

В. П. ИСАЧЕНКО,
В. А. ОСИПОВА,
А. С. СУКОМЕЛ

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве учеб-
ника для энергетических вузов и факультетов*

Настоящая книга предназначена в качестве учебника для теплотехнических специальностей энергетических вузов и факультетов. Этим определены построение книги, подбор излагаемого материала и характер его изложения.

Курс «Теплопередача» является базовой дисциплиной для ряда инженерных, прежде всего теплотехнических специальностей. В связи с быстрым развитием теории теплообмена из года в год видоизменяется и совершенствуется учебный курс теплопередачи, читаемый студентам высших учебных заведений. Объем и уровень курса должны быть достаточны для усвоения ряда специальных дисциплин, решения основных практических задач и осмысленного использования новой информации по теории теплообмена, появляющейся в научно-технической литературе.

В результате изучения теплопередачи студенты должны овладеть не только теорией, но и методами расчета основных процессов теплообмена. Ввиду этого изложение отдельных вопросов теплопередачи, как правило, сопровождается рекомендацией расчетных формул, с помощью которых можно решить основные задачи теплообмена.

Однако было бы весьма ошибочным сведение курса теплопередачи к роли сборника простейших расчетных формул. В наше время практика непрестанно выдвигает перед учением о теплообмене новые и разнообразные задачи, требуя от инженера умения самостоятельно и творчески использовать основные законы и методы теплопередачи. Значительно расширилась возможность прикладного использования теории теплообмена в связи со все более широким внедрением в инженерную практику быстродействующих электронных вычислительных машин. Многие задачи, еще недавно решавшиеся только узкими специалистами в области теории теплообмена, могут быть решены в условиях производства. При этом инженер должен достаточно глубоко понимать физические особенности рассматриваемых процессов и уметь математически описать исследуемое явление.

Помимо лекций, изучение курса теплопередачи в вузе сопровождается проведением лабораторных занятий и решением задач. Преподавателями кафедры теоретических основ теплотехники Московского энергетического института написаны специальные учебные пособия, необходимые для проведения двух последних видов занятий [Л. 82, 139, 143]. Поэтому в данной книге опущены словесные примеры и подробное рассмотрение экспериментальных методик и установок. По этой же причине в книге приведены лишь некоторые справочные таблицы и графики, необходимые для решения задач. Полные данные можно найти в задачнике [Л. 82].

Исаченко В. П. и др.

Теплопередача. Учебник для вузов, Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Энергия», 1975.

488 с. с ил.

Перед загл. авт.: В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел.

В книге изложены основы учения о теплообмене. Систематически рассматриваются теплопроводность, конвективный теплообмен, теплообмен излучением, тепловой и гидромеханический расчеты теплообменных устройств, а также тепло- и массообмен при фазовых и химических превращениях.

Книга написана применительно к программе курса «Теплопередача», утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР, и предназначена в качестве учебника для студентов энергетических специальностей вузов.

Теплопередача или теплообмен — учение о самопроизвольных необратимых процессах распространения теплоты в пространстве. Под процессом распространения теплоты понимается обмен внутренней энергией между отдельными элементами, областями рассматриваемой среды. Перенос теплоты осуществляется тремя основными способами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Теплопроводность представляет собой молекулярный перенос теплоты в телах (или между ними), обусловленный переменной температурой в рассматриваемом пространстве.

Конвекция возможна только в текучей среде. Под конвекцией теплоты понимают процесс ее переноса при перемещении объемов жидкости или газа (текучей среды) в пространстве из области с одной температурой в область с другой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Тепловое излучение — процесс распространения теплоты с помощью электромагнитных волн, обусловленный только температурой и оптическими свойствами излучающего тела; при этом внутренняя энергия тела (среды) переходит в энергию излучения. Процесс превращения внутренней энергии вещества в энергию излучения, переноса излучения и его поглощения веществом называется теплообменом излучением. В природе и технике элементарные процессы распространения теплоты — теплопроводность, конвекция и тепловое излучение — очень часто происходят совместно.

Теплопроводность в чистом виде большей частью имеет место лишь в твердых телах.

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью. Совместный процесс переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью называется конвективным теплообменом.

В инженерных расчетах часто определяют конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью твердого тела; этот процесс конвективного теплообмена называют конвективной теплоотдачей или теплоотдачей.

Процессы теплопроводности и конвективного теплообмена могут сопровождаться теплообменом излучением. Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты излучением и теплопроводностью, называют радиационно-кондуктивным теплообменом. Если перенос теплоты осуществляется дополнительно и конвекцией, то такой процесс называют радиационно-конвективным теплообменом. Иногда радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный перенос теплоты называют сложным теплообменом.

В технике и в быту часто происходят процессы теплообмена между различными жидкостями, разделенными твердой стенкой. Процесс пере-

Теплопередача является сравнительно молодой наукой. Особенно бурно она развивается в последние десятилетия. Большой вклад в развитие учения о теплообмене сделан советскими учеными В. М. Кирпичевым, М. А. Михеевым, А. А. Гухманом, Г. Н. Кружилиным, С. С. Кутателадзе, А. В. Лыковым, А. А. Жукаускасом, Д. А. Лабунцовым, А. И. Леонтьевым, Б. С. Петуховым, В. И. Субботиным, Ю. А. Суриновым и многими другими.

В книге используется Международная система единиц измерения, сокращенно обозначаемая в русском написании СИ. Система СИ введена в СССР с 1 января 1963 г. как предпочтительная.

В третьем издании в книгу внесен ряд изменений и дополнений, учитывающих как новые сведения, полученные за время, прошедшее после предыдущих изданий, так и опыт использования книги в качестве учебника. Использована терминология теории теплообмена, рекомендованная Комитетом научно-технической терминологии АН СССР и Министерством высшего и среднего специального образования СССР к применению в учебном процессе. В связи с этим изменены некоторые термины, обозначения. В то же время для облегчения пользования книгой авторы стремились соблюсти преемственность между старыми и вновь введенными терминами. Название книги оставлено прежним, поскольку оно не изменилось и в существующих учебных планах.

Главы 4—12, 14 и 15 написаны В. П. Исаченко, гл. 13, 16—18 и § 3-12 — В. А. Осиповой, гл. 1—3, 19, 20 — А. С. Сукомелом. При написании книги авторы использовали свой опыт преподавания курса теплопередачи и опыт акад. М. А. Михеева и проф. Б. С. Петухова, которые многие годы работали на кафедре теоретических основ теплотехники МЭИ и внесли значительный вклад в постановку преподавания и развитие этого курса.

Создание этой книги во многом явилось результатом того внимания, с которым относился лауреат Ленинской и Государственной премий, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, доктор техн. наук, проф. М. П. Вукалович к постановке преподавания теплопередачи в Московском энергетическом институте.

Авторы весьма признательны доктору техн. наук, проф. Д. А. Лабунцову за ценные советы, способствовавшие улучшению книги, и большую редакторскую работу над первым изданием учебника. Авторы признательны также докторам техн. наук В. И. Крутову, А. И. Леонтьеву и С. А. Скворцову за ряд советов. Много деловых замечаний авторы получили от преподавателей, аспирантов и инженеров кафедры теоретических основ теплотехники МЭИ, кафедры теплоэнергетики Саратовского политехнического института, кафедры инженерной теплофизики Ленинградского политехнического института и др., что помогло в работе над книгой.

Авторы будут признательны за все замечания и пожелания, направленные на улучшение книги. Замечания и пожелания просим направлять по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая набережная, 10, издательство «Энергия».

Авторы

дачи теплоты от горячей жидкости к холодной через разделяющую их стенку называется теплопередачей. Теплопередача осуществляется различными элементарными процессами теплопереноса. Парогенерирующие трубы котельного агрегата, например, получают теплоту от продуктов сгорания топлива в результате радиационно-конвективного теплообмена. Через слой наружного загрязнения, металлическую стенку и слой накали теплота передается теплопроводностью. От внутренней поверхности трубы к омывающей ее жидкости теплота переносится конвективным теплообменом (теплоотдачей).

Процессы теплообмена могут происходить в различных средах: чистых веществах и разных смесях, при изменении и без изменения агрегатного состояния рабочих сред и т. д. В зависимости от этого теплообмен протекает по-особому и описывается различными уравнениями.

Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества. Например, при испарении воды в воздух, помимо теплообмена, имеет место и перенос образовавшегося пара в паровоздушной смеси. В общем случае перенос пара осуществляется как молекулярным, так и конвективным путем. Совместный молекулярный и конвективный перенос массы называют конвективным массообменом. При наличии массообмена процесс теплообмена усложняется. Теплота дополнительно может переноситься вместе с массой диффундирующих веществ.

В общем случае перенос теплоты в смеси различных веществ может вызываться неоднородным распределением других физических величин, помимо температуры. Например, разность концентрации компонентов смеси приводит к дополнительному молекулярному переносу теплоты (диффузионный термоэффект). Обычно перенос теплоты, обусловленный подобными эффектами, сравнительно невелик и, как правило, им можно пренебречь.

При теоретическом исследовании теплообмена приходится вводить некоторые модельные представления о среде, в которой происходят изучаемые процессы. Рассматриваемые газы, жидкости и твердые тела в книге в подавляющем большинстве случаев считаются сплошной средой, т. е. средой, при рассмотрении которой допустимо пренебречь ее дискретным строением.

Различают однородные и неоднородные сплошные среды. В первых физические свойства в различных точках одинаковы при одинаковых температуре и давлении, в неоднородных средах — различны. Различают также изотропные и анизотропные сплошные среды. В любой точке изотропной среды физические свойства ее не зависят от выбранного направления, наоборот, в анизотропной среде некоторые свойства в данной точке могут быть функцией направления. Наиболее изучен и часто встречается на практике теплообмен в изотропных средах.

Сплошная среда может быть однофазной и многофазной. В однофазной среде, состоящей из чистого вещества или из смеси веществ, свойства изменяются в пространстве непрерывно. В многофазной среде, состоящей из ряда однофазных частей, на границах раздела свойства изменяются скачками. Теплообмен в однофазных и многофазных системах протекает по-разному.

Изучение как простых, так и более сложных процессов переноса теплоты в различных средах и является задачей курса теплопередачи.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1-1. МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

На основании представлений современной физики явления природы вообще и теплопроводности в частности возможно описать и исследовать на основе феноменологического и статистического методов.

Метод описания процесса, игнорирующий микроскопическую структуру вещества, рассматривающий его как сплошную среду (континуум), называется феноменологическим.

Феноменологический метод исследования дает возможность установить некоторые общие соотношения между параметрами, характеризующими рассматриваемое явление в целом. Феноменологические законы носят весьма общий характер, а роль конкретной физической среды учитывается коэффициентами, определяемыми непосредственно из опыта.

Другой путь изучения физических явлений основан на изучении внутренней структуры вещества. Среда рассматривается как некоторая физическая система, состоящая из большого числа молекул, ионов или электронов с заданными свойствами и законами взаимодействия. Получение макроскопических характеристик по заданным микроскопическим свойствам среды составляет основную задачу такого метода, называемого статистическим.

Как первый, так и второй метод обладает своими достоинствами и недостатками.

Феноменологический метод позволяет сразу установить общие связи между параметрами, характеризующими процесс, и использовать экспериментальные данные, точность которых предопределяет и точность самого метода. В этом достоинства использования феноменологического подхода при изучении явления.

Однако сам факт проведения опытов для выявления характеристики физической среды является одновременно и недостатком метода, так как этим ограничиваются пределы применения феноменологических законов. Кроме того, современный эксперимент очень сложен и зачастую является дорогостоящим.

Статистический метод позволяет получить феноменологические соотношения на основании заданных свойств микроскопической структуры среды без дополнительного проведения эксперимента — в этом его достоинство. Недостатком статистического метода является его сложность, в силу чего получить конечные расчетные соотношения возможно лишь

для простейших физических моделей вещества. Кроме того, для реализации метода требуется знание ряда параметров, определение которых является предметом исследования специальных разделов физики.

В основу исследования процессов теплопроводности положен феноменологический метод. Аналитическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества и рассматривает вещество как сплошную среду. Такой подход правомерен, если размеры объектов исследования достаточно велики по сравнению с расстояниями эффективного межмолекулярного взаимодействия.

1.2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Явление теплопроводности представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела или отдельных тел, имеющих различные температуры. Теплопроводность обусловлена движением микрочастиц вещества.

При этом в газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов, а в жидкостях и твердых телах-диэлектриках — путем упругих волн. В металлах перенос энергии в основном осуществляется путем диффузии свободных электронов, а роль упругих колебаний кристаллической решетки здесь второстепенна.

Следует указать, что в жидкостях и газах чистая теплопроводность может быть реализована при выполнении условий, исключающих перенос тепла конвекцией.

Всякое физическое явление в общем случае сопровождается изменением в пространстве и времени существенных для данного явления физических величин. Процесс теплопроводности, как и другие виды теплообмена, может иметь место только при условии, что в различных точках тела (или системы тел) температура неодинакова. В общем случае процесс передачи теплоты теплопроводностью в твердом теле сопровождается изменением температуры как в пространстве, так и во времени.

Аналитическое исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного изменения температуры, т. е. к нахождению уравнения:

$$t=f(x, y, z, \tau). \quad (1-1)$$

Уравнение (1-1) представляет математическое выражение температурного поля. Таким образом, температурное поле есть совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства для каждого момента времени.

Различают стационарное и нестационарное температурные поля. Уравнение (1-1) является записью наиболее общего вида температурного поля, когда температура изменяется с течением времени и от одной точки к другой. Такое поле отвечает неустановившемуся тепловому режиму теплопроводности и носит название нестационарного температурного поля.

Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке поля с течением времени остается неизменной и такое температурное поле называется стационарным. В этом случае температура является функцией только координат:

$$t=f_1(x, y, z); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau}=0. \quad (1-2)$$

Температурное поле, соответствующее уравнениям (1-1) и (1-2), является пространственным, так как температура является функцией трех координат. Если температура есть функция двух координат, то поле называется двумерным и его запись имеет вид:

$$t = f_2(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1-3)$$

Если температура есть функция одной координаты, то поле называется одномерным:

$$t = f_3(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1-4)$$

Наиболее простой вид имеет уравнение одномерного стационарного температурного поля:

$$t = f_4(x); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1-5)$$

1-3. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ГРАДИЕНТ

Если соединить точки тела, имеющие одинаковую температуру, получим поверхность равных температур, называемую изотермической. Итак, изотермической поверхностью называется геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру.

Так как одна и та же точка тела не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не пересекаются. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком располагаются внутри самого тела.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т. е. не пересекаются, не обрываются внутри тела, оканчиваются на поверхности, либо целиком располагаются внутри самого тела.

На рис. 1-1 приведены изотермы, температуры которых отличаются на Δt .

Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температуры.

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению. т. е.

$$\text{grad } t = \vec{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1-6)$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры; $\partial t / \partial n$ — производная температура по нормали n .

Скалярная величина температурного градиента $\partial t / \partial n$ не одинакова для различных точек изотермической поверхности. Она больше там, где

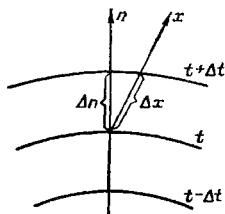


Рис. 1-1. Изотермы.

расстояние Δn между изотермическими поверхностями меньше. Скалярную величину температурного градиента $\partial t / \partial n$ мы будем также называть температурным градиентом.

Величина $\partial t / \partial n$ в направлении убывания температуры отрицательна.

Проекция вектора $\text{grad } t$ на координатные оси Ox , Oy , Oz будут равны:

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } t)_x &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\widehat{n, x}) = \frac{\partial t}{\partial x}; \\ (\text{grad } t)_y &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\widehat{n, y}) = \frac{\partial t}{\partial y}; \\ (\text{grad } t)_z &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\widehat{n, z}) = \frac{\partial t}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

1-4. ТЕПЛОВОЙ ПОТОК. ЗАКОН ФУРЬЕ

Необходимым условием распространения теплоты является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде. Таким образом, для передачи теплоты теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Согласно гипотезе Фурье количество теплоты dQ_* , Дж, проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени $d\tau$, пропорционально температурному градиенту $\partial t / \partial n$:

$$dQ_* = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau. \quad (1-8)$$

Опытным путем установлено, что коэффициент пропорциональности в уравнении (1-8) есть физический параметр вещества. Он характеризует способность вещества проводить теплоту и называется коэффициентом теплопроводности.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности $q = \frac{dQ_*}{dF d\tau}$, Вт/м², называется плотностью теплового потока. Плотность теплового потока есть вектор, определяемый соотношением

$$\vec{q} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1-9)$$

Вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, так как теплота всегда передается от более горячих частей тела к холодным. Таким образом, векторы $\vec{q}$ и $\text{grad } t$ лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Это и объясняет наличие знака «минус» в правых частях уравнений (1-9) и (1-8).

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора $\vec{q}$, называются линиями теплового потока. Линии теплового потока ортогональны к изотермическим поверхностям (рис. 1-2).

Скалярная величина вектора плотности теплового потока q , Вт/м², будет равна:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1-10)$$

Многочисленные опыты подтвердили справедливость гипотезы Фурье. Поэтому уравнение (1-8), так же как и уравнение (1-9), является математической записью основного закона теплопроводности, который формируется следующим образом: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность F , называется тепловым потоком. Если градиент температуры для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени, найдется как

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF, \quad (1-11)$$

где dF — элемент изотермической поверхности. Величина Q измеряется в ваттах.

Полное количество теплоты Q , Дж, прошедшее за время τ через изотермическую поверхность F , равно:

$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau. \quad (1-12)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF_1 , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности (рис. 1-3), определяется по той же формуле (1-12), если учесть, что

$$q_t = q \cos \varphi = \frac{dQ_\tau}{d\tau} \frac{1}{dF} \cos \varphi = \frac{dQ_\tau}{d\tau} \frac{1}{dF_1}. \quad (1-13)$$

Так как $dF = dF_1 \cos \varphi$ является проекцией площадки dF_1 на изотермическую поверхность, то количество теплоты, протекающее через элементарную площадку dF_1 за время $d\tau$, запишется как

$$dQ_\tau = q_t dF_1 d\tau = q (dF_1 \cos \varphi) d\tau = q dF d\tau. \quad (1-14)$$

Общее количество теплоты, протекающее за время τ через поверхность F_1

$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_{F_1} \lambda \frac{\partial t}{\partial l} dF_1 d\tau. \quad (1-15)$$

Рис. 1-3. К расчету теплового потока.

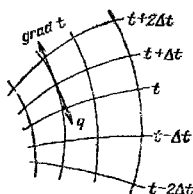
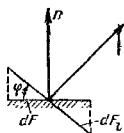


Рис. 1-2. Изотермы и линии теплового тока.

Из уравнения (1-13) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая рассчитана вдоль нормали к изотерми-

ческим поверхностям. Если такой поток спроектировать на координатные оси Ox , Oy , Oz , то согласно уравнению (1-7) получим:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1-16)$$

Тепловые потоки, выраженные уравнением (1-16), являются составляющими вектора плотности теплового потока:

$$\vec{q} = i q_x + j q_y + k q_z. \quad (1-17)$$

Из сказанного следует, что для определения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля является главной задачей аналитической теории теплопроводности.

1-5. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Как было сказано, коэффициент теплопроводности является физическим параметром вещества. В общем случае коэффициент теплопроводности зависит от температуры, давления и рода вещества; в большинстве случаев коэффициент теплопроводности для различных материалов экспериментального определения коэффициента теплопроводности [Л. 122, 139, 143, 190, 193]. Большинство из них основано на измерении теплового потока и градиента температур в заданном веществе.

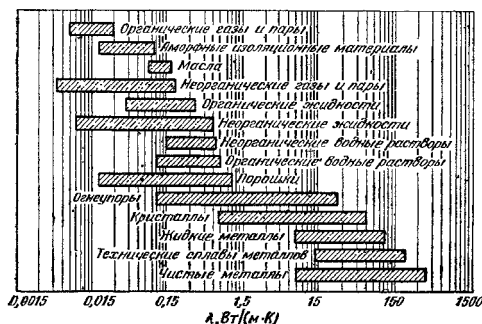


Рис. 1-4. Порядок значений коэффициентов теплопроводности различных веществ.

Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м·К) при этом определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\text{grad } t|}. \quad (1-18)$$

Из уравнения (1-18) следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Порядок значений λ различных веществ показан на рис. 1-4 [Л. 136, 204]. Результаты измерений λ сведены в таблицы [Л. 20, 196], которыми пользуются при расчетах процессов теплопроводности.

Так как тела могут иметь различную температуру, а при наличии теплообмена и в самом теле температура будет распределена неравномерно, то в первую очередь важно знать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (1-19)$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при температуре t_0 ; b — постоянная, определяемая опытным путем.

а) Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории перенос теплоты теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии молекулярного движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. При этом коэффициент теплопроводности определяется соотношением

$$\lambda = \bar{w} \bar{l} c_v \rho / 3, \quad (1-20)$$

где $\bar{w}$ — средняя скорость перемещения молекул газа; $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега молекул газа между соударениями; c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа.

С увеличением давления в равной мере увеличивается ρ , уменьшается длина пробега $\bar{l}$ и произведение $\bar{l}\rho$ сохраняется постоянным. Поэтому коэффициент теплопроводности заметно не меняется с изменением давления. Исключение составляют очень малые (меньше $2,66 \cdot 10^3$ Па) и очень большие ($2 \cdot 10^9$ Па) давления.

Средняя скорость перемещения молекул газа зависит от температуры:

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{3R_\mu T}{\mu}},$$

где R_μ — универсальная газовая постоянная, равная $8314,2$ Дж/(кмоль · К); μ — молекулярная масса газа; T — температура, К.

Теплоемкость газов возрастает с повышением температуры. Сказанное объясняется тот факт, что коэффициент теплопроводности для газов с повышением температуры возрастает.

Коэффициент теплопроводности λ газов лежит в пределах от 0,006 до 0,6 Вт/(м · К).

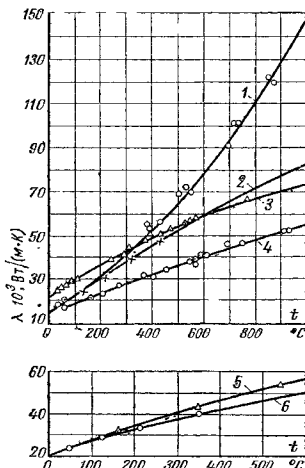


Рис 1-5 Коэффициенты теплопроводности газов

1 — водяной пар, 2 — двуокись углерода, 3 — воздух, 4 — аргон, 5 — кислород, 6 — азот

На рис. 1-5 представлены результаты измерения коэффициента теплопроводности различных газов, проведенного Н. Б. Варгафтиком.

Средн газов резко отличаются своим высоким коэффициентом теплопроводности гелий и водород. Коэффициент теплопроводности у них в 5—10 раз больше, чем у других газов [Л. 194]. Это наглядно видно на рис. 1-6. Молекулы гелия и водорода обладают малой массой, а следовательно, имеют большую среднюю скорость перемещения, чем и объясняется их высокий коэффициент теплопроводности.

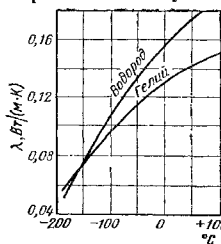


Рис 1-6. Коэффициенты теплопроводности гелия и водорода.

Коэффициенты теплопроводности водяного пара и других реальных газов, существенно отличающихся от идеальных, сильно зависят также от давления. Для газовых смесей коэффициент теплопроводности не может быть определен по закону аддитивности, его нужно определять опытным путем.

б) Коэффициент теплопроводности жидкостей

Механизм распространения теплоты в капельных жидкостях можно представить как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний. Такое теоретическое представление о механизме передачи теплоты в жидкостях, выдвинутое А. С. Предводителевым [Л. 155], было использовано Н. Б. Варгафтиком [Л. 20] для описания опытных данных по теплопроводности различных жидкостей. Для большинства жидкостей теория нашла хорошее подтверждение. На основании этой теории была получена формула для коэффициента теплопроводности следующего вида:

$$\lambda = A \frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}}, \quad (1-21)$$

где c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении; ρ — объемная плотность жидкости; μ — относительная молекулярная масса.

Коэффициент A , пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, не зависит от природы жидкости, но зависит от температуры, при этом $A_{c_p} \approx \text{const}$.

Так как плотность ρ жидкости с повышением температуры убывает, то из уравнения (1-21) следует, что для жидкостей с постоянной молекулярной массой (неассоциированные и слабо ассоциированные жидкости) с повышением температуры коэффициент теплопроводности должен уменьшаться. Для жидкостей сильно ассоциированных (вода, спирты и т. д.) в формулу (1-21) нужно ввести коэффициент ассоциации, учитывающий изменение молекулярной массы. Коэффициент ассоциации также зависит от температуры, и поэтому при различных температурах он может влиять на коэффициент теплопроводности по-разному. Опыты подтверждают, что для большинства жидкостей с повышением температуры коэффициент теплопроводности λ убывает, исключение составляют вода и глицерин (рис. 1-7). Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит примерно в пределах от 0,07 до 0,7 Вт/(м·К).

При повышении давления коэффициенты теплопроводности жидкостей возрастают.

з) Коэффициент теплопроводности твердых тел

Металлы и сплавы. В металлах основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача теплоты при помощи колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн не исключается, но ее доля незначительна по сравнению с переносом энергии электронным газом. Вследствие движения свободных электронов происходит выравнивание температуры во всех точках нагревающегося или охлаждающегося металла. Свободные электроны движутся как из областей, более нагретых, в области, менее нагретые, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, во втором отбирают. Так как в металлах носителем тепловой и электрической энергии являются электроны, то коэффициенты тепло- и электропроводности пропорциональны друг другу. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов увеличивается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов тепло- и электропроводности чистых металлов (рис 1-8).

При наличии разного рода примесей коэффициент теплопроводности металлов резко убывает. Последнее можно объяснить увеличением структурных неоднородностей, которые приводят к рассеиванию электронов. Так, например, для чистой меди $\lambda = 396 \text{ Вт/(м} \times \text{К)}$, для той же меди со следами мышьяка $\lambda = 142 \text{ Вт/(м} \times \text{К)}$.

В отличие от чистых металлов коэффициенты теплопроводности сплавов при повышении температуры увеличиваются (рис. 1-9).

Твердые тела-диэлектрики (неметаллы). В диэлектриках с повышением температуры коэффициент теплопроводности обычно увеличивается (рис. 1-10). Как правило, для материалов с боль-

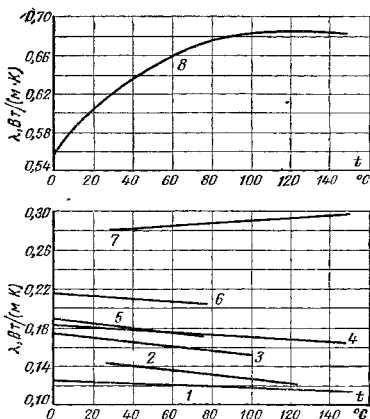


Рис 1-7. $\lambda(t)$ различных жидкостей.

1 — вазелиновое масло; 2 — бензол; 3 — ацетон; 4 — касторовое масло; 5 — спирт этиловый; 6 — спирт метиловый; 7 — глицин; 8 — вода.

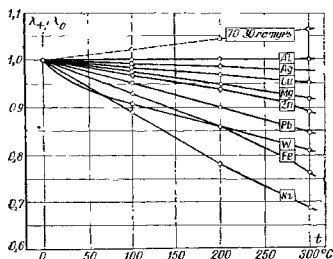


Рис. 1-8. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для некоторых чистых металлов

шей объемной плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Он зависит от структуры материала его пористости и влажности.

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение (кирпич, бетон, асбест, шлак и др.), и применение

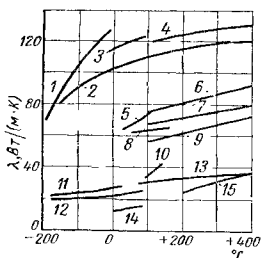


Рис. 1-9. $\lambda(t)$ различных сплавов.

1 — латунь 18; 2 — латунь 30; 3 — латунь 12; 4 — никром; 5 — бронза; 6 — марганцовистая бронза; 7 — орудийная бронза; 8 — сплав олова и цинка; 9 — фосфористая бронза; 10 — белый металл; 11 — константа; 12 — никель-металл; 13 — манганин; 14 — никелевая сталь; 15 — жидкий сплав олова с цинком.

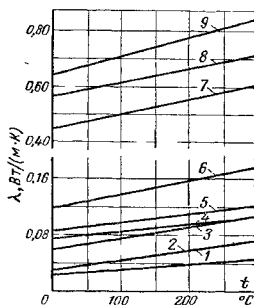


Рис. 1-10. $\lambda(t)$ строительных и теплоизоляционных материалов.

1 — воздух; 2 — минеральная вата; 3 — шлаковая вата; 4 — ньюель; 5 — совелит; 6 — диатомитовый кирпич; 7 — красный кирпич; 8 — шлакобетонный кирпич; 9 — шамотный кирпич.

закона Фурье к таким телам является в известной мере условным. Наличие пор в материале не позволяет рассматривать такие тела, как сплошную среду.

Условным является также коэффициент теплопроводности пористого материала. Эта величина имеет смысл коэффициента теплопроводности некоторого однородного тела, через которое при одинаковой форме, размерах и температурах на границах проходит то же количество тепла, что и через данное пористое тело [Л. 208].

Коэффициент теплопроводности порошкообразных и пористых тел сильно зависит от их объемной плотности [Л. 197]. Например, при возрастании плотности ρ от 400 до 800 кг/м³ коэффициент теплопроводности асбеста увеличивается от 0,105 до 0,248 Вт/(м·K). Такое влияние плотности ρ на коэффициент теплопроводности объясняется тем, что теплопроводность λ заполняющего поры воздуха значительно меньше, чем твердых компонентов пористого материала.

Эффективный коэффициент теплопроводности пористых материалов сильно зависит также от влажности. Для влажного материала коэффициент теплопроводности значительно больше, чем для сухого и воды в отдельности. Например, для сухого кирпича $\lambda=0,35$, для воды $\lambda=0,60$, а для влажного кирпича $\lambda \approx 1,0$ Вт/(м·K). Этот эффект может быть объяснен конвективным переносом теплоты, возникающая благодаря капиллярному движению воды внутри пористого материала и частично тем, что абсорбционно связанная влага имеет другие характеристики по сравнению со свободной водой.

Увеличение коэффициента теплопроводности зернистых материалов

с изменением температуры можно объяснить тем, что с повышением температуры возрастает теплопроводность среды, заполняющей промежутки между зернами, а также увеличивается теплопередача излучением зернистого массива.

Коэффициенты теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов имеют значения, лежащие примерно в пределах от 0,023 до 2,9 Вт/(м·К).

Материалы с низким значением коэффициента теплопроводности [меньше 0,25 Вт/(м·К)], обычно применяемые для тепловой изоляции, называются теплоизоляционными.

1.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление. Для сложных физических процессов, в которых определяющие величины могут существенно изменяться в пространстве и времени, установить зависимость между этими величинами очень трудно. В этих случаях на помощь приходит метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежутком времени и из всего пространства рассматривается лишь элементарный объем. Это позволяет в пределах элементарного объема и выбранного малого отрезка времени пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс, и существенно упростить зависимость.

Выбранный таким образом элементарный объем dv и элементарный промежуток времени dt , в пределах которых рассматривается изучаемый процесс, с математической точки зрения являются величинами бесконечно малыми, а с физической точки зрения — величинами еще достаточно большими, чтобы в их пределах можно было игнорировать дискретное строение среды и рассматривать ее как континуум (сплошную). Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса. Интегрируя дифференциальные уравнения, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всей области интегрирования и всего рассматриваемого промежутка времени.

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности.

Для облегчения вывода этого дифференциального уравнения сделаем следующие допущения:

тело однородно и изотропно;

физические параметры постоянны;

деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим объемом;

внутренние источники теплоты в теле, которые в общем случае могут быть заданы как $q_v = f(x, y, z, \tau)$, распределены равномерно.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество теплоты dQ , введенное в элементарный объем извне за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорического или изобарического процесса), содержащегося в элементарном объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \quad (1-22)$$

где dQ_1 — количество теплоты, Дж, введенное в элементарный объем путем теплопроводности за время $d\tau$; dQ_2 — количество теплоты, которое за время $d\tau$ выделилось в элементарном объеме dv за счет внутренних источников; dQ — изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в элементарном объеме dv , за время $d\tau$.

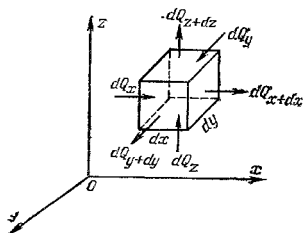


Рис. 1-11. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности.

Для нахождения составляющих уравнения (1-22) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz (рис. 1-11). Параллелепипед расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей Ox , Oy , Oz , обозначим соответственно dQ_x , dQ_y , dQ_z .

Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} .

dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} . Количество теплоты, подводенное к грани $dy dz$ в направлении оси Ox за время $d\tau$, составляет $dQ_x = q_x dy dz d\tau$, где q_x — проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани. Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox , запишется как

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau.$$

Разница количеств теплоты, подводенного к элементарному параллелепипеду и отведенного от него за время $d\tau$ в направлении оси Ox , представляет собой количество теплоты

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx}$$

или

$$dQ_{x1} = q_x dy dz d\tau - q_{x+dx} dy dz d\tau. \quad (a)$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда, то уравнение (a) запишется в виде

$$dQ_{x1} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau. \quad (б)$$

Аналогичным образом можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Oy и Oz .

Количество теплоты dQ , подводенное теплопроводностью к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau. \quad (в)$$

С учетом сказанного в общем виде уравнение (1-27) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1-28)$$

Коэффициент пропорциональности a , м²/с, в уравнении (1-28) называется коэффициентом температуропроводности и является физическим параметром вещества. Он существует для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (1-28) следует, что изменение температуры во времени $\partial t / \partial \tau$ для любой точки пространства пропорционально величине a . Иначе говоря, скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности a . Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности. Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества. Например, жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, следовательно, малым коэффициентом температуропроводности. Металлы обладают малой тепловой инерционностью, так как они имеют большой коэффициент температуропроводности. Далее, если система тел не содержит внутренних источников тепла ($q=0$), тогда выражение (1-28) принимает форму уравнения Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (1-29)$$

Если имеются внутренние источники теплоты, но температурное поле соответствует стационарному состоянию, т. е. $t=t(x, y, z)$, то дифференциальное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1-30)$$

Наконец, для стационарной теплопроводности и отсутствия внутренних источников теплоты выражение (1-27) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1-31)$$

Нахождение частных решений этих уравнений в частных производных и некоторых других является основным содержанием теории теплопроводности.

1-7. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Поэтому можно сказать, что полученное дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса.

Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются условиями однозначности или краевыми условиями.

Условия однозначности включают в себя:

геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в которых протекает процесс;

физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела;

временные (начальные) условия, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени;

граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Геометрическими условиями и задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела λ , c , ρ и др. и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом:

при $\tau=0$

$$t=f(x, y, z). \quad (1-32)$$

В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается:

при $\tau=0$

$$t=t_0=\text{const.} \quad (1-33)$$

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

а) Граничные условия первого рода. При этом задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c=f(x, y, z, \tau), \quad (1-34)$$

где t_c —температура на поверхности тела; x, y, z —координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение (1-34) упрощается и принимает вид:

$$t_c=\text{const.}$$

б) Граничные условия второго рода. При этом задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени.

Аналитически это можно представить следующим образом:

$$q_n=f(x, y, z, \tau), \quad (1-35)$$

где q_n —плотность теплового потока на поверхности тела; x, y, z —как и в случае (1-34)—координаты на поверхности тела.

В простейшем случае плотность теплового потока по поверхности и во времени остается постоянной:

$$q_n=q_0=\text{const.} \quad (1-36)$$

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) **Граничные условия третьего рода.** При этом задаются температура окружающей среды $t_{ж}$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона—Рихмана.

Процесс теплообмена между поверхностью тела и средой относится к очень сложным процессам и зависит от большого количества параметров. Подробно эти вопросы будут рассмотрены во второй и третьей частях учебника.

Согласно закону Ньютона—Рихмана количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_{ж}$ ($t_c > t_{ж}$):

$$q = \alpha(t_c - t_{ж}), \quad (1-37)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м²·К).

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (или воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному градусу.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи [уравнение (1-37)], должно равняться теплоте, подводимой к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела [уравнение (1-10)*], т. е.

$$\alpha(t_c - t_{ж}) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1-38)$$

где n — нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при $n=0$).

Окончательно граничное условие третьего рода можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_c - t_{ж}). \quad (1-39)$$

Уравнение (1-39) по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным, поэтому мы будем в дальнейшем при решении задач теплопроводности принимать величину α постоянной.

г) **Граничные условия четвертого рода** характеризуют условия теплообмена системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности. Предполагается, что между телами осуществ-

* Это положение справедливо и для случая обратного направления теплового потока.

вляется идеальный контакт (температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы).

В рассматриваемых условиях имеет место равенство тепловых потоков, проходящих через поверхности соприкосновения:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_0 = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_0. \quad (1-40)$$

В задачах с граничным условием четвертого рода задается отношение тангенсов угла наклона касательных к температурным кривым в точке соприкосновения тел или тела и среды¹ (рис. 1-12):

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{const.} \quad (1-41)$$

Так как при совершенном контакте оба тела на поверхности соприкосновения имеют одинаковую температуру, то касательные у поверхности раздела проходят через одну и ту же точку (рис. 1-12).

Дифференциальное уравнение (1-28) совместно с условиями однозначности дают полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности. Поставленная таким образом задача разрешается аналитическим, численным или экспериментальным методом. В случае экспериментального решения задач теплопроводности используются методы физического моделирования или тепловых аналогий (гл. 5 и 6).

Глава вторая

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

2-1. ПЕРЕДАЧА ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ СТЕНКУ ($q_v = 0$)

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т. е. $\partial t / \partial \tau = 0$.

При этом дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\Delta \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p} = 0 \quad (2-1)$$

или

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2-1')$$

Если внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_v = 0$), то уравнение (2-1) упрощается и примет вид:

$$\nabla^2 t = 0 \quad (2-2)$$

или

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2-2')$$

¹ Граничные условия четвертого рода дают по существу правило сопряжения температурных полей объекта исследования и внешнего тела, в котором тепло передается путем теплопроводности. Для однозначной формулировки задачи в этом случае, естественно, необходимы дополнительные сведения о протекании процесса во внешнем теле.

В настоящей главе рассматривается теплопроводность в телах простейшей геометрической формы. При этом случаи, когда внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_v=0$) и когда они имеются ($q_v \neq 0$), рассматриваются отдельно. Первым объектом рассмотрения является передача теплоты через плоскую стенку при $q_v=0$.

а) Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . На наружных поверхностях стенки поддерживают постоянными температуры t_{c1} и t_{c2} .

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось Ox направить, как показано на рис. 2-1, то температура в направлении осей Oy и Oz будет оставаться постоянной:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

В связи с этим температура будет функцией только одной координаты x и дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0.$$

(2-3)

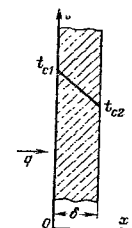


Рис. 2-1. Однородная плоская стенка.

Граничные условия в рассматриваемой задаче зададим следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \quad t=t_{c1}; \\ \text{при } x=\delta \quad t=t_{c2}. \end{array} \right\} \quad (2-4)$$

Уравнение (2-3) и условия (2-4) дают полную математическую формулировку рассматриваемой задачи.

В результате решения поставленной задачи должно быть найдено распределение температуры в плоской стенке, т. е. $t=f(x)$, и получена формула для определения количества теплоты, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения (2-3).

Первое интегрирование дает:

$$\frac{dt}{dx} = C_1. \quad (2-5)$$

После второго интегрирования получим:

$$t = C_1 x + C_2. \quad (2-6)$$

Из уравнения (2-6) следует, что при постоянном коэффициенте теплопроводности температура в стенке изменяется по линейному закону.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнении (2-6) определяются из граничных условий:

$$\text{при } x=0 \quad t=t_{c1} \text{ и } C_2=t_{c1};$$

$$\text{при } x=\delta \quad t=t_{c2} \text{ и } C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}.$$

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2-6), получаем закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \quad (2-7)$$

Если отсчет избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры t_{c2} , то уравнение (2-7) можно привести к безразмерному виду.

Обозначим $\Delta t = t - t_{c2}$ — текущий температурный напор или избыточная температура; $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ — полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

После введения этих обозначений уравнение (2-7) запишется следующим образом:

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} x \quad (2-8)$$

или

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta}.$$

Обозначим $\Delta t / \Delta t_0 = \Theta$ — безразмерный температурный напор или безразмерная избыточная температура; $x / \delta = X$ — безразмерная координата; получим:

$$\Theta = 1 - X. \quad (2-8')$$

Уравнение температурного поля (2-8') является универсальным. Его универсальность заключается в том, что распределение температуры в стенке можно представить единой прямой в отрезках на осях для любого заданного значения t_{c1} , t_{c2} и δ (рис. 2-2). В ряде случаев пользоваться безразмерными уравнениями весьма удобно.

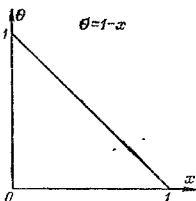


Рис. 2-2. Безразмерное поле температур в плоской стенке $\Theta = 1 - X$.

Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси Ox , воспользуемся законом Фурье, согласно которому $q = -\lambda \partial t / \partial x$. Учитывая, что $\partial t / \partial x = C_1 = (t_{c1} - t_{c2}) / \delta$, после подстановки значения $\partial t / \partial x$ в выражение закона Фурье получим:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2-9)$$

Из уравнения (2-9) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ , разности температур на наружных поверхностях стенки $t_{c1} - t_{c2}$ и обратно пропорционально толщине стенки δ . Следует указать, что тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а их разностью $t_{c1} - t_{c2} = \Delta t$, которую принято называть температурным напором.

Отношение λ / δ , Вт/(м²·К) называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ / λ , м²·К/Вт — тепловым или термическим сопротивлением стенки. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты Q_τ , ко-

торое передается через поверхность стенки величиной F за промежуток времени τ :

$$Q_{\tau} = qF\tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F\tau. \quad (2-10)$$

Из уравнения (2-9) найдем:

$$\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}.$$

После введения этого выражения в уравнение температурного поля (2-7) получим:

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x. \quad (2-11)$$

Из уравнения (2-11) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока

Выражения (2-7) и (2-9) получены в предположении, что $\lambda = \text{const}$. В действительности λ является переменной величиной.

Рассмотрим случай, когда коэффициент теплопроводности является только функцией температуры:

$$\lambda = \lambda(t).$$

Для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt),$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при 0°C .

На основании закона Фурье

$$q = -\lambda(t) \frac{dt}{dx} = -\lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dx}. \quad (a)$$

Разделяя переменные и интегрируя выражение (a) в пределах от $x=0$ до $x=\delta$ в интервале температур от t_{c1} до t_{c2} , получаем:

$$q\delta = \lambda_0 \left[1 + b \frac{(t_{c1} + t_{c2})}{2} \right] (t_{c1} - t_{c2}). \quad (б)$$

В выражении (б) множитель

$$\lambda_0 \left(1 + b \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2} \right)$$

является среднеинтегральным значением коэффициента теплопроводности, т. е.

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{t_{c1} - t_{c2}} \int_{t_{c2}}^{t_{c1}} \lambda(t) dt. \quad (2-12)$$

При этом плотность теплового потока q , Вт/м², на поверхности пластины

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2-13)$$

Из уравнения (2-13) следует, что если коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры, то q можно вычислять в предположении, что $\lambda = \text{const}$, принимая для него среднеинтегральное значение в интервале температур от t_{c1} до t_{c2} .

Интегрируя выражение (а) в пределах от $x=0$ до любой текущей координаты x и в интервале температур от t_{c1} до t , получаем выражение для температурного поля:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b} - \frac{1}{b}}. \quad (2-14)$$

Из этого уравнения следует, что температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер температурной кривой определяется знаком и числовым значением коэффициента b .

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же:

$$\partial q / \partial x = 0.$$

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоев и соответствующих коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_{c1} - t_{c2}); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_{c2} - t_{c3}); \\ &\vdots \\ q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n} (t_{cn} - t_{c(n+1)}). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Определив температурные напоры из (в) в каждом слое и сложив правые и левые части полученных уравнений, будем иметь:

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right).$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2-15)$$

Величина $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i / \lambda_i$, равная сумме термических сопротивлений всех n слоев, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

При сравнении переноса теплоты через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$ многослойной стенки. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой Δ равна толщине многослойной стенки $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i$, а термическое сопро-

тивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т. е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$\lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2-16)$$

Из уравнения (2-16) следует, что эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$ зависит не только от теплофизических свойств слоев, но и от их толщины. Температуры на границах соприкосновения двух соседних слоев равны:

$$\left. \begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_{c3} &= t_{c2} - q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{c1} - q \sum_{i=1}^i \frac{\delta_i}{\lambda_i} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

Внутри каждого из слоев температура изменяется согласно (2-7) или (2-14), а для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет ломаную линию

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

Передача тепла из одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется теплопередачей. Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.

Рассмотрим теплопередачу через однородную и многослойную плоские стенки.

Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис. 2-3). Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ , температуры окружающей среды $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 ; будем считать, что величины $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 и α_2 постоянны и не меняются вдоль поверхности. Это позволяет рассматривать изменение температуры жидкостей и стенки только в направлении, перпендикулярном плоскости стенок.

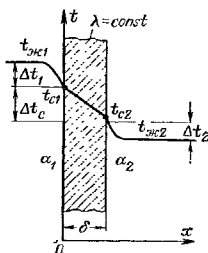


Рис. 2-3 Теплопередача через плоскую стенку.

При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхностях стенки.

Плотность теплового потока от горячей жидкости к стенке определяется уравнением

$$q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}). \quad (2-18)$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2-19)$$

Тот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \quad (2-20)$$

Уравнения (2-18) — (2-20) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} q \frac{1}{\alpha_1} &= t_{ж1} - t_{c1}; \\ q \frac{\delta}{\lambda} &= t_{c1} - t_{c2}; \\ q \frac{1}{\alpha_2} &= t_{c2} - t_{ж2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

Сложив равенства (2-21) почленно, получим:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}.$$

Отсюда плотность теплового потока, Вт/м²,

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2-22)$$

Обозначим:

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k. \quad (2-23)$$

Эта величина измеряется в Вт/(м²·К).

С учетом (2-23) уравнение (2-22) можно записать в виде

$$q = k (t_{ж1} - t_{ж2}), \text{ Вт/м}^2. \quad (2-24)$$

Величина k имеет ту же размерность, что и α , и называется коэффициентом теплопередачи. Коэффициент теплопередачи k характеризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку и численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи.

Полное термическое сопротивление однослойной стенки запишется:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2-25)$$

Из (2-25) видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных термических сопротивлений $1/\alpha_1$, δ/λ и $1/\alpha_2$, причем $1/\alpha_1 = R_1$ — термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; $\delta/\lambda = R_c$ — термическое сопротивление теплопроводности стенки; $1/\alpha_2 = R_2$ — термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то совершенно очевидно, что в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление каждого слоя. И если стенка состоит из слоев, то полное термическое сопротивление теплопередачи через такую стенку будет равно:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2}$$

или

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2-26)$$

Плотность теплового потока через многослойную стенку, состоящую из n слоев, будет равна:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k(t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (2-27)$$

Уравнение (2-27) для многослойной стенки подобно уравнению (2-24) для однородной плоской стенки. Различие заключается в выражениях для коэффициентов теплопередачи k . При сравнении уравнений (2-26) и (2-23) видно, что соотношение (2-23) является частным случаем уравнения (2-26), когда $n=1$.

Тепловой поток Q , Вт, через поверхность F твердой стенки

$$Q = qF = k\Delta t F. \quad (2-28)$$

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти из уравнений (2-21). Из них следует, что

$$t_{c1} = t_{ж1} - q \frac{1}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

или

$$t_{c2} = t_{ж2} + q \frac{1}{\alpha_2}.$$

Из сопоставления уравнений (2-15) и (2-27) следует, что передача теплоты через многослойную стенку при граничных условиях первого рода является частным случаем общего случая передачи теплоты при граничных условиях третьего рода.

На основании сказанного температура на границе любых двух слоев i и $i+1$ при граничных условиях третьего рода может быть определена по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^i \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \quad (2-29)$$

Наряду с уравнением (2-29) для расчета граничных температур применяются и графические методы.

Рассмотрим графический метод определения температур на поверхностях слоев неоднородной стенки, в основу которого положено свойство линейной зависимости температурного напора в стенке от ее термического сопротивления:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = q \frac{1}{k},$$

или для любого слоя

$$t_{ci} - t_{c(i+1)} = q \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Такая зависимость дает возможность построить фиктивную стенку, в которой толщины слоев будут пропорциональны соответствующим термическим сопротивлениям, а внешние термические сопротивления теплоотдачи $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$ учитываются введением двух условных граничных слоев соответствующей толщины. Сущность метода поясним на примере трехслойной стенки.

Общее термическое сопротивление теплопередачи через такую стенку равно:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Отложим на горизонтали отрезки O_1A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4O_2 , соответственно равные термическим сопротивлениям $1/\alpha_1$, δ_1/λ_1 , δ_2/λ_2 , δ_3/λ_3 и $1/\alpha_2$ (рис. 2-4). В точках O_1 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , O_2 поставим перпендикуляры и на O_1K_1 и O_2K_2 отложим в некотором масштабе температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$. Соединим прямой линией точки C_1 и B_2 . Отрезки A_1E_1 , A_2E_2 , A_3E_3 и A_4E_4 будут равны искомым температурам t_{c1} , t_{c2} , t_{c3} и t_{c4} . Из подобия треугольников $C_1B_1B_2$ и $C_1C_2E_1$ следует, что

$$\frac{C_1C_2}{C_1B_1} = \frac{C_2E_1}{B_1B_2} \quad \text{или} \quad \frac{C_1C_2}{t_{ж1} - t_{ж2}} = \frac{1/\alpha_1}{1/k}. \quad (2-30)$$

Из отношения (2-30) следует, что $C_1C_2 = t_{ж1} - t_{c1}$, следовательно, отрезок

$$A_1E_1 = O_1C_1 - C_1C_2 = t_{c1}.$$

Аналогичным образом доказывается, что и отрезки A_2E_2 , A_3E_3 и A_4E_4 соответственно равны температурам t_{c2} , t_{c3} и t_{c4} .

в) Граничные условия второго и третьего рода

Рассмотрим случай, когда при передаче теплоты через однородную и изотропную стенку на одной ее поверхности заданы граничные условия второго рода в виде $q_c = \text{const}$ (при $x=0$); на другой поверхности заданы коэффициент теплоотдачи α_2 и температура окружающей среды $t_{ж2}$, т. е. граничные условия третьего рода (рис. 2-5). Внутренние источники в стенке отсутствуют ($q_v=0$).

Такая задача сводится к нахождению распределения температуры в стенке и температур на ее поверхности. В силу стационарности теплового режима можно записать следующие уравнения:

$$q_c = (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\lambda}{\delta}; \quad q_c = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \quad (2-31)$$

Из уравнений (2-31) следует, что при заданном значении q_c

$$t_{c2} = t_{ж2} + q_c \frac{1}{\alpha_2}; \quad t_{c1} = t_{ж2} + q_c \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right). \quad (2-32)$$

Если мы имеем многослойную стенку, состоящую из n однородных слоев, то температура на ее поверхностях и на границе слоев может быть определена по следующим уравнениям:

на внешней правой поверхности

$$t_{c(n+1)} = t_{ж2} + q_c \frac{1}{\alpha_2};$$

на внешней левой поверхности

$$t_{c1} = t_{ж2} + q_c \left(\frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right);$$

на поверхности между слоями $m-1$ и m

$$t_{cm} = t_{ж2} + q_c \left(\frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=m}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \quad (2-33)$$

Распределение температуры внутри любого слоя найдется по уравнениям (2-7) или (2-14).

2-2. ПЕРЕДАЧА ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ [$q_v=0$]

а) Граничные условия первого рода

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром $d_1=2r_1$ и наружным диаметром $d_2=2r_2$ (рис. 2-6).

На поверхностях стенки заданы постоянные температуры t_{c1} и t_{c2} . В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки λ является постоянной величиной. Необходимо найти распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

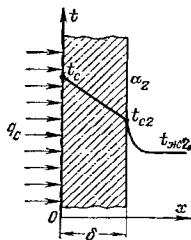


Рис. 2-5 Передача теплоты через плоскую стенку (смешанные граничные условия)

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2-34)$$

При этом ось Oz совмещена с осью трубы.

При заданных условиях температура изменяется только в радиальном направлении и температурное поле будет одномерным. Поэтому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (a)$$

Кроме того, так как температуры на наружной и внутренней поверхностях трубы неизменны, изотермические поверхности являются цилиндрическими, имеющими с трубой общую ось. Тогда температура не должна изменяться также вдоль φ , т. е.

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (б)$$

С учетом (а) и (б) уравнение (2-34) примет вид:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2-35)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}. \end{array} \right\} \quad (2-36)$$

Если решить уравнение (2-35) совместно с (2-36), получим уравнение температурного поля в цилиндрической стенке.

Введем новую переменную

$$u = \frac{dt}{dr}; \quad (в)$$

тогда

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}. \quad (г)$$

Подставляя (в) и (г) в уравнение (2-35), получаем:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} u = 0. \quad (2-37)$$

Интегрируя (2-37), получаем:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (д)$$

Потенцируя выражения (д) и переходя к первоначальным переменным, получаем:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r}. \quad (е)$$

После интегрирования получим:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (2-38)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно определить, если в уравнение (2-38) подставить граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, \quad \text{отсюда } t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, \quad \text{отсюда } t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{array} \right\} \quad (ж)$$

Решение уравнений (ж) относительно C_1 и C_2 дает

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (2-38), получим:

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

или

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2-39)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение логарифмической кривой. То обстоятельство, что распределение температуры в цилиндрической стенке является криволинейным, можно объяснить следующим.

В случае плоской стенки плотность теплового потока q остается одинаковой для всех изотермических поверхностей. По этой причине градиент температуры сохраняет для всех изотермических поверхностей постоянную величину. В случае цилиндрической стенки плотность теплового потока через любую изотермическую поверхность зависит от радиуса.

Для нахождения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной F в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F.$$

Подставляя в уравнение закона Фурье значение градиента температуры согласно уравнению (е), получаем (учитывая, что $F = 2\pi r l$):

$$Q = \frac{2\pi \lambda l (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (2-40)$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2-40) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Тепловой поток (2-40) может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом расчетные формулы для плотности теплового потока, Вт/м², принимают вид:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2-41)$$

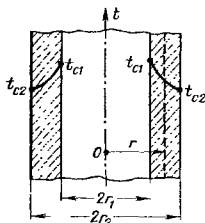


Рис. 2-6. Теплопроводность цилиндрической стенки.

(тепловой поток через единицу внутренней поверхности);

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2-42)$$

(тепловой поток через единицу наружной поверхности);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2-43)$$

(поток теплоты, проходящий через единицу длины трубы, Вт/м).

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, измеряется в Вт/м и называется линейной плотностью теплового потока. Как видно из уравнения (2-43), при неизменном отношении d_2/d_1 линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Плотности теплового потока q_1 и q_2 (отнесенные к внутренней и внешней поверхности) в случае передачи теплоты через трубу неодинаковы, причем всегда $q_1 > q_2$. Последнее ясно видно из уравнений (2-41) и (2-42).

Из уравнений (2-41) — (2-43) легко установить связь между величинами q_1 , q_2 и q_l :

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \quad (2-44)$$

В случае, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры вида $\lambda(t) = \lambda_0(1 + bt)$, можно показать, что тепловой поток можно вычислить по той же формуле, что и для случая $\lambda = \text{const}$:

$$q_l = \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda_{cp}} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2-45)$$

При этом следует помнить, что в формуле (2-45) λ_{cp} является средним интегральным значением коэффициента теплопроводности:

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{(t_{c1} - t_{c2})} \int_{t_{c2}}^{t_{c1}} \lambda(t) dt.$$

Для нахождения температурного поля в случае $\lambda = \lambda(t) = \lambda_0(1 + bt)$ можно воспользоваться уравнением закона Фурье, записанного для цилиндрической стенки:

$$q_l = -\lambda(t) \frac{dt}{dr} 2\pi r. \quad (2-46)$$

Если разделить переменные и проинтегрировать уравнение (2-46) в пределах от $r = r_1$ до r и от $t = t_{c1}$ до t и найти из полученного интеграла t , получим выражение для температурного поля следующего вида:

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{q_l \ln \frac{d}{d_1}}{\pi b \lambda_0} - \frac{1}{b}}. \quad (2-47)$$

б) Граничные условия третьего рода (телопередача)

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Заданы постоянные температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на внутренней и наружной поверхностях трубы α_1 и α_2 (рис. 2-7)

Необходимо найти q_l и t_c . Будем полагать, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями теплоты с торцов трубы можно пренебречь, и при установившемся тепловом режиме количество теплоты, которое будет передаваться от горячей среды к поверхности стенки, проходить через стенку и отдаваться от стенки к холодной жидкости, будет одно и то же.

Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

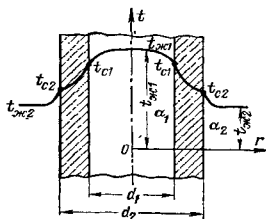


Рис. 2-7. Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку

Представим эти уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_{c2} - t_{ж2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-48')$$

Складывая уравнения, входящие в систему (2-48'), получаем температурный напор:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Отсюда следует:

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (2-49)$$

Обозначим:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (2-50)$$

С учетом (2-50) уравнение (2-49) запишется:

$$q_l = k_l \pi (t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (2-49')$$

Величина k_l называется линейным коэффициентом теплопередачи, он измеряется в Вт/(м·К). Он характеризует интенсив-

ность передачи теплоты от одной подвижной среды к другой через разделяющую их стенку. Значение k_l численно равно количеству теплоты, которое проходит через стенку длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними 1 град.

Величина $R_l = 1/k_l$, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи. Она равна

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}; \quad (2-51)$$

здесь R_l измеряется в м·К/Вт.

Отдельные составляющие полного термического сопротивления представляют собой:

$1/\alpha_1 d_1$ и $1/\alpha_2 d_2$ — термические сопротивления теплоотдачи на соответствующих поверхностях, обозначим их соответственно R_{H1} и R_{H2} ; $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ —

термическое сопротивление теплопроводности стенки, обозначим его через R_{lc} .

Следует отметить, что линейные термические сопротивления теплоотдачи для трубы определяются не только коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 , но и соответствующими диаметрами.

Если тепловой поток через цилиндрическую стенку отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, Вт/м², отнесенную к единице соответствующей поверхности трубы:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{k_1}{d_1} (t_{ж1} - t_{ж2}),$$

или

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{k_2}{d_2} (t_{ж1} - t_{ж2})$$

или

$$q_1 = k_1 (t_{ж1} - t_{ж2}); \quad q_2 = k_2 (t_{ж1} - t_{ж2}),$$

где $k_1 = k_l/d_1$ и $k_2 = k_l/d_2$.

Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентом теплопередачи при отнесении теплового потока к единице длины цилиндрической стенки и к единице поверхности:

$$k_l = d_1 k_1 = d_2 k_2;$$

здесь k_l измеряется в Вт/(м·К).

Формулы же для k_1 и k_2 , Вт/(м²·К), в развернутом виде имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{\alpha_2 d_2}}; \\ k_2 &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \end{aligned} \right\} \quad (2-52)$$

На практике часто встречаются цилиндры, толщина стенок которых мала по сравнению с диаметром. В этом случае при расчетах можно

После сложения равенств (2-55) и решения относительно q_l , Вт/м, получим:

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}, \quad (2-56)$$

или

$$q_l = k_l \pi (t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (2-56')$$

Величина

$$\frac{1}{k_l} = R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \quad (2-56'')$$

называется полным термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки и измеряется в м·К/Вт.

Из уравнения (2-55) следует, что

$$\left. \begin{aligned} t_{c1} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{c2} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \\ t_{c(i+1)} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^i \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2-57)$$

В случае задания граничных условий первого рода их можно рассматривать как предельный случай граничных условий третьего рода, когда коэффициенты теплоотдачи на поверхностях α_1 и α_2 устремляются к бесконечности, в силу чего $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ становятся равными t_{c1} и $t_{c(n+1)}$. При этих условиях уравнение (2-56) принимает вид:

$$q = \frac{\pi (t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^i \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}, \quad (2-58)$$

а выражение для расчета температуры на границах между слоями:

$$t_{c(i+1)} = t_{c1} - \frac{q_l}{\pi} \sum_{i=1}^i \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}. \quad (2-59)$$

2-3. КРИТИЧЕСКИЙ ДИАМЕТР ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки [Л. 173]. Из (2-51) имеем:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

При постоянных значениях α_1 , d_1 , λ и α_2 полное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки будет зависеть от

внешнего диаметра. Из уравнения (2-51) следует, что при этих условиях $1/\alpha_1 d_1 = R_{\text{н}} = \text{const}$.

Термическое сопротивление теплопроводности $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} = R_{\text{лс}}$ с увеличением d_2 будет возрастать, а термическое сопротивление теплоотдачи $1/\alpha_2 d_2 = R_{\text{лв}}$ будет уменьшаться. Очевидно, что полное термическое сопротивление будет определяться характером изменения составляющих $R_{\text{лс}}$ и $R_{\text{лв}}$. Изменение частных термических сопротивлений изображено на рис. 2-8.

Для того чтобы выяснить, как будет изменяться $R_{\text{л}}$ при изменении толщины цилиндрической стенки, исследуем $R_{\text{л}}$ как функцию d_2 . Возьмем производную от $R_{\text{л}}$ по d_2 и приравняем нулю:

$$\frac{d(R_{\text{л}})}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0.$$

Значение d_2 из последнего выражения соответствует экстремальной точке кривой $R_{\text{л}} = f(d_2)$. Исследовав кривую любым из известных способов на максимум и минимум, увидим, что в экстремальной точке имеет место минимум. Таким образом, при значении диаметра $d_2 = 2\lambda/\alpha_2$ термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующего минимальному полному термическому сопротивлению теплопередачи, называется критическим диаметром и обозначается $d_{\text{кр}}$. Рассчитывается он по формуле

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \quad (2-60)$$

При $d_2 < d_{\text{кр}}$ с увеличением d_2 полное термическое сопротивление теплопередачи снижается, так как увеличение наружной поверхности оказывает на термическое сопротивление большее влияние, чем увеличение толщины стенки.

При $d_2 > d_{\text{кр}}$ с увеличением d_2 термическое сопротивление теплопередачи возрастает, что указывает на доминирующее влияние толщины стенки.

Изложенные соображения необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции для покрытия различных цилиндрических аппаратов и трубопроводов.

Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу (рис. 2-9). Термическое сопротивление теплопередачи для такой трубы запишется:

$$R_{\text{л}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{из}}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}.$$

Из уравнения $q_{\text{л}} = \pi \Delta t / R_{\text{л}}$ следует, что $q_{\text{л}}$ при увеличении внешнего диаметра изоляции d_3 сначала будет возрастать и при $d_3 = d_{\text{кр}}$ будет

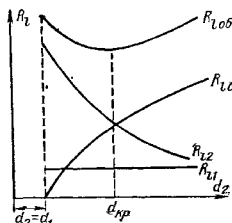


Рис 2-8. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2 .

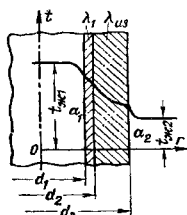


Рис. 2-9. К понятию критического диаметра изоляции.

иметь максимум q_l . При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции q_l будет снижаться (рис. 2-10).

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия цилиндрической поверхности, прежде всего нужно рассчитать критический диаметр по формуле (2-60) для заданных $\lambda_{из}$ и α_2 .

Если окажется, что величина $d_{кр}$ больше наружного диаметра трубы d_2 , то применение выбранного материала в качестве тепловой изоляции нецелесообразно. В области $d_2 < d_3 < d_{кр}$ из при увеличении толщины изоляции будет наблюдаться увеличение теплотерь. Это положение наглядно иллюстрируется на рис. 2-10. Только при $d_3 = d_{эф}$ тепловые потери вновь станут такими же, как для первоначального, неизолированного трубопровода. Следовательно, некоторый слой тепловой изоляции не будет оправдывать своего назначения.

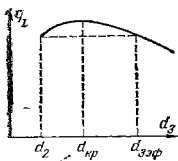


Рис. 2-10. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции, наложенной на цилиндрическую стенку.

Значит, для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы $d_{кр из} \leq d_2$.

Пример. Трубу внешним диаметром $d = 20$ мм необходимо покрыть тепловой изоляцией. В качестве изоляции может быть взят асбест с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,1$ Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду $\alpha_2 = 5$ Вт/(м²·К). Целесообразно ли в данном случае использовать асбест в качестве материала для тепловой изоляции?

Критический диаметр изоляции

$$d_{кр из} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 0,1}{5} = 0,04 \text{ м} = 40 \text{ мм.}$$

Так как $d_2 < d_{кр из}$, асбест в рассматриваемом случае использовать нецелесообразно.

В настоящем параграфе вопрос о критическом диаметре рассмотрен применительно к круглому цилиндру. Очевидно, что аналогичный эффект будет наблюдаться и в случае тел иной геометрии, у которых внутренняя и внешняя поверхности различны [Л. 77].

2-4. ПЕРЕДАЧА ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ШАРОВУЮ СТЕНКУ

а) Граничные условия первого рода

Пусть имеется полый шар с радиусами r_1 и r_2 , постоянным коэффициентом теплопроводности λ и с заданными равномерно распределенными температурами поверхностей t_{c1} и t_{c2} .

Так как в рассматриваемом случае температура измеряется только в направлении радиуса шара, то дифференциальное уравнение теплопроводности в сферических координатах принимает вид:

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2-61)$$

Граничные условия запишутся:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}. \end{array} \right\} \quad (2-62)$$

После первого интегрирования уравнения (2-61) получаем:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (a)$$

Второе интегрирование дает:

$$t = C_2 - \frac{C_1}{r}. \quad (2-63)$$

Постоянные интегрирования в уравнении (2-63) определяются из граничных условий (2-62). При этом получим:

$$C_1 = - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}; \quad (6)$$

$$C_2 = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}. \quad (B)$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (2-63), получаем выражения для температурного поля в шаровой стенке:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \quad (2-64)$$

Для нахождения количества теплоты, проходящей через шаровую поверхность величиной F в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dt}{dr};$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Если в это выражение подставить значение градиента температуры dt/dr , то получим:

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{2\pi\lambda\Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t. \quad (2-65)$$

Эти уравнения являются расчетными формулами теплопроводности шаровой стенки. Из уравнения (2-64) следует, что при постоянном λ температура в шаровой стенке меняется по закону гиперболы.

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

При заданных граничных условиях третьего рода кроме r_1 и r_2 будут известны $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также коэффициенты теплоотдачи на поверхности шаровой стенки α_1 и α_2 . Величины $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 и α_2 предполагаются постоянными во времени, а α_1 и α_2 — и по поверхностям.

Поскольку процесс стационарный и полный тепловой поток Q , Вт, будет постоянным для всех изотермических поверхностей, то можно записать:

$$Q = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{ж1} - t_{c1}); \quad Q = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{c1} - t_{c2}); \quad Q = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Из этих уравнений следует, что

$$Q = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = k_{ш} \pi \Delta t. \quad (2-66)$$

Величина

$$k_{ш} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки и измеряется в Вт/К.

Обратная величина

$$\frac{1}{k_{ш}} = R_{ш} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

называется термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки и измеряется в К/Вт.

2.5. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛОСКОЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ШАРОВОЙ СТЕНКАХ

Для процесса теплопроводности в плоской, цилиндрической и шаровой стенках можно предложить обобщенное решение как при постоянном коэффициенте теплопроводности λ , так и в случае зависимости последнего от температуры.

Рассмотрим одномерную задачу для всех трех случаев при постоянном коэффициенте теплопроводности стенки. При этом зависимость температуры в пространстве для плоской стенки представим как $t = f_1(x)$, для цилиндрической стенки $t = f_2(r)$ и для шаровой стенки $t = f_3(r)$.

Если принять, что изотермические поверхности в рассматриваемых телах замкнуты, то температура становится функцией только координаты n , являющейся нормалью к изотермическим поверхностям, тепловой поток будет пропорционален градиенту температуры $\partial t / \partial n$, а величина поверхности выразится функцией $F = F(n)$.

Замкнутость изотермических поверхностей для цилиндра и шара очевидна, а пластину будем рассматривать как предельный случай замкнутой системы, когда $n \rightarrow \infty$.

Вследствие замкнутости изотермических поверхностей тепловой поток через стенку любого из рассматриваемых тел можно представить как

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dn} F(n). \quad (2-67)$$

Так как $Q = \text{const}$ для любой изотермической поверхности, то, разделяя переменные в уравнении (2-67) и интегрируя в пределах от $n = n_1$ до $n = n_2$ и соответственно от t_{c1} до t_{c2} , получим:

$$Q = \frac{\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}}. \quad (2-68)$$

Видим, что формула (2-68) аналогична ранее полученной для плоской стенки:

$$q = \frac{\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\delta}.$$

При этом Q аналогично плотности теплового потока q , а $\int_{n_1}^{n_2} dn/F(n) =$
 $= I_{n_1}^{n_2}$ — толщине стенки, которую в дальнейшем условимся называть при-
 введенной толщиной стенки. Формула (2-68) является общей для опи-
 сания теплового потока через стенки всех трех геометрических форм.

Величина $\int_{n_1}^{n_2} dn/F(n)$ зависит только от геометрической формы стенки.

а) Для плоской пластины $n=x$, $n_1=0$ и $n_2=\delta$, а

$$F(n) = F = \text{const},$$

тогда

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F} = \frac{1}{F} \int_0^{\delta} dx = \frac{\delta}{F}.$$

Подставляя полученное значение $I_{n_1}^{n_2}$ в уравнение (2-68), приходим к
 выражению теплового потока Q , Вт, для плоской пластины:

$$Q = \frac{\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\delta} F. \quad (2-69)$$

б) Для цилиндрической стенки $n=r$, $n_1=r_1$ и $n_2=r_2$, а

$$F(n) = F(r) = 2\pi r l,$$

тогда

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{d(n)}{F(n)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

С учетом полученного значения $I_{n_1}^{n_2}$ выражение (2-68) принимает вид:

$$Q = \frac{2\pi l \lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2-70)$$

в) Для шаровой стенки $n=r$, $n_1=r_1$ и $n_2=r_2$, а

$$F(n) = F(r) = 4\pi r^2,$$

тогда

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

и формула (2-68) применительно к шаровой стенке принимает вид:

$$Q = \frac{2\pi \lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}. \quad (2-71)$$

Интегрируя выражение (2-67) в пределах от n_1 до любой текущей
 координаты и в интервале температур от t_{c1} до t , получаем уравнение
 для температурного поля:

$$t = t_{c1} - \frac{Q}{\lambda} \int_{n_1}^n \frac{dn}{F(n)}.$$

Обозначая $\int_{n_1}^n dn/F(n) = I_{n_1}^n$, последнее уравнение можно записать:

$$t = t_{c1} - \frac{Q}{\lambda} I_{n_1}^n.$$

Подставляя в полученное выражение значение теплового потока Q из (2-68), получаем:

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{I_{n_1}^n}{I_{n_1}^{n_2}}. \quad (2-72)$$

Отношение $I_{n_1}^n/I_{n_1}^{n_2}$ в уравнении (2-72) можно рассматривать как некоторую приведенную безразмерную координату X , которая зависит от геометрической формы стенки. Уравнение (2-72) можно привести к безразмерному виду:

$$\frac{t - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 - \frac{I_{n_1}^n}{I_{n_1}^{n_2}}. \quad (2-73)$$

С обозначениями $\frac{t - t_{c1}}{t_{c1} - t_{c2}} = \Theta$ (безразмерная температура) и $I_{n_1}^n/I_{n_1}^{n_2} = X$ уравнение (2-73) принимает вид:

$$\Theta = 1 - X. \quad (2-73')$$

Уравнение (2-73) является обобщенным выражением температурного поля в безразмерных величинах для всех трех геометрических форм.

Приведенная безразмерная координата в уравнении (2-73') вычисляется с учетом геометрической формы стенки:

для плоской стенки

$$X = X_{\text{пл}} = \frac{x}{\delta}; \quad (2-74)$$

для цилиндрической стенки

$$X = X_{\text{ц}} = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad (2-75)$$

для шаровой стенки

$$X = X_{\text{ш}} = \frac{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)}. \quad (2-76)$$

Уравнения (2-68) и (2-73') получены при постоянном коэффициенте теплопроводности стенки. Аналогичным образом можно получить обобщенные зависимости и для случая, когда коэффициент теплопроводности λ является функцией температуры.

2-6. ПУТИ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

а) Интенсификация теплопередачи путем увеличения коэффициентов теплоотдачи

Из уравнения теплопередачи

$$Q = kF\Delta t$$

следует, что при заданных размерах стенки и температурах жидкостей величиной, определяющей теплопередачу, является k . Но поскольку

теплопередача — явление сложное, то правильное решение можно найти только на основе анализа частных составляющих, характеризующих процесс. Так, например, если мы имеем дело с плоской стенкой, для которой

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

то при $\delta/\lambda \rightarrow 0$ (что можно принять для тонких стенок с большим коэффициентом λ)

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1}. \quad (2-77)$$

Из уравнения (2-77) следует, что коэффициент теплопередачи не может быть больше самого малого α . При $\alpha_2 \rightarrow \infty$ k' стремится к своему предельному значению α . При $\alpha_1 \rightarrow \infty$ коэффициент теплопередачи стремится к α_2 .

Проследим это на числовых примерах.

а) 1) $\alpha_1 = 40$ и $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м²·К);

2) $\alpha_1 = 40$ и $\alpha_2 = 10\,000$ Вт/(м²·К).

По формуле (2-77) находим, что коэффициенты теплопередачи будут равны:

$$k'_1 = 39,7 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)} \text{ и } k'_2 = 39,8 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

б) 1) $\alpha_1 = 80$ Вт/(м²·К) и $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м²·К);

2) $\alpha_1 = 200$ Вт/(м²·К) и $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м²·К).

Для случая (б) находим, что коэффициенты теплопередачи становятся равными:

$$k'_1 = 78,8 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)} \text{ и } k'_2 = 192 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Из рассмотренного примера видно, что при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ увеличение большего из коэффициентов теплопередачи (α_2) практически не дает увеличения k' . Увеличение меньшего из коэффициентов теплоотдачи (α_1) в 2 и 5 раз дает увеличение k' почти во столько же раз.

