}{D}, \quad k = \frac{aK_s}{D}, \quad \mu = \cos\theta.$$

Здесь, как и прежде, t — безразмерное время, причем масштабом времени служит отношение a/U_∞, остальные обозначения и система координат — те же, что в § 1 гл. 6. При $k \to \infty$ задача (8.1) — (8.4) также описывает нестационарный режим теплообмена сферической частицы с потоком при постоянной температуре частицы T_s (в этом случае под D следует понимать коэффициент температуропроводности среды, z — отношение $(T_\infty - T_*)(T_\infty - T_s)^{-1}$, где T_* — температура потока, T_∞ — температура на бесконечности).

Будем решать задачу методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Пекле, предполагая, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} < O(1)$ и используя известные внутреннее и внешнее разложения для функции тока (формулы (1.6) и (1.7) гл. 6).

Введем преобразование Лапласа от степени превращения z:

$$Z(s, r, \mu) = \int_0^\infty e^{-\mathrm{Pe}\, st}\, z(t, r, \mu)\, dt. \tag{8.5}$$

Аналитичность функции $Z(s, r, \mu)$ в правой полуплоскости комплексного переменного s следует из ограниченности функции $z(t, r, \mu)$.

Уравнение для $Z(s, r, \mu)$, полученное из (8.1) с учетом условия (8.2), для внутренней области $\Omega^{(i)}$: $\{1 \leqslant r \leqslant O(\mathrm{Pe}^{-1})\}$ имеет вид

$$\Delta Z = \mathrm{Pe}^2 s Z^{(i)} + \frac{\mathrm{Pe}}{r^2}\frac{\partial(\psi^{(i)}, Z^{(i)})}{\partial(r, \mu)}, \tag{8.6}$$

для внешней области $\Omega^{(e)}$: $\{O(\mathrm{Pe}^{-1}) \leqslant r\}$

$$\Delta_\rho Z^{(e)} = sZ^{(e)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\psi^{(e)}, Z^{(e)})}{\partial(\rho, \mu)}, \tag{8.7}$$

где Δ_ρ — осесимметричный сферический оператор Лапласа в переменных $\rho = \mathrm{Pe}\, r$, μ.

Из граничных условий (8.3), (8.4) следует

$$r = 1, \quad \frac{\partial Z^{(i)}}{\partial r} = kZ^{(i)} - \frac{k}{\mathrm{Pe}\, s}, \tag{8.8}$$

$$\rho \to \infty, \quad Z^{(e)} \to 0. \tag{8.9}$$

Следуя методу сращиваемых асимптотических разложений, ищем функции $Z^{(i)}(s, r, \mu)$ и $Z^{(e)}(s, \rho, \mu)$ в виде

$$Z^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)}(\mathrm{Pe})\, Z_n^{(i)}(r, \mu) \text{ в } \Omega^{(i)}, \tag{8.10}$$

$$Z^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(e)}(\mathrm{Pe})\, Z^{(e)}(\rho, \mu) \text{ в } \Omega^{(e)}, \tag{8.11}$$

причем

$$\frac{\varepsilon_{n+1}^{(i)}}{\varepsilon_n^{(i)}} \to 0, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}^{(e)}}{\varepsilon_n^{(e)}} \to 0 \text{ при } \mathrm{Pe} \to 0.$$

Решая соответствующие задачи (8.6), (8.8) и (8.7), (8.9), определяем возникающие произвольные константы сращиванием внутреннего (8.10) и внешнего (8.11) асимптотических разложений аналогично тому, как это делалось в § 1 гл. 6.

Нулевое приближение. Нулевое приближение внешнего разложения имеет вид $Z_0^{(e)}(\rho, \mu) = 0$. Для внутреннего разложения получаем уравнение Лапласа $\Delta Z_0^{(i)} = 0$ и следует положить $\varepsilon_0^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^{-1}$. При таком выборе $\varepsilon_0^{(i)}(\mathrm{Pe})$ решение $\varepsilon_0^{(i)}(\mathrm{Pe})Z_0^{(i)}$, удовлетворяющее условию (8.8), является лапласовским образом нулевого приближения, приведенного в § 1 гл. 6 (формула (1.12)). В результате получим

$$Z_0^{(i)} = \frac{q}{sr}, \quad q = \frac{k}{k+1}. \tag{8.12}$$

Первое приближение. Из выражения (8.12) следует, что $\varepsilon_1^{(e)}(\mathrm{Pe}) = 1$. Уравнение для $Z_1^{(e)}(\rho, \mu)$ имеет вид

$$(\Lambda - s) Z_1^{(e)} = 0, \quad \Lambda = \Delta_\rho - \mu\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\mu}. \tag{8.13}$$

Решение уравнения (8.13), затухающее на бесконечности согласно условию (8.9), таково:

$$Z_1^{(e)} = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathsf{K}_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{1+4s}\right) \mathsf{P}_n(\mu).$$

Здесь $\mathsf{K}_{n+1/2}(x)$ — функция Макдональда, $\mathsf{P}_n(\mu)$ — полином Лежандра; всюду берется та ветвь функции $\sqrt{1+4s}$, которая на действительной положительной полуоси комплексного переменного s принимает положительное значение. Коэффициенты A_n определяются из условий сращивания с (8.12). В результате имеем

$$Z_1^{(e)} = \frac{q}{s\rho} \exp\left[\frac{\rho}{2}(\mu - \sqrt{1+4s})\right]. \qquad (8.14)$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_1^{(i)}(\mathsf{Pe}) = 1$, и уравнение для $Z_1^{(i)}$ имеет вид

$$\Delta Z_1^{(i)} = -\frac{q}{sr^2}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию, вытекающему из (8.8), и условию сращивания с (8.14), записывается следующим образом:

$$Z_1^{(i)} = \frac{q\sqrt{1+4s}}{2s}\left(\frac{q}{r} - 1\right) + \\ + \frac{q}{s}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3(3-2q)}{8(2-q)}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8r^3}\right]\mu. \qquad (8.15)$$