На рис. 2-11 представлена зависимость $k' = f(\alpha_1, \alpha_2)$ согласно формуле (2-77). Из графика следует, что при увеличении α_1 значение k' быстро растет до тех пор, пока α_1 не сравняется с α_2 . После того как α_1 станет больше α_2 , рост k' замедляется и при дальнейшем увеличении α_1 практически прекращается. Следовательно, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ для увеличения k' следует увеличивать α_1 , т. е. уменьшать большее из термических сопротивлений $1/\alpha_1$. Иначе говоря, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ увеличение k' возможно только за счет увеличения α_1 . Если $\alpha_1 \approx \alpha_2$, увеличение коэффициента теплопередачи возможно за счет увеличения любого из α .

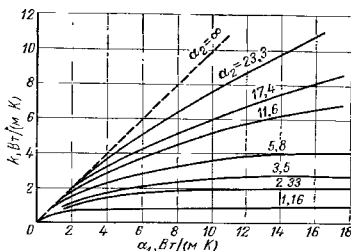


Рис 2-11 Зависимость $k' = f(\alpha_1, \alpha_2)$

б) Интенсификация теплопередачи за счет оребрения стенок

При передаче теплоты через цилиндрическую стенку термические сопротивления $1/\alpha_1 d_1$ и $1/\alpha_2 d_2$ определяются не только значениями коэффициентов теплоотдачи, но и размерами самих поверхностей. При передаче тепла через шаровую стенку влияние диаметров d_1 и d_2 оказывается еще сильнее, что видно из соотношений $1/\alpha_1 d_1^2$ и $1/\alpha_2 d_2^2$. Отсюда следует, что если α мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности. Такой же результат можно получить и для плоской стенки, если одну из поверхностей увеличить путем оребрения. Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом термические сопротивления станут пропорциональными величинам

$$\frac{1}{\alpha_1 F_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\alpha_2 F_2}.$$

Следует указать, что при использовании метода оребрения нужно руководствоваться следующими соображениями: если $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то оребрять поверхность со стороны α_1 следует до тех пор, пока $\alpha_1 F_1$ не достигает значения $\alpha_2 F_2$. Дальнейшее увеличение поверхности F_1 малоэффективно. Ребристые поверхности изготавливаются или в виде сплошных отливок или отдельных ребер, прикрепленных к поверхности.

Строгое аналитическое решение задачи о распространении тепла в ребре связано со значительными трудностями. В основу решения поэтому кладут некоторые допущения, которые позволяют сравнительно простым путем получить нужный результат. Ниже рассмотрим метод решения задач о теплопроводности в ребрах простейших геометрических форм.

2.7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СТЕРЖНЕ (РЕБРЕ) ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

а) Дифференциальное уравнение и его решение

Ребра в поперечном сечении могут иметь профиль самой различной геометрической конфигурации (прямоугольник, круг, треугольник и другие фигуры, в том числе и неправильной геометрической формы).

Рассмотрим распространение тепла в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине. Обозначим площадь поперечного сечения стержня через f и периметр через u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{жк}$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде будем считать постоянным для всей поверхности. Будем полагать также, что коэффициент теплопроводности материала стержня λ достаточно велик, а поперечное сечение очень мало по сравнению с его длиной. Последнее дает основание пренебречь изменением температуры в поперечном сечении и считать, что она из-

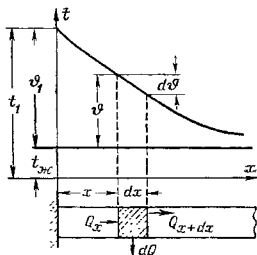


Рис. 2-12. Перенос теплоты через стержень.

меняется только вдоль оси стержня. Для удобства дальнейших выкладок отсчет температуры будем вести от $t_{ж} = \text{const}$. Отсчитанную таким образом избыточную температуру стержня обозначим через ϑ . Очевидно,

$$\vartheta = t - t_{ж},$$

где $t_{ж}$ — температура среды, окружающей стержень; t — текущая температура стержня.

Если задана температура основания стержня t_1 , то избыточная температура стержня (рис. 2-12) будет:

$$\vartheta_1 = t_1 - t_{ж}.$$

На расстоянии x от основания стержня выделим элемент стержня длиной dx . Уравнение теплового баланса для рассматриваемого элемента можно записать:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ, \quad (a)$$

где Q_x — количество теплоты, входящее в левую грань элемента за единицу времени; Q_{x+dx} — количество теплоты, которое выходит из противоположной грани элемента за то же время; dQ — количество теплоты, отдаваемое за единицу времени наружной поверхностью элемента окружающей его среде.

Согласно закону Фурье

$$Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f$$

и

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) f,$$

откуда

$$Q_{x+dx} = -\lambda f \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda f \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx.$$

Следовательно,

$$Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx. \quad (б)$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона — Рихмана:

$$dQ = \alpha_p \vartheta u dx. \quad (в)$$

Приравнявая (б) и (в), получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры стержня:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_p u}{\lambda f} \vartheta = m^2 \vartheta, \quad (2-78)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_p u}{\lambda f}}. \quad (г)$$

величина m измеряется в 1/м.

Из выражения (г) видно, что для ребра, форма и размеры которого заданы, при условии постоянства коэффициента теплоотдачи α_p по всей поверхности и постоянства λ в рассматриваемом интервале температур, величина $m = \text{const}$. Тогда общий интеграл для уравнения (2-78) будет:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (2-79)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Граничные условия могут быть заданы по-разному в зависимости от длины стержня и других факторов.

б) Стержень бесконечной длины

В начальном сечении стержня температура поддерживается постоянной, т. е. при $x=0$ величина $\vartheta=\vartheta_1$. Если длина стержня $l \rightarrow \infty$, то вся теплота, подводимая к стержню, будет отдана им в окружающую среду и при $x \rightarrow \infty$ имеем $\vartheta=0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (2-79) дает:

$$\text{при } x=0 \quad \vartheta_1 = C_1 + C_2;$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad C_1 e^{\infty} = 0.$$

Последнее равенство возможно только при $C_1=0$. Таким образом, $C_2=\vartheta_1$. Подставляя эти значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (2-79), получаем:

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-mx}. \quad (2-80)$$

Последнее равенство можно записать в виде:

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_1} = e^{-mx}, \quad (2-80')$$

где Θ — безразмерная температура, выраженная в долях температуры ϑ_1 начального сечения стержня.

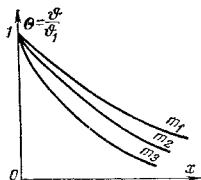
На рис. 2-13 представлена зависимость безразмерной температуры Θ от длины стержня при различных значениях параметра m ($m_1 < m_2 < m_3$).

Из рассмотрения рис. 2-13 следует, что безразмерная температура убывает тем сильнее, чем больше множитель m . При $x \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически приближаются к $\Theta=0$.

Из уравнения $m = \sqrt{\alpha_p \mu / \lambda l}$ следует, что величина m пропорциональна на теплоотдаче с боковой поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{\lambda f}$ — фактору, определяющему передачу теплоты теплопроводностью вдоль стержня.

Отсюда следует, что при обреблении нужно выбирать материал для ребер с большим коэффициентом теплопроводности. Последнее приводит к уменьшению m и сохранению больших избыточных температур вдоль стержня. При $\alpha_p / \lambda = \text{const}$ величина m возрастает с возрастанием u/f , что указывает на более эффективную работу ребер с профилями, имеющими меньшее отношение u/f при том же поперечном сечении.

Рис. 2-13 Изменение температуры по длине стержня



Количество теплоты, передаваемое стержнем в окружающую среду, очевидно, будет равняться количеству теплоты, проходящему через его основание.

Через основание стержня проходит тепловой поток

$$Q = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} f;$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Из уравнения (2-80) находим:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -m e^{-mx} \vartheta_1 \big|_{x=0} = -m \vartheta_1.$$

Подставляя значение градиента температуры при $x=0$ в предыдущее уравнение для теплового потока, получаем формулу, определяющую

щую количество теплоты, отданной стержнем в окружающую среду:

$$Q = \lambda f m \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda f}. \quad (2-81)$$

в) Стержень конечной длины

Для стержня конечной длины дифференциальное уравнение (2-78) и его решение (2-79) сохраняет силу, но граничные условия будут другими:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=0 \quad \vartheta &= \vartheta_1; \\ \text{при } x=l \quad -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} &= \alpha_l \vartheta_l; \\ \text{или} \\ \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} &= -\frac{\alpha_l}{\lambda} \vartheta_l, \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

где ϑ_l — температура на конце стержня; α_l — коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

При $x=l$ имеет место равенство количества теплоты, подведенного к торцу стержня за счет теплопроводности и количества теплоты, отдаваемого поверхностью торца в окружающую среду за счет теплоотдачи. Для определения постоянных C_1 и C_2 в уравнении (2-79) используем граничные условия (2-82):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=0 \quad \vartheta_1 &= C_1 + C_2; \\ \text{при } x=l \quad \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} &= C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = -\frac{\alpha_l}{\lambda} \vartheta_l \end{aligned} \right\} \quad (2-82')$$

и

$$\vartheta_l = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}.$$

Из полученных уравнений (2-82) определяем постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 \left(m - \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}}; \quad C_2 = \vartheta_1 \frac{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}}.$$

Подставляя полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (2-79), получаем:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left[\frac{e^{mx} \left(m - \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}} + \frac{e^{-mx} e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right)}{e^{2ml} \left(m + \frac{\alpha_l}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_l}{\lambda}} \right]. \quad (2-83)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (2-83) на e^{-ml} и проведя простые алгебраические преобразования, получим:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left[\frac{m [e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}] + \frac{\alpha_l}{\lambda} [e^{ml(x)} - e^{-m(l-x)}]}{m [e^{ml} + e^{-ml}] + \frac{\alpha_l}{\lambda} [e^{ml} - e^{-ml}]} \right].$$

Напомним, что

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x) \quad \text{и} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x).$$

С учетом сказанного уравнение (2-82) запишется:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)] + \frac{\alpha_1}{m\lambda} \operatorname{sh}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml) + \frac{\alpha_1}{m\lambda} \operatorname{sh}(ml)}. \quad (2-83')$$

Если теплоотдачей с конца стержня пренебречь, то граничные условия (2-82) можно записать в виде

$$\text{при } x=0 \quad \vartheta = \vartheta_1;$$

$$\text{при } x=l \quad \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Последнее можно допустить для случая, когда α_l на торце стержня мало, а коэффициент теплопроводности материала λ велик и отношение $\alpha_l/\lambda \rightarrow 0$, т. е. можно пренебречь теплоотдачей с торца стержня.

Для этих условий в соотношении (2-83') вторые члены числителя и знаменателя правой части обращаются в нуль и уравнение принимает вид:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml)}; \quad (2-84)$$

здесь ϑ измеряется в $^{\circ}\text{C}$.

По формулам (2-83') и (2-84) можно вычислить температуру в любом сечении стержня. Обычно доля теплоты, отдаваемой с торца стержня, является величиной малой по сравнению с количеством теплоты, отдаваемым с поверхности ребра, и для практических инженерных расчетов, как правило, используется формула (2-84).

В предельном случае, когда $x=l$, формула (2-84) принимает вид:

$$\vartheta_{x=l} = \frac{\vartheta_1}{\operatorname{ch}(ml)}.$$

Количество теплоты Q_p , Вт, отдаваемое поверхностью ребра в окружающую среду, будет равно количеству теплоты, подводимому к основанию ребра:

$$Q_p = -\lambda f \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0}.$$

Из уравнения (2-84) находим:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = -\vartheta_1 m \frac{\operatorname{sh}(ml)}{\operatorname{ch}(ml)} = -\vartheta_1 m \operatorname{th}(ml).$$

Тогда

$$Q_p = \lambda f m \vartheta_1 \operatorname{th}(ml). \quad (2-85)$$

Подставив $m = \sqrt{\alpha_p \mu / \lambda f}$ в (2-85), получим:

$$Q_p = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \mu \lambda f} \operatorname{th}(ml). \quad (2-85')$$

Если длина стержня очень велика, то $\operatorname{ch}(ml) \rightarrow \infty$, а $\operatorname{th}(ml) \approx 1$. Тогда

$$\vartheta_{x=l} = 0$$

и формула (2-85) превращается в (2-81).

2-8. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ РЕБРИстую ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Необходимо найти тепловой поток через плоскую ребристую стенку безграничных размеров. Стенка оребрена со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи (рис. 2-14).

Заданы постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на неоребренной поверхности стенки α_1 , гладкой части оребренной поверхности α_c и на поверхности ребер α_p . Заданы геометрические размеры ребер (рис. 2-14) и температуры теплоносителей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$.

Поскольку для ребра $b \gg \delta$, то полагаем, что периметр поперечного сечения ребер $u = 2b$. Площадь поперечного сечения ребра $f = b\delta$.

Следовательно, $m = \sqrt{\alpha_p u / \lambda f} = \sqrt{2\alpha_p / \lambda \delta}$, 1/м. Подставив полученное выражение для m в уравнение (2-85), умножив и разделив на $2l$, получим:

$$Q_p = \delta_1 \sqrt{\alpha_p 2b\lambda\delta} \frac{2l}{2l} \operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \right) = \alpha_p \delta_1 F_p \frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}};$$

здесь $\alpha_p \delta / \lambda = \text{Bi}$ — безразмерный комплекс, называемый числом Био. Число Би является важной характеристикой процесса теплопроводности. Оно представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи:

$$\text{Bi} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha_p}.$$

Окончательно уравнение для теплового потока с поверхности ребра можно записать в виде

$$Q_p = \alpha_p \delta_1 F_p \frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}}}. \quad (2-86)$$

Обозначим:

$$\frac{\operatorname{th} \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}}} = E.$$

Величина E называется коэффициентом эффективности ребра. Тогда уравнение (2-86) принимает вид:

$$Q_p = \alpha_p \delta_1 F_p E.$$

Величина $E = f \left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right)$ стремится к своему максимальному значению, равному единице, при $\frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \rightarrow 0$ (при заданных геометрических размерах ребра последнее возможно в случае, если $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. $\text{Bi} \rightarrow 0$).

Теплота Q_c , Вт, отдаваемая гладкой частью оребренной поверхности,

$$Q_c = \alpha_c \delta_1 F_c.$$

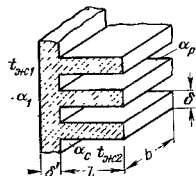


Рис. 2-14. Теплопередача через ребристую стенку.

Общее количество теплоты:

$$Q = Q_p + Q_c = \alpha_p \theta_1 F_p E + \alpha_c \theta_1 F_c \quad (a)$$

или

$$Q = \alpha_{np} \theta_1 F_{p.c}, \quad F_{p.c} = F_p + F_c. \quad (b)$$

Из сопоставления (a) и (b) следует, что

$$\alpha_{np} = \alpha_p E \frac{F_p}{F_{p.c}} + \alpha_c \frac{F_c}{F_{p.c}}. \quad (2-87)$$

Величина α_{np} , входящая в уравнение (2-87), называется приведенным коэффициентом теплоотдачи. Это такой усредненный коэффициент теплоотдачи ребристой стенки, который учитывает теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой части стенки и эффективность работы ребра.

Тогда для передачи теплоты через ребристую стенку можно записать систему уравнений:

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \quad Q = \frac{\lambda}{\delta'} (t_{c1} - t_{c2}) F_1; \quad Q = \alpha_{np} (t_{c2} - t_{ж2}) F_{p.c};$$

здесь δ' — см. рис. 2-14.

Из этих уравнений получаем:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta'}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{p.c}}}. \quad (2-88)$$

Если тепловой поток отнести к единице оребренной поверхности стенки, то

$$\frac{Q}{F_{p.c}} = q_{p.c} = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{p.c}}{F_1} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{p.c}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{np}}} = k_{p.c} (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2-89)$$

где

$$k_{p.c} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{p.c}}{F_1} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{p.c}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{np}}}$$

— коэффициент теплопередачи через ребристую стенку при отнесении теплового потока к оребренной поверхности, Вт/(м²·К).

Если тепловой поток отнести к неоребренной поверхности стенки, то получим:

$$\frac{Q}{F_1} = q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{np}} \frac{F_1}{F_{p.c}}} = k_1 (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2-90)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{np}} \frac{F_1}{F_{p.c}}}$$

— коэффициент теплопередачи при отнесении теплового потока к неоребренной поверхности стенки.

Отношение оребренной поверхности $F_{p.c}$ к гладкой F_1 называется коэффициентом оребрения.

Влияние оребрения на коэффициент теплопередачи можно показать на следующем примере. Пусть $\alpha_1=1000$ и $\alpha_2=20$ Вт/(м²·К). Предположим, что δ'/λ мало и им можно пренебречь, тогда

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_{пр}} \frac{F_1}{F_{p.c}}}.$$

Для плоской поверхности (коэффициент оребрения $F_{p.c}/F_1$ равен единице) получим:

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Если стенка имеет ребра с одной стороны, причем коэффициент $F_{p.c}/F_1=2$, то

$$k'_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}} \approx 40 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Следовательно, при заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{p.c}/F_1=2$, передача теплоты увеличивается примерно в 2 раза.

2.9. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КРУГЛОГО РЕБРА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Ребра, имеющие переменное поперечное сечение по высоте, рассчитываются значительно сложнее, чем прямые ребра постоянного сечения. Рассмотрим расчет теплопроводности круглого ребра постоянной толщины (рис. 2-15). Круглые ребра применяются при оребрении цилиндрических поверхностей (труб).

Заданы внутренний радиус ребра r_1 , наружный r_2 , толщина δ и коэффициент теплопроводности λ . Температура среды $t_{ж}=\text{const}$. Избыточная температура ребра будет:

$$\vartheta = t - t_{ж}.$$

Задан постоянный коэффициент теплоотдачи α на всей поверхности ребра и температура у основания ребра ϑ_1 .

Режим стационарный, и температура изменяется только по высоте ребра. Найдем для этих условий дифференциальное уравнение, которым описывается процесс теплопроводности в ребре. Составим уравнение баланса энергии для кольцевого элемента ребра толщиной dr :

$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ. \quad (2-91)$$

Находя составляющие уравнения (2-91), получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \vartheta = 0. \quad (2-92)$$

Обозначим $2\alpha/\lambda\delta = m^2$, $mr = z$ и $1/r = m/z$; тогда уравнение (2-82) после подстановки $d\vartheta/dr = m d\vartheta/dz$ и $d^2\vartheta/dr^2 = m^2 (d^2\vartheta/dz^2)$ принимает вид:

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \vartheta = 0. \quad (2-93)$$

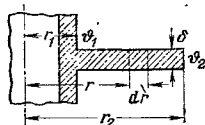


Рис. 2-15. Перенос теплоты через круглое ребро постоянной толщины.

Уравнение (2-93) представляет собой уравнение Бесселя, имеющее общее решение вида

$$\vartheta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z), \quad (2-94)$$

где $I_0(z) = I_0(mr)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $K_0(z) = K_0(mr)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Эти функции имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} \text{при } r=0 \quad I_0(mr) &= 1 \text{ и } K_0(mr) \rightarrow \infty; \\ \text{при } r=\infty \quad I_0(mr) &\rightarrow \infty \text{ и } K_0(mr) = 0. \end{aligned}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий.

Если теплоотдачей с торца круглого ребра пренебречь, то расчетные формулы будут иметь вид:

для текущей температуры в ребре

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}, \quad (2-95)$$

для температуры на конце ребра

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(mr_2) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}, \quad (2-96)$$

для количества теплоты

$$Q = -\lambda 2\pi r_1 \delta \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_1} = 2\pi r_1 \alpha \delta m \vartheta_1 \psi, \quad (2-97)$$

где

$$\psi = \frac{I_1(mr_2) K_1(mr_1) - I_1(mr_1) K_1(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}.$$

При пользовании этими формулами теплоотдача с торца может быть учтена условным увеличением высоты ребра (r_2) на половину толщины торца.

Формулы (2-95) — (2-97) громоздки и мало удобны для технических расчетов. Поэтому для других ребер постоянного сечения, а также

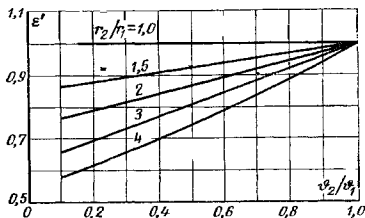


Рис. 2-16. $\varepsilon' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, r_2/r_1)$ — вспомогательный график для расчета круглых ребер постоянной толщины.

для различных прямых ребер переменного сечения расчет можно свести к методике расчета прямых ребер постоянного сечения. При этом количество теплоты, которое будет отдаваться поверхностью круглого ребра постоянной толщины,

$$Q' = \varepsilon' F' q, \quad (2-98)$$

где Q' — количество теплоты, отдаваемое круглым ребром, Вт; F' — поверхность круглого ребра, м²; $q = Q/F$ — количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей поверхности прямого ребра, толщина которого равна толщине круглого, а длина равна 1 м;

$\varepsilon' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, r_2/r_1)$ — поправочный коэффициент, определяемый по кривым рис. 2-16.

Здесь θ_2/θ_1 — отношение температур на концах ребра, вычисленных по формулам для прямого ребра постоянного сечения.

Таким образом, вычисляя температуру на конце ребра и плотность теплового потока для прямого ребра и подставляя q и ϵ' в уравнение (2-98), получим значение теплового потока для круглого ребра.

2-10. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРЯМОГО РЕБРА ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

При конструировании систем охлаждения для целого ряда машин, в особенности для летательных аппаратов, приобретает особую важность решение задачи максимального теплообмена при минимальной массе теплообменника. Возникает вопрос о том, какова оптимальная форма сечения ребра, имеющего минимальную массу при заданном тепловом потоке.

Ребро с минимальной массой [Л. 209]. Существо вопроса сводится к тому, чтобы каждая часть ребра использовалась с одинаковым эффектом, т. е. плотность теплового потока должна оставаться постоянной по всему поперечному сечению ребра. Это значит, что линии теплового потока должны быть параллельными оси ребра. При этих условиях температура вдоль линии теплового потока будет изменяться по линейному закону (рис. 2-17).

При заданной температуре у основания ребра t_1 и при температуре вершины ребра, близкой к температуре окружающей среды $t_{ж}$, в силу однородности задачи для любого сечения ребра можно записать:

$$t - t_{ж} = \frac{x}{h} (t_1 - t_{ж}), \quad (2-99)$$

где x — расстояние по оси ребра от его вершины; h — полная высота ребра.

Рассмотрим элемент поверхности ребра на расстоянии x . Пусть этот участок поверхности образует с осью ребра угол φ . Если плотность теплового потока вдоль оси ребра равна q , то через рассматриваемый элемент поверхности ребра она будет равна $q \sin \varphi$ (рис. 2-17). При этом должно быть справедливо соотношение

$$q \sin \varphi = a(t - t_{ж}),$$

или

$$q \sin \varphi = \frac{a}{h} x (t_1 - t_{ж}). \quad (2-100)$$

Из равенства (2-100) следует, что угол φ является функцией только x :

$$\sin \varphi = \frac{a \theta_1}{qh} x. \quad (2-100')$$

Контур ребра, найденный указанным методом, представляет собой дугу окружности с радиусом r , так как $\sin \varphi = x/r$. Из уравнений (2-100') следует, что $r = qh/a\theta_1$. Доказано, что такой профиль ребра,

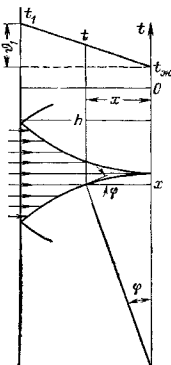


Рис. 2-17. Сечение ребра минимального веса.

образованный дугами окружности, обладает минимальной массой. Такое ребро и ребро треугольного сечения по массе отличаются очень мало. По технологическим причинам проще изготовить ребра треугольного профиля, поэтому на практике они используются чаще, чем ребра, образованные дугой окружности.

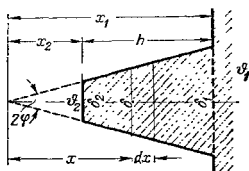


Рис. 2-18. Перенос теплоты через прямое ребро трапециевидного сечения.

Ребро треугольного и трапециевидного сечения. В практике нашли широкое применение прямые ребра как треугольного сечения с острой вершиной, так и с усеченной вершиной — трапециевидные.

Пусть заданы размеры трапециевидного ребра (рис. 2-18) и избыточная температура θ_1 у его основания. За начало координат целесообразно принять вершину треугольника, направив ось x вдоль оси симметрии ребра. При этом вектор плотности теплового потока q будет направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси x [Л. 124].

Для такого ребра площадь поперечного сечения f будет функцией только координаты x :

$$f = l\delta = 2lx \operatorname{tg} \varphi. \quad (a)$$

Количество теплоты, которое будет отдаваться в окружающую среду с элемента ребра dx , будет равно:

$$d(\lambda f \frac{d\theta}{dx}) = \alpha u \theta dx', \quad (б)$$

где α — коэффициент теплоотдачи на поверхности ребра; u — периметр сечения ребра на расстоянии x , который можно выразить как $u = 2l$; $dx' = dx / \cos \varphi$.

Произведя дифференцирование выражения (б) с учетом соотношения (а), получим:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{x} \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \theta = 0. \quad (в)$$

После введения новой переменной $z = (\alpha / \lambda \sin \varphi) x$ уравнение (в) приобретает вид:

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{z} \theta = 0. \quad (2-101)$$

Дифференциальное уравнение (2-101) есть модифицированное уравнение Бесселя, решение которого имеет вид:

$$\theta = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}), \quad (2-102)$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнении (2-102) находятся из граничных условий, которые для рассматриваемого случая запишутся так: при $x = x_1$ имеет место $\theta = \theta_1$.

Если пренебречь потерями тепла с торца ребра, то при $x = x_2$ имеем $\theta = \theta_2$ и $(d\theta/dx)_{x=x_2} = 0$.

После определения постоянных C_1 и C_2 получим: для текущей температуры в ребре

$$\theta = \theta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z_1})}, \quad (2-103)$$

для температуры на конце ребра

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z_2}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z_2})}{I_0(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z_1})}. \quad (2-104)$$

Тепловой поток можно определить по закону Фурье:

$$Q = -\lambda f_1 \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_1} = \frac{\alpha \vartheta_1 \delta_1 l}{\sqrt{z_1} \sin \varphi} \times \\ \times \left[\frac{I_1(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) - I_1(2\sqrt{z_2}) K_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1}) K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z_1})} \right]. \quad (2-105)$$

При пользовании этими формулами теплоотдача с торца может быть учтена условным увеличением высоты ребра h на половину толщины его торца $\delta_2/2$.

Если ребро имеет треугольное сечение, то в этом случае $x_2=0$, а следовательно, и $z_2=0$, $I_1(0)=0$ и формулы (2-103)—(2-105) принимают вид:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})}; \quad (2-106)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{l}{I_0(2\sqrt{z_1})}; \quad (2-107)$$

$$Q = \frac{\alpha \delta_1 l}{\sqrt{z_1} \sin \varphi} \left[\frac{I_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1})} \right]. \quad (2-108)$$

Максимальный тепловой поток через ребро треугольного сечения данной массы будет иметь место при выполнении равенства

$$\frac{h}{\delta_1/2} = 1,309 \sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha \delta_1}}. \quad (2-109)$$

Формулы (2-103), (2-104) и (2-105) громоздки и неудобны для практических расчетов. Поэтому расчет ребер переменного сечения можно свести к методике расчета прямых ребер постоянного сечения.

В этом случае

$$Q'' = \epsilon'' F'' q, \quad (2-110)$$

где Q'' — количество передаваемой теплоты в единицу времени; F'' — поверхность охлаждения ребра; $q=Q/F$ — плотность теплового потока для прямоугольного ребра, длина, высота и толщина которого равны длине, высоте и толщине суженного ребра; $\epsilon'' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, \delta_2/\delta_1)$ — поправочный коэффициент на суженность ребра; ϵ'' определяется по графику рис. 2-19.

Нижняя кривая (при $\delta_2/\delta_1=1$) соответствует прямому ребру постоянного сечения, а верхняя ($\delta_2/\delta_1=0$) — треугольному ребру.

Отношение ϑ_2/ϑ_1 вычисляется по формуле (2-84). Теплоотдача с торца ребра при этом учитывается путем увеличения высоты ребра h на половину толщины торца.

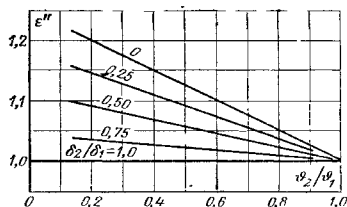


Рис 2-19. $\epsilon'' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, \delta_2/\delta_1)$ — вспомогательный график для расчета ребра трапециевидного и треугольного сечений.

✓ 2-11. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛОСКОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим плоскую однородную пластину шириной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ и неограниченным размером в направлении оси Oy (рис. 2-20) [Л. 204].

Предполагается, что на поверхностях пластины, определяемых координатами $x=0$, $x=\delta$ и $y \rightarrow \infty$, температура поддерживается постоянной и равной t_1 , а вдоль поверхности $y=0$ температура является функцией координаты x , т. е. $t=f(x)$. Предполагается, что пластина относительно тонкая в направлении оси Oz , а поверхности, параллельные координатной плоскости xOy , имеют идеальную тепловую изоляцию. Ввиду этого градиентом температур $\partial t/\partial z$ можно пренебречь, и температурное поле такой пластины будет двухмерным.

Для двумерной стационарной задачи без внутренних источников теплоты дифференциальное уравнение теплопроводности запишется:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad (2-111)$$

где θ — избыточная температура, отсчитанная от t_1 , т. е. $\theta = t - t_1$.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \delta; \\ 0 & \text{при } y \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (2-112) \\ f(x) - t_1 &= F(x) \quad \text{при } y=0. \end{aligned}$$

Для решения уравнения в частных производных (2-111) воспользуемся методом разделения переменных¹. Предположим, что $\theta = f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Тогда уравнение (2-111) приводится к виду

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \text{const}. \quad (2-113)$$

Правая и левая части уравнения одинаковы и постоянны. Обозначим их через $-\epsilon^2$. Таким образом, мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\varphi''(x) + \epsilon^2 \varphi(x) = 0; \quad (2-114)$$

$$\psi''(y) - \epsilon^2 \psi(y) = 0. \quad (2-115)$$

Решением дифференциального уравнения (2-114) является функция вида:

$$\varphi(x) = C_1 \cos(\epsilon x) + C_2 \sin(\epsilon x). \quad (2-116)$$

Согласно (2-79) общее решение уравнения (2-115) будет иметь вид:

$$\psi(y) = C_3 e^{\epsilon y} + C_4 e^{-\epsilon y}. \quad (2-117)$$

¹ Более подробно этот метод рассматривается в гл. 3 применительно к задачам нестационарной теплопроводности.

Общее решение уравнения (2-111) получим после перемножения уравнений (2-116) и (2-117). Решение (2-116) будет удовлетворять граничному условию $\vartheta=0$ при $x=0$, когда $\varphi(x)=0$ при $x=0$, а это возможно при $C_1=0$. Условие $\vartheta=0$ при $y \rightarrow \infty$ выполняется тогда, когда $\psi(y)=0$ при $y \rightarrow \infty$, что возможно лишь при $C_3=0$. Таким образом, решение для (2-111) приводится к виду

$$\vartheta = C e^{-\frac{n\pi}{\delta} y} \sin(\epsilon x).$$

Для того чтобы полученное выражение удовлетворяло граничным условиям $\vartheta=0$ при $x=\delta$, должно быть $\sin(\epsilon\delta)=0$ или $\epsilon=n\pi/\delta$ (где $n=1, 2, 3 \dots$).

Каждому значению n соответствует частное решение, а каждому частному решению соответствует свое значение постоянной интегрирования. Общее решение есть сумма частных решений для всех последовательных положительных значений чисел n :

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right). \quad (2-118)$$

Полученное решение удовлетворяет и третьему граничному условию, т. е. $\vartheta=0$ при $y \rightarrow \infty$.

Оставшиеся постоянные C_n определяются из граничных условий $\vartheta=F(x)$ при $y=0$. При этом

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right).$$

Это равенство есть разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты ряда Фурье определяются следующим выражением:

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx.$$

Окончательное решение для температурного поля рассматриваемой задачи с учетом последнего соотношения можно записать в виде

$$\vartheta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi}{\delta} y} \sin \frac{n\pi}{\delta} x \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx. \quad (2-119)$$

Итак, окончательное решение рассмотренной двухмерной задачи после определения постоянных интегрирования представится суммой бесконечного ряда.

Аналогичным образом можно получить решение и для сплошного цилиндра при изменении температурного поля в двух измерениях. Окончательное решение, как и для пластины, представится суммой бесконечного ряда.

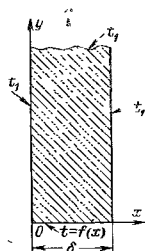


Рис. 2-20 Полуограниченная пластина.

При решении конкретной задачи вычисляют интеграл в уравнении (2-119), исходя из условий задания температуры. Следующим этапом является вычисление членов ряда в зависимости от условий сходимости и требуемой точности вычислений.

Например, если $t=t_2=\text{const}$ при $y=0$, то $f(x)=t_2$, а $F(x)=t_2-t_1$. Интеграл

$$\int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx = -\frac{\delta}{n\pi} (t_2 - t_1) \left(-\cos\frac{n\pi}{\delta} x \right) \Big|_0^{\delta} = \frac{2\delta}{n\pi} (t_2 - t_1),$$

$$(n=1, 3, 5, 7 \dots).$$

Подставив этот интеграл в уравнение (2-119), получим:

$$\vartheta = (t_2 - t_1) \frac{4}{\pi} \left[e^{-\frac{\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi}{\delta} x\right) + \frac{1}{3} e^{-\frac{3\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{3\pi}{\delta} x\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^{-\frac{5\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{5\pi}{\delta} x\right) + \dots \right]. \quad (2-120)$$

Можно показать, что полученный ряд сходится. Для вычисления изотерм существуют различные методы. Наиболее точным является метод, при котором y принимается в качестве постоянного параметра. По серии кривых, отвечающих постоянному значению y , строят изотермы.

▼ 2-12. ПОРИСТОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ ПЛАСТИНЫ

Пористые материалы находят большое применение в таких конструкциях, как высокотемпературные теплообменники, турбинные лопатки, реактивные сопла и т. д. На практике охлаждение пористых структур достигается нагнетанием жидкости или газа через капилляры твердого тела.

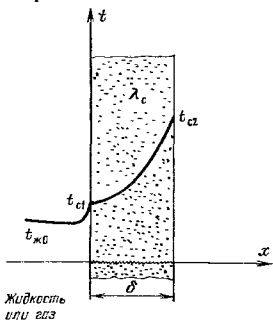


Рис. 2-21. Пористое охлаждение плоской пластины.

Процесс теплообмена в таких пористых системах весьма сложен. При решении задачи предполагается, что вся передача теплоты внутри плоской пластины осуществляется за счет теплопроводности через твердую фазу и что температуры твердого тела и жидкости почти не отличаются друг от друга в любой точке пористой структуры. Эти предположения существенно упрощают решение задачи [Л. 205].

Рассмотрим показанную на рис. 2-21 плоскую пластину с постоянным коэффициентом теплопроводности λ_c . Размеры пластины в направлениях y и z велики и температурное поле внутри пластины можно считать одномерным; последнее справедливо и для температуры охлаждающей жидкости, т. е. $t_i = t(x)$ при $0 \leq x \leq \delta$ и $t_{жк} = t_{ж}(x)$ при $-\infty \leq x \leq 0$.

На поверхности пластины при $x=\delta$ температура стенки равна $t_{с2}$. Температура нагнетаемой вдоль оси Ox через пластину жидкости при $x \rightarrow -\infty$ равна $t_{ж0}$. Температуры $t_{с2}$ и $t_{ж0}$ известны. Задан удельный

массовый расход охлаждающей жидкости G , кг/(м²·с), теплоемкость $c_{\text{рж}}$ и теплопроводность $\lambda_{\text{ж}}$ которой постоянны. Необходимо найти распределение температуры в такой пористой стенке.

Будем рассматривать пористость пластины p как отношение объема пор ко всему объему материала. Для равномерной пористости можно считать, что на единице поверхности, нормальной к направлению потока жидкости, сечение для прохода жидкости $f_{\text{ж}} = p$, а сечение твердого скелета, участвующего в теплопроводности, равно $f_{\text{с}} = 1 - f_{\text{ж}} = 1 - p$. Отметим также, что если удельный массовый расход натекающей жидкости равен G , то массовый расход внутри пластины будет равен G/p .

Процесс переноса теплоты в таком пористом теле можно представить как теплопроводность самой пластины и теплообмен между твердым телом и жидкостью, протекающей через поры пластины.

Плотность теплового потока за счет теплопроводности самой пластины в сечениях x и $x+dx$ запишется:

$$q_x = -\lambda_{\text{с}} \frac{dt}{dx} (1-p)$$

и

$$q_{x+dx} = -\lambda_{\text{с}} \frac{d}{dx} \left(t + \frac{dt}{dx} dx \right) (1-p).$$

В условиях стационарного режима изменение теплового потока на участке dx произойдет вследствие теплообмена между твердым телом и протекающей через поры жидкостью, т. е.

$$dq = q_x - q_{x+dx} = Gc_{\text{рж}} dt$$

или

$$-\lambda_{\text{с}} \frac{dt}{dx} (1-p) + \lambda_{\text{с}} \frac{dt}{dx} (1-p) + \lambda_{\text{с}} \frac{d^2 t}{dx^2} (1-p) dx = Gc_{\text{рж}} dt.$$

Следовательно, для области $0 \leq x \leq \delta$ дифференциальное уравнение запишется:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{Gc_{\text{рж}}}{\lambda_{\text{с}} (1-p)} \frac{dt}{dx} = 0. \quad (a)$$

Если обозначить

$$\frac{Gc_{\text{рж}}}{\lambda_{\text{с}} (1-p)} = \xi_{\text{с}},$$

то соотношение (a) запишется:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \xi_{\text{с}} \frac{dt}{dx} = 0. \quad (2-121)$$

Аналогичным образом можно получить дифференциальное уравнение и для области $-\infty \leq x \leq 0$:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \xi_{\text{ж}} \frac{dt}{dx} = 0, \quad (2-122)$$

где

$$\xi_{\text{ж}} = \frac{Gc_{\text{рж}}}{\lambda_{\text{ж}}}.$$

Общее решение уравнения (2-121) имеет вид:

$$t = C_1 e^{\xi_{\text{с}} x} + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий: при $x=0$ $t=t_{\text{с1}}$ и при $x=\delta$ $t=t_{\text{с2}}$.

После определения постоянных C_1 и C_2 получаем для области $0 \leq x \leq \delta$:

$$t = t_{c2} + \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{\xi_c \delta} - 1} (e^{\xi_c x} - 1). \quad (2-123)$$

Для уравнения (2-122) общее решение имеет вид:

$$t_{ж} = C_3 e^{\xi_{ж} x} + C_4.$$

Это уравнение должно удовлетворять граничным условиям для потока жидкости:

при $x = -\infty$ $t_{ж} = t_{ж0}$;

при $x = 0$ $\lambda_{ж} \frac{dt_{ж}}{dx} = \lambda_c (1 - p) \frac{dt}{dx}$.

Из граничных условий находим, что $C_4 = t_{ж0}$ и

$$C_3 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{\xi_c \delta} - 1};$$

тогда решение для (2-122) запишется:

$$t_{ж} = t_{ж0} + \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{\xi_c \delta} - 1} e^{\xi_{ж} x}, \quad (-\infty \leq x \leq 0). \quad (2-124)$$

На основании (2-124) из уравнения (2-123) можно исключить неизвестную температуру t_{c1} . При $x = 0$

$$t_{ж} = t_{c1} = t_{ж0} + (t_{c2} - t_{ж0}) e^{-\xi_c \delta}.$$

Подставив это значение t_{c1} в уравнение (2-123), получим окончательное выражение для распределения температуры в пористой пластине ($0 \leq x \leq \delta$):

$$\frac{t - t_{ж0}}{t_{c2} - t_{ж0}} = e^{-\xi_c \delta \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)}. \quad (2-125)$$

Если безразмерную температуру пластины $(t - t_{ж0}) / (t_{c2} - t_{ж0})$ обозначить через Θ , уравнение (2-125) можно записать в следующем виде:

$$\Theta = e^{-\xi_c \delta \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)}. \quad (2-125')$$

Средняя температура в пористой пластине для заданного значения $\xi_c \delta$, определяемая интегралом $\bar{\Theta} = 1/\delta \int_0^\delta \Theta dx$, равна:

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t} - t_{ж0}}{t_{c2} - t_{ж0}} = \frac{1}{\xi_c \delta} (1 - e^{-\xi_c \delta}). \quad (2-126)$$

Если в качестве параметра выбрать $\xi_c \delta$, зависимость (2-125) можно представить, как показано на рис. 2-22. Там же для соответствующих значений $\xi_c \delta$ нанесена средняя температура, вычисленная по уравнению (2-126).

Решение задачи о распределении температур в пористой стенке с испарительным охлаждением при других граничных условиях дано В. П. Исаченко [Л. 55]. При решении задачи предполагалось, что поры малого диаметра равномерно распределены по объему плоской стенки

и пронизывают ее в поперечном направлении (рис. 2-23). Расход жидкости через поры $G_{ж}$, кг/м²; температуры жидкости и стенки в любом данном сечении одинаковы; физические параметры не зависят от температуры.

Уравнения теплопроводности и граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{G_{ж} c_{ж}}{\lambda} \frac{dt}{dx} = 0; \quad (2-127)$$

$$\alpha_r (t_r - t_{с1}) - G_{ж} r = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0}; \quad (2-128)$$

$$\alpha_{ж} (t_{с2} - t_{ж}) = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=\delta}; \quad (2-129)$$

где (кроме обозначений, указанных на рис. 2-23) r — теплота парообразования; $c_{ж}$ — теплоемкость жидкости; α_r и $\alpha_{ж}$ — коэффициенты теплоотдачи на поверхностях стенки, обращенных соответственно к газу и жидкости.

Коэффициент теплопроводности λ в уравнении (2-127) в общем случае должен учитывать теплопроводность твердого скелета стенки и охлаждающей жидкости. Для металлических пористых стенок, имеющих высокий коэффициент теплопроводности и малый суммарный объем пор, теплопроводностью жидкости можно пренебречь. В этом случае, как и в предыдущей задаче, можно принимать $\lambda = \lambda_c (1 - p)$.

Опустив промежуточные выкладки, приведем окончательное решение уравнения (2-127) при граничных условиях (2-128) и (2-129):

$$t = t_r - \frac{G_{ж} r}{\alpha_r} - \frac{\left[(t_r - t_{ж}) - \frac{G_{ж} r}{\alpha_r} \right]}{(1 + k_r) - (1 - k_{ж}) e^{-\xi \delta}} [1 + k_r - e^{-\xi x}], \quad (2-130)$$

где

$$k_r = \frac{G_{ж} c_{ж}}{\alpha_r}; \quad k_{ж} = \frac{G_{ж} c_{ж}}{\alpha_{ж}}; \quad \xi = \frac{G_{ж} c_{ж}}{\lambda}.$$

Если охлаждение пористой стенки осуществляется без испарения охлаждающей жидкости, т. е. $r=0$, то уравнение (2-130) принимает вид:

$$t = t_r - \frac{t_r - t_{ж} (1 + k_r - e^{-\xi \delta})}{(1 + k_r) - (1 - k_{ж}) e^{-\xi \delta}}. \quad (2-131)$$

2-13. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ

В рассмотренных ранее задачах внутренние источники теплоты отсутствовали.

Однако в ряде случаев внутри объектов исследования могут протекать процессы, в результате которых будет выделяться или погло-

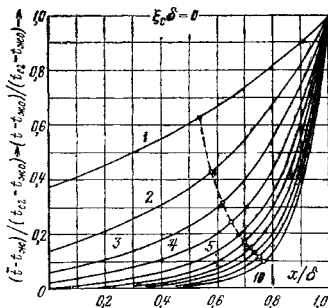


Рис. 2-22. Распределение температуры и средняя температура в пористой пластине.

щаться теплота. Примерами таких процессов могут служить: выделение джоулевой теплоты при прохождении электрического тока по проводникам; объемное выделение теплоты в тепловыделяющих элементах атомных реакторов вследствие торможения осколков деления ядер атомного горючего, а также замедления потока нейтронов; выделение или поглощение теплоты при протекании ряда химических реакций и т. д.

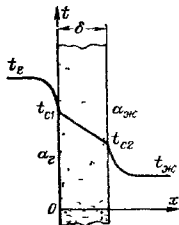


Рис. 2-23 Пористое охлаждение пластины (граничные условия третьего рода).

При исследовании переноса теплоты в таких случаях важно знать интенсивность объемного выделения (поглощения) теплоты, которая количественно характеризуется мощностью внутренних источников теплоты q_v , Вт/м³. Если величина q_v положительна, то говорят, что в теле имеются положительные источники теплоты. При отрицательных значениях q_v имеются отрицательные источники (стоки) теплоты.

В зависимости от особенностей изменения величины q_v в пространстве можно говорить о точечных, линейных, поверхностных и объемных источниках теплоты.

Для стационарного режима при $dt/d\tau=0$ дифференциальное уравнение теплопроводности (1-24) при наличии источников теплоты имеет вид:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2-132)$$

а) Теплопроводность однородной пластины

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой 2δ — величина малая по сравнению с двумя другими размерами.

Источники теплоты равномерно распределены по объему и равны $q_v = \text{const}$. Заданы коэффициенты теплоотдачи α и температура жидкости вдали от пластины $t_{ж}$, причем $\alpha = \text{const}$ и $t_{ж} = \text{const}$. Благодаря равномерному охлаждению температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси x , направленной нормально к поверхности тела. Температуры на оси пластины и на ее поверхности обозначим соответственно через t_0 и t_c ; эти температуры неизвестны (рис. 2-24). Кроме того, необходимо найти распределение температуры в пластине и количество теплоты, отданное в окружающую среду.

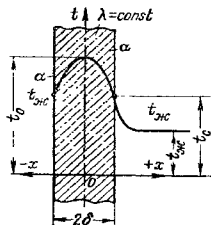


Рис. 2-24 Теплопроводность плоской пластины при наличии внутренних источников теплоты

Дифференциальное уравнение (2-132) в рассматриваемом случае упрощается и принимает вид:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2-133)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x = \pm \delta \text{ имеем } -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\pm \delta} = \alpha (t_c - t_{ж}).$$

Поскольку граничные условия для обеих сторон пластины одинаковы, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости $x=0$. Теплота с одинаковой интенсивностью отводится через левую и правую поверхности тела. Одинаково и тепловыделение в обеих половинах пластины. Это означает, что можно далее рассматривать лишь одну половину пластины, например правую (рис. 2-24), и записать граничные условия для нее в виде

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0; \\ x=\delta; \quad -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\delta} &= \alpha(t_c - t_{ж}). \end{aligned} \right\} \quad (2-134)$$

После интегрирования (2-133) получим:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1; \quad (2-135)$$

$$t = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2. \quad (2-136)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий (2-134).

При $x=0$ из уравнения (2-135) получаем $C_1=0$; при $x=\delta$ получаем:

$$-\lambda \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\alpha(t_c - t_{ж}).$$

Из (2-135) имеем:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v \delta}{\lambda}.$$

Тогда $t_c = t_{ж} + q_v \delta / \alpha$; подставив это выражение в уравнение (2-136), при $x=\delta$ получим:

$$C_2 = t_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

Подставив значения постоянных C_1 и C_2 в выражение (2-136), найдем уравнение температурного поля:

$$t_x = t_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (2-137)$$

В рассматриваемой задаче тепловой поток изменяется вдоль оси x :

$$q = q_v x.$$

При $x=0$ и $q=0$ (это следует из условия: при $x=0$ имеем $(dt/dx)_{x=0}=0$). Тепловой поток с единицы поверхности пластины при $x=\delta$

$$q = \alpha(t_c - t_{ж}) = q_v \delta, \quad (2-138)$$

и общее количество теплоты, отданное всей поверхностью в единицу времени (вся поверхность F равна двум боковым поверхностям F_1)

$$Q = qF = q_v \delta 2F_1. \quad (2-139)$$

Из уравнения (2-137) следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

Если в уравнении (2-137) положить $\alpha \rightarrow \infty$, то полученное выражение будет представлять температурное поле для граничных условий первого рода, ибо при $\alpha \rightarrow \infty$ получим $t_{ж} \equiv t_c$.

С учетом сказанного уравнение (2-137) принимает вид:

$$t = t_0 + \frac{q_0}{2\lambda} (\delta^2 - x^2). \quad (2-140)$$

При этом температура на оси симметрии пластины ($x=0$)

$$t_0 = t_c + \frac{q_0 \delta^2}{2\lambda},$$

а перепад температур между осью симметрии стенки и ее поверхностью

$$t_0 - t_c = \frac{q_0}{2\lambda} \delta^2 = \frac{q\delta}{2\lambda}. \quad (2-141)$$

До сих пор мы полагали, что коэффициент теплопроводности материала стенки постоянен. При больших перепадах температур может возникнуть необходимость в учете зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Часто эта зависимость имеет линейный характер:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt).$$

Тогда

$$q_0 x = -\lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dx}. \quad (a)$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$t + b \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_0} \frac{q_0 x^2}{2} + C. \quad (б)$$

При $x=0$ имеем $t=t_0$, в этом случае из уравнения (б) следует:

$$C = t_0 + \frac{b}{2} t_0^2.$$

Подставляя найденное значение C в выражение (б) и решая квадратное уравнение относительно t , получаем следующее уравнение температурной кривой:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_0 x^2}{\lambda_0 b}}. \quad (2-142)$$

б) Теплопроводность однородного цилиндрического стержня

Рассмотрим круглый цилиндр (рис. 2-25), радиус которого мал по сравнению с длиной цилиндра. При этих условиях температура будет изменяться только вдоль радиуса.

Внутренние источники теплоты равномерно распределены по объему тела. Заданы температура окружающей среды $t_{\text{ж}} = \text{const}$ и постоянный по всей поверхности коэффициент теплоотдачи. При этих условиях температура во всех точках внешней поверхности цилиндра будет одинакова.

Для цилиндра, как и для пластины, задача будет одномерной и симметричной. Уравнение (2-132) при этом имеет вид:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_0}{\lambda} = 0. \quad (2-143)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r=0 \quad \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=0} &= 0; \\ \text{при } r=r_0 \quad \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_0} &= -\frac{\alpha}{\lambda} (t_c - t_{\text{ж}}). \end{aligned} \right\} \quad (2-144)$$

Необходимо найти уравнение температурного поля и тепловой поток, а также значения температур на оси t_0 и на поверхности t_c .

Проинтегрируем уравнения (2-143). При этом произведем замену $dt/dr = u$. Тогда уравнение (2-143) запишется:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{q_0}{\lambda} = 0$$

или

$$r du + u dr + \frac{q_0}{\lambda} r dr = 0.$$

После интегрирования получим:

$$u + \frac{q_0 r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r},$$

или

$$\frac{dt}{dr} + \frac{q_0 r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r}. \quad (2-145)$$

После второго интегрирования получим:

$$t = -\frac{q_0 r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2, \quad (2-146)$$

где C_1 и C_2 определяются из граничных условий (2-144).

При $r=0$ из (2-145) находим, что $C_1=0$ и

при $r=r_0$ $(dt/dr)_{r=r_0} = -q_0 r_0 / 2\lambda$.

Подставив последнее выражение в граничные условия (2-144), получим:

$$\frac{q_0 r_0}{2} = \alpha (t_c - t_{ж})$$

и

$$t_c = \frac{q_0 r_0}{2\alpha} + t_{ж}.$$

Из (2-146) находим C_2 :

$$C_2 = t_{ж} + \frac{q_0 r_0}{2\alpha} + \frac{q_0 r_0^2}{4\lambda}.$$

Подставив C_1 и C_2 в уравнение (2-146), получим:

$$t = t_{ж} + \frac{q_0 r_0}{2\alpha} + \frac{q_0}{4\lambda} (r_0^2 - r^2). \quad (2-147)$$

Полученное уравнение дает возможность вычислить температуру любой точки цилиндрического стержня. Оно показывает, что распределение температуры в круглом стержне подчиняется параболическому закону.

Из уравнения (2-147) при $r=0$ найдется температура на оси цилиндра:

$$t_0 = t_{ж} + \frac{q_0 r_0}{2\alpha} + \frac{q_0 r_0^2}{4\lambda}. \quad (2-147')$$

Плотность теплового потока на поверхности цилиндра:

$$q = \alpha (t_c - t_{ж}) = \frac{q_0 r_0}{2}. \quad (2-148)$$

Полный тепловой поток с поверхности цилиндра.

$$Q = qF = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 l = q_v \pi r_0^2 l. \quad (2-148')$$

Из уравнения (2-148) следует, что плотность теплового потока зависит только от производительности внутренних источников и от величины внешней поверхности r_0 , через которую проходит тепловой поток.

Пусть теперь заданы граничные условия первого рода, т. е. температура поверхности цилиндра t_c . Эти условия соответствуют частному случаю предыдущей задачи, если полагать, что коэффициент теплоотдачи $\alpha \rightarrow \infty$. При этом, очевидно, $t_{ж} = t_c$. Тогда уравнение (2-147) примет вид:

$$t = t_c + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (2-149)$$

Температура на оси цилиндра (при $r=0$):

$$t_0 = t_c + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}. \quad (2-150)$$

Если необходимо учитывать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, заданную в виде $\lambda(t) = \lambda_0 (1 + bt)$, то, интегрируя зависимость

$$q_v \pi r^2 = - 2\pi r \lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dr},$$

получим:

$$t + \frac{b}{2} t^2 = - \frac{1}{4\lambda_0} q_v r^2 + C. \quad (2-151)$$

Значение постоянной C определяется из граничных условий. При $r=0$ имеем $t=t_0$ и $C = t_0 + \frac{b}{2} t_0^2$. Подставляя это значение в уравнение (2-151) и решая его относительно t , получаем следующую зависимость для температурной кривой:

$$t = - \frac{1}{b} \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{q_v r^2}{2\lambda_0 b}}. \quad (2-152)$$

в) Теплопроводность цилиндрической стенки

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую стенку (трубу) с внутренним радиусом r_1 , наружным r_2 и постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Внутри этой стенки имеются равномерно распределенные источники теплоты производительностью q_v .

В такой стенке температура будет изменяться только в направлении радиуса и процесс теплопроводности будет описываться уравнением (2-143):

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Интеграл этого уравнения представлен выражением (2-146):

$$t = - \frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в последнем уравнении определяются из граничных условий. Рассмотрим случаи, когда теплоотдаю-

щей поверхностью являются только внутренняя, или только наружная поверхность, или обе поверхности одновременно.

а) Теплота отводится только через наружную поверхность трубы. Будем рассматривать случай, когда заданы граничные условия третьего рода, т. е. температура окружающей среды со стороны наружной поверхности $t_{ж2}$ и постоянный коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности трубы (рис. 2-26). При этом граничные условия запишутся следующим образом:

$$\text{при } r=r_1 \quad q=0 \text{ или } \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}=0;$$

$$\text{при } r=r_2 \quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Из уравнения (2-146) получим:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}.$$

$$\text{При } r=r_1 \quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1} = -\frac{q_v r_1}{2\lambda} + \frac{C_1}{r_1} = 0, \text{ откуда } C_1 = \frac{q_v r_1^2}{2\lambda}.$$

При $r=r_2$ из уравнения (2-146) с учетом найденного выражения для C_1 получим:

$$t_{c2} = -\frac{q_v r_2^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r_2 + C_2. \quad (a)$$

С учетом

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{c2} - t_{ж2})$$

находим:

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} - \frac{q_v r_1^2}{2\alpha r_2}. \quad (б)$$

Приравняв (а) и (б), находим:

$$C_2 = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\alpha} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_v}{2\alpha} \frac{r_1^2}{r_2} - \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r_2.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (2-146), получаем выражение для температурного поля:

$$t = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \right]. \quad (2-153)$$

Для внешней теплоотдающей поверхности (при $r=r_2$)

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right]. \quad (2-154)$$

Плотность теплового потока на теплоотдающей поверхности найдется как

$$q = \alpha (t_{c2} - t_{ж2}) = \frac{q_v r_2^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right]. \quad (2-155)$$

Температура на внутренней поверхности стенки найдется из уравнения (2-153) при подстановке в него значения $r=r_1$:

$$t_{c1} = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right]. \quad (2-156)$$

Пусть теперь заданы граничные условия первого рода, т. е. температура теплоотдающей поверхности t_{c2} . Эти условия можно рассматри-

вать как частный случай данной задачи, когда коэффициент теплоотдачи на поверхности достаточно велик ($\alpha \rightarrow \infty$). Тогда температура жидкости будет равна температуре поверхности трубы. С учетом сказанного уравнение (2-153) принимает вид:

$$t = t_{c2} + \frac{q \omega r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (2-157)$$

Полагая в этом уравнении $r = r_1$ и $t = t_{c1}$, находим падение температуры в стенке:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q \omega r_2^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]. \quad (2-158)$$

б) Тепло отводится только через внутреннюю поверхность трубы (рис. 2-27). При заданных коэффициенте тепло-

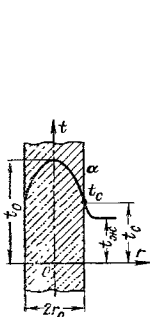


Рис. 2-25. Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии внутренних источников теплоты.

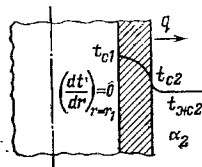
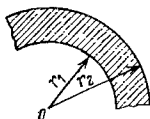


Рис. 2-26. Отвод теплоты через наружную поверхность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников теплоты.

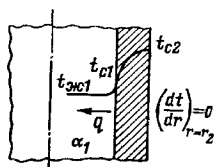
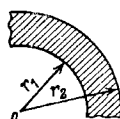


Рис. 2-27. Отвод теплоты через внутреннюю поверхность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников теплоты.

отдачи α на внутренней поверхности и температуре среды $t_{ж1}$ граничные условия запишутся:

$$\text{при } r = r_1 \quad \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_1} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{c1} - t_{ж1});$$

$$\text{при } r = r_2 \quad \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_2} = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю из этих уравнений определяются постоянные C_1 и C_2 в уравнении (2-146).

После определения постоянных и подстановки их в уравнение (2-146) получим:

$$t = t_{ж1} + \frac{q \omega r_1^2}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q \omega r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (2-159)$$

Перепад температур между средой и теплоотдающей поверхностью получим, если в уравнение (2-159) подставим значение текущей коор-

динаты, равное r_1 . Тогда

$$t_{c1} - t_{ж1} = \frac{q_0 r_1}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2-160)$$

Для случая, когда задана температура теплоотдающей поверхности t_{c1} , что соответствует случаю $\alpha \rightarrow \infty$, уравнение (2-159) принимает вид:

$$t = t_{c1} + \frac{q_0 r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (2-161)$$

Полагая в этом уравнении $r=r_2$ и соответственно $t=t_{c2}$, получаем полный температурный напор в стенке:

$$t_{c2} - t_{c1} = \frac{q_0 r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2-162)$$



в) Теплота отводится через внутреннюю и наружную поверхности. В случае, когда теплота отдается окружающей среде как с внутренней, так и с внешней поверхности, должен существовать максимум температуры внутри стенки. Изотермическая поверхность, соответствующая максимальной температуре t_0 , разделяет цилиндрическую стенку на два слоя. Во внутреннем слое тепло передается внутрь трубы, во внешнем — наружу. Максимальное значение температуры соответствует условию $dt/dr=0$, и следовательно, $q=0$.

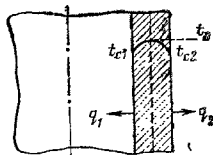


Рис. 2-28. Теплота внутренних источников отводится через обе поверхности цилиндрической стенки.

Таким образом, для решения данной задачи можно использовать уже полученные выше соотношения. Для этого нужно знать радиус r_0 (рис. 2-28), соответствующий максимальной температуре t_0 .

Согласно уравнениям (2-156) и (2-162) максимальные перепады температур во внешнем и внутреннем слоях определяются уравнениями:

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_0 r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_0} - 1 \right]; \quad (a)$$

$$t_0 - t_{c1} = \frac{q_0 r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} - 1 \right]. \quad (б)$$

Вычитая соответственно левые и правые части двух последних уравнений, получаем:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_0 r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_2} - 2 \ln \frac{r_0}{r_1} \right].$$

Это уравнение необходимо решить относительно r_0 . Решив, получим:

$$r_0^2 = \frac{4\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{q_0 2 \ln \frac{r_1}{r_2}} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}},$$

или

$$r_0^2 = \frac{q_0 (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{q_0 2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2-163)$$

Подставив вычисленное из уравнения (2-163) значение r_0 в выражения (а) и (б), найдем максимальную температуру в рассматриваемой стенке.

Для нахождения распределения температуры во внутреннем слое в уравнение (2-161) подставляются значения текущей координаты $r_1 < r < r_0$, а для нахождения распределения температуры во внешнем слое в уравнение (2-157) подставляются значения $r_0 < r < r_2$.

Если температуры внешних поверхностей цилиндрической стенки t_{c1} и t_{c2} равны, то уравнение (2-163) упрощается. В этом случае

$$r_0^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (2-163')$$

т. е. r_0 зависит только от размеров цилиндрической стенки и не зависит от тепловых условий. Например, при $r_2=2$ и $r_1=1$ $r_0=1,46$.

Если температуры поверхностей цилиндрической стенки t_{c1} и t_{c2} неизвестны, но известны температуры жидкостей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ внутри и вне трубы и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , то для определения r_0 к уравнению (2-163) необходимо добавить уравнения

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= \alpha_1 (t_{c1} - t_{ж1}) 2\pi r_1; \\ q_{12} &= \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}) 2\pi r_2, \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

где

$$q_{11} = q_v \pi (r_0^2 - r_1^2); \quad q_{12} = q_v \pi (r_2^2 - r_0^2).$$

Для определения r_0 нужно решать уравнения (в) совместно с уравнением (2-163).

Глава третья

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В этой главе рассматривается перенос теплоты за счет теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени. Такие процессы теплопроводности, когда поле температуры в теле изменяется не только в пространстве, но и во времени, называют нестационарными. Они имеют место при нагревании (охлаждении) различных заготовок и изделий, производстве стекла, обжиге кирпича, вулканизации резины, пуске и остановке различных теплообменных устройств, энергетических агрегатов и т. д.

Среди практических задач нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов: а) тело стремится к тепловому равновесию; б) температура тела претерпевает периодические изменения.

К первой группе относятся процессы прогрева или охлаждения тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием, например прогрев болванки в печи, охлаждение металлических брусков и чушек, охлаждение закаливаемой детали и т. п.

Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например тепловой процесс регенераторов, насадка

которых то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом. На рис. 3-1 показан характер кривых, полученных при нагревании однородного твердого тела в среде с постоянной температурой $t_{жк}$. По мере нагрева температура в каждой точке асимптотически приближается к температуре нагревающей среды. Наиболее быстро изменяется температура точек, лежащих вблизи поверхности тела. С увеличением времени прогрева эта разность будет уменьшаться и теоретически через достаточно большой отрезок времени она будет равна нулю.

В условиях передачи теплоты через стенку при внезапном изменении температуры одного из теплоносителей не вся теплота будет передаваться через стенку: часть ее уйдет на изменение внутренней энергии самой стенки (ее температуры), и только при наступлении стационарного процесса вся теплота будет передаваться через стенку от одной жидкости к другой.

Приведенные примеры указывают на то, что нестационарные тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества.

В настоящей главе будет рассмотрено лишь несколько наиболее важных задач, относящихся к процессам, в которых тело стремится к тепловому равновесию. Цель такого рассмотрения заключается в том, чтобы показать общие физические особенности такого рода процессов, познакомиться с методом решения задачи нестационарной теплопроводности и получить математические соотношения для практических расчетов. Для более широкого ознакомления с решениями большого круга задач нестационарной теплопроводности как в случае стремления температуры тела к состоянию равновесия, так и ее периодического изменения следует обратиться к монографии А. В. Лыкова [Л. 111] и другой специальной литературе [Л. 67, 132, 204].

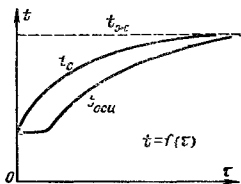


Рис. 3-1. Характер изменения температуры тела во времени.

3-2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение и условия однозначности.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (3-1)$$

Условия однозначности задаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} &\text{физических параметров } \lambda, c, \rho; \\ &\text{формы и геометрических размеров объекта } l_0, \\ &l_1, l_2, \dots, l_n; \\ &\text{температуры тела в начальный момент времени} \\ &\tau = 0 \quad t = t_0 = f(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

Граничные условия могут быть заданы в виде граничных условий третьего рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{жк}).$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности (3-1) совместно с условиями однозначности (3-2) дает законченную математическую формулировку рассматриваемой задачи. Решение ее заключается в отыскании функции

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, a, t_0, t_{\text{ж}}, l_0, l_1, \dots, l_n), \quad (3-3)$$

которая удовлетворяла бы уравнению (3-1) и условиям (3-2).

Рассмотрим подробно решение задачи об охлаждении плоской однородной стейки и получим для этого случая конкретный вид функции (3-3). Изучив метод решения задачи для пластины, можно понять принцип решения задач и для тел другой геометрической конфигурации.

3.3. ОХЛАЖДЕНИЕ (НАГРЕВАНИЕ) НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Постановка задачи. Дана пластина толщиной 2δ . Если толщина пластины мала по сравнению с длиной и шириной, то такую пластину обычно считают неограниченной.

При заданных граничных условиях коэффициент теплоотдачи α одинаков для всех точек поверхности пластины. Изменение температуры происходит только в одном направлении x , в двух других направлениях температура не изменяется ($\partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0$), следовательно, в пространстве задача является одномерной. Начальное распределение температуры задано некоторой функцией $t(x, 0) = f(x)$. Охлаждение происходит в среде с постоянной температурой $t_{\text{ж}} = \text{const}$. На обеих поверхностях отвод теплоты осуществляется при постоянном во времени коэффициенте теплоотдачи. Отсчет температуры пластины для любого момента времени будем вести от температуры окружающей среды, т. е. $t - t_{\text{ж}} = \theta$.

Так как задача в пространстве одномерная, то дифференциальное уравнение (3-1) принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (3-4)$$

Начальные условия:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \theta = \theta_0 = f(x) - t_{\text{ж}} = F(x). \quad (3-5)$$

Рис. 3-2. К охлаждению плоской неограниченной пластины.

При $\tau = 0$ задано $t_0 = \text{const}$ и $\theta_0 = \text{const}$.

При заданных условиях охлаждения задача становится симметричной и начало координат удобно поместить на оси пластины, как показано на рис. 3-2. При этом граничные условия на оси и на поверхности пластины запишутся так:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) на оси пластины при } x = 0 \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \\ \text{б) на поверхности пластины при } x = \delta \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\delta}. \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

Дифференциальное уравнение (3-4) совместно с начальными (3-5) и граничными (3-6) условиями однозначно формируют поставленную задачу. Решение дифференциального уравнения (3-4) с учетом начальных и граничных условий и дает искомое распределение температуры в плоской пластине.

Решение дифференциального уравнения (3-4) ищем в виде произведения двух функций, из которых одна является функцией только τ ,

а другая — только x (метод разделения переменных):

$$\Phi = \Phi(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x). \quad (3-7)$$

После подстановки последнего выражения в дифференциальное уравнение (3-4) получим:

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau)$$

или

$$\varphi'(\tau)\psi(x) = a\psi''(x)\varphi(\tau).$$

В этом уравнении легко разделяются переменные, и его можно записать следующим образом:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}. \quad (3-8)$$

Левая часть уравнения (3-8) есть функция только τ , а правая — функция только x .

Если зафиксировать аргумент x и менять только τ , то при любом его значении левая часть уравнения (3-8) равна постоянной величине, стоящей в правой части, т. е. $\varphi'(\tau)/\varphi(\tau) = \text{const}$. Аналогично при фиксации τ и изменении x правая часть уравнения (3-8) для любого значения x должна равняться постоянной левой части, которая зависит только от τ , т. е. $\psi''(x)/\psi(x) = \text{const}$.

Так как равенство (3-8) должно иметь место при любых значениях x и τ , то обе его части должны быть равны одной и той же постоянной величине. Обозначим последнюю через ϵ и перепишем соотношение (3-8):

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \text{const} = \epsilon.$$

Заметим, что нетривиальное решение для функции $\psi(x)$ получаем не при всех значениях ϵ , а только при $\epsilon < 0$. Так как ϵ пока произвольная постоянная по численному значению, то полагаем $\epsilon = -k^2$. Подставляя это значение для ϵ , получим:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2,$$

откуда

$$\varphi'(\tau) + ak^2\varphi(\tau) = 0; \quad (3-9)$$

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0. \quad (3-10)$$

Постоянная k определяется из граничных условий, а знак минус выбирается из физических соображений. Для тепловых процессов, стремящихся к тепловому равновесию, знак может быть только минус.

В результате мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3-9) и (3-10), которые легко интегрируются.

Уравнению (3-9) удовлетворяет функция $\varphi(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}$.

Уравнению (3-10) удовлетворяет функция вида:

$$\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx).$$

Подставляя полученные выражения для $\varphi(\tau)$ и $\psi(x)$ в уравнение (3-7), получаем частное решение:

$$\Phi = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] C_1 e^{-ak^2\tau}. \quad (3-11)$$

Выражение (3-11) удовлетворяет исходному уравнению (3-4) при любых значениях постоянных C_1, C_2, C_3 и k .

Для того чтобы уравнение (3-11) было решением поставленной задачи, его нужно подчинить начальным и граничным условиям. Подчиняя уравнение (3-11) граничным условиям при $x=0$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

находим:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = C_1 e^{-ak^2 x} k [C_2 \cos(kx) - C_3 \sin(kx)] \Big|_{x=0} = 0,$$

или

$$C_2 \cos(0) = C_3 \sin(0),$$

откуда $C_2=0$.

Это значит, что частное решение $\psi(x) = C_2 \sin(kx)$ должно быть отброшено как не удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Если учесть, что $C_2=0$, и обозначить $C_1 C_3 = A$, то уравнение (3-11) можно записать в виде

$$\Phi = A e^{-ak^2 x} \cos(kx). \quad (3-12)$$

Подчинив частное решение (3-12) граничному условию

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \Phi_{x=\delta},$$

получим:

$$-k A e^{-ak^2 \delta} \sin(k\delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} A e^{-ak^2 \delta} \cos(k\delta), \quad (3-13)$$

откуда после простейших преобразований получаем:

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{\alpha\delta}{\lambda}},$$

где $\alpha\delta/\lambda = Bi$. Если обозначить $k\delta = \mu$, то последнее выражение можно записать следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \mu = \mu/Bi. \quad (3-14)$$

Из анализа этого тригонометрического уравнения следует, что при каждом значении Bi существует бесконечное множество решений. На-

более просто уравнение (3-14) можно решить графическим способом.

Обозначим левую часть уравнения (3-14) через $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$, а правую — через $y_2 = \mu/Bi$. Пересечение котангенсоды y_1 с прямой y_2 дает нам значение корней характеристического уравнения, т. е. μ (рис. 3-3).

Из рис. 3-3 следует, что мы имеем бесконечное множество значений величины μ_n , причем каждое последующее больше предыдущего:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$$

Важно отметить, что каждому значению числа Bi отвечает своя совокупность корней уравнения (3-14).

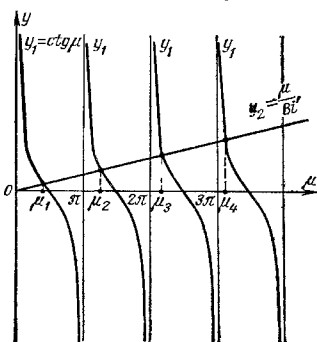


Рис. 3-3. К решению уравнения (3-14).

Таблица 3-1

Значения μ_n для пластины

BI	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	BI	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	100,0	1,5552	4,6568	7,7764	10,8871
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956

Первые четыре корня уравнения (3-14) μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 приведены в табл. 3-1 для различных значений числа Bi (от 0 до ∞).

При $V_i \rightarrow \infty$ прямая $y_2 = \mu/V_i$ совпадает с осью абсцисс и корни уравнения будут равны:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi \dots, \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

При $Bi \rightarrow 0$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат и тангенс угла наклона прямой стремится к бесконечности, при этом корни уравнения (3-14) равны:

$$\mu_1=0; \mu_2=\pi; \mu_3=2\pi; \dots; \mu_n=(n-1)\pi,$$

где $n=1, 2, 3 \dots$

Для других конечных значений числа V_i величины μ_n имеют промежуточные значения (см. табл. 3-1).

Следовательно, каждому найденному значению корня μ будет соответствовать свое частное распределение температуры:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}; \\ \vartheta_2 &= A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_2^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \vartheta_n &= A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

Полученные частные решения (3-15) будут удовлетворять дифференциальному уравнению при любых значениях постоянных $A_1, A_2, \dots, A_n$, но ни одно из этих решений не будет соответствовать действительному распределению температуры в начальный момент времени. Однако путем наложения бесконечного числа таких распределений при соответствующем выборе величин A_n можно воспроизвести любую действительную температурную зависимость в начальный момент времени.

На основании сказанного общее решение можно представить суммой бесконечного ряда:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}. \quad (3-16)$$

Известно, что если отдельные распределения (3-15) удовлетворяют дифференциальному уравнению (3-4) и граничным условиям (3-6), то и сумма их также удовлетворяет тем же условиям.

Постоянная A_n в уравнении (3-16) найдется из начальных условий. Подчинив уравнение (3-16) начальному условию, получим:

$$\vartheta_0 = F(x) = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right). \quad (3-17)$$

Уравнение (3-17) есть разложение четной функции в ряд Фурье с заданными параметрами μ_n , определяемыми характеристическим уравнением (3-14). Для этой последовательности чисел μ_n справедлива формула

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) dx = \begin{cases} = 0 & \text{при } n \neq m, \\ \neq 0 & \text{при } n = m, \end{cases}$$

с помощью которой можно определить все коэффициенты A_n в уравнении (3-17). Для этого умножим обе части уравнения (3-17) на $\cos(\mu_n x/\delta) dx$ и затем проинтегрируем полученное соотношение по толщине пластины. Тогда

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = A_n \int_{-\delta}^{+\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx, \quad (3-18)$$

ибо все остальные слагаемые в правой части, для которых $n \neq m$, обращаются в нуль. Интеграл в правой части соотношения (3-18) равен $\delta \left(1 + \frac{1}{2\mu_n} \sin 2\mu_n\right)$.

Тогда

$$A_n = \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx. \quad (3-19)$$

Из уравнения (3-19) следует, что A_n является функцией только корня характеристического уравнения и начального распределения температуры.

Подставив полученное выражение для постоянной A_n в уравнение (3-16), получим окончательное выражение для температурного поля при охлаждении однородной пластины:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\delta (\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n)} \left[\int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) dx \right] \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3-20)$$

Уравнение (3-20) позволяет получить значение температуры в любой точке пластины для любого момента времени τ при любом начальном распределении температуры ϑ_0 .

Если в начальный момент времени ($\tau=0$) температура в пластине распределена равномерно (рис. 3-2), т. е. $t_0 - t_{жк} = \vartheta_0 = \text{const}$, то интеграл в уравнении (3-19) равен $(\vartheta_0 2\delta/\mu_n) \sin \mu_n$. С учетом сказанного выражение для постоянной A_n принимает вид:

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (3-21)$$

Подставляя значение A_n , полученное для случая равномерного распределения температуры в пластине в начальный момент времени, в уравнение (3-20), получаем:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3-22)$$

Уравнению температурного поля (3-22) целесообразно придать безразмерную форму. Для этого разделим правую и левую части уравнения (3-22) на ϑ_0 . При этом обозначим:

$$\frac{A_n}{\vartheta_0} = D_n.$$

После этих преобразований получим:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3-23)$$

Входящие в уравнение температурного поля (3-23) величины $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$; D_n ;

μ_n ; $\frac{a\tau}{\delta^2}$; $\frac{x}{\delta}$ являются безразмерными и имеют следующий смысл:

$\vartheta/\vartheta_0 = \Theta$ — безразмерная температура; $x/\delta = X$ — безразмерная координата; $a\tau/\delta^2 = \text{Fo}$ — число Фурье, представляющее собой безразмерное время; D_n — безразмерный коэффициент.

С учетом последних обозначений уравнение (3-23) запишется:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos (\mu_n X) \exp (-\mu_n^2 \text{Fo}). \quad (3-24)$$

Анализ полученного решения. Так как $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ представляет собой ряд возрастающих чисел, то чем больше μ , тем меньше

роль последующего члена ряда по сравнению с предыдущим. Кроме того, чем больше число Fo , тем члены ряда будут убывать быстрее с увеличением номера n .

Многочисленные исследования показали, что уже при $Fo \geq 0,3$ ряд (3-24) становится настолько быстросходящимся, что распределение температуры достаточно точно описывается первым членом ряда:

$$\theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-25)$$

Ранее обозначено $2 \sin \mu_1 / (\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1) = D_1$. С учетом этого обозначения уравнение (3-25) можно записать в следующем виде:

$$\theta = D_1 \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-25')$$

Величина D_1 является только функцией числа Bi и заранее может быть рассчитана и табулирована. Кроме того, если рассматривать температуру для определенного значения $X = x/\delta$, то и $\cos(\mu_1 X)$ является функцией Bi . Конкретно для оси пластины $X = x/\delta = 0$ и $\cos(\mu_1 \cdot 0) = 1$, а для поверхности $X = x/\delta = 1$ и $\cos(\mu_1 \cdot 1) = \cos \mu_1$.

Для оси пластины произведение $D_1 \cos(0)$ обозначим как некоторую функцию $N(Bi)$. Тогда уравнение (3-25) можно записать в следующем виде:

$$\theta_{X=0} = N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-26)$$

Для поверхности пластины произведение $D_1 \cos \mu_1$ обозначим как некоторую функцию $P(Bi)$ и уравнение (3-25') запишется так:

$$\theta_{X=1} = P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-27)$$

Функции $N(Bi)$ и $P(Bi)$ в уравнениях (3-26) и (3-27) табулированы и для расчета могут быть взяты из справочников [Л. 82, 164, 182]. Кроме того, из уравнений (3-26) и (3-27) следует, что при заданной координате безразмерная температура является только функцией двух безразмерных параметров Bi и Fo :

$$\theta_{X=0} = f_1(Bi, Fo) \text{ и } \theta_{X=1} = f_2(Bi, Fo).$$

Логарифмируя уравнение (3-26), получаем:

$$\ln \theta_{X=0} = \ln N(Bi) - \mu_1^2 Fo. \quad (3-28)$$

Аналогичное уравнение может быть получено после логарифмирования уравнения (3-27).

Из уравнения (3-28) следует, что при заданном значении координаты и при заданном Bi натуральный логарифм безразмерной температуры линейно зависит от времени. Последнее обстоятельство дает возможность представить для уравнений (3-26) и (3-27) графическое решение (рис. 3-4 и 3-5).

Из уравнения (3-24) следует, что в условиях охлаждения (нагрева) пластины для любого момента времени при заданных граничных условиях поле температуры имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины ($X=0$). Для каждого последующего момента времени будет своя кривая, монотонно убывающая к поверхностям пластины. При этом для любого момента времени касательные к кривым в точках $X = \pm 1$ проходят через две направляющие точки $+A$ и $-A$ — расположенные на расстоянии $\pm X_0$ от поверхности пластины, $X_0 = 1/Bi$ (рис. 3-6).

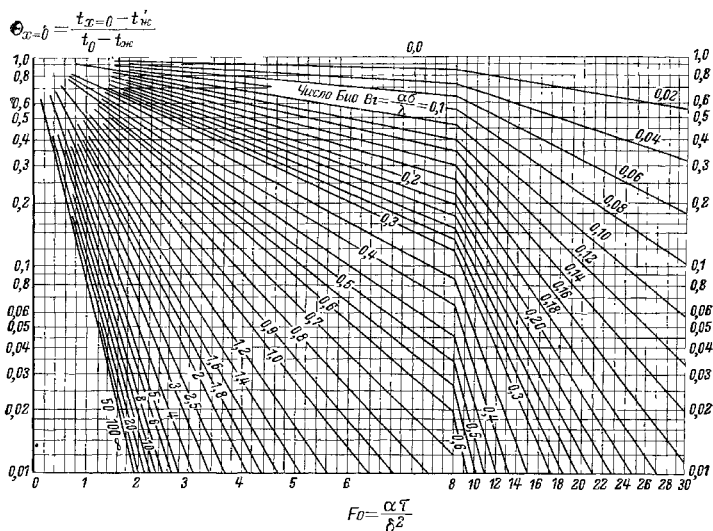


Рис 3-4 Зависимость $\Theta = f_1(Fo, Bi)$ для середины пластины.

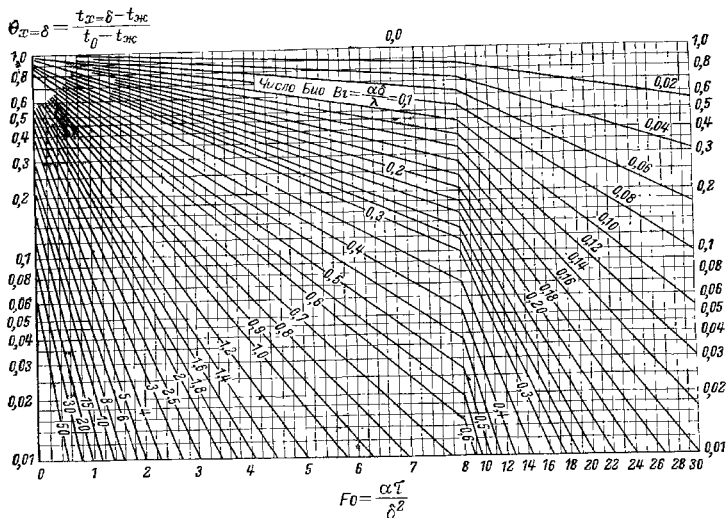


Рис 3-5 Зависимость $\Theta = f_2(Fo, Bi)$ для поверхности пластины.

Для доказательства этого важного свойства рассмотрим температурное поле для произвольного момента времени $Fo > 0$.

Умножив граничное условие (3-6) при $x = \pm \delta$ на δ/θ_0 , получим:

$$-\left[\frac{\partial \left(\frac{\theta}{x} \right)}{\partial \left(\frac{x}{\delta} \right)} \right]_{x=\delta} = -\frac{\alpha \delta}{\lambda} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)_{x=\delta}.$$

Записывая последнее выражение в безразмерных величинах, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} = -Bi \theta_{X=1}. \quad (a)$$

Из рисунка следует, что

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} = \frac{\theta_{X=1}}{X_0} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (б)$$

Сравнивая выражения (a) и (б), получаем:

$$X_0 = \frac{1}{Bi}. \quad (3-29)$$

Из уравнения (3-29) следует, что расстояние точки A от поверхности определяется заданными условиями однозначности, которые справедливы для любого момента времени. Следовательно, касательные ко всем температурным кривым в точке пересечения с поверхностью пластины и неизменных граничных условиях всегда будут проходить через точку A . Сказанное справедливо не только для пластины, но и для цилиндра, шара и тел других геометрических форм.

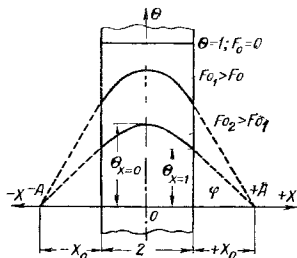


Рис. 3-6. Изменение температурного поля в плоской неограниченной стенке при ее охлаждении

Доказанное свойство температурных кривых дает возможность определить характер изменения температуры в теле при заданном значении числа Bi . Рассмотрим при этом три случая.

1. Случай, когда $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$). Если число

Bi стремится к бесконечности, то температура поверхности пластины сразу становится равной температуре окружающей среды, в которую помещена пластина. Последнее видно из уравнения (3-29): при $Bi \rightarrow \infty$ $X_0 = 1/Bi = 0$. Это означает, что точка пересечения касательных к температурным кривым находится на поверхности пластины. Из $Bi = (\delta/\lambda)/(1/\alpha)$ следует: $Bi \rightarrow \infty$ при заданных физических параметрах и толщине пластины тогда, когда $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. когда имеет место очень большая интенсивность отвода теплоты от поверхности. В этих случаях процесс охлаждения определяется физическими свойствами и размерами тела. При этом $\mu_n = 2(n-1) \frac{\pi}{2}$, и тогда коэффициент ряда (3-24):

$$D_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n} =$$

$$= \frac{2 \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]}{(2n-1) \frac{\pi}{2} + \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right]} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Общее решение для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (3-30)$$

Тогда температура на оси пластины ($X=0$)

$$\theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (3-31)$$

При $X=1 \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} X \right] = 0$, и, следовательно, $\theta_{X=1} = 0$.

Распределение температуры в пластине при $Fo > 0$ показано на рис. 3-7; здесь $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4 < \dots < Fo_n$. Как было сказано, при $Fo \geq 0,3$ ряд (3-24) быстро сходится и ошибка не превышает 1%, если отбросить все члены ряда, кроме первого. При этих условиях уравнение (3-31) принимает вид:

$$\theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \exp \left[- \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 Fo \right]. \quad (3-32)$$

Если уравнение (3-32) прологарифмировать и решить относительно числа Fo , то получим:

$$Fo = \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{4}{\pi \theta_{X=0}} \right). \quad (3-33)$$

Учитывая, что $Fo = \alpha \tau / \delta^2$, уравнение (3-33) можно записать в виде

$$\tau = \left(\frac{2\delta}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{4}{\pi \theta_{X=0}} \right). \quad (3-33')$$

По формуле (3-33) можно определить время, необходимое для прогрева середины пластины до заданной температуры.

2. Очень малые числа Bi (практически $Bi < 0,1$). Если число Bi мало, то все коэффициенты членов ряда $D_n \rightarrow 0$, поскольку теперь $\mu_n = (n-1)\pi$, за исключением D_1 , который равен:

$$D_1 = \left| \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \right|_{\mu_1 \rightarrow 0} = 1.$$

Из выражения $Bi = (\delta/\lambda)/(1/\alpha)$ видно, что малые значения числа Bi могут иметь место при малых размерах толщины пластины, при больших значениях коэффициента теплопроводности λ и малых значениях коэффициента теплоотдачи α . Следует заметить, что при малых значениях μ_1 функции $\operatorname{tg} \mu_1$ и $\sin \mu_1$ можно заменить через их аргумен-

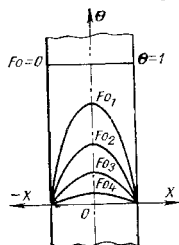


Рис. 3-7. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях $Bi \rightarrow \infty$; $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$.

ты, и тогда характеристическое уравнение (3-14) запишется:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\mu_1}{Bi}.$$

Учитывая сказанное, уравнение (3-24) можно переписать так:

$$\theta = \cos(\mu_1 X) \exp[-\mu_1^2 Fo] \approx \cos(\sqrt{Bi} X) \exp(-Bi Fo). \quad (3-34)$$

Найдем температуры на оси и на поверхности пластины:

$$\text{при } X=0 \quad \theta_{X=0} = \exp(-Bi Fo); \quad (3-35)$$

при $X=1$

$$\theta_{X=1} = \cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi Fo). \quad (3-36)$$

Отношение температур на оси и поверхности пластины

$$\frac{\theta_{X=0}}{\theta_{X=1}} = \frac{\exp(-Bi Fo)}{\cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi Fo)} \rightarrow 1.$$

При малых Bi температура на поверхности пластины незначительно отличается от температуры на оси. Это указывает на то, что температура по толщине пластины распределяется равномерно и кривая температур остается почти параллельной оси OX для любого момента времени (рис. 3-8).

Касательные к температурным кривым в точках пересечения их с поверхностью должны пересекаться с осью абсцисс в бесконечности:

$$\text{при } Bi \rightarrow 0 \text{ имеем } X_0 = 1/Bi \rightarrow \infty.$$

В рассматриваемом случае процесс нагрева и охлаждения тела определяется интенсивностью теплоотдачи на поверхности пластины. Иначе говоря, процесс выравнивания температуры в теле происходит существенно интенсивнее, чем отвод теплоты с поверхности. Задача становится внешней.

3. Число Bi находится в пределах $0,1 \leq Bi < 100$. В рассматриваемом случае μ_n есть функция Bi , т. е. зависит от толщины пластины. Температурные кривые для любого момента времени будут выглядеть, как показано на рис. 3-9. В этом случае интенсивность процесса охлаждения (нагрева) определяется как внутренним, так и внешним термическими сопротивлениями.

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛОТЫ, ОТДАННОГО ПЛАСТИНОЙ В ПРОЦЕССЕ ОХЛАЖДЕНИЯ

Количество теплоты Q_n , Дж, которое отдает или воспринимает пластина с обеих сторон за время от $\tau=0$ до $\tau=\infty$, должно равняться изменению внутренней энергии пластины за период полного ее охлаждения (нагрева):

$$Q_p = 2\delta \rho c (t_0 - t_{ж}). \quad (3-37)$$

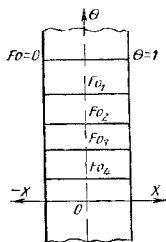


Рис. 3-8. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях $Bi \rightarrow 0$; $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$.

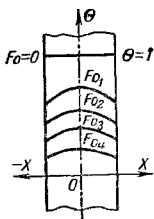


Рис. 3-9. Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях, когда Bi — конечная величина; $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$.

Тогда за любой промежуток времени от $\tau=0$ до τ_1 или, что то же, от Fo до Fo_1 , внутренняя энергия пластины изменится на

$$Q = Q_n - Q_1 = 2\beta \rho c (t_0 - t_n) \left(1 - \frac{\bar{t}_1 - t_n}{t_0 - t_n} \right),$$

или

$$Q = Q_n (1 - \bar{\Theta}_1), \quad (3-38)$$

где $\bar{\Theta}_1 = (\bar{t}_1 - t_n) / (t_0 - t_n)$ — средняя безразмерная температура по толщине пластины в момент времени τ_1 .

Из соотношений (3-37) и (3-38) следует, что расчет количества теплоты, отданного или воспринятого пластиной, сводится к нахождению средней безразмерной температуры в интересующий нас момент времени. Средняя безразмерная температура для слоя пластины от оси симметрии до плоскости X найдется как

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{X} \int_0^X \Theta dX$$

в соответствии с теоремой о среднем.

Если в это выражение подставить под знак интеграла значение Θ из уравнения (3-24) и проинтегрировать в пределах от нуля до единицы, то получим:

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (3-39)$$

Подставив в уравнение (3-38) вычисленное по формуле (3-39) значение средней температуры пластины для интересующего нас момента времени, получим количество теплоты, отданное пластиной в окружающую среду за рассматриваемый промежуток времени.

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) уравнение (3-39) принимает вид:

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (3-40)$$

Если $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$), уравнение (3-39) принимает вид:

$$\bar{\Theta} = \exp(-Bi Fo). \quad (3-41)$$

При значениях числа $Fo \geq 0,3$ для пластины можно ограничиться первым членом ряда (3-39), тогда

$$\bar{\Theta} = \frac{2 \sin^2 \mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-42)$$

Множитель $2 \sin^2 \mu_1 / (\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1)$ зависит только от числа Bi и может быть представлен как некоторая функция $M(Bi)$, тогда уравнение (3-42) запишется:

$$\bar{\Theta} = M(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-42')$$

Функция $M(Bi)$ может быть заранее рассчитана и представлена в таблицах. Тогда расчет средней температуры будет сводиться к вычислению экспоненты.

3-5. ОХЛАЖДЕНИЕ (НАГРЕВАНИЕ) БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Цилиндр радиусом r_0 отдает тепло окружающей среде через свою боковую поверхность; коэффициент теплоотдачи α во всех точках поверхности одинаков и остается постоянным на протяжении всего периода охлаждения. Температура среды $t_{ж}$ постоянна. В начальный момент времени при $\tau=0$ температура является некоторой функцией $t(r, 0)=f(r)$. Отсчет температуры цилиндра будем вести, как и в § 3-3, от температуры среды, т. е. $t-t_{ж}=\vartheta$. При этих условиях уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \quad (3-43)$$

Граничные и начальные условия:

при $\tau=0$ и $0 \leq r \leq r_0$

$$\vartheta = \vartheta_0 = f(r) - t_{ж} = F(r);$$

при $\tau > 0$ и $r=0$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=0} = 0;$$

при $\tau > 0$ и $r=r_0$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{r=r_0}.$$

Сформулированную задачу решим с помощью разделения переменных, т. е. $\vartheta(r, \tau) = \varphi(\tau) \psi(r)$. Подставляя это выражение в уравнение (3-43), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения вида

$$\varphi'(\tau) + a k^2 \varphi(\tau) = 0; \quad (3-44)$$

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + k^2 \psi(r) = 0. \quad (3-45)$$

Из предыдущего параграфа известно, что уравнение (3-44) имеет решение:

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{-a k^2 \tau}. \quad (a)$$

Уравнение (3-45) есть уравнение Бесселя, общий интеграл которого имеет вид:

$$\psi(r) = C_2 J_0(kr) + C_3 Y_0(kr), \quad (б)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, J_0 и Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Так как температура на оси цилиндра ($r=0$) должна быть конечной величиной, а $Y_0(0) \rightarrow \infty$, то из физических соображений частное решение уравнения (3-45) не должно содержать бесселеву функцию второго рода и C_3 должно быть равно нулю.

С учетом сказанного уравнение (б) принимает вид:

$$\psi(r) = C_2 J_0(kr). \quad (в)$$

Если обозначить $kr_0 = \mu$, тогда частное решение уравнения (3-43) будет иметь вид:

$$\vartheta(r, \tau) = C e^{-\mu^2 \frac{a \tau}{r_0^2}} J_0\left(\mu \frac{r}{r_0}\right). \quad (3-46)$$

Постоянная μ в уравнении (3-46) определяется из граничных условий ($r=r_0$), решение которых приводит к характеристическому уравнению

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}. \quad (3-47)$$

здесь $J_1(\mu)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Уравнение (3-47) является трансцендентным, и его удобно решать графическим способом, обозначив:

$$\mu/Bi = y_1; \quad J_0(\mu)/J_1(\mu) = y_2.$$

Отметим, что y_2 обращается в нуль в тех точках, для которых $J_0(\mu) = 0$.

В тех точках, в которых функция $J_1(\mu)$ обращается в нуль, функция y_2 претерпевает разрыв непрерывности и становится равной $\pm\infty$. Функции $J_0(\mu)$ и $J_1(\mu)$ являются периодическими затухающими функциями, а кривая $y_2 = J_0(\mu)/J_1(\mu)$ напоминает котангенсону, но с убывающим периодом. Функция $y_1 = \mu/Bi$ графически представляет прямую линию, проходящую через начало координат. Выполнив построение, как показано на рис. 3-10, в точках пересечения функции y_2 с прямой y_1 получим значения корней характеристического уравнения (3-47). Из рис. 3-10 следует, что уравнение (3-47) имеет бесчисленное множество решений, а сами корни, как и для пластины, представляют ряд возрастающих чисел, т. е. $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n$, где $n=1, 2, 3, \dots, \infty$.

Первые четыре корня уравнения (3-47) μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 приведены в табл. 3-2 для различных значений числа Bi (от 0 до ∞).

Общее решение будет суммой всех частных решений (3-46):

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}\right). \quad (3-48)$$

Постоянная C_n в уравнении (3-48) находится из начальных условий.

При $\tau=0$ $\vartheta=\vartheta_0=F(r)$ и уравнение (3-48) принимает вид:

$$\vartheta_0 = F(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right). \quad (3-49)$$

Видим, что (3-49) представляет собой разложение функции $F(r)$ в ряд Фурье по функциям Бесселя, а для такой последовательности

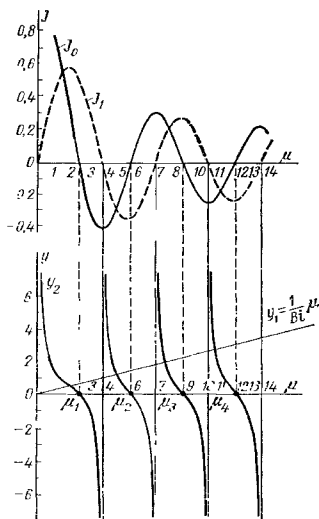


Рис. 3-10. К решению уравнения (3-47).

Значения μ_n для цилиндра

BI	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	BI	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,9309

числа C_n определяются по формуле

$$C_n = \frac{\int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr}. \quad (3-50)$$

После интегрирования знаменателя получаем:

$$C_n = \frac{2}{r_0^2 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr. \quad (3-51)$$

Подставляя полученное выражение для C_n в уравнение (3-48), получаем:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{r_0^2 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \left[\int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr \right] \times \\ \times J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \exp \left[-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{r_0^2} \right]. \quad (3-52)$$

Уравнение (3-52) справедливо при любом начальном распределении температуры в цилиндре.

Если в начальный момент времени ($\tau=0$) температура распределена равномерно, т. е. $\vartheta_0=F(r)=\text{const}$, то интеграл в уравнении (3-52)

$$\int_0^{r_0} r \vartheta_0 J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr = \frac{r_0^2}{\mu_n} \vartheta_0 J_1(\mu_n).$$

Для этих условий уравнение температурного поля принимает вид:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau_1}{r_0^2}\right). \quad (3-53)$$

Обозначим: $\theta/\theta_0 = \Theta$ — безразмерная температура; $r/r_0 = R$ — безразмерная координата, которая изменяется в пределах $0 \leq R \leq 1$; $a\tau/r_0^2 = Fo$ — число Фурье для цилиндра.

С учетом этих обозначений последнее выражение запишется в виде

$$\Theta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0(\mu_n R) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (3-53')$$

Заметим, что все принципиальные выводы, сделанные при анализе решения для пластины, справедливы и для цилиндра.

Из характеристического уравнения (3-47) видно, что корни μ_n зависят только от Bi . Поэтому уравнение температурного поля можно представить в виде обобщенной функции от безразмерных параметров:

$$\Theta = F\left(\frac{r}{r_0}, \frac{a\tau_0}{\lambda}, \frac{a\tau}{r_0^2}\right) = F(R, Bi, Fo). \quad (3-54)$$

Если рассматривать значение температуры на оси цилиндра ($R=0$), то уравнение (3-53) запишется следующим образом:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \exp[-\mu_n^2 Fo]. \quad (3-55)$$

На поверхности цилиндра

$$\Theta_{R=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0(\mu_n) \exp[-\mu_n^2 Fo]. \quad (3-56)$$

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) прямая совпадает с осью абсцисс и корни характеристического уравнения не зависят от Bi , а определяются из условий $J_0(\mu) = 0$.

В этом случае процесс охлаждения определяется физическими свойствами тела и его геометрическими размерами. При этом уравнение (3-53) принимает вид:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0(\mu_n R) \exp[-\mu_n^2 Fo]. \quad (3-57)$$

Если рассматривать охлаждение цилиндра при условии $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$), то при разложении функций $J_0(\mu)$ и $J_1(\mu)$ в степенные ряды они становятся настолько быстросходящимися, что можно ограничиться первыми членами ряда, и тогда $\mu^2 = 2Bi$.

Действительно,

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi} = \frac{1 - \frac{1}{2^2} \mu^2 + \dots}{\frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2^2 \cdot 4} \mu^3 + \dots},$$

откуда получаем:

$$\mu = \sqrt{2Bi}.$$

Кроме того, коэффициенты всех членов ряда бесконечной суммы (3-53) равны нулю, за исключением коэффициента

$$D_1 = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]},$$

который равен единице. Уравнение (3-53) для условий $Bi \rightarrow 0$ принимает вид:

$$\Theta = J_0(\mu R) \exp[-\mu^2 Fo]. \quad (3-58)$$

На оси цилиндра ($R=0$):

$$\Theta_{R=0} = \exp[-\mu^2 Fo]. \quad (3-59)$$

На поверхности цилиндра ($R=1$):

$$\Theta_{R=1} = J_0(\mu) \exp[-\mu^2 Fo]. \quad (3-60)$$

В силу того что $\mu = \sqrt{2Bi}$, как сама функция $J_0(\mu)$, так и отношение температур на оси и поверхности цилиндра будут стремиться к единице, т. е.

$$\frac{\Theta_{R=0}}{\Theta_{R=1}} = \frac{\exp[-\mu^2 Fo]}{J_0(\mu) \exp[-\mu^2 Fo]} \rightarrow 1.$$

Последнее указывает на то, что температура по толщине цилиндра распределена равномерно и практически не зависит от радиуса цилиндра. Задача становится внешней и протекание процесса определяется условиями охлаждения на поверхности цилиндра.

Если $Fo \geq 0,25$, при вычислении безразмерной температуры Θ можно ограничиться первым членом ряда. Допускаемая при этом ошибка не превысит 1%. Тогда безразмерные температуры на оси и поверхности цилиндра могут быть вычислены по формулам:

на оси цилиндра

$$\Theta_{R=0} = N_0(Bi) \exp[-\mu^2 Fo]; \quad (3-61)$$

на поверхности цилиндра

$$\Theta = P_0(Bi) \exp[-\mu^2 Fo]. \quad (3-62)$$

Функции $N_0(Bi)$ и $P_0(Bi)$ могут быть заранее рассчитаны и сведены в таблицы (см. [Л. 82, 164, 182]). Поскольку в уравнениях (3-61) и (3-62) Θ является функцией только двух безразмерных параметров

$$\Theta_{R=0} = \Phi_1(Bi, Fo)$$

и

$$\Theta_{R=1} = \Phi_2(Bi, Fo),$$

то для определения температуры на оси поверхности цилиндра можно построить графики, показанные на рис. 3-11 и 3-12.

3-6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛОТЫ, ОТДАННОГО ЦИЛИНДРОМ В ПРОЦЕССЕ ОХЛАЖДЕНИЯ

Так же как и для пластины, количество теплоты Q_n , Дж, которое отдается или воспринимается поверхностью цилиндра за время от $\tau=0$ до $\tau=\infty$, должно равняться изменению внутренней энергии цилиндра за период полного его охлаждения:

$$Q_n = \pi r_0^2 \rho c (t_0 - t_{ж}). \quad (3-63)$$

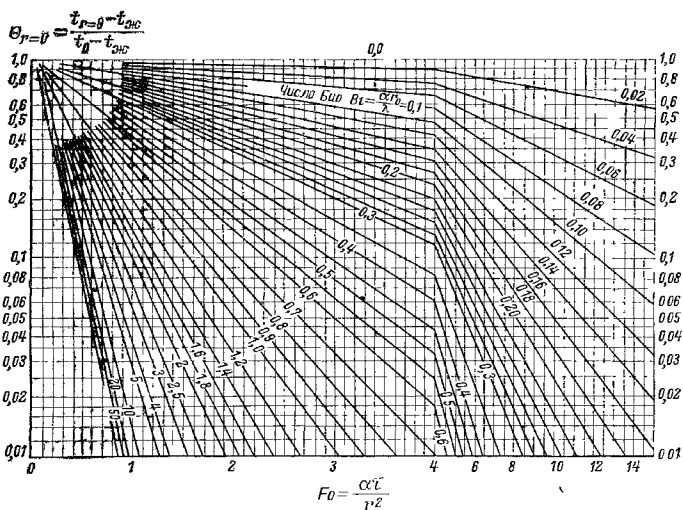


Рис 3-11 Зависимость $\Theta = \Phi_1(Fo, Bi)$ для оси цилиндра.

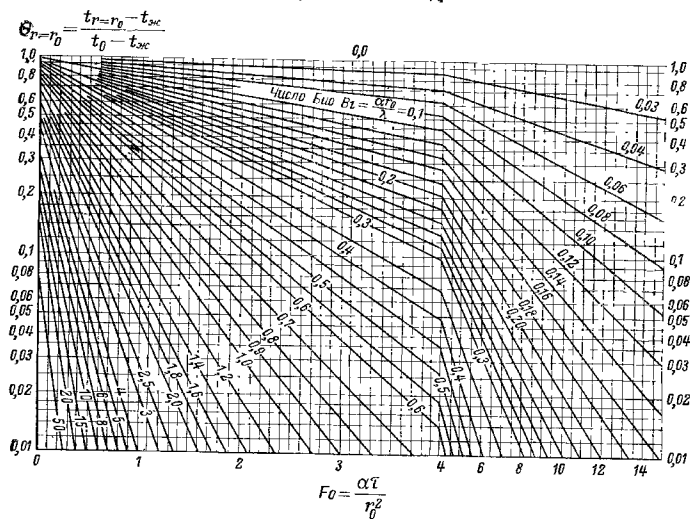


Рис 3-12 Зависимость $\Theta = \Phi_2(Fo, Bi)$ для поверхности цилиндра

За любой промежуток времени от $\tau=0$ до τ_1 внутренняя энергия цилиндра изменится на величину

$$Q = Q_n(1 - \bar{\Theta}_1), \quad (3-64)$$

где по-прежнему, как и для пластины,

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{\bar{t}_1 - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}.$$

Средняя безразмерная температура цилиндра найдется из уравнения

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \Theta 2\pi R dR = 2 \int_0^1 \Theta R dR$$

(R изменяется от 0 до 1).

Если в это уравнение подставить значение Θ согласно уравнению (3-53) и проинтегрировать в указанных ранее пределах, то получим:

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_0^2(\mu_n)}{\mu_n^2 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \exp[-\mu_n^2 Fo]$$

или, учитывая, что $J_0(\mu)/J_1(\mu) = \mu/\text{Bi}$,

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\text{Bi}^2}{\mu_n^2 [\mu_n^2 + \text{Bi}^2]} \exp[-\mu_n^2 Fo]. \quad (3-65)$$

При расчете средней температуры цилиндра $\bar{\Theta}$ в случае $Fo \geq 0,25$ также можно ограничиться одним первым членом ряда (3-65):

$$\bar{\Theta} = \frac{4\text{Bi}^2}{\mu_1^2 (\mu_1^2 + \text{Bi}^2)} \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-65')$$

Функцию $4\text{Bi}^2/[\mu_1^2(\mu_1^2 + \text{Bi}^2)] = M(\text{Bi})$ можно заранее рассчитать для соответствующих значений Bi и свести в таблицы.

3-7. ОХЛАЖДЕНИЕ ШАРА

Рассмотрим охлаждение шара в среде с постоянной температурой и с постоянным коэффициентом теплоотдачи α на его поверхности. В начальный момент времени при $\tau=0$ все точки шара с радиусом r_0 имеют одинаковую температуру t_0 . При заданных условиях температура для любой точки шара будет функцией только времени и радиуса. Требуется найти распределение температуры внутри шара.

Если обозначить избыточную температуру для любой точки шара $\Phi = t - t_{\text{ж}}$, то дифференциальное уравнение теплопроводности шара в сферических координатах запишется:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right). \quad (3-66)$$

а) Граничные условия:

на поверхности шара при $r=r_0$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \Phi_{r=r_0}.$$

Из условий симметрии задачи в центре шара при $r=0$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=0} = 0.$$

б) Начальные условия: при $\tau=0$

$$\Phi = \Phi_0 = t_0 - t_{\text{ж}} \text{ для } 0 \leq r \leq r_0.$$

Решая уравнение (3-66) методом разделения переменных и подчиняя полученное решение условиям (3-67), получим:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) \sin(\mu_n R)}{(\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n) \mu_n R} \exp[-\mu_n^2 Fo]; \quad (3-68)$$

здесь $\theta = \theta/\theta_0$; $R = r/r_0$.

Постоянная μ в уравнении (3-68) является корнем характеристического уравнения, которое для шара имеет вид:

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{Bi - 1}. \quad (3-69)$$

Уравнение (3-69) является трансцендентным, имеет бесчисленное множество корней при заданном значении Bi и решается аналогично уравнению (3-14). Значения шести корней уравнения (3-69) для различных Bi приведены в [Л. 111, табл. 6-5].

При $Bi \rightarrow \infty$ согласно характеристическому уравнению (3-69)

$$\mu_n = n\pi,$$

при этом «начальная тепловая амплитуда» уравнения (3-68)

$$D_n = \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} = 2(-1)^{n+1}.$$

С учетом последнего уравнения формула (3-68) принимает вид:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi R} \sin(n\pi R) \exp[-(n\pi)^2 Fo]. \quad (3-70)$$

При $Bi = 1$ согласно уравнению (3-69):

$$\mu_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad D_n = 2(-1)^{n+1} \frac{1}{\mu_n},$$

и уравнение (3-68) запишется:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n} \frac{\sin(\mu_n R)}{\mu_n R} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (3-71)$$

При малых значениях Bi ($Bi < 0,1$) начальные амплитуды (D_n) всех членов ряда (3-68), за исключением первого, стремятся к нулю. Начальная амплитуда первого члена ряда $D_1 = 1$, а $\mu_1^2 = 3Bi$. При этих условиях соотношение (3-68) запишется так:

$$\theta = \frac{\sin(\sqrt{3Bi} R)}{\sqrt{3Bi} R} \exp(-3Bi Fo). \quad (3-72)$$

Из анализа уравнения (3-68) следует, что при значениях $Fo \geq 0,25$ ряд становится настолько быстроходящимся, что для выражения температурного поля можно ограничиться первым членом ряда:

$$\theta = \frac{2(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1} \frac{\sin(\mu_1 R)}{\mu_1 R} \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3-73)$$

Так как μ_n в уравнении (3-68) зависят только от числа Bi , то уравнение температурного поля может быть записано в виде

$$\theta = F(R, Bi, Fo). \quad (3-74)$$

¹ Подробное решение приведено в монографии А. В. Лыкова [Л. 111].

Для центра шара

$$\Theta_{R=0} = F_1(Bi, Fo). \quad (3-74')$$

Для поверхности шара

$$\Theta_{R=1} = F_2(Bi, Fo). \quad (3-74'')$$

Функции, определяемые выражениями (3-74') и (3-74'') для различных значений чисел Bi и Fo , представлены на рис. 3-13 и 3-14.

Аналогично, как для пластины и цилиндра, количество теплоты, которое отдается или воспринимается шаром за промежуток времени

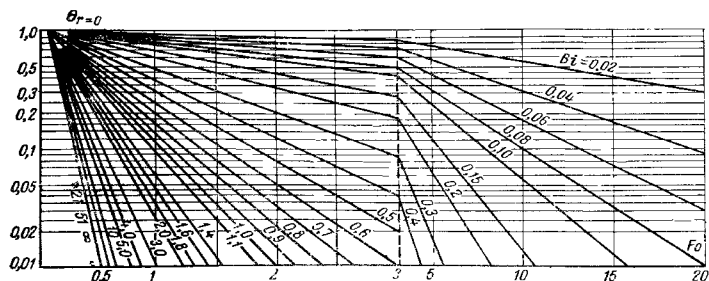


Рис. 3-13. Зависимость $\Theta = F_1(Fo, Bi)$ для центра шара.

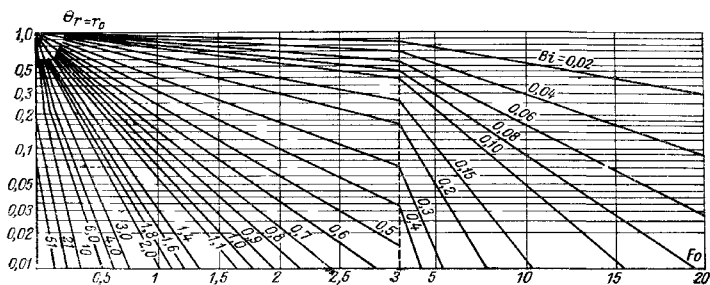


Рис. 3-14. Зависимость $\Theta = F_2(Fo, Bi)$ для поверхности шара

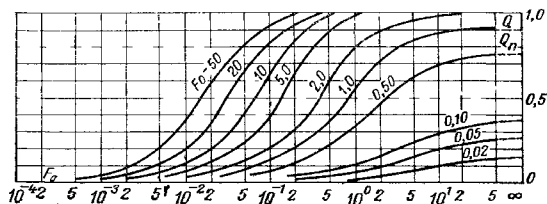


Рис. 3-15 Зависимость $Q/Q_{\infty} = F(Fo, Bi)$

от $\tau=0$ до τ , найдем по формуле

$$\frac{Q}{Q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\mu_n^3} \frac{(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)^2}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}). \quad (3-75)$$

В уравнении (3-75) $Q_n = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho c (t_0 - t_{ж})$ — начальная избыточная внутренняя энергия шара. Из рассмотрения (3-75) следует, что

$$\frac{Q}{Q_n} = F(Bi, Fo). \quad (3-76)$$

Значения функции (3-76) для различных значений чисел Fo и Bi представлены на рис. 3-15.

3-8. ОХЛАЖДЕНИЕ (НАГРЕВАНИЕ) ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

а) Охлаждение параллелепипеда

Рассмотрим охлаждение параллелепипеда в среде с постоянной температурой и с постоянным коэффициентом теплоотдачи α на всех его гранях. В начальный момент времени ($\tau=0$) все точки параллелепипеда имеют одинаковую температуру t_0 . Параллелепипед с размерами $2\delta_x \times 2\delta_y \times 2\delta_z$ является однородным и изотропным. Требуется найти распределение температуры в параллелепипеде для любого момента времени, а также среднюю температуру, необходимую для определения количества подведенной (отведенной) теплоты.

Поместим начало координат в центре параллелепипеда (рис. 3-16). При этом дифференциальное уравнение запишется следующим образом:

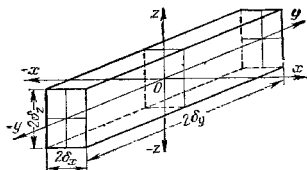


Рис. 3-16. К охлаждению параллелепипеда.

$$\frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \nabla^2 t(x, y, z, \tau). \quad (3-77)$$

Начальные условия ($\tau=0$)

$$t(x, y, z) = t_0 = \text{const.} \quad (3-78)$$

При заданных условиях задача симметрична относительно центра параллелепипеда. Если ввести обозначение $\vartheta = t - t_{ж}$, то граничные условия запишутся так:

а) для поверхности при $\tau > 0$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\pm \delta_x} &= \alpha \vartheta_{x=\pm \delta_x}; \\ -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\pm \delta_y} &= \alpha \vartheta_{y=\pm \delta_y}; \\ -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_{z=\pm \delta_z} &= \alpha \vartheta_{z=\pm \delta_z}; \end{aligned} \right\} \quad (3-79)$$

б) в центре параллелепипеда при $\tau > 0$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0, 0 \leq y \leq b_y, 0 \leq z \leq b_z} &= 0; \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0, 0 \leq x \leq b_x, 0 \leq z \leq b_z} &= 0; \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0, 0 \leq x \leq b_x, 0 \leq y \leq b_y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

Параллелепипеды, цилиндры конечных размеров и прямоугольные стержни можно рассматривать как тела, образованные пересечением соответственно трех взаимно перпендикулярных неограниченных пластин конечной толщины, цилиндра и пластины и двух пластин.

Можно доказать, что решение таких задач представляется произведением безразмерных температур для тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело.

Как было сказано, параллелепипед образован в результате пересечения трех взаимно перпендикулярных безграничных пластин конечной толщины. Следовательно, для него и решение можно представить, как произведение безразмерных температур для трех безграничных пластин:

$$\Theta = \Theta_x \Theta_y \Theta_z, \quad (3-81)$$

где

$$\Theta_x = \frac{t(x, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}; \quad \Theta_y = \frac{t(y, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}; \quad \Theta_z = \frac{t(z, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}.$$

Общее решение (3-81) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\Theta = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{t(x, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \frac{t(y, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \frac{t(z, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}. \quad (3-81')$$

Приведенное решение удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям, описывающим процесс теплопроводности в параллелепипеде.

Таким образом, решение задачи для рассматриваемого тела конечных размеров свелось к решению задачи для безграничной пластины конечной толщины. Уравнение (3-81) можно представить в виде:

$$\Theta = F_x \left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{a\delta_x}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_x^2} \right) F_y \left(\frac{y}{\delta_y}, \frac{a\delta_y}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_y^2} \right) F_z \left(\frac{z}{\delta_z}, \frac{a\delta_z}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_z^2} \right),$$

или

$$\Theta = F_x(X, Bi_x, Fo_x) F_y(Y, Bi_y, Fo_y) F_z(Z, Bi_z, Fo_z). \quad (3-81'')$$

Множители в уравнении (3-81) вычисляются по формуле (3-24).

Рассмотренный метод известен в теории теплопроводности под названием теоремы о перемножении решений. Полученное решение справедливо и для нахождения средней температуры.

Средняя безразмерная температура параллелепипеда выражается следующим образом:

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{\bar{t}(\tau)_x - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \frac{\bar{t}(\tau)_y - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \frac{\bar{t}(\tau)_z - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}},$$

или

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_x \bar{\Theta}_y \bar{\Theta}_z = \bar{F}_x(Bi_x, Fo_x) \bar{F}_y(Bi_y, Fo_y) \bar{F}_z(Bi_z, Fo_z). \quad (3-82)$$

В уравнении (3-82) множители находятся по формуле (3-39). Заметим, что теорема о перемножении решений справедлива и в более общем случае, когда коэффициенты теплопроводности различны для различных направлений, коэффициенты теплоотдачи на границах разные.

б) Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Однородный стержень охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{ж}$ и при постоянном коэффициенте теплоотдачи на его поверхности. В начальный момент времени ($\tau=0$) все точки стержня имеют одинаковую температуру.

Поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник размерами $2\delta_x \times 2\delta_y$ (рис. 3-17). Такое тело можно рассматривать как результат пересечения двух пластин толщиной $2\delta_x$ и $2\delta_y$, условия однозначности для которых такие же, как и для образовавшегося стержня. Безразмерное температурное поле для поставленной задачи есть

$$\Theta = \Theta_x \Theta_y, \quad (3-82')$$

где

$$\Theta_x = F_x(X, Bi_x, Fo_x) \text{ и } \Theta_y = F_y(Y, Bi_y, Fo_y).$$

Множители в уравнении (3-82) вычисляются по формуле (3-24).

в) Охлаждение цилиндра конечной длины

Однородный цилиндр охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{ж}$. Коэффициент теплоотдачи α на основаниях цилиндра и его поверхности одинаков. В начальный момент ($\tau=0$) все точки цилиндра имеют одинаковую температуру t_0 . Диаметр цилиндра равен $2r_0$, длина $l=2\delta_z$ (рис. 3-18). Необходимо найти распределение температуры в цилиндре для любого момента времени и среднюю температуру как функцию времени для заданных условий однозначности. Конечный цилиндр можно рассматривать как результат пересечения безграничного цилиндра диаметром $2r_0$ и пластины толщиной $2\delta_z$; следовательно, и безразмерную температуру для такого тела можно записать как

$$\Theta = \Theta_z \Theta_r = \frac{t(z, \tau) - t_m}{t_0 - t_m} \frac{t(r, \tau) - t_m}{t_0 - t_m}, \quad (3-83)$$

или

$$\Theta = F_z\left(\frac{z}{\delta_z}, \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{\delta_z^2}\right) F_r\left(\frac{r}{r_0}, \frac{\alpha r_0}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{r_0^2}\right). \quad ((3-83'))$$

В уравнении (3-83) множители правой части находятся по формулам (3-24) и (3-53), причем в качестве определяющих линейных размеров в уравнении (3-24) берется половина высоты цилиндра δ_z ,

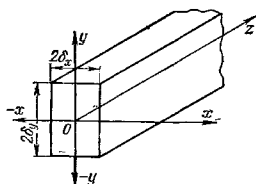


Рис. 3-17. К охлаждению полуограниченного прямоугольного стержня.

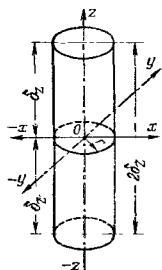


Рис. 3-18. К охлаждению цилиндра конечной длины.

а в уравнении (3-53) — радиус цилиндра r_0 . Средняя температура в цилиндре для любого момента времени

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(z) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{\bar{t}(z) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \frac{\bar{t}(r) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}},$$

или

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_z \bar{\theta}_r = \bar{F}_z(\text{Bi}_z, \text{Fo}_z) \bar{F}_r(\text{Bi}_r, \text{Fo}_r). \quad (3-84)$$

В уравнении (3-84) множители вычисляются по формулам (3-39) и (3-65).

3-9. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ [НАГРЕВАНИЯ] ОТ ФОРМЫ И РАЗМЕРОВ ТЕЛА

Скорость процесса распространения теплоты в телах зависит от отношения поверхности тел к их объему. Исследования процессов охлаждения тел указывают на то, что чем больше отношение поверхности тела к его объему, тем и скорость протекания процесса будет больше. Сказанное справедливо для любых значений числа Bi и может быть наглядно продемонстрировано на примере охлаждения пластины,

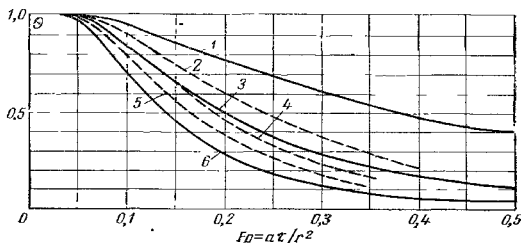


Рис. 3-19. Скорость охлаждения в центре для различных тел с одинаковым характерным линейным размером l_0 .

1 — бесграничная пластина; 2 — квадратная балка бесконечной длины; 3 — цилиндр бесконечной длины; 4 — куб; 5 — цилиндр, длина равна диаметру; 6 — шар.

длиного цилиндра и шара. При $\text{Bi}=0$ для пластины, цилиндра и шара уравнения температурного поля запишутся соответственно

$$\Theta_{\text{пл}} = \exp(-\text{BiFo}); \quad \Theta_{\text{цил}} = \exp(-2\text{BiFo}); \quad \Theta_{\text{ш}} = \exp(-3\text{BiFo}).$$

Из приведенных уравнений следует, что при одинаковом определяющем размере и прочих равных условиях наибольшая скорость изменения температуры во времени будет наблюдаться для шара. Если сравнивать отношения поверхности к объему для пластины, цилиндра и шара, то их можно представить как 1 : 2 : 3.

На рис. 3-19 приведены кривые изменения температуры во времени на оси и в центре тел различной геометрической формы при одинаковом значении числа Bi . Из рис. 3-19 следует, что для шара скорость охлаждения больше, чем для любого другого тела. Следует отметить, что все сказанное справедливо для тел с одинаковым характерным линейным размером l_0 .

3-10. РЕГУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ ОХЛАЖДЕНИЯ [НАГРЕВАНИЯ] ТЕЛ

Анализ полученных решений для тел различной геометрической формы показывает, что они имеют одинаковую структуру, т. е. представляют собой сумму бесконечного ряда, члены которого расположены по быстро убывающим экспоненциальным функциям. Например, для безграничной пластины при охлаждении ее в среде с постоянной температурой $t_{\text{ж}}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи α на ее поверхностях получено:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}.$$

В этом уравнении A_n — постоянный коэффициент, свой для каждого члена ряда (не зависящий ни от координат, ни от времени), он найден из начальных условий.

Множитель $\cos(\mu_n x/\delta)$ является функцией только координаты x и его можно обозначить U_n . Экспонента будет убывать пропорционально времени τ . Комплекс $\mu_n^2 \alpha / \delta^2$ представляет собой постоянное вещественное положительное число, которое можно обозначить m_n , причем m будет изменяться в зависимости от номера индекса так же, как и μ , т. е.

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n, \quad (3-85)$$

где $n=1, 2, 3 \dots$

С учетом сказанного выражение для пластины можно представить как

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau}. \quad (3-86)$$

Для тел других геометрических форм температурное поле также будет описываться уравнением вида (3-86). Специфика геометрической формы учитывается различным видом множителей A_n и U_n . Для тел одной и той же формы различным начальным распределениям температуры будут соответствовать разные совокупности чисел A_n .

При малых значениях τ от $\tau=0$ до $\tau=\tau_1$ распределение температуры внутри тела и скорость изменения во времени температуры в отдельных точках тела зависят от особенностей начального распределения температур. В этих условиях поле температур в теле будет определяться не только первым, но и последующими членами ряда (3-86).

Это первый период охлаждения, при котором скорость изменения температуры внутри тела зависит от вида начального распределения температур, называют неупорядоченной стадией процесса охлаждения (нагрева). Благодаря неравенству (3-85) с увеличением времени τ последующие члены ряда (3-86) будут быстро убывать, т. е. ряд становится быстроходящимся.

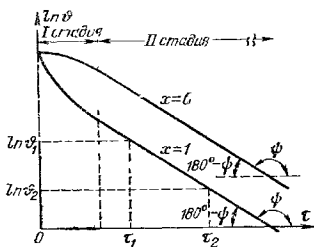


Рис 3 20 Зависимость $\ln \vartheta$ от времени при охлаждении (нагревании) тел.

Начиная с некоторого момента времени $\tau > \tau_1$ начальные условия начинают играть второстепенную роль и процесс полностью определяется только условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами. Температурное поле описывается первым членом ряда (3-86):

$$\Phi = A_1 U_1 e^{-m_1 \tau}. \quad (3-87)$$

Это соотношение показывает, что изменение избыточной температуры как в пространстве, так и во времени не зависит от начального распределения температуры. Логарифмируя последнее уравнение и опуская индексы, получаем:

$$\ln \Phi = \ln(AU) - m\tau$$

или

$$\ln \Phi = -m\tau + C(x, y, z). \quad (3-88)$$

Из уравнения (3-88) следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону. Графическая зависимость между $\ln \Phi$ и временем будет иметь вид прямой (рис. 3-20). При длительном охлаждении ($\tau \rightarrow \infty$ или, что то же, $\tau_0 \rightarrow \infty$) все точки тела в конце концов принимают одинаковую температуру, равную $t_{ж}$ (наступило стационарное состояние).

Таким образом, весь процесс охлаждения можно разделить на три стадии.

Первая стадия (неупорядоченного) режима характеризуется большим влиянием начального распределения температуры, и зависимость между Φ и τ описывается уравнением (3-86).

Вторая стадия охлаждения называется регулярным режимом, и зависимость между Φ и τ описывается уравнением (3-87).

Третья стадия охлаждения соответствует стационарному режиму, когда температура во всех точках тела равна температуре окружающей среды (имеет место тепловое равновесие).

Остановимся на более подробном рассмотрении второй стадии охлаждения.

После дифференцирования обеих частей уравнения (3-88) по времени получим:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -m = \text{const.} \quad (3-89)$$

В левой части уравнения (3-89) стоит выражение для относительной скорости изменения температуры, и оно равняется постоянной величине m , не зависящей ни от координат, ни от времени.

Величина m измеряется в $1/\text{с}$ и называется темпом охлаждения. При наступлении регулярного режима темп охлаждения не зависит ни от координат, ни от времени и является величиной постоянной для всех точек тела. Темп охлаждения, как это следует из уравнения (3-89), характеризует относительную скорость изменения температуры в теле и зависит только от физических свойств тела, процесса охлаждения на его поверхности, геометрической формы и размеров тела.

Итак, регулярный режим охлаждения (нагрева) тел характеризуется тем, что изменение температурного поля во времени описывается простой экспонентой и относительная скорость охлаждения m для

всех точек тела остается величиной постоянной, не зависящей ни от координат, ни от времени.

Если экспериментально определить изменение избыточной температуры $\bar{\theta}$ во времени τ и построить зависимость в полулогарифмических координатах, то из рис. 3-20 следует, что темп охлаждения в стадии регулярного режима найдется как

$$\frac{\ln \bar{\theta}_1 - \ln \bar{\theta}_2}{\tau_2 - \tau_1} = m = \text{const.}$$

Выражение для зависимости темпа охлаждения m от физических свойств тела, его геометрической формы и размеров, а также условий теплообмена на поверхности тела можно найти из анализа теплового баланса.

Изменение внутренней энергии тела

$$dQ = -c\rho V \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} d\tau, \quad (3-90)$$

где c — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); V — объем тела, м³; ρ — плотность вещества, кг/м³; $\bar{\theta}_v$ — средняя по объему избыточная температура, °С; τ — время, с.

С другой стороны, за тот же промежуток времени вся теплота должна быть отведена с поверхности тела в окружающую среду за счет теплоотдачи

$$dQ = \bar{\alpha} \bar{\theta}_F F d\tau; \quad (3-91)$$

здесь $\bar{\alpha}$ — среднее значение коэффициента теплоотдачи; $\bar{\theta}_F$ — средняя температура поверхности тела в данный момент времени:

$$\bar{\theta}_F = \frac{1}{F} \int_F \theta_F dF.$$

Приравнявая выражения (3-90) и (3-91), находим:

$$-\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} = \frac{\bar{\alpha} F}{c\rho V} \bar{\theta}_F$$

или, если разделить полученное выражение на $\bar{\theta}_v$ и учесть, что $c\rho V = C$, Дж/К — полная теплоемкость тела,

$$-\frac{1}{\bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} = \frac{\bar{\theta}_F}{\bar{\theta}_v} \frac{\bar{\alpha} F}{C}. \quad (3-92)$$

В левой части этого выражения стоит относительная скорость охлаждения m , 1/с, и если отношение $\bar{\theta}_F/\bar{\theta}_v$ обозначить через Ψ , (3-92) можно записать:

$$m = \Psi \frac{\bar{\alpha} F}{C}. \quad (3-93)$$

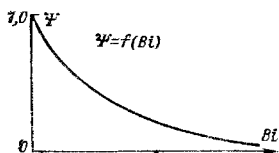
Из уравнения (3-93) следует, что *относительная скорость охлаждения*, или, иначе говоря, темп охлаждения m однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи α пропорциональна коэффициенту теплоотдачи, поверхности тела и обратно пропорциональна его теплоемкости (первая теорема Кондратьева [Л. 76]).

В уравнении (3-93) множитель $\Psi = \bar{\theta}_F/\bar{\theta}_v$ называется коэффициентом неравномерности распределения температуры в теле и зависит от условий охлаждения на поверхности тела. Для вы-

яснения характера зависимости коэффициента Ψ от числа Bi , учитывающего условия протекания процесса на поверхности, рассмотрим два предельных случая:

а) $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$)

Как было сказано, эти условия соответствуют внешней задаче, когда распределение температуры в теле зависит от его размеров и физических свойств и, следовательно, усредненные по поверхности и объему температуры будут одинаковы: $\bar{\vartheta}_F = \bar{\vartheta}_v$ (рис. 3-8). Коэффициент неравномерности распределения температуры в теле



$$\Psi = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_v} = 1.$$

б) $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$)

При этих условиях задача становится внутренней и процесс охлаждения определяется только размерами тела и его физическими свойствами.

В силу большой интенсивности теплообмена температура на поверхности тела принимает постоянное значение, равное температуре окружающей среды (рис. 3-7). Коэффициент неравномерности распределения температуры

$$\Psi = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_v} = 0.$$

Из сказанного следует, что Ψ будет изменяться от нуля до единицы (рис. 3-21).

При $Bi \rightarrow \infty$ или, что то же, $\alpha \rightarrow \infty$, темп охлаждения m становится прямо пропорциональным коэффициенту температуропроводности тела a , m^2/c (вторая теорема Кондратьева [Л. 76]):

$$a = Km_{\infty}. \quad (3-94)$$

Коэффициент пропорциональности K зависит только от геометрической формы и размеров тела. Докажем это на примере охлаждения однородной безграничной пластины. Напомним, что

$$m = \frac{\mu^2 a}{i^2 \theta_0},$$

откуда

$$\mu = l_0 \sqrt{\frac{m}{a}}. \quad (3-95)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для безграничной пластины

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi}.$$

При $Bi \rightarrow \infty$ имеем $\operatorname{ctg} \mu \rightarrow 0$, а μ стремится к своему предельному значению $\pi/2$; при $Bi \rightarrow 0$ $\operatorname{ctg} \mu \rightarrow \infty$ и μ устремляется к нулю.

Следовательно, величина μ для пластины во всем диапазоне значений чисел Bi изменяется от нуля до своего предельного значения, равного $\pi/2$ (рис. 3-22). Для тел другой геометрической формы имеют место свои пределы изменения величины μ .

Так как при $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) при охлаждении бесконечной однородной пластины можно принять $\mu = \pi/2$, то из уравнения (3-95) получаем:

$$m_{\infty} = \left(\frac{\pi}{2l_0} \right)^2 a. \quad (3-96)$$

Напомним, что для пластины характерным линейным размером является половина ее толщины, т. е. $l_0 = \delta$. Тогда из уравнения (3-96) получаем:

$$a = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2} m_{\infty} = Km_{\infty},$$

где $K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2}$ — коэффициент пропорциональности для безграничной пластины, который определяется только формой и геометрическими размерами.

Коэффициенты пропорциональности для тел других геометрических форм [Л. 76]:

для шара

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r_0} \right)^2};$$

для параллелепипеда

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3} \right)^2};$$

для цилиндра конечной длины

$$K = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}.$$

На основе теории регулярного режима разработаны различные экспериментальные методики определения теплофизических характеристик разных материалов [Л. 139, 142]. При определении физических параметров тела поступают следующим образом.

Для определения коэффициента температуропроводности используют a -калориметр, имеющий форму цилиндра или шара. Создают условия, близкие к $a \rightarrow \infty$, измеряют изменение избыточной температуры во времени и строят зависимость в полулогарифмических координатах (рис. 3-23). Тогда

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Из уравнения $a = Km_{\infty}$ находят коэффициент температуропроводности.

Для определения коэффициента теплопроводности выбирают λ -калориметр. Обычно калориметр строят в виде шара. Сущность метода заключается в том, что создают условия охлаждения, когда коэф-

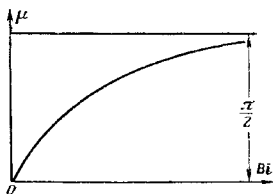


Рис. 3-22. Зависимость $\mu = j_1(Bi)$.

коэффициент теплоотдачи α остается конечной величиной, и при этих условиях определяется темп охлаждения описанным выше способом. Далее из характеристического уравнения, которое для шара имеет вид

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \mu} = -\frac{\mu}{\operatorname{Bi} - 1}, \quad (3-97)$$

находят коэффициент теплопроводности.

Напомним, что для шара характерным линейным размером является его радиус r_0 ; величина $\mu = r_0 \sqrt{m/a}$. Тогда уравнение (3-97) принимает вид:

$$\operatorname{Bi} - 1 = -r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \operatorname{ctg} \left(r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \right);$$

тогда

$$\lambda = \frac{\bar{\alpha} r_0}{1 - r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \operatorname{ctg} \left(r_0 \sqrt{\frac{m}{a}} \right)}; \quad (3-98)$$

здесь λ измеряется в Вт/(м·К).

В уравнении (3-98) неизвестная величина α определяется на эталонном калориметре, изготовленном из материала с известным коэффициентом теплопроводности.

Мы рассмотрели метод регулярного теплового режима для условий, когда температура среды постоянная ($t_{\text{ж}} = \text{const}$) и который Г. М. Кондратьев назвал регулярным режимом первого рода.

В последние годы получили развитие и широкое распространение методы регулярного режима для случаев, когда температура среды — линейная функция времени ($t_{\text{ж}} = t_{\text{ж}0} + b\tau$) и температура среды — периодическая функция времени $t_{\text{ж}} = t_{\text{ж}0} + t_m \cos \nu \tau$ (где ν — частота колебаний, t_m — амплитуда колебания температуры среды). Эти два случая получили название методов регулярного режима второго и третьего родов.

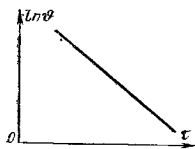


Рис. 3-23. К определению темпа охлаждения m .

А. В. Лыков в монографии [Л. 111] показал, что регуляризация кинетики нагревания тела происходит не только по температурным полям, но и по потокам теплоты. Поэтому при нагревании нет надобности различать регулярные режимы первого, второго и третьего родов. В качестве общего свойства теплового регулярного режима можно принять соотношение

$$-\frac{d\bar{t}}{d\tau} = m(t_{\text{ж}} - \bar{t}), \quad (3-99)$$

где $\bar{t}$ — средняя по объему тела температура; $t_{\text{ж}}$ — температура среды; m — коэффициент пропорциональности, называемый темпом нагревания (охлаждения).

Из соотношения (3-99) следует, что скорость нагревания тела в стадии регулярного теплового режима $dt/d\tau$ пропорциональна разности температур среды и средней по объему тела, причем коэффициент пропорциональности m определяется не только характерными размерами тела, физическими свойствами и условиями теплообмена на поверхности, но

и характером изменения температуры среды. С подобным изложением приведенного обобщенного метода можно познакомиться в указанной монографии А. В. Лыкова.

Теория регулярного режима может быть применена при решении таких практических задач, как определение времени прогрева (охлаждения) тел, определение теплофизических параметров вещества, коэффициента теплоотдачи α , коэффициента излучения σ и термических сопротивлений. Достоинство метода заключается в простоте техники эксперимента, достаточной точности получаемых результатов и малой продолжительности эксперимента.

3-11. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В настоящее время существует много различных приближенных методов расчета теплопроводности; которые приводят к удовлетворительным для инженерной практики результатам. Приближенные методы решения задач чаще всего применяются в случае, когда точные аналитические методы расчета затруднительны. Рассмотрим некоторые из этих методов.

а) Численный метод

Аналитические решения, полученные путем непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, дают возможность вычислить температуру в любой точке данной системы. В противоположность этому в основу численного метода положено уравнение в форме конечных разностей, с помощью которого вычисляем температуру в некоторых, заранее выбранных точках данной системы. Это равносильно математическим приемам приближенного интегрирования. Следует отметить, что если получение точного аналитического решения связано с трудностью удовлетворения граничных условий, которые не всегда осуществимы, то при помощи численного метода всегда возможно, по крайней мере приближенно, удовлетворить граничным условиям конкретной задачи.

Из численных методов решения задач теплопроводности в настоящее время наиболее ценным и широко используемым является метод конечных разностей.

Сущность метода заключается в том, что в дифференциальном уравнении производные искомой функции заменяются приближенными соотношениями между конечными разностями в отдельных узловых точках температурного поля. В результате такой замены получаем уравнение в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению простых алгебраических операций. Расчетное соотношение приводится к виду, где будущая температура в рассматриваемой узловой точке является функцией времени, настоящей температуры в рассматриваемой точке и настоящей температуры в соседних точках. Такие уравнения составляются для всех узловых точек рассматриваемой области, включая и граничные. В результате получаем замкнутую систему алгебраических уравнений. Ввиду однотипности вычислений при решении такой системы представляется широкая возможность для использования современной вычислительной техники.

Для получения расчетных формул при численном интегрировании в настоящее время широко пользуются методом тепловых балансов и математическими операциями при замене в дифференциальных уравнениях производных функции конечными разностями.

В качестве конкретного примера получим расчетную формулу для численного интегрирования одномерной нестационарной задачи методом тепловых балансов. Пусть в этом случае процесс теплопроводности описывается уравнением

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3-100)$$

Первым шагом численного метода расчета является разбиение данной системы на соответствующее количество небольших объемов и присвоение номера центральным точкам каждого из этих объемов. Предполагается, что термические свойства каждого такого объема сосредоточены в центральной узловой точке. Передача теплоты между узловыми точками осуществляется через условные теплопроводящие стержни.

В нестационарном состоянии в каждой узловой точке не только происходит подвод или отвод теплоты, но и изменяется внутренняя энергия.

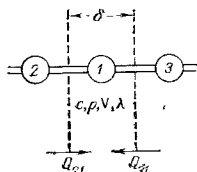


Рис. 3-24. Разбиение и числовая сетка для нестационарной одномерной задачи.

Изменение внутренней энергии зависит от изменения температуры в узловой точке во времени, от теплоемкости элементарного объема, который она представляет, и плотности вещества. Такой подход к вычислению температуры носит название метода приближенной численной итерации.

Рассмотрим применение метода к расчету температурного поля в плоской стенке [уравнение (3-100)]. Для знакомства с применением численного метода к другим задачам теплопроводности следует обратиться к специальной литературе [Л. 19, 31, 111, 204, 209].

Разбиваем стенку на элементарные объемы $V = \delta \times \delta \times 1 = \delta^2$ (рис. 3-24). Полагаем, что удельная теплоемкость c и коэффициент теплопроводности λ в пределах элементарного участка постоянны. Очевидно, количество теплоты, подводимое стержнем к узловой точке, определится по закону Фурье: $q = -\lambda(dt/dx)$. Если расстояние δ достаточно мало, то можно выразить q через конечные разности, т. е. $q = -(\lambda/\delta)\Delta t$, где Δt — разность температур между смежными узловыми точками. Общее количество теплоты, проводимое стержнем за конечное приращение времени $\Delta \tau$, равно:

$$Q = q\Delta \tau F = -\frac{\lambda}{\delta} \Delta t \Delta \tau F, \quad (3-101)$$

где для одномерной системы проводящая площадь $F = \delta \times 1$, м².

Изменение внутренней энергии в рассматриваемой узловой точке за время $\Delta \tau$

$$U = c\rho V\Delta t' = c\rho V(t' - t), \quad (3-102)$$

где t — температура в данной узловой точке в момент времени τ ; t' — температура в момент времени $\tau + \Delta \tau$; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность вещества; V — элементарный объем.

На основании сказанного уравнение теплового баланса для узловой точки 1 (рис. 3-24) будет иметь вид:

$$Q_{21} + Q_{31} = \frac{c\rho V}{\Delta \tau} (t'_1 - t_1)$$

или

$$\frac{\lambda}{\delta} (t_2 - t_1) \delta \cdot 1 + \frac{\lambda}{\delta} (t_3 - t_1) \delta \cdot 1 = \frac{c\rho V}{\Delta\tau} (t'_1 - t_1).$$

Решая последнее уравнение относительно неизвестной температуры t'_1 , получаем:

$$t'_1 = \frac{\Delta\tau\lambda}{c\rho V} \left(t_2 + t_3 + \frac{1}{\frac{\Delta\tau\lambda}{c\rho V}} - 2t_1 \right). \quad (3-103)$$

Если учесть, что $\lambda/c\rho = a$ — коэффициент температуропроводности вещества, $V = \delta^2$ и $\Delta\tau a / \delta^2 = Fo$ — число Фурье, то уравнение (3-103) принимает вид:

$$t'_1 = Fo \left[(t_2 + t_3 + t_1) \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]. \quad (3-104)$$

Уравнение (3-104) является основой численного метода расчета нестационарной теплопроводности. Для расчета температуры t'_1 по (3-104) необходимо выбрать определенное значение Fo . При этом важно помнить, что выбор Fo ограничен условием

$$Fo \leq \frac{1}{2}. \quad (3-105)$$

Как показывает анализ, только при этом обеспечивается устойчивость уравнения (3-104). Если же принять $Fo > 1/2$, т. е. нарушить условие (3-105), то изменение температуры в процессе расчета приобретает беспорядочный скачкообразный характер и расчет перестает быть верным. Поэтому при выборе промежутков δ и $\Delta\tau$ необходимо заботиться о том, чтобы условие (3-105) выполнялось. Если выбрать δ и $\Delta\tau$ из условий $Fo = 1/2$, то уравнение (3-104) принимает вид:

$$t'_1 = \frac{t_2 + t_3}{2}. \quad (3-106)$$

Формула (3-106) широко используется при графическом решении нестационарных задач теплопроводности. При этом будущая температура данной узловой точки не зависит от ее настоящей.

При других значениях Fo уравнение (3-104) приводит к более сложным результатам:

$$Fo = \frac{1}{3}, t'_1 = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3) \quad (3-107)$$

и

$$Fo = \frac{1}{4}, t'_1 = \frac{1}{4} (t_3 + t_2 + 2t_1). \quad (3-108)$$

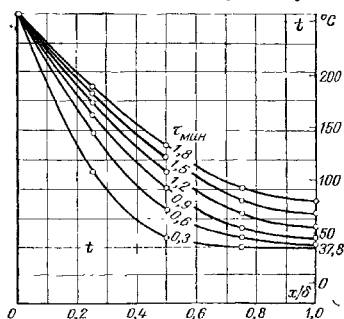


Рис. 3-25. Сравнения численных расчетов с точным решением распределения температур ($Fo=1/4$) в плоской стенке. Линии соответствуют аналитическому решению, точки — численному расчету.

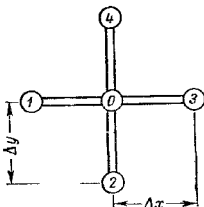


Рис. 3-26. Сетка узловых точек для двухмерной нестационарной задачи.

Из уравнений (3-106) — (3-108) следует, что уменьшение значений Fo увеличивает число вычислений и густоту сетки, однако при этом повышается точность вычислений.

Для случая, когда одна из поверхностей пластины изолирована и на ней не происходит теплообмена, а на другой коэффициент теплоотдачи $\alpha \rightarrow \infty$ уже при выборе $Fo = 1/4$ приближенный численный метод практически не отличается от точного расчета. Сравнение таких расчетов приведено на рис. 3-25 [Л. 204]. Пользуясь изложенным методом, можно получить исходное уравнение для численного расчета и для других задач нестационарной теплопроводности. В частности, для двухмерной задачи после разбиения тела на элементарные объемы с размерами ячеек $\Delta x = \Delta y = \delta$ схема узловых точек будет выглядеть, как показано на рис. 3-26. Составляя уравнение теплового баланса для центральной точки, получаем:

$$t'_0 = Fo \left[t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_0 \left(\frac{1}{Fo} - 4 \right) \right], \quad (3-109)$$

где t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 — температура в соответствующей узловой точке в момент времени τ ; t'_0 — температура в центральной точке в момент времени $\tau + \Delta\tau$.

Для этой двухмерной задачи промежутки δ и $\Delta\tau$ должны выбираться из условия

$$Fo \leq \frac{1}{4} \quad (3-110)$$

аналогично условию (3-105) для одномерной задачи.

При значении $Fo = 1/4$ уравнение (3-109) принимает вид:

$$t'_0 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} \quad (3-111)$$

При этом будущая температура узловой точки не зависит от ее настоящей.

Для замены производных функции в дифференциальном уравнении разностными отношениями можно воспользоваться математическими операциями. Такой подход не является более строгим, но он дает возможность решать задачи при разнообразных краевых условиях, оценить погрешность перехода от дифференциального уравнения к уравнению в конечных разностях и более просто провести анализ условий устойчивости и сходимости решения.

Получим приближенную замену первой и второй производ-

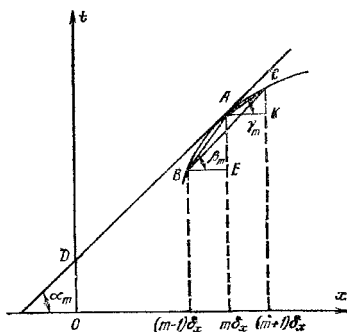


Рис. 3-27. К выводу формул для замены первой и второй производной разностными отношениями.

ной через разностные отношения некоторой функции $t=f(x)$, где под x можно понимать любую независимую переменную.

Прежде всего интервал изменения функции разобьем на одинаковые участки δ_x . Каждая точка будет иметь свою абсциссу, отличающуюся на величину δ_x , иначе говоря, координату точки x_m заменим $m\delta_x$ ($m=1, 2, 3, \dots$). Отметим на кривой $t=f(x)$ точки $A(t_m, m\delta_x)$, $B(t_{m-1}, (m-1)\delta_x)$ и $C(t_{m+1}, (m+1)\delta_x)$.

Касательная в точке $A(t_m, m\delta_x)$ образует угол α_m с положительным направлением оси абсцисс, тогда производная функции для рассматриваемой точки $A(t_m, m\delta_x)$

$$t'_m = \operatorname{tg} \alpha_m. \quad (3-112)$$

Если интервал разбиения δ_x — величина малая, то с достаточным приближением угол α_m можно заменить углами β_m или γ_m (см. рис. 3-27), образованными секущими BA и AC . При этом производная в точке $A(t_m, m\delta_x)$ запишется следующим образом:

$$t'_m \approx \operatorname{tg} \beta_m = \frac{AE}{BE} = \frac{t_m - t_{m-1}}{\delta_x} \quad (3-113)$$

или

$$t'_m \approx \operatorname{tg} \gamma_m = \frac{CK}{AK} = \frac{t_{m+1} - t_m}{\delta_x}. \quad (3-114)$$

Если угловой коэффициент касательной AD заменить на угловой коэффициент секущей BC , получим выражение для производной в точке A следующего вида:

$$t'_m \approx \frac{t_{m+1} - t_{m-1}}{2\delta_x}. \quad (3-115)$$

Полученные выражения (3-113) — (3-115) равноценны для замены первой производной функции разностными отношениями и называются соответственно: предыдущее, последующее и симметричное разностные отношения.

Если заменить кривую на участке BC ломаной BAC , имеющей в точке A два наклона, получим выражение для второй производной функции $t=f(x)$:

$$t''_m = \frac{1}{\delta_x} \left(\frac{t_{m+1} - t_m}{\delta_x} - \frac{t_m - t_{m-1}}{\delta_x} \right) = \frac{1}{\delta_x^2} (t_{m+1} + t_{m-1} - 2t_m). \quad (3-116)$$

Приведенные формулы (3-114) — (3-116) наиболее часто используются при численном интегрировании уравнений теплопроводности. Используем полученные формулы для преобразования дифференциального уравнения к конечно-разностной форме. Преобразование проведем на примере одномерной нестационарной задачи теплопроводности без-

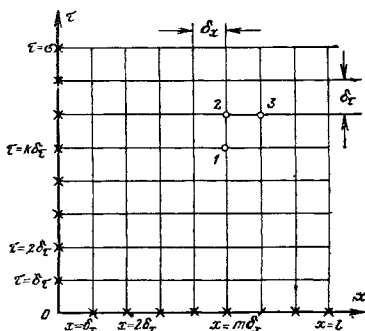


Рис. 3-28 К получению расчетной сетки и составлению уравнений для узловых точек.

граничной стенки [уравнение (3-100)]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Так как температура $t(x, \tau)$ является функцией двух переменных, удобно выбрать прямоугольную сетку. Весь интервал изменения x от 0 до l по оси абсцисс разобьем на одинаковые интервалы δ_x , а отрезок времени от $\tau=0$ до $\tau=\Phi$ разделим на равномерные интервалы δ_τ (рис. 3-28). Восстановленные перпендикуляры к координатным осям в точках деления при пересечении образуют расчетные узловые точки. Тогда температура для узловой точки l с координатами $x=m\delta_x$ и $\tau=k\delta_\tau$ запишется так:

$$t_1 = t_1(m\delta_x, k\delta_\tau) = t_{m,k}.$$

Для точки 2 с координатами $x=m\delta_x$ и $\tau+k\delta_\tau=(k+1)\delta_\tau$ имеем:

$$t_2 = t_2[m\delta_x, (k+1)\delta_\tau] = t_{m,k+1};$$

для точки 3 с координатами $x+\delta_x=(m+1)\delta_x$ и $\tau+k\delta_\tau=(k+1)\delta_\tau$ получим $t_3 = t_3[(m+1)\delta_x, (k+1)\delta_\tau] = t_{m+1,k+1}$ и т. д.