Второе приближение. Во втором приближении $\varepsilon_2^{(e)}(\mathsf{Pe}) = \mathsf{Pe}$. Для функции $Z_2^{(e)}$ получаем уравнение и граничное условие

$$(\Lambda - s) Z_2^{(e)} = \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) L(\rho, \mu); \quad \rho \to \infty, \quad Z_2^{(e)} \to 0; \quad (8.16)$$

$$L(\rho, \mu) = \frac{3}{4}\frac{q\,\mathsf{Sc}}{s\rho^3}\left(\frac{\sqrt{1+4s}-1}{2\,\mathsf{Sc}}\rho + \sqrt{1+4s} + \frac{1}{\mathsf{Sc}} + \frac{2}{\rho} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+4s}-1}{2\,\mathsf{Sc}}\mu - \frac{\mathsf{Sc}-1}{\mathsf{Sc}}\mu\right)\exp\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\mu-1}{\mathsf{Sc}} - \sqrt{1+4s}\right)\right] - \\ - \frac{3}{4}\frac{q\,\mathsf{Sc}}{s\rho^3}\left(\sqrt{1+4s} + \frac{2}{\rho} - \mu\right)\exp\left(-\frac{\rho}{2}\sqrt{1+4s}\right).$$

После громоздких вычислений получим в результате

сращивания:

$$Z_2^{(e)}(\rho, \mu) = \frac{q}{2s\rho}\left(q\sqrt{1+4s} - \frac{3}{2}\mu\right) - \frac{q}{2s}\ln\rho + \frac{q}{s}\tilde{\zeta}(s, q, \mathrm{Sc}) + \frac{q}{4s}\left(q\sqrt{1+4s} + \frac{3}{4\,\mathrm{Sc}}\right)\mu - \frac{5q}{24s}\left(1 + \frac{3}{10\,\mathrm{Sc}}\right)\frac{3\mu^2-1}{2} + O(\rho\ln\rho), \quad (8.17)$$

$$\tilde{\zeta}(s, q, \mathrm{Sc}) = -\frac{1+4s}{4}\mathrm{Sc}^2 + \frac{\sqrt{1+4s}}{8}\mathrm{Sc} + \frac{25}{24} - \frac{1+4s}{4}q - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+4s) + \frac{1}{4}(\mathrm{Sc}\sqrt{1+4s}+1)^2 \times (\mathrm{Sc}\sqrt{1+4s} - 2)\ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Sc}\sqrt{1+4s}}\right).$$

Для второго приближения внутреннего разложения, как видно из выражения (8.17), $\varepsilon_2^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}\ln\mathrm{Pe}$. Для $Z_2^{(i)}$ имеем уравнение Лапласа, решение которого, удовлетворяющее условию (8.8) и условию сращивания с 8.17), таково:

$$Z_2^{(i)} = \frac{q}{2s}\left(\frac{q}{r} - 1\right). \quad (8.18)$$

Третье приближение. В связи с появлением логарифмического члена во втором приближении внешнего разложения третье приближение внутреннего разложения также определяется сращиванием с $\overline{Z}_2^{(e)}$. Не приводя здесь всех вычислений ввиду их громоздкости, отметим лишь, что $\varepsilon_3^{(i)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}$, а $\varepsilon_3^{(e)}(\mathrm{Pe}) = \mathrm{Pe}^2\ln\mathrm{Pe}$, поэтому уравнение для $Z_3^{(e)}$ совпадает с (8.13). После сращивания

$$Z_3^{(e)} = \frac{q^2}{2s\rho}\exp\left[\frac{\rho}{2}\left(\mu - \sqrt{1+4s}\right)\right].$$

Среднее число Шервуда. Для определения нестационарного поля концентрации необходимо найти обычным методом оригиналы функций $Z^{(i)}(s, r, \mu)$ и $Z^{(e)}(s, \rho, \mu)$, используя полученные выше результаты для значений $t \geqslant O(\mathrm{Pe}^{-1})$. Вычисляя затем локальный диффузионный поток по полю концентрации вблизи частицы и интегрируя по поверхности сферы, получим для среднего числа Шервуда

$$\mathrm{Sh} = q + \frac{1}{2}q^2\mathrm{Pe}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi\,\mathrm{Pe}\,t}}\exp\left(-\frac{\mathrm{Pe}\,t}{4}\right) - \operatorname{erf}\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}\,t}}{2}\right] + \frac{1}{2}q^2\mathrm{Pe}^2\ln\mathrm{Pe} + O(\mathrm{Pe}^2) \quad (t \geqslant O(\mathrm{Pe}^{-1})). \quad (8.19)$$

В пределе при $t \to \infty$ соотношение (8.19) дает результат, полученный для стационарного режима (§ 1 гл. 6). В частном случае бесконечно большой скорости реакции на поверхности частицы ($q = 1$) формула (8.19) переходит в выражение, полученное в работе [128]. Отметим, что,