Заменим в точке l ($m\delta_x, k\delta_\tau$) частные производные в уравнении теплопроводности разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{m,k} = \frac{1}{\delta_\tau} (t_{m,k+1} - t_{m,k}) + \varepsilon_1; \quad (3-117)$$

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{m,k} = \frac{1}{\delta_x^2} (t_{m+1,k} - 2t_{m,k} + t_{m-1,k}) + \varepsilon_2. \quad (3-118)$$

В этих выражениях ε_1 и ε_2 — остаточные члены, учитывающие переход от производных функций к разностным отношениям. Можно показать, что эти члены стремятся к нулю при стремлении к нулю интервалов разбиения δ_x и δ_τ . Дифференциальное уравнение в конечно-разностной форме запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\delta_\tau} (t_{m,k+1} - t_{m,k}) + \varepsilon_1 = \frac{a}{\delta_x^2} \left[\frac{t_{m+1,k} - 2t_{m,k} + t_{m-1,k}}{\delta_x^2} + \varepsilon_2 \right]. \quad (3-119)$$

Решая уравнение (3-119) относительно будущей температуры $t_{m,k+1}$ в рассматриваемой точке, получаем:

$$t_{m,k+1} = \frac{a\delta_\tau}{\delta_x^2} [t_{m+1,k} + t_{m-1,k}] - \left(\frac{2a\delta_\tau}{\delta_x^2} - 1 \right) t_{m,k} + (a\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \delta_\tau. \quad (3-120)$$

Очевидно, остаточный член $(a\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\delta_\tau$ в уравнении (3-120) будет стремиться к нулю при стремлении к нулю δ_τ . Следовательно, чем более мелкие интервалы выбраны для сетки узловых точек, тем меньше ошибка перехода от дифференциального уравнения к уравнению в конечных разностях. Ошибки ε_1 и ε_2 можно оценить, воспользовавшись разложением функции t в ряд Тейлора.

Отбрасывая остаточный член в уравнении (3-120) и обозначая приближенное значение величины $t_{m,k}$ через $T_{m,k}$, получим приближенное решение для будущей температуры в узловой точке ($m\delta_x, k\delta_\tau$):

$$T_{m,k+1} = \frac{a\delta_\tau}{\delta_x^2} (T_{m+1,k} + T_{m-1,k}) - \left(\frac{2a\delta_\tau}{\delta_x^2} - 1 \right) T_{m,k}. \quad (3-121)$$

В уравнении (3-121) комплекс $a\delta_x/\delta_x^2 = Fo$ имеет смысл числа Фурье для элементарного объема расчетной области, тогда

$$T_{m,k+1} = Fo(T_{m+1,k} + T_{m-1,k}) - (2Fo - 1)T_{m,k}. \quad (3-121')$$

Если нам известно распределение температуры в расчетной области в какой-либо (например, начальный) момент времени, то, пользуясь системой уравнений полученного типа, можно рассчитать температуру в узловых точках для последующего момента времени $\tau + \delta_\tau$. Температура в узловых точках, находящихся на границах области интегрирования, известна из граничных условий.

Из уравнения (3-121) следует, что значения расчетных температур зависят от числа Fo , т. е. от способа разбиения пространственно-временной области. Выбирая интервалы разбиения δ_x и δ_τ , мы можем получить любое значение числа Fo . Однако, как показывает анализ, решение устойчиво не при любом значении Fo , а следовательно, выбор величин δ_x и δ_τ не произволен. Анализ отклонения числового расчета от точного решения показывает, что устойчивость расчета для рассматриваемой одномерной задачи обеспечивается только при том условии, когда в уравнении (3-120')

$$(2Fo - 1) \leq 0. \quad (3-122)$$

Выражение (3-122) является основным условием, которое ограничивает произвольный выбор интервалов сетки δ_x и δ_τ . Точно такое же условие обеспечения устойчивости численного интегрирования было получено методом тепловых балансов (выражение (3-105)).

Нетрудно получить конечно-разностное выражение и для двухмерной нестационарной задачи теплопроводности $t(x, y, \tau)$. Дифференциальное уравнение для такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right). \quad (a)$$

В этом случае температуре для любой узловой точки должно присваиваться три индекса $t_{m,n}^k$, где m, n — индексы координат, k — индекс времени. Разобьем область интегрирования на одинаковые интервалы. Тогда, пользуясь ранее полученными соотношениями, для узловой точки с координатами $(m\delta_x, n\delta_y, k\delta_\tau)$ получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)_{m,n}^k &= \frac{1}{\delta_\tau} (t_{m,n}^{k+1} - t_{m,n}^k) + \varepsilon_1; \\ \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)_{m,n}^k &= \frac{1}{\delta_x^2} (t_{m+1,n}^k + t_{m-1,n}^k - 2t_{m,n}^k) + \varepsilon_2; \\ \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)_{m,n}^k &= \frac{1}{\delta_y^2} (t_{m,n+1}^k + t_{m,n-1}^k - 2t_{m,n}^k) + \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3-123)$$

Подставляя полученные выражения для производных (без остаточных членов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) в дифференциальное уравнение (a), получаем приближенное выражение для будущей температуры в точке $(m\delta_x, n\delta_y, k\delta_\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_\tau} (T_{m,n}^{k+1} - T_{m,n}^k) &= \frac{a}{\delta_x^2} (T_{m+1,n}^k + T_{m-1,n}^k - 2T_{m,n}^k) + \\ &+ \frac{a}{\delta_y^2} (T_{m,n+1}^k + T_{m,n-1}^k - 2T_{m,n}^k). \end{aligned} \quad (3-124)$$

Полагая $\delta_x = \delta_y$ и решая (3-124) относительно будущей температуры в рассматриваемой узловой точке, получаем:

$$T_{m,n}^{k+1} = \frac{a\delta_\tau}{\delta^2_x} (T_{m+1,n}^k + T_{m-1,n}^k + T_{m,n+1}^k + T_{m,n-1}^k) \left(\frac{4a\delta_\tau}{\delta^2_x} - 1 \right) T_{m,n}^k. \quad (3-124')$$

Обозначая, как и в предыдущем случае, $a\delta_\tau/\delta^2_x = Fo$, выражение (3-124') приводим к виду

$$T_{m,n}^{k+1} = Fo (T_{m+1,n}^k + T_{m-1,n}^k + T_{m,n+1}^k + T_{m,n-1}^k) - (4Fo - 1) T_{m,n}^k. \quad (3-124'')$$

Нетрудно видеть, что для такой двухмерной задачи решение будет устойчивым только при условии

$$(4Fo - 1) \leq 0. \quad (3-125)$$

Если принять число $Fo = 1/4$, то уравнение (3-124) примет вид:

$$T_{m,n}^{k+1} = \frac{T_{m+1,n}^k + T_{m-1,n}^k + T_{m,n+1}^k + T_{m,n-1}^k}{4}. \quad (3-126)$$

Отсюда видно, что будущая температура в рассматриваемой точке не зависит от настоящей в этой точке и определяется настоящими температурами соседних точек.

Аналогичные расчетные соотношения для вычисления температур в узловых точках можно получить и для трехмерной задачи.

б) Принцип стабильности теплового потока

Существует ряд приближенных решений задачи о распространении теплоты в телах произвольной формы. Рассмотрим метод, базирующийся на принципе стабильности теплового потока. Если на поверхности твердого тела оставить тепловой поток постоянным, но изменить условия охлаждения на небольшом участке поверхности, то это вызовет существенное местное изменение температурного поля. Однако в точках, достаточно удаленных от места возмущения, изменение температурного поля будет ничтожным [Л. 22].

Из сказанного следует, что деформация поверхности тела будет оказывать существенное влияние на температурное поле только в точках, близких к поверхности, а в удаленных от поверхности точках характер температурного поля будет оставаться неизменным.

Используя эти свойства стабильности теплового потока, расчет теплопроводности в телах сложной геометрической конфигурации можно свести к расчету процесса нагрева (охлаждения) тел трех классических форм: одномерной плоской пластины — тело первого класса, длинного круглого цилиндра — тело второго класса и шара — тело третьего класса. При решении задачи прежде всего необходимо рациональным образом определить класс, к которому надо отнести рассматриваемое тело. Затем произвести сравнение температурного поля с температурным полем основного тела этого класса.

Согласно принципу стабильности должно выполняться условие

$$\alpha(t_c - t_{ж}) F d\tau = \alpha_0(t_{c0} - t_{ж0}) F_0 d\tau_0, \quad (3-127)$$

где α — среднее по поверхности значение коэффициента теплоотдачи, Вт/(м²·К); t_c — средняя температура поверхности тела, °С; $t_{ж}$ — температура окружающей среды, °С; F — поверхность охлаждения, м²; τ — время, с.

Величина без индекса «0» относится к рассматриваемому телу, а с индексом «0» — к основному телу соответствующего класса. При соблюдении условий (3-127) расчет температурного поля рассматриваемого тела можно свести к расчету температурного поля эквивалентного основного тела соответствующего класса (пластины, цилиндра, или шара). Последнее предполагает, что внешняя конфигурация тела будет существенно влиять на температурное поле только в точках, близких к поверхности. Температурные поля вдали от поверхности становятся сопоставимыми с температурными полями в основных телах соответствующего класса.

Если в уравнении (3-127) обозначить:

$$t_c - t_{ж} = \vartheta; \quad t_{c0} - t_{ж0} = \vartheta_0$$

и при этом принять

$$\vartheta = \vartheta_0 \text{ и } d\tau = d\tau_0,$$

то уравнение (3-127) принимает вид:

$$\alpha F = \alpha_0 F_0,$$

или

$$\alpha_0 = \alpha \frac{F}{F_0} = \alpha A, \quad (3-128)$$

где

$$A = \frac{F}{F_0}, \quad (3-129)$$

Безразмерный множитель A характеризует размер поверхности рассматриваемого тела, выраженный через поверхность основного тела. Величину A называют критерием формы.

Уравнение (3-128) выражает количественные требования, которые необходимо выполнить для обеспечения эквивалентности температурных полей обоих тел.

При расчете температурных полей в формулы для основных тел вместо α подставляется величина α_0 , вычисленная по уравнению (3-128), и в качестве определяющего линейного размера l_0 берется эквивалентный размер для тела соответствующего класса. При этом число Bi имеет вид:

$$Bi = \frac{\alpha A l_0}{\lambda} = \frac{\alpha_0 l_0}{\lambda}. \quad (3-130)$$

Для тел первого класса:

определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_1 = \frac{V}{2F_{ср}}, \quad (3-131)$$

где V — объем тела, m^3 ; $F_{ср}$ — площадь средней плоскости тела, m^2 ; критерий формы

$$A = A_1 = \frac{F}{F_{ср}}, \quad (3-132)$$

где F — площадь одной боковой поверхности стенки, m^2 .

Для тел второго класса:

определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_2 = \sqrt{\frac{F_{сеч}}{\pi}}, \quad (3-133)$$

где $F_{сеч}$ — площадь поперечного сечения тела;

критерий формы

$$A = A_2 = \frac{P}{\sqrt{4\pi F_{\text{сеч}}}} = \frac{P}{P_0}, \quad (3-134)$$

где P — периметр поперечного сечения рассматриваемого тела, м; P_0 — периметр поперечного сечения эквивалентного круглого цилиндра, м.

Для тел третьего класса определяющий эквивалентный линейный размер

$$l_0 = X_3 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}. \quad (3-135)$$

Если в уравнении (3-129) величину поверхности эквивалентного шара выразить через его объем V , равный объему рассматриваемого тела, то критерий формы

$$A = A_3 = \frac{F}{\sqrt[3]{36\pi V^2}}. \quad (3-136)$$

Описанный метод расчета температурных полей дает удовлетворительные результаты при малой и средней интенсивности теплообмена на поверхности тела.

При большой интенсивности теплообмена ($Bi \gg 1$) вместо уравнения (3-128) используют выражение

$$\lambda_0 = \lambda \frac{F}{F_0} = \lambda A. \quad (3-137)$$

В дальнейшем при выполнении расчета могут быть использованы ранее полученные формулы.

На рис. 3-29 и 3-30 изображены кривые охлаждения для оси бруса квадратного сечения и центра куба, охлаждающихся в условиях

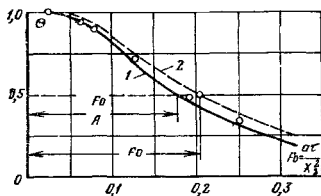


Рис. 3-29. Кривая охлаждения оси тел второго класса.

Выпукло: 1 — кривая охлаждения бруса квадратного сечения ($A_2=1,13$); 2 — кривая охлаждения основного тела — круглого цилиндра ($A_2=1$).

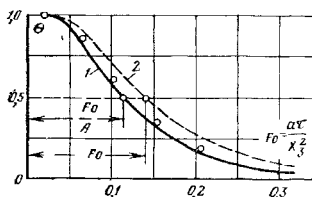


Рис. 3-30. Кривая охлаждения центра тел третьего класса.

Выпукло: 1 — кривая охлаждения куба ($A_3=1,24$); 2 — кривая охлаждения основного тела — шара ($A_3=1$).

большой интенсивности ($Bi \gg 1$). Сплошные кривые отвечают расчету по методу эквивалентных тел. Нанесенные на рис. 3-29 и 3-30 точки получены на основе точного решения задачи. Совпадение результатов удовлетворительное [Л. 22].

Применимость теории определяется значением критерия A . Точность расчетов возрастает при стремлении критерия A к единице.

3-12. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ АНАЛОГИЙ

К числу экспериментальных методов исследования процессов теплопроводности относится метод аналогий. В методе аналогий исследование тепловых явлений заменяется изучением аналогичных явлений, так как часто их экспериментальное исследование оказывается проще осуществить, чем непосредственное исследование тепловых процессов.

Сходство аналогичных явлений состоит в одинаковом характере протекания всех процессов. Математически аналогичные явления описываются формально одинаковыми дифференциальными уравнениями и условиями однозначности. Однако физическое содержание и размерность входящих в них величин различны.

Электротепловая аналогия. Явления теплопроводности и электропроводности описываются следующими уравнениями:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n_\tau} dF_\tau; \quad (3-138)$$

$$dI = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n_\sigma} dF_\sigma, \quad (3-139)$$

где dQ и dI — элементарные потоки теплоты и электричества, прошедшие в единицу времени через площадки dF_τ , dF_σ в направлении нормалей n_τ и n_σ ; t и u — температура и электрический потенциал; λ и σ — коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Применение указанных уравнений к случаю двухмерной задачи при стационарных условиях протекания процессов при независимости физических свойств (λ , σ) от температуры приводит к следующим дифференциальным уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_\tau^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y_\tau^2} = 0; \quad (3-140)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\sigma^2} = 0. \quad (3-141)$$

Уравнения для температуры и электрического потенциала имеют одинаковую структуру. Аналогичные явления должны протекать в геометрически подобных системах. Граничные условия могут быть заданы различными способами. Допустим, что они задаются в виде следующих уравнений, соответствующих граничным условиям третьего рода (§ 1-6):

$$-\lambda \operatorname{grad} t = \alpha \Delta t$$

или

$$-\operatorname{grad} t = \frac{\Delta t}{\lambda/\alpha} = \frac{\Delta t}{l_\tau}, \quad l_\tau = \frac{\lambda}{\alpha}$$

и

$$-\operatorname{grad} u = \frac{\Delta u}{l_\sigma}. \quad (3-142)$$

Для установления количественной связи между аналогичными физическими величинами (аналогами) математические описания приводят к безразмерной форме. Для этого в качестве масштаба для температурного напора можно принять некоторую величину Δt_0 ; для электрического потенциала сходственный масштаб будет Δu_0 ; для линейных размеров — сходственные линейные отрезки l_{t0} и l_{u0} . Индексы «т» и «э»

по-прежнему отмечают величины, относящиеся к тепловым и электрическим явлениям.

Обозначим значения величин, выраженных в относительном масштабе,

$$x_T/l_{0T}=X_T; \quad y_T/l_{0T}=Y_T; \quad l_T/l_{0T}=L; \quad \Delta t/\Delta t_0=\Theta;$$

отсюда получаем соотношения

$$x_T=l_{0T}X_T; \quad y_T=l_{0T}Y_T; \quad l_T=l_{0T}L; \quad \Delta t=\Delta t_0\Theta.$$

Аналогичные соотношения имеют место для величин, относящихся к электрическому явлению. После подстановки этих соотношений дифференциальные уравнения (3-140) и (3-141) принимают безразмерный вид:

$$\frac{\Delta t_0}{l_{0T}^2} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_T^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y_T^2} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_T^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y_T^2} = 0; \quad (3-143)$$

$$\frac{\Delta u_0}{l_{0\phi}^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X_T^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_T^2} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_T^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_T^2} = 0. \quad (3-144)$$

Тождественность приведенных уравнений имеет место при любом выборе сходственных масштабов для температуры и электрического потенциала.

После приведения к безразмерному виду уравнения, описывающие граничные условия принимают форму:

$$-\text{grad } \Theta = \frac{\Theta}{L_T}; \quad -\text{grad } U = \frac{U}{L_\phi}.$$

Эти уравнения тождественно одинаковы, а следовательно, и решения безразмерных дифференциальных уравнений теплопроводности и электропроводности тождественно одинаковы, если выполняется условие

$$L_T = L_\phi, \quad (3-145)$$

или

$$\frac{l_T}{l_{0T}} = \frac{l_\phi}{l_{0\phi}}.$$

Поскольку $l_T = \lambda/a$, получим зависимость для выбора линейных размеров электрических моделей явления:

$$l_\phi = \frac{l_{0\phi}}{l_{0T}} \frac{\lambda}{a}.$$

Если $l_{0\phi} = l_{0T}$, то $l_\phi = \lambda/a$.

Когда $a = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$, то $l_\phi = \text{const}$.

При выполнении условия (3-145) безразмерная температура и безразмерное электрическое напряжение в сходственных точках¹ систем имеют численно одинаковые значения

$$\Theta_1 = U_1 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_0};$$

$$\Theta_2 = U_2 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_0};$$

.....

¹ Точки, координаты которых находятся в соотношениях $x_2 = c_1 x_1$; $y_2 = c_1 y_1$, где $c_1 \rightarrow$ постоянная величина.

Отсюда получаем:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta u_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta u_2} = \dots = \frac{\Delta t_0}{\Delta u_0} = c_{t,u} = \text{const.} \quad (3-146)$$

Соотношение (3-146) показывает, что при указанных условиях распределения температуры и электрического потенциала являются подобными, т. е. имеет место аналогия.

При исследовании нестационарных процессов для одномерных областей исходные дифференциальные уравнения тепло- и электропроводности имеют вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad (3-147)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau_0} = \frac{1}{R_0 C_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad (3-148)$$

где R_0 — электрическое сопротивление на единицу длины; C_0 — электрическая емкость на единицу длины.

Эти величины, как и коэффициент температуропроводности, не должны зависеть от температуры.

Из сравнения уравнений (3-147) и (3-148) следует, что аналогия устанавливается, если выполняется условие

$$a = \frac{1}{R_0 C_0},$$

причем требование (3-145), обусловленное граничными условиями, сохраняет силу и в этом случае.

Изменение теплового потока пропорционально изменению теплоемкости системы и изменению температуры:

$$dQ = C_x \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau_x.$$

Изменение электрического тока пропорционально емкости и изменению напряжения, т. е. выражается аналогичным уравнением:

$$dI = C_0 \frac{\partial u}{\partial \tau_0} d\tau_0.$$

Следовательно, в модели теплоемкости могут быть воспроизведены соответствующими электрическими емкостями.

Рассмотрим примеры осуществления приведенных математических предположек на электрических моделях.

При разработке электрических моделей, имитирующих процессы теплопроводности, применяются два способа. В одном способе электрические модели повторяют геометрию оригинальной тепловой системы и изготавливаются из материала с непрерывной проводимостью. В качестве такого материала может применяться как твердое электропроводящее тело, так и жидкий электролит.

Модели этой группы называются моделями с непрерывными

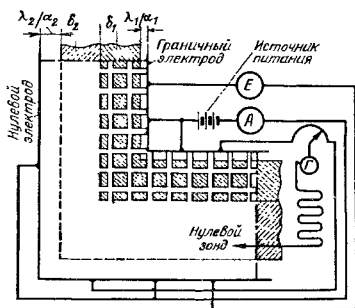


Рис. 3-31. Электрическая модель угла здания.

параметрами процесса. Наряду с ними применяются электрические модели с сосредоточенными параметрами процесса. В них тепловые системы заменяются моделирующими электрическими цепями. Свойства исследуемой системы сосредоточиваются в отдельных узловых точках, расположенных вдоль электрических цепей. Электрические модели с сосредоточенными параметрами применяются для наиболее сложных явлений.

Для изготовления моделей с непрерывными параметрами используются тонкие листовые электропроводящие материалы или электропроводящие слои, нанесенные на стеклянные или какие-либо другие пластинки, из которых вырезается плоский образец, воспроизводящий геометрию исследуемой тепловой области.

На рис. 3-31 показана модель угла стены здания, состоящей из двух слоев разной толщины, характеризующихся разными коэффициентами теплопроводности. Электрическая модель также должна иметь разную толщину слоев и разную их электропроводность. Если, например, теплопроводность внутреннего слоя меньше, чем внешнего, то тогда его электрическое сопротивление соответственно увеличивается за счет отверстий, сделанных в этом слое, или за счет применения электропроводящих листов с большим удельным электрическим сопротивлением. Отсутствие контактного сопротивления между слоями воспроизводится плотным их соединением. Постоянство электрических свойств проводящего листа обеспечивается применением соответствующих материалов.

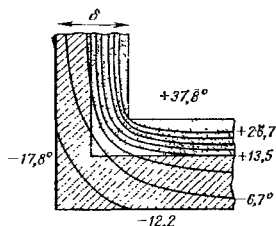


Рис 3-32 Температурное поле внутри угла здания.

Теплопроводность внутреннего слоя меньше, чем внешнего, то тогда его электрическое сопротивление соответственно увеличивается за счет отверстий, сделанных в этом слое, или за счет применения электропроводящих листов с большим удельным электрическим сопротивлением. Отсутствие контактного сопротивления между слоями воспроизводится плотным их соединением. Постоянство электрических свойств проводящего листа обеспечивается применением соответствующих материалов.

Термические сопротивления теплоотдачи на поверхностях исследуемой тепловой системы учитываются путем добавления к электрической модели дополнительных слоев $l_{a1} = \lambda_1 / \alpha_1$ и $l_{a2} = \lambda_2 / \alpha_2$. Поскольку обычно предпосылками являются условия $\lambda = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то и дополнительные слои должны иметь постоянные толщины. Питание модели производится путем подвода электрического тока к граничным электродам от аккумуляторной батареи.

Согласно аналогии напряжение в любой точке электрической модели соответствует температуре в той же точке тепловой системы. Для измерения напряжения используется контактный зонд с нулевым прибором. Отсчет может быть произведен от напряжения в какой-нибудь точке. Этим нулевым напряжением может быть, например, его величина во внутреннем электроде. Температурное поле внутри угла, полученное на описанной электрической модели, представлено на рис 3-32. На нем нанесены изотермы, которые в модели были имитированы эквипотенциальными линиями.

Получить указанное распределение температуры непосредственными измерениями температур весьма затруднительно. Такие измерения потребовали бы закладки значительного количества термопар, наличие которых существенно изменило бы действительное распределение температуры. Кроме того, этот путь отличается значительной трудоемкостью.

Рассмотрим электрическую модель с сосредоточенными параметрами, осуществляемую в виде моделирующей электрической цепи. В этом случае исследуемая тепловая область делится на ряд элементарных объемов. Тем самым исходные дифференциальные уравнения и уравнения, описывающие условия однозначности, заменяются уравнениями в конечных разностях. Соответствующая моделирующая электрическая цепь представляется в виде отдельных электрических сопротивлений, имитирующих свойства элементов тепловой области.

Таким образом, тепловая область, разделенная на несколько элементарных объемов, заменяется электрическим контуром, состоящим из соответствующих сосредоточенных параметров цепи, которые соединяются последовательно.

На рис. 3-33 показана проволочная модель турбинной лопатки. Проволочная модель выполняется в виде квадратной сетки в определенном масштабе. В качестве проволоки может быть использован калиброванный реостатный провод диаметром 0,4—0,5 мм. Проволочная сетка предварительно натягивается на шаблон, имеющий форму турбинной лопатки, а потом соединяется точечной сваркой в местах пересечения проволоки. Значения электрических сопротивлений подбираются так, чтобы они соответствовали термическим сопротивлениям элементов моделируемой тепловой системы, т. е. лопатки.

Граничные термические сопротивления воспроизводятся с помощью проволочных сопротивлений R_b и R_r . Собирающие шины имитируют постоянные температуры газа t_r и охлаждающей воды t_b , циркулирующей в каналах. Потенциалы в этих шинах соответствуют необходимым значениям температур газа и воды. Соединительные провода $СП$ должны иметь пренебрежимо малое электрическое сопротивление. Питание моделирующей цепи производится через делитель напряжения D от аккумуляторной батареи B . Для измерения напряжения в любой точке электрической цепи используются контактный зонд и потенциометр Π .

На рис. 3-34 показано полученное распределение температуры по сечению турбинной лопатки.

Рассмотрим случай теплопроводности при нестационарном режиме. На рис. 3-35 в качестве примера показана стена, состоящая из двух слоев, выполненных из различного материала. Одна сторона стены теплоизолирована. В начальный момент времени температура в стене распределена равномерно. Затем стена мгновенно подвергается воздействию среды с другой температурой, не изменяющейся далее во времени. Требуется воспроизвести это тепловое явление в виде моделирующей

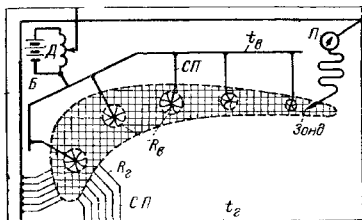
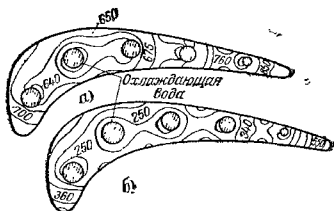


Рис. 3-33. Проволочная модель турбинной лопатки.



щей электрической цепи. Для этого каждый слой стены можно разбить на два слоя. Внутренние термические сопротивления стены тогда представляются в виде четырех сопротивлений:

$$R_{T1} = \frac{\delta_1}{2\lambda_1}; \quad R_{T2} = \frac{\delta_2}{2\lambda_2}; \quad R_{T3} = \frac{\delta_3}{2\lambda_3}; \quad R_{T4} = \frac{\delta_4}{2\lambda_4}.$$

Эти сопротивления моделируются электрическими сопротивлениями:

$$R_{T1} = R_{a1}; \quad R_{T2} = R_{a2}; \quad R_{T3} = R_{a3}; \quad R_{T4} = R_{a4}.$$

Теплоемкости отдельных слоев стены воспроизводятся электрическими емкостями C_1 и C_2 конденсаторов.

Термическое сопротивление поверхности моделируется внешним электрическим сопротивлением R_a .

В результате тепловая система заменяется электрическим контуром с последовательно соединенными сопротивлениями и параллельно включенными емкостями (рис. 3-35, внизу).

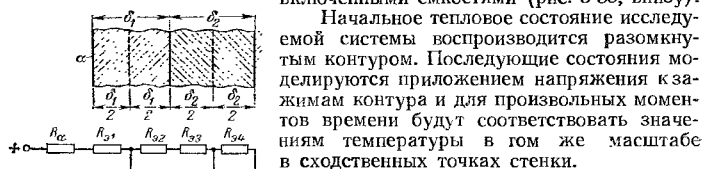


Рис. 3-35 Двухслойная плоская стенка и ее электрическая модель

Начальное тепловое состояние исследуемой системы воспроизводится разомкнутым контуром. Последующие состояния моделируются приложением напряжения к зажимам контура и для произвольных моментов времени будут соответствовать значениям температуры в том же масштабе в сходственных точках стенки.

В настоящее время электрическое моделирование получило большое развитие. Появился ряд установок, предназначенных для решения различных физических задач; эти установки носят характер счетно-решающих устройств. В некоторых из них применяются специальные нелинейные сопротивления, позволяющие моделировать не только граничные условия с конвективным переносом тепла от поверхности, но на случай, когда наряду с конвективной теплоотдачей имеют место и другие виды теплообмена (тепловое излучение). Примером таких установок у нас в стране является электроинтегратор Гутенмахера.

Гидротепловая аналогия может быть также использована для исследования как стационарных, так и нестационарных процессов теплопроводности. В этом случае используется сходство законов распространения теплоты и движения жидкости. В качестве моделей могут быть использованы как модели с непрерывными параметрами, так и модели с сосредоточенными параметрами, т. е. в виде моделирующих гидравлических цепей. В последнем случае вместо параметров исходного теплового процесса в моделирующей цепи применяются сосредоточенные параметры в виде гидравлических сопротивлений и емкостей.

Рассмотрим пример использования этой аналогии для исследования нестационарного температурного поля в бесконечной плоской стенке при заданных ее размерах и теплофизических свойствах, при произвольном распределении температуры по ее сечению в начальный момент времени и при граничных условиях, заданных значениями температур среды $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 . При

построения гидравлической модели используется формальное сходство уравнения для плотности теплового потока

$$q = \Delta t / R_T$$

с уравнением, выражающим расход жидкости при ламинарном движении ($Re \leq Re_{кр}$)

$$V = \Delta h / R_T,$$

где Δh — гидравлический напор в метрах столба жидкости; R_T — гидравлическое сопротивление.

Поскольку сопоставляемые явления изменяются во времени, то следует учесть изменение количеств теплоты и жидкости во времени:

$$dQ = C_T \frac{dt}{d\tau} d\tau; dV = f_T \frac{dh}{d\tau} d\tau;$$

здесь C_T — теплоемкость системы; f_T — площадь поперечного сечения гидравлического канала; Q — количество теплоты, Дж; V — количество жидкости, m^3 .

Из сравнения уравнений следует, что аналогом q является расход жидкости V ; аналогом температурного напора Δt — гидравлический напор Δh ; аналогом теплоемкости исследуемой системы является гидравлическая емкость; аналогом термического сопротивления R_T — гидравлическое сопротивление R_T в гидравлической модели. Построим гидравлическую цепь. Примем для простоты все масштабы для гидравлической модели и теплового явления одинаковыми. Разбиваем стенку на конечное число слоев, например, на четыре (рис. 3-36). Заменяем каждый слой сосудом, сечение которого должно соответствовать теплоемкости отдельных слоев стенки:

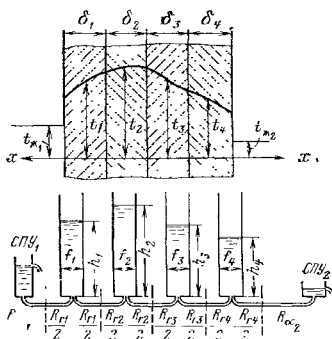


Рис. 3-36. Многослойная плоская стенка и ее гидравлическая модель.

$$C_{T1} = f_1; C_{T2} = f_2; C_{T3} = f_3; C_{T4} = f_4.$$

Термическое сопротивление $\delta_i / \lambda_i = R_{Ti}$ каждого слоя стенки заменяется соответствующим гидравлическим сопротивлением:

$$R_{T1} = R_{T1}; R_{T2} = R_{T2}; R_{T3} = R_{T3}; R_{T4} = R_{T4}.$$

Эти гидравлические сопротивления осуществляют с помощью капилляров, соединяющих между собой сосуды-емкости, заполняемые жидкостью. Уровни жидкости в сосудах должны соответствовать распределению температуры в стенке в начальный момент времени:

$$h_1 = t_1; h_2 = t_2; h_3 = t_3; h_4 = t_4.$$

Условия теплообмена на поверхности стенки воспроизводятся с помощью сосудов постоянного уровня (СПУ₁, СПУ₂). Уровень жидкости

в них соответствует температурам окружающей среды по одну и другую стороны стенки. Если температуры среды заданы постоянными, то и уровни жидкости в этих сосудах должны поддерживаться постоянными. Термические сопротивления теплоотдачи имитируются гидравлическим сопротивлением капилляров R_{a1} и R_{a2} , присоединенных к основным капиллярам, воспроизводящим внешние слои исследуемой стенки. На каждом капилляре установлены краны. В начальный момент времени все краны закрыты. Уровень жидкости в сосудах воспроизводит начальное распределение температуры в стенке. Затем все краны мгновенно открываются и производится запись изменения уровней жидкости в сосудах через заданные промежутки времени. Можно сделать фотографии положения уровней для различных моментов времени. Величина уровней будет характеризовать числовое значение температуры по отдельным слоям стенки. Чем больше слоев, тем точнее воспроизводится распределение температуры по сечению стенки.

Если масштабы для гидравлической модели и теплового явления различны, то переход от модели к исследуемому процессу осуществляется посредством масштабных преобразований. Для этого исходные математические описания должны быть приведены к безразмерному виду описанным выше методом.

Гидротепловая аналогия была положена в основу разработки так называемого гидротеплоинтегратора В. С. Лукьянова, позволяющего решать не только одномерные, но и двух-, и трехмерные задачи теплопроводности.

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

4-1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие конвективного теплообмена охватывает процесс теплообмена при движении жидкости или газа. При этом перенос теплоты осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью. Под конвекцией теплоты понимают перенос теплоты при перемещении макро-частиц жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в другую. Конвекция возможна только в текучей среде, здесь перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Если в единицу времени через единицу контрольной поверхности нормально к ней проходит масса жидкости $\rho \vec{\omega}$, кг/(м²·с), где $\vec{\omega}$ — скорость, ρ — плотность жидкости, то вместе с ней переносится энтальпия, Дж/(м²·с):

$$\vec{q}_{\text{конв}} = \rho \vec{\omega} i. \quad (4-1)$$

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа неизбежно происходит соприкосновение отдельных частиц, имеющих различные температуры. В результате конвективный теплообмен описывают уравнением

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{тпр}} + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{\omega} i. \quad (4-2)$$

Здесь $\vec{q}$ является локальным (местным) значением плотности теплового потока за счет конвективного теплообмена. Первый член правой части уравнения (4-2) описывает перенос теплоты теплопроводностью, второй — конвекцией.

Конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью соприкасающегося с ним тела называется конвективной теплоотдачей или теплоотдачей. Очень часто в инженерных расчетах определяют теплоотдачу; при этом знание конвективного теплообмена внутри жидкой среды может представить косвенный интерес, поскольку перенос теплоты внутри жидкости отражается и на теплоотдаче.

При расчетах теплоотдачи используют закон Ньютона — Рихмана:

$$dQ_c = \alpha (t_c - t_{\text{ж}}) dF. \quad (4-3)$$

Согласно закону Ньютона — Рихмана тепловой поток dQ_c , Вт, от жидкости к элементу поверхности соприкасающегося тела dF (или от

dF к жидкости) прямо пропорционален dF и разности температур $\Delta t = t_c - t_{ж}$, где t_c — температура поверхности тела, $t_{ж}$ — температура окружающей жидкой или газообразной среды. Разность температур $t_c - t_{ж}$ называют температурным напором.

Коэффициент пропорциональности α , входящий в уравнение (4-3), называется коэффициентом теплоотдачи. Он учитывает конкретные условия процесса теплоотдачи, влияющие на его интенсивность.

Согласно уравнению (4-3)

$$\alpha = \frac{dQ_c}{(t_c - t_m) dF} = \frac{q_c}{t_c - t_m}. \quad (4-4)$$

Это тождество следует рассматривать как определение коэффициента теплоотдачи, который измеряется в Вт/(м²·К).

Таким образом, коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока q_c на границе жидкости (газа) и соприкасающегося тела, отношения к разности температур поверхности этого тела и окружающей среды.

В общем случае коэффициент теплоотдачи переменен по поверхности F . Если α и Δt не изменяются по F , то закон Ньютона — Рихмана может быть записан следующим образом:

$$Q_c = \alpha (t_c - t_{ж}) F.$$

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого количества факторов. В общем случае α является функцией формы и размеров тела, режима движения, скорости и температуры жидкости, физических параметров жидкости и других величин. По-разному протекает процесс теплоотдачи в зависимости от природы возникновения движения жидкости.

Чтобы привести жидкость в движение, к ней необходимо приложить силу. Силы, действующие на какой-либо элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные. Массовыми называют силы, приложенные ко всем частицам жидкости и обусловленные внешними силовыми полями (например, гравитационным или электрическим). Поверхностные силы возникают вследствие действия окружающей жидкости или твердых тел; они приложены к поверхности контрольного объема жидкости. Такими силами являются силы внешнего давления и силы трения.

Различают свободную и вынужденную конвекцию. В первом случае движение в рассматриваемом объеме жидкости возникает за счет неоднородности в нем массовых сил. Если жидкость с неоднородным распределением температуры, и, как следствие, с неоднородным распределением плотности, находится в поле земного тяготения, может возникнуть свободное гравитационное движение. В дальнейшем в основном будет рассматриваться гравитационная свободная конвекция, вызванная неоднородностью температурного поля.

Вынужденное движение рассматриваемого объема жидкости происходит под действием внешних поверхностных сил, приложенных на его границах, за счет предварительно сообщенной кинетической энергии (например, за счет работы насоса, вентилятора, ветра). Как вынужденное рассматривается и течение изучаемого объема жидкости под действием однородного в нем поля массовых сил. Иллюстрацией последнего может являться течение изотермической пленки жидкости по стенке под действием сил тяжести.

Вынужденное движение в общем случае может сопровождаться свободным движением. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разница температур отдельных частиц среды и чем меньше скорость вынужденного движения. При больших скоростях вынужденного движения влияние свободной конвекции становится пренебрежимо малым.

В дальнейшем в основном будут рассмотрены стационарные процессы течения и теплоотдачи. Условием стационарности является неизменность во времени скорости и температуры в любой точке жидкости (газа).

4-2. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

В зависимости от физических свойств жидкостей (газов) процесс теплообмена может протекать различно и своеобразно. Особенно большое влияние оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость c_p , плотность ρ , коэффициент температуропроводности a , уже использовавшиеся при рассмотрении теплопроводности, и коэффициент вязкости μ . Для каждого вещества эти величины имеют определенные значения и являются функцией параметров состояния (температуры и давления, прежде всего температуры). Особенно существенные изменения физических свойств могут иметь место в околокритической области термодинамических состояний и в области очень низких температур.

В книге в основном рассматриваются процессы при монотонных и не слишком значительных изменениях физических свойств определенного вещества. Теплообмен в околокритической области будет рассмотрен особо.

При теоретическом анализе конвективного теплообмена для простоты и наглядности выводов в основном будем полагать, что физические свойства жидкости (газа) постоянны в исследуемом интервале температур.

Все реальные жидкости обладают вязкостью; между частицами или слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения, противодействующая движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила s , Па (отнесенная к единице поверхности), которая действует в любой точке потока в плоскости, ориентированной по течению, пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к этой плоскости:

$$s = \mu \frac{dw}{dn}. \quad (4-5)$$

Коэффициент μ называется динамическим коэффициентом вязкости или просто коэффициентом вязкости; его единица измерения Н·с/м². При $dw/dn = 1$ численно $s = \mu$.

В уравнении гидродинамики и теплопередачи часто входит отношение вязкости μ к плотности ρ , называемое кинематическим коэффициентом вязкости и обозначаемое буквой ν , м²/с:

$$\nu = \mu/\rho.$$

Коэффициенты μ и ν являются физическими параметрами. Они существенно зависят от температуры¹.

У капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но значительно уменьшается при повышении температуры. Типичный характер функции $\mu=f(t)$ для капельных жидкостей представлен на рис. 4-1.

У газов μ увеличивается при повышении температуры (рис. 4-2). При увеличении давления коэффициент вязкости газов также увеличивается, но слабо [Л. 29].

Кинематическая вязкость капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры почти в такой же степени, как и μ , так как плотность ρ слабо зависит от температуры. Напротив, у газов, плотность которых при повышении температуры сильно уменьшается, кинематическая вязкость

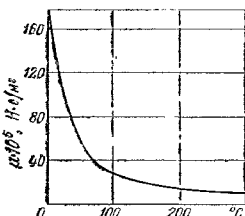


Рис. 4-1 Зависимость динамического коэффициента вязкости воды от температуры.

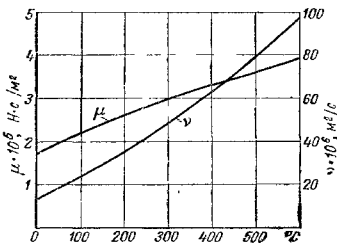


Рис. 4-2. Зависимость динамического и кинематического коэффициентов вязкости воздуха от температуры при давлении $p=760$ мм рт. ст.

матическая вязкость при увеличении температуры быстро повышается. При течении жидкости или газа, обладающих вязкостью, наличие внутреннего трения приводит к процессу диссипации (рассеяния) энергии. Существо процесса диссипации состоит в том, что часть кинетической энергии движущейся жидкости необратимо переходит в теплоту и вызывает нагревание жидкости. Если вязкость жидкости или ее скорость невелики, то нагревание будет незначительным.

В дальнейшем в основном будут рассматриваться процессы, для которых выделяемая теплота трения незначительна и ею можно пренебречь.

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкостей. Изотермической сжимаемостью или коэффициентом сжатия тела при $t=\text{const}$ называют величину

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t, \quad (4-6)$$

представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления.

¹ Некоторые жидкости не подчиняются закону Ньютона (4-5). Если попытаться описать вязкие свойства этих жидкостей с помощью уравнения (4-5), то оказывается, что коэффициент вязкости не только является функцией состояния вещества, но зависит и от параметров процесса — от изменения скорости и температуры. Такие жидкости называют «неньютоновскими»

Для капельных жидкостей изотермическая сжимаемость чрезвычайно мала. Так, например, для воды $\epsilon \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, т. е. повышение давления на 1 бар вызывает относительное изменение плотности на 1/20 000. То же самое имеет место и для других капельных жидкостей, что позволяет пренебречь для них изотермической сжимаемостью.

Для воздуха в нормальном состоянии $\epsilon = 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$. Таким образом, сжимаемость воздуха в 20 000 раз больше сжимаемости воды. Аналогичное соотношение имеет место и для других газов.

Однако главным является не способность газа сжиматься, а то, насколько он в действительности сжимается в рассматриваемом течении. Для значительного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. Если при движении газа возникают разности давления, небольшие по сравнению с его абсолютным давлением, то изменения объема получаются малыми, и такие потоки газа в первом приближении можно считать несжимаемыми.

Значительные изменения давления возникают при больших скоростях течения. При этом нужно учитывать теплоту трения и сжимаемость газа. В результате теплоотдача при больших скоростях имеет ряд особенностей, неучет которых может привести к существенным ошибкам.

В дальнейшем в основном будет рассматриваться теплоотдача несжимаемой жидкости. При этом слово «жидкость» будет употребляться как собирательное понятие и для жидкостей, и для газов. Теплоотдача сжимаемого газа будет рассмотрена отдельно.

Между сжимаемыми и несжимаемыми течениями газа нет резкой границы. Обычно считают, что если скорость газа меньше четвертой части скорости звука, то к газам допустимо применять законы движения и теплоотдачи, полученные для несжимаемой жидкости.

Помимо изотермической сжимаемости для конвективного теплообмена большое значение имеет тепловое расширение жидкости. Последнее характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, определяемым уравнением ($p = \text{const}$)

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p. \quad (4.7)$$

Согласно определению температурный коэффициент объемного расширения β , K^{-1} , представляет собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус (при постоянном давлении).

Для жидкостей температурный коэффициент объемного расширения сравнительно мал (исключение составляет область вблизи термодинамической критической точки). Для некоторых жидкостей, например для воды при $t < 4^\circ\text{C}$, коэффициент β может иметь отрицательное значение.

Для идеального газа температурный коэффициент объемного расширения есть величина, обратная абсолютной температуре газа,

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что в конечном итоге может привести к свободному движению.

4-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА (ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА)

Из уравнения (4-2)

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T + \rho \vec{w} i$$

следует, что плотность теплового потока в любой точке жидкости для каждого момента времени однозначно определяется, если известны поля температур, удельной энтальпии и скорости.

Связь между температурой и энтальпией может быть установлена следующим образом. Для реальной жидкости $i = i(T, p)$, и согласно понятию о полном дифференциале

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Отсюда

$$i = \int_T c_p dT + \int_p \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp.$$

Из дифференциальных уравнений термодинамики и из определения температурного коэффициента объемного расширения следует, что

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] = \frac{1}{\rho} [1 - \beta T]_p.$$

Для многих задач в предположении о несжимаемости жидкости ($\rho = \text{const}$) с достаточной степенью точности можно принять $(\partial i / \partial p)_T = 0$, т. е. пользоваться соотношением, справедливым для термодинамически идеального газа:

$$di = c_p dT \text{ и } i = \int c_p dT.$$

Приведенные здесь уравнения позволяют установить связь между полем температур и полем энтальпии. Чтобы аналитически найти поля температур (энтальпии) и скоростей и определить $\vec{q}$, необходимо располагать соответствующими уравнениями.

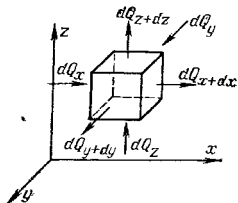


Рис. 4-3. К выводу дифференциального уравнения энергии.

Уравнение энергии. Выведем дифференциальное уравнение, описывающее температурное поле в движущейся жидкости. При выводе будем полагать, что жидкость однородна и изотропна, ее физические параметры постоянны, энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии.

Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координатной системы элементарный параллелепипед (рис. 4-3) с ребрами dx , dy и dz . Через грани параллелепипеда теплота переносится теплопроводностью и конвекцией; в общем случае в рассматриваемом объеме может выделяться теплота внутренними источниками за счет энергии, внешней по отношению к рассматриваемой жидкости.

Вывод уравнения энергии, соответствующего принятым здесь условиям, уже рассматривался в § 1-6. Было получено уравнение (1-25):

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div } \vec{q} + q_v,$$

где

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

Согласно уравнению (4-2) проекции плотности теплового потока $\vec{q}$ на координатные оси Ox , Oy и Oz равны:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho w_x i, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho w_y i \quad \text{и} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho w_z i. \quad (4-8)$$

Подставляя значения q_x , q_y и q_z в уравнение (1-25), можно получить:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \\ & - \rho i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v. \end{aligned}$$

Для несжимаемых жидкостей $\rho = \text{const}$ [см. уравнение (4-20)]

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho} \quad (4-9)$$

или, если $i = \int c_p dT$,

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p}. \quad (4-10)$$

Последнее уравнение, как и уравнение (4-9), является искомым уравнением энергии, описывающим распределение температур внутри движущейся жидкости.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения (4-10), представляет собой полную производную от температуры по времени. Действительно, если $t = t(\tau, x, y, z)$, то на основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau},$$

где

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{d\tau}$$

имеют смысл составляющих скорости w_x , w_y и w_z .

Здесь $\partial t / \partial \tau$ характеризует изменение температуры во времени в какой-либо точке жидкости, т. е. является локальным изменением t ; член

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

характеризует изменение температуры при переходе от точки к точке, т. е. является конвективным изменением t .

Применяя обозначение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t,$$

уравнение энергии можно записать в форме

$$\frac{dt}{dz} = \alpha \nabla^2 t + \frac{q_0}{\rho c_p} \quad (4-10')$$

Если $w_x = w_y = w_z = 0$, уравнение энергии переходит в уравнение теплопроводности.

При стационарных процессах конвективного теплообмена $\partial t / \partial \tau = 0$. Уравнение (4-10) еще более упрощается, если температура изменяется только по одной или двум координатам. В случае стационарного одномерного температурного поля все производные по τ , y и z равны нулю.

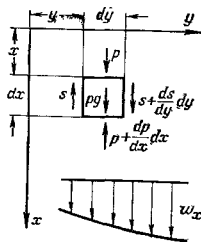


Рис. 4-4. К выводу дифференциального уравнения движения жидкости

Как следует из уравнения (4-10), температурное поле в движущейся жидкости зависит от составляющих скорости w_x , w_y и w_z . Чтобы сделать систему уравнений замкнутой, необходимо добавить уравнения, которые бы описывали изменение скорости во времени и пространстве. Такими уравнениями являются дифференциальные уравнения движения.

Уравнения движения. Вывод дифференциального уравнения движения вязкой жидкости требует громоздких математических выкладок. В связи с этим будет дан упрощенный вывод этого уравнения для случая одномерного течения несжимаемой жидкости [Л. 124]. Этот вывод не является строгим, его основное достоинство заключается в наглядности. Для трехмерного движения уравнение будет приведено без вывода. Уравнения движения подробно рассматриваются в курсах гидродинамики и монографиях по теплопередаче, например в [Л. 202].

Выделим в потоке вязкой жидкости элементарный объем с размерами ребер dx , dy и dz (рис. 4-4). Скорость в потоке изменяется только в направлении оси y , закон изменения скорости произволен.

Вывод уравнения движения основан на втором закона Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.

Силы, действующие на рассматриваемый элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные. Массовые силы характеризуют вектором $\vec{F}$, $\text{м}^2/\text{с}$, значение которого равно отношению силы, действующей на данную частицу, к массе этой частицы. Если учитывается только сила тяжести, то $\vec{F} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. Мы в дальнейшем будем учитывать только силу тяжести. Значение поверхностных сил равно отношению силы, действующей на элемент поверхности, к величине площади этого элемента. К поверхностным силам относятся силы трения и силы давления.

Таким образом, на рассматриваемый элемент жидкости действуют три силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения.

Найдем проекции этих сил на ось Ox .

Силы тяжести df_1 приложена в центре тяжести элемента. Ее проекция на ось Ox равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента:

$$df_1 = \rho g_x dv.$$

Равнодействующая сила давления df_2 определяется следующим образом. Если на верхней грани элемента давление жидкости равно p , то на площадку $dydz$ действует сила $p dy dz$.

На нижней грани давление с точностью до второго члена разложения в ряд Тейлора равно $p + \frac{dp}{dx} dx$, и на эту грань действует сила $-(p + \frac{dp}{dx} dx) dy dz$. Здесь знак минус указывает на то, что эта сила действует против направления движения жидкости. Равнодействующая сил давления равна их алгебраической сумме:

$$df_2 = -\frac{dp}{dx} dv.$$

Равнодействующая сил трения df_3 определяется из следующих соображений. Так как скорость изменяется только в направлении оси Oy , то сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости (рис. 4-4). Около левой грани скорость движения частиц жидкости меньше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении y сила трения направлена против движения и равна $s dx dz$. Около правой грани, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении $y + dy$ сила трения направлена в сторону движения. Равнодействующая этих сил равна алгебраической сумме:

$$df_3 = \left(s + \frac{ds}{dy} dy\right) dx dz - s dx dz = \frac{ds}{dy} dv.$$

Подставляя $s = \mu(dw_x/dy)$, получаем

$$df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv.$$

Суммируя df_1 , df_2 и df_3 , получаем проекцию на ось Ox равнодействующей всех сил, приложенных к объему:

$$df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}\right) dv. \quad (a)$$

Согласно второму закону механики эта равнодействующая равна произведению массы элемента на его ускорение $dw_x/d\tau$ и учитывает силы инерции:

$$df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv. \quad (б)$$

Приравнивая правые части уравнений (а) и (б) и производя сокращения, окончательно имеем уравнение движения вдоль оси Ox :

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}.$$

Описание движения жидкости усложняется, если скорость изменяется по трем направлениям. В общем случае трехмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается тремя уравнениями движения, каждое соот-

ветственно в проекциях сил на оси Ox , Oy и Oz :

для оси Ox

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right); \quad (4-11)$$

для оси Oy

$$\rho \frac{dw_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right); \quad (4-12)$$

для оси Oz

$$\rho \frac{dw_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right). \quad (4-13)$$

Уравнения (4-11)—(4-13) называют уравнениями Навье — Стокса. Все слагаемые уравнений (4-11)—(4-13) имеют размерность силы, отнесенной к единице объема.

В общем случае составляющие скорости w_x , w_y и w_z изменяются во времени и в пространстве. Член, стоящий в левой части уравнений (4-11)—(4-13), представляет собой полную производную от скорости по времени.

На основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (4-14)$$

Аналогично и для других осей:

$$\frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}; \quad (4-15)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \quad (4-16)$$

Производные $\frac{\partial w_x}{\partial \tau}$, $\frac{\partial w_y}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial w_z}{\partial \tau}$ характеризуют изменение скорости во времени в какой-либо точке жидкости, т. е. характеризуют локальное изменение скорости; остальные три члена, стоящие в правых частях уравнений, характеризуют изменение скорости при переходе от точки к точке. Используя векторную форму записи, уравнения (4-11)—(4-13) можно написать в виде

$$\rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}. \quad (4-17)$$

Уравнение движений (4-17) получено без учета зависимости физических параметров жидкости от температуры. В частности, не учтена зависимость плотности от температуры. В то же время свободное движение жидкости определяется разностью плотностей холодных и нагретых частей жидкости.

Ограничимся приближенным учетом переменности плотности¹. Используем для этого температурный коэффициент объемного расширения β . Будем полагать, что в заданном интервале температур β является постоянной величиной, не зависящей от температуры. Это условие лучше выполняется для газов и хуже для капельных жидкостей.

¹ В общем случае при $\rho \neq \text{const}$ необходимо учитывать и энергию деформации.

4) граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах жидкой среды.

В последних должны быть заданы граничные значения зависимых (искомых) переменных или их производных. Например, для любого момента времени задаются распределение температур или тепловых потоков по поверхности тела (в простейшем случае $t_c = \text{const}$ или $q_c = -\lambda(\partial t/\partial n)_{n=0} = \text{const}$), распределение температур и скоростей жидкости на входе в канал или на большом удалении от рассматриваемой поверхности теплообмена, значения скорости на стенке и т. д. Очевидно, в зависимости от вида задания граничных и других условий результаты решения (интегрирования), представляемые в виде формул или числовых значений, могут быть различны.

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи.

Задание распределений $t_c(\tau, x_c, y_c, z_c)$ и $q_c(\tau, x_c, y_c, z_c)$, где x_c, y_c, z_c — координаты поверхности тела, часто затруднительно, так как t_c и q_c в общем случае зависят от процессов теплообмена в стенке и по другую ее сторону. Строго говоря, в этом случае тепловые граничные условия нельзя назначить заранее, так как они являются сложной функцией совокупности всех отдельных процессов теплообмена. Необходимо к системе дифференциальных уравнений рассматриваемого процесса конвективного теплообмена присоединить дифференциальные уравнения, описывающие процесс теплопроводности в стенке и процесс конвективного теплообмена по другую ее сторону, и задать условия сопряжения.

Для непрерывных полей условия сопряжения могут быть заданы в виде равенства температур на поверхности соприкосновения сред, а в случае отсутствия на непроницаемой границе раздела тепловыделения за счет внутренних источников — в виде равенства тепловых потоков, описываемых законом Фурье.

Для сопряженной задачи дифференциальные уравнения и условия однозначности, описывающие процессы теплообмена в смежных средах, и условия сопряжения можно трактовать как граничные условия. Конечно, в этом случае граничные условия будут очень сложны. Решения задач конвективного теплообмена большей частью получают с помощью наперед заданных граничных условий.

Физический анализ процессов конвективного теплообмена показывает, что в ряде случаев математическая формулировка задачи может быть упрощена без внесения существенных погрешностей. Например, математическая формулировка может быть упрощена при использовании понятия пограничного слоя, рассматриваемого в следующем параграфе. В результате могут быть получены математически точные решения.

Сложность процессов конвективного теплообмена заставляет при его изучении особенно широко использовать методы экспериментального исследования. В результате эксперимента получают синтезированные сведения о процессе, влияние отдельных факторов не всегда легко выделить. Эти трудности помогает преодолевать теория подобия, рассмотренная в гл. 5. Основой теории подобия является математическая формулировка краевой задачи.

В ряде случаев для исследования процесса конвективного теплообмена используется его аналогия с процессами другой физической при-

роды Аналогия устанавливается на основе математического описания этих процессов.

Внедрение электронной вычислительной техники привело к более широкому использованию численных методов расчета. Многие задачи, не поддающиеся точному решению, могут быть рассчитаны с помощью ЭЦВМ. И в этом случае исходной для расчета является математическая формулировка задачи в виде дифференциальных уравнений и условий однозначности.

4.4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ И ТЕПЛОВЫЙ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

Для инженерной практики особый интерес представляет теплообмен между жидкостью и омываемым ею телом. Рассмотрим особенно-сти течения и переноса теплоты в пристенном слое жидкости.

Условия «прилипания». В настоящее время в гидродинамике вязкой жидкости получила признание гипотеза о том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, адсорбируются последним, как бы прилипли к его поверхности, т. е. их скорость равна скорости тела (а если тело неподвижно, то нулю).

Этот слой «прилипшей» жидкости нужно рассматривать как бесконечно тонкий слой. Гипотеза о равенстве нулю скоростей жидкости на стенке нашла косвенное подтверждение в хорошем согласии с опытом результатов многочисленных теоретических работ, в основу которых она была положена.

Равенство нулю скорости жидкости на стенке выполняется до тех пор, пока газ можно считать сплошной средой. По мере увеличения разрежения ослабляется взаимодействие газа со стенкой и разреженный газ вблизи стенки начинает проскальзывать.

Степень разрежения потока характеризуют значением параметра Кнудсена l/l_0 , представляющего собой отношение средней длины свободного пробега молекул газа l к характерному размеру твердого тела l_0 (например, диаметру трубы или проволоки).

Если примерно $l/l_0 > 0,001$, то газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду, для которой выполняется условие прилипания.

При значениях параметра Кнудсена, примерно больших 10, газ должен рассматриваться как свободный молекулярный поток. Его взаимодействие с твердым телом описывается на основе законов кинетической теории газов.

При значениях параметра Кнудсена, заключенных между 0,001 и 10, разреженный газ не может рассматриваться ни как полностью сплошной, ни как полностью свободномолекулярная среда. Для этой области чисел Кнудсена разрабатываются свои методы расчета течения и теплообмена.

Мы будем рассматривать в основном сплошные среды и исходить из равенства нулю скорости исчезающе тонкого слоя жидкости, непосредственно прилегающего к поверхности твердого тела.

Уравнение теплоотдачи. Так как у поверхности твердого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, из уравнения (4-2) следует, что плотность теплового потока на стенке (теплоотдача) может быть определена по уравнению Фурье

$$q_c = -\lambda(\partial t / \partial n)_{n=0}, \quad (4-21)$$

где n — нормаль к поверхности тела.

Таким образом, если известно температурное поле, q_c можно вычислить, не обращаясь к закону Ньютона — Рихмана:

$$q_c = \alpha(t_c - t_{ж}). \quad (4-21')$$

При необходимости по известному температурному полю можно определить и коэффициент теплоотдачи. Из уравнений (4-21) и (4-21') следует, что

$$\alpha = - \frac{\lambda}{t_c - t_{ж}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (4-22)$$

Будем называть это уравнение уравнением теплоотдачи.

Из условия равенства нулю относительной скорости жидкости на поверхности тела следуют и другие важные для расчетной практики выводы, облегчающие нахождение поля температур, и, следовательно, определение q_c и α .

Гидродинамический пограничный слой. Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела безграничным потоком жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны соответственно w_0 и t_0 . При соприкосновении частиц жидкости с поверхностью тела они «прилипают» к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела). Этот слой заторможенной жидкости получил название гидродинамического пограничного слоя. Теория гидродинамического пограничного слоя впервые дана Л. Прандтлем (1904 г.).

Чем больше расстояние x от передней кромки пластины, тем толще пограничный слой, так как влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль тела все дальше проникает в невозмущенный поток. Эта особенность пограничного слоя иллюстрируется рис. 4-6, на котором представлены распределения скорости при различных значениях x .

Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие $\partial w_x / \partial y \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе:

$$\partial w_x / \partial y = 0 \text{ и } w_x = w_0.$$

Понятия «толщина пограничного слоя» и «внешняя граница пограничного слоя» довольно условны, так как резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет. Скорость в пограничном слое по мере увеличения y асимптотически стремится к w_0 .

Поэтому под толщиной пограничного слоя δ подразумевается такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную малую величину $\varepsilon \ll 1$ (например на 1%): при $y = \delta$ $w_x = (1 - \varepsilon) w_0$.

Таким образом, при омывании тела поток жидкости как бы разделяется на две части: на пограничный слой и на внешний поток. Во внешнем потоке преобладают силы инерции, вязкостные силы здесь не проявляются. Напротив, в пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы.

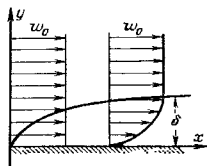


Рис. 4-6. Изменение скорости в гидродинамическом пограничном слое.

Тогда можно написать следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси Oz . Уравнения движения:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (4-23)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4-24)$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4-25)$$

Рассмотрим возможности упрощения для пограничного слоя записанной системы дифференциальных уравнений и наметим границы справедливости упрощенной записи.

Ввиду малости толщины пограничного слоя принимают, что поперек него давление не изменяется, т. е. $\partial p / \partial y = 0$. При омывании плоской поверхности неограниченным потоком, когда во внешнем течении скорость постоянна и равна w_0 , из уравнения Бернулли

$$p + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const}$$

следует, что во внешнем потоке не изменяется и давление. Тогда $\partial p / \partial x = 0$ (такое течение в гидродинамике часто называют «безградиентным течением»). Условия $\partial p / \partial y = 0$ для пограничного слоя и $\partial p / \partial x = 0$ для внешнего течения приводят к выводу, что производная $\partial p / \partial x$ равна нулю и в области пограничного слоя (в рассматриваемом случае).

Скорость w_x изменяется от нуля до w_0 , порядок величины w_x оценим как w_0 . Для продольной координаты возьмем масштаб l . Тогда (O — обозначение порядка данной величины)

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O \left(\frac{w_0}{l} \right).$$

Согласно уравнению сплошности (4-25) порядок производных $\partial w_x / \partial x$ и $\partial w_y / \partial y$ одинаков. Отсюда

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = O \left(\frac{w_0}{l} \right) = O \left(w_0 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\delta} \right),$$

где δ — порядок поперечной координаты y для пограничного слоя. Порядок величины w_y при этом может быть оценен как

$$w_y = O \left(w_0 \frac{\delta}{l} \right).$$

Оценим отдельные члены инерционной (конвективной) и вязкостной частей уравнения движения в проекциях на ось Ox :

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = O \left(\frac{w_0^2}{l} \right); \quad w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = O \left(w_0 \frac{\delta}{l} \frac{w_0}{\delta} \right) = O \left(\frac{w_0^2}{l} \right);$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = O \left(\nu \frac{w_0}{l^2} \right);$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} = O \left(\nu \frac{w_0}{\delta^2} \right).$$

Из оценки следует, что порядок отдельных слагаемых инерционной части одинаков и равен ω_0^2/l . Отношение вязкостных членов дает:

$$\frac{\partial^2 w_x / \partial x^2}{\partial^2 w_x / \partial y^2} = O\left(\frac{w_0/l^2}{w_0/\delta^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{l^2}\right).$$

Для пограничного слоя $\delta \ll l$, отсюда $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$, последней производной можно пренебречь. Тогда уравнение движения в проекциях на ось Ox может быть записано в следующем виде:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (4-26)$$

Порядок левой части этого уравнения равен $O\left(\frac{w_0^2}{l}\right)$, правой $O\left(\nu \frac{w_0}{\delta^2}\right)$. Приравнявая, получаем:

$$O\left(\frac{w_0}{l}\right) = O\left(\nu \frac{w_0}{\delta^2}\right) \text{ или } \frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{w_0 l}{\nu}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right); \quad (4-27)$$

здесь $Re \equiv \omega_0 l / \nu$ — число Рейнольдса, характеризующее соотношение сил инерции и сил вязкости.

Если $Re \ll 1$, то $\frac{\delta}{l} \gg 1$ ($\delta \gg l$). В этом случае по сути дела нет разделения потока на две области, все пространство жидкости у тела охвачено действием сил вязкости.

Если $Re \gg 1$, то $\delta \ll l$, т. е. у поверхности тела образуется сравнительно тонкий слой подторможенной жидкости, для которого в первом приближении справедливы сделанные нами упрощения. Таким образом, теория пограничного слоя приобретает характер метода упрощения математической формулировки краевой задачи и связанной с этим возможности решения.

Оценим порядок величин, входящих в уравнение движения в проекциях на ось Oy . Получим, учитывая уравнение (4-27), что члены

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}, \quad w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} \text{ и } \nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$$

имеют величину порядка $O\left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$, а член $\nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = O\left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{Re \sqrt{Re}}\right)$.

Таким образом, члены уравнения движения в проекциях на ось Oy малы по сравнению с членами уравнения (4-23). Для пограничного слоя уравнение (4-24) можно опустить. Тогда для плоского безградиентного стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad (4-28)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4-29)$$

Здесь две зависимые переменные: w_x и w_y . Правую часть уравнения (4-28) можно записать в виде $\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial y}$, где s — напряжение трения в плоскости, параллельной плоскости xz .

Тепловой пограничный слой. Аналогично понятию гидродинамического пограничного слоя Г. Н. Кружилиным было введено понятие теплового пограничного слоя (рис. 4-7). Тепловой пограничный слой — это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения, равного температуре жидкости вдали от тела. Для области внутри теплового пограничного слоя справедливо условие $\partial t / \partial y \neq 0$, а на внешней границе и вне его ¹

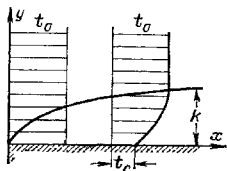


Рис 4-7. Изменение температуры в тепловом пограничном слое.

$$\partial t / \partial y = 0 \text{ и } t = t_0.$$

Таким образом, все изменение температуры жидкости сосредоточивается в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела. В гл. 7, рассматривая теплоотдачу при обтекании плоской поверхности неограниченным потоком жидкости, мы выясним условие, при котором выполняется неравенство $k \ll l$, где k — толщина теплового пограничного слоя. Толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев δ и k в общем случае не совпадают — это зависит от рода жидкости и некоторых параметров процесса течения и теплообмена. Будем полагать, что они одного порядка: $k = O(\delta)$. Ввиду малости толщины теплового пограничного слоя можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, т. е. положить

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \text{ так как } k^2 \ll l^2 \right).$$

Тогда для рассматриваемого случая уравнение энергии примет вид

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (4-30)$$

Учитывая, что $q_y = -\lambda(\partial t / \partial y)$ и, следовательно, $\lambda(\partial^2 t / \partial y^2) = -\partial q_y / \partial y$, правую часть уравнения (4-30) можно представить в виде $\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}$.

Чтобы замкнуть задачу, к уравнению (4-30) необходимо добавить уравнение движения (4-28) и уравнение сплошности (4-29).

Напомним, что система дифференциальных уравнений (4-28), (4-29) и (4-30) получена для стационарного безградиентного омывания плоской поверхности жидкостью с постоянными физическими свойствами; в жидкости отсутствуют внутренние источники теплоты, выделение тепла трения пренебрежимо мало. Заметим, что при принятых здесь условиях поле скоростей не зависит от поля температур.

Своеобразно строится пограничный слой в случае свободного теплового течения, вызванного разностью плотностей более и менее нагретых частиц жидкости. Данное ранее определение пограничных слоев остается справедливым и для свободного движения. Однако во многих

¹ Точнее, при $y = k$ $t = (1 - \varepsilon)t_0$, где $\varepsilon \ll 1$, так как температура t должна асимптотически стремиться к значению t_0 .

случаях скорость вдали от тела, у которого возникло свободное движение, равна нулю. На рис. 4-8 приведено примерное распределение температур и скоростей в определенном сечении свободного потока у горячего тела. В данном случае толщины теплового и гидродинамического слоев также могут не совпадать.

При свободном тепловом движении ($w_0=0$) в дифференциальном уравнении движения (4-28) должен быть учтен член $g\beta\theta$. В этом случае поле скоростей неразрывно связано с полем температур (теплообменом).

Форма и размеры поверхности теплообмена существенно влияют на теплоотдачу. В зависимости от этих факторов может резко меняться характер обтекания поверхности, по-иному строится пограничный слой. В технике имеется большое многообразие поверхностей нагрева. Каждая такая поверхность создает специфические условия движения и теплоотдачи.

Известно, что имеются два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме частицы жидкости движутся без перемешивания, слоисто; при турбулентном — неупорядоченно, хаотически, направление и величина скорости отдельных частиц беспрестанно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. При малых значениях x течение в пограничном слое может быть ламинарным. По мере увеличения x толщина пограничного слоя возрастает, слой делается неустойчивым и течение в пограничном слое становится турбулентным.

Как будет показано в дальнейшем, теплоотдача существенно зависит от режима течения. Полученная нами система дифференциальных уравнений (4-28) — (4-30) описывает теплообмен только в ламинарном пограничном слое.

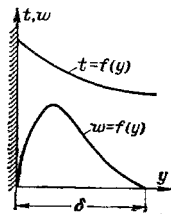


Рис. 4-8 Гидродинамический и тепловой пограничные слои при свободном движении.

4-5. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ И КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Турбулентное течение существенно отличается от ламинарного. На рис. 4-9 показана осциллограмма колебаний скорости в определенной неподвижной точке турбулентного потока, имеющего неизменную среднюю скорость течения. Мгновенная скорость пульсирует около некоторого среднего во времени значения. Помимо показанного на графике рис. 4-9 изменения абсолютной величины w происходит еще и изменение направления мгновенной скорости w от средней во времени $\bar{w}$ называют пульсациями скорости или пульсационными скоростями и w' . При этом $w = \bar{w} + w'$. Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осредненными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

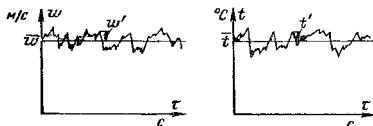


Рис. 4-9 Изменение скорости w и температуры t в неподвижной точке турбулентного потока

Мгновенная скорость пульсирует около некоторого среднего во времени значения. Помимо показанного на графике рис. 4-9 изменения абсолютной величины w происходит еще и изменение направления мгновенной скорости w от средней во времени $\bar{w}$ называют пульсациями скорости или пульсационными скоростями и w' . При этом $w = \bar{w} + w'$. Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осредненными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

При пульсациях скорости происходит перенос механической энергии. Если в потоке имеет место разность температур, то пульсации скорости приводят и к переносу теплоты, вследствие чего возникают пульсации температуры (рис. 4-9). Температура в определенной неподвижной точке турбулентного потока колеблется около некоторого среднего во времени значения $\bar{t}$. Пульсация температуры t' связана с t и $\bar{t}$ уравнением $t = \bar{t} + t'$.

Таким образом, турбулентное течение, строго говоря, является нестационарным процессом, однако если осредненные во времени скорости и температуры $\bar{w}$ и $\bar{t}$ не изменяются, то такое движение и связанный с ним перенос теплоты можно рассматривать как стационарные (квазистационарные) процессы. При этом интервал времени осреднения должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсации, но в то же время достаточно малым по сравнению с каким-либо

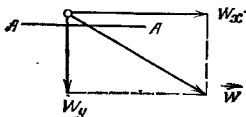


Рис. 4-10. Мгновенное значение скорости в плоском турбулентном потоке.

характерным для осредненного движения интервалом времени, чтобы учесть возможные изменения средних скоростей и температур во времени. Будем в дальнейшем полагать, что средние значения актуальных величин w , t получены как среднеинтегральные.

В общем случае пульсации скорости и температуры приводят к пульсациям давления и физических свойств.

Полагают, что выведенные в § 4-3 дифференциальные уравнения конвективного теплообмена справедливы для отдельных струек пульсационного движения. Эти уравнения можно записать в осредненных значениях скорости и температуры, если произвести замену $t = \bar{t} + t'$, $w_x = \bar{w}_x + w'_x$, $w_y = \bar{w}_y + w'_y$ и т. д. Произведя некоторые преобразования и выдвинув дополнительные гипотезы, можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих в первом приближении осредненное турбулентное течение и теплообмен. В достаточно строгой постановке этот вопрос до конца не разрешен.

Мы прежде всего рассмотрим качественную сторону явлений переноса энергии в турбулентном потоке. На основе этого рассмотрения запишем ряд соотношений, необходимых для решения простейших задач.

Пусть в некоторый момент времени $\tau + d\tau$ скорость в фиксированной точке (малой области) турбулентного потока имеет компоненты w_x и w_y (рис. 4-10). Температура жидкости в этой точке равна t . Условную контрольную поверхность AA расположим близко к рассматриваемой точке и параллельно плоскости xz . За $d\tau$ через единицу поверхности AA проходит масса $\rho w_y d\tau$, кг/м². При этом, в частности, в направлении оси Oy переносится количество движения относительно оси Ox , равное $\rho w_y w_x d\tau$ и соответственно энтальпия $\rho w_y i d\tau \approx \rho c_p w_y t d\tau$ (полагаем, что ρ и c_p постоянны).

В следующие моменты времени компоненты скорости могут быть другими. Среднеинтегральное значение энтальпии q_y , Дж/(м²·с), переносимое в направлении оси Oy за единицу времени через единицу контрольной поверхности, будет равно:

$$q_y = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \rho c_p w_y t d\tau = \rho c_p \overline{w_y t}. \quad (4-31)$$

Величину $\rho c_p \overline{w_y t}$ можно представить в виде

$$q_y = \rho c_p \overline{w_y t} = \rho c_p (\overline{w_y} + \overline{w'_y}) (\overline{t} + \overline{t'}) = \rho c_p (\overline{w_y t} + \overline{w_y t'} + \overline{w'_y t} + \overline{w'_y t'}) = \\ = \rho c_p \overline{w_y t} + \rho c_p \overline{w'_y t'}. \quad (4-32)$$

Здесь использованы свойства среднеинтегрального осреднения

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} \varphi d\tau \quad (4-33)$$

меняющихся во времени величин φ и ψ (например, w_x и t):

$$\overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi}, \quad \overline{\varphi \psi} = \overline{\varphi} \overline{\psi}, \quad \overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}. \quad (4-34)$$

В дальнейшем понадобится и свойство

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

вытекающее из (4-33) ввиду возможности изменения последовательности операций интегрирования по τ и дифференцирования по y . Предполагается при этом, что интервал осреднения $\Delta \tau$ выбран согласно ранее названным условиям. Действительно, осредняя $\varphi = \varphi + \varphi'$, получаем:

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi + \varphi'} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi'}.$$

Отсюда следует, что $\overline{\varphi'} = 0$. Заметим, что $\overline{\varphi'^2} \neq 0$, что следует из уравнения $\overline{\varphi'^2} = (\overline{\varphi} - \overline{\varphi})^2$ (тривиальный случай $\varphi = \overline{\varphi} = 0$ исключаем).

Среднеинтегральное значение количества движения относительно оси Ox , переносимое в направлении Oy за единицу времени через единицу поверхности, можно получить аналогично получению уравнения (4-32). В результате

$$s = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} \rho w_x w_y d\tau = \overline{\rho w_x w_y} = \overline{\rho w_x} \overline{w_y} + \overline{\rho w'_x w'_y}. \quad (4-35)$$

Аналогичные выражения в общем случае можно получить для переноса количества движения относительно любых координатных осей в направлении осей Ox , Oy и Oz .

Таким образом, согласно уравнениям (4-32) и (4-35) конвективный перенос складывается из двух составляющих: из осредненного и из пульсационного (турбулентного) переноса. Обозначим:

$$q_{y,\tau} = q_{\tau} = \rho c_p \overline{w'_y t'}, \quad (4-36)$$

$$s_{xy,\tau} = s_{\tau} = -\rho \overline{w'_x w'_y}. \quad (4-37)$$

В общем случае q_{τ} и s_{τ} не равны нулю. Больше того, в определенных областях турбулентного потока, омывающего твердое тело, q_{τ} и s_{τ} могут принимать большие значения.

Рассмотрим течение около стенки, но на некотором удалении от нее. Для простоты предположим, что осредненные значения скорости и температуры изменяются только в направлении оси Oy (рис. 4-11). Предположим, что за счет пульсаций w'_y из слоя y_1 в слой y_2 переносится энтальпия $c_p \overline{t}(y_1)$, где $\overline{t}(y_1)$ — осредненное значение температуры при $y = y_1$. Плоскости y_1 и y_2 параллельны плоскости xz .

Разность энтальпий $c_p[\bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_2)]$ будем считать переносимой теплотой на отрезке $y_2 - y_1 = l'$. На длине l' пульсация как бы не распадается, не диссипирует. Распад пульсационного движения при $y = y_2$ приводит к передаче энтальпии слою y_2 . В рассматриваемом квазистационарном течении эта передача порождает пульсацию температуры в слое y_2 [температура $\bar{t}(y_2)$ фиксирована]. И так далее.

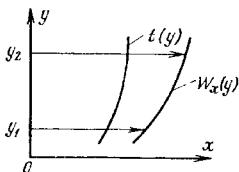


Рис. 4-11. К выводу формул осредненного турбулентного переноса теплоты и количества движения.

Иногда проводят аналогию между l' и длиной свободного пробега молекул (от соударения до соударения). Как следствие этой аналогии величину l' называют длиной пути смешения. Аналогично простейшим представлениям о молекулярном движении объем жидкости как бы перемещается на расстояние l' , при этом вместе с массой жидкости осуществляется перенос, в частности, энтальпии. Аналогия между молекулярным и турбулентным движениями достаточно условна. Ее достоинство заключается в наглядности. Заметим, что по смыслу турбулентного движения длина пути смешения l' не должна быть постоянной величиной. Можно говорить о вероятностном (статистическом) значении l' .

Разность $[\bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_2)]$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_2) &= \bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_1 + l') = \bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_1) - \\ &- l' \frac{d\bar{t}}{dy} - \frac{l'^2}{2} \frac{d^2\bar{t}}{dy^2} - \dots \approx -l' \frac{d\bar{t}}{dy}. \end{aligned}$$

Тогда для турбулентного (пульсационного) переноса теплоты можно написать:

$$q_T = \overline{\rho c_p w_y [\bar{t}(y_1) - \bar{t}(y_2)]} = -\overline{\rho c_p w_y l'} \frac{d\bar{t}}{dy}. \quad (4-38)$$

Исходя из предположений, аналогичных сделанным ранее, турбулентный перенос по y количества движения относительно оси Ox можно описать уравнением

$$s_T = -\overline{\rho w_y [\bar{w}_x(x_1) - \bar{w}_x(y_2)]} = \overline{\rho w_y l'} \frac{d\bar{w}_x}{dy}. \quad (4-39)$$

Таким образом, величины q_T и s_T пропорциональны производным $d\bar{t}/dy$ и $d\bar{w}_x/dy$. Учитывая этот важный вывод, запишем как определения следующие уравнения:

$$q_T = -\rho c_p \epsilon_q \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \quad (4-40)$$

и

$$s_T = \rho \epsilon_s \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \mu_T \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; \quad (4-41)$$

здесь λ_T , μ_T — соответственно коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения; $\epsilon_q = \lambda_T / \rho c_p$, $\epsilon_s = \mu_T / \rho$ — соответственно кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения. Размерности этих коэффициентов соответствуют размерностям аналогичных коэффициентов λ , μ , α , ν , учитывающих молекулярный перенос теплоты и количества движения.

Коэффициенты λ_t и μ_t не являются физическими параметрами среды. Они зависят, как это следует из уравнений (4-40), (4-41) и (4-36), (4-37), от параметров процесса и, следовательно, могут изменяться в рассматриваемом пространстве.

Теплота и количество движения в направлении оси Oy переносятся также и молекулярным механизмом. В результате можно написать:

$$q_y = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \quad (4-42)$$

и

$$s_{xy} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (4-43)$$

Сплошная твердая стенка непроницаема для поперечных пульсаций w'_y , следовательно, при $y=0$ будет $w'_y=0$. Отсюда следует, что непосредственно на стенке $\lambda_t=0$ и $\mu_t=0$. Вдали от стенки коэффициенты турбулентного переноса λ_t и μ_t могут во много раз превышать соответственно λ и μ ; для этой области, напротив, можно полагать, что $\lambda=0$ и $\mu=0$ (точнее: $\lambda_t \gg \lambda$, $\mu_t \gg \mu$).

Как следует из (4-32) и (4-35), при записи уравнений в осредненных значениях скорости и температуры необходимо учитывать и турбулентный (пульсационный) перенос теплоты и количества движения. Для турбулентного пограничного слоя при принятых ранее ограничениях (см. § 4-4) уравнения энергии (4-30), движения (4-28) и сплошности (4-29) могут быть записаны в следующем виде:

$$\rho c_p \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right]; \quad (4-44)$$

$$\rho \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]; \quad (4-45)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} = 0. \quad (4-46)$$

Здесь учтено, что турбулентный перенос в направлении оси Ox много меньше турбулентного переноса в направлении Oy , так как $\delta \ll l$ и $k \ll l$, где l — длина пластины.

Полагают, что μ_t и λ_t зависят от тех же факторов (переменных), от которых зависят поля осредненных скорости и температуры. Для замыкания системы дифференциальных уравнений необходимо добавить уравнения, характеризующие связь μ_t и λ_t с этими переменными.

Предложено много способов, позволяющих в первом приближении замкнуть систему дифференциальных уравнений для турбулентного течения, но мы рассмотрим лишь простейший. Из уравнения (4-37)

$$s_x = -\rho \overline{w'_x w'_y}$$

и уравнения (4-39) для одномерного турбулентного переноса

$$s_x = \rho \overline{w'_y l'} \frac{dw_x}{dy}$$

следует, что

$$w'_x = l' \frac{dw_x}{dy}.$$

Примем, что выполняется пропорциональность

$$\overline{w_y'} \sim l' \frac{d\overline{w_x}}{dy}.$$

Тогда

$$\overline{w_x' w_y'} \sim \overline{l'}^2 \left(\frac{d\overline{w_x}}{dy} \right)^2.$$

Включая коэффициент пропорциональности во вновь вводимую величину l , из (4-37) имеем¹

$$s_\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{w_x}}{dy} \right)^2. \quad (4-47)$$

Величину l часто также называют длиной пути смешения, хотя она только пропорциональна l' . В последнее время l предпочитают называть масштабом турбулентности. Полагают, что l характеризует внутреннюю геометрическую структуру турбулентного потока, некоторый средний размер турбулентно перемещающихся масс жидкости. При фиксированном значении производной $d\overline{w_x}/dy$ касательное напряжение турбулентного трения s_τ пропорционально l^2 .

Сравнивая уравнения (4-39) и (4-47), получаем:

$$\overline{w_y' l'} = l^2 \frac{d\overline{w_x}}{dy}. \quad (4-48)$$

Подставляя последнее значение в уравнение (4-38), имеем:

$$q_\tau = -\rho c_p l^2 \left| \frac{d\overline{w_x}}{dy} \right| \left| \frac{d\overline{t}}{dy} \right|. \quad (4-49)$$

Формулы (4-47) и (4-49) предложены Л. Прандтлем. В пристенной области турбулентного течения масштаб турбулентности (как и турбулентный перенос количества движения и теплоты) должен уменьшаться по мере приближения к стенке из-за воздействия последней. Согласно Прандтлю

$$l = \kappa y. \quad (4-50)$$

Как показывают измерения и расчеты, в пристенной области турбулентного течения (но в области, где молекулярным трением можно пренебречь) безразмерную величину κ можно считать равной 0,4.

Таким образом, в первом приближении задача замкнута, значения ε_s и ε_q (или λ_τ и μ_τ) определены:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_q = l^2 \left| \frac{d\overline{w_x}}{dy} \right| = (\kappa y)^2 \left| \frac{d\overline{w_x}}{dy} \right| \quad (4-51)$$

[сравнить формулы (4-40), (4-41) и (4-47), (4-49)].

Формула (4-51) показывает, что существует аналогия между переносом количества движения и теплоты. Формальная аналогия, следующая из (4-51), отражает концепцию, согласно которой одни и те же объемы жидкости, участвуя в пульсационном движении, переносят одновременно количество движения и теплоту и не взаимодействуют на пути

¹ Чтобы правильно определить знак s_τ , формулу (4-47) следует записать в виде

$$s_\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\overline{w_x}}{dy} \right| \frac{d\overline{w_x}}{dy}. \quad (4-47')$$

Знак s_τ определяется знаком производной $d\overline{w_x}/dy$.

и с окружающей средой. На самом деле при переносе, например, теплоты может происходить теплообмен. Пульсационный перенос количества движения может быть связан с диссипацией механической энергии из-за вязкости жидкости. Все это заставляет вносить коррективы в ранее описанную теорию, в частности, вводить для описания переноса количества движения и теплоты различные значения l .

Несмотря на определенную незавершенность описанной здесь теории, она может давать приемлемые для практики результаты.

Теории турбулентного переноса энергии и вещества посвящена обширная литература. Для углубления знаний в этой области можно воспользоваться книгами [Л. 90, 92, 109, 192, 202].

Глава пятая

ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

5-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения полной системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. Поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить числовые значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образцы). Эти трудности помогает разрешить теория подобия. С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения безразмерных комплексов число величин под знаком искомой функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе.

Теория подобия устанавливает также условия, при которых результаты лабораторных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому. Ввиду этого теория подобия прежде всего является теоретической базой эксперимента, но не только. Теория подобия является важным подспорьем теоретических исследований. Хотя методами теории подобия вид искомой функции не может быть опреде-

лен, эта теория облегчает в ряде случаев анализ процесса и описание полученных результатов.

Теория подобия развивалась в основном благодаря трудам советских ученых. В области теории подобия хорошо известны работы А. А. Гухмана, М. В. Кирпичева, М. А. Михеева, Л. С. Эйгенсона, П. К. Конакова, Б. С. Петухова и др. [Л. 33, 34, 69, 70, 71, 143, 207].

Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов.

Имеется несколько методов выполнения этой операции. Мы воспользуемся одним из них — методом масштабных преобразований.

5.2. ПРИВЕДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ЗАПИСИ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью, температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны соответственно t_0 и w_0 . Размер тела l_0 задан. Температура поверхности тела равна t_c . Для определенности примем, что $t_c > t_0$. Будем полагать, что физические параметры жидкости постоянны (учтем только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным.

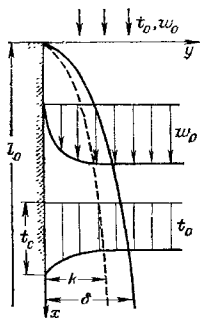


Рис. 5-1. К постановке краевой задачи конвективного теплообмена.

Расположим оси координат так, как показано на рис. 5-1. Для простоты примем, что ось Oy нормальна к поверхности тела, а ось Ox направлена вдоль тела и вертикальна.

При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси Oy и Oz будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).

При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси Oy и Oz будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).

Размер тела вдоль оси Oz намного больше l_0 .

При принятых условиях поля температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в приближении пограничного слоя (см. § 4-4). Учтем дополнительно подъемную силу $\rho g \beta \vartheta$, считая ее соизмеримой с вязкостным членом $\mu(\partial^2 w_x / \partial y^2)$. Введем также обозначение $\vartheta = t - t_0$, где t — температура жидкости (заметим, что $dt = d\vartheta$, так как $t_0 = \text{const}$).

Уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2};$$

уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g \beta \vartheta;$$

уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

Напишем граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ Вдали от тела } (y = \infty) \\ \quad \vartheta = \vartheta_0 = 0; \quad w_x = w_0; \quad w_y = 0. \\ 2) \text{ На поверхности тела } (y = 0, \quad 0 \leq x \leq l_0, \quad -\infty \leq z \leq +\infty) \\ \quad \vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = \text{const}; \quad w_x = w_y = w_z = 0. \end{array} \right\} \quad (a)$$

В уравнениях и условиях однозначности можно различить три вида величин:

независимые переменные—это координаты x, y .

зависимые переменные—это ϑ, w_x и w_y ; зависимые переменные однозначно определяются значениями независимых переменных, если заданы величины, входящие в условия однозначности;

постоянные величины—это $w_0, t_0, l_0, \vartheta_c, \nu, a, g\beta$ и др.; они задаются условиями однозначности и для определенной задачи являются постоянными, не зависящими от других переменных; от задачи к задаче они могут меняться; постоянными эти величины называют потому, что они не являются функцией независимых переменных.

Таким образом, искомые зависимые переменные ϑ, w_x и w_y зависят от большого числа величин: они являются функцией независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности.

Величины, содержащиеся в уравнениях и условиях однозначности, можно сгруппировать в комплексы. Число безразмерных комплексов будет меньше числа размерных величин.

Для приведения к безразмерному виду выберем масштабы приведения. В качестве масштабов удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности. Для линейных величин выберем какой-либо характерный размер, например длину поверхности теплообмена l_0 , для скорости w_0 , для температуры ϑ_c .

Обозначим безразмерные величины:

$$\left. \begin{array}{l} X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad W_x = \frac{w_x}{w_0}, \\ W_y = \frac{w_y}{w_0}, \quad \Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_c}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} x = l_0 X, \quad y = l_0 Y, \quad w_x = w_0 W_x, \\ w_y = w_0 W_y, \quad \vartheta = \vartheta_c \Theta. \end{array} \right\} \quad (в)$$

Подставим в уравнения значения величин согласно равенствам (в). Преобразуем уравнение энергии. Так как, например,

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial (l_0 Y)} \left[\frac{\partial (\vartheta_c \Theta)}{\partial (l_0 Y)} \right] = \frac{\vartheta_c}{l_0^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2},$$

то в результате подстановки равенств (в) после умножения левой и правой частей уравнения энергии на l_0^2/a будем иметь:

$$\frac{x_0 l_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}. \quad (5-1)$$

Аналогично преобразуем и уравнение движения. После подстановки равенства (в) в уравнение движения умножим его на $l_0^2/\nu w_0$.

В результате получим:

$$\frac{w_0 l_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \Theta_c l_0^3}{\nu w_0} \Theta.$$

Сделаем следующее преобразование комплекса, входящего в последнее уравнение:

$$\frac{g \beta \Theta_c l_0^3}{\nu w_0} \Theta = \frac{g \beta \Theta_c l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0} \Theta.$$

Учитывая эти преобразования, окончательно получаем:

$$\frac{w_0 l_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \Theta_c l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0} \Theta. \quad (5-2)$$

После преобразования уравнения сплошности получим:

$$\frac{w_0}{l_0} \left(\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = 0$$

или, так как w_0/l_0 не равно нулю,

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \quad (5-3)$$

Приводя к безразмерному виду граничные условия, получаем:

1) вдали от тела ($Y = \infty$)

$$\Theta = \Theta_0 = 0, \quad W_x = 1, \quad W_y = 0;$$

2) на поверхности тела ($Y = 0, 0 \leq X \leq 1$)

$$\Theta = \Theta_c = 1, \quad W_x = W_y = 0.$$

(г)

Из условий (г) следует, что, несмотря на то что величины w_0 , t_c , l_0 и др., входящие в размерные граничные условия, могут иметь различные числовые значения, каждая из безразмерных величин Θ_0 , Θ_c и др. имеет в рассматриваемом случае вполне конкретное числовое значение.

Как следует из § 4-4, при известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению

$$\alpha = - \frac{\lambda}{t_c - t_0} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Приводя к записи в безразмерных переменных, получаем:

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \quad (5-4)$$

Безразмерный комплекс $\alpha l_0 / \lambda$ полностью определяется производной $(\partial \Theta / \partial Y)_{Y=0}$.

5-3. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (ЧИСЛА ПОДОБИЯ) И УРАВНЕНИЯ ПОДОБИЯ

Помимо безразмерных величин Θ , W_x , W_y и безразмерных координат, составленных из однородных физических величин, в уравнения входят также безразмерные комплексы, состоящие из разнородных физических величин:

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda}, \quad \frac{w_0 l_0}{\nu}, \quad \frac{w_0 l_0}{a}, \quad \frac{g \beta \Theta_c l_0^3}{\nu^2}.$$

Этим комплексам, называемым числами подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие гидродинамики или теплопередачи.

Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$Nu \equiv \frac{\alpha l_0}{\lambda} \quad (5-5)$$

и называют числом Нуссельта или безразмерным коэффициентом теплоотдачи. Число Нуссельта характеризует теплообмен на границе стенка — жидкость; это следует из уравнений (4-3) и (5-1). В задачах конвективного теплообмена число Nu обычно является искомой величиной, поскольку в него входит определяемая величина α .

Несмотря на внешнее сходство с числом Био, рассмотренным при изучении теплопроводности, число Нуссельта существенно отличается от него. В число Био входит коэффициент теплопроводности твердого тела; в число Nu — коэффициент теплопроводности жидкости. Кроме того, в число Био коэффициент теплоотдачи вводится как величина, заданная в условиях однозначности, мы же рассматриваем коэффициент теплоотдачи, входящий в Nu , как величину искомую.

Безразмерный комплекс

$$Re \equiv \frac{w_0 l_0}{\nu} \quad (5-6)$$

называют числом Рейнольдса. Оно характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости. Действительно, число Рейнольдса будет получено, если член уравнения движения, учитывающий инерционные силы, разделить на член, учитывающий в этом уравнении силы трения:

$$\frac{w_x \partial w_x / \partial x}{\nu \partial^2 w_x / \partial y^2} = \frac{w_0^2 / l_0}{\nu w_0 / l_0^2} \cdot \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2} = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{W_x \partial W_x / \partial X}{\partial^2 W_x / \partial Y^2}.$$

По существу такую же операцию мы проделали в § 5-2 при приведении уравнения движения к безразмерному виду.

Число Рейнольдса является важной характеристикой как изотермического, так и неизотермического процессов течения жидкости.

Третий безразмерный комплекс обозначают

$$Pr \equiv \frac{w_0 l_0}{a} \quad (5-7)$$

и называют числом Пекле. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{w_0 l_0}{a} = \frac{\rho c_p w_0 \delta}{\frac{\lambda}{l_0} \delta};$$

здесь числитель характеризует теплоту, переносимую конвекцией, а знаменатель — теплоту, переносимую теплопроводностью.

По существу мы получили ранее число Пекле путем деления конвективного члена уравнения на член, учитывающий перенос теплоты теплопроводностью.

Безразмерный комплекс

$$Gr \equiv \frac{g \beta \theta_c l_0^3}{\nu^2} \quad (5-8)$$

- называют числом Грассгофа. Оно характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей. Так как при выводе уравнения движения (4-18) было принято, что $\beta\vartheta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}$, вместо Gr можно написать его более общую модификацию — число Архимеда:

$$Ar = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}. \quad (5-9)$$

В случае однородной среды при условии $\beta = \text{const}$ число Архимеда идентично числу Gr.

Используя введенные обозначения, систему безразмерных дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$Nu = -(\partial\Theta/\partial Y)_{Y=0}; \quad (5-10)$$

$$Pe \left(W_x \frac{\partial\Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}; \quad (5-11)$$

$$Re \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{Gr}{Re} \Theta + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}; \quad (5-12)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \quad (5-13)$$

Система безразмерных дифференциальных уравнений и безразмерных условий однозначности (г) (см. § 5-2) представляет собой математическую формулировку задачи.

Безразмерные величины Θ , W_x , W_y , X , Y , Nu , Re , Pe , Gr можно рассматривать как новые переменные. Их можно разделить на три группы: независимые переменные — это безразмерные координаты X , Y ; зависимые переменные — это Nu , Θ , W_x , W_y ; они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в условия однозначности;

постоянные величины — это Pe , Re , Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными [действительно, как следует из (5-6) — (5-8), числа Pe , Re и Gr состоят только из величин, входящих в условия задачи].

В результате можно написать:

$$Nu = f_1(X, Y, Pe, Re, Gr); \quad (5-14)$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Pe, Re, Gr); \quad (5-15)$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pe, Re, Gr); \quad (5-16)$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pe, Re, Gr). \quad (5-17)$$

Уравнения вида (5-14) — (5-17) называют уравнениями подобия.

Здесь X_c , Y_c — уравнение (5-14) — соответствуют поверхности теплоотдачи (стенки). Нахождение α (или Nu) для точек пространства, не лежащих на поверхности стенки, не имеет смысла. В рассматриваемой задаче $Y_c = 0$.

Если в уравнении движения учесть член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, то в результате приведения к безразмерной записи появился бы и член

$$\frac{l_0}{\rho w_0} \frac{\partial \rho}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho}{\rho w_0^2} \frac{w_0 l_0}{\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial X} (Eu Re).$$

Безразмерный комплекс

$$Eu = \frac{p}{\rho w^2_0} \quad (5-18)$$

называют числом Эйлера. Это число характеризует соотношение сил давления и сил инерции. В уравнения конвективного теплообмена зависимость переменная Eu входит только под знаком производной. Следовательно, для рассматриваемой нами несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами существенно не абсолютное значение давления, а его изменение¹. Поэтому число Эйлера обычно представляют в виде

$$Eu = \frac{p - p_0}{\rho w^2_0},$$

где p_0 — какое-либо фиксированное значение давления, например давление на входе в канал. Это давление может быть неизвестной величиной.

Для многих процессов течения и теплоотдачи существен не только размер l_0 , но и некоторые другие характерные размеры.

Например, при движении жидкости в прямой гладкой трубе характерными размерами являются диаметр и длина трубы; если труба изогнута, то дополнительным характерным размером является радиус кривизны трубы. При течении жидкости в шероховатых трубах представляют интерес размеры, оценивающие высоту неровностей и их концентрацию на поверхности теплообмена. Все необходимые размеры l_0 , l_1 , l_2 и т. д. должны быть заданы в условиях задачи. В этом случае под знаком функции в уравнениях (5-14)—(5-17) должны быть величины

$$L_1 = \frac{l_1}{l_0}, \quad L_2 = \frac{l_2}{l_0} \text{ и т. д.}$$

Очевидно, внесение в этом случае под знак функции величин L_1 , L_2 , ..., L_n является необходимым. Во всех случаях список безразмерных величин должен соответствовать математической формулировке задачи. Произвольное же исключение или введение под знак функции новых переменных безусловно недопустимо. Любая подобного рода операция должна быть обоснована.

Очевидно, при неизменной математической формулировке задачи новые безразмерные величины могут быть получены соответствующим комбинированием старых безразмерных величин, однако при этом число переменных под знаком функции не должно измениться.

Число Re , полученное при приведении к безразмерному виду уравнения энергии, можно представить как произведение двух безразмерных переменных:

$$Pe = Re Pr = \frac{w_0 l_0}{\nu} \frac{\gamma}{a}. \quad (5-19)$$

Безразмерная величина $Pr = \gamma/a$ представляет собой новую переменную, называемую числом Прандтля. Число Прандтля целиком составлено из физических параметров, и поэтому и само является физическим параметром. Его можно записать и в виде

$$Pr = \frac{\gamma}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (5-20)$$

¹ В случае сжимаемых течений нужно учитывать зависимость плотности от давления; в этом случае представляет интерес абсолютная величина давления.

Числу Прандтля можно придать определенный физический смысл. Уравнение энергии (4-30)

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

и уравнение движения (4-28)

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

по записи аналогичны. При $a = \nu$ расчетные поля температур и скоростей будут подобны, если только аналогичны и условия однозначности. Условие $a = \nu$ соответствует равенству $Pr = 1$. Таким образом, при определенных условиях числу Прандтля может быть придан смысл меры подобия полей температур и скоростей.

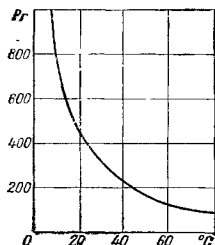


Рис. 5-2. Изменение числа Прандтля трансформаторного масла в зависимости от температуры.

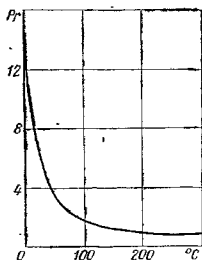


Рис. 5-3. Изменение числа Прандтля воды в зависимости от температуры в интервале температуры от 0 до 300°C.

Числа Pr капельных жидкостей сильно зависят от температуры, причем для большинства жидкостей эта зависимость в основном аналогична зависимости вязкости $\mu(t)$, так как теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ зависят от температуры более слабо. Как правило, при увеличении температуры число Pr резко уменьшается (рис. 5-2). Зависимость числа Pr воды от температуры на линии насыщения приведена на рис. 5-3. Значения числа Pr для воды при температурах от 0 до 180°C сильно уменьшаются с ростом температуры (от 13,7 до 1), что связано с резким уменьшением вязкости воды и ростом λ в этой области температур. Теплоемкость при этом очень мало зависит от температуры.

При температурах от 130 до 310°C значения числа Pr для воды очень незначительно изменяются и близки к единице. Характер зависимости Pr от температуры резко изменяется только при давлениях и температурах, близких к критическим. Теплообмен в околокритической области будет рассмотрен особо.

Число Pr газов практически не зависит ни от температуры, ни от давления и для данного газа является величиной постоянной, определяемой атомностью газа.

В соответствии с кинетической теорией газов число Pr имеет следующие значения:

Для одноатомных газов	0,67
Для двухатомных газов	0,72
Для трехатомных газов	0,8
Для четырехатомных и более газов	1

Действительные значения числа Pr реальных газов несколько отличаются от указанных значений.

Числа Pr тяжелых и щелочных жидких металлов, применяемых в качестве теплоносителей, изменяются в пределах $Pr \approx 0,005 \div 0,05$.

Малые значения числа P_r жидких металлов объясняются высокой теплопроводностью последних.

В зависимости от значения числа P_r жидкости делят на три группы: жидкости с числами $P_r \ll 1$ (жидкие металлы), теплоносители с $P_r \approx 1$ (неметаллические капельные жидкости при больших температурах и газы), жидкости с числами $P_r > 1$ (неметаллические капельные жидкости).

Учитывая, что $Pe = RePr$, уравнения подобия (5-14) — (5-17) можно записать в виде

$$Nu = F_1(X_c, Y_c, Re, Pr, Gr); \quad (5-21)$$

$$\Theta = F_2(X, Y, Re, Pr, Gr); \quad (5-22)$$

$$W_x = F_3(X, Y, Re, Pr, Gr); \quad (5-23)$$

$$W_y = F_4(X, Y, Re, Pr, Gr). \quad (5-24)$$

Исходя из уравнений (5-14) — (5-17) и (5-21) — (5-24), безразмерные переменные можно разделить на два вида:

определяемые — что числа, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми являются α , θ , w_x и w_y , следовательно, определяемыми являются Nu , Θ , W_x и W_y ;

определяющие — это числа, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются X , Y , Re , Pr (или Pe) и Gr .

Числа подобия, составленные из наперед заданных параметров (постоянных) математического описания процесса, называют также критериями подобия.

5.4. УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Полученная система безразмерных дифференциальных уравнений (5-10) — (5-13), так же как и исходная система размерных уравнений, описывает бесконечное множество конкретных процессов конвективного теплообмена. Уравнения будут справедливы для любого процесса теплоотдачи между твердым телом и несжимаемой жидкостью, удовлетворяющего данной формулировке задачи. Таким образом, записанная ранее система дифференциальных безразмерных уравнений описывает совокупность физических процессов, характеризующихся одинаковым механизмом.

С теплопроводностью мы познакомились в первой части курса. Дифференциальное уравнение теплопроводности $\nabla^2 t = 0$ описывает бесчисленное множество конкретных процессов, принадлежащих к одному и тому же классу. Общность этих процессов определяется одинаковым механизмом процесса распространения тепла. Однако известны и другие дифференциальные уравнения, аналогичные по форме записи уравнению теплопроводности, например уравнение электрического потенциала (см. § 3-12). Если для температуры и электрического потенциала ввести одинаковые обозначения, то оба уравнения по своему внешнему виду не будут отличаться друг от друга. Однако, хотя по форме записи оба уравнения совпадают, физическое содержание входящих в эти уравнения величин различно. Те явления природы, которые описываются одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, но различны по своему физическому содержанию, называются аналогичными.

Дифференциальные уравнения отражают наиболее общие черты явлений и не учитывают частные, количественные особенности. Такими особенностями являются форма и размеры системы, в которой протекает физический процесс; к частным особенностям относятся также физические свойства рабочих тел, участвующих в процессе, условия протекания процесса на границах системы и др. Частные особенности различных явлений одного и того же класса определяются с помощью условий однозначности.

Проведенный анализ системы безразмерных дифференциальных уравнений и условий однозначности делает более понятными общие условия подобия физических процессов, сформулированные ниже в виде трех правил:

1. *Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т. е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.*

2. *Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях.*

3. *Одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.*

Сформулированные условия являются определением подобия физических процессов.

Первое условие говорит, что подобные процессы должны относиться к одному и тому же классу физических явлений. Помимо одинаковой физической природы подобные процессы должны характеризоваться одинаковыми по записи дифференциальными уравнениями.

Во многих задачах конвективного теплообмена при вынужденном движении можно пренебречь силами тяжести. Очевидно, равенство сил тяжести нулю меняет механизм и математическую запись рассматриваемого процесса. При рассмотрении свободного движения в большом объеме можно пренебречь градиентом давления в жидкости. Исключение градиента давления из уравнения движения приводит к иной записи уравнения, меняется класс рассматриваемого явления.

Таким образом, подобные процессы должны быть процессами конвективного теплообмена, характеризующимися одинаковой природой, одинаковыми действующими силами. Отдельные разновидности процессов конвективного теплообмена могут описываться различными дифференциальными уравнениями (хотя бы они и были частными случаями более общих уравнений), и в этом случае они будут принадлежать к различным классам явлений.

Изменение исходных дифференциальных уравнений в общем случае приводит к изменению системы безразмерных переменных, существенных для изучаемого процесса.

Второе условие подобия требует, чтобы условия однозначности подобных процессов были одинаковыми во всем, кроме числовых значений постоянных, содержащихся в этих условиях¹.

Таким образом, запись размерных условий однозначности подобных процессов в общем виде (буквенном) должна быть идентична. При этом конкретные значения скорости набегающего потока w_0 , температура

¹ В частном случае равенства числовых значений размерных постоянных, содержащихся в условиях однозначности, имеем тождественные процессы (если выполняются прочие условия подобия).

стенки t_c и т. д. могут иметь различные числовые значения. Из сравнения граничных условий (а) и (г) (см. § 5-2) видно, что несмотря на различные значения ω_0 , t_0 , t_c и др., безразмерные граничные условия будут одинаковыми для всех этих процессов.

Из первого и второго условий подобия следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми (тождественными) безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

В безразмерной форме математическая формулировка рассматриваемых подобных процессов одна и та же. Следовательно, рассматриваемые подобные процессы описываются единой формулой, например

$$\text{Nu} = f_1(X_c, \text{Re}, \text{Pr})$$

или

$$\Theta = f_2(X, Y, \text{Re}, \text{Pr}) \text{ и т. д.};$$

функция f_1 будет одна и та же для всех подобных процессов. То же самое можно сказать и о функции f_2 и т. д. Если система безразмерных уравнений и граничных условий достаточно сложна, то при нахождении функций f_1 и f_2 могут встретиться значительные математические трудности. Однако можно утверждать¹, что эти функции существуют.

При соблюдении первых двух условий подобия исследуемые процессы будут зависеть от одних и тех же безразмерных переменных. Этот вывод неизбежно вытекает из того, что подобные процессы описываются тождественными безразмерными уравнениями и граничными условиями.

Первых двух условий недостаточно для установления физического подобия. Нужно добавить условие, что одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение², т. е.

$$X = \text{idem}, Y = \text{idem}, \text{Re} = \text{idem}, \text{Pr} = \text{idem}, \text{Gr} = \text{idem} \text{ и т. п.}$$

Так как подобные процессы характеризуются одинаковыми функциями f_1 , f_2 и т. д. и численно равными определяющими переменными, то определяемые одноименные переменные подобных процессов также будут иметь одинаковые значения, т. е.

$$\text{Nu} = \text{idem}, \Theta = \text{idem}, W_x = \text{idem}, W_y = \text{idem} \text{ и т. д.}$$

Предположим, что рассматривается система размерных дифференциальных уравнений совместно с размерными граничными условиями. Решение уравнений дало бы определенную формулу. Для примера можно взять решения задач теплопроводности, рассмотренные ранее. Подстановка конкретных числовых значений аргументов λ , δ и Δt в формулу $q = (\lambda/\delta)\Delta t$ дала бы определенное числовое значение зависимой переменной q . Очевидно, при одних и тех же значениях λ , δ и Δt все процессы теплопроводности, описываемые этой формулой, будут тождественны — это будет один и тот же процесс.

Иное дело, когда формула представлена в безразмерных переменных. Неизменность каждой в отдельности из определяющих величин X , Y , Re , Pr и Gr , например, в уравнении $\Theta = f(X, Y, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr})$ дает одно и то же значение безразмерной температуры $\Theta = (t - t_0)/(t_c - t_0)$, однако

¹ Предполагается, что задача сформулирована точно.

² idem — тот же самый.

размерные значения температур жидкости и стенки могут быть различными. Одинаковым значениям будет соответствовать множество различных по своим размерным температурным параметрам физических процессов. Только в частном случае может иметь место тождество процессов.

Три условия подобия составляют содержание теоремы Кирпичева—Гухмана (1931 г.).

Как следует из изложенного, помимо выполнения первых двух условий подобия для подобия нужно еще, чтобы одноименные определяющие безразмерные переменные были численно равны. При этом для подобия процессов в целом достаточно, чтобы были численно равны одноименные определяющие переменные, составленные из постоянных величин, заданных в условиях однозначности. Например, подобие двух процессов теплообмена при течении жидкости в трубах будет иметь место, если будут выполнены первые два условия подобия и будут численно равны одноименные определяющие переменные, составленные только из заданных параметров математического описания процесса (постоянных). Процессы в целом будут подобны. В то же время локальные (точечные) значения искомых переменных необходимо рассматривать в точках, характеризующихся равенством одноименных безразмерных координат¹.

Таким образом, критериями подобия по существу являются определяющие безразмерные переменные, составленные из постоянных величин не являющихся функцией независимых переменных).

Как следует из изложенного в этой главе, теорию подобия можно рассматривать как учение о характерных для каждого процесса обобщенных безразмерных переменных. Замена размерных переменных обобщенными является основной чертой теории подобия.

Мы рассмотрели условия подобия физических процессов на примере конвективного теплообмена несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя. Очевидно, условия подобия справедливы не только для рассмотренного частного процесса, но и для других процессов.

Безразмерные переменные можно получить для любого физического явления. Для этого необходимо иметь полное математическое описание рассматриваемого процесса. Знание математического описания является необходимой предпосылкой теории подобия.

Сформулированные ранее условия подобия можно использовать для установления аналогии двух физических разнородных процессов. Для этого в первом условии подобия необходимо потребовать только формальной тождественности дифференциальных уравнений. Таким образом, понятие подобия можно распространить на физически неоднородные (аналогичные) процессы.

3-5. СЛЕДСТВИЯ ИЗ УСЛОВИЙ ПОДОБИЯ

Пусть имеются два подобных процесса конвективного теплообмена, например, при течении жидкости в каналах произвольного поперечного сечения. Обозначим один процесс буквой A , другой — буквой B .

Масштабами линейных размеров выберем какой-либо размер каналов, например, их высоты h_A и h_B . Тогда

$$X_A = \frac{x_A}{h_A}, \quad Y_A = \frac{y_A}{h_A}, \quad Z_A = \frac{z_A}{h_A}$$

¹ В случае нестационарных процессов должно иметь место и равенство безразмерных времен, например равенство чисел Фурье

и

$$X_B = \frac{x_B}{h_B}, \quad Y_B = \frac{y_B}{h_B}, \quad Z_B = \frac{z_B}{h_B}.$$

Будем рассматривать процессы A и B в точках, характеризующихся равенствами:

$$X_A = X_B, \quad Y_A = Y_B \quad \text{и} \quad Z_A = Z_B. \quad (5-25)$$

Точки, удовлетворяющие этим равенствам, называются *сходственными*.

Для сходственных точек справедливы следующие соотношения:

$$x_A = x_B \frac{h_A}{h_B} = x_B c_i, \quad y_A = y_B \frac{h_A}{h_B} = y_B c_i, \quad z_A = z_B \frac{h_A}{h_B} = z_B c_i;$$

здесь $c_i = h_A/h_B$.

Если равенства (5-25) выполняются для двух подобных процессов, то, очевидно, для сходственных точек должны выполняться и равенства

$$W_{xA} = W_{xB} \quad \text{или} \quad w_{xA}/w_{0A} = w_{xB}/w_{0B},$$

где w_{0A} и w_{0B} — значения скорости, заданные условиями однозначности; это может быть, например, скорость на входе соответственно в каналы A и B . Из последнего равенства следует, что

$$\frac{w_{xA}}{w_{xB}} = \frac{w_{0A}}{w_{0B}} = c_w = \text{const},$$

т. е. в любых сходственных точках подобных процессов отношение скоростей есть величина постоянная.

Аналогично можно написать:

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \frac{h_A}{h_B} = c_\alpha = \frac{c_\lambda}{c_i} = \text{const}, \quad \frac{\vartheta_A}{\vartheta_B} = c_\vartheta = \text{const} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, если процессы A и B подобны, то любая физическая величина φ в данной точке процесса A пропорциональна соответствующей величине в сходственной точке процесса B , т. е.

$$\varphi_A = c_\varphi \varphi_B. \quad (5-26)$$

Коэффициенты пропорциональности c_φ называют константами подобия. Они безразмерны; в общем случае не равны единице, не зависят ни от координат, ни от времени и различны для всех величин, имеющих различный физический смысл. Если все константы подобия равны единице, то процессы являются тождественными.

Предположим, что подобным процессам A и B подобен также процесс B . Тогда можно записать:

$$\varphi_A = c'_\varphi \varphi_B,$$

причем c_φ и c'_φ в общем случае не равны.

Таким образом, подобные процессы можно рассматривать как один и тот же процесс, но взятый в различном масштабе, причем масштабы размерных величин могут быть неодинаковыми.

Выбор констант подобия не может быть произведен произвольно. Покажем это на примере.

Для двух подобных процессов A и B вынужденной конвекции справедливо условие $Re_A = Re_B$, где

$$Re_A = \frac{w_{0A} l_{0A}}{\nu_A} \quad \text{и} \quad Re_B = \frac{w_{0B} l_{0B}}{\nu_B}.$$

Одноименные величины, входящие в Re_A и Re_B , связаны между собой с помощью констант подобия:

$$w_{0A} = c_w w_{0B}, \quad l_{0A} = c_l l_{0B} \quad \text{и} \quad \nu_A = c_\nu \nu_B.$$

Подставив эти равенства в Re_A , получим:

$$Re_A = \frac{c_w c_l}{c_\nu} \frac{w_{0B} l_{0B}}{\nu_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} Re_B$$

или

$$\frac{Re_A}{Re_B} = \frac{c_w c_l}{c_\nu} = 1.$$

Это и есть условие, ограничивающее произвольный выбор констант c_w , c_l и c_ν .

Аналогично

$$\frac{Pr_A}{Pr_B} = \frac{c_\nu}{c_a} = 1, \quad \frac{Nu_A}{Nu_B} = \frac{c_a c_l}{c_\lambda} = 1 \quad \text{и т. д.}$$

5-6. МЕТОД РАЗМЕРНОСТЕЙ

Необходимой предпосылкой теории подобия является математическое описание изучаемого процесса в виде дифференциальных (или интегродифференциальных) уравнений и условий однозначности.

Из математической формулировки задачи следует перечень существенных для рассматриваемого процесса физических величин. Если перечень установлен, то выявление чисел подобия может быть произведено методом анализа размерностей.

Иногда список размерных величин устанавливают интуитивно, без строгой формулировки краевой задачи. В этом случае возможны ошибки.

Подробно теория размерностей рассматривается в специальной литературе, например в [Л. 15, 33, 159]. Мы ограничимся рассмотрением некоторых выводов, следующих из анализа размерностей и имеющих интерес для практического использования обобщенных переменных.

Можно различать два вида физических величин: первичные (основные) и вторичные (производные).

Первичные величины характеризуют какое-либо физическое явление непосредственно, без связи с другими величинами. Вторичными являются величины, которые выражаются через первичные согласно определениям или физическим законам. Так, например, если длина и время являются первичными величинами, т. е. если длину нельзя выразить через время (и наоборот), то скорость, представляющая собой по определению отношение длины ко времени, является вторичной, производной величиной.

Выбор первичных величин, вообще говоря, произволен. В системе СИ за первичные выбраны длина (L), масса (M), время (T), темпера-

тура (Θ), сила тока (I), сила света (J); здесь L, M, T, Θ, I и J — символы соответствующих первичных величин. Известны и другие системы первичных величин, используемых или предложенных к использованию. Например, Гауссом было предложено использовать в качестве первичных величин длину, массу и время; остальные мыслимые величины должны быть производными. При выборе первичных величин большое значение имеет вопрос об удобстве их применения.

Символическое выражение производной величины через основные (первичные) называется размерностью. О размерности можно говорить только применительно к определенной системе первичных величин. Размерность можно представить в виде степенной формулы. Применительно к системе СИ формула размерности имеет вид:

$$[\varphi] = L^{n_L} M^{n_M} T^{n_T} \Theta^{n_\Theta} I^{n_I} J^{n_J}, \quad (5-27)$$

где $[\varphi]$ — производная единица измерения; n_i — действительные числа. Размерность вторичной величины относительно данной первичной i может быть охарактеризована значением показателя степени n_i при этой первичной величине. Поэтому безразмерные числа часто называют величинами с нулевой размерностью, так как для них все показатели степени в формуле размерности (5-27) равны нулю. Согласно формуле (5-27) размерность первичной величины можно принять равной единице (берется относительно себя).

Помимо размерности физические величины характеризуются числовыми значениями. Числовые значения первичных величин получают путем прямого измерения, т. е. путем сопоставления измеряемой величины с некоторой величиной той же физической природы, выбранной в качестве стандарта и называемой единицей измерения. Выбор единиц измерения первичных величин (основных единиц измерения) произволен и определяется вопросами удобства их использования.

Числовое значение вторичной величины определяется косвенным путем, его находят по числовым значениям первичных величин. От выбора единиц измерения первичных величин зависят численные значения как первичных, так и вторичных величин. От выбора основных единиц измерения не зависят только численные значения безразмерных величин (величин с нулевой размерностью).

Выбор перечня первичных величин и их единиц измерения является необходимым и основным шагом на пути создания системы единиц измерения.

Рассмотрим пример использования метода размерностей. Определим безразмерные переменные, соответствующие математической формулировке задачи, приведенной в § 5-1. Из этой задачи следует, что

$$\theta = f(x, y, \theta_c, l_0, \omega_0, \nu, a, g\beta). \quad (a)$$

В списке величин, существенных для рассматриваемого процесса, представлено девять переменных ($n=9$). В рассматриваемом нами примере использованы три первичные величины системы единиц измерения СИ: длина, время, температура ($k=3$).

Пользуясь возможностью произвольного выбора основных единиц измерения, разделим переменные, входящие в уравнение (а), на две группы; на величины с независимой размерностью (основные) и на величины с зависимой размерностью (производные). Мы как бы создаем новую систему единиц измерения (специально для рассматриваемой за-

дачи). Первый шаг на этом пути — выбор перечня первичных величин (величин с независимой размерностью).

За величины с независимой размерностью выберем постоянные

$$[l_0]=L, [\vartheta_c]=\Theta \text{ и } [v]=L^2T^{-1}.$$

Число величин с независимой размерностью соответствует числу первичных величин системы СИ, используемых в рассматриваемом примере ($k=3$).

Размерность остальных величин выразим через $[l_0]$, $[\vartheta_c]$ и $[v]$ согласно формуле размерности:

$$\begin{aligned} [x] &= [l_0], [y] = [l_0], [\vartheta] = [\vartheta_c], [\omega_0] = \\ &= [l_0]T^{-1} = [l_0]^{-1}[v], [a] = [l_0]^2T^{-1} = [v], \\ [g\beta] &= [l_0][\Theta]^{-1}T^{-2} = [l_0]^{-3}[v][\Theta]^{-1}. \end{aligned}$$

Назначим единицы измерения величин с независимой размерностью. За основные единицы измерения в данном случае удобно выбрать числовые значения постоянных l_0 , ϑ_c и v , заданные в условиях однозначности. Новые числовые значения физических величин x' , ϑ' и др. получают путем сравнения с новым стандартом, т. е. $x' = x/l_0$, $\vartheta' = \vartheta/\vartheta_c$ и т. д. Физический процесс не зависит от выбора единиц измерения, поэтому уравнение (а) должно сохранить свою структуру при различных значениях масштабов пересчета. В новых числовых значениях переменных уравнение (а) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{\vartheta_c}{\vartheta_c}, \frac{l_0}{l_0}, \frac{\omega_0}{al_0^{-1}}, \frac{v}{v}, \frac{a}{v}, \frac{g\beta}{l_0^{-3}v\vartheta_c^{-1}}\right).$$

Здесь все величины-комплексы являются безразмерными. Величины ϑ_c/ϑ_c , l_0/l_0 , v/v , равные единице, могут быть выведены из-под знака функции.

Используем обозначения чисел подобия, введенные в § 5-2. Тогда

$$\Theta = f(X, Y, \text{Pe}, \text{Pr}, \text{Gr}). \quad (б)$$

Аналогичный результат ранее был получен методом масштабных преобразований — формула (5-22).

Согласно (4-22) в данном случае

$$\frac{\alpha\vartheta_c}{\lambda} = -\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_{y=0},$$

т. е. комплекс $\alpha\vartheta_c/\lambda = q_c/\lambda$ зависит от тех же переменных, что и ϑ . Тогда, так как

$$\left[\frac{\alpha\vartheta_c}{\lambda}\right] = \Theta L^{-1} = [\vartheta_c][l_0]^{-1} \text{ и } \left(\frac{\alpha\vartheta_c}{\lambda}\right)' = \frac{\alpha\vartheta_c/\lambda}{\vartheta_c l_0^{-1}} = \frac{al_0}{\lambda} = \text{Nu},$$

получаем, что число Nu зависит от тех же безразмерных величин, что и Θ — см. уравнение (б).

Из сравнений (а) и (б) следует, что при переходе к безразмерным величинам число переменных формально сократилось от девяти до шести. Этот вывод соответствует так называемой π -теореме.

Согласно π -теореме физическое уравнение, содержащее $n \geq 2$ размерных величин, из которых $k \geq 1$ величин имеют независимую размер-

ность, после приведения к безразмерному виду будет содержать $n-k$ безразмерных величин.

Метод масштабных преобразований, использованный в § 5-1, не показывает, сколько безразмерных переменных мы должны получить. Число безразмерных переменных указывает π -теорема. Ошибка в определении числа безразмерных переменных, актуальных для рассматриваемого процесса, может привести к серьезным ошибкам при описании экспериментальных данных в виде уравнений подобия.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Математическая формулировка задачи, приведенная в § 5-1, записана для ламинарного пограничного слоя, так как не учтены коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения. Полагают, что λ_t и μ_t зависят от тех же величин, от которых зависят поля осредненных скоростей и температуры. Тогда согласно теории размерностей полученная система чисел подобия справедлива и для турбулентного течения. Конечно, входящие в числа подобия значения температур и скоростей уже будут осредненными во времени.

5-7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

При моделировании изучение процесса в образце заменяется исследованием этого же процесса на модели. Очевидно, процесс в модели должен быть осуществлен так, чтобы результаты его изучения можно было перенести на образец. Условия моделирования, т. е. условия, которым должна удовлетворять модель и протекающий в ней процесс, дает теория подобия. Если процесс в модели будет подобен процессу в образце, то результаты исследования на модели могут быть применены к образцу.

Моделирование по существу включает в себя две самостоятельные задачи. Во-первых, в модели необходимо осуществить процесс, подобный процессу, происходящему в образце, и, во-вторых, выполнить на модели все требуемые измерения и наблюдения. Мы рассматриваем первую задачу. Техника измерений и наблюдений описывается в специальной литературе [Л. 70, 139, 143 и др.]. Чтобы процессы в модели и образце были подобны, необходимо осуществить сформулированные ранее условия подобия.

Первое условие подобия говорит, что моделировать следует качественно одинаковые процессы, т. е. процессы, имеющие одинаковую физическую природу и описываемые одинаковыми дифференциальными уравнениями.

Второе условие подобия требует, чтобы условия однозначности подобных процессов (в образце и модели) были одинаковы во всем, кроме числовых значений постоянных, содержащихся в этих условиях.

Условия однозначности для стационарных процессов состоят:

- 1) из геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- 2) из физических условий, характеризующих физические свойства рассматриваемой среды;
- 3) из граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах жидкости.

Таким образом, необходимо осуществить геометрическое подобие образца и модели. Все размеры образца и модели, существенные для

процесса конвективного теплообмена, должны быть связаны между собой соотношением $l_{\text{обр}} = c_l l_{\text{мод}}$, т. е. модель должна быть построена как точная копия образца, уменьшенная в c_l раз. Конечно, копироваться должна не внешняя форма образца, а внутренняя конфигурация каналов, по которым движутся газы или жидкости.

Обычно геометрическое подобие осуществить нетрудно. Следует только иметь в виду, что изменение геометрических размеров не должно привести к качественному изменению процесса в модели и, следовательно, к нарушению первого условия подобия. Например, газ нельзя считать сплошной, средой и применять для исследования его течения и теплообмена используемые нами дифференциальные уравнения конвективного теплообмена, если параметр Кнудсена l/l_0 достаточно велик (см. § 4-4). При течении газа в трубе за характерный размер l_0 может быть принят диаметр d . Если средняя длина свободного пробега молекул $\bar{l}$ будет примерно больше $0,001d$, то такое течение газа по своим свойствам отклоняется от течения сплошной среды.

Если физические параметры постоянны, как это было принято ранее при выводе дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, то выполнение подобия физических условий особых трудностей не представляет. Однородные физические параметры в модели и образце должны быть также связаны соответствующим масштабом преобразования c_φ . При этом, если физические свойства жидкости в образце и модели одни и те же, $c_\varphi = 1$.

Сложнее обстоит дело, если физические параметры переменны и эта переменность проявляется в исследуемом процессе. Этот вопрос будет рассмотрен несколько позже.

При моделировании необходимо также осуществить подобие процессов на границах исследуемой жидкости. Чаще всего это условие ограничивается требованием подобия условий входа жидкости в образец и модель (чтобы обеспечить подобное распределение скоростей на входе) и требованием подобия температурных полей на входе в аппарате и на поверхности тел, участвующих в теплообмене. Подобия условий входа жидкости можно достичь путем устройства входного участка модели геометрически подобным входному участку образца. Если температура жидкости на входе в образец не меняется по сечению канала, условие подобия температурных полей на входе выдержать нетрудно. Для этого достаточно, чтобы в канале, подводящем жидкость или газ к модели, не было теплообмена.

Если же температурное поле на входе имеет сложный характер, то осуществить в модели такое распределение температур труднее. Реализация подобия температурных полей на поверхности теплообмена часто также представляет определенные трудности. В этом случае вопрос о точном осуществлении граничных условий становится предметом особых забот экспериментатора.

Третье условие подобия требует, чтобы одноименные критерии подобных процессов имели одинаковые значения. При этом определяемые одноименные безразмерные переменные подобных процессов также будут иметь одинаковые значения.

Конвективная теплоотдача существенно зависит от характера движения жидкости или газа. При вынужденном движении картина течения в первую очередь зависит от числа Рейнольдса. Поэтому при модели-

ровании должно быть осуществлено равенство чисел Рейнольдса на входе в образец и модель:

$$\frac{\omega_0 \text{ мод} l_{0 \text{ мод}}}{\nu_{\text{мод}}} = \frac{\omega_{0 \text{ обр}} l_{0 \text{ обр}}}{\nu_{\text{обр}}}.$$

Отсюда скорость жидкости на входе в модель должна быть равна:

$$\omega_{\text{мод}} = \omega_{0 \text{ обр}} \frac{l_{0 \text{ обр}} \nu_{\text{мод}}}{l_{0 \text{ мод}} \nu_{\text{обр}}}.$$

Положим, что в модели и образце протекает одна и та же жидкость; тогда, если не учитывать различия температур жидкости, $\nu_{\text{мод}}/\nu_{\text{обр}} = 1$. Пусть модель построена в масштабе $1/10$, тогда $l_{0 \text{ обр}}/l_{0 \text{ мод}} = 10$. Следовательно, $\omega_{0 \text{ мод}} = 10\omega_{0 \text{ обр}}$.

Это значит, что для удовлетворения равенства критериев Рейнольдса в рассматриваемом случае скорость жидкости в модели надо увеличивать во столько раз, во сколько уменьшены геометрические размеры модели. Очевидно, помимо равенства критериев Рейнольдса должно быть осуществлено и равенство других критериев подобия. В частности, должно выполняться условие

$$R_{\text{мод}} = R_{\text{обр}}.$$

Последнее условие, принципиально допуская возможность замены одной жидкости другой, по существу серьезно ограничивает такую операцию. Так, например, вода только при температурах примерно от 150 до 300 °С (и, следовательно, при давлениях, больших $5 \cdot 10^5$ Па) имеет значения чисел Прандтля, близкие к числам Прандтля газов. Чтобы моделировать несжимаемые газовые течения водой, в модели приходилось бы поддерживать слишком высокое давление.

Замена одной рабочей жидкости другой еще более усложняется ввиду переменности физических параметров. Чтобы учесть влияние переменности физических параметров, необходимо изменить систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, полученную ранее. При выводе уравнений переменные значения физических параметров нельзя выносить из-под знака производных. Кроме того, к основной системе дифференциальных уравнений нужно присоединить уравнения вида

$$\lambda = f_1(t), \mu = f_2(t), c_p = f_3(t) \text{ и } \rho = f_4(t),$$

описывающие изменение физических параметров в зависимости от температуры¹.

Согласно первому условию подобия эти уравнения, записанные в безразмерном виде, должны быть тождественными для одноименных параметров. Только в этом случае можно говорить о точном подобии. При этом физические параметры будут изменяться в рассматриваемом пространстве, т. е. будут зависеть от координат (при нестационарном процессе и от времени) и, следовательно, являться зависимыми переменными.

Теория не дает какого-либо общего единообразного уравнения, описывающего изменение данного физического параметра в зависимости от температуры и пригодного для всех жидкостей, используемых в настоящее время в технике. Такие уравнения имеются в лучшем случае для отдельных групп теплоносителей, рассматриваемых в определенном интервале изменения температур.

¹ В некоторых задачах приходится учитывать и зависимость физических параметров от давления.

Это обстоятельство накладывает серьезное ограничение на возможность точного моделирования, так как выполнить точное подобие процессов конвективного теплообмена в широком интервале изменения рода жидкости и температурных параметров процесса не представляется возможным. В частности, это приводит к тому, что при точном моделировании возможность замены газа капельной жидкостью практически исключается из-за неподобия полей физических параметров в образце (газ) и модели (капельная жидкость).

Таким образом, выполнение точного подобия процессов конвективного теплообмена и, следовательно, проведение точного моделирования этих процессов часто наталкивается на непреодолимые трудности.

В связи с этим возникает необходимость в разработке методов приближенного моделирования.

Одной из возможностей приближенного моделирования является проявление так называемой автомодельности процесса относительно какого-либо критерия. Говорят, что определяемая величина автомодельна относительно критерия подобия, если она не зависит от него.

Если процесс автомоделен относительно какого-либо критерия подобия, то при моделировании отпадает необходимость соблюдать равенство этого критерия для образца и модели.

Явление автомодельности дает возможность упрощения дифференциальных уравнений и условий однозначности. Члены уравнений (или условий однозначности), учитывающие факторы, относительно которых процесс оказывается автомодельным, могут быть опущены или видоизменены.

Ввиду трудности точного моделирования на практике часто используется приближенный метод локального теплового моделирования. Особенность этого метода заключается в том, что подобие процессов стараются осуществить лишь в том месте, где производится исследование теплоотдачи. Например, если изучается теплоотдача при омывании жидкостью пучка труб, то в опытах в теплообмене может участвовать только одна из труб. Остальные трубы служат только для придания модели формы, подобной образцу. Данные о теплоотдаче получают из измерений, проведенных на единичной трубе.

Предполагается, что теплоотдача испытуемой трубы в основном зависит от характера ее омывания, определяемого расположением системы труб, а не тепловыми условиями.

Метод локального моделирования сравнительно прост и в ряде случаев позволяет получать достаточно точные результаты. Следует, однако, учитывать, что необоснованное применение метода локального теплового моделирования может привести и к значительным ошибкам.

Глава шестая

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ И РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛООТДАЧИ

6-1. МЕСТНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ

Местный (локальный) коэффициент теплоотдачи определяется по уравнению (4-4)

$$\alpha = \frac{dQ_0}{(t_c - t_{мк}) dF} = \frac{q_0}{t_c - t_{мк}}.$$

Значения q_c и t_c берутся для элемента поверхности df . Выбор же расчетной температуры $t_{ж}$ законом Ньютона — Рихмана не предопределен. В общем случае конвективного теплообмена температура жидкости переменна в рассматриваемом пространстве. Появляется необходимость в договоренности о том, какое значение температуры жидкости выбирается за расчетное, т. е. вводимое в закон Ньютона — Рихмана.

В существующей практике даже для одной и той же задачи за расчетную могут быть приняты различные значения температуры. Например, при течении жидкости в трубах за расчетную принимают среднюю в рассматриваемом сечении температуру жидкости $\bar{t}$ и температуру жидкости на входе в трубу $t_{вх}$. В зависимости от выбора расчетной температуры жидкости числовые значения α могут быть различными, различны и законы изменения α вдоль трубы.

В книге за расчетную в основном будет приниматься средняя в данном сечении трубы температура жидкости. При рассмотрении обтекания тела неограниченным потоком за расчетную будет приниматься температура жидкости за пределами теплового пограничного слоя.

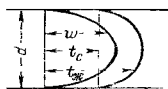


Рис. 6-1. Распределение температуры и скорости жидкости по сечению канала.

6.2. СРЕДНЯЯ ПО СЕЧЕНИЮ ПОТОКА ТЕМПЕРАТУРА ЖИДКОСТИ

В общем случае температура и скорость жидкости переменны по сечению потока. Возможное распределение t и w_x в определенном сечении трубы показано на рис. 6-1.

Выделим в поперечном сечении канала элементарную площадку df . Массовый расход жидкости через df равен $dG = \rho w_x df$, кг/с. Количество теплоты, переносимое конвекцией в единицу времени через df , будет равно:

$$dQ_x = \rho w_x i df.$$

Интегрируя по всему сечению, получаем количество теплоты, переносимое в единицу времени через данное сечение с координатой x :

$$Q_x = \int_0^{f_0} \rho w_x i df. \quad (a)$$

Выберем среднее значение удельной энтальпии $\bar{i}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$Q_x = \bar{i} \int_0^{f_0} \rho w_x df = \bar{i} G. \quad (б)$$

Из уравнений (а) и (б) следует, что

$$\bar{i} = \frac{\int_0^{f_0} \rho w_x i df}{\int_0^{f_0} \rho w_x df} = \frac{1}{G} \int_0^{f_0} \rho w_x i df. \quad (6-1)$$

Определенная по уравнению (6-1) средняя энтальпия называется среднемассовой по сечению энтальпией потока. Соответствующая ей

температура $\bar{t}$ является среднемассовой по сечению температурой потока.

Если изменением ρ и c_p можно пренебречь, то уравнение (6-1) переходит в следующее:

$$\bar{t} = \frac{1}{V} \int_0^{f_0} \omega_x t df, \quad (6-2)$$

где $V = G/\rho$ — объемный расход жидкости, $\text{м}^3/\text{с}$.

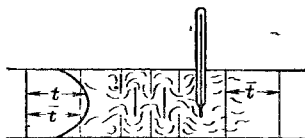


Рис. 6-2. Экспериментальное определение средней массовой температуры жидкости

Если по сечению потока также и скорость постоянна, то формула осреднения принимает вид:

$$\bar{t} = \frac{1}{f_0} \int_0^{f_0} t df. \quad (6-3)$$

Для экспериментального определения среднемассовой температуры в канале устанавливают перемешивающее устройство. За смесителем температура выравнивается, и среднемассовую температуру можно определить путем измерения в точке (рис. 6-2).

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПО БАЛАНСУ ЭНЕРГИИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим ламинарное течение несжимаемой жидкости в плоской щели, высота которой $2h$ намного меньше ширины b . Будем полагать, что поля энтальпии и скорости симметричны относительно плоскости xz (рис. 6-3). Симметрии распределения энтальпии и скорости соответствует и симметрия поля температуры. Из симметричности задачи следует также, что при $y=0$ составляющие вектора плотности теплового потока $g_{y\text{теп}} = -\lambda \partial t / \partial y$ и $q_{y\text{мех}} = \rho \omega_y i$ равны нулю. Составляющие q в областях $(0, +h)$ и $(0, -h)$ имеют соответственно разные знаки, но одинаковы по модулю при том же значении $|y|$. Плоскость xz является адиабатической поверхностью.

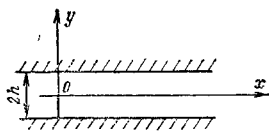


Рис. 6-3 К определению теплового потока по балансу энергии жидкости.

Принятые условия позволяют также пренебречь производными по z (рассматриваем так называемое «плоское течение»).

В рассматриваемом случае уравнение энергии принимает вид:

$$\rho \left(\frac{\partial i}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial i}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q_v.$$

Прибавив к левой части $\rho i (\partial \omega_x / \partial x + \partial \omega_y / \partial y) = 0$, получим:

$$\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \rho \omega_x \frac{\partial i}{\partial x} + \rho i \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial i}{\partial y} + \rho i \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q_v,$$

или

$$\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \omega_x i) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \omega_y i) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q_v.$$

Умножим левую и правую части последнего уравнения на dy и проинтегрируем в пределах от $y=0$ до $y=h$:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho w_x i)}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho w_y i)}{\partial y} dy = \\ & = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy + \int_0^h q_v dy. \end{aligned} \quad (6-4)$$

Третий интеграл левой части равен нулю, так как при $y=h$ имеем $w_y=0$ ввиду непроницаемости стенки, при $y=0$ $w_y=0$ ввиду симметрии полей.

Вычислим второй интеграл правой части уравнения (6-4):

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy = \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^h = \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=h} = -q_c.$$

Так как τ , x и y являются независимыми переменными, последовательность операций дифференцирования по τ и x и интегрирования по y может быть изменена. В результате можно написать:

$$q_c = - \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^h \rho i dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left(\rho w_x i - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dy - \int_0^h q_v dy \right]. \quad (6-5)$$

Умножим и разделим правую часть на периметр $u \approx b$. Учитывая, что элемент площади поперечного сечения df равен $b \cdot dy$, последнее уравнение можно записать в виде

$$q_c = - \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{f_0} \rho i df + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{f_0} \left(\rho w_x i - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) df - \int_0^{f_0} q_v df \right]; \quad (6-6)$$

здесь f_0 — полная площадь поперечного сечения, соответствующая расчетному периметру u .

Уравнение (6-6) в отличие от (6-5) справедливо для каналов любого поперечного сечения, постоянного по длине. Первый член правой части учитывает аккумуляцию теплоты в нестационарном процессе, второй — аксиальный перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью, третий — выделение теплоты внутренними источниками.

Тепловой поток, проходящий через стенки трубы длиной l , определяется следующим образом:

$$Q_c = \int_0^l q_c u dx. \quad (6-7)$$

Если $q_v=0$, $|\rho w_x i| \gg \left| \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right|$ и процесс стационарен, имеем из уравнения (6-6):

$$q_c = - \frac{1}{u} \left(\frac{d}{dx} \int_0^{f_0} \rho w_x i df \right) = - \frac{1}{u} \frac{dQ_x}{dx}.$$

Тогда

$$Q_c = - \int_0^l \frac{1}{u} \frac{dQ_c}{dx} u dx = Q_{x=0} - Q_{x=l} = (\bar{i}G)_{x=0} - (\bar{i}G)_{x=l}$$

или, поскольку $G = \text{const}$,

$$Q_c = G(\bar{i}_{x=0} - \bar{i}_{x=l}). \quad (6-8)$$

Если $c_p = \text{const}$, то последнее уравнение может быть записано в следующем виде:

$$Q_c = Gc_p(\bar{i}_{x=0} - \bar{i}_{x=l}). \quad (6-9)$$

Для местной плотности теплового потока:

$$q_c = \frac{Gc_p}{u} \frac{d\bar{i}}{dx}. \quad (6-10)$$

Уравнения (6-8) и (6-9) широко используются в расчетной практике. Они справедливы только для сравнительно простых процессов. В более общем случае применяют уравнения (6-6) и (6-7). Заметим, что применимость уравнения (6-8) и (6-9) не ограничивается требованием постоянства поперечного сечения. Уравнение (6-8) справедливо и для турбулентного течения.

6-4. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ТЕМПЕРАТУР ЖИДКОСТИ И СТЕНКИ ПО ДЛИНЕ ТРУБЫ

Найдем распределение среднемассовой по сечению температуры жидкости t вдоль длины трубы (знак осреднения опущен). Полагаем, что распределения $\alpha = \alpha(x)$ и $t_c = t_c(x)$ известны. Согласно (6-10) для элемента трубы длиной dx можно написать:

$$q_c(x)u dx = \alpha(x)[t_c(x) - t]u dx = Gc_p dt, \quad (6-11)$$

где по условию G , c_p и u не зависят от продольной координаты x , отсчитываемой по-прежнему от начала трубы. Уравнение (6-11) представим в виде

$$\frac{dt}{dx} + f(x)t = g(x); \quad f(x) = \frac{\alpha(x)u}{Gc_p}, \quad g(x) = f(x)t_c(x). \quad (6-12)$$

Используем метод вариации произвольной постоянной $c(x)$ (метод Лагранжа), согласно которому решение ищем в виде

$$t = c(x) \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right]. \quad (6-13)$$

Подставив значение t согласно (6-13) в уравнение (6-12), получим:

$$\begin{aligned} \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right] \frac{dc(x)}{dx} - c(x)f(x) \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right] + \\ + c(x)f(x) \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right] = g(x) \end{aligned}$$

или после сокращений

$$\frac{dc(x)}{dx} = g(x) \exp \left[\int_0^x f(x) dx \right].$$

Разделив переменные и проинтегрировав в пределах от $x=0$ до x , имеем:

$$c(x) = \int_0^x g(x) \exp \left[\int_0^x f(x) dx \right] dx + c(0);$$

здесь $c(0)$ — значение произвольной постоянной при $x=0$. После подстановки $c(x)$ в уравнение (6-13):

$$t = \left\{ c(0) + \int_0^x g(x) \exp \left[\int_0^x f(x) dx \right] \right\} \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right].$$

Обозначим температуру жидкости на входе в трубу $t(0)$ через t_0 . При $x=0$ из последнего уравнения следует, что

$$t_0 = \left\{ c(0) + \int_0^0 g(x) \exp \left[\int_0^0 f(x) dx \right] dx \right\} \exp \left[- \int_0^0 f(x) dx \right] = c(0).$$

Подставляя значение $c(0)$, получаем:

$$t = \left[t_0 + \int_0^x g(x) e^{\varphi(x)} dx \right] e^{-\varphi(x)}. \quad (6-14)$$

Здесь обозначено

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{\alpha(x) u}{Gc_p} dx, \quad g(x) = \frac{\alpha(x) u}{Gc_p} t_c(x). \quad (6-15)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (6-14). Пусть $t_c = \text{const}$. Учитывая, что

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x) dx = f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0,$$

получим из уравнения (6-14):

$$\begin{aligned} t &= \left[t_0 + \int_0^x f(x) t_c e^{\varphi(x)} dx \right] e^{-\varphi(x)} = \left[t_0 + t_c \int_0^x \frac{d\varphi}{dx} e^{\varphi(x)} dx \right] e^{-\varphi(x)} = \\ &= \left[t_0 + t_c \int_0^{\varphi(x)} e^{\varphi} d\varphi \right] e^{-\varphi(x)} = [t_0 + t_c (e^{\varphi(x)} - 1)] e^{-\varphi(x)} = t_c + (t_0 - t_c) e^{-\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Обозначая $\vartheta = t - t_c$ (и, следовательно, $\vartheta_0 = t_0 - t_c$, где ϑ_0 — начальный температурный напор), полученный результат можно записать следующим образом:

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\varphi(x)} = \vartheta_0 \exp \left[- \int_0^x \frac{\alpha(x) u}{Gc_p} dx \right]. \quad (6-16)$$

Уравнение (6-16) описывает изменение по длине трубы как средне-массовой по сечению температуры жидкости, так и температурного напора (при $t_c = \text{const}$). Если и $\alpha = \text{const}$, то

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\alpha u}{G c_p} dx = \frac{\alpha u}{G c_p} x = A x.$$

Изменение температуры жидкости (температурного напора), соответствующее условиям $t_c = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, показано на рис. 6-4.

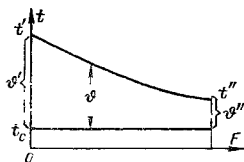


Рис. 6-4. Изменение температурного напора Φ вдоль трубы при $t_c = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$.

Если решена задача нахождения зависимости $t(x)$ при заданных $\alpha(x)$ и $t_c(x)$, то из закона Ньютона—Рихмана можно легко определить и распределение $q_c(x)$. В частном случае $\alpha = \text{const}$ и $t_c = \text{const}$ имеем:

$$q_c(x) = \alpha[t_c - t(x)] = -\alpha\vartheta = -\alpha\vartheta_0 e^{-Ax}.$$

Изменение q_c аналогично изменению температуры жидкости, изображенному на рис. 6-4.

Если известны или предварительно найдены зависимости $\alpha(x)$ и $q_c(x)$, то из уравне-

ния (6-10) следует, что

$$dt = \frac{u}{G c_p} q_c(x) dx$$

или

$$\int_{t_0}^t dt = \frac{u}{G c_p} \int_0^x q_c(x) dx.$$

В результате средняя по сечению трубы температура жидкости описывается уравнением

$$t = t_0 + \frac{u}{G c_p} \int_0^x q_c(x) dx. \quad (6-17)$$

В частном случае $q_c = \text{const}$ из (6-17) следует, что

$$t = t_0 + \frac{q_c u}{G c_p} x, \quad (6-18)$$

т. е. температура жидкости изменяется по длине трубы линейно. Если и $\alpha = \text{const}$, то из закона Ньютона—Рихмана имеем:

$$t_c(x) - t(x) = \frac{q_c}{\alpha} = \text{const},$$

т. е. температурный напор не изменяется по длине трубы.

Поскольку при $q_c = \text{const}$ температура t является линейной функцией x , линейно изменяется и t_c . В более общем случае, когда $\alpha = \alpha(x)$ и $q_c = q_c(x)$, из закона Ньютона—Рихмана и уравнения (6-17) получаем:

$$t_c = t(x) + \frac{q_c(x)}{\alpha(x)} = t_0 + \frac{q_c(x)}{\alpha(x)} + \frac{u}{G c_p} \int_0^x q_c(x) dx. \quad (6-19)$$

6-5. ОСРЕДНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ И ТЕМПЕРАТУРНОГО НАПОРА

Для расчета теплопередачи часто необходимо знать среднее по поверхности значение коэффициента теплоотдачи. Среднее значение α определяют согласно закону Ньютона — Рихмана:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q_c}{\Delta t F} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta t}. \quad (6-20)$$

Вычисляя средние значения плотности теплового потока $\bar{q}_c$ и температурного напора Δt как среднеинтегральные, формулу (6-20) можно записать в виде

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} q_c dF}{\frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \Delta t dF} = \frac{\int_0^{F_0} \alpha \Delta t dF}{\int_0^{F_0} \Delta t dF}; \quad (6-21)$$

здесь F_0 — поверхность осреднения. Если α изменяется только вдоль одной координатной оси, то

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_0^{x_0} \alpha \Delta t dx}{\int_0^{x_0} \Delta t dx}. \quad (6-21')$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи часто определяют как среднеинтегральное:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \alpha dF \quad \text{или} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \alpha dx. \quad (6-22)$$

Осреднение по формулам (6-21) и (6-22) может дать различные результаты. В некоторых случаях разница достигает многих десятков процентов.

Если $\Delta t = t_c - t_{ж} = \text{const}$, то формула (6-21) переходит в (6-22) и последнее уравнение может рассматриваться как частный случай уравнения (6-21).

В настоящее время в теплопередаче при $\Delta t \neq \text{const}$ используются как первый, так и второй методы осреднения. Предпочтительнее использовать первый — согласно уравнению (6-21). При $\Delta t \neq \text{const}$ использование среднеинтегрального значения коэффициента теплоотдачи приводит к необходимости введения в расчет специально подобранного среднего температурного напора; только в этом случае можно получить правильное значение теплового потока.

В дальнейшем средние значения α и Nu (как и других величин) будут отмечены горизонтальной чертой над буквенным символом.

Если произведено осреднение коэффициента теплоотдачи по всей рассматриваемой поверхности, то $\bar{\alpha}$ не будет зависеть от координат. Если же осреднение произведено на отдельных участках поверхности, то

такие средние значения в общем случае могут изменяться от участка к участку.

Уравнения, полученные в предыдущем параграфе, принципиально позволяют вычислить среднееинтегральный температурный напор

$$\overline{\Delta t} = \frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} \Delta t dF \quad \text{или} \quad \overline{\Delta t} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Delta t dx, \quad (6-23)$$

необходимый для расчета по уравнению (6-21). Однако в общем случае вычисление среднееинтегрального напора практически может представить очень серьезные трудности (особенно при экспериментальном определении средних коэффициентов теплоотдачи).

Поэтому часто средние коэффициенты теплоотдачи определяют по уравнению (6-20), но в расчет вводят среднее арифметический

$$\overline{\Delta t}_a = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} \quad (6-24)$$

или среднелогарифмический

$$\overline{\Delta t}_л = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} \quad (6-25)$$

температурные напоры (здесь Δt_1 и Δt_2 соответственно местный температурный напор в начале и в конце участка осреднения). Средние температурные напоры $\overline{\Delta t}_a$ и $\overline{\Delta t}_л$ являются частными случаями среднееинтегрального температурного напора, в общем случае использование $\overline{\Delta t}_a$ и $\overline{\Delta t}_л$ является условностью.