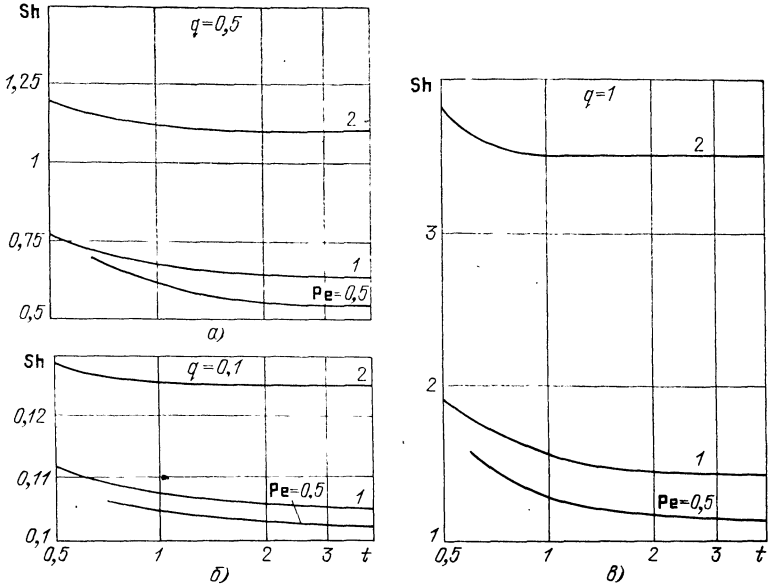


Рис. 7.10. Зависимость среднего числа Шервуда для сферической частицы от безразмерного времени при разных числах Пекле и скоростях поверхностной химической реакции первого порядка.

как и в случае стационарного режима, зависимость числа Шервуда от числа Шмидта появляется впервые в слагаемом $O(\mathrm{Pe}^2)$.

На рис. 7.10 показана зависимость числа Шервуда от t при разных значениях числа Пекле и константы скорости поверхностной химической реакции согласно соотношению (8.19). Видно, что процесс массообмена практически выходит на стационарный режим при $t > 2/\mathrm{Pe}$, т. е., в размерной форме, при $t_* \gtrsim 2D/U_\infty^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамзон Б. М., Ривкинд В. Я., Фишбейн Г. А.* Нестационарный массообмен с гетерогенной химической реакцией при ламинарном обтекании сферы.— Инж.-физ. журн., 1976, т. 30, № 1, с. 73—79.
2. *Аксельруд Г. А.* Массообмен тел сферической формы с потоком жидкости.— Инж.-физ. журн., 1970, т. 19, № 1, с. 110—112.
3. *Аксельруд Г. А., Молчанов А. Д.* Растворение твердых веществ.— М.: Химия, 1977.—272 с.
4. *Аксельруд Г. А., Орепер Г. М.* Массообмен между твердым сферическим телом и токонесущей жидкостью.— Инж.-физ. журн., 1974, т. 27, № 6, с. 1015—1018.
5. *Астарита Дж.* Массопередача с химической реакцией/Пер. с англ.— Л.: Химия, 1971.—224 с.
6. *Бартман А. Б., Перельман Т. Л.* Новый асимптотический метод в аналитической теории переноса.— Минск: Наука и техника, 1975.—120 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т. 2.— М.: Наука, 1973.—296 с.
8. *Бенилов М. С., Рогов Б. В., Тирский Г. А.* Об ионном токе насыщения на электрический зонд в медленно движущейся плазме.— ПМТФ, 1982, № 3, с. 5—13.
9. *Брандт Б. Б., Дильман В. В.* Кинетика растворения твердых тел в ламинарном потоке при больших числах Рейнольдса и Прандтля.— Теор. основы хим. технол., 1975, т. 8, вып. 5, с. 765—767.
10. *Броунштейн Б. И., Ривкинд В. Я.* К вопросу об обосновании применимости модели Кронига и Бринка для внутренней задачи массообмена в движущейся капле.— Теор. основы хим. технол., 1981, т. 15, № 6, с. 912—913.
11. *Броунштейн Б. И., Ривкинд В. Я.* Внутренняя задача массо- и теплообмена с замкнутыми линиями тока при больших числах Пекле.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 6, с. 1323—1326.
12. *Броунштейн Б. И., Фишбейн Г. А.* Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах.— Л.: Химия, 1977, 280 с.
13. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной изотропной турбулентности.— М.: ИЛ, 1955, 198 с.
14. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.— М.: Наука, 1973, 758 с.
15. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967, 312 с.
16. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости.— В сб.: Механика жидкости и газа, т. 10.— М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1976, с. 86—147.

17. *Волощук В. М.* Фундаментальное решение уравнения диффузионного пограничного слоя.— Тр. Ин-та эксперимент. метеорологии, 1973, вып. 3 (37), с. 3—17.
18. *Волощук В. М., Седунов Ю. С.* Процессы коагуляции в дисперсных системах.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975, 320 с.
19. *Волощук В. М., Стужнева Л. В.* Диффузионный поток на сферу при малых и средних числах Рейнольдса. Приближение диффузионного пограничного слоя.— ПМТФ, 1970, № 2, с. 144—147.
20. *Восканян А. Б., Головин А. М., Толмачев В. В.* Конвективная диффузия в системе периодически расположенных сфер при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1966, № 5, с. 94—99.
21. *Головин А. М.* Растворение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1968, № 6, с. 48—59.
22. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле.— Вестник МГУ, сер. 1, мат., и мех., 1979, № 4, с. 77—83.
23. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Нестационарный конвективный массоперенос внутри капли при наличии объемной химической реакции.— ПММ, 1983, т. 47, № 5, с. 771—780.
24. *Голуб К., Крылов В. С.* К теории конвективной диффузии на растущую каплю.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, с. 58—63.
25. *Гольдберг А. Б., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О нестационарном массообмене реагирующей сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1041—1047.
26. *Гупало Ю. П.* К теории фильтрации аэрозолей.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 6, с. 1339—1342.
27. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, с. 127—130.
28. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О массо- и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 255—265.
29. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 475—479.
30. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 5, с. 941—945.
31. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Массоперенос в диффузионном следе капли при стоксовом обтекании.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 307—311.
32. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2, с. 64—74.
33. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1, с. 59—69.
34. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О приближенном интегрировании нестационарных уравнений диффузионного