Получим формулу (6-25). Пусть $t_c = \text{const}$. При этом местный температурный напор определяется уравнением (6-16). Тогда

$$\overline{\Delta t} = \overline{\vartheta} = \frac{1}{x} \int_0^x \vartheta dx = \frac{1}{x} \int_0^x \vartheta_0 \exp \left[- \int_0^x f(x) dx \right], \quad (6-26)$$

где $f(x) = \alpha(x) u / Gc_p$. Вводя среднееинтегральное значение коэффициента теплоотдачи на участке $0-x$, можно написать

$$\frac{\overline{\alpha u}}{Gc_p} x = \overline{f} x = \int_0^x f(x) dx.$$

Подставляя это значение в уравнение (6-26) и интегрируя, получаем:

$$\overline{\vartheta} = \frac{1}{x} \int_0^x \vartheta_0 e^{-\overline{f} x} dx = - \frac{\vartheta_0}{x} \left| \frac{e^{-\overline{f} x}}{\overline{f}} \right|_0^x = - \frac{\vartheta_0}{x \overline{f}} (e^{-\overline{f} x} - 1).$$

Из уравнения $\vartheta = \vartheta_0 \exp(-\overline{f} x)$ следует, что

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-\overline{f} x} \quad \text{и} \quad \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = -\overline{f} x.$$

Подставляя эти значения в уравнение для $\overline{\vartheta}$, получаем:

$$\overline{\vartheta} = \frac{\vartheta_0}{\ln \vartheta / \vartheta_0} \left[\frac{\vartheta}{\vartheta_0} - 1 \right] = \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\ln \vartheta_0 / \vartheta} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \Delta t_1 / \Delta t_2} = \overline{\Delta t}_л.$$

Таким образом, среднелогарифмический температурный напор соответствует среднееинтегральному при условии, что $t_c = \text{const}$ и коэффициент теплоотдачи осреднен по уравнению (6-22) (или $\alpha = \text{const}$). Остаются в силе и другие ограничения, принятые при получении формулы (6-10) или (6-16).

Сравним $\overline{\Delta t}_a$ и $\overline{\Delta t}_l$. На рисунке 6-5 заштрихованы площадки, соответствующие экспоненциальному и линейному законам изменения температуры жидкости вдоль поверхности при $t_c = \text{const}$. Заштрихованная поверхность пропорциональна соответственно Δt_a или Δt_l . Из сравнения следует, что $\overline{\Delta t}_a > \overline{\Delta t}_l$.

Если $\Delta t_2/\Delta t_1 > 0,5$, то с точностью, достаточной для большинства теплотехнических расчетов, средний температурный напор $\overline{\Delta t}_l$ соответствует среднеарифметическому Δt_a (различие меньше 4%).

Как следует из изложенного в данном параграфе, числовые значения α могут зависеть от метода определения и, в частности, от выбора расчетного значения Δt . При получении α следует указывать, каким образом определено это значение. К сожалению, подобного рода сведения не всегда приводятся в публикациях.

Если, например, погрешность экспериментального определения α превышает возможную неточность, связанную с неопределенностью $\overline{\Delta t}$, то отмеченная неопределенность не имеет значения.

6-6. ПОЛУЧЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Приведенные в предыдущих параграфах формулы используются при первичной обработке результатов измерений процесса теплообмена.

Прежде чем обрабатывать опытные данные в числах подобия, нужно установить, от каких чисел зависит определяемое значение. Для этого можно воспользоваться методом, описанным ранее. Составляется система дифференциальных уравнений, описывающих экспериментально изучаемый процесс, и формулируются условия однозначности. Затем математическое описание процесса приводится к безразмерному виду. Предположим, было получено, что

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}).$$

По данным измерений подсчитываются значения Re и Pr и соответствующие им значения Nu . Зависимость между числами подобия обычно представляется в виде степенных функций, например: $\text{Nu} = c \text{Re}^n \text{Pr}^m$, где c, n, m являются постоянными безразмерными числами.

Такого рода зависимости применимы лишь в тех пределах изменения аргумента, в которых подтверждены опытом.

Предположим, что число Nu зависит только от Re (или что опыты проводились с теплоносителем, число Прандтля которого является постоянной величиной). В этом случае $\text{Nu} = c \text{Re}^n$.

Логарифмируя последнее уравнение, получаем: $\lg \text{Nu} = \lg c + n \lg \text{Re}$.

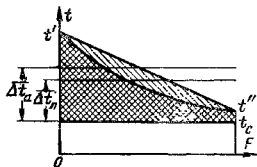


Рис. 6-5. Сравнение среднелогарифмического и среднеарифметического температурных напоров.

Обозначая $\lg Nu$ через Y , $\lg Re$ через X и $\lg c$ через A , можно написать:

$$Y = A + nX.$$

Последнее выражение является уравнением прямой линии. Показатель степени n представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс. Следовательно, значение n можно определить с помощью графического представления опытных данных в координатах $\lg Nu = f(\lg Re)$ (рис. 6-6).

Показатель степени n равен:

$$n = \lg \varphi = a/b.$$

Постоянная c определяется из уравнения $c = Nu/Re^n$, которому удовлетворяет любая точка прямой.

Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все точки укладываются на прямую. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую обычно заменяют ломаной. Для отдельных участков такой кривой значения c и n различны.

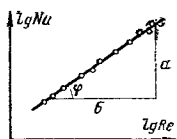


Рис 6-6 К установлению зависимости вида $Nu = cRe^n$.

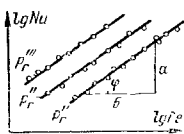


Рис 6-7 К установлению зависимости вида $Nu = cRe^n Pr^m$.

В случае, если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например $Nu = f(Re, Pr)$, на графике получается семейство прямых; второй аргумент берется в качестве параметра (рис. 6-7). Тогда по одной из прямых определяют показатель при числе Рейнольдса, а затем опытные данные представляют на графике в виде зависимости $\lg(Nu/Re^n) = f(\lg Pr)$. Из последнего графика определяют показатель степени m при критерии Прандтля, а затем по уравнению $c = Nu/(Re^n Pr^m)$ определяют значение коэффициента c .

Для обработки опытных данных используются электронные вычислительные машины. Основываясь на математической статистике, постоянные c , n , m и т. д. можно найти расчетным путем. Существуют специальные стандартные программы расчета на ЭЦВМ, облегчающие работу исследователя.

В последнее время все шире используется полуэмпирический метод получения формул. Зависимость между безразмерными переменными представляется в виде функции, получаемой предварительно с точностью до постоянных из аналитического рассмотрения задачи. Постоянные определяются с помощью опытных данных. Такой путь получения формул является предпочтительным по сравнению с эмпирическим.

Определяющий размер. В числа подобия входит характерный размер l_0 . Теория подобия не определяет однозначно, какой размер должен быть принят за определяющий, т. е. за тот размер, который будет принят как масштаб линейных размеров. Если в условиях однозначности заданы несколько размеров, за определяющий обычно принимают тот, который в большей степени отвечает физическому существу процесса. Остальные размеры входят в уравнение подобия в виде симплексов $L_1 = l_1/l_0$, $L_2 = l_2/l_0$ и т. д.

В ряде случаев за определяющий линейный размер принимается комбинация разнородных физических величин, входящих в условия од-

нозначности. Такая комбинация имеет размерность линейной величины и пропорциональна какому-либо линейному размеру.

Определяющая температура. В числа подобия входят физические параметры жидкости. При получении безразмерных переменных физические свойства часто считают постоянными. В действительности, поскольку температура жидкости переменна, изменяются и значения ее физических свойств. Поэтому при обработке опытных данных по теплообмену важным является также вопрос выбора так называемой определяющей температуры, по которой определяются значения физических параметров, входящих в числа подобия.

Экспериментальные и теоретические работы показывают, что нет такой универсальной определяющей температуры, выбором которой автоматически учитывалась бы зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров. Поэтому в настоящее время преобладает точка зрения, в соответствии с которой за определяющую следует принимать такую температуру, которая в технических расчетах бывает задана или легко может быть вычислена.

При расчетах определяющие температуру и линейный размер необходимо выбирать точно так же, как это сделано при получении формулы. Неучет этого обстоятельства может привести к значительным ошибкам.

Глава седьмая

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПРОДОЛЬНОМ ОМЫВАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для простоты будем полагать, что плоская поверхность омывается потоком несжимаемой жидкости, скорость и температура которой за пределами гидродинамического и теплового пограничных слоев постоянны и равны соответственно w_0 и t_0 .

Поток направлен вдоль пластины, температура поверхности тела во времени не изменяется. Внутренние источники теплоты в жидкости отсутствуют, теплота трения пренебрежимо мала.

7-1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В гл. 4 была предложена упрощенная запись дифференциального уравнения энергии для теплового пограничного слоя (4-30). Учитывая, что $q_y = -\lambda \partial t / \partial y$ и, следовательно, $\lambda \partial^2 t / \partial y^2 = -\partial q_y / \partial y$, уравнение (4-30) представим в виде

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (7-1)$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах от $y=0$ до $y=\infty$. Напомним, что за пределами пограничного слоя производные, входящие в уравнение (7-1), равны нулю по определению (см. § 4-4). Поэтому увеличение верхнего предела от k до ∞ не дает изменения интеграла. Интегрирование правой части уравнения дает:

$$-\int_0^{\infty} \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = q_c; \quad (a)$$

здесь учтено, что $(q_y)_{y=\infty} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=\infty} = 0$ (§ 4-4).

Прежде чем взять интеграл от левой части уравнения (7-1), из уравнения сплошности (4-29) выразим w_y . Из (4-29) имеем:

$$dw_y = -\frac{\partial w_x}{\partial x} dy,$$

учитывая, что при $y=0$ $w_y=0$ в силу непроницаемости стенки, получим:

$$w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy. \quad (7-2)$$

Подставляя значение w_y в (7-1) и интегрируя левую часть, получаем:

$$\int_0^\infty \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy = \int_0^\infty w_x \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy. \quad (6)$$

Второй интеграл правой части последнего уравнения можно взять по частям. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy &= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dt = t \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) \Big|_0^\infty - \\ &- \int_0^\infty t \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = t_0 \int_0^\infty \frac{\partial w_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty t \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = \int_0^\infty (t_0 - t) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (в)$$

Подставим выражение (в) в уравнение (6). Поскольку пределы интегрирования не зависят от x , последовательность операций дифференцирования по x и интегрирования по y может быть изменена. Учитывая последнее, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w_x \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^\infty (t_0 - t) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy &= \\ = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [w_x (t_0 - t)] dy &= - \frac{d}{dx} \int_0^\infty w_x (t_0 - t) dy. \end{aligned} \quad (г)$$

Приравнявая (а) и (г) и переходя от предела интегрирования ∞ к пределу k , получаем следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dx} \int_0^k w_x (t_0 - t) dy = \frac{-q_c}{\rho c_p}. \quad (7-3)$$

Это уравнение называют интегральным уравнением теплового потока для теплового пограничного слоя. Здесь интеграл левой части и q_c являются функциями только x . При приближенных расчетах функциями $w_x = w_x(y)$ и $t = t(y)$ часто задаются, исходя из накопленного опыта. Следует отметить, что левая часть уравнения (7-3) достаточно нечувствительна (устойчива) к некоторым неточностям выбора распределений $w_x(y)$ и $t(y)$. Если известны распре-

ления скорости и температуры, то с помощью уравнения (7-3) можно определить $k=k(x)$. Пример такого решения будет показан в следующем параграфе.

Уравнение движения в проекциях на ось Ox для рассматриваемого здесь течения было записано в приближении пограничного слоя в гл. 4 — см. уравнение (4-28). Учитывая, что $s = \mu(\partial w_x / \partial y)$, представим уравнение (4-28) в следующей записи:

$$\rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (7-4)$$

Из сравнения уравнений (7-1) и (7-4) следует их полная аналогия. Отсюда при интегрировании (7-4) в пределах от $y=0$ до $y=\infty$ (или δ), выполняя аналогичные преобразования, получим и аналогичные результаты.

Интегральное уравнение импульсов для гидродинамического пограничного слоя запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} w_x (w_0 - w_x) dy = \frac{s_0}{\rho}. \quad (7-5)$$

Здесь s_0 — касательное напряжение трения при $y=0$, т. е. на поверхности стенки.

Интегральные уравнения теплового и гидродинамического пограничного слоев (7-3) и (7-5) справедливы при выполнении ранее принятых условий. В более общем случае усложняются и соответствующие ему интегральные уравнения.

Придадим физический смысл интегралам, стоящим в левых частях уравнений (7-3) и (7-5). С помощью двух сечений, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , выделим в тепловом пограничном слое бесконечно малый объем (рис. 7-1). Плоскости, ограничивающие выделенный объем параллельно плоскости чертежа, находятся друг от друга на расстоянии, условно принимаемом за единицу. Аналогичное выделение контрольного объема предполагается и для гидродинамического пограничного слоя.

Массовый расход жидкости в определенном сечении пограничного слоя и изменение этого расхода на единице длины будут соответственно равны:

$$G(x) = \int_0^{\delta \text{ (или } k)} \rho w_x dy \quad \text{и} \quad \frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta \text{ (или } k)} \rho w_x dy.$$

Вместе с массой переносится количество движения $I(x)$ и энтальпия $Q(x)$. Изменения I и Q на единице длины определяются соответственно уравнениями

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^k \rho w_x c_p t dy.$$

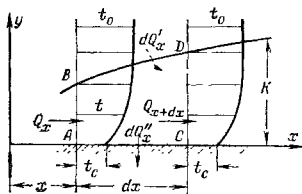


Рис. 7-1. К получению интегрального уравнения теплового потока.

Эти изменения связаны с приходом количества движения $J'(x)$ и энтальпии $Q'(x)$ через внешнюю границу пограничных слоев ($y=\delta$, $y=k$) вместе с массой жидкости, вовлекаемой в течение в пограничном слое (рис. 7-1):

$$\frac{dJ'}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x w_0 dy \quad \text{и} \quad \frac{dQ'}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^k \rho c_p w_x t_0 dy.$$

Кроме того, изменения J и Q обусловлены вязким сопротивлением трения и тепловым потоком на поверхности стенки s_c и q_c .

Тогда уравнения (7-3) и (7-5) могут быть записаны соответственно в следующем виде:

$$\frac{dQ'}{dx} - \frac{dQ}{dx} = -q_c \quad \text{и} \quad \frac{dJ'}{dx} - \frac{dJ}{dx} = s''_c.$$

Интегральное уравнение теплового потока (7-3) впервые получено Г. Н. Кружилиным, а уравнение импульсов (7-5) — Т. Карманом. Эти уравнения пригодны и для турбулентного пограничного слоя, если под w_x и t подразумевать осредненные во времени значения скорости и температуры. Напомним, что на твердой непроницаемой стенке ($y=0$) должны выполняться равенства $\lambda_T=0$ и $\mu_T=0$, что и учтено при получении уравнений (7-3) и (7-5).

7-2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Для расчета теплоотдачи при ламинарном пограничном слое используем уравнение (7-3). Чтобы рассчитать теплоотдачу, необходимо знать распределение скорости в слое. Распределение скорости в ламинарном пограничном слое по форме близко к параболе. Кривую распределения скорости удобно описать уравнением кубической параболы

$$w_x = a + by + cy^2 + dy^3. \quad (a)$$

Уравнение распределения скорости должно удовлетворять граничным условиям. При $y=0$ выполняется $w_x=0$ (условие «прилипания»); полагаем также, что $(\partial^2 w_x / \partial y^2)_{y=0}=0$. Кроме того, на внешней границе пограничного слоя ($y=\delta$) $w_x=w_0$ и $(\partial w_x / \partial y)_{y=\delta}=0$.

Условие $(\partial^2 w_x / \partial y^2)_{y=0}=0$ следует из дифференциального уравнения движения (4-28), если полагать, что непосредственно у стенки в жидкости актуальны только силы вязкости (т. е. силами инерции можно пренебречь).

Уравнение (a) будет удовлетворять перечисленным граничным условиям, если

$$a=0, \quad b=\frac{3}{2} \frac{w_0}{\delta}, \quad c=0 \quad \text{и} \quad d=-\frac{1}{2} \frac{w_0}{\delta^3}.$$

Распределение скорости при этом примет вид:

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (6)$$

При распределении скорости согласно (6) из интегрального уравнения импульсов (7-5) можно получить, что толщина гидродинамического пограничного слоя определяется выражением

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}. \quad (7-6)$$

Формула (7-6) показывает, что δ меняется пропорционально корню квадратному из расстояния от переднего края пластины до данной точки. Этой формуле можно придать безразмерный вид:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{w_0 x / \nu}} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (7-7)$$

Примем, что температура поверхности тела t_c не зависит от x , т. е. $t_c = \text{const}$. Для удобства температуру жидкости будем отсчитывать от t_c . Обозначим:

$$\theta = t - t_c, \quad \theta_0 = t_0 - t_c,$$

где t_0 — температура жидкости за пределами теплового пограничного слоя. При этом граничные условия оказываются аналогичными ранее принятым условиям для гидродинамического пограничного слоя.

Действительно, при $y=0$ имеем $\theta=0$. Кроме того, $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = \text{const}$ и $(\partial^2\theta/\partial y^2)_{y=0}=0$, если учесть, что в жидкости, непосредственно прилегающей к плоской стенке, теплота переносится по y только теплопроводностью. На внешней границе теплового слоя ($y=k$) справедливы условия

$$\theta = \theta_0 = \text{const} \text{ и } (\partial\theta/\partial y)_{y=k} = 0.$$

В результате получаем, что распределение температуры описывается уравнением, аналогичным по форме записи уравнению распределения скорости:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1,5 \left(\frac{y}{k} \right) - 0,5 \left(\frac{y}{k} \right)^3. \quad (B)$$

Из (B) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dy} &= \frac{1,5\theta_0}{k} - \frac{1,5\theta_0}{k^3} y^2, \\ \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0} &= \frac{1,5\theta_0}{k}. \end{aligned} \quad (r)$$

Вычислим интеграл уравнения теплового потока (7-3), интегрируя в пределах теплового пограничного слоя от $y=0$ до $y=k$. Предварительно примем, что $k \leq \delta$. В этом случае интегрирование в пределах от $y=0$ до $y=k$ является интегрированием в пределах и теплового, и гидродинамического слоев.

Если распространить интегрирование на случай $\delta < k$, то это означало бы, что в пределах теплового пограничного слоя имеют место два закона распределения скоростей: при $y < \delta$ — согласно уравнению (6) и при $\delta \leq y \leq k$ — согласно условию $w_x = w_0 = \text{const}$.

Интегрирование дает:

$$\begin{aligned} \int_0^k (t_0 - t) w_x dy &= \int_0^k (\theta_0 - \theta) w_x dy = \theta_0 w \int_0^k \left[1 - 1,5 \left(\frac{y}{k} \right) + \right. \\ &\left. + 0,5 \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right] \left[1,5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0,5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \theta_0 w_0 \delta \left[\frac{3}{20} \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{k}{\delta} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Так как $k < \delta$, то $k/\delta < 1$, а поэтому второй член в скобках в правой части равенства мал по сравнению с первым и им можно пренебречь.

Подставив значение интеграла и значение $(d\theta/dy)_{y=0}$ согласно (г) в (7-3), получим:

$$\frac{3}{20} \vartheta_0 \omega_0 \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) = \frac{3}{2} a \frac{\vartheta_0}{\beta \delta}$$

или

$$\frac{1}{10} \omega_0 \left(\beta^2 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\beta^2 \delta^2 \frac{d\beta}{dx} \right) = a,$$

где $\beta = k/\delta$.

Исходя из аналогии уравнений теплового и динамического пограничных слоев при аналогичности принятых нами распределений скорости и температуры (б) и (в), можно полагать, что толщины теплового и динамического слоев k и δ зависят от x одинаково и их отношение равно постоянной величине¹, не являющейся функцией x . Тогда $d\beta/dx = 0$ и вместо предыдущего уравнения получаем:

$$\frac{1}{10} \omega_0 \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a.$$

Из уравнения (7-6) следует, что

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{\omega_0}.$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение и полагая, что

$$\sqrt[3]{\frac{136}{140}} \approx 0,98 \approx 1,$$

получаем, что

$$\frac{k}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}. \quad (7-8)$$

Такой же результат дают и более точные решения.

Подставляя значение δ согласно (7-7) в уравнение (7-8), получаем:

$$k = \frac{4,64x}{\sqrt[3]{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}. \quad (7-9)$$

где $Re_x = \omega_0 x / \nu$.

Для капельных жидкостей, как правило, $Pr \gg 1$ и, следовательно, $k \ll \delta$, т. е. выполняется условие, принятое при интегрировании уравнения теплового потока. Число Прандтля газов изменяется в пределах примерно от 0,6 до 1; в частности, для воздуха $Pr \approx 0,7$ в большом интервале температур. При этом $k > \delta$, однако разница в толщинах теплового и гидродинамического слоев невелика. Например, при $Pr = 0,6$ имеем $k = 1,18\delta$. Опыт показывает, что указанным различием k и δ практически можно пренебречь.

Для жидких металлов $k \gg \delta$, для них полученные результаты непригодны.

¹ Это утверждение справедливо, если не только гидродинамический, но и тепловой слой развивается с самого начала пластины ($x=0$), т. е. в начальной части пластины нет необогреваемого участка

Определим коэффициент теплоотдачи. Опуская знак минус, из уравнений (4-22) и (г) получаем:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{k}. \quad (7-10)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине пограничного слоя.

Уравнение (7-10) можно привести к безразмерному виду. Для этого умножим левую и правую части на x/λ и подставим значение k согласно (7-9). Получим:

$$Nu_x = 0,33 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr}; \quad (7-11)$$

$$\text{здесь } Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{\alpha l}{\lambda} \frac{x}{l} = Nu_l X; \quad Re_x = \frac{w_0 x}{\nu} = \frac{w_0 l}{\nu} \frac{x}{l} = Re_l X;$$

$Pr = \nu/a$; l — длина пластины вдоль потока. Уравнение (7-11) можно записать следующим образом:

$$Nu_l = 0,33 X^{-0,5} Re_l^{0,5} Pr^{1/3}. \quad (7-12)$$

Отсюда следует, что

$$Nu_l = aX^{-0,5} \text{ или } \alpha = cx^{-0,5}. \quad (д)$$

Величины $a = 0,33 Re_l^{0,5} Pr^{1/3}$ и $c = al^{-0,5}$, содержащие коэффициент пропорциональности 0,33, скорость w_0 , длину пластины l и физические параметры λ , ν и a , от x не зависят.

Согласно (д) при $x=0$ коэффициент теплоотдачи бесконечно велик, при увеличении x он принимает конечные и постоянно уменьшающиеся значения (рис. 7-2). Такой характер изменения α объясняется тем, что температурный напор $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ не изменяется вдоль пластины, в то время как температурный градиент на стенке непрерывно уменьшается с ростом x — см. уравнения (г) и (7-9).

Формула (7-11) получена при условии, что температура поверхности пластины постоянна, физические параметры жидкости не зависят от температуры и в начале пластины нет необогреваемого участка. Как показывают опыт и теория, неучет этих фактов может привести к значительным ошибкам.

Зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров жидкости. Уравнение (7-9) получено при условии, что все физические параметры постоянны. На самом деле физические параметры зависят от температуры.

Большой частью физические параметры, входящие в уравнение (7-11) и (7-12), в том числе и Pr , выбирают по температуре набегающего потока t_0 . Зависимости физических параметров от температуры неодинаковы у различных жидкостей. В результате коэффициент теплоотдачи капельных жидкостей зависит от рода жидкости, ее температуры, направления теплового потока и температурного напора.

Влияние указанных факторов на теплоотдачу является следствием переменности температуры в тепловом пограничном слое и соответствующего изменения физических параметров, являющихся функциями

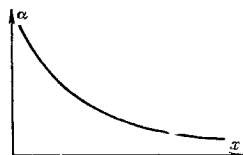


Рис 7-2 Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины при ламинарном пограничном слое

температуры. Особенно существенное влияние оказывает изменение вязкости.

Численные расчеты полей скорости и температуры с учетом переменной вязкости показывают, что изменение вязкости капальной жидкости сказывается на распределении w и t . При одном и том же температурном напоре Φ_0 распределения скорости различны в зависимости от направления теплового потока. На рис. 7-3 показано распределение безразмерных скоростей $W_x = w_x/w_0$ и температур $\Theta = (t - t_c)/(t_0 - t_c)$ в определенном сечении пограничного слоя при одинаковых значениях чисел Re и Pt внешнего потока.

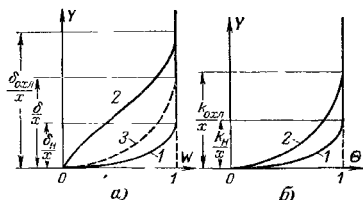


Рис. 7-3. Изменение скорости (а) и температуры (б) при нагревании и охлаждении капальной жидкости.

1 — нагревание; 2 — охлаждение; 3 — изотермическое течение.

Аналогичные расчеты для газа (воздуха) с учетом переменности всех физических параметров показывают, что поля температур и скоростей изменяются слабо. Отличие дает только расчет для высоких температур стенки и больших температурных напоров. При этом распределение скоростей в случае нагревания газа будет качественно подобным кривой 2 (рис. 7-3, а), так как коэффициенты вязкости капальных жидкостей и газов по-разному зависят от температуры (см. рис. 4-1 и 4-2).

Чтобы учесть влияние переменности физических параметров, необходимо изменить систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. При выводе уравнений переменные значения физических параметров нельзя выносить из-под знака производной. Кроме того, к основной системе дифференциальных уравнений нужно присоединить уравнения вида

$$\lambda = f_1(t), \mu = f_2(t), c_p = f_3(t), \rho = f_4(t),$$

описывающие изменения физических параметров в зависимости от температуры.

С достаточной степенью точности можно полагать, что физические параметры газов изменяются по простым степенным уравнениям вида $\eta = \eta_1 (T/T_1)^n$, где η_1 — значение параметра при температуре T_1 , а n — постоянная величина для определенного физического параметра в некотором интервале температур.

В этом случае переменность физических параметров можно учесть введением в уравнение подобия аргумента $\Theta_c \equiv T_c/T_0$, где T_0 — температура газа вдали от стенки или средняя температура газа в канале K , а T_c — температура поверхности стенки. Отношение T_c/T_0 называется температурным фактором.

Опытным путем обнаружено, что при охлаждении газа или его нагревании с малыми температурными напорами теплоотдача практически не зависит от температурного фактора, если физические параметры

выбираются по температуре внешнего потока. Теплоотдача нагреваемого газа существенно зависит от температурного фактора при температурных напорах порядка сотен градусов.

Физические параметры капельных жидкостей более сложно и поразному зависят от температуры. В настоящее время теория еще не может дать какого-либо общего, единообразного учета влияния переменности физических параметров на теплоотдачу капельных жидкостей.

Опытным путем установлено, что зависимость теплоотдачи капельных жидкостей от направления теплового потока и температурного напора можно приближенно учитывать путем введения в уравнение подобия дополнительного множителя $(P_{гж}/P_{гс})^{0,25}$, где индексы «ж» и «с» обозначают, что соответствующие значения числа P_g выбираются по температуре жидкости вдали от тела и по температуре стенки. Эта поправка прежде всего учитывает влияние на теплообмен изменения вязкости жидкости.

Множитель $(P_{гж}/P_{гс})^{0,25}$ был предложен М. А. Михеевым. Позже было показано, что для некоторых конкретных условий значение показателя степени n при $P_{гж}/P_{гс}$ должно быть переменным, однако поправка $(P_{гж}/P_{гс})^n$ не сильно отличается от предложенной М. А. Михеевым.

При нагревании жидкости $P_{гж}/P_{гс} > 1$, при охлаждении $P_{гж}/P_{гс} < 1$. Отношение $P_{гж}/P_{гс}$ при течении определенной капельной жидкости тем больше отличается от единицы, чем больше температурный напор.

Если $\vartheta_0 \rightarrow 0$, то $(P_{гж}/P_{гс}) \rightarrow 1$. При заданном q_c , как следует из уравнения $q_c = \alpha(t_0 - t)$, температурный напор будет очень мал, если α очень велик. В этом случае можно принять, что $(P_{гж}/P_{гс}) \approx 1$.

На газы поправка $(P_{гж}/P_{гс})^{0,25}$ не распространяется.

По-особому протекает теплообмен при состоянии жидкости, близком к критическому. В этом случае поправка $(P_{гж}/P_{гс})^{0,25}$ не может быть использована.

Ряд авторов учитывает влияние переменности физических параметров путем введения в уравнение подобия симплексов $\lambda_{ж}/\lambda_c$, $\mu_{ж}/\mu_c$ и $c_{рж}/c_{рс}$, где индексы «ж» и «с» обозначают, что соответствующие параметры выбираются по температуре жидкости вдали от тела или по температуре стенки.

Зависимость теплоотдачи от изменения температуры поверхности по ее длине. Изменение t_c по длине пластины может существенно сказаться на теплоотдаче. В результате переменности температуры стенки изменяется распределение температур в тепловом пограничном слое, изменяется его толщина и значение градиента температур в жидкости у поверхности тела. Коэффициент теплоотдачи в определенном месте пластины зависит от развития пограничного слоя на предыдущем участке, в том числе и от изменения температуры стенки на этих участках. Этот эффект усложняется переменностью физических параметров жидкости.

Во многих случаях изменение температуры поверхности или температурного напора можно описать степенным законом

$$\vartheta_c(x) = Ax^m, \quad (7-13)$$

где $\vartheta_c(x) = t_c(x) - t_0$; $t_0 = \text{const}$; $t_c(x)$ — местное значение температуры поверхности; A и m — постоянные, не зависящие от x .

При $m=0$ $\vartheta_c = A = t_c - t_0 = \text{const}$, что соответствует рассмотренной задаче при $t_c = \text{const}$.

Теплоотдача неизотермической пластины изучалась рядом исследователей [Л. 46, 97, 108 и др.]. Анализ этих работ показывает, что при возрастании m толщина теплового пограничного слоя уменьшается. Теплоотдача при этом возрастает.

Влияние продольного градиента температуры поверхности можно учесть соотношением теплоотдачи пластины с переменной ($m \neq 0$) и постоянной ($m=0$) температурой поверхности; обозначим это отношение через ϵ :

$$\epsilon = \frac{Nu_x(m \neq 0)}{Nu_x(m=0)} \quad \text{или} \quad Nu_x(m \neq 0) = \epsilon Nu_x(m=0).$$

Значения ϵ определялись аналитически и для частных величин проверялись экспериментально; они приведены в табл. 7-1 [Л. 46]

Таблица 7-1

Зависимость $\epsilon = f(m)$ при $Pr > 1$

m	-0,25	$0(t_c = \text{const})$	0,1	0,2	0,3	0,4	$0,5$ ($t_c = \text{const}$)	0,8	1,0	2,0
ϵ	0,655	1	1,09	1,17	1,25	1,30	1,36	1,52	1,60	1,98

Влияние необогреваемого начального участка. В этом случае имеет место одновременное развитие гидродинамического и теплового пограничных слоев, что влияет на коэффициент теплоотдачи. Наличие поверхности, не участвующей в теплообмене, соответствует особому случаю изменения температуры поверхности пластины по ее длине.

Обширные экспериментальные исследования влияния необогреваемого начального участка на теплоотдачу были выполнены И. И. Жюж-дой и А. А. Жукаускасом [Л. 46]. В этих опытах отношение длины начального необогреваемого участка x_0 к полной длине l изменялось от 0,425 до 0,86. При этом числа Pr изменялись от 0,7 до 510 (воздух, вода, трансформаторное масло) и $Re_{ж\text{ж}1}$ — от 3 до $3 \cdot 10^4$ (рис. 7-4).

Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи пластины при ламинарном пограничном слое и наличии необогреваемого участка было получено уравнение

$$Nu_{ж\text{ж}1} = 0,33 Re_{ж\text{ж}1}^{0,5} Pr_{ж\text{ж}}^{0,33} (x_1/x)^{0,2} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,26}; \quad (7-14)$$

здесь в числа подобия подставляется координата $x_1 = x - x_0$, отсчитываемая от начала обогреваемого участка. Физические параметры выбираются по температуре набегающего потока t_0 , что отмечено индексом «ж» (исключение составляет значение числа Pr_c , выбираемое по температуре стенки в данном сечении).

Определим средний коэффициент теплоотдачи при $x_0 = 0$:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\Delta t} = \frac{\int_0^l \alpha \delta dx}{\int_0^l \delta dx} = \frac{\int_0^l cx^{-0,6} Ax^m dx}{\int_0^l Ax^m dx} = \frac{2c}{\sqrt{l}} \frac{m+1}{2m+1} = 2\alpha_{x=l} \frac{m+1}{2m+1}.$$

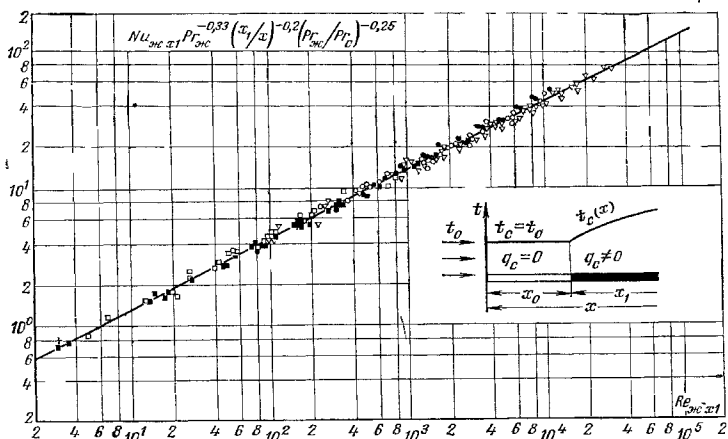


Рис. 7-4. Местная теплоотдача при ламинарном пограничном слое и наличии необогреваемого начального участка, $m=0,4$ ($\epsilon=1,30$).

При $m=0$ ($t_c=\text{const}$) получаем, что $\bar{\alpha}=2\alpha$ (α берется при $x=l$). В случае $q_c=\text{const}$ $m=0,5$ и $\bar{\alpha}=1,5\alpha$. Рассчитывая среднюю теплоотдачу, Pr_c следует оценивать по средней температуре стенки.

Для линейного закона изменения температурного напора

$$\vartheta_c(x) = \vartheta_c(0) \left(1 + b \frac{x}{l}\right)$$

величина ϵ оказывается зависящей от x . В этом случае нарушается зависимость вида $\alpha \sim x^{-0.5}$. На рис. 7-5 приведены результаты расчета Д. А. Лабунцова [Л. 46, 97] для значений $b=+1$ и $b=-0,25$. Здесь l — полная длина пластины, значение $b=0$ соответствует изотермической поверхности стенки. Кривые 1 показывают изменение местных коэффициентов теплоотдачи. Кривые 2 и 3 дают изменение средних коэффициентов при осреднении по формулам (6-22) и (6-21). Нарастанию температурного напора по длине ($b>0$) соответствует более высокие значения α , уменьшению ($b<0$) — более низкие.

При осреднении по (6-21) числовое значение α мало зависит от переменности температуры стенки и близко к значению среднего коэффициента теплоотдачи в случае $t_c=\text{const}$. Этот вывод относится как к линейному, так и к степенному закону изменения температуры стенки (температурного напора).

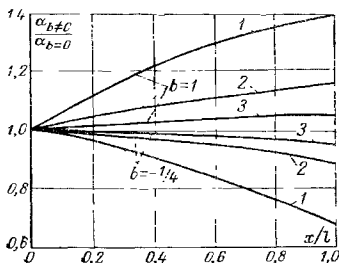


Рис. 7-5. Теплоотдача неизолированной пластины при линейном изменении температурного напора.

1 — местные коэффициенты теплоотдачи; 2 — осреднение по формуле (6-21); 3 — осреднение по формуле (6-22).

7-3. ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит на некотором участке (рис. 7-6). Течение на этом участке имеет нестабильный характер и называется переходным.

Законы теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах различны, поэтому определение их границ имеет большое значение.

О режиме течения судят по критическим значениям числа Рейнольдса

$$Re_{кр1} = \frac{w_0 x_{кр1}}{\nu} \quad \text{и} \quad Re_{кр2} = \frac{w_0 y_{кр2}}{\nu},$$

где x — продольная координата, отсчитываемая от передней кромки поверхности. Зная $Re_{кр1}$ и $Re_{кр2}$, можно рассчитать значения $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$, определяющие соответственно начало

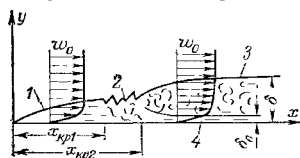


Рис 7-6 Схема пограничного слоя
1 — ламинарный пограничный слой; 2 — переходная область; 3 — турбулентный пограничный слой; 4 — вязкий (ламинарный) подслой

разрушения ламинарного слоя и появление устойчивого турбулентного течения. Опыты показывают, что переход к турбулентному течению может иметь место при значениях $Re_{кр} = w_0 x_{кр}/\nu$ примерно от 10^4 до $4 \cdot 10^6$. Координаты $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ зависят от ряда факторов

На переход влияют такие характеристики внешнего потока, как степень (интенсивность) турбулентности, масштаб турбулентности, частота пуль-

саций. При ускорении потока ($\partial p/\partial x < 0$, конфузорное течение) переход затягивается, при замедлении ($\partial p/\partial x > 0$, диффузорное течение) — наступает при меньших значениях x (или Re_x).

Помимо параметров внешнего потока на переход из ламинарной формы течения в турбулентную влияют параметры, в той или иной степени связанные с омываемым телом. Значения $Re_{кр1}$ и $Re_{кр2}$ зависят от интенсивности теплообмена, от волнистости, шероховатости омываемой поверхности, удобообтекаемости передней кромки пластины, вибрации тела. Некоторые факторы взаимосвязаны.

На рис. 7-7 представлена зависимость критических чисел Рейнольдса от степени турбулентности набегающего потока Tu , определяемой выражением

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{w_x'^2} + \overline{w_y'^2} + \overline{w_z'^2})}}{w_0},$$

где $\overline{w_x'^2}$, $\overline{w_y'^2}$, $\overline{w_z'^2}$ — средние во времени квадраты трех составляющих пульсаций скорости; w_0 — скорость внешнего потока.

При сравнительно малых значениях Tu переход не зависит от степени турбулентности внешнего потока, а определяется характеристиками самого ламинарного слоя (его устойчивостью). Увеличение Tu приводит к уменьшению $Re_{кр}$.

На практике сечение перехода можно определить, в частности, по изменению распределения осредненной во времени скорости $\bar{w}_x(y)$. При турбулентном течении $\bar{w}_x$ резко увеличивается вблизи стенки; на

удалении от нее $\bar{w}_x(y)$ становится более выровненной. Выравнивание объясняется турбулентным переносом количества движения.

Данные о критических числах Рейнольдса в основном получены в опытах с воздухом. Если $Tu < 0,1\%$, значение нижнего критического числа Рейнольдса $Re_{кр1}$ не зависит от степени турбулентности набегающего потока и для изотермического течения равно $3,1 \cdot 10^6$ [Л. 51, 52]. По данным Л. М. Зысиной-Моложен для случая продольного безградиентного омывания пластины воздушным потоком зависимость $Re_{кр1}$ от Tu и температурного фактора T_c/T_0 может быть описана уравнением

$$Re_{кр1} = 3,1 \cdot 10^6 \varphi(Tu) \psi(T_c/T_0);$$

здесь $\varphi(Tu) = 1$ при $Tu < 0,12\%$; $\varphi = 0,23Tu^{-0,7}$, если $Tu = 0,12 - 1,0\%$; при $Tu > 1,0\%$; $\varphi = 0,23Tu^{-1,76}$. Функция ψ определяется уравнением $\psi = (T_c/T_0)^{-2,3}$, где T_c , T_0 — соответственно температуры стенки и набегающего потока.

Такое существенное влияние температурного фактора объясняется увеличением вязкости газа с увеличением температуры и, как следствие, замедлением течения у стенки с ростом T_c/T_0 (рис. 7-3). Замедление течения у стенки при неизменной скорости на удалении способствует потере устойчивости потока, появлению дополнительного движения, направленного поперек основного течения вдоль пластины.

По данным [Л. 52] $Re_{кр2} \approx 1,4Re_{кр1}$ при $Tu < 0,1\%$ и $Re_{кр2} \approx 1,6Re_{кр1}$ при $Tu > 0,6\%$ (изотермическое безградиентное течение вдоль пластины).

Течение в переходной области не является стабильным. Турбулентность появляется в некоторой части пограничного слоя, затем турбулентно текущая жидкость уносится потоком. Смена ламинарных и турбулентных состояний течения происходит через неравномерные промежутки времени. Такое перемежающееся течение характеризуют коэффициентом перемежаемости ω . Коэффициент перемежаемости указывает, какую долю некоторого промежутка времени в определенной области жидкости существует турбулентное течение. Следовательно, коэффициент $\omega = 1$ означает, что течение все время турбулентное, а коэффициент $\omega = 0$ показывает, что течение все время ламинарное. Таким образом, граничные значения $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ приобретают характер осредненных во времени значений.

Большое количество влияющих факторов и отсутствие сведений о значении Tu в промышленных установках затрудняют точное определение сечений перехода. Поэтому в расчетной практике отрезок $\Delta x = x_{кр2} - x_{кр1}$ часто заменяют точкой, а критическое значение Re оценивают приближенно по данным опытов. При достаточно удобообтекаемой передней кромке пластины можно принять, что

$$Re_{кр1} \approx Re_{кр2} \approx Re_{кр} \approx 10^5.$$

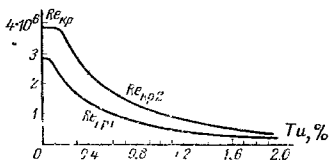


Рис. 7-7. Значения $Re_{кр1}$ и $Re_{кр2}$ в зависимости от степени турбулентности набегающего на пластину потока.

7.4. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Перенос теплоты и количества движения поперек турбулентного пограничного слоя может быть описан уравнениями (4-42) и (4-43):

$$q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = -(\lambda + \rho c_p \varepsilon_q) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y};$$

$$s = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = (\mu + \rho \varepsilon_s) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}.$$

Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$q = -\lambda \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; \quad (7-15)$$

$$s = \rho \nu \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; \quad (7-16)$$

здесь через Pr_T обозначено отношение $\varepsilon_s/\varepsilon_q$.

Величину Pr_T называют турбулентным числом Прандтля. Как показано в § 4-5, кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения ε_q и ε_s зависят от параметров процесса турбулентного течения. Вследствие этого в общем случае турбулентное число Прандтля также может являться параметром процесса. С учетом (7-15) и (7-16) дифференциальные уравнения энергии (4-44) и движения (4-45) для турбулентного пограничного слоя примут вид:

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]; \quad (7-17)$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]. \quad (7-18)$$

Если $\text{Pr}=1$ ($a=\nu$) и $\text{Pr}_T=1$, то уравнения (7-17) и (7-18) становятся идентичными. В этом случае при идентичных граничных условиях поля температуры $\bar{\theta}$ и скорости $\bar{w}_x$ будут подобны.

Чтобы проинтегрировать уравнения (7-17) и (7-18), необходимо иметь сведения о коэффициентах турбулентного переноса теплоты и количества движения. Можно воспользоваться интегродифференциальными уравнениями (7-3) и (7-5), но для этого необходимо знать, в частности, распределения скорости и температуры в турбулентном потоке.

Для создания совершенных расчетных формул необходимо сочетание теоретических и экспериментальных методов исследования, позволяющих проникнуть в механизм турбулентного переноса теплоты и количества движения при различных условиях течения.

Для определения профиля осредненной скорости воспользуемся уравнениями (4-47) и (4-50):

$$s_\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2 = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{s_\tau}{\rho}} = l \frac{d\bar{w}_x}{dy} = \kappa y \frac{d\bar{w}_x}{dy},$$

причем отдельные части этого уравнения имеют размерность скорости.

Предположим, что касательное напряжение турбулентного течения не изменяется по y , т. е. $\sqrt{s_\tau/\rho} = \sqrt{s_c/\rho} = \text{const}$. Обозначим $\sqrt{s_c/\rho}$ че-

рез w_* и назовем динамической скоростью. Тогда

$$w_* = \mu y \frac{dw_x}{dy}, \quad d\bar{w}_x = \frac{w_*}{x} \frac{dy}{y}$$

и

$$\bar{w}_x = \frac{w_*}{x} \ln y + c. \quad (7-19)$$

Уравнение (7-19) выражает так называемое логарифмическое распределение осредненной скорости турбулентного течения в пристенной области. Определим постоянную c согласно условию $\bar{w}_x(0) = 0$. Из уравнения (7-19) следует, что при $y \rightarrow 0$ $\bar{w}_x = -\infty$, т. е. получаем абсурдный результат.

Необходимо учесть силы вязкости, которые должны быть велики непосредственно у стенки. Слой жидкости у стенки, в котором преобладают силы вязкости и который является составной частью турбулентного пограничного слоя, называют вязким подслоем (или ламинарным подслоем). Учитывая только силы вязкости, уравнение движения можно записать в виде $d^2\bar{w}_x/dy^2 = 0$, откуда следует, что $dw_x/dy = \text{const} = c_1$ и $\bar{w}_x = c_1 y + c_2$, т. е. в вязком подслое имеет место линейное изменение скорости. Таким образом, в данном случае $s = s_c = \mu d\bar{w}_x/dy = \text{const}$. Отсюда:

$$s_c = \mu \frac{w_r}{\delta_n} = \rho w_*^2, \quad (7-20)$$

здесь δ_n — толщина вязкого подслоя; $w_r = \bar{w}_x(\delta_n)$ — скорость на внешней границе вязкого подслоя. Из (7-20) следует, что

$$\delta_n = \nu w_r / w_*^2.$$

Определим постоянную интегрирования c в уравнении (7-19) из условия, что при $y = \delta_n = \nu w_r / w_*^2$ $w_x = \bar{w}_x(\delta_n) = w_r$. Получим:

$$c = \frac{w_r}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \delta_n = \frac{w_r}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \frac{\nu w_r}{w_*^2}.$$

Подставляя значение c в (7-19), после некоторых преобразований (учитываем, что разность логарифмов равна логарифму частного):

$$\bar{w}^+ = \frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{x} \ln y_* + \eta. \quad (7-21)$$

Формулу (7-21) называют универсальным логарифмическим распределением осредненной скорости в пристенной области турбулентного потока. Здесь

$$y_* = \frac{w_* y}{\nu} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{w_r}{w_*} - \frac{1}{x} \ln \frac{w_r}{w_*}.$$

Формула (7-21) неоднократно сопоставлялась с опытными данными при различных значениях y_* (исключая очень малые значения y_* внутри вязкого подслоя). Результаты сопоставления можно отразить, в частности, графиком рис. 7-8.

Кривая 1 соответствует линейному изменению скорости в вязком подслое:

$$w_x = w_* y_* = \frac{w_*^2}{\nu} y = \frac{s_c}{\mu} y. \quad (7-22)$$

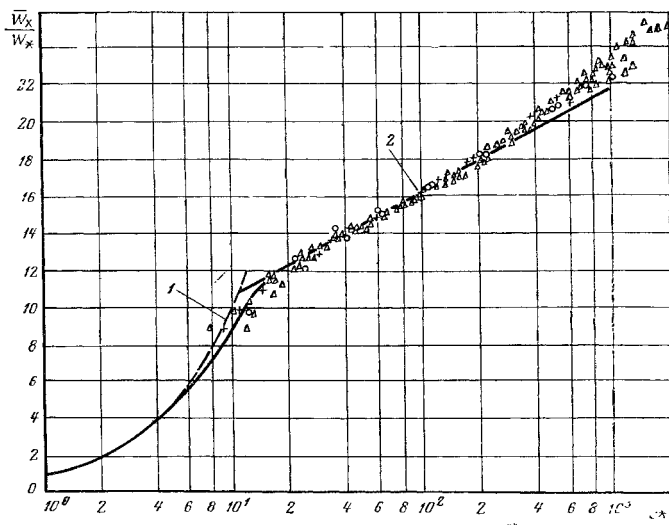


Рис 7-8 Распределение безразмерной скорости по толщине турбулентного пограничного слоя

1 — изменение скорости согласно уравнению (7-22), 2 — изменение скорости согласно уравнению (7-23), + — опыты с воздухом, Δ — с водой, O — с трансформаторным маслом

Кривая 2 отражает логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной турбулентной части пограничного слоя. В этой области

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = 5,6 \lg y_* + 4,9. \quad (7-23)$$

Пересечению кривых 1 и 2 соответствует значение $y_* = w_* y / \nu$, примерно равное 12. Отсюда можно оценить расчетную толщину вязкого подслоя

$$\delta_{\Pi} \approx 12 \frac{\nu}{w_*} = 12\nu \sqrt{\frac{\rho}{s_c}}. \quad (7-24)$$

При больших значениях y_* распределение скоростей отклоняется от логарифмического.

Опыты показывают сложность движения в турбулентном слое — рис. 7-9. Вязкий подслой не имеет строго ламинарного течения вдоль стенки. Пульсации, особенно крупномасштабные (низкочастотные), проникают в вязкий подслой, где их течение регламентируется вязкими силами. Движение в вязком подслое, вообще говоря, является нестационарным, граница подслоя четко не определена.

Внешняя граница вязкого подслоя является мощным генератором пульсационного движения. Наиболее высокая интенсивность турбулентности наблюдается в пристенной турбулентной области. Если, напри-

мер, степень турбулентности во внешнем потоке может составлять доли процента, то в пристенной области она может достигать нескольких десятков процентов. Пристенная область составляет примерно 20% толщины пограничного слоя (толщина вязкого подслоя на один-два порядка меньше). Течение во внешней области пограничного слоя, составляющей примерно 80% его толщины, зависит, в частности, от течения во внешнем потоке.

Внешняя граница турбулентного пограничного слоя непрерывно пульсирует. Это связано с периодическим проникновением масс жидкости внешнего потока, где степень турбулентности может быть невысока, во внешнюю область пограничного слоя. Такое взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком приводит к образованию области перемежаемого течения.

Аналогично вязкому подслою непосредственно у стенки можно выделить тепловой подслоя. Он характеризуется преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом.

Совпадение толщины вязкого подслоя δ_v и теплового k_d имеет место при $Pr=1$. При $Pr>1$ имеем, что $k_d<\delta_v$. Последнее неравенство равносильно утверждению, что в части вязкого подслоя от $y=k_d$ до $y=\delta_v$ теплота переносится не только теплопроводностью, но и пульсациями. Пульсации, проникающие в вязкий подслей, оказываются существенными для теплового переноса, но не дают значительного вклада в перенос количества движения по сравнению с молекулярным вязкостным переносом. Такой характер течения в особенности должен проявляться для очень вязких жидкостей ($Pr\gg 1$).

Рис 7-9 Схема строения турбулентного пограничного слоя
А — внешняя область; Б — пристенная область (I — вязкий подслей, II — промежуточный слей); на рисунке масштабы толщины смещены.

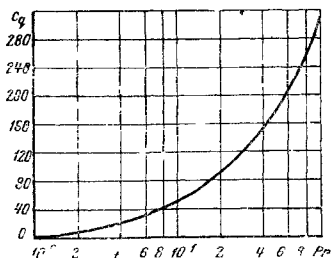
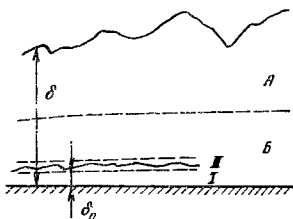


Рис 7-10 Зависимость ϵ_q в формуле (7-26) от числа Прандтля.

k и δ практически совпадают. При турбулентном течении толщина слоя δ больше, чем при ламинарном. Это объясняется влиянием турбулентной вязкости.

Поскольку в тепловом подслое перенос теплоты определяется теплопроводностью, изменение температуры по его толщине описывается уравнением прямой (как для плоской стенки, § 2-1).

Распределение температуры в подслое может быть представлено следующим образом:

$$\theta = \text{Pr} y_*; \quad (7-25)$$

здесь $\theta = \vartheta/\vartheta_*$; $\vartheta_* = q_c/\rho c_p w_*$.

Распределение температуры в зоне логарифмического распределения скорости можно описать логарифмическим законом:

$$\theta = \frac{\text{Pr}_\tau}{\kappa} \ln y_* + c_q(\text{Pr}). \quad (7-26)$$

Величина c_q является функцией числа Прандтля (рис. 7-10); она учитывает изменение температуры, связанное с неравенством толщин подслоев k_Π и δ_Π .

Знание распределений скорости и температуры позволяет рассчитать теплоотдачу с помощью интегральных уравнений теплового потока и импульса, полученных в § 7-1. Чтобы избежать громоздких выкладок, связанных с использованием интегральных уравнений, воспользуемся упрощенным выводом. Будем при этом полагать, что $\text{Pr} \geq 1$, но отличие числа Прандтля от единицы не слишком велико.

Исходя из линейного распределения скорости и температуры, для вязкого и теплового подслоев можно написать:

$$s_c = \mu \frac{w_\tau}{\delta_\Pi} \quad \text{и} \quad q_c = \lambda \frac{\vartheta_\tau}{k_\Pi}.$$

Значения s_c и q_c не изменяются по толщинам δ_Π и k_Π . Из последних уравнений следует:

$$q_c = s_c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_\tau}{w_\tau} \frac{\delta_\Pi}{k_\Pi}. \quad (7-27)$$

здесь $\vartheta_\tau = t_\tau - t_c$; t_τ — температура при $y = k_\Pi$, т. е. на внешней границе теплового подслоя; соответственно w_τ — скорость при $y = \delta_\Pi$; t_c — фиксированная температура поверхности стенки.

Для турбулентной части пограничного слоя молекулярный перенос теплоты и количества движения можно не учитывать. Будем полагать также, что здесь $\text{Pr}_\tau = 1$ ($\epsilon_s = \epsilon_q$). В этом случае распределение осредненных скорости и температуры будут идентичны. Тогда из уравнений (7-15) и (7-16) следует, что в турбулентной части пограничного слоя

$$q_\tau = s_\tau c_p \frac{\overline{\partial t / \partial y}}{\overline{\partial w_x / \partial y}}.$$

Поскольку $\delta_\Pi \ll \delta$, $k_\Pi \ll k$ и $\delta \approx k$, последнее уравнение запишем в виде

$$q_\tau = s_\tau c_p \frac{t_0 - t_\tau}{w_0 - w_\tau}. \quad (7-28)$$

На границе теплового подслоя $y = k_\Pi$ нет разрыва в величине теплового потока. Поэтому значения q , выраженные согласно уравнениям (7-27) и (7-28), можно приравнять. Пренебрежем при этом возможным различием касательного напряжения трения s в уравнениях (7-27) и (7-28). Это различие обусловлено тем, что в общем случае вблизи стенки $\text{Pr}_\tau \neq 1$ (так как $k_\Pi \neq \delta_\Pi$).

Решим уравнения (7-27) и (7-28) относительно разностей температур:

$$t_\tau - t_c = \frac{q_c}{s_c} \frac{1}{\lambda} w_\tau \frac{k_\Pi}{\delta_\Pi} \quad \text{и} \quad t_0 - t_\tau = \frac{q_c}{s_c c_p} w_0 \left(1 - \frac{w_\tau}{w_0}\right).$$

Суммируя эти уравнения, получаем:

$$t_0 - t_c = \frac{q_c w_0}{s_c c_p} \left[1 + \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{w_r}{w_0} \frac{k_H}{\delta_H} - \frac{w_r}{w_0} \right]. \quad (7-29)$$

Согласно уравнению (7-24) $\delta_H \approx 12\nu/\omega_*$, отсюда

$$w_r = \delta_H \frac{w_*^2}{\nu} = 12w_* = 12 \sqrt{\frac{s_c}{\rho}}. \quad (7-30)$$

Примем, что отношение толщин теплового и вязкого подслоев описывается уравнением (7-8), полученным ранее для отношения толщины теплового и динамического пограничных слоев в случае ламинарного течения:

$$\frac{k_H}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}. \quad (7-31)$$

Подставляя в (7-29) значения w_r и k_H/δ_H согласно уравнениям (7-30) и (7-31) и решая уравнение (7-29) относительно q_c , получаем:

$$q_c = \frac{s_c c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{s_c}{\rho}} (Pr^{2/3} - 1) \right]}. \quad (7-32)$$

Для характеристики касательного напряжения трения на стенке s_c используют коэффициент трения c_f , равный по определению

$$c_f = \frac{2s_0}{\rho w_0^2}. \quad (7-33)$$

Подставив в (7-32) значение $s_c = c_f \rho w_0^2/2$ и поделив левую и правую части уравнения (7-32) на $\rho c_p w_0 (t_0 - t_c)$, будем иметь:

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{c_f/2}{1 + 12 \sqrt{\frac{c_f}{2}} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (7-34)$$

Комплекс $\alpha/\rho c_p w_0$ безразмерен, его называют числом Стантона и обозначают символом St . Число Стантона можно выразить через числа Nu , Re и Pr :

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0}. \quad (7-35)$$

При $Pr=1$ уравнение (7-34) упрощается и принимает вид:

$$St = \frac{c_f}{2}. \quad (7-36)$$

Последнее уравнение является математическим выражением аналогии переноса теплоты и количества движения при $Pr=1$ и $Pr_\tau=1$. Эта аналогия впервые показана О. Рейнольдсом (1874 г.). Формула (7-36) достаточно хорошо описывает теплоотдачу газов при небольших температурных напорах.

Величина Pr_τ изменяется по толщине пограничного слоя. По данным [Л. 47] в области, где выполняются логарифмические законы распределения скорости и температуры, турбулентное число Прандтля равно примерно 0,8 (опыты с воздухом, водой и трансформаторным маслом). Учет этого обстоятельства приводит к формуле

$$St = \frac{c_f/2}{0,93 + 12,5 \sqrt{c_f/2} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (7-37)$$

В этом уравнении по сравнению с формулой (7-34) несколько изменены некоторые постоянные.

На рис. 7-11 дано сравнение формулы (7-37) с опытными данными при различных числах Прандтля.

При использовании формулы (7-37) для расчета теплоотдачи капельных жидкостей рекомендуется умножить полученное значение чис-

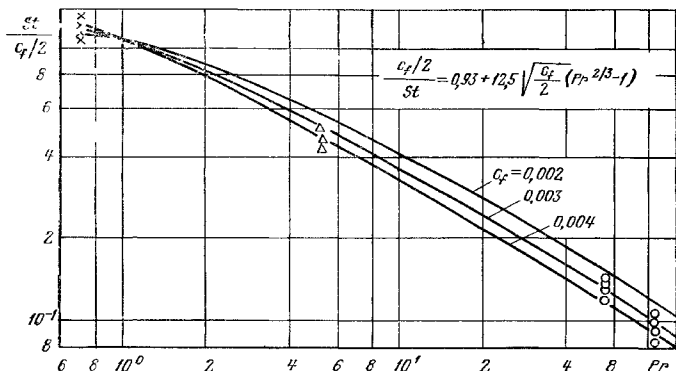


Рис 7-11 Теплоотдача пластины при турбулентном пограничном слое.

× — воздух, Δ — вода; О — трансформаторное масло.

ла St на поправку $(Pr_{ж}/Pr_c)^n$, где приблизительно $n=0,25$. Уточненные показатели степени n можно взять из рис. 7-12 [Л. 47]. При течении

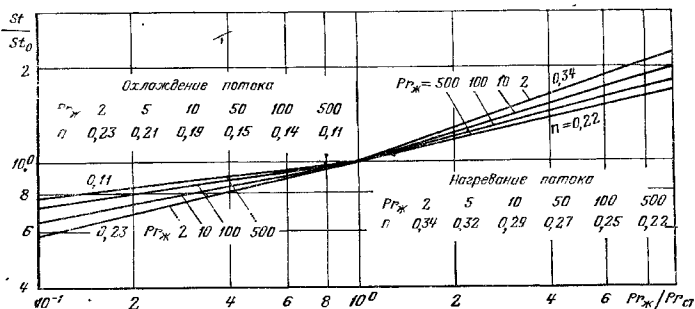


Рис. 7-12 Влияние переменности физических свойств капельной жидкости на теплоотдачу при турбулентном пограничном слое. St_0 — по формуле (7-37).

воздуха вводится поправка $(T_0/T_c)^m$, где $m \approx 0,25$ в случае нагревания потока газа ($T_c > T_0$).

Формула (7-36)

$$St = \frac{c_f}{2},$$

справедливая при $Pr=1$, может быть распространена на случай $Pr>1$ с помощью экспериментально определенной функции $f(Pr) = Pr^{0,43}$, вводимой в уравнение (7-36) как множитель.

Используя формулу Прандтля

$$c_f = \frac{0,0592}{Re_{\text{ж},x}^{0,2}} \quad (7-38)$$

и вводя поправку $(Pr_{\text{ж}}/Pr_c)^{0,25}$, получаем широко распространенную в расчетной практике формулу

$$Nu_{\text{ж},x} = 0,0296 Re_{\text{ж},x}^{0,8} Pr_{\text{ж}}^{0,43} (Pr_{\text{ж}}/Pr_c)^{0,25}. \quad (7-39)$$

За определяющую принята температура жидкости вдали от тела t_b (за исключением Pr_c , выбираемого по t_c). Определяющим размером является координата x , отсчитываемая от начала участка теплообмена. Эти рекомендации относятся как к формуле (7-39), так и к формуле (7-37).

Согласно формуле (7-39) $\alpha = cx^{-0,2}$. Среднеинтегральное значение α при этом равно $\bar{\alpha} = 1,25\alpha_{x=1}$.

Если вся пластина занята турбулентным слоем (в случае высокой степени турбулентности набегающего потока, неудобообтекаемости передней кромки и т. п.), то изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины имеет вид, изображенный на рис. 7-13 (кривая 1). При наличии на передней части пластины ламинарного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи изменяется по более сложному закону (рис. 7-13, кривая 2). В этом случае среднюю теплоотдачу необходимо рассчитывать отдельно для участков с различными режимами течения.

Область переходного течения $\Delta x = x_{\text{кр}1} - x_{\text{кр}2}$ не всегда может быть определена достаточно точно. Поэтому в расчетах часто полагают, что переход из ламинарной формы течения в турбулентную происходит при определенном значении x , т. е. заменяют отрезок Δx точкой.

При развитом вынужденном турбулентном течении теплоотдача, как правило, не зависит от числа Грасгофа (исключением может являться околокритическая область).

Формулы, определяющие теплоотдачу пластины, могут быть использованы также для расчета теплоотдачи при внешнем продольном омывании цилиндра, если его диаметр существенно больше толщины пограничного слоя. Более глубоко с теорией теплообмена при турбулентном течении в пограничном слое можно ознакомиться с помощью специальной литературы [Л. 47, 90, 92, 109, 192, 202].

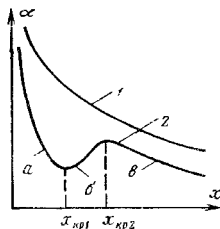


Рис 7-13. Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины.

1 — полностью турбулентное течение в пограничном слое; 2 — смешанное течение (α — ламинарное течение, δ — переходное, θ — турбулентное).

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

8-1. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ТРУБАХ

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным по сравнению с процессом теплоотдачи при омывании поверхности неограниченным потоком. Жидкость, текущая вдали от пластины, не испытывает влияния процессов, происходящих у стенки. Поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. В результате, начиная с некоторого расстояния от входа, жидкость по всему поперечному сечению трубы испытывает тормозящее действие сил вязкости, происходит изменение температуры жидкости как по сечению, так и по длине канала. Все это сказывается на теплоотдаче.

В дальнейшем основное внимание уделим рассмотрению течения и теплообмена в гладких прямых трубах с неизменным по длине круглым поперечным сечением. Как и раньше, не будем учитывать диссипацию механической энергии. В жидкости отсутствуют внутренние источники теплоты.

Течение жидкости может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения в трубах судят по значению числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\bar{w}d}{\nu},$$

где $\bar{w}$ — средняя скорость жидкости; d — внутренний диаметр трубы.

Если $Re < Re_{кр} \approx 2000$, то течение является ламинарным.

Значение $Re_{кр} \approx 2000$ является нижним критическим значением числа Рейнольдса. При $Re > 2000$ поток после единичного возмущения уже не возвращается к ламинарному режиму течения.

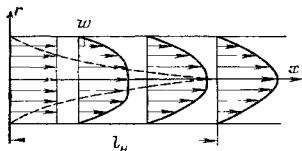


Рис. 8-1 Стабилизация распределения скорости при движении жидкости в трубе.

Развитое турбулентное течение в технических трубах устанавливается при $Re > Re_{кр2} \approx 10^4$.

Течение при $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ называют переходным. Ему соответствует и переходный режим теплоотдачи.

Если жидкость поступает в трубу из большого объема и стенки трубы на входе несколько закруглены, распределение скорости в начальном (рис. 8-1). При движении у стенок пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает. В достаточно длинных трубах на некотором расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. При постоянных физических свойствах жидкости после заполнения устанавливается постоянное распределение скорости, характерное для данного режима течения.

Расстояние, отсчитываемое от входа до сечения, соответствующего слиянию пограничного слоя, называется длиной гидродинамического начального участка или участком гидродинамической стабилизации.

Стабилизированное течение ($x \geq l_n$) не зависит от распределения скорости на входе ($x=0$), но распределение скорости как при $x < l_n$, так и при $x \geq l_n$ может зависеть от процесса теплообмена.

Гидродинамический начальный участок наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном течении. Однако при $Re > Re_{кр}$ течение в начальном участке может развиваться своеобразно. В передней части трубы может существовать ламинарная форма течения. Образующийся ламинарный пограничный слой при достижении критической толщины переходит в турбулентный. Толщина последнего быстро растет, пока не заполнит все течение трубы. Зона начального участка в месте изменения режима течения характеризуется перемежаемостью движения. Изменение режима течения может произойти и за пределами начального гидродинамического участка.

При $Re \geq 5 \cdot 10^4$ практически с самого начала развивается турбулентный пограничный слой. Если жидкость втекает из большого объема в трубу, имеющую острую кромку на входе, то в начале трубы образуются вихри, приводящие к быстрому разрушению ламинарного пограничного слоя.

Длина гидродинамического начального участка и его доли, занятые соответственно ламинарным и турбулентным пограничным слоями, зависят от числа Re , степени турбулентности потока на входе и ряда других факторов. Многие факторы взаимосвязаны.

Если поток гидродинамически стабилизирован ($x > l_n$), скорости по сечению потока при ламинарном изотермическом движении распределяются по параболе (рис. 8-2, а):

$$w_x = w_{\max} [1 - (r/r_0)^2],$$

где r_0 — радиус трубы; $w_{\max}$ — скорость на оси трубы (при $r=0$).

Средняя скорость при этом равна половине максимальной: $\bar{w}_x = 0,5 w_{\max}$.

При турбулентном движении почти все сечение трубы заполнено турбулентно текущей жидкостью. У стенки же образуется вязкий подслей. При больших числах Re толщина подслоя составляет ничтожную часть диаметра трубы. Несмотря на это, для малотеплопроводных сред вязкий подслей является основным термическим сопротивлением.

При стабилизированном турбулентном течении жидкости в трубах распределение скорости по поперечному сечению имеет вид усеченной параболы (рис. 8-2, б). Максимальная скорость по-прежнему на оси трубы. Наиболее резко скорость изменяется вблизи стенки.

Распределение скоростей в турбулентной части потока (см. § 7-4) можно описать с помощью универсального логарифмического закона (7-21)

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y_* + \eta;$$

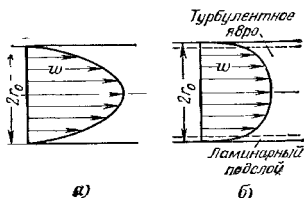


Рис. 8-2. Распределение скорости по сечению трубы при стабилизированном ламинарном (а) и турбулентном (б) течении жидкости.

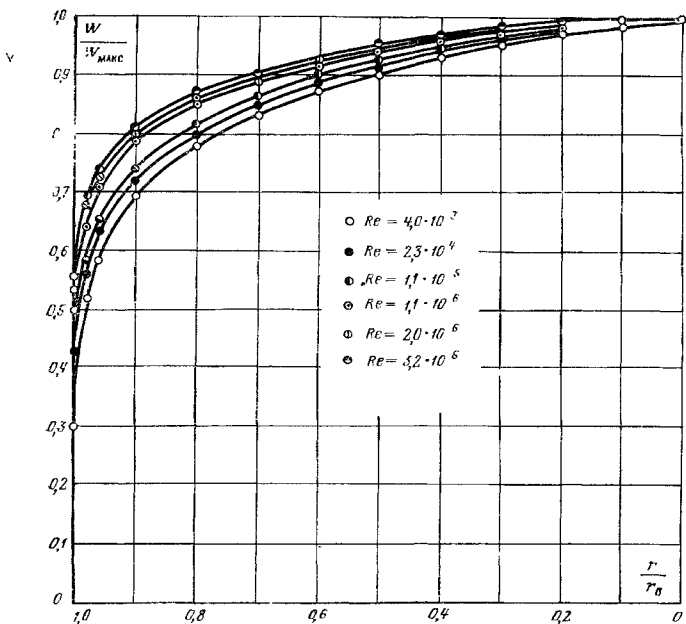


Рис. 8-3 Распределение скорости в круглой трубе при различных числах Рейнольдса

здесь $w_* = \sqrt{s_c/\rho}$; $y_* = w_* y/\nu$; $y = r_0 - r$ (рис. 8-2). Согласно данным ряда исследований для турбулентного ядра ($y^+ \geq 30$) $\kappa=0,4$ и $\eta=5,5$; для промежуточной между турбулентным ядром и вязким подслоем области ($y_* \approx 5 \div 30$) $1/\kappa=5,0$ и $\eta=3,05$. В пределах вязкого подслоя ($y_* \approx 0 \div 5$) принимается линейное изменение скорости:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = y_* \quad \text{или} \quad \frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{s_c}{\mu} y.$$

Напряжение трения на стенке есть функция числа Рейнольдса. Отсюда появляется зависимость распределения скорости по сечению от Re . Чем больше число Рейнольдса, тем резче изменяется скорость вблизи стенки и менее резко — в центральной части потока, т. е. эпюра скорости становится более заполненной (рис. 8-3). В результате отношение средней по сечению трубы скорости к максимальной ($r=0$) будет зависеть от числа Рейнольдса. Экспериментально получено, что эта величина изменяется слабо и равна 0,8—0,9.

Приведенные сведения о распределении скорости в турбулентном потоке прежде всего соответствуют изотермическим течениям или течениям с практически не проявляющейся переменностью физических свойств жидкости.

По мере движения жидкости вдоль трубы наблюдается прогрев или охлаждение пристенных слоев, если температура жидкости отлична от температуры трубы. В начале трубы центральное ядро жидкости еще имеет температуру, равную температуре на входе, это ядро в теплообмене не участвует, все изменение температуры сосредоточивается в пристенном слое. Таким образом, у поверхности трубы в ее начальной части образуется тепловой пограничный слой, толщина которого по мере удаления от входа увеличивается. На некотором расстоянии от входа, равном $l_{нт}$, тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы; в дальнейшем вся жидкость участвует в теплообмене, причем интенсивность теплообмена уже не зависит от распределения

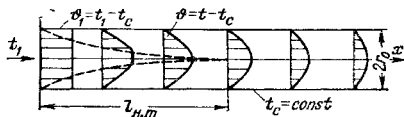


Рис 8-4 Изменение распределения температуры при движении жидкости в трубе

скорости и температуры на входе. Участок трубы длиной $l_{нт}$, называют начальным тепловым участком или участком термической стабилизации.

Если при $x > l_{нт}$ закон задания граничных условий на стенке не изменяется, то такой теплообмен называют стабилизированным. В отличие от эюр скорости эиуры температур при $x > l_{нт}$ даже в случае постоянных физических свойств жидкости не остаются неизменными (рис. 8-4). Существенное изменение граничных условий может привести к эффекту, подобному эффекту формирования нового теплового пограничного слоя (например, при резком увеличении тепловой нагрузки, при возмущении потока каким-либо местным препятствием).

В случае постоянных физических свойств жидкости и при простейших граничных условиях (например, $t_c = \text{const}$, $q_c = \text{const}$) коэффициент теплоотдачи при стабилизированном теплообмене является величиной постоянной (рис. 8-5). Производная $(\partial t / \partial r)_{r=r_0}$ и температурный напор $\theta = \bar{t} - t_c$, где $\bar{t}$ — среднемассовая по сечению температура жидкости, при $t_c = \text{const}$ убывают вдоль трубы с одинаковой скоростью, если $x > l_{нт}$ (или остаются постоянными при $q_c = \text{const}$).

Рис 8-5 Изменение местного и среднего коэффициентов теплоотдачи по длине трубы

а — неизменный режим течения, б — смешанное течение.

На начальном участке производная $(\partial t / \partial r)_{r=r_0}$ убывает гораздо быстрее температурного напора. В результате, как следует из уравнения теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\delta} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=r_0}$$

на участке термической стабилизации α резко падает и при стабилизированном теплообмене становится постоянной величиной (рис. 8-5, а).

Если на начальном участке изменяется режим течения, то изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы будет иным, например

как на рис. 8-5,б. Коэффициент теплоотдачи уменьшается на участке ламинарного течения и растет при его разрушении. Затем происходит стабилизация теплообмена при турбулентном течении.

Длина начального теплового участка зависит от большого количества факторов, например от коэффициента теплопроводности жидкости, наличия гидродинамической стабилизации, числа Рейнольдса, распределения температур на входе и т. п.

Теория показывает, что при ламинарном течении жидкости с постоянными физическими параметрами и однородной температурой на входе в случае $t_c = \text{const}$

$$\frac{l_{н.т}}{d} = 0,055 \text{ Re}$$

и в случае $q_c = \text{const}$

$$\frac{l_{н.т}}{d} = 0,07 \text{ Re.}$$

Эти уравнения соответствуют предварительно гидродинамически стабилизированному течению.

При ламинарном течении число Рейнольдса может достигать величины примерно 2000. При этом для газов, у которых $\text{Pr} \approx 1$ (напомним, что $\text{Re} = \text{RePr}$) расчетная длина начального теплового участка достигает примерно ста диаметров. У очень вязких жидкостей ($\text{Pr} \gg 1$) значение $l_{н.т}$ может изменяться от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч диаметров. В последнем случае теплообмен практически всегда происходит в пределах начального участка.

Согласно многочисленным опытным данным при турбулентном течении $l_{н.т} = (10 \div 15)d$.

Определим средний коэффициент теплоотдачи трубы, если $l > l_{н.т}$, где l — длина трубы. Пусть на участке $0 \leq x < l_{н.т}$ $\alpha = \alpha(x) = \alpha_{н.т}$, а при $x \geq l_{н.т}$ $\alpha = \alpha_\infty = \text{const}$. Тогда

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta t} = \frac{\int_0^l \alpha \Delta t dx}{\int_0^l \Delta t dx} = \frac{\int_0^{l_{н.т}} \alpha_{н.т} \Delta t dx + \int_{l_{н.т}}^l \alpha_\infty \Delta t dx}{\int_0^{l_{н.т}} \Delta t dx + \int_{l_{н.т}}^l \Delta t dx}. \quad (a)$$

Интегралы в пределах от 0 до $l_{н.т}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\int_0^{l_{н.т}} \alpha_{н.т} \Delta t dx = \bar{\alpha}_{н.т} l_{н.т} = \bar{\alpha}_{н.т} \bar{\Delta t}_{н.т} l_{н.т} \quad \text{и} \quad \int_0^{l_{н.т}} \Delta t dx = \bar{\Delta t}_{н.т} l_{н.т}.$$

Подставляя значения интегралов в уравнение (a), получаем:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}_{н.т} + \frac{\alpha_\infty}{\bar{\Delta t}_{н.т} l_{н.т}} \int_{l_{н.т}}^l \Delta t dx}{1 + \frac{1}{\bar{\Delta t}_{н.т} l_{н.т}} \int_{l_{н.т}}^l \Delta t dx}$$

$$\frac{\bar{a}}{a_{\infty}} = \frac{\frac{\bar{a}_{н.т}}{a_{\infty}} + \varphi(l)}{1 + \varphi(l)}, \quad (8-1)$$

где

$$\varphi(l) = \frac{1}{\Delta t_{н.т} l_{н.т}} \int_{l_{н.т}}^l \Delta t dx = \frac{\bar{\Delta t}_{\infty}}{\Delta t_{н.т}} \frac{l - l_{н.т}}{l_{н.т}},$$

$\bar{\Delta t}_{\infty}$, $\bar{\Delta t}_{н.т}$ — соответственно средние температурные напоры на участках $(l_{н.т}, l)$ и $(0, l_{н.т})$.

Если $\bar{\Delta t}_{\infty} \approx \bar{\Delta t}_{н.т}$, то $\varphi(l) \approx (l - l_{н.т})/l_{н.т}$.

Подставляя в уравнение (8-1) это значение функции $\varphi(l)$, получаем:

$$\frac{\bar{a}}{a_{\infty}} = 1 + \frac{l_{н.т}}{l} \left(\frac{\bar{a}_{н.т}}{a_{\infty}} - 1 \right). \quad (8-2)$$

Из этого уравнения следует, что в длинных трубах ($l \gg l_{н.т}$) $\bar{a} \rightarrow a_{\infty}$, т. е. при больших l значения $\bar{a}$ и a_{∞} практически совпадают. Например, если $\bar{a}_{н.т}/a_{\infty} = 1,3$, то с точностью до 3% средний коэффициент теплоотдачи $\bar{a}$ будет равен локальному a_{∞} при $l = 10l_{н.т} = l_{н.т}$.

Длина трубы $l_{н.т}$, при которой с достаточной степенью точности можно полагать, что средний коэффициент теплоотдачи $\bar{a}$ равен коэффициенту теплоотдачи при стабилизированном теплообмене a_{∞} , обычно используется в практических расчетах средней теплоотдачи. Очевидно, $l_{н.т}$ является условной расчетной величиной, числовое значение которой зависит или от точности аналитического расчета, или от точности экспериментальных данных.

В связи с переменностью физических параметров при ламинарном течении ($Re < 2000$) могут иметь место два режима неизотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Законы теплоотдачи для этих двух режимов различны.

В вязкостно-гравитационном течении силы вязкости и подъемные силы соизмеримы.

Вязкостный режим имеет место при преобладании сил вязкости над подъемными силами, т. е. он соответствует течению вязких жидкостей при отсутствии влияния естественной конвекции.

По сравнению с вязкостно-гравитационным вязкостный режим тем более вероятен, чем меньше диаметр трубы, чем больше вязкость жидкости и чем меньше температурный напор.

При вязкостном режиме распределение скорости по сечению трубы отклоняется от параболического, так как вследствие изменения температуры по сечению изменяется и вязкость. При этом распределение скоростей зависит от того, имело ли место нагревание или охлаждение жидкостей (рис. 8-6). При одной и той же средней по сечению температуре в случае нагревания жидкости ее температура у стенки будет больше, чем при охлаждении. Чем больше температура капельной жидкости, тем меньше ее вязкость. В результате при нагревании жидкостей скорость вблизи стенки больше, чем при охлаждении, и теплоотдача увеличивается.

С аналогичным явлением мы познакомились при рассмотрении теплоотдачи плоской стенки, омываемой потоком капельной жидкости. При течении капельной жидкости коэффициент теплоотдачи будет больше при нагревании, чем при охлаждении; различие увеличится при возрастании температурного напора.

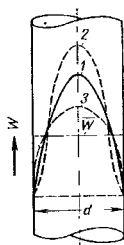


Рис. 8-6. Распределение скорости по сечению трубы при вязкостном течении капельных жидкостей.

1 — изотермическое течение; 2 — охлаждение жидкости; 3 — нагревание жидкости.

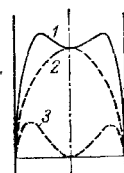


Рис. 8-7. Распределение скорости по сечению трубы при совпадении направления вынужденного и свободного движений.

1 — суммарная кривая; 2 — за счет вынужденного движения; 3 — за счет свободного движения.

При вязкостно-гравитационном режиме, помимо влияния изменения вязкости, распределение скоростей в сильной мере зависит от интенсивности и направления токов естественной конвекции, обусловленных разностью плотностей менее и более нагретых частей жидкости. При отсутствии вынужденного движения и определенном изменении температуры распределение скоростей при естественной конвекции жидкости имеет вид, изображенный на рис. 4-8.

В зависимости от взаимного направления вынужденного и свободного движения можно различать три случая:

- направления естественного и вынужденного движения совпадают;
- направления свободного и вынужденного движения взаимно перпендикулярны;
- направления свободного и вынужденного движения взаимно противоположны.

Первый случай имеет место при нагревании жидкости и ее движении в вертикальной трубе снизу вверх или при охлаждении жидкости и ее движении в вертикальной трубе сверху вниз. При этом под влиянием естественной конвекции скорости жидкости у стенки возрастают (рис. 8-7), эпюра скоростей может иметь два максимума.

Второй случай соответствует взаимно перпендикулярному направлению вынужденной и естественной конвекции, он наблюдается в горизонтальных трубах. В поперечном сечении трубы под влиянием естественной конвекции возникает поперечная циркуляция жидкости. При нагревании жидкости у стенки возникают восходящие токи и нисходящие — в середине трубы; при охлаждении — наоборот (рис. 8-8). В результате жидкость движется как бы по винтовой линии. За счет лучшего перемешивания жидкости теплоотдача в среднем увеличивается. При прочих равных условиях она будет больше, чем при совпадении вынужденного и свободного движения.

Третий случай, соответствующий взаимно противоположному направлению вынужденной и естественной конвекции, имеет место при нагревании

жидкости и ее движении в вертикальной трубе сверху вниз и охлаждении жидкости и ее движении снизу вверх. При этом скорость жидкости у стенки под влиянием токов естественной конвекции, направленных в противоположную сторону, уменьшается. В некоторых случаях у стенки может образоваться возвратное, или вихревое, движение жидкости (рис. 8-9). В этом случае коэффициенты теплоотдачи практически

равны коэффициентам теплоотдачи, определенным по уравнению для турбулентного течения жидкости [Л. 144].

Течение имеет свои особенности, если теплообмен неравномерен по периметру канала или имеет место только на одной его стороне. Так, например, если плоский (щелевидный) канал расположен горизонтально и производится односторонний нагрев снизу, то возмущения потока за счет естественной конвекции будут значительными, при нагреве же сверху — слабы.

Таким образом, в неизотермических условиях строго ламинарного движения, т. е. параллельно-струйчатого с параболическим распределением скоростей, может не быть.

Сложность и многообразие процессов течения и теплообмена в трубах позволяет выделить громадное число конкретных задач, различающихся исходными дифференциальными уравнениями и условиями однозначности. Многие из этих задач решены. Решение наиболее полно поставленных задач из-за их сложности не может быть получено с достаточной точностью или неосуществимо. Применение электронных вычислительных машин позволяет довести решение задач до получения числовых значений искомых переменных. Однако и в этом случае иногда остаются неопределенными области выполнения полученных значений на практике. Например, машинный расчет вязкостно-гравитационного течения может не показать, при каких условиях это течение переходит в турбулентное (критическое число Рейнольдса при этом может несколько измениться).

Рис 8-9 Распределение скорости по сечению трубы при взаимно противоположных направлениях вынужденного и свободного движений.

1 — суммарная кривая, 2 — за счет вынужденного движения, 3 — за счет свободного движения

В результате в учении о конвективном теплообмене в настоящее время велико значение экспериментальных исследований. При экспериментальном исследовании нахождение связей между отдельными переменными также представляет сложную задачу, которая в общем случае не может быть разрешена вполне приемлемо без помощи теории (хотя бы ограниченной). Поэтому органическое слияние расчетно-аналитических и экспериментальных исследований дает в настоящее время наиболее достоверные универсальные результаты.

8-2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛООТДАЧИ ДЛЯ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Рассмотрим приближенный метод определения коэффициентов теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении жидкости в прямой круглой трубе.

Будем полагать, что жидкость несжимаема, ее физические параметры постоянны, теплотой трения можно пренебречь, внутренние источники тепла отсутствуют.

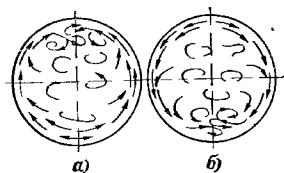


Рис 8-8 Поперечная циркуляция в горизонтальной трубе при вынужденном и свободном движении жидкости

а — нагревание жидкости, б — охлаждение жидкости

Уравнение энергии для осесимметричного стационарного потока можно записать следующим образом:

$$\rho c_p \left(w_r \frac{\partial t}{\partial r} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right).$$

Уравнение записано в цилиндрических координатах: здесь r — текущий радиус; x — продольная координата, направленная по оси трубы в сторону движения жидкости.

Будем полагать, что перенос теплоты теплопроводностью в радиальном направлении много больше, чем в осевом. Тогда членом $\partial^2 t / \partial x^2$ можно пренебречь. Кроме того, $w_x = 0$. Учтем, что в турбулентном потоке теплота переносится не только теплопроводностью, но и путем турбулентных пульсаций. Уравнение энергии при этом может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + \lambda_\tau) r \frac{\partial t}{\partial r} \right] = \rho c_p w_x r \frac{\partial t}{\partial x};$$

здесь $\lambda_\tau = \rho c_p \epsilon q$ — коэффициент турбулентного переноса теплоты; t и w_x — осредненные во времени местные значения температуры и скорости турбулентного потока.

Назначим граничное условие $q_c = \text{const}$. Как было показано в гл. 6, при $q_c = \text{const}$

$$\frac{d\bar{t}_m}{dF} = \frac{q_c}{G c_p} = \text{const}.$$

Для круглой трубы ($dF = 2\pi r_0 dx$)

$$\frac{d\bar{t}_m}{dx} = \frac{2q_c}{\rho c_p w_x r_0} = \frac{2\alpha (t_c - \bar{t}_m)}{\rho c_p w_x r_0};$$

здесь $\bar{t}_m$ — среднемассовая температура жидкости в данном сечении; w_x — средняя скорость в этом же сечении; r_0 — радиус трубы.

В рассматриваемых условиях средняя температура жидкости будет линейной функцией x . При $\alpha = \text{const}$ по линейному закону изменяется не только $\bar{t}_m$, но и температура стенки:

$$\frac{q_c}{\alpha} = t_c - \bar{t}_m = \text{const}.$$

При неизменных физических свойствах местная температура жидкости изменяется вдоль трубы также по линейному закону. Отсюда следует:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2q_c}{\rho c_p w_x r_0} = \text{const}.$$

Подставляя значение $\partial t / \partial x$ в уравнение энергии, получаем:

$$\frac{d}{dr} \left[(\lambda + \lambda_\tau) r \frac{dt}{dr} \right] = 2q_c \frac{w_x}{w_x} \frac{r}{r_0}$$

или

$$\frac{d}{dR} \left[(\lambda + \lambda_\tau) R \frac{dt}{dR} \right] = 2q_c r_0 W_x R,$$

где $W_x = w_x / \bar{w}_x$ и $R = r / r_0$ — соответственно безразмерные скорость и радиус.

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от 0 до R и от 0 до $(\lambda + \lambda_\pi) R dt/dR$, получаем:

$$(\lambda + \lambda_\pi) R \frac{dt}{dR} = 2q_0 r_0 \int_0^R W_x R dR.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dt}{dR} = \frac{2q_0 r_0}{(\lambda + \lambda_\pi) R} \int_0^R W_x R dR. \quad (a)$$

Среднемассовая температура жидкости при постоянных c_p и ρ определяется уравнением

$$\bar{t}_{ж} = \frac{1}{f_0 \bar{w}_x} \int_0^{f_0} w_x t df.$$

Так как для круглой трубы $f = \pi r^2$ и $df = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$, то

$$\bar{t}_{ж} = \frac{2}{r_0^2 \bar{w}_x} \int_0^{r_0} w_x t r dr = 2 \int_0^1 t W_x R dR.$$

Найдем этот интеграл по частям. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Обозначим

$$t = u \text{ и } dv = W_x R dR \text{ или } v = \int_0^R W_x R dR.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ж} &= 2 \left[t \int_0^R W_x R dR \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt \right] = \\ &= 2 \left[t_0 \int_0^1 W_x R dR - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt \right] \end{aligned} \quad (б)$$

Интеграл $\int_0^1 W_x R dR$ может быть преобразован следующим образом:

$$\int_0^1 W_x R dR = \frac{2\pi}{2w_x \pi r_0^2} \int_0^{r_0} w_x r dr = \frac{\int_0^{r_0} w_x 2\pi r dr}{2w_x \pi r_0^2} = \frac{\bar{w}_x \pi r_0^2}{2w_x \pi r_0^2} = \frac{1}{2}$$

Подставляя полученное значение интеграла в (б), получаем

$$\bar{t}_{ж} = t_0 - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt.$$

После подстановки сюда значения dt согласно уравнению (а), можно написать:

$$\bar{t}_m = t_c - \frac{4q_0 f_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R w_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda} \right) R} dR.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\lambda(t_c - \bar{t}_m)}{2q_0 f_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R w_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda} \right) R} dR = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R w_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_r} \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) R} dR,$$

где $\text{Pr}_r = \epsilon_s / \epsilon_q$ — турбулентное число Прандтля. Согласно определению

$$\frac{\lambda(t_c - \bar{t}_m)}{2q_0 f_0} = \frac{\lambda}{\alpha d} = \frac{1}{\text{Nu}_d}.$$

Используя последнее обозначение, можно написать следующее интегральное уравнение теплоотдачи для стабилизированного теплообмена:

$$\frac{1}{\text{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R w_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_r} \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) R} dR. \quad (8-3)$$

Уравнение (8-3) было получено Лайоном. Оно пригодно как для турбулентного, так и для ламинарного течения. Если известно распределение скоростей $w_x(r)$, то с помощью уравнения (8-3) можно рассчитать коэффициенты теплоотдачи.

Для ламинарного течения $\lambda_r = 0$ и уравнение (8-3) упрощается:

$$\frac{1}{\text{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R w_x R dR \right)^2. \quad (8-3')$$

Аналитические методы расчета теплообмена при течении жидкости в трубах, в том числе и с переменными свойствами, рассматриваются в [Л. 46, 47, 144].

8-3. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ГЛАДКИХ ТРУБАХ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

А. Теплоотдача при ламинарном режиме

Теплоотдача при гидродинамически и термически стабилизированном течении жидкости может быть рассчитана по формуле (8-3'). При гидродинамически стабилизированном ламинарном течении жидкости с неизменяемыми физическими свойствами

$$w_x = 2\bar{w}_x[1 - (r/r_0)^2] \quad \text{или} \quad W_x = 2(1 - R^2),$$

где

$$W_x = w_x / \bar{w}_x \quad \text{и} \quad R = r/r_0.$$

Подставляя в уравнение (8-3) значение W_x согласно последней формуле и интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left| \int_0^R 2(1-R^2) R dR \right|^2 = \frac{11}{48}.$$

Отсюда следует, что

$$Nu_d = \frac{48}{11} \approx 4,36.$$

Таким образом, при стабилизированной теплоотдаче критерий Нуссельта постоянен и равен 4,36.

Это значение получено при условии $q_c = \text{const}$. При $t_c = \text{const}$ теория дает, что $Nu_d = 3,66$. Значения Nu получены для параболического распределения скоростей. Такое распределение будет иметь место при неизменных физических параметрах жидкости, в частности при исчезающе малых температурных напорах, поэтому расхождение полученного результата с опытными данными может быть очень велико. Кроме того, рассмотренная нами теория не учитывает теплообмен в начальном участке трубы.

Течение и теплообмен у входа в трубу близки к таким же процессам у продольно оmyаемой пластины, рассмотренным в гл. 7, так как в начале трубы толщины пограничных слоев малы по сравнению с поперечными размерами канала. В связи с этим теплоотдача вблизи входа в трубу с достаточной степенью точности может быть описана уравнениями для продольно-обтекаемой пластины. По мере удаления от входа ввиду большего влияния стеснения потока закономерности процесса изменяются.

При аналитических расчетах учет переменности физических параметров в совокупности с учетом других влияющих факторов требует сложной и трудоемкой работы. Поэтому в настоящее время практические расчеты предпочитают вести с помощью сравнительно простых эмпирических формул. Рассмотрим результаты некоторых экспериментальных работ.

Для случая $q_c = \text{const}$ в [Л. 114], проведенной в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского, предложена для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при вязкостном течении в начальном тепловом участке следующая формула:

$$Nu_{(x)} = 0,33 Re_{(x)}^{0,5} Pr_{(x)}^{0,43} (Pr_{(x)}/Pr_{(x)})^{0,25} (x/d)^{0,1}. \quad (8-4)$$

Здесь в качестве определяющего размера принято расстояние рассматриваемого сечения от начала трубы, а в качестве определяющей температуры — средняя в данном сечении температура жидкости (значение $Pr_{(x)}$ выбирается по местному значению температуры стенки).

Согласно формуле (8-4) $\alpha = cx^{-0,4}$, где c — величина, не зависящая от x . Осредняя коэффициенты теплоотдачи по формуле (6-21), получаем, что $\alpha = 1,4\alpha_{x=l}$.

В экспериментах [Л. 114] теплообмен имел место с начала трубы (теплоотдача измерялась, начиная с $x/d=2$), относительная длина трубы составляла $l/d \leq 216$, где l — длина трубы, а d — внутренний диаметр. Формула (8-4) близка к формуле для продольно-омываемой пластины. Полагают, что комплекс $(x/d)^{0,1}$ учитывает влияние кривизны канала и стеснение потока стенками трубы.

Если длина трубы больше длины начального теплового участка и теплообмен имеет место с начала трубы, средние коэффициенты теплоотдачи при вязкостном течении могут быть определены по уравнению [Л. 144]

$$\overline{Nu} = 1,55 \left(Re \frac{d}{l} \right)^{1/3} (\mu_c / \mu_{ж})^{-0,14} \epsilon_l. \quad (8-5)$$

Здесь средний коэффициент теплоотдачи отнесен к среднему логарифмическому температурному напору. Физические свойства жидкости, входящие в Nu и Re , а также значение $\mu_{ж}$ выбираются по температуре $t = t_c - \Delta t_{л}/2$ (значение μ_c берется по средней температуре стенки). Определяющим размером, вводимым в Nu и Re , является внутренний диаметр трубы.

Величина ϵ_l представляет собой поправку на гидродинамический начальный участок, формирующийся одновременно с начальным термическим участком; поправка ϵ_l может быть вычислена по формуле

$$\epsilon_l = 0,10 \left(\frac{1}{Re} \frac{l}{d} \right)^{-1,7} / \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re} \frac{l}{d} \right),$$

справедливой при $\frac{1}{Re} \frac{l}{d} < 0,1$, или взята из графика рис. 8-10. Определяющие величины те же, что и для критериев $\overline{Nu}$ и Re .

Если в начале трубы имеется необогреваемый участок длиной $l_0 < l_{н.т.}$, то приближенно можно пользоваться формулой (8-5), подставив в выражение $\frac{1}{Re} \frac{l}{d}$ вместо l сумму $l_0 + l$. Если $l_0 \geq l_{н.т.}$, то следует принимать $\epsilon_l = 1$.

Уравнение (8-5) получено при $\frac{1}{Re} \frac{l}{d} < 0,01$ и $0,07 \leq \mu_c / \mu_{ж} \leq 1500$.

Учет влияния вязкости с помощью отношения $(\mu_c / \mu_{ж})^{-0,14}$ справедлив для капельных жидкостей и непригоден для газов.

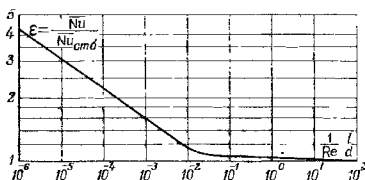


Рис. 8-10. Теплоотдача на гидродинамическом начальном участке круглой трубы при ламинарном течении и $t_c = \text{const}$.

Формула (8-5) может быть использована при постоянной или слабо изменяющейся по длине температуре стенки.

Согласно [Л. 144] при $GrPr > 8 \cdot 10^5$ имеет место вязкостно-гравитационный режим. Здесь $Gr = g\beta\Delta t d^3/\nu^2$; $\Delta t = |(t_c - t_0)|$; t_0 — температура жидкости на входе в трубу; физические параметры, входящие в $GrPr$, выбираются по температуре $t = 0,5(t_0 + t_c)$.

При вязкостно-гравитационном режиме коэффициенты теплоотдачи больше определяемых по формулам (8-4) и (8-5). В результате влияния естественной конвекции коэффициент теплоотдачи при определенных условиях может увеличиться в 5 раз.

Учет влияния естественной конвекции при различных положениях трубы в сочетании с различными условиями ее нагревания и охлаждения является достаточно трудной задачей. Сравнительно небольшие различия граничных условий часто приводят к существенно разным

результатам экспериментов, что затрудняет получение обобщенных зависимостей, справедливых для всех случаев вязкостно-гравитационного режима.

Приближенная оценка среднего коэффициента теплоотдачи при вязкостно-гравитационном режиме может быть произведена по формуле [Л. 125]:

$$\overline{Nu}_{\text{жд}} = 0,15 Re_{\text{жд}}^{0,32} Pr_{\text{ж}}^{0,33} \times \\ \times (Gr_{\text{жд}} Pr_{\text{ж}})^{0,4} (Pr_{\text{ж}}/Pr_c)^{0,25} \overline{\epsilon}_l. \quad (8-6)$$

Здесь в виде определяющей принята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. Коэффициент $\overline{\epsilon}_l$ учитывает изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы. Если $l/d \geq 50$, то $\overline{\epsilon}_l = 1$. При $l/d < 50$ поправку $\overline{\epsilon}_l$ можно приближенно оценить с помощью табл. 8-1 [Л. 124].

Таблица 8-1

Значения $\overline{\epsilon}_l$ при ламинарном режиме

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$\overline{\epsilon}_l$	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

Обширные исследования теплоотдачи при вязкостном и вязкостно-гравитационном режимах были проведены Б. С. Петуховым, Е. А. Краснощековым, Л. Д. Нольде и др. [Л. 123, 149, 150, 151 и др.]. В экспериментах, проведенных с водой при $q_c = \text{const}$, получено [Л. 151], что вследствие свободной конвекции температура стенки горизонтальной трубы может существенно изменяться по периметру; в условиях нагрева жидкости на верхней образующей она значительно выше, чем на нижней. В случае необходимости проведения тщательных расчетов теплоотдачи при вязкостно-гравитационном течении следует обратиться к цитируемым работам.

Б. Теплоотдача при турбулентном режиме

Ранее при рассмотрении турбулентного пограничного слоя было получено [формула (7-32)]:

$$q_c = \frac{s_c c_p (t_0 - t_c)}{\omega_0 \left[1 + \frac{12}{\omega_0} \sqrt{\frac{s_c}{\rho}} (Pr^{2/3} - 1) \right]}.$$

Примем для течения в трубе, что $\omega_0 = \bar{w}$ и $t_0 = \bar{t}$, где $\bar{w}$ и $\bar{t}$ — соответственно средние по сечению скорость и температура жидкости.

При безотрывном течении, когда гидравлическое сопротивление определяется силами трения, величину s_c можно найти, зная коэффициент гидравлического сопротивления ξ для стабилизированного течения.

Разность давления в двух поперечных сечениях трубы 1 и 2 $\Delta p = p_1 - p_2$ (рис. 8-11) при стабилизированном течении идет на преодоление трения на стенках (в начальном участке еще дополнительно на перестройку потока). Тогда

$$\Delta p f = s_c F,$$

где f — площадь поперечного сечения трубы; F — поверхность трубы между сечениями 1 и 2.

Согласно закону Дарси

$$\Delta p = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}.$$

Тогда

$$s_c = \Delta p \frac{f}{F} = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{f}{F}.$$

Для круглой трубы

$$\frac{l}{d} \frac{f}{F} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$s_c = \frac{\xi}{8} \rho \bar{w}^2. \quad (8-7)$$

Подставив последнее соотношение в уравнение (7-32) и разделив левую и правую части этого уравнения на $\rho c_p \bar{w} (\bar{t} - t_c)$, получим:

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p \bar{w}} = \frac{\xi/8}{1 + 12 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (8-8)$$

Напомним, что число Стантона St можно представить следующим образом:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr}.$$

Если $Pr = 1$, то вместо (8-8) имеем:

$$St = \frac{\xi}{8} \text{ или } Nu = \frac{\xi}{8} Re Pr. \quad (8-9)$$

Б. С. Петуховым и В. В. Кирилловым [Л. 147] была предложена формула

$$Nu_{\text{ид}} = \frac{\frac{\xi}{8} Re_{\text{ид}} Pr_{\text{ид}}}{1.07 + 12.7 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)} \varepsilon_t, \quad (8-10)$$

где несколько уточнены постоянные, входящие в уравнение. Здесь $\varepsilon_t = (\mu_{\text{ж}}/\mu_c)^n$; $n=0,11$ при нагревании капельной жидкости и $n=0,25$ при ее охлаждении¹.

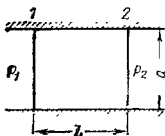


Рис. 8-11. К выводу уравнения (8-7).

Формула (8-10) дает значения коэффициентов теплоотдачи при стабилизированном теплообмене. За определяющую приняты либо средние по сечению (при расчете местных коэффициентов теплоотдачи), либо средние в трубе (при расчете средних коэффициентов теплоотдачи) температура жидкости. Исключение составляет коэффициент динамической вязкости μ_c , выбираемый по температуре стенки. За определяющий размер взят внутренний диаметр трубы. Формула (8-10) пригодна для расчета теплоотдачи различных жидкостей при $Pr \geq 0,7$.

На основе уравнения (8-9) можно получить расчетную формулу для $Pr \geq 1$, если ввести в (8-9) экспериментально определенную функцию

¹ При расчете теплоотдачи по формуле (8-10) коэффициент гидравлического сопротивления трения ξ рекомендуется определять по уравнению Г. К. Филоненко. $\xi = 1/(1,82 \lg Re_{\text{ид}} - 1,64)^2$.

$f(\text{Pr}) = 0,91 \text{Pr}^{0,43}$. Для определения коэффициента гидравлического сопротивления используем формулу

$$\xi = 0,184 \text{Re}_d^{-0,2}.$$

Тогда, вводя дополнительно поправку $\varepsilon_t = (\text{Pr}_m/\text{Pr}_c)^{0,25}$ на переменность физических свойств капельных жидкостей, получим формулу, предложенную М. А. Михеевым [Л. 125]:

$$\text{Nu}_{md} = 0,021 \text{Re}_{md}^{0,8} \text{Pr}_m^{0,43} (\text{Pr}_m/\text{Pr}_c)^{0,25}. \quad (8-11)$$

Формула описывает среднюю теплоотдачу в прямых гладких трубах при $(l/d) > 50$. За определяющую здесь принята средняя температура жидкости в трубе, а за определяющий размер — внутренний диаметр. Число Pr_c выбирается по средней температуре поверхности стенки.

Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении газа в прямой гладкой трубе А. С. Сукомелом и др. [Л. 131] была получена формула

$$\text{Nu}_{m(x)d} = 0,022 \text{Re}_{m(x)}^{0,8} \text{Pr}_{m(x)}^{0,43} \varepsilon_t. \quad (8-12)$$

За определяющую здесь принята средняя в данном сечении температура газа, а за определяющий размер — внутренний диаметр трубы. Величина ε_t является поправкой на изменение коэффициента теплоотдачи в начальном термическом участке. При $(x/d) \geq 15$ имеем $\varepsilon_t \approx 1$. При $(x/d) < 15$ и турбулентном течении с самого начала трубы согласно [Л. 131] поправочный коэффициент ε_t можно определить по формуле

$$\varepsilon_t = 1,38 (x/d)^{-0,12}. \quad (8-13)$$

Как следует из последнего уравнения, на начальном участке коэффициент теплоотдачи по мере увеличения x уменьшается.

При расчете по формулам (8-10) и (8-11) средней теплоотдачи коротких труб $(l/d) \leq 50$ полученные значения Nu необходимо умножить на поправку $\varepsilon_l = a/a_\infty$, где a_∞ — коэффициент теплоотдачи при $(l/d) \rightarrow \infty$ [практически $(l/d) > 50$].

Как отмечалось в § 8-1, длины начальных гидродинамического и теплового участков зависят от ряда факторов, например, от числа Рейнольдса, степени турбулентности потока на входе, начального распределения скорости, тепловых граничных условий и т. п. От этих же факторов зависят и поправочные коэффициенты ε_l и ε_t . Поэтому используемые в настоящее время в расчетной практике значения поправочных коэффициентов не являются универсальными и отражают специфику опытных исследований, в результате которых они были получены. Чем меньше l/d (или x/d), тем больше может быть различие поправочных коэффициентов и тем больше может быть ошибка расчета.

Значение поправки $\varepsilon_l = a/a_\infty$ может быть определено по уравнению (8-1). Если конкретных сведений об условиях протекания процесса недостаточно, то можно воспользоваться более простой формулой (8-2). Используя уравнение (8-13), для оценки ε_t можно получить следующую формулу:

$$\varepsilon_t \approx 1 + \frac{2}{l/d}; \quad (8-14)$$

здесь l — длина участка осреднения, отсчитываемая от входного сечения трубы.

Коэффициент теплоотдачи может зависеть от переменности температуры стенки по длине трубы. При турбулентном течении неизотермичность поверхности стенки сравнительно слабо сказывается на теплоотдаче.

В случае теплообмена газа при больших температурных напорах коэффициенты теплоотдачи могут отличаться от вычисленных по уравнениям (8-10) — (8-12) [на газы поправки типа $(Pr_{ж}/Pr_c)^n$ и $(\mu_{ж}/\mu_c)^n$ не распространяются]. Изменение теплоотдачи обычно учитывают введением в правую часть уравнений (8-7) — (8-9) функции $f(\Theta_c)$, где $\Theta_c \equiv$

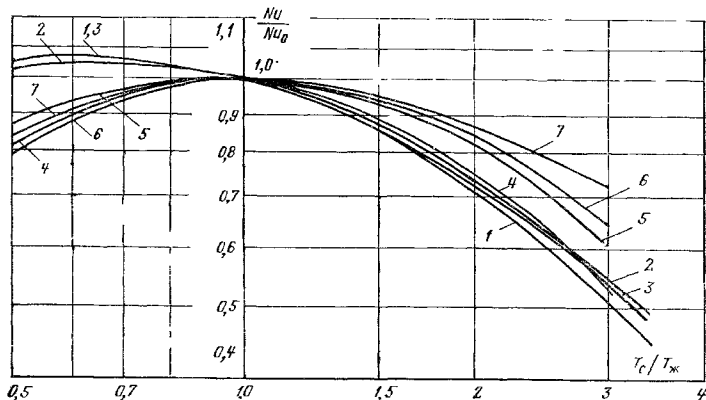


Рис. 8-12. Влияние температурного фактора на местную теплоотдачу при турбулентном течении в трубе различных газов ($x/d=70$).

1 — аргон; 2 — воздух; 3 — гелий; 4 — водяной пар; 5 — углекислый газ; 6 — аммиак; 7 — метан.

$\equiv T_c/T_{ж}$; T_c — средняя или местная температура стенки, К, в зависимости от того, рассчитывается средний или местный коэффициент теплоотдачи; $T_{ж}$ — соответственно среднemasсовая в трубе или в данном сечении температура газа, К.

На рис. 8-12 представлены некоторые результаты измерения местной теплоотдачи газа в случае его нагревания ($\Theta_c > 1$) и охлаждения ($\Theta_c < 1$). При охлаждении одно- и двухатомных газов теплоотдача практически не зависит от температурного фактора, если физические параметры выбирать по $T_{ж}$. По данным [Л. 3, 145] эта независимость имеет место до $\Theta_c = 0,08$. Теплоотдача охлаждаемых многоатомных газов несколько снижается с увеличением температурного напора.

При нагревании газов теплоотдача существенно зависит от Θ_c (рис. 8-12).

В заключение отметим, что из уравнений (8-11) и (8-12) следует, что $\alpha \sim \bar{w}^{0,8}$, т. е. при турбулентном течении коэффициент теплоотдачи зависит от скорости более существенно, чем при ламинарном режиме. Из уравнения (8-12) следует также, что при $(x/d) > 15$ $\alpha \sim d^{-0,2}$, т. е. чем меньше диаметр трубы, тем больше коэффициент теплоотдачи.

В. Теплоотдача при переходном режиме

При числах Рейнольдса примерно от $2 \cdot 10^3$ до 10^4 теплоотдача зависит от очень большого количества факторов, трудно поддающихся учету.

Переходный режим характеризуется перемежаемостью течения (см. § 7-3). На рис. 8-13 для конкретных условий приведена зависимость коэффициента перемежаемости ω от относительного расстояния от входа в трубу для различных чисел Рейнольдса. При постоянном числе Рейнольдса коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу; коэффициент перемежаемости воз-

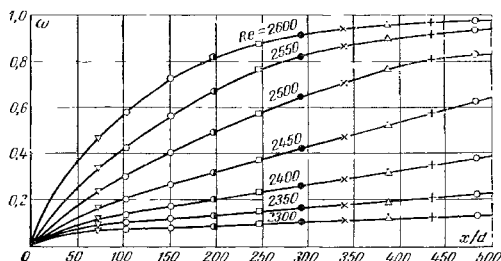


Рис 8-13 Зависимость коэффициента перемежаемости ω от относительного расстояния x/d и числа Рейнольдса

растает и с увеличением числа Рейнольдса. Таким образом, чем больше число Рейнольдса, тем на меньшей длине трубы может преобладать ламинарный режим течения.

В общем случае в начальной части трубы можно выделить пограничный слой с ламинарным, переходным и турбулентным режимами течения. Переход от ламинарного течения к турбулентному может происходить в ядре потока и в пограничном слое не одновременно. Из опытов следует, что при ламинарном течении в пограничном слое движение в ядре потока может иметь ярко выраженный турбулентный характер. Чем больше степень турбулентности на входе в трубу, тем меньше длина ламинарного пограничного слоя [Л. 174].

Наличие наряду с вынужденным свободным движением может существенно изменить протекание процесса. Сложный характер течения в переходной области чисел Рейнольдса затрудняет количественное описание процесса теплообмена. Обобщенные методики расчета теплообмена в переходной области отсутствуют. Приближенная оценка наибольшего и наименьшего значений коэффициента теплоотдачи может быть произведена соответственно по формулам для турбулентного и вязкостного течений.

8-4. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, В ИЗОГНУТЫХ И ШЕРОХОВАТЫХ ТРУБАХ

А. Теплоотдача в трубах некруглого поперечного сечения

В настоящее время наиболее хорошо изучена теплоотдача в круглых трубах. Расчет теплоотдачи в трубах некруглого поперечного сечения часто сводят к определению той же величины в некоторой эквивалентной трубе круглого поперечного сечения с диаметром

$$d_{\text{экв}} = \frac{4V}{F} = \frac{4f}{P}, \quad (8-15)$$

где f — поперечное живое сечение трубы; P — смоченный периметр поперечного сечения.

Эквивалентный или гидравлический диаметр $d_{\text{экв}}$ представляет собой, таким образом, учетверенное отношение объема жидкости V , находящейся в трубе, к поверхности F . Для круглых труб $d_{\text{экв}} = d$.

Метод расчета теплоотдачи с помощью $d_{\text{экв}}$ является приближенным. Точные границы возможности применения этого метода не установлены. Однако, как показывают некоторые экспериментальные исследования, во многих случаях такой приближенный расчет дает удовлетворительные результаты. По рекомендациям М. А. Михеева [Л. 124] при турбулентном движении жидкости расчет теплоотдачи в каналах прямоугольного (отношение сторон $a/b = 1 \div 40$) и треугольного сечений и при продольном омывании пучка труб можно производить с помощью эквивалентного диаметра.

Согласно [Л. 136] этот метод расчета непригоден при ламинарном течении и при течении расплавленных металлов.

По данным [Л. 61] средние коэффициенты теплоотдачи на внутренней стенке при турбулентном течении газов и капельных жидкостей в каналах кольцевого поперечного сечения можно рассчитать по уравнению

$$\overline{Nu}_{\text{ж}, d_{\text{экв}}} = 0,017 Re_{\text{ж}, d_{\text{экв}}}^{0,8} Pr_{\text{ж}}^{0,4} (Pr_{\text{ж}}/Pr_{\text{с}})^{0,25} (d_2/d_1)^{0,18}. \quad (8-16)$$

Здесь определяющей является средняя температура жидкости в трубе (исключая $Pr_{\text{с}}$), определяющий размер $d_{\text{экв}} = d_2 - d_1$. Особенно же теплообмена в кольцевых каналах учитываются множителем $(d_2/d_1)^{0,18}$, где d_1 — внутренний диаметр кольцевого канала; d_2 — внешний диаметр. На графике рис. 8-14 приведено сопоставление формулы (8-16) с опытными данными. Формула (8-16) справедлива при $d_2/d_1 = 1,2 \div 14$, $l/d = 50 \div 460$ и $Pr_{\text{ж}} = 0,7 \div 100$.

Б. Теплоотдача в изогнутых трубах

В технике часто встречаются теплообменные аппараты, в которых один из теплоносителей протекает в изогнутом канале. При движении в таком канале в жидкости возникают центробежные силы, создающие в поперечном сечении циркуляционные токи, так называемую вторичную циркуляцию (рис. 8-15).

В результате возникает сложное движение жидкости по винтовой линии. С увеличением радиуса R влияние центробежного эффекта уменьшается и в пределе при прямой трубе ($R = \infty$) исчезает. Вторичная циркуляция может наблюдаться как при турбулентном, так и при ламинарном течении. В последнем случае имеет место упорядоченное движение жидкости со сложными траекториями не смешивающихся между собой струек.

Экспериментально было установлено, что вторичная циркуляция возникает только при числах Рейнольдса, больших некоторых критических чисел $Re'_{\text{кр}}$, причем $Re'_{\text{кр}} < Re_{\text{кр}} \approx 2000$ для прямой трубы.

В [Л. 185] для определения $Re'_{\text{кр}}$ при течении жидкости в винтовых змеевиках предложена формула

$$Re'_{\text{кр}} = \frac{16,4}{\sqrt{d/R}}, \quad (8-17)$$

где d — внутренний диаметр трубы; R — радиус закругления змеевика. Формула (8-17) справедлива при $(d/R) \geq 8 \cdot 10^{-4}$.

При дальнейшем увеличении Re может наступить развитое турбулентное течение. В изогнутых трубах (винтовых змеевиках) критическое число Рейнольдса $Re''_{кр}$ больше $Re_{кр1}$ для прямых труб. При этом переход к закономерностям турбулентного режима происходит более плавно, чем в прямых трубах. При $(d/R) \geq 8 \cdot 10^{-4}$ значение критического числа Рейнольдса $Re''_{кр}$ для течения жидкости в винтовых змеевиках может быть определено по формуле [Л. 185]

$$Re''_{кр} = 18500 (d/2R)^{0.28}. \quad (8-18)$$

Зависимости (8-17) и (8-18) приведены на рис. 8-16. Кривые для $Re'_{кр}$ и $Re''_{кр}$ выделяют три области. При $Re < Re'_{кр}$ имеет место ламина-

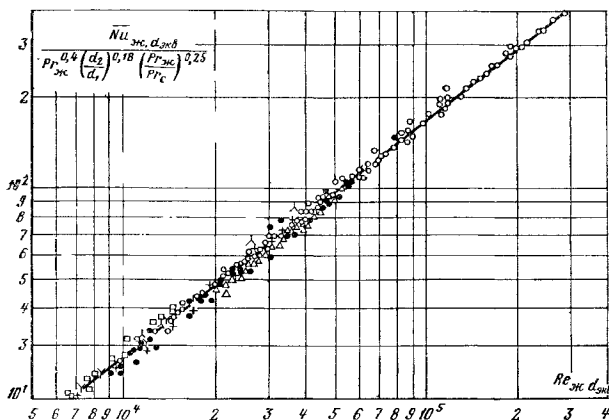


Рис. 8-14. Теплоотдача при турбулентном течении в кольцевых каналах воздуха, воды и трансформаторного масла.

нарное течение без вторичной циркуляции (область 1); при $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ — ламинарное течение со вторичной циркуляцией (область 2); при $Re > Re''_{кр}$ — турбулентное при наличии вторичной циркуляции (область 3).

Согласно исследованию [Л. 185] при $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ для расчета коэффициента теплоотдачи можно использовать уравнение (8-11).

Если $Re > Re''_{кр}$, то расчет теплоотдачи в изогнутых трубах следует вести по этой же формуле, но полученное значение коэффициента теплоотдачи необходимо умножить на величину $\epsilon_{изг}$, которая для змеевиковых труб определяется по уравнению

$$\epsilon_{изг} = 1 + 1,8 \frac{d}{R}. \quad (8-19)$$

В змеевиках действие центробежного эффекта распространяется на всю длину трубы. В поворотах же и отводах труб центробежное действие имеет лишь местный характер, но его влияние распространяется

и дальше. За поворотом на прямом участке трубы теплоотдача должна быть несколько больше, чем до поворота, и затем уменьшаться до значений, соответствующих теплоотдаче в прямых трубах. В настоящее время нет исчерпывающих данных для учета этого эффекта.

В. Теплоотдача в шероховатых трубах

При турбулентном течении жидкости в шероховатых трубах происходят существенные гидродинамические преобразования. Эти преобразования связаны с высотой бугорка шероховатости δ и толщиной вязкого подслоя δ_n . Упрощая явление, можно рассматривать два основных случая: бугорки шероховатости глубоко погружены в подслои ($\delta \ll \delta_n$) и бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя ($\delta \gg \delta_n$).

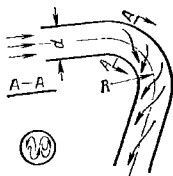


Рис. 8-15. Течение в изогнутом канале.

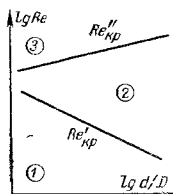


Рис. 8-16. Зависимость $Re'_{кр}$ и $Re''_{кр}$ от d/D для изогнутых труб (змеевиков).

В первом случае бугорки шероховатости не нарушают течения в подслое, они обтекаются без отрыва. При этом нет никакой разницы между гладкой и шероховатой трубами. Такое омывание бугорков шероховатости тем вероятнее, чем меньше число Re и относительная шероховатость δ/d (d — диаметр трубы), так как с уменьшением числа Re толщина подслоя увеличивается. Понятие относительной шероховатости при этом приобретает чисто гидродинамический смысл.

Если $\delta \gg \delta_n$, течение в вязком подслое нарушается, происходит отрывное, вихревое обтекание бугорков шероховатости. Турбулентные пульсации у стенки, особенно у вершин бугорков, увеличиваются. Так как при турбулентном течении жидкости основное термическое сопротивление передаче тепла сосредоточено в подслое, то изменение течения приводит к увеличению теплоотдачи. При ламинарном течении коэффициент теплоотдачи и гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. В этом случае теплоотдача может увеличиваться за счет того, что шероховатая стенка имеет большую поверхность теплообмена, чем гладкая (эффект оребрения).

При турбулентном движении жидкости шероховатость начинает сказываться на теплоотдаче и гидравлическом сопротивлении при различных значениях чисел Re . Чем меньше δ/d , тем больше предельное число $Re_{пр}$, соответствующее изменению закона теплоотдачи. При этом одновременно с ростом коэффициента теплоотдачи увеличивается и гидравлическое сопротивление Δp .

В экспериментах шероховатость создавалась путем механической обработки (пакатки, нарезки). Опыты показывают, что теплоотдача в шероховатых трубах по сравнению с гладкими дополнительно зависит от формы неровностей поверхности, значения относительной шероховатости δ/d и расстояния между бугорками.

На графике рис. 8-17 представлены опытные данные, полученные на кафедре теоретических основ теплотехники МЭИ [Л. 57]. Опыты проводились с водой; шероховатость выполнялась в виде треугольной

резьбы; $l/d=104$, где d — внутренний диаметр круглой трубы, отнесенный к вершинам выступов шероховатости. Коэффициент теплоотдачи отнесен к условной поверхности πdl .

Как следует из графика, при определенных условиях теплоотдача шероховатой трубы может увеличиться почти в 3 раза по сравнению с гладкой. Это позволяет использовать шероховатость как средство интенсификации теплообмена.

При нерациональном создании шероховатости коэффициент теплоотдачи может быть и ниже, чем для гладкой трубы. Снижение коэффициента теплоотдачи может иметь место в случае высоких бугорков шероховатости, так как за ними у поверхности стенки может образоваться застойная зона. Этот эффект проявляется по-разному в зависимости от числа Рейнольдса, формы бугорков шероховатости, расстояния между ними и т. п. При одной и той же относительной высоте δ/d можно получить как улучшение, так и ухудшение теплоотдачи. Поэтому необоснованная экстраполяция результатов эксперимента на неисследованную область определяющих параметров в данном случае особенно опасна.

Целесообразно создавать шероховатость с относительными шагами $(s/\delta)_{\text{опт}} = 12 \div 14$ (s — расстояние по потоку между соседними неровностями) — [Л. 30]. При $s/\delta \geq 8$ для расчета среднего коэффициента теплоотдачи может быть использована формула В. И. Гомеллаури [Л. 30], обобщившего данные своих опытов с водой и трансформаторным маслом, Нуннера — с воздухом, Брауэра и Федынского — с водой:

$$\overline{Nu}_{ж,d_{\text{экл}}} = 0,022 Re_{ж,d_{\text{экл}}}^{0,8} Pr_{ж,d_{\text{экл}}}^{0,47} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25} \epsilon_{ш}; \quad (8-20)$$

здесь

$$\epsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{(s/\delta)_{\text{опт}}}{s/\delta} \right] \text{ при } \frac{s}{\delta} > \left(\frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}};$$

$$\epsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{s/\delta}{(s/\delta)_{\text{опт}}} \right] \text{ при } \frac{s}{\delta} < \left(\frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}}.$$

Формула получена в результате обработки опытов по теплоотдаче при турбулентном течении теплоносителей в трубах и кольцевых щелях. Можно принять, что оптимальный относительный шаг $(s/\delta)_{\text{опт}} = 13$ при любом значении числа Прандтля в интервале от 1 до 80. Определяющие температура и линейный размер выбраны аналогично формуле (8-16).

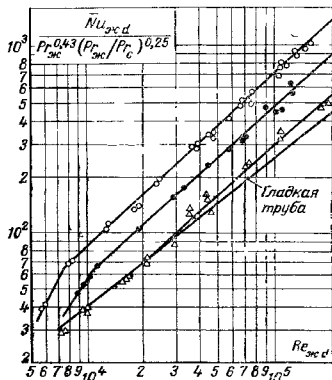


Рис 8-17. Теплоотдача при турбулентном течении жидкости в круглых шероховатых трубах ($d=16,7$ мм, вода шероховатость выполнена в виде резьбы треугольного профиля)

Δ — $\delta/d=0,063$, $\bullet$ — $\delta/d=0,011$ $\circ$ — $\delta/d=0,038$

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

9-1. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ОДИНОЧНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЫ

Омывание трубы поперечным неограниченным потоком жидкости характеризуется рядом особенностей. Плавное, безотрывное обтекание цилиндра в том виде, как это показано на рис. 9-1, имеет место только при $Re = \omega_0 d / \nu \leq 5$ (ω_0 — скорость набегающего потока; d — внешний диаметр). При $Re > 5$ поперечно-омываемый круговой цилиндр представляет собой неудобнообтекаемое тело. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от поверхности, и позади цилиндра образуются два симметричных вихря. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса вихри вытягиваются по

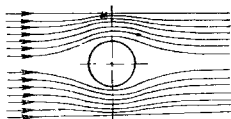


Рис. 9-1. Безотрывное омывание цилиндра.

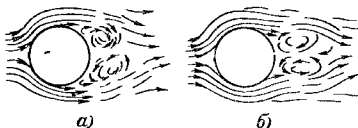


Рис. 9-2. Омывание цилиндра с отрывом ламинарного (а) и турбулентного пограничного слоя (б).

течению все дальше от трубы. Затем вихри периодически отрываются от трубы и уносятся потоком жидкости, образуя за цилиндром вихревую дорожку (рис. 9-2).

До $Re \approx 10^3$ частота отрыва вихря растет и затем в области примерно $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ становится практически постоянной величиной, характеризуемой числом Струхала $Sh = [d/\omega_0 = 0,2] (здесь f — частота)$.

Отрыв пограничного слоя является следствием возрастания давления вдоль потока и подтормаживания жидкости твердой стенкой. При обтекании передней половины цилиндра сечение потока уменьшается, а скорость жидкости увеличивается, в результате чего статическое давление у поверхности стенки снижается. Наоборот, в кормовой части статическое давление увеличивается, так как здесь скорость уменьшается.

За счет действия сил вязкости скорость и, следовательно, кинетическая энергия жидкости непосредственно у поверхности цилиндра малы. Возрастание давления вдоль потока приводит к торможению жидкости и последующему возникновению возвратного движения. Возвратное течение отсасывает пограничный слой от поверхности тела; происходит отрыв потока и образование вихрей (рис. 9-3).

Отрыв пограничного слоя и образование вихрей являются основной особенностью поперечного омывания трубы.

При сравнительно небольших числах Рейнольдса и малой степени турбулентности набегающего потока наблюдается отрыв ламинарного пограничного слоя. Он происходит при угле φ , равном примерно 82°

(угол φ отсчитывается от лобовой образующей трубы), и имеет место вскоре после минимума давления.

Если числа Рейнольдса значительны, подтормаживание течения за счет роста давления приводит не к отрыву, а к переходу движения в слое в турбулентную форму. Турбулентный пограничный слой обладает большей кинетической энергией, так как последняя дополнительно переносится в слой из внешнего потока турбулентными пульсациями. В результате место отрыва резко смещается по потоку. Турбулентный слой отрывается при $\varphi \approx 140^\circ$. Смещение места отрыва приводит к уменьшению вихревой зоны за цилиндром (рис. 9-2), обтекание цилиндра улучшается.

Турбулентное течение в части пограничного слоя наступает при достаточно больших значениях числа Re . Разными авторами было получено, что турбулентный пограничный слой появляется при $Re = 10^5 \div 4 \cdot 10^5$.

На величину $Re_{кр}$ влияет степень турбулентности набегающего на цилиндр потока жидкости и другие факторы (§ 7-3). Чем больше степень турбулентности, тем при меньших значениях числа Re появится турбулентный пограничный слой. Степень турбулентности потока может зависеть от конструкции опытной установки и изменяться с изменением скорости потока. Можно принять, что приближенно $Re_{кр} = 2 \cdot 10^5$.

По данным А. А. Жукаускаса и П. М. Дауэтаса при $Re > 2 \cdot 10^5$ угол $\varphi_{кр}$, соответствующий переходу ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное, зависит от числа Рейнольдса (рис. 9-4).

Своеобразный характер омывания трубы отражается и на ее теплоотдаче.

На рис. 9-5 показано изменение коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра. Кривая 1 соответствует теплоотдаче при отрыве ламинарного пограничного слоя, кривая 2 — теплоотдаче при отрыве турбулентного.

Падение коэффициента теплоотдачи на лобовой части трубы объясняется ростом толщины ламинарного пограничного слоя. На кривой 1 минимум теплоотдачи примерно соответствует месту отрыва слоя; кормовая часть трубы омывается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения. При малых Re теплоотдача кормовой половины цилиндра невелика; с возрастанием Re она увеличивается и может сравняться с теплоотдачей лобовой части трубы.

На кривой 2 имеется два минимума. Первый соответствует переходу ламинарного течения в слое в турбулентное. Коэффициент теплоотдачи при этом резко возрастает: при больших значениях числа Рей-

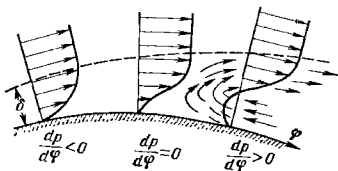


Рис 9-3 Распределение скорости у поверхности цилиндра и образование возвратного течения

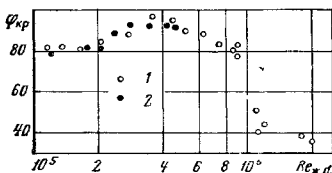


Рис 9-4. Зависимость угла $\varphi_{кр}$, соответствующего переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный, от числа Re
○ — $d=50$ мм; ● — $d=30,7$ мм, вода; $q_c = \text{const}$.

нольдса он может увеличиться в 2—3 раза. Второй минимум соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя. Снижение теплоотдачи перед отрывом можно объяснить подтормаживанием пограничного слоя. За местом отрыва труба омывается вихрями, имеющими сложный характер движения. Здесь теплоотдача несколько возрастает.

Теплоотдача ламинарного пограничного слоя при $q_c = \text{const}$ в среднем на 15—20% выше, чем при $t_c = \text{const}$.

Из изложенного следует, что теплоотдача цилиндра связана с характером омывания. Ввиду сложности картины течения сложен и характер изменения теплоотдачи, что обуславливает трудность теоретического решения для всех областей омывания.

Подробные экспериментальные исследования средней по окружности трубы теплоотдачи были проведены А. А. Жукаускасом [Л. 45, 217]. Им были также использованы опытные данные других авторов. В результате обобщения опытных данных было получено, что средний по окружности коэффициент теплоотдачи описывается уравнениями:

при $5 < \text{Re} < 10^3$

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{зд}} = 0,5 \text{Re}_{\text{зд}}^{0,5} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,38} (\text{Pr}_{\text{ж}}/\text{Pr}_c)^{0,25}; \quad (9-1)$$

при $10^3 < \text{Re} < 2 \cdot 10^6$

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{зд}} = 0,25 \text{Re}_{\text{зд}}^{0,6} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,38} (\text{Pr}_{\text{ж}}/\text{Pr}_c)^{0,25}; \quad (9-2)$$

при $\text{Re} = 3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6$

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{зд}} = 0,023 \text{Re}_{\text{зд}}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,37} (\text{Pr}_{\text{ж}}/\text{Pr}_c)^{0,25}. \quad (9-3)$$

Здесь за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, скорость отнесена к самому узкому поперечному сечению канала, стесненному цилиндром. Определяющей температурой является средняя температура жидкости; исключение составляет Pr_c , выбираемый по средней температуре стенки трубы.

Согласно формулам (9-1) и (9-2) при $\text{Re} = 10^3$ происходит изменение закона теплообмена. В опытной установке А. А. Жукаускаса степень турбулентности потока была невелика. Если набегающий на цилиндр поток искусственно турбулизирован, то коэффициент теплоотдачи будет больше, чем это следует из формулы (9-2); при этом изменение закона теплообмена наступает при числах Рейнольдса, меньших 10^3 .

Искусственную турбулизацию потока можно осуществить с помощью различных неудобообтекаемых решеток; особенно значительно возмущен поток на выходе из вентилятора или насоса. Если, например, цилиндр поместить непосредственно за вентилятором, то средняя теплоотдача может увеличиться в 2 раза¹.

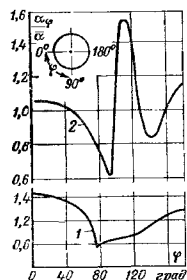


Рис. 9-5. Изменение местного коэффициента теплоотдачи α_ϕ по окружности цилиндра, омываемого поперечным потоком газа.

1 — $\text{Re} = 70\,800$; 2 — $\text{Re} = 219\,000$; α — средний по окружности коэффициент теплоотдачи; $q_c = \text{const}$.

¹ В некоторых случаях мелкоячеистые решетки (сетки) используются как детурбулизаторы; образуемые ими мелкие вихри быстро затухают.

На рис. 9-6 показано влияние степени турбулентности набегающего потока на среднюю теплоотдачу трубы. В интервале $100 \leq Re_{Tu} \leq 10^4$ и при $Tu \leq 14\%$ по опытам с воздухом средняя теплоотдача может быть описана уравнением [Л. 42]

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}_0 [1 + 0,09 (Re_{Tu})^{0,2}];$$

здесь Nu_0 вычисляется по формуле (9-2).

При высокой температуре жидкости температура трубы может быть близка к предельно допустимому значению для ее материала. Расчет с помощью средних коэффициентов теплоотдачи дает среднее значение температуры стенки. Местные значения температуры стенки могут быть как меньше, так и больше среднего ее значения. Если толщина стенки и коэффициент теплопроводности материала трубы невелики, а коэффициенты теплоотдачи с внешней стороны иамного превышают коэффи-

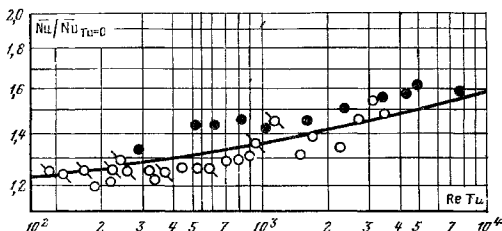


Рис. 9-6. Средняя теплоотдача цилиндра в поперечном потоке искусственно турбулизированного воздуха.

× — $Tu=2-4\%$; ○ — $Tu=6-8\%$; ● — $Tu=11-14\%$.

циенты теплоотдачи охлаждающей жидкости, текущей внутри трубы, то температура стенки может существенно изменяться по окружности. Наибольшему локальному коэффициенту теплоотдачи с внешней стороны будет соответствовать и наибольшая местная температура стенки. При $Re < 2 \cdot 10^5$ максимальные значения α и t_c будут в лобовой точке. Из теоретического решения Г. Н. Кружилина [Л. 83] следует, что теплоотдача в лобовой точке ($\psi=0$) описывается уравнением

$$Nu_d = 1,04 Re_d^{0,5} Pr^{1/3}.$$

Формула достаточно хорошо подтверждается опытами с воздухом.

Местная теплоотдача трубы в потоках различных жидкостей и при различных граничных условиях изучалась А. А. Жукаускасом, И. И. Жюгждой, В. И. Катинасом и другими. Некоторые расчетные формулы для местной и средней на отдельных участках теплоотдачи приведены в [Л. 68].

Формулы (9-1) и (9-2) справедливы, если угол ψ , составленный направлением потока и осью трубы и называемый углом атаки, равен 90° . Если $\psi < 90^\circ$ теплоотдача уменьшается. Для оценки ее уменьшения при $\psi = 30 \div 90^\circ$ можно использовать приближенную зависимость

$$\bar{\alpha}_\psi = \bar{\alpha}_{\psi=90^\circ} (1 - 0,54 \cos^2 \psi),$$

где $\bar{\alpha}_\psi$, $\bar{\alpha}_{\psi=90^\circ}$ — коэффициенты теплоотдачи соответственно при $\psi < 90^\circ$ и $\psi = 90^\circ$.

Угол атаки $\psi=0$ соответствует продольному омыванию трубки. При прочих равных условиях поперечное омывание дает более высокую теплоотдачу. Заметим, что характеры продольного и поперечного омывания существенно различны.

Гидродинамическая теория теплообмена устанавливает связь между теплоотдачей и гидравлическим сопротивлением трения. При поперечном омывании цилиндра его полное сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления формы. Сопротивление формы обуславливается отрывом потока и последующим образованием вихрей. При этом сопротивление трения представляет собой небольшую долю полного сопротивления. Обычно измеряют полное сопротивление цилиндра. Поэтому в случае вихревого омывания трубы гидродинамическая теория теплообмена не используется.

9-2. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ПУЧКОВ ТРУБ

Теплообменные устройства сравнительно редко выполняются из одной поперечно-омываемой трубы, так как поверхность теплообмена при этом невелика. Обычно трубы собирают в пучок. В технике чаще встречаются два основных типа трубных пучков: шахматный и коридорный (рис. 9-7).

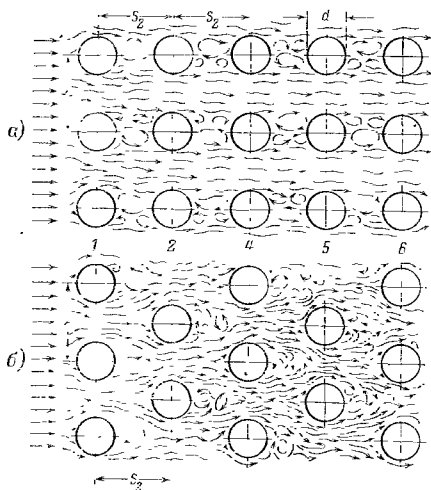


Рис. 9-7. Схемы расположения труб в коридорных (а) и шахматных (б) пучках труб и характер движения жидкости в них.

Характеристиками пучка являются поперечный шаг s_1 (расстояние между осями труб в направлении, поперечном потоку жидкости) и продольный шаг s_2 (расстояние между осями соседних двух рядов труб, расположенных один за другим в направлении течения жидкости). Помимо s_1 и s_2 пучки характеризуются внешним диаметром труб и количеством рядов труб по ходу жидкости (на рис. 9-7 в каждом пучке по пять рядов). Для определенного пучка шаги s_1 и s_2 и диаметр труб d обычно являются постоянными, не изменяющимися как поперек, так и вдоль течения жидкости. Течение жидкости в пучке имеет достаточно сложный характер. Рядом стоящие трубы пучка оказывают воздействие на омывание соседних, в результате теплообмен труб пучка отличается от теплоотдачи одиночной трубы. Обычно пучок труб устанавливают в каком-либо

канале. Поэтому течение в пучке может быть связано с течением в канале.

Известны два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Эти же режимы могут иметь место и при движении жидкости в пучке. Форма течения жидкости в пучке во многом зависит от характера течения в канале перед пучком. Если при данном расходе и температурах течение в канале, где установлен пучок, было бы турбулентным при отсутствии пучка, то оно обязательно будет турбулентным и в пучке, так как пучок является прекрасным турбулизатором. Однако если пучок помещен в канал, в котором до его установки имел бы место ламинарный режим течения, то в этом случае в зависимости от числа Re можно иметь как одну, так и другую формы течения. Чем меньше число Re , тем устойчивее ламинарное течение, чем больше — тем легче перевести его в турбулентное. При низких значениях числа Re течение может остаться ламинарным. При этом межтрубные зазоры как бы образуют отдельные шелевидные каналы переменного сечения (исключение составляет предельный случай, когда расстояния между трубами очень велики).

В технике чаще встречается турбулентная форма течения жидкости в пучках. Так, например, поперечно-омываемые трубные поверхности нагрева котельных агрегатов омываются турбулентным потоком.

Однако и при турбулентном течении имеют место различные законы теплообмена. Это объясняется различным характером течения на стенках труб. Закон теплоотдачи изменяется при повороте на поверхности труб турбулентного пограничного слоя. Согласно опытам с одиночными трубами турбулентный пограничный слой на стенке появляется при $Re > 2 \cdot 10^5$. На трубах пучка турбулентный слой может появиться при меньших числах Re . Для пучков приближенно можно принять, что $Re_{кр} = 1 \cdot 10^5$. При этом в Re вводят скорость, подсчитанную по самому узкому поперечному сечению пучка; определяющий размер — внешний диаметр труб.

При $Re < 1 \cdot 10^5$ передняя часть трубы омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая — неупорядоченными вихрями. Таким образом, в то время как течение в пространстве между трубами является турбулентным, на передней половине трубы имеется слой ламинарно текущей жидкости — имеет место смешанное движение жидкости.

Изменение характера омывания сказывается и на теплоотдаче. Можно выделить три основных режима омывания и теплоотдачи в поперечно-омываемых трубных пучках. Назовем их соответственно ламинарным, смешанным и турбулентным режимами.

В настоящее время наиболее изученным является смешанный режим. Он часто встречается в технике, в том числе и в котельных агрегатах. Смешанному режиму соответствуют числа Re примерно от $1 \cdot 10^3$ до $1 \cdot 10^5$. Рассмотрим его основные особенности.

Омывание первого ряда труб и шахматного и коридорного пучков аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб (рис. 9-7) в сильной мере зависит от типа пучка. В коридорных пучках все трубы второго и последующих рядов находятся в вихревой зоне впереди стоящих труб. причем циркуляция жидкости в вихревой зоне слабая, так как поток в основном проходит в продольных зазорах между трубами (в «коридорах»). Поэтому в коридорных пучках как лобовая, так и кормовая части трубок омываются со значительно меньшей интенсивностью, чем те же части одиночной трубки

или лобовая часть трубки первого ряда в пучке. В шахматных пучках характер омывания глубоко расположенных трубок качественно мало отличается от характера омывания трубок первого ряда.

Описанному характеру движения жидкости в пучках из круглых труб соответствует и распределение местных коэффициентов теплоотдачи по окружности труб различных рядов. Распределение местных α при определенном значении числа Re представлено на графике рис. 9-8; здесь φ — угол, отсчитываемый от лобовой точки трубы, цифры означают номера рядов.

Из рассмотрения кривых следует, что изменение местных α по окружности труб первого ряда коридорного и шахматного пучков соответствует распределению α для одиночной трубки. Для вторых и всех последующих рядов коридорного пучка характер кривых меняется: максимум теплоотдачи наблюдается не в лобовой точке, а при $\varphi \approx 50^\circ$. Таких максимумов два и расположены они как раз в тех областях

поверхности труб, где происходит удар набегающих струй.

Лобовая же часть непосредственному воздействию потока не подвергается, поэтому здесь теплоотдача невысока. В шахматных пучках максимум теплоотдачи для всех рядов остается в лобовой точке (исключение может иметь место только при больших Re или малых s_2/d).

Изменяется в начальных рядах пучков и средняя теплоотдача.

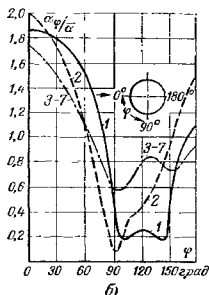
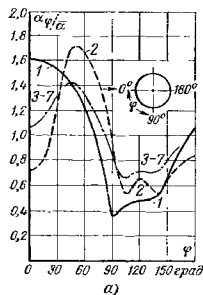


Рис. 9-8. Изменение коэффициентов теплоотдачи по окружности труб для различных рядов коридорных (а) и шахматных (б) пучков; $Re=14 \cdot 10^3$, воздуч.

На основании многочисленных исследований Н. В. Кузнецовым, В. М. Антупьевым и другими можно сделать ряд общих выводов: а) средняя теплоотдача первого ряда различна и определяется начальной турбулентностью потока; б) начиная примерно с третьего ряда средняя теплоотдача стабилизируется, так как в глубинных рядах степень турбулентности потока определяется компоновкой пучка, являющегося по существу системой турбулизирующих устройств.

При невысокой степени турбулентности набегающего потока теплоотдача первого ряда шахматного пучка составляет примерно 60% теплоотдачи третьего и последующих рядов, теплоотдача второго ряда составляет примерно 70%. В коридорном пучке теплоотдача первого ряда также составляет примерно 60% теплоотдачи третьего и последующих рядов, а теплоотдача второго 90%. Изменение теплоотдачи по рядам приведено на диаграммах рис. 9-9; здесь по вертикали отложены отношения ϵ_i среднего коэффициента теплоотдачи произвольного ряда к той же величине для третьего ряда, по горизонтали — номера рядов.

Возрастание теплоотдачи по рядам, как указывалось, объясняется дополнительной турбулизацией потока в пучке. Однако если поток,

набегающий на пучок труб, значительно искусственно турбулизирован (например, с помощью различных турбулизирующих устройств: в результате резкого расширения, после прохождения через вентилятор или насос и др.), то теплоотдача начальных рядов может быть как равна теплоотдаче глубинных рядов, так и больше ее. В глубинных рядах течение и теплоотдача определяются компоновкой пучка и не зависит от начальной турбулентности.

Таким образом, при высокой степени турбулентности набегающего потока пучок уже может явиться детурбулизирующим устройством. В этом случае нет достоверных данных для определения α первых двух рядов. Расчет можно вести, полагая, что для всех рядов $\varepsilon_i = 1$.

Если пучок многорядный, то доля теплоотдачи начальных рядов незначительна по сравнению с теплоотдачей всего пучка и неточность в определении ε_i не приведет к существенным ошибкам при расчете среднего коэффициента теплоотдачи всего пучка $\bar{\alpha}$.

Теплоотдача пучков труб зависит также от расстояния между трубами. Это расстояние принято выражать в виде безразмерных характеристик s_1/d и s_2/d , называемых соответственно относительными поперечным и продольным шагами.

Согласно [Л. 54, 62] при смешанном режиме ($Re_{жид} \approx 10^3 \div 10^5$) средний коэффициент теплоотдачи определенного ряда пучка может быть определен по уравнению

$$Nu_{икд} = c Re_{икд}^n Pr_{икд}^{0,33} (Pr_{икд}/Pr_c)^{0,26} \varepsilon_i \varepsilon_s, \quad (9-4)$$

где для шахматных пучков $c = 0,41$ и $n = 0,60$ и для коридорных $c = 0,26$, $n = 0,65$. В формуле (9-4) определяющим размером является внешний диаметр трубок пучка. Скорость жидкости, входящая в критерий $Re_{жид}$, подсчитывается по самому узкому поперечному сечению ряда пучка. Определяющей температурой является средняя температура жидкости (исключение составляет число Pr_c , выбираемое по температуре стенки).

Поправочный коэффициент ε_s учитывает влияние относительных шагов. Для глубинных рядов коридорного пучка [Л. 62]

$$\varepsilon_s = (s_2/d)^{-0,15},$$

для шахматного [Л. 48]

$$\begin{aligned} &\text{при } s_1/s_2 < 2 \quad \varepsilon_s = (s_1/s_2)^{1/6}; \\ &\text{при } s_1/s_2 \geq 2 \quad \varepsilon_s = 1,12. \end{aligned}$$

В [Л. 62] относительные шаги изменялись в пределах от 1,24 до 4,04; в [Л. 48] $s_1/d = 1,3 \div 2,6$; $s_2/d = 0,61 \div 3,9$ и $\frac{s_1/d}{s_2/d} \approx 0,33 \div 3,4$.

В соответствии с этим изменением относительных шагов теплоотдача глубинных рядов коридорного пучка изменялась в опытах при $\omega_{уз} = \cos \varphi$ примерно на 20%, а шахматных — на 30%.

Для определения коэффициента теплоотдачи всего пучка в целом необходимо произвести осреднение средних значений α , полученных для отдельных рядов:

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i F_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i},$$

где $\bar{\alpha}_i$ — средний коэффициент теплоотдачи i -го ряда; F_i — суммарная поверхность теплообмена трубок i -го ряда; n — число рядов в пучке.

Если $F_1 = F_2 = \dots = F_n$, то формула упрощается:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + (n-2)\bar{\alpha}_3}{n};$$

при этом

$$\bar{\alpha}_1 = \epsilon_1 \bar{\alpha}_3 \text{ и } \bar{\alpha}_2 = \epsilon_2 \bar{\alpha}_3.$$

Поправочный множитель ϵ_i учитывает изменение теплоотдачи в начальных рядах труб. При $s_2/d \leq 4$ и невысокой степени турбулентности набегающего потока поправку ϵ_i можно определить по диаграмме рис. 9-9.

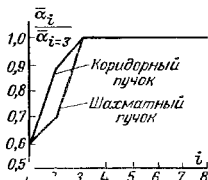


Рис. 9-9. Диаграммы изменения коэффициентов теплоотдачи по рядам коридорного и шахматного пучков труб.

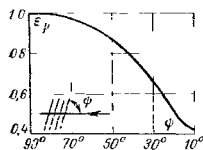


Рис. 9-10. Зависимость теплоотдачи пучков труб от угла атаки ϕ .

По сравнению со смешанным режимом процесс течения и теплоотдачи в ламинарной и турбулентной областях изучен гораздо хуже. Однако имеющиеся в настоящее время данные позволяют сделать вывод, что и при турбулентном режиме теплоотдача первого и второго рядов меньше, чем глубинных. Начиная с третьего ряда теплоотдача стабилизируется.

В работе Бергеллина и др. изучалась средняя теплоотдача тесных десятирядных шахматного и коридорного пучков (s_1/d и s_2/d равны или меньше 1,25). Теплоотдача в этом случае описывается уравнением

$$\bar{Nu}_{nd} = c Re_{nd}^{1/3} Pr_m^{1/3} (Pr_s/Pr_c)^{1/4}, \quad (9-5)$$

где для шахматного пучка $c=1,8$, для коридорного $c=1,2$. Все определяющие величины выбираются так же, как и для формулы (9-4). Формула (9-5) справедлива при $Re_{nd}=10 \div 200$ — для шахматных и при $Re_{nd}=10 \div 150$ — для коридорных пучков.

Возможное влияние свободной конвекции формулой (9-5) не учитывается.

При прочих равных условиях в ламинарной области теплоотдача шахматных пучков в полтора раза больше теплоотдачи коридорных. В смешанной области эта разница уменьшается и в пределе при $Re \approx 10^5$ практически исчезает. В турбулентной области теплоотдача шахматных и коридорных пучков разнится сравнительно мало.

При $Re > 2 \cdot 10^5$ теплоотдача глубинных рядов шахматного и коридорного пучков труб может быть рассчитана по формуле [Л. 217]

$$\bar{Nu}_{nd} = 0,021 Re_{nd}^{0,84} Pr_m^{0,36} (Pr_s/Pr_c)^{0,25}. \quad (9-6)$$

Опыты показывают, что переход от одного режима к другому происходит не при определенном значении числа Re , а в некоторой сравнительно небольшой области. Поэтому значения чисел $Re=150$ или 200 и $Re=10^5$ нужно понимать как некоторые осредненные величины. Их значение зависит также от относительных шагов. Например, у ярко выраженных коридорных пучков ($s_1/d \gg s_2/d$) изменение режима тепло-

отдачи происходит при больших значениях Re , чем у «решетчатых» коридорных пучков ($s_1/d \ll s_2/d$) [Л. 62].

Формула (9-4) применима лишь в случае, когда поток жидкости перпендикулярен оси труб пучка (угол атаки $\psi = 90^\circ$). Если $\psi < 90^\circ$ (рис. 9-10), то изменение теплоотдачи может быть учтено путем введения в формулу (9-4) поправочного коэффициента

$$\varepsilon_\psi = \bar{\alpha}_\psi / \bar{\alpha}_{\psi=90^\circ},$$

представляющего собой отношение коэффициента теплоотдачи при угле атаки ψ к коэффициенту теплоотдачи при $\psi = 90^\circ$.

Значения $\varepsilon_\psi = f(\psi)$ можно взять из графика (рис. 9-10).

При значениях ψ , близких к нулю, теплоотдача рассчитывается по формуле продольно-омываемых пучков труб.

Напомним, что приведенные здесь данные относятся к случаю $Pr \geq 1$. Теплоотдача при $Pr \ll 1$ рассматривается в гл. 11.