или теплового пограничного слоя.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1982, № 5, с. 87—92.
35. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Диффузионный поток на деформируемый газовый пузырь при больших числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4, с. 70—76.
36. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сысков Ю. Н.* Диффузия к обтекаемой реагирующей частице произвольной формы.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2, с. 99—106.
37. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* О поле температур, возникающем при движении реагирующей сферы при малых конечных числах Пекле и Рейнольдса.— ПМТФ, 1972, № 2, с. 59—65.
38. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6, с. 161—162.
39. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Обтекание покрытой жидкой пленкой сферы при малых числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5, с. 3—13.
39а. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Диффузия к частице, покрытой жидкой пленкой.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3, с. 178—180.
40. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Улин В. И.* Диффузия к частице в однородном поступательно-сдвиговом потоке.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 497—504.
41. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Полянин В. Д., Рязанцев Ю. С.* Об асимптотике решения задачи о конвективной диффузии к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1978, № 1, с. 99—103.
42. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С.* О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1978, т. 42, № 3, с. 441—449.
43. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С.* Об интегрировании нестационарного уравнения теплообмена движущихся в жидкости тел.— ПММ, 1979, т. 43, № 6, с. 1119—1122.
44. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Конвективная диффузия к твердой частице в потоке газа при нелинейной кинетике гетерогенной химической реакции.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 1, с. 86—89.
45. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Конвективная диффузия к частице при нелинейной кинетике в случае трехмерного обтекания вязкой жидкостью.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 3, с. 547—550.
46. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Конвективная диффузия к капле при произвольных условиях поглощения. Приближение диффузионного пограничного слоя.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6, с. 64—69.
47. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Макрокинетика поверхностных реакций в потоке жидкости или газа. Приближенный метод расчета реагирующих частиц.— Инж.-физ. журн., 1981, т. 41, № 2, с. 214—219.
48. *Данквертс П. В.* Газожидкостные реакции/Пер. с англ.— М.: Химия, 1973, 296 с.
49. *Дильман В. В., Брандт Б. Б.* Диффузионный поток на движущуюся каплю.— Инж.-физ. журн., 1967, т. 12, № 5, с. 662—665.

50. *Дильман В. В., Брандт Б. Б.* Об одном классе автомодельных задач конвективной диффузии.— Теор. основы хим. технол., 1974, т. 8, № 4, с. 605—608.
51. *Дильман В. В., Полянин А. Д.* Метод модельных уравнений и аналогий в задачах о конвективном массообмене с поверхностными и объемными реакциями.— Хим. промышленность, 1983, № 4, с. 238—241.
52. *Животягин А. Ф.* Влияние гомогенной химической реакции на распределение концентрации в диффузионном следе капли.— Вестник МГУ, сер. математика и механика, 1980, № 6, с. 73—78.
53. *Искаков М. С.* Влияние поперечного градиента скорости на массообмен между твердой сферой и жидкостью при больших числах Пекле.— В сб.: Гидродинамика и теплообмен в конденсированных средах. Новосибирск, 1981, с. 111—116.
54. *Искаков М. С., Накоряков В. Е.* Конвективный перенос массы между твердой сферической частицей и жидкостью при больших числах Пекле.— ПМТФ, 1982, № 3, с. 71—76.
55. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
56. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972, 274 с.
57. *Крылов В. С.* Диффузионный пограничный слой на поверхности движущейся капли при наличии объемной химической реакции.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1, с. 146—149.
58. *Крылов В. С., Сафонов А. И., Гомонова К. В.* Теоретический анализ массопередачи в сферических каплях при больших числах Пекле.— Теор. основы хим. технол., 1979, т. 13, № 4, с. 518—522.
59. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. Изд. 5-е, перераб. и доп.— М.: Атомиздат, 1979, 416 с.
59а. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Тепломассообмен и волны в газо-жидкостных системах.— Новосибирск: Наука, 1984.—302 с.
60. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. Изд. 2-е, доп. и перераб.— М.: Физматгиз, 1959, 670.
61. *Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П.* К теории нестационарной диффузии из движущейся капли.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 3, с. 648—652.
62. *Левич В. Г., Мейман Н. Н.* Теория медленных гетерогенных реакций в движущейся жидкости.— Докл. АН СССР, 1951, т. 79, № 1, с. 97—100.
63. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, 479 с.
64. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. 4-е изд., доп. и перераб.— М.: Наука, 1973, 848 с.
65. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.— М.: Мир, 1983, 400 с.
66. *Найфэ А.* Методы возмущений.— М.: Мир, 1976, 456 с.
67. *Натансон Г. Л.* Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата.— Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 1, с. 100—103.
68. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978, 336 с.

69. *Новиков Е. А.* О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости.— ПММ, 1958, т. 22, № 3, с. 412—414.
70. *Орепер Г. М.* Движение и растворение капли в токонесущей жидкости.— Инж.-физ. журнал, 1975, т. 28, № 4, с. 619—623.
71. *Подгаецкий Э. М.* Диффузия в пограничном слое на пластине с неоднородными химическими свойствами.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 871—874.
72. *Полянин А. Д.* Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, обтекаемой стоксовым потоком.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1, с. 176—179.
73. *Полянин А. Д.* О структуре диффузионного следа поглощающей частицы вблизи критических линий.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3, с. 82—86.
74. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2, с. 44—56.
75. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 301—312.
76. *Полянин А. Д.* Некоторые асимптотики решения задачи о тепломассообмене частиц в жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 1, с. 89—96.
77. *Полянин А. Д.* Об интегрировании нелинейных нестационарных уравнений конвективного тепло- и массообмена.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 817—820.
78. *Полянин А. Д.* О решении некоторых нелинейных пограничных задач нестационарной диффузии (теплопроводности).— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 1, с. 53—56.
79. *Полянин А. Д.* Диффузия к частице в сдвиговом потоке газа при произвольной кинетике поверхностной реакции.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 763—766.
80. *Полянин А. Д.* О химической реакции с выделением тепла на поверхности движущейся в газе теплопроводной частицы.— ПМТФ, 1982, № 1, с. 34—40.
81. *Полянин А. Д.* О конвективном тепломассообмене реагирующей частицы при малых числах Пекле.— Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 2, с. 292—296.
82. *Полянин А. Д.* Асимптотический анализ некоторых нелинейных задач о массо- и теплообмене частиц с потоком при малых числах Пекле.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 6, с. 1322—1326.
83. *Полянин А. Д.* Нелинейная задача о тепломассопереносе к частице в потоке газа при малых числах Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1315—1319.
84. *Полянин А. Д.* Нелинейная задача о нестационарном конвективном массообмене капли при соизмеримых фазовых сопротивлениях.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 4, с. 820—824.
85. *Полянин А. Д.* О совместном тепломассопереносе к частице в потоке газа с переменными определяющими параметрами.— ПМТФ, 1984, № 2, с. 45—58.
86. *Полянин А. Д.* Качественные особенности внутренних задач нестационарного конвективного массо- и теплообмена при больших числах Пекле.— Теор. основы хим. технол., 1984, т. 18, № 3, с. 284—296.
87. *Полянин А. Д.* Трехмерные задачи диффузионного пограничного слоя.— ПМТФ, 1984, № 4, с. 71—81.

88. *Полянин А. Д., Дильман В. В.* Асимптотическая интерполяция в задачах массо- и теплопереноса и гидродинамики.— Теор. основы хим. технол., 1985, т. 19, № 1, с. 3—11.
89. *Полянин А. Д., Прядкин П. А.* О двух задачах конвективной диффузии к поверхностям плохообтекаемых тел.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6, с. 104—109.
90. *Полянин А. Д., Прядкин П. А.* О нестационарном конвективном тепло- и массообмене в жидкости при больших числах Пекле.— ПМТФ, 1981, № 6, с. 135—147.
91. *Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Тепломассоперенос к реагирующей частице в потоке газа в случае произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1984, № 1, с. 111—119.
92. *Полянин А. Д., Сергеев Ю. А.* О диффузии к поглощающей частице при смешанной кинетике. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 667—677.
93. *Полянин А. Д., Сергеев Ю. А.* Конвективная диффузия к частице в жидкости при нелинейной кинетике.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 65—74.
94. *Полянин А. Д., Сысков Ю. Н.* Диффузия к цилиндру в случае произвольного обтекания вязкой жидкостью. Приближение диффузионного пограничного слоя.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5, с. 163—166.
95. *Праудман И., Пирсон Дж.* Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра.— Сб. Механика, 1958, т. 48, № 2, с. 3—28.
96. *Прядкин П. А.* О конвективном тепло- и массообмене реагирующей частицы при малых числах Пекле.— Инж.-физ. журн., 1982, т. 43, № 1, с. 131—134.
97. *Ривкинд В. Я., Рыскин Г. М.* Массообмен между движущейся каплей и средой при переходных числах Рейнольдса и Пекле. Внешняя и внутренняя задачи.— Инж.-физ. журн., 1977, т. 33, № 4, с. 738—739.
98. *Рознер Д.* Влияние конвективной диффузии при изучении кинетики реакции на каталитической поверхности.— Ракетная техника и космонавтика. Ж. амер. ин-та аэронавтики и космонавтики.— М.: Мир, 1964, № 4, с. 3—26.
99. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. 4-е изд., испр. и доп., т. 1.— М.: Наука, 1983.— 528 с.
100. *Стечкина И. Б.* Диффузионное осаждение аэрозолей в волокнистых фильтрах.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6, с. 1327—1330.
101. *Супоницкий А. М.* О расчете скорости переноса вещества в ламинарном потоке жидкости при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой.— ПМТФ, 1960, № 2, с. 74—77.
102. *Тихонов А. Н.* Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана — Больцмана.— Изв. АН СССР. Геогр. и геофизика, 1937, № 3, с. 461—472.
103. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972, 736 с.
104. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967, 492 с.
105. *Фукс Н. А.* Механика аэрозолей.— М.: Изд. АН СССР, 1955, 352 с.

106. *Фукс Н. А., Стечкина И. Б.* К теории волокнистых аэрозольных фильтров. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 5, с. 1144—1146.
107. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976, 758 с.
108. *Чен Ч.* Фильтрация аэрозолей волокнистыми материалами.— Успехи химии, 1956, т. 25, вып. 3, с. 368—392.
109. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974, 711 с.
110. *Acrivos A.* Solution of the laminar boundary layer energy equation at high Prandtl numbers.— Phys. Fluids, 1960, v. 3, No. 4, p. 657—658.
111. *Acrivos A.* Heat transfer at high Peclet number from a small sphere freely rotating in a simple shear field.— J. Fluid Mech., 1971, v. 46, No. 2, p. 232—240.
112. *Acrivos A.* A note on the rate of heat or mass transfer from a small particle freely suspended in linear shear field.— J. Fluid Mech., 1980, v. 98, No. 2, p. 299—304.
113. *Acrivos A., Chambre P. L.* Laminar boundary layer flows with surface reactions.— Ind. Engng Chem. Fundam., 1957, v. 49, No. 6, p. 1025—1029.
114. *Acrivos A., Goddard J. D.* Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Pt. 1, Low speed flows.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, pt. 2, p. 273—291.
115. *Acrivos A., Taylor T. D.* Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow.— Phys. Fluids, 1962, v. 5, No. 4, p. 378—394.
116. *Batchelor G. K.* Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution.— J. Fluid Mech., 1979, v. 95, No. 2, p. 369—400.
117. *Batchelor G. K.* Mass transfer from small particles suspended in turbulent fluid.— J. Fluid Mech., 1980, v. 98, No. 3, p. 609—623.
118. *Berry A., Swain L. M.* On the steady motion of the cylinder through infinite viscous fluid.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1923, v. 102, No. 719, p. 766—778.
118a. *Brauer H., Schmidt-Traub H.* Kopplung von Stofftransport und chemischer Reaction an Platten und Kugeln sowie in Poren.— Chemie-Ingenieur-Technic, 1973, v. 45, No. 5, p. 341—344.
119. *Brenner H.* Forced convection heat and mass transfer at small Peclet numbers from a particle of arbitrary shape.— Chem. Engng Sci., 1963, v. 18, No. 2, p. 109—122.
119a. *Brenner H.* On the invariance of the heat transfer coefficient to flow reversal in Stokes and potential streaming flows past particles of arbitrary shape.— J. Math. Phys. Sci., 1967, v. 1, p. 173.
120. *Brenner H., Cox R. G.* The resistance to a particle of arbitrary shape in translational motion at small Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1963, v. 17, No. 4, p. 561—595.
121. *Brignell A. S.* Solute extraction from an internally circulating spherical liquid drop.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1975, v. 18, No. 1, p. 61—68.
122. *Brunn P. O.* Absorption by bacterial cells: Interaction between receptor sites and the effect of fluid motion.— Trans. ASME, J. Biomech. Eng., 1981, v. 103, No. 1, p. 32—37.

123. *Chambre P. L.* On chemical surface reactions in hydrodynamic flows.— Appl. Sci. Res., 1956, v. 6A, No. 2, p. 97—113.
124. *Chambre P. L.* Non-linear heat transfer problem.— J. Appl. Phys., 1959, v. 30, No. 11, p. 1683—1688.
125. *Chambre P. L., Acrivos A.* On chemical surface reactions in laminar boundary layer flows.— J. Appl. Phys., 1956, v. 27, No. 11, p. 1322—1328.
126. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to translating droplet.— Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1969, v. 91, No. 2, p. 273—281.
127. *Chao B. T., Chen J.* Series solution of unsteady heat and mass transfer to a translating fluid sphere.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1970, v. 13, No. 2, p. 359—367.
128. *Choudhury P. N., Drake D. G.* Unsteady heat transfer from a sphere in a low Reynolds number flow. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1971, v. 24, No. 1, p. 23—36.
129. *Chwang Allen T., Wu T. Yao-Tsu.* Hydrodynamics of low Reynolds number flow. Pt. 2. Singularity method for Stokes flows.— J. Fluid Mech., 1975, v. 67, pt. 4, p. 787—815.
130. *Cox R. G., Zia I. Y. Z., Mason S. G.* Particle motion in sheared suspensions. XXV. Streamlines around cylinders and spheres.— J. Colloid Interface Sci., 1968, v. 27, No. 1, p. 7—18.
131. *Danckwerts P. V.* Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction into particles of various shapes and into falling drops.— Trans. Faraday Soc., 1951, v. 47, No. 2, p. 1014—1023.
132. *Elrick D. E.* Source functions for diffusion in uniform shear flows.— Australian J. Phys., 1962, v. 15, No. 3, p. 283—288.
133. *Frankel N. A., Acrivos A.* Heat and mass transfer from small spheres and cylinders freely suspended in shear flow.— Physics Fluids, 1968, v. 11, No. 9, p. 1913—1918.
134. *Friedlander S. K.* Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers.— AIChE Journal, 1957, v. 3, No. 1, p. 43—48.
135. *Gluckman M. J., Pfeffer R., Weinbaum S.* A new technique for treating multiparticle slow viscous axisymmetric flow past spheres and spheroids.— J. Fluid Mech., 1971, v. 50, pt. 4, p. 705—740.
136. *Goddard J. D., Acrivos A.* Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Part 2. Boundary layer flows.— J. Fluid Mech., 1966, v. 24, pt. 2, p. 339—366.
137. *Gupalo Yu. P., Polyanin A. D., Ryazantsev Yu. S.* Mass transfer interaction of moving particles in a reactive dispersive system.— Acta Astronautica, 1978, v. 5, No. 4, p. 1213—1219.
138. *Gupalo Yu. P., Ryazantsev Yu. S.* Mass and heat transfer from a sphere in a laminar flow.— Chem. Engng. Sci., 1972, v. 27, No. 1, p. 61—68.
138a. *Gupalo Yu. P., Ryazantsev Yu. S.* Heat and mass transfer from a sphere with a chemical surface reaction in a laminar flow.— Acta Astronautica, 1974, v. 1, No. 7—8, p. 993—1005.
139. *Happel J.* Viscous flow relative to arrays of cylinders.— Am. Inst. Chem. Eng. Journal, 1959, v. 5, No. 2, p. 197—205.
140. *Happel J., Pfeffer R.* The motion of two spheres following each other in a viscous fluid. AIChE Journal, 1960, v. 6, No. 1, p. 129—133.

141. *Harper J. E.* On bubbles rising in line at large Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1970, v. 41, No. 4, p. 751—758.
142. *Harriott P.* Mass transfer to particles. Part I. Suspended in agitated tanks. AIChE Journal, 1962, v. 8, No. 1, p. 93—101.
143. *Hartunian R. A., Lin S. W.* Slow flow of a dissociated gas about a catalytic probe. Phys. Fluids, 1963, v. 6, No. 3, p. 343—348.
144. *Ilkovič D.* Polarographic studies with the dropping mercury cathode.— Coll. Trav. Chim. Tchechoslov., 1934, v. 6, No. 11—12, p. 498—513.
145. *Jenson V. G.* Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers (Re $\leqslant$ 40).— Proc. Roy. Soc., 1959, Ser. A, v. 249, No. 1258, p. 346—366.
146. *Johns L. E., Beckman R. B.* Mechanism of dispersed-phase mass transfer in viscous, single-drop extraction systems.— AIChE Journal, 1966, v. 12, No. 1, p. 10—16.
147. *Johnson A. I., Hamielec A. E., Haighton W. T.* Mass transfer with chemical reaction from single gas bubbles.— AIChE Journal, 1967, v. 13, No. 2, p. 379—383.
148. *Klibanova Z., Frank-Kamenetsky D.* Ignition of carbon and kinetics of its reaction with oxygen.— Acta Physicochim. USSR, 1943, v. 18, No. 5, p. 387—405.
149. *Klinzing G. E., Byrne G. D., Leaf G. K., Minkoff M.* Mass transfer with Nth order chemical reaction around spheres in the presence of surfactants.— Chem. Engng Sci., 1980, v. 35, No. 7, p. 1667—1676.
150. *Koutecky J.* Correction for spherical diffusion to the Ilkovič equation.— Chechoslov. J. of Phys., 1953, v. 2, p. 50—55.
151. *Kronig R., Brink J. C.* On the theory of extraction from falling droplets.— Appl. Sci. Res., 1950, v. A2, No. 2, p. 142—154.
152. *Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E., Iskakov M. S.* Electrochemical measurements of mass transfer between a sphere and liquid in motion at high Peclet numbers.— J. Fluid Mech., 1982, v. 125, p. 453—462.
153. *Kuwabara S.* The forces experienced by randomly distributed parallel cylinders of spheres in a viscous flow at small Reynolds numbers.— J. Phys. Soc. Japan, 1959, v. 14, No. 4, p. 527—532.
154. *Leveque M. A.* Les lois de la transmission de chaleur par convection.— Ann. Mines, 1928, v. 13, p. 201—239.
155. *Levins D. M., Glastonbury J. R.* Particle-liquid hydrodynamics and mass transfer in a stirred vessel. Part II. Mass transfer.— Trans. Inst. Chem. Eng., 1972, v. 50, No. 1, p. 132—146.
156. *V. Mises R.*, Bemerkungen zur Hydrodynamik.— SAMM, 1927, v. 7, p. 425—431.
157. *Moore D. M.* The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, pt. 4, p. 749—766.
158. *Morrison F. A.* (*Jr.*), *Reed L. D.* Low Knudsen number heat transfer from two spheres in contact.— Trans. ASME, ser. C, J. Heat Transfer, 1975, No. 4, p. 478—482 (русский перевод: Теплопередача от двух соприкасающихся сфер при малых числах Кнудсена.— Теплопередача, 1976, № 4, с. 48—52).
159. *Morrison F. A., Stewart M. B.* Small bubble motion in an accelerating liquid.— Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1976, v. 43, No. 3, p.399—403.

160. *Newman J.* Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers.— Ind. and Engng Chem. Fundam., 1969, v. 8, No. 3, p. 553—557.
160a. *Oellich L., Schmidt-Traub H., Brauer H.* Theoretische Berechnung des Stofftransport in der Umgebung einer Einzelblase.— Chem. Eng. Sci., 1973, v. 28, No. 3, p. 711—721.
161. *Pan Y. F., Acrivos A.* Heat transfer at high Peclet number in regions of closed streamlines.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1968, v. 11, No. 3, p. 439—444.
162. *Poe G. G.* Closed streamline flows past rotating particles: inertial effects, lateral migration, heat transfer.— Ph. D. dissertation, Stanford University, 1975.
163. *Poe G. G., Acrivos A.* Closed streamline flows past small rotating particles: heat transfer at high Peclet numbers.— Int. J. Multiphase Flow, 1976, v. 2, No. 4, p. 365—377.
164. *Polyanin A. D.* On nonisothermal chemical reaction at the particle surface in laminar flow.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1982, v. 25, No. 7, p. 1031—1042.
165. *Polyanin A. D.* An asymptotic analysis of some non-linear boundary value problems of convective mass and heat transfer of reacting particles with the flow.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1984, v. 27, No. 2, p. 163—189.
165a. *Polyanin A. D.* Method for solution of some non-linear boundary value problems of a non-stationary diffusion-controlled (thermal) boundary layers.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1982, v. 25, No. 4, p. 471—485.
166. *Polyanin A. D., Sergeev Yu. A.* Convective diffusion to a reacting particle in a fluid. Nonlinear surface reaction kinetics.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1980, v. 23, No. 9, p. 1171—1182.
167. *Pfeffer R., Happel J.* An analytical study of heat and mass transfer in multiparticle system at low Reynolds numbers.— AIChE Journal, 1964, v. 10, No. 5, p. 605—611.
168. *Reed L. D., Morrison F. A.* The slow motion of two touching fluid spheres along their line of centers.— Int. J. Multiphase Flow, 1974, v. 1, No. 4, p. 573—584.
169. *Rimmer P. L.* Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number. J. Fluid Mech., 1968, v. 32, No. 1, p. 1—7. Corrigenda.— J. Fluid Mech., 1969, v. 45, No. 4, p. 827—829.
170. *Robertson C. R., Acrivos A.* Low Reynolds number shear flow past a rotating circular cylinder. Part 1. Momentum transfer.— J. Fluid Mech., 1970, v. 40, No. 4, p. 685—704.
171. *Robertson C. R., Acrivos A.* Low Reynolds number shear flow past a rotating circular cylinder. Part 2. Heat Transfer. J. Fluid Mech., 1970, v. 40, No. 4, p. 705—718.
172. *Ruckenstein E.* Mass transfer between a single drop and continuous phase.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1966, v. 10, No. 12, p. 1785—1792.
173. *Ruckenstein E.* A generalized penetration theory for unsteady convective mass transfer.— Chem. Engng Sci., 1968, v. 23, No. 2, p. 363—371.
174. *Ruckenstein E.* Unsteady mass transfer near fluid-liquid interfaces.— Chem. Engng Sci., 1970, v. 25, No. 11, p. 1699—1708.
175. *Ruckenstein E., Berbente C.* Mass transfer to falling liquid film at low Reynolds numbers.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1968, v. 11, No. 4, p. 743—753.

176. *Ruckenstein E., Constantinescu D.* Mass or heat transfer with a change in interfacial area. Pt. 1. Mass transfer in the continuous phase to a growing drop.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1969, v. 12, No. 10, p. 1249—1256.
177. *Ruckenstein E., Muntean O.* Mass transfer between a bubble and an oscillating liquid.— Chem. Engng Sci., 1970, v. 25, No. 7, p. 1159—1166.
178. *Russell A.* The coefficients of capacity and the mutual attractions or repulsions of two electrified spherical conductors when close together.— Proc. Roy. Soc., 1909, v. A32, p. 524—531.
179. *Ruston E., Davies G. A.* The slow unsteady settling of two fluid spheres along their line of centers.— Appl. Sci. Res., 1973, v. 28, No. 1—2, p. 37—61.
180. *Schneider D.* The sex-attractant receptor of moths. Sci. Amer., 1974, v. 231, No. 1, p. 28—35.
181. *Sih P. H., Newman J.* Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1967, v. 10, No. 12, p. 1749—1756.
182. *Simha R.* Untersuchungen über die Viskositat von Suspensionen und Lösungen.— Kolloid Z., 1936, Bd. 76, H. 1, S. 16—19.
183. *Soliman M., Chambre P. L.* On the time-dependent convective heat transfer in fluids with vanishing Prandtl number.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1969, v. 12, No.10, p. 1221—1230.
184. *Su C. H., Kiel R. E.* Continuum theory of electrostatic probes.— J. Appl. Phys., 1966, v. 37, No. 13, p. 4907—4910.
185. *Sutton W. G. L.* On the equation of diffusion in a turbulent medium.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1943, v. 182, No. 988, p. 48—75.
186. *Sy F., Lightfoot E. N.* The effect of distortion on mass transfer to spheroidal drops.— AIChE Journal, 1968, v. 14, No. 5, p. 835—836.
187. *Sy F., Lightfoot E. N.* Transient creeping flow around fluid spheres.— AIChE J., 1971, v. 17, No. 1, p. 177—181.
188. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of spherical particles in low Re-number flow.— J. Fluid Mech., 1969, v. 38, part 3, p. 537—546.
189. *Taylor G. I.* Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid.— Proc. Roy. Soc., Ser. A; 1932, v. 138, No. 834, p. 41—48.
190. *Taylor T. D.* Mass transfer from single spheres in Stokes flow with surface reactions.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1963, v. 6, No. 11, p. 993—994.
191. *Taylor T. D.* Heat transfer from single spheres in a low Reynolds number slip flow.— Phys. Fluids., 1963, v. 6, No. 7, p. 987—992.
192. *Taylor T. D., Acrivos A.* On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number.—J. Fluid Mech., 1964, v. 18, pt. 3, p. 466—476.
193. *Washolder E., Weihs D.* Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary.— Chem. Engng Sci., 1972, v. 27, No. 10, p. 1817—1828.
194. *Watada H., Hamielec A. E., Johnson A. I.* A theoretical study of mass transfer with chemical reaction in drops.— Canad. J. Chem. Eng., 1970, v. 48, No. 3, p. 255—261.
195. *Winnikow S.* Letter to the Editors.— Chem. Engng Sci., 1967, v. 22, No. 3, p. 477.