Глава десятая

ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

10-1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Свободное движение возникает за счет неоднородного распределения в рассматриваемой жидкости массовых (объемных) сил. Такими силами являются сила тяжести, центробежная сила и силы за счет наведения в жидкости электромагнитного поля высокой напряженности. Наиболее хорошо изучено свободное движение жидкости, вызванное гравитационными силами.

В уравнении движения (4-18) гравитационные силы учитываются членом $\rho \vec{g}$, имеющим размерность силы, отнесенной к единице объема. При теплообмене температура жидкости переменна, поэтому возникает разность плотностей и как следствие разность гравитационных сил, представляющих собой архимедову или подъемную (опускную) силу.

В технических задачах ускорение силы тяжести от точки к точке рассматриваемого пространства практически не изменяется. Объемные же силы, вызванные центробежным эффектом или электромагнитным полем, могут изменяться в изучаемой жидкости за счет изменения вектора $\vec{F}$, представляющего собой отношение силы, действующей на данный элемент жидкости, к массе этого элемента. Если учитывается только сила тяжести, то $\vec{F} = \vec{g}$.

В этой главе будет рассмотрена теплоотдача только при свободном гравитационном движении. Иногда результаты, полученные для гравитационной конвекции, применяют для оценки свободного движения под действием других массовых сил. Тогда ускорение силы тяжести заменяют суммой ускорения $\vec{g}$ и ускорения, соответствующего дополнительно действующей массовой силе (например, центробежного ускорения ω^2/r). Полученный таким образом результат следует рассматривать как приближенный, так как поле ускорений, соответствующих различным силам, может отличаться от поля гравитационного ускорения.

10-2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

В этом параграфе будет рассмотрено свободное гравитационное течение для наиболее простых форм поверхности твердого тела (вертикальная плита, горизонтальный цилиндр). Предполагается, что объем жидкости настолько велик, что свободное движение, возникающее у других тел, расположенных в этом объеме, не сказывается на рассматриваемом течении. Как и при вынужденной конвекции, свободное движение жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным.

А. Теплоотдача при свободном ламинарном движении вдоль вертикальной пластины

Пусть вертикальная пластина с неизменной температурой поверхности, равной t_c , находится в жидкости или газе. Жидкость вдали от пластины неподвижна (вынужденное течение отсутствует), температура жидкости вдали от пластины постоянна и равна t_0 . Для простоты вычисления примем, что $t_c > t_0$ (однако полученные результаты будут справедливы и для обратного соотношения температур). При этом у пластины появляется подъемное движение нагретого слоя жидкости. Вдали от пластины скорость по-прежнему равна нулю.

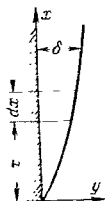


Рис 10-1 К выводу формулы для коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции

Расположим начало координат у нижней кромки пластины, а ось Oy нормально к ее поверхности (рис. 10-1). Будем полагать, что пластина вдоль оси Oz бесконечна. Процесс стационарный.

Для упрощения решения задачи примем следующие допущения:

- 1) силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами тяжести и вязкости;
- 2) конвективный перенос теплоты, а также теплопроводность вдоль движущегося слоя жидкости можно не учитывать;
- 3) градиент давления равен нулю;
- 4) физические параметры жидкости (исключая плотность) постоянны; плотность является линейной функцией температуры.

Будем полагать, что температура в движущемся слое жидкости изменяется по уравнению

$$\vartheta = \vartheta_c \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad (10-1)$$

где $\vartheta = t - t_0$ и $\vartheta_c = t_c - t_0$; согласно условию задачи $\vartheta_c = \text{const.}$

Уравнение (10-1) удовлетворяет граничным условиям:

$$\vartheta = \vartheta_c \text{ при } y=0 \text{ и } \vartheta=0 \text{ при } y=\delta. \quad (a)$$

Коэффициент теплоотдачи определяется уравнением

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0}. \quad (10-2)$$

Из уравнения (10-1) следует, что

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{2\theta_c}{\delta} + \frac{2\theta_c}{\delta^2} y = -\frac{2\theta_c}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right);$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{y=0} = -\frac{2\theta_c}{\delta}.$$

Подставляя значение $(d\theta/dy)_{y=0}$ в уравнение теплоотдачи (10-2), получаем:

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta}. \quad (10-3)$$

Толщина движущегося слоя жидкости переменна по высоте и связана со скоростью движения в этом слое. Поле скоростей описывается уравнением движения. При принятых условиях течение происходит в основном в направлении оси Ox , поэтому используем уравнение движения только в проекциях на ось Ox . Для стационарного течения с учетом ранее принятых допущений уравнение движения упрощается. В результате вместо уравнения (4-18) будем иметь:

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -g(\rho_0 - \rho). \quad (10-4)$$

При линейной зависимости плотности от температуры

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\theta),$$

где $\beta = \text{const}$. Отсюда

$$\rho_0 - \rho = \rho_0 \beta \theta.$$

Подставляя значение θ согласно (10-1) в уравнение (10-4) и учитывая последнее соотношение для плотности, уравнение движения можно написать следующим образом:

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{\rho_0 \beta \theta_c}{\mu} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

или

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -A \left(1 - 2\frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right);$$

здесь

$$A = \frac{\rho_0 \beta \theta_c}{\mu} = f(y).$$

Интегрирование уравнения движения дает:

$$\frac{dw_x}{dy} = -A \left(y - \frac{1}{\delta} y^2 + \frac{1}{3\delta^2} y^3\right) + c_1$$

и

$$w_x = -A \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3\delta} y^3 + \frac{1}{12\delta^2} y^4\right) + c_1 y + c_2. \quad (6)$$

Примем следующие граничные условия для скорости: $w_x = 0$ как при $y=0$, так и при $y=\delta$. Отметим, что, строго говоря, при $y=\delta$ ($\theta=0$) скорость может быть не равна нулю. Это объясняется действием сил вязкости. Движущиеся частицы могут увлекать за собой слои жидкости, находящиеся в изотермических условиях.

При принятых граничных условиях из уравнения (6) следует, что

$$c_1 = \frac{A}{4} \delta \text{ и } c_2 = 0.$$

Подставив значения c_1 и c_2 в уравнение (б) и произведя некоторые преобразования, получим следующее уравнение распределения скоростей в движущемся слое жидкости:

$$w_x = A \left(\frac{\delta}{4} y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3\delta} y^3 - \frac{1}{12\delta^2} y^4 \right). \quad (10-5)$$

На рис. 10-2 приведено распределение скоростей согласно уравнению (10-5). Здесь же представлена кривая температур согласно уравнению (10-1). Максимум скорости соответствует значению

$$y = 0,38\delta \approx \frac{\delta}{3}. \quad (в)$$

Заметим, что распределение скоростей при $y=\delta$ не удовлетворяет условию $(dw_x/dy)_{y=\delta}=0$. Производная при $y=\delta$ имеет конечное значение. Это обстоятельство является следствием приближенности решения. Характер изменения скорости на внешней границе движущегося слоя показан пунктирной линией.

Согласно уравнению (10-5) среднинеинтегральная скорость равна:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{\rho_0 g \beta \theta_c \delta^2}{40\mu}. \quad (10-6)$$

Для простоты решения среднюю температуру жидкости в слое определим приближенно как среднинеинтегральную по сечению слоя¹:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \theta dy = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \theta_c \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 dy = \frac{\theta_c}{3}. \quad (10-7)$$

Таким образом, при принятых условиях величина средней температуры слоя не зависит от координаты x .

Расход жидкости через поперечное сечение слоя $\delta \cdot 1$ равен:

$$G = \rho_0 \bar{w}_x \delta \cdot 1 \quad (10-8)$$

и

$$dG = d(\rho_0 \bar{w}_x \delta). \quad (г)$$

Расход жидкости определен по плотности ρ_0 . При этом полагаем, что жидкость плотностью ρ_0 , вовлекаясь в движущийся слой, приобретает в среднем скорость $\bar{w}_x$.

Подставляя в (г) значение $\bar{w}_x$ согласно уравнению (10-6), получаем:

$$dG = d \left(\frac{\rho_0 g \beta \theta_c \delta^3}{40\mu} \right) = \frac{3\rho_0 g \beta \theta_c}{40\mu} \delta^2 d\delta. \quad (д)$$

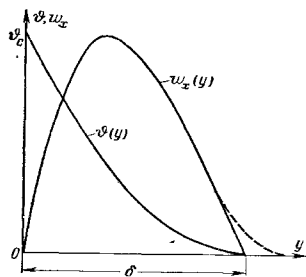


Рис. 10-2. Распределение температуры и скорости согласно уравнениям (10-1) и (10-5).

¹ Интегрирование согласно формуле (6-1) дает:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_c}{3} \frac{135 - 70\beta\theta_c}{126 - 45\beta\theta_c} = \frac{\theta_c}{3} \frac{5}{9} \frac{2 - \beta\theta_c}{1 - 0,36\beta\theta_c},$$

что при малых θ_c незначительно отличается от $\theta_c/3$.

В движение вовлекается жидкость с первоначальной температурой t_0 . В движущемся слое эта жидкость нагревается до различных температур, лежащих в интервале от t_0 до t_c . Можно считать, что в среднем жидкость нагревается до температуры $\bar{\theta}$. На этот нагрев затрачивается теплота

$$dQ = c_p \delta dG = \alpha \bar{\theta} dx \cdot 1 = \frac{2\lambda}{\delta} \bar{\theta} dx \cdot 1. \quad (е)$$

Из уравнения (е) следует, что

$$dG = \frac{2\lambda}{\delta c_p} \frac{\bar{\theta}}{\delta} dx = \frac{6\lambda}{\delta c_p} dx. \quad (ж)$$

Приравняв правые части уравнений (д) и (ж), получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменение δ по высоте стенки:

$$\frac{3\rho_0^2 g \beta \bar{\theta}}{40\mu} \delta^3 d\delta = \frac{6\lambda}{c_p} dx. \quad (з)$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{3\rho_0^2 g \beta \bar{\theta}}{160\mu} \delta^4 = \frac{6\lambda}{c_p} x + c. \quad (и)$$

Постоянную интегрирования c найдем из условия, что при $x=0$ $\delta=0$. Отсюда $c=0$.

Из уравнения (и) следует, что

$$\delta = 4,23 \sqrt[4]{\frac{\mu \lambda x}{c_p \rho_0^2 g \beta \bar{\theta}}}. \quad (10-9)$$

Согласно уравнению (10-3) $\alpha = 2\lambda/\delta$. Подставляя сюда значение δ , получаем:

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta} = 0,473 \sqrt[4]{\frac{c_p \rho_0^2 g \beta \bar{\theta} \lambda^3}{\mu x}}. \quad (10-10)$$

Приведем уравнение (10-10) к безразмерному виду, для чего левую и правую части уравнения умножим на x и разделим на λ .

После некоторых преобразований получим:

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,473 \sqrt[4]{\frac{g \beta \bar{\theta} x^3}{\mu^2 / \rho_0^2}} \frac{\mu c_p}{\lambda} = 0,473 (Gr_x Pr)^{1/4}, \quad (10-11)$$

где

$$Gr = \frac{g \beta \bar{\theta} x^3}{\mu^2 / \rho_0^2} = \frac{g \beta \bar{\theta} x^3}{\nu_0^2} \quad \text{и} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}.$$

Как следует из уравнения (10-11), $Nu_x = f(Gr_x Pr)$. Такой же результат дает теория подобия. Произведение чисел Gr и Pr часто называют числом Рэлея и обозначают символом Ra .

В рассматриваемом случае температуры t_c и t_0 постоянны, следовательно, неизменен и температурный напор $\bar{\theta}_c = t_c - t_0$. При этом осреднение коэффициента теплоотдачи по уравнениям (6-21) и (6-22) дает один и тот же результат.

Из уравнения (10-11) следует, что $\alpha = cx^{-0,25}$, где $c \neq f(x)$. При этом

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha dx = \frac{1}{l} \int_0^l cx^{-0,25} dx = \frac{4}{3} cl^{-0,25} = \frac{4}{3} \alpha_{x=l},$$

где $\alpha_{x=l}$ — местный коэффициент теплоотдачи в точке, определяемой координатой $x=l$.

Тогда средняя теплоотдача вертикальной пластины при $t_c = \text{const}$ в ламинарном течении

$$\overline{Nu}_l = 0,63 (Gr_l Pr)^{0,25}. \quad (10-12)$$

Коэффициенты пропорциональности в формулах (10-11) и (10-12) нуждаются в некоторых уточнениях. Формулы (10-11) и (10-12) полу-

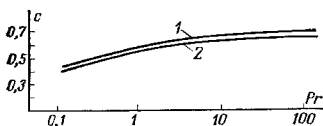


Рис 10-3 Зависимость теплоотдачи при свободной конвекции от числа Прандтля 1 — $q_w = \text{const}$, 2 — $t_c = \text{const}$

чены при ряде упрощающих допущений. В частности, при выводе этих формул не учитывались силы инерции. Расчеты, проведенные с учетом сил инерции, показывают, что коэффициент пропорциональности в формулах (10-11) или (10-12) зависит от числа Прандтля. Результаты точных решений, выполненных Польгаузенем, Шу, Сандерсом, Греггом и Спэрроу, приведены на графике рис. 10-3 по данным [Л. 88]. Здесь $c = Nu_x (Gr_x Pr)^{-0,25}$. Наиболее существенно проявляется влияние инерционных сил при небольших значениях чисел Прандтля. Кроме того, из рис. 10-3 следует, что интенсивность теплоотдачи при постоянной температуре стенки примерно на 7% меньше, чем при постоянной плотности теплового потока на стенке.

Экспериментальные исследования показывают, что при числах Прандтля, больших примерно 0,7, опытные данные можно описать формулой вида (10-11) или (10-12) с постоянными коэффициентами, однако значение коэффициентов несколько иное, чем в полученных ра-

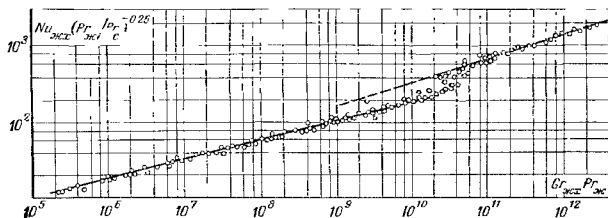


Рис 10-4 Теплоотдача при свободной конвекции у вертикальной поверхности в большом объеме жидкости

нее формулах. Помимо других причин, величина коэффициентов пропорциональности зависит от выбора определяющей температуры.

Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном течении вдоль вертикальных стенок можно использовать формулу [Л. 156]

$$Nu_{лж} = 0,60 (Gr_{лж} Pr_{ж})^{0,25} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}. \quad (10-13)$$

Здесь определяющей является температура жидкости за пределами движущегося слоя (Pr_c выбирается по местной температуре стенки). Определяющий размер (продольная вдоль потока координата) отсчитывается от места начала теплообмена. На рис. 10-4 формула (10-13) сопоставлена с опытными данными.

Формула (10-13) получена при условии, что $q_c = \text{const}$. Осредняя коэффициенты теплоотдачи согласно уравнению (6-1), получаем, что

$$\text{при } q_c = \text{const} \quad \bar{\alpha}_l = \frac{5}{4} \alpha_{x=l}.$$

Тогда расчетная формула для средних коэффициентов теплоотдачи будет:

$$\bar{Nu}_{жл} = 0,75 (Gr_{жл} Pr_{ж})^{0,25} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}. \quad (10-14)$$

Здесь определяющей температурой по-прежнему является температура жидкости за пределами движущегося слоя, определяющий размер — длина пластины, отсчитываемая от начала теплообмена.

Формула (10-13) получена для теплоносителей с числами Прандтля от 0,7 до $3 \cdot 10^3$. Ею следует пользоваться при $10^3 < Gr_{жл} Pr_{ж} < 10^9$.

Уравнение (10-13) получено при условии $q_c = \text{const}$. Исходя из графика рис. 10-3, для случая $t_c = \text{const}$ значение коэффициента пропорциональности в формуле (10-13) в первом приближении может быть взято равным примерно 0,55. При этом

$$\bar{\alpha}_l = \frac{4}{3} \alpha_{x=l}.$$

Б. Теплоотдача при свободном турбулентном движении вдоль вертикальной пластины

По данным работы [Л. 156] развитое турбулентное течение наступает при числах $Gr_{жл} Pr_{ж} \gg 6 \cdot 10^{10}$ (рис. 10-4).

Для местных коэффициентов теплоотдачи при развитом турбулентном течении в [Л. 156] предложена формула

$$Nu_{жл} = 0,15 (Gr_{жл} Pr_{ж})^{1/3} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}. \quad (10-15)$$

Определяющие температура и линейный размер выбраны так же, как и в формуле (10-13).

Линейный размер входит в числа Nu и Gr :

$$Nu_{жл} = \frac{\alpha x}{\lambda_{ж}} \quad \text{и} \quad Gr_{жл}^{1/3} = \left(\frac{g \beta_0 x^3}{\nu_{ж}^2} \right)^{1/3}$$

Отсюда следует, что при развитом турбулентном течении коэффициент теплоотдачи не зависит от линейного размера и, следовательно, местный коэффициент теплоотдачи равен среднему.

В. Теплоотдача при переходном режиме свободного движения вдоль вертикальной пластины

Согласно опытным данным различных исследователей переходный режим имеет место примерно при $10^9 < Gr_{жл} Pr_{ж} < 6 \cdot 10^{10}$. Переходный режим отличается неустойчивостью процесса течения и теплоотдачи и, как следствие, большим разбросом опытных точек.

В некоторых случаях, как это имело место в опытах [Л. 156] (рис. 10-4), ламинарное течение сохраняется и при числах $Gr_{жл} Pr_{ж}$, больших 10^9 . Развитое же турбулентное течение может наступить и при числах $Gr_{жл} Pr_{ж}$, меньших $6 \cdot 10^{10}$.

Переходная область течения имеет место на определенной длине стенки. В среднем теплоотдача при переходном режиме возрастает от

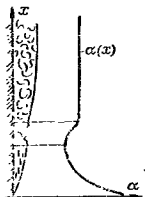


Рис. 10-5 Изменение коэффициента теплоотдачи при свободном движении вдоль вертикальной стенки.

значения, соответствующего ламинарному течению, до значения, соответствующего турбулентному движению жидкости.

Наибольшее и наименьшее значения коэффициента теплоотдачи в переходной области можно определить соответственно по уравнениям (10-15) и (10-13).

Изменение коэффициента теплоотдачи при подъемном свободном движении вдоль вертикальной стенки и связь этого изменения с характером движения показаны на рис. 10-5.

При ламинарном течении коэффициент теплоотдачи уменьшается по высоте пропорционально $x^{-0.25}$. В переходной области течения коэффициент теплоотдачи нестабилен во времени и в среднем увеличивается до значений, характерных для турбулентного течения. При турбулентном течении коэффициент теплоотдачи от x не зависит. Рисунок 10-5 показывает зависимость α только от x . Переменность физических параметров и Δt по высоте может привести к изменению коэффициентов теплоотдачи.

Г. Теплоотдача при свободном движении около горизонтальной трубы

Описанная картина свободного движения вдоль вертикальной стенки типична также и для свободного движения у наклонной стенки, шаров, горизонтальных круглых и овальных труб. Большое практическое значение имеет теплоотдача горизонтальных труб.

Характер свободного движения около горячих горизонтальных труб представлен на рис. 10-6. При прочих равных условиях чем больше диаметр труб, тем вероятнее разрушение ламинарного течения. У труб малого диаметра разрушение ламинарного течения может происходить вдали от трубы. Для расчета средних коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном движении около горизонтальных труб может быть использована формула И. М. Михеевой [Л. 128]

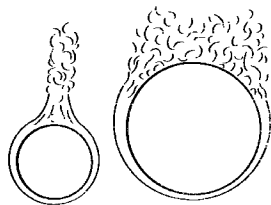


Рис. 10-6. Свободное движение около горизонтальных труб.

$$\overline{Nu}_{зд} = 0,50 (Gr_{зд} Pr_{ж})^{0,25} (Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25}. \quad (10-16)$$

В формуле за определяющую принята температура жидкости или газа вдали от трубы, в качестве определяющего размера берется диаметр трубы.

Сопоставление формулы (10-16) с опытными данными представлено на рис. 10-7.

Д. Теплоотдача при очень малых значениях комплекса $GrPr$

Л. С. Эйгенсоном было обнаружено, что для тонких проволок ($d=0,2-2$ мм) условия теплоотдачи своеобразны. Так как поверхность проволоки мала, то и количество передаваемой теплоты незначительно. При малых температурных напорах вокруг проволоки образуется не-

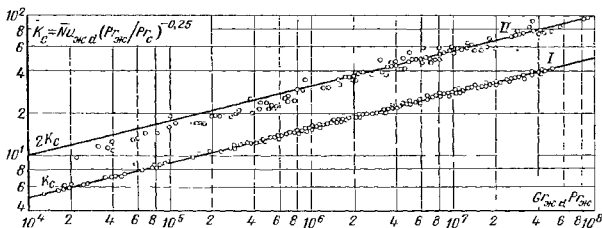


Рис. 10-7. Теплоотдача при свободном движении около горизонтальных труб.

подвижная пленка нагретого воздуха. Этот режим называется пленочным.

Пленочный режим обнаружен при числах $(Gr_{crd} Pr_{cr}) < 1$, индексы «сг» и «d» показывают, что определяющими величинами являются температура $t_{cr} = 0,5(t_c + t_0)$ и диаметр d . При пленочном режиме $Nu_{crd} = 0,5$, откуда $\alpha = 0,5(\lambda/d)$. Теплообмен осуществляется теплопроводностью. Пленочный режим весьма неустойчив.

В некоторых случаях уже при $(Gr_{crd} Pr_{cr}) > 10^{-3}$ появляются конвективные токи и число Нуссельта увеличивается при росте $Gr Pr$. Этот режим является переходным от пленочного к ламинарному. Он имеет место при значениях $(Gr_{crd} Pr_{cr})$, примерно меньших $5 \cdot 10^2$.

Наибольшее значение коэффициента теплоотдачи при переходном режиме описывается уравнением М. А. Михеева

$$Nu_{crd} = 1,18 (Gr_{crd} Pr_{cr})^{1/8}.$$

Наименьшее значение соответствует пленочному режиму.

10-3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если объем жидкости невелик, то свободные движения, возникающие у других тел или частей данного тела, расположенных в этом объеме, могут сказываться на рассматриваемом течении. Разделить эти движения и рассматривать их по отдельности очень трудно, а порою и невозможно.

Движение и теплоотдача зависят при этом как от рода жидкости, ее температуры и температурного напора, так и от формы и размеров пространства.

В горизонтальных щелях, образованных двумя плоскими стенками, процесс определяется расположением нагретых и холодных поверхностей, расстоянием между ними и распределением температуры стенки. Течение жидкости может отсутствовать, если температура верхней стенки постоянна и больше температуры нижней (рис. 10-8,а). Сказанное справедливо для жидкостей, у которых плотность уменьшается с увеличением температуры. Неравномерность температуры стенок способствует появлению конвекции.

Если температура нижней стенки больше, чем температура верхней, то при определенных условиях в щели возникают конвекционные токи. Горячие частицы жидкости, имеющие меньшую плотность, стре-

мятся вверх. В щели появляются восходящие потоки, чередующиеся между собой (рис. 10-8,е). Поле потока, рассматриваемое сверху, имеет ячеистую структуру с более или менее правильными шестиугольными ячейками. Внутри этих ячеек поток движется вверх, а по периферии ячеек он возвращается вниз. Такое течение имеет место примерно при $GrPr = 10^3 \div 45 \cdot 10^3$. При $GrPr < 45 \cdot 10^3$ наступает развитие турбулентное течение, ячеистая структура может сохраниться только вблизи нижней стенки.

В вертикальных щелях в зависимости от расстояния δ между стенками циркуляция жидкости может протекать по-разному. Если δ велико, то восходящий и нисходящий потоки движутся без взаимных помех (рис. 10-8,а). В этом случае движение имеет такой же характер, как и в неограниченном объеме. Если же δ мало, то вследствие взаимных помех возникают внутренние циркуляционные контуры (рис. 10-8,б). Высота контуров h определяется шириной щели, родом жидкости и интенсивностью процесса.

Если $Gr_s < 124Pr^{-0.2}(0.955 + Pr)l/\delta$, где l — высота слоя, то перенос теплоты между стенками может быть вычислен по уравнениям теплопроводности. Отклонения

имеют место только на концах щели на высоте, равной примерно δ .

В шаровых и горизонтальных цилиндрических прослойках циркуляция жидкости может протекать согласно схеме, изображенной на рис. 10-8,д—ж. Течение развивается лишь в зоне, лежащей выше нижней кромки нагретой поверхности. Ниже этого уровня жидкость неподвижна. Если же нагрета внешняя цилиндрическая поверхность, то движение жидкости охватывает пространство, расположенное ниже верхней кромки холодной поверхности. При интенсивном теплообмене движением может быть охвачена вся жидкость.

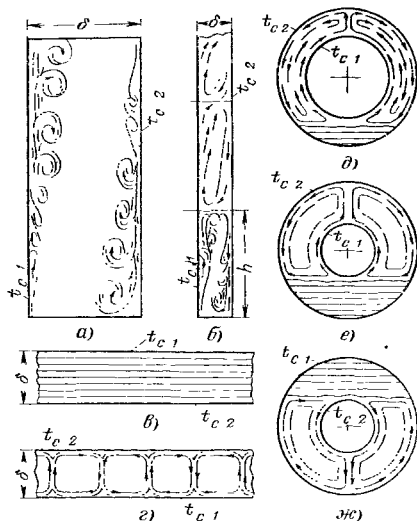


Рис. 10-8. Свободное движение в ограниченном объеме.

определить тепловой поток через слой жидкости. В расчетной практике принято заменять сложный процесс переноса теплоты через щели эквивалентным процессом теплопроводности.

Средняя плотность теплового потока q условно вычисляется по формулам теплопроводности (гл. 2). Для плоского слоя

$$q = \frac{\lambda_{\text{вкл}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}), \quad (10-17)$$

где $\lambda_{\text{экв}}$ — так называемый эквивалентный коэффициент теплопроводности, учитывающий перенос теплоты через щель как теплопроводностью, так и конвекцией.

Отношение $\epsilon_k = \lambda_{\text{экв}}/\lambda$, где λ — коэффициент теплопроводности жидкости, характеризует влияние конвекции на перенос теплоты через щель. Величина ϵ_k является функцией комплекса GrPr .

Зависимость $\epsilon_k = f(\text{GrPr})$ представлена на рис. 10-9 [Л. 124]. Для составления графика рис. 10-9 использованы опытные данные Д. Л. Бояринцева, Муль-Рейера, Девиса, Бекмана. Крауссольтда и др. для вертикальных и горизонтальных плоских щелей, кольцевых и сферических слоев, заполненных газом или каплевой жидкостью.

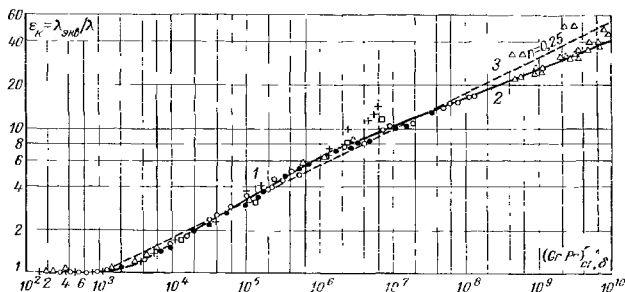


Рис. 10-9. Эквивалентная теплопроводность при свободном движении в ограниченном объеме.

+ — плоская горизонтальная газовая прослойка; □ — то же вертикальная; ○ — цилиндрическая газовая прослойка, ● — то же жидкостная, △ — шаровая газовая прослойка

При определении чисел подобия независимо от формы прослойки за определяющий размер принята ее толщина δ , а за определяющую температуру — средняя температура жидкости $t_{cr} = 0,5(t_{c1} + t_{c2})$.

В случае малых значений аргумента $[(\text{GrPr})_{cr \delta} < 10^3]$, как следует из графика рис. 10-9, $\epsilon_k = 1$ и $\lambda_{\text{экв}} = \lambda$, т. е. передача теплоты от горячей стенки к холодной осуществляется только теплопроводностью.

При $10^3 < (\text{GrPr})_{cr \delta} < 10^6$ (кривая 1)

$$\epsilon_k = 0,105 (\text{GrPr})_{cr \delta}^{0,3} \quad (10-18)$$

и при $10^6 < (\text{GrPr})_{cr \delta} < 10^{10}$ (кривая 2)

$$\epsilon_k = 0,40 (\text{GrPr})_{cr \delta}^{0,2} \quad (10-19)$$

По Михееву, ввиду приближенности формул (10-18) и (10-19) для всей области значений аргументов $(\text{GrPr})_{cr \delta} > 10^8$ можно принять зависимость

$$\epsilon_k = 0,18 (\text{GrPr})_{cr \delta}^{0,25} \quad (10-20)$$

с некоторой погрешностью аппроксимирующей экспериментальные данные, представленные на графике рис. 10-9 (кривая 3).

Предложен ряд формул для расчета отдельных задач свободной конвекции в ограниченном объеме [Л. 24, 49, 107 и др.]. В перечислен-

ных работах рассмотрена свободная конвекция у вертикального ряда горизонтальных труб, у вертикальной стенки с вертикальными ребрами, в горизонтальной щели, в горизонтальном цилиндрическом слое при различном положении внутреннего тепловыделяющего трубчатого элемента и другие практически важные задачи. Рассмотрение всех этих задач выходит за рамки учебного курса.

Глава одиннадцатая

ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

11-1. ТЕПЛООТДАЧА ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Расплавленные металлы применяют в тех случаях, когда необходимо обеспечить интенсивный отвод теплоты от поверхности нагрева или когда при низком давлении требуется иметь высокую температуру рабочей жидкости.

Применение в качестве теплоносителя воды, имеющей высокий коэффициент теплоотдачи, приводит к тому, что для получения значительных температур рабочей жидкости необходимо существенно увеличивать давление.

Газ может быть догрет до высоких температур без повышения давления. Однако теплоотдача от стенки к газу очень мала, что приводит к возрастанию температуры поверхности нагрева. Газ как теплоноситель имеет и другой недостаток. Так как теплоемкость газа мала, при съеме заданного количества теплоты расходы газа должны значительно возрасти. Следовательно, должны возрасти и гидравлические потери.

Охлаждение жидкости металлами совмещает достоинства газового и водяного охлаждения. Жидкие металлы имеют высокую точку кипения, что позволяет повышать их температуру без применения высокого давления, им присущи большие коэффициенты теплоотдачи.

Наиболее приемлемыми теплоносителями этого типа являются щелочные и тяжелые металлы и их сплавы. Физические свойства жидких металлов существенно отличаются от свойств обычных теплоносителей — воды, масла и др. У металлов больше удельный вес и коэффициент теплопроводности; значение же теплоемкости ниже, особенно мало значение числа Прандтля ($Pr \approx 0,005 \div 0,05$). Низкие значения числа Pr объясняются более высоким коэффициентом теплопроводности; например, при температурах $100\text{—}700^\circ\text{C}$ коэффициент теплопроводности натрия $\lambda \approx 86 \div 59 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; для калия $\lambda \approx 46 \div 28 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

В ламинарном потоке теплота поперек течения передается теплопроводностью, в турбулентном — теплопроводностью и конвекцией. Так как у неметаллических теплоносителей коэффициент теплопроводности сравнительно невелик, в турбулентном ядре теплота в основном переносится конвекцией. При этом основным термическим сопротивлением при передаче теплоты поперек турбулентного потока является вязкий подслой. В результате основное изменение температуры жидкости в поперечном сечении сосредоточивается у стенки, в турбулентном ядре температура изменяется сравнительно мало (рис. 11-1). В жидких металлах теплопроводность велика и может конкурировать с процессом

турбулентного переноса. В этом случае распределение температур будет существенно зависеть от теплопроводности. Из рис. 11-1 следует, что жидкости с малыми числами Pr характеризуются более равномерным переносом тепла по всему сечению трубы.

Рассмотрим турбулентное течение в прямой круглой трубе. Для расчета теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении и $q_c = \text{const}$ может быть использовано уравнение (8-3). Численное решение уравнения (8-3) при условии $Pr_T = \epsilon_s/\epsilon_q = 1$ было получено Лайоном [Л. 214]; он аппроксимировал расчетные данные в характерном для жидких металлов интервале чисел Pr формулой

$$Nu_d = 7 + 0,025 Re_d^{0,8}, \quad (11-1)$$

где $Re_d = Re_d Pr = \bar{w}d/\alpha$ — число Пекле.

Себан и Шимазаки [Л. 216] провели расчеты для $t_c = \text{const}$ и $Pr_T = 1$ и получили формулу

$$Nu_d = 5 + 0,025 Pe_d^{0,8}. \quad (11-2)$$

Сравнение формул (11-1) и (11-2) показывает, что условие $t_c = \text{const}$ приводит к несколько меньшему значению постоянного члена, чем это имеет место при $q_c = \text{const}$.

Двузначность правой части формул (11-1) и (11-2) объясняется учетом радиальной теплопроводности в потоке жидких металлов.

Формулы (11-1) и (11-2) получены для стабилизированного турбулентного течения в прямых трубах без учета теплопроводности вдоль потока жидкого металла.

По мере уменьшения числа Пекле роль аксиальной теплопроводности возрастает.

Аналитическое исследование теплоотдачи при ламинарном стабилизированном течении жидкости с учетом аксиальной теплопроводности было проведено Д. А. Лабунцовым [Л. 95]. Согласно [Л. 95] при $t_c = \text{const}$ число $Nu_d = \alpha d/\lambda$ является функцией числа Re_d . Эта зависимость приведена в табл. 11-1.

При $q_c = \text{const}$ число Nu_d в области стабилизированного ламинарного течения не зависит от Re_d и равно постоянному значению:

$$Nu_d = 4,36. \quad (11-3)$$

Теоретические исследования [Л. 95, 214, 216] проведены в предположении, что физические параметры постоянны. Это условие сравнительно неплохо выполняется для жидких металлов. У тяжелых и щелочных металлов физические параметры относительно слабо зависят от температуры. Благодаря высокой интенсивности теплообмена температурный напор обычно очень мал. Поэтому в формулы не вводят член, учитывающий изменение физических параметров по сечению каналов.

В теоретических исследованиях не учтено так называемое контактное термическое сопротивление.

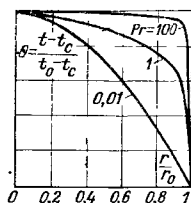


Рис. 11-1. Изменение температуры турбулентно текущей жидкости по радиусу r в круглой трубе при различных значениях числа Прандтля; термически стабилизированное течение.

t — температура жидкости; t_s — температура стенки; t_0 — температура жидкости на оси трубы; r_0 — внутренний радиус трубы.

$Nu_d = f(Re_d)$ при ламинарном стабилизированном течении

Re_d^2	1	10	100	10^3	10^4
Nu_d	4,04	3,86	3,74	3,68	3,66

Наличие контактного сопротивления внешне проявляется в снижении коэффициента теплоотдачи по сравнению с теоретическим значением, а также в неустойчивости теплообмена во времени.

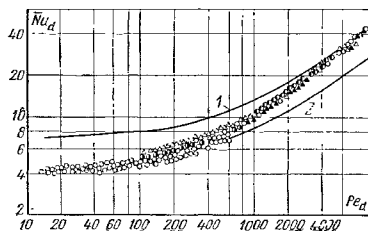


Рис. 11-2. Теплоотдача при течении жидкого металла в трубе.

1 — по формуле $Nu = 7 + 0,025 Pe^{0,8}$; 2 — $Nu = 4,8 + 0,014 Pe^{0,8}$; опытные точки соответствуют уравнению (11-4).

Исследования, проведенные с различными жидкими металлами, показывают, что термическое контактное сопротивление — результат сложного процесса, обусловленного совокупностью физико-химических, гидродинамических и тепловых явлений у поверхности теплообмена. Наиболее вероятной причиной ухудшения теплоотдачи является образование прослойки дополнительной фазы (примеси, окислы) на границе раздела «жидкий металл — стенка».

Теоретические формулы применимы для сравнительно чистых веществ, содержание примесей (в том числе и кислорода) в которых сведено к минимуму. Как показывают опыты, величина контактного сопротивления зависит и от соответствующего выбора материала стенки.

Экспериментальные исследования теплоотдачи жидких металлов проведены многими советскими и зарубежными исследователями.

М. А. Михеевым, О. С. Федынским, В. М. Дерюгиным и В. И. Петровым [Л. 127] для расчета средних коэффициентов теплоотдачи при вынужденном турбулентном движении тяжелых и щелочных металлов, а также их сплавов в окисленных стальных трубах без защиты с помощью нейтральных газов была получена формула

$$\overline{Nu}_{\text{ж.д.}} = (3,3 + 0,014 Pe_{\text{ж.д.}}^{0,8}) \overline{\epsilon}_l \quad (11-4)$$

В качестве определяющих величин здесь приняты средняя температура жидкого металла и диаметр трубы¹. При $(l/d) < 30$ $\overline{\epsilon}_l = 1,72 \times (d/l)^{0,16}$. Если $(l/d) > 30$, то $\overline{\epsilon}_l = 1$.

Экспериментальные исследования показывают, что в зависимости от принятых мер по очистке циркуляционных контуров теплоотдача при турбулентном течении изменяется от наибольшего значения согласно формуле (11-1) до наименьшего — по формуле (11-4).

На рис. 11-2, взятом из [Л. 172], приведены некоторые экспериментальные данные по теплоотдаче жидких металлов в длинных трубах.

¹ В [Л. 127] для расчета теплоотдачи при соблюдении определенных требований к чистоте циркуляционного контура рекомендуется формула (11-4), в которой постоянный член 3,3 заменен на 4,8.

Результаты опытов показывают, что при ламинарном течении и $q_c = \text{const}$ $Nu_{\text{жд}} = 4,36$, что находится в полном соответствии с теорией.

Результаты исследования теплоотдачи при $20 < Re_{\text{жд}} < 10^6$ описываются зависимостью [Л. 172]

$$\overline{Nu}_{\text{жд}} = 4,36 + 0,025 Re_{\text{жд}}^{0,8} \quad (11-5)$$

При развитом турбулентном течении опытные данные [Л. 172] согласуются с уравнением (11-1).

Из рис. 11-2 следует, что при критическом значении числа $Re \approx 2000$ не наблюдается резкое изменение в характере зависимости числа Nu от Re . После достижения критического значения Re теплоотдача монотонно возрастает с увеличением Re . Такой характер зависимости объясняется тем, что при турбулентном течении жидкого металла, в особенности при малых Re , большое значение имеет молекулярный перенос теплоты (теплопроводность). Поэтому возникновение турбулентного переноса теплоты при $Re > Re_{\text{кр}}$ вызывает лишь сравнительно небольшое увеличение теплоотдачи.

Так как жидким металлам присуща высокая теплопроводность, при расчете средней по сечению температуры паряду с переносом теплоты по радиусу в ряде случаев необходимо учитывать и перенос теплоты теплопроводностью вдоль оси.

На рис. 11-3 показан характер распределения температур при равномерном теплоотводе от стенки ($q_c = \text{const}$). Обогрев жидкости происходит на участке $O-l$. Принято, что коэффициент теплоотдачи постоянен. Пунктирная линия соответствует средней по сечению температуре жидкости, вычисленной по уравнению

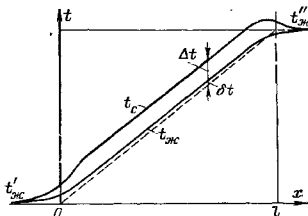


Рис. 11-3 Распределение среднemasовой температуры жидкости вдоль потока, $q_c = \text{const}$.

$$t_{\text{ж}} = t'_{\text{ж}} + \frac{q_c F}{G c_p} \quad (11-6)$$

На достаточном удалении от концов участка теплоотвода температуры жидкости и стенки изменяются линейно, причем здесь

$$\Delta t = \frac{q_c}{\alpha} = \text{const}.$$

Однако осевая теплопроводность приводит к повышению температуры жидкости и стенки на величину δt . Как следует из работы Л. Г. Генина,

$$\delta t = \frac{q_c [1 + (\lambda_{\text{с}} f_{\text{с}} / \lambda_{\text{ж}} f_{\text{ж}})] d P}{Re^2 \lambda_{\text{ж}} f_{\text{ж}}}, \quad (11-7)$$

где P — периметр поперечного сечения трубы; d — ее внутренний диаметр; $\lambda_{\text{с}}$, $\lambda_{\text{ж}}$, $f_{\text{с}}$, $f_{\text{ж}}$ — коэффициенты теплопроводности и площади поперечного сечения соответственно стенки трубы и жидкого металла.

Мы рассмотрели теплоотдачу при течении жидких металлов в трубах. Для практики представляет интерес теплообмен и в других геометрических системах, в частности при поперечном омывании пучков труб.

Теплоотдача при поперечном омывании шахматных и коридорных пучков жидкими металлами (ртуть, натрий) изучалась в работах [Л. 13, 171]. Опыты показали, что средний коэффициент теплоотдачи глубинных рядов описывается формулой

$$\overline{Nu}_{md} = Pe_{md}^{0,5}. \quad (11-8)$$

Здесь в качестве определяющего размера взят внешний диаметр трубы; скорость рассчитывается в узком сечении пучка. Физические параметры выбираются по температуре жидкого металла.

Коэффициенты теплоотдачи определялись в опытах как $\bar{a} = \bar{q}_c / \Delta t$.

Исследованные пучки были сравнительно тесными, относительные шаги s_1/d и s_2/d изменялись в пределах примерно от 1 до 1,5. Зависимость теплоотдачи от типа пучка и его относительных шагов не предложена. Опыты показывают, что средняя теплоотдача первого ряда пучка примерно на 20% меньше теплоотдачи глубинных рядов. Формула (11-8) рекомендуется для чистых жидких металлов.

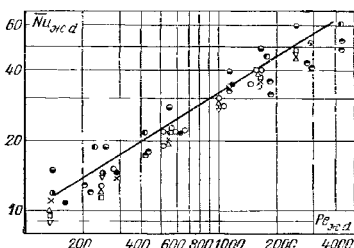


Рис 11-4 Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб жидкими металлами (шахматные и коридорные пучки с относительными шагами от 1,2 до 1,5; трубы из никеля и стали 1X18H9T).

На графике рис. 11-4 формула (11-8) сопоставлена с опытными данными [Л. 171].

Для практики представляет интерес теплоотдачи при свободной конвекции жидких металлов.

В гл. 10 говорилось, что при малых числах Прандтля существенно проявляется влияние инерционных сил. При этом коэффициент пропорциональности c в формулах вида $Nu = c(GrPr)^m$ оказывается функцией числа Прандтля; при $c = \text{const}$ переменной величиной является показатель степени при числе Pr . Сказанное справедливо для свободной конвекции расплавленных металлов.

Исследование теплоотдачи тяжелых и щелочных расплавленных металлов и сплавов в условиях конвекции в большом объеме проводилось в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского [Л. 188]. В результате исследования получена формула

$$\overline{Nu}_{cr} = c Gr_{cr}^n Pr_{cr}^m, \quad (11-9)$$

описывающая среднюю теплоотдачу.

Здесь

$$m = 0,3 + (0,02/Pr_{cr}^{1/3}). \quad (11-10)$$

Значения постоянных c и n зависят от величины критерия Gr_{cr} . При $Gr_{cr} = 10^2 \div 10^9$ значение $c = 0,52$ и $n = 0,25$ (ламинарный режим), при $Gr_{cr} > 10^9$ $c = 0,105$ и $n = 1/3$ (турбулентный режим). В качестве определяющей принята так называемая средняя температура пограничного

слоя $t_{cr}=0,5(t_{ж}+t_c)$, где $t_{ж}$ — температура жидкости вдали от тела. В виде определяющего линейного размера приняты: для вертикальных плит — их высота, для горизонтальных труб — внешний диаметр.

Гидравлическое сопротивление жидких металлов определяется по тем же формулам, что и для прочих жидкостей.

11-2. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВЕРХКРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ВЕЩЕСТВА

В настоящее время в энергетике и других областях техники все шире используются высокие давления и температуры. В ряде аппаратов и устройств давление теплоносителя превышает термодинамическое критическое давление p_k . Температура жидкости при этом может быть как больше, так и меньше термодинамической критической температуры t_k .

Сверхкритическая область состояний характеризуется своеобразным и значительным изменением физических свойств вещества при сравнительно небольших изменениях температуры и давления. Особенно резко изменяется теплоемкость c_p ; она может изменяться во много раз и проходит через максимум (рис. 11-5). Температуру t_m , соответствующую максимуму теплоемкости при $p=\text{const}$, называют псевдокритической. В этой области происходит и существенное изменение плотности, коэффициентов вязкости и теплопроводности. Значительно изменяется и проходит через максимум число Прандтля $Pr=\mu c_p/\lambda$.

Из термодинамики известно, что в сверхкритической области состояния переход из жидкой фазы к газообразной происходит непрерывно. Изменение свойств вещества не имеет скачкообразного, разрывного характера, наблюдаемого при сосуществовании жидкой и паровой фаз.

Поэтому теплообмен при сверхкритическом состоянии рассматривают как теплообмен в однофазной среде, но с ярко выраженной переменностью физических свойств теплоносителя. Только при исчезающе малых температурных напорах, когда переменность физических параметров практически не проявляется, коэффициенты теплоотдачи можно рассчитывать по обычным формулам, приведенным ранее. С ростом температурного напора расхождение между опытными данными и данными расчета по этим формулам растет и может стать недопустимым.

В некоторых случаях на отдельных участках трубы наблюдается резко пониженная теплоотдача (так называемый режим «ухудшенной теплоотдачи»). При этом значительно возрастает температура стенки, что может привести к ее разрушению. Ухудшенная теплоотдача наблюдалась как в горизонтально, так и в вертикально расположенных трубах при числах Рейнольдса, достигающих величины $\geq 10^6$. В некоторых опытах обнаружены повышенные значения коэффициентов теплоотдачи,

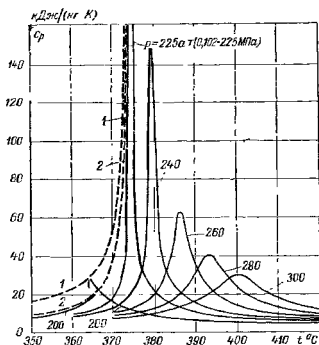


Рис. 11-5 Теплоемкость воды и водяного пара в околокритической области.

эти режимы могут сопровождаться значительными пульсациями давления, шумом.

Проведено большое количество экспериментальных и расчетно-теоретических исследований с целью получения расчетных зависимостей, позволяющих определить теплоотдачу при различных режимных условиях. В частности, показано, что в области околоскритического состояния турбулентное течение и сопутствующий теплообмен могут существенно зависеть от числа Грасгофа, т. е. от тепловой гравитационной конвекции, обусловленной существенным изменением плотности в рассматриваемой области состояний вещества.

Несмотря на наличие большого количества фактического материала значительного числа гипотез, выдвинутых для его объяснения, и ряда расчетных зависимостей, в настоящее время нет достаточно обобщенных формул, с помощью которых можно было бы надежно рассчитать теплоотдачу для всех случаев. Практическое определение коэффициентов теплоотдачи должно производиться по экспериментальным данным (формулам), в максимальной степени соответствующим условиям работы промышленной установки.

Можно указать некоторые литературные источники, в которых приводятся сведения о теплоотдаче при сверхкритическом состоянии вещества [Л. 80, 81, 101, 145, 146, 203].

11-3. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗА С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ

Теплоотдача при больших скоростях течения газов имеет ряд особенностей, неучет которых может привести к существенным ошибкам.

В случае больших скоростей гидродинамические процессы и процессы теплообмена неразрывно связаны. Течение характеризуется взаимным преобразованием внутренней и кинетической энергии потока и расширением газа.

Согласно первому закону термодинамики, для струйки газа можно написать:

$$\left(i_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) - \left(i_2 + \frac{w_2^2}{2}\right) = \frac{Q}{G}; \quad (11-11)$$

здесь i — удельная энтальпия, Дж/кг; w — скорость газа, м/с; Q — тепловой поток на участке струйки между поперечными сечениями 1 и 2, Вт; G — расход газа, кг/с. Индексы «1» и «2» относятся соответственно к начальному и конечному произвольно выбранным сечениям.

Уравнение (11-11) записано для 1 кг газа. Предполагается, что по поперечному сечению струйки параметры потока не изменяются.

При адиабатическом течении газа ($Q=0$) возрастание его кинетической энергии $w^2/2$ может происходить только при понижении энтальпии. Наоборот, возрастанию энтальпии будет соответствовать уменьшение кинетической энергии и, следовательно, скорости. Изменение энтальпии в конечном счете приводит к изменению температуры газа.

Энтальпия i при полном адиабатическом торможении газа называется энтальпией адиабатического торможения, она равна:

$$i_0 = i + \frac{w^2}{2}. \quad (11-12)$$

Температура T_0 , которую принимает газ при полном адиабатическом торможении, называется температурой торможения. Подставив

в уравнение (11-12) значение энтальпии для термодинамически идеальных газов $i=c_p T$ и разделив левую и правую части на c_p , получим:

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}. \quad (11-13)$$

Как известно из термодинамики, отношение кинетической энергии потока к его энтальпии равно:

$$\frac{w^2/2}{c_p T} = \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a^2} = \frac{k-1}{2} M^2; \quad (11-14)$$

здесь $k=c_p/c_v$ —отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Величина w/a представляет собой отношение скорости потока к скорости звука в этой же точке. Это отношение обозначают через M и называют числом Маха. Из последнего уравнения следует, что число Маха характеризует отношение кинетической энергии потока к его энтальпии. В общем случае число M может изменяться от нуля до бесконечности. Если $M < 1$, то поток называется дозвуковым, если $M = 1$ — звуковым и если $M > 1$ — сверхзвуковым.

С учетом (11-14) уравнение (11-13) можно преобразовать в следующее:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{w^2}{2c_p T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (11-15)$$

Из уравнения (11-15) следует, например, что при $M=0,25$ и $k=1,4$ (воздух) температура торможения превышает термодинамическую температуру потока примерно на 1%. При $T=288$ К скорость звука в воздухе у земли равна примерно 340 м/с; в этом случае значению $M=0,25$ соответствует скорость $w \approx 85$ м/с. Обычно принимают, что при $M < 0,25$ $T_0 = T$.

На рис. 11-6 показана зависимость температуры торможения от скорости воздушного потока. При $M=1$ $T_0=1,2$ Т; при $M=5$ $T_0=6$ Т. Здесь же приведены температуры плавления некоторых металлов.

При очень больших температурах газа его физические свойства существенно изменяются. Происходит диссоциация молекул, т. е. распадение на две или несколько частей (атомы, радикалы или молекулы). При более высоких температурах происходит и ионизация газа, т. е. отщепление электронов от атомов или молекул, приводящее к образованию положительных ионов и свободных электронов. Эти эффекты проявляются в воздухе при температурах, превышающих тысячи градусов (см. рис. 15-1, § 15-1).

Воздействие газа высокой температуры может привести к разрушению несхлаждаемой поверхности тела — ее плавлению, испарению (сублимации). Частицы разрушаемого тела могут дополнить вступать в химические реакции между собой и газом внешнего потока. Процессы испарения (или сублимации), плавления, сгорания и разру-

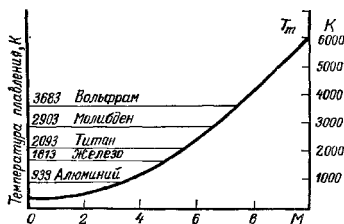


Рис. 11-6 Зависимость температуры торможения от числа M ($k=1,4$).

нения поверхностного слоя тела, сопровождающиеся уносом вещества потока газа большой скорости и высокой температуры, называются абляцией.

В этой главе будут рассмотрены процессы теплоотдачи при сравнительно небольших скоростях (примерно $M < 5$) и невысоких температурах, когда диссоциация и ионизация газа и абляция не имеют места. Течения при $1 < M < 5$ будем называть сверхзвуковыми, а при $M > 5$ — гиперзвуковыми.

При адиабатическом течении газа возрастание его кинетической энергии может происходить только при условии понижения энтальпии. Поэтому увеличение скорости при адиабатическом течении газа связано

с падением его температуры. Но так как давление падает быстрее, чем температура, то плотность газа с ростом скорости уменьшается. Таким образом, увеличение скорости приводит к расширению газа и дальнейшему росту скорости.

На рис. 11-7 приведены полученные опытным путем графики изменения давления и скорости по длине трубы для адиабатического и неадиабатического дозвукового и сверхзвукового газовых потоков. При небольших значениях M движение сжимаемого газа практически мало отличается от движения несжимаемой жидкости: скорость газа почти не изменяется вдоль канала, а давление убывает по линейному закону.

В дозвуковых течениях скорость возрастает по длине трубы тем сильнее, а давление падает тем круче, чем больше число M .

Рис 11-7. Изменение скорости и давления воздуха по длине трубы.

а — $Re_{d_{вх}} = 1,82 \cdot 10^5$, $M_{вх} = 0,42$, $q_c = 0$, б — $Re_{d_{вх}} = 6,51 \cdot 10^5$, $M_{вх} = 0,75$, $q_c = 1,85 \cdot 10^5$ Вт/м², в — $Re_{d_{вх}} = 1,4 \cdot 10^6$, $M_{вх} = 2,4$, $q_c = 1,85 \cdot 10^6$ Вт/м².

Если наряду с работой сил трения происходит подвод или отвод теплоты через стенки трубы, то в первом случае давление падает вдоль потока сильнее, чем при адиабатическом течении, а во втором случае — слабее. Проходя по трубе, сверхзвуковой поток тормозится, т. е. скорость вдоль потока падает, а давление возрастает.

При больших скоростях газа ранее выведенное уравнение энергии (4-10) оказывается непригодным. Следует учесть взаимные преобразования внутренней и кинетической энергии и сжимаемость газа.

Сообщенная определенной единице массы потока теплота dQ складывается из теплоты dQ_1 , подведенной извне теплопроводностью, и теплоты трения $dQ_{тр}$. Согласно первому закону термодинамики теплота dQ идет на изменение внутренней энергии du и совершение работы расширения (деформации):

$$pdv = pd(1/\rho) = -\frac{p}{\rho^2} d\rho \quad dQ_1 + dQ_{тр} = du - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Изменение внутренней энергии может быть определено следующим образом:

$$du = di - d \frac{p}{\rho} = di - \frac{1}{\rho} dp + \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Согласно двум последним уравнениям

$$dQ_1 = di - \frac{1}{\rho} dp - dQ_{тр}.$$

Ранее при выводе уравнения энергии (4-10) по существу полагали, что $dQ_1 = di$. Если помимо энтальпии в уравнении энергии ввести члены dp/ρ и $dQ_{тр}$, получим (при $q_v = 0$):

$$\rho \frac{di}{dt} - \frac{dp}{dt} = \lambda \nabla^2 t + \mu \Phi; \quad (11-16)$$

здесь di/dt и dp/dt — полные (субстанциальные) производные от энтальпии и давления по времени. Член $\rho dQ_{тр}/dt$ обозначен через $\mu \Phi$.

Таким образом, в уравнении энергии дополнительно появились члены dp/dt и $\mu \Phi$. Они учитывают работу расширения и диссипацию механической энергии. Диссипативная функция $\mu \Phi$ введена Рэлеем.

Изменяется и уравнение движения. Для сжимаемой жидкости оно принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{w}. \quad (11-17)$$

Уравнение сплошности (4-19)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{w}) = 0,$$

очевидно, не изменяется.

Заметим, что при записи уравнений (11-16) и (11-17) для простоты принято, что λ и μ постоянны.

Уравнения (11-16), (11-17) и (4-19) часто вместе с уравнением состояния $p = \rho RT$ используются для математической формулировки задачи. Если считать граничные условия идентичными условиям, использованным в § 5-2, то можно получить следующие уравнения подобия:

$$\begin{aligned} \Theta &= f_1(X, Y, \text{Re}, \text{Pr}, M, k); \\ W_a &= f_2(X, Y, \text{Re}, \text{Pr}, M, k) \end{aligned} \quad (11-18)$$

и т. д. Если учесть зависимость физических параметров от температуры, то в списке определяющих критериев подобия появится и температурный фактор θ_c .

Поскольку непосредственно на стенке газ полностью заторможен, может создаться впечатление, что при отсутствии теплообмена через

¹ Для жидкостей, подчиняющихся ньютоновскому закону вязкого трения

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div } \vec{w})^2. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что выделение теплоты пропорционально *квадратам* производных.

стенку температура газа на ее поверхности должна быть равна температуре торможения. Однако это выполняется только в частных случаях.

В реальных условиях процесс перехода механической энергии в тепловую сопровождается обменом теплом и работой между смежными слоями газа. Обмен будет иметь место и в том случае, когда твердое тело теплоизолировано и теплоотдача между телом и газом отсутствует. Ввиду этого частицы газа, непосредственно прилегающие к поверхности теплоизолированного тела, будут иметь температуру, превышающую температуру газа вдали от тела, однако в общем случае не равную температуре торможения. Такую же температуру будет иметь и теплоизолированное тело (скачок температуры, как и скачок скорости, может иметь место на границе раздела «твердое тело — газ» только в сильно разреженном газе). Эта температура называется адиабатной, собственной или равновесной.

Таким образом, адиабатной называется температура, которую показал бы неподвижный теплоизолированный термометр, находящийся в быстродвижущемся потоке жидкости. Термометр показал бы термодинамическую температуру незаторможенного газа только в том случае, если бы он двигался вместе с газом.

Адиабатная температура стенки определяется из уравнения

$$T_{a.c} = T + r \frac{w^2}{2c_p} = T \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (11-19)$$

где r — коэффициент восстановления температуры. Из (11-19) следует, что

$$r = \frac{T_{a.c} - T}{w^2/2c_p} = \frac{T_{a.c} - T}{T_\infty - T}. \quad (11-20)$$

Уравнение (11-20) является определением r . Коэффициент восстановления может быть как меньше, так и больше единицы. Если интенсивность выделения теплоты трения преобладает над интенсивностью отвода тепла в газ конвекцией и теплопроводностью, то $r > 1$. Если $r < 1$ — преобладает отвод тепла. Если $r = 1$, то процессы выделения и отвода теплоты уравновешены.

В общем случае коэффициент восстановления должен зависеть от тех же факторов, что и температурное поле — см. (11-18). В частных случаях число влияющих факторов уменьшается.

Для пластины, омываемой продольным потоком газа при ламинарном пограничном слое,

$$r = \sqrt{\text{Pr}}, \quad (11-21)$$

при турбулентном

$$r = \sqrt[3]{\text{Pr}}. \quad (11-22)$$

Формулы (11-21) и (11-22) хорошо соответствуют опытным данным.

Для дозвукового и сверхзвукового турбулентного течения воздуха в трубе местный коэффициент восстановления температуры может быть определен по формуле [Л. 131]

$$r = \sqrt[3]{\text{Pr}} - \Delta r_x, \quad (11-23)$$

где $\Delta r_x = 7,16 \cdot 10^{-5} \text{Re}_x^{0,4} f(x/d)$ — экспериментально определенная поправка. При $x/d = 0 \div 15$ (начальный участок) $f(x/d) = 1$; при $x/d = 15 \div 27$ $f(x/d) = 1 + 0,0413 \sqrt{\frac{x}{d} - 15}$. В Re_x подставляется средняя в данном сечении

скорость, линейный размер — продольная координата x , отсчитываемая от начала трубы. Определяющая температура — средняя термодинамическая температура в данном сечении.

Числа Прандтля в формулах (11-21) — (11-23) должны выбираться по специально подобранной температуре $T_{\text{опр}} = T + 0,5(T_c - T) + 0,22(T_{a.c} - T)$. У многих газов $Pr \approx \text{const}$ в большом интервале температур, тогда выбор определяющей температуры не имеет значения.

При поперечном омывании труб воздухом $r \approx 0,92$.

При выделении теплоты трения распределение температуры в пограничном слое изменяется (рис. 11-8). Поле температур в газе можно рассматривать как сумму двух полей, из которых одно обусловлено выделением теплоты трения, а второе — теплообменом через стенку. Конечно, эти процессы взаимосвязаны. Только в предельных случаях $q_c = 0$ и $M = 0$ они проявляются в «чистом» виде.

Пусть пластина оmyвается продольным потоком быстродвижущегося газа, температура которого на удалении от тела равна T_r .

В случае $q_c = -\lambda(\partial t/\partial y)_{y=0} = 0$ (теплоизолированная поверхность стенки) имеем, что $T_c = T_{a.c}$ (кривая 2, рис. 11-8). Теплообмен происходит только внутри газа, поскольку при $y > 0$ градиент температуры не равен нулю. Наибольшая температура, которую газ имеет в пограничном слое, равна $T_{a.c}$ (при $y=0$). Повышение температуры газа относительно его температуры T_r вызвано выделением теплоты в пограничном слое. Если бы этого выделения не было бы, то по всей толщине слоя температура была бы равна T_r ($q_c = 0$).

Кривые 1, 3 и 4 рис. 11-8 соответствуют случаям, когда помимо теплообмена в газе имеет место теплообмен и через стенку ($q_c \neq 0$).

Кривые 3 соответствуют заметному выделению теплоты трения в пограничном слое, однако охлаждение стенки изнутри является интенсивным, в результате чего $T_c < T_{a.c}$ и $q_c < 0$ (т. е. тепло от газа поступает в стенку). Вдали же от стенки, за максимумом температурной кривой, теплота трения распространяется и в газ ($q > 0$). Возможен случай, когда $T_c = T_r$ (кривая 3б). Но и при этом $q_c < 0$, поскольку температура в пограничном слое выше температуры стенки.

Кривая 4 соответствует случаю, когда выделение теплоты трения мало по сравнению с интенсивностью его отвода в стенку и практически не влияет на характер изменения температуры газа в пограничном слое. Тепловой поток направлен в стенку ($q_c < 0$). Распределение температуры не отличается по своему характеру от ранее рассмотренного для течения несжимаемого газа.

Распределение температуры согласно кривой 1 может иметь место, если теплота подводится к стенке изнутри. Очевидно, в этом случае $T_c > T_{a.c}$ и $q_c > 0$.

Таким образом, в быстродвижущемся газе тепловой поток q_c направлен от стенки в газ, если $T_c > T_{a.c}$, и, наоборот, направлен от газа к стенке, если $T_c < T_{a.c}$.

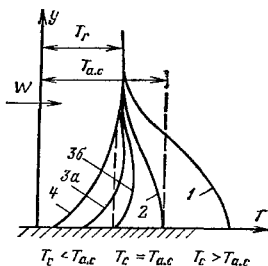


Рис. 11-8. Изменение температуры в пограничном слое быстродвижущегося газа в определенном сечении x при различных условиях

Если температура стенки задана, то число Маха, при котором $q_c=0$, можно определить из уравнения (11-19), положив в нем $T_{a,c}=T_c$.

Использование уравнения Ньютона — Рихмана $q_c = \alpha(t_c - t_r)$ в случае больших скоростей неправомерно. При омывании теплоизолированной поверхности, когда $q_c=0$, эта формула даст, что $q_c \neq 0$, так как $T_r \neq T_c = T_{a,c}$. В то же время, когда $T_r = T_c$, получаем из нее, что $q_c=0$, хотя в этом случае $q_c \neq 0$ (кривая 3б). Необходимо учесть то обстоятельство, что при течении с большой скоростью температура в пограничном слое повышается за счет выделения теплоты трения. Для этого в уравнение Ньютона — Рихмана вместо T_r вводят адиабатную температуру $T_{a,c}$. Тогда

$$q_c = \alpha(T_{a,c} - T_c) \text{ или } q_c = \alpha \left(T_r + r \frac{w^2}{2c_p} - T_c \right). \quad (11-24)$$

При небольших скоростях, когда член $r(w^2/2c_p)$ намного меньше T_r , эта формула переходит в ранее использовавшееся уравнение Ньютона — Рихмана, так как членом $r(w^2/2c_p)$ можно пренебречь.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при определении α согласно формуле (11-24) для расчета коэффициентов теплоотдачи при течении газа с дозвуковой скоростью можно использовать критериальные уравнения для несжимаемой жидкости, приведенные ранее. При повышении скорости в критериальных уравнениях необходимо учитывать влияние k и M . При больших скоростях газа параметры потока существенно изменяются как по сечению канала, так и по его длине. Ввиду этого представляет интерес знание локальных коэффициентов теплоотдачи.

А. С. Сукомелом, В. М. Мухиным и В. Н. Величко [Л. 131] показано, что местные коэффициенты теплоотдачи при охлаждении турбулентного потока воздуха, текущего в круглой прямой трубе со сверхзвуковой скоростью и большими температурными напорами, могут быть определены по уравнению

$$\text{Nu}_{rd} = 0,022 \text{Re}_{rd}^{0,8} \text{Pr}_r^{0,43} (T_r/T_c)^{0,43} \epsilon_l. \quad (11-25)$$

Физические параметры в этой формуле отнесены к средней термодинамической температуре газа T_r в рассматриваемом сечении. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. В критерий Рейнольдса входит средняя в данном сечении скорость газа.

Поправка ϵ_l учитывает изменение теплоотдачи по длине трубы. При наличии турбулентного пограничного слоя с самого начала трубы и $(x/d) < 15$ $\epsilon_l = 1,38/(x/d)^{0,42}$, где x — продольная координата, отсчитываемая от начала трубы. При $x/d \geq 15$ $\epsilon_l = 1$.

В опытах [Л. 131] температура воздуха на входе в трубу изменялась от 200 до 800°C, этому соответствовало изменение температурного фактора $\theta_c = T_c/T_{a,c}$ от 0,3 до 1. Числа M на входе в трубу изменялись от 0,1 до 4; значения Re достигали $7 \cdot 10^5$.

Множитель

$$\left(\frac{T_r}{T_c} \right)^{0,42} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-0,42}$$

учитывает влияние эффектов, характерных для течения быстродвижущегося газа. Коэффициент теплоотдачи при этом определяется по формуле (11-24).

Экспериментально определенная зависимость теплоотдачи от T_f/T_0 показана на рис. 11-9. При $M < 1$ значение $(T_f/T_0)^{0,42}$ мало отличается от единицы.

Как следует из [Л. 131], при использовании в виде определяющего размера продольной координаты x величина поправки меняется. В этом случае вместо $(T_f/T_0)^{0,42}$ она равна $(T_f/T_0)^{0,38}$. В остальном формула для

коэффициента теплоотдачи близка к формуле (7-39), рекомендованной для расчета теплоотдачи в потоке несжимаемой жидкости при турбулентном пограничном слое. Таким образом, и при больших скоростях газа развитие процесса теплоотдачи в начале трубы подобно развитию процесса теплоотдачи при обтекании пластины.

Местные коэффициенты теплоотдачи при продольном омывании пластины турбулентным пограничным слоем в этом случае можно рассчитывать по формуле

$$Nu_{gx} = 0,0296 Re_{gx}^{0,8} Pr_x^{0,43} (T_f/T_0)^{0,38}. \quad (11-26)$$

Интенсивность теплоотдачи при ламинарном пограничном слое значительно меньше, чем при турбулентном. Обеспечение ламинарной формы течения в пограничном слое может являться методом тепловой защиты твердой поверхности, обтекаемой высокоскоростным потоком газа с большой температурой.

При нагреве газа его вязкость повышается. В результате в некоторых устройствах турбулентный пограничный слой может перейти в ламинарный.

11-4. ТЕПЛОТДАЧА РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

При рассмотрении процессов конвективного теплообмена мы исходили из предположения, что газ можно считать континуумом, т. е. пренебрегать его дискретным строением. Однако при малых абсолютных давлениях (или малых размерах тел, участвующих в теплообмене с газом) явление передачи тепла можно объяснить только в том случае, если принять во внимание молекулярное строение вещества. При этом представление газа в виде континуума оказывается непригодным. При течении разреженного газа изменяются и граничные условия. Газ, непосредственно прилегающий к поверхности омываемого тела, не имеет скорости и температуры поверхности тела, т. е. на границе раздела имеют место «скольжение» газа и скачок температур.

Как известно, газ можно представить в виде множества молекул, движущихся прямолинейно во всех направлениях. При своем движении молекулы неразрезанного газа непрерывно сталкиваются друг с другом. В результате столкновений скорости и направления движения молекул изменяются. По мере уменьшения давления соударения молекул происходят все реже и реже.

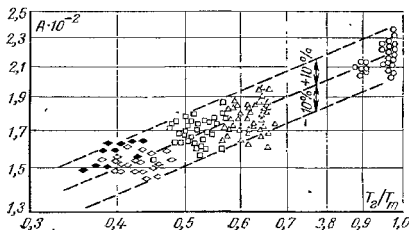


Рис. 11-9. Теплоотдача сжимаемого газа при турбулентном течении в прямых круглых трубах.

Средняя длина пути $\bar{l}$, проходимого молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами, называется средней длиной свободного пробега. Из кинетической теории газов известно, что

$$\bar{l} = \frac{\bar{c}}{\kappa} = \frac{1}{n\sigma \sqrt{2}}, \quad (11-27)$$

где $\bar{c}$ — средняя скорость молекул газа, м/с; κ — число столкновений за 1 с; n — число молекул в единице объема; σ — эффективное сечение молекулы.

Эффективное сечение определяется расстоянием, на которое сближаются молекулы при столкновении, т. е. расстоянием, при котором сила взаимодействия между молекулами вызывает заметное изменение направления их движения.

Если представить соударяющиеся молекулы в виде жестких шариков, то эффективное сечение σ будет равно πd^2 , где $d = r_1 + r_2$, а r_1 и r_2 — радиусы сталкивающихся молекул.

Для обычных молекулярных газов при нормальных условиях (давление около 0,1 МПа и температура 273 К) средняя длина свободного пробега имеет величину порядка 10^{-7} м. Величина $\bar{l}$, как следует из формулы (11-27), обратно пропорциональна числу молекул в единице объема и, следовательно, обратно пропорциональна давлению. При низких давлениях средняя длина свободного пробега достигает очень больших значений. Так, например, при $p = 0,133$ Па средняя длина свободного пробега достигает примерно 7 см, а при $p = 0,133 \cdot 10^{-5}$ Па — около 7 км.

Таким образом, чем меньше давление газа, тем больше $\bar{l}$ и тем меньше вероятность соударения молекул. При низких давлениях молекулы могут пролетать расстояния от одной стенки канала к другой, не сталкиваясь друг с другом.

Согласно формуле (11-27) $\bar{l}$ обратно пропорциональна эффективному сечению молекулы σ , которое зависит от скорости молекул, так как при одной и той же силе взаимодействия быстрые молекулы испытывают меньшее отклонение от своего пути, чем медленные. Поэтому чем больше скорость молекул, тем больше должна быть сила, вызывающая их отклонения, тем меньше должно быть расстояние между ними при столкновении и, следовательно, тем меньше должно быть расчетное поперечное сечение молекулы. Так как кинетическая энергия молекул является мерой температуры газа, то σ уменьшается с увеличением T , а средняя длина свободного пробега увеличивается.

Таким образом, средняя величина свободного пробега молекул увеличивается при понижении давления и увеличении температуры газа.

При своем движении молекулы могут столкнуться с поверхностью тела. Полагают, что после удара молекула может или зеркально отразиться от поверхности, или некоторое время оставаться на поверхности, а затем уже перейти в объем газа. Продолжительность пребывания молекулы на поверхности зависит от места и природы поверхности и природы самой молекулы, температуры поверхности, кинетической энергии молекулы и некоторых других факторов. Явление задержки молекулы на поверхности тела называется адсорбцией. Реэмиссия (испускание) адсорбированных молекул происходит так, что молекулы

симметрично рассеиваются по всем направлениям полусферы — происходит диффузное испускание молекул¹.

Характер взаимодействия молекул газа со стенкой имеет важное значение для оценки теплоотдачи.

Теплоотдача происходит вследствие обмена энергией между молекулами и поверхностью тела. Когда молекула падает на поверхность тела, она может отдать последней определенную энергию. Полагают, что полный теплообмен происходит тогда, когда время пребывания молекулы на поверхности много больше периода колебаний молекул тела. Если время контакта меньше, теплообмен не будет полным. Степень «полноты» теплообмена характеризуют коэффициенты accommodation, определяемые следующим выражением:

$$\gamma = \frac{E_{\pi} - E_0}{E_{\pi} - E_c}; \quad (11-28)$$

здесь E_{π} — средняя энергия молекулы, падающей на поверхность тела; E_0 — средняя энергия той же молекулы после ее контакта с телом («отражения» от тела); E_c — средняя энергия молекулы, соответствующая температуре поверхности стенки.

Таким образом, коэффициент аккомодации представляет собой отношение действительного обмена энергией к максимально возможному.

При мгновенном зеркальном отражении молекулы ее энергия не изменяется, т. е. $E_{\pi} = E_0$ и $\gamma = 0$. При полном обмене энергией $E_0 = E_c$ и $\gamma = 1$. В промежуточных случаях E_0 принимает значение между E_{π} и E_c и величина коэффициента аккомодации меняется тогда между 0 и 1.

В общем случае можно определять коэффициент аккомодации для различных категорий энергии молекул (энергии поступательного движения и энергии вращения и колебания). Так как для возбуждения колебательных степеней свободы требуется много соударения, то обычно коэффициент аккомодации колебательной энергии принимают равным нулю.

Понятие коэффициента аккомодации используют также для характеристики энергообмена совокупности молекул. В этом случае в уравнении (11-28) под E_{π} , E_0 и E_c подразумеваются не энергии одной молекулы, а соответствующие энергии совокупности молекул.

Учитывая, что температура газа рассматривается как величина, пропорциональная средней кинетической энергии совокупности молекул², часто вместо (11-28) полагают:

$$\gamma = \frac{T_{\pi} - T_0}{T_{\pi} - T_c}. \quad (11-29)$$

Переход от определения (11-28) к определению (11-29) является оправданным для одноатомного идеального газа; для других газов этот переход следует считать приближенным приемом.

Как следует из определения коэффициента аккомодации, его значение зависит от температуры поверхности тела и разности температур

¹ При диффузном испускании плотность потока молекул максимальна в направлении, нормальном к телу. Полагают, что плотность потока молекул в произвольном направлении полусферы равна $I_n \cos \varphi$, где I_n — плотность потока в направлении нормали; φ — угол, отсчитываемый от направления нормали к телу.

² Температура T_0 , измеренная в энергетических единицах, например джоулях, связана с температурой T , измеренной в кельвинах, соотношением $T_0 = kT$. Здесь k — постоянная Больцмана, численно равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

газа и поверхности или, точнее говоря, от разности энергии падающих молекул и той энергии, которую имели бы молекулы газа при температуре поверхности. Коэффициент аккомодации зависит от природы газа и поверхности, на которой происходит аккомодация. Как показывают исследования, коэффициент аккомодации зависит от давления в потоке газа, его скорости относительно стенки, наличия на этой стенке адсорбированного газа (что во многом зависит от предьстории процесса). Вероятность адсорбции и ее время зависят от количества падающих на поверхность молекул, так как от последних зависит состояние адсорбированных слоев. Все это создает большие трудности для определения коэффициентов аккомодации. Трудности теоретического исследования усугубляются недостаточным знанием структуры поверхностных слоев твердых и жидких тел. В настоящее время γ определяют экспериментальным путем.

Полученные значения γ лежат в пределах примерно от 0,02 до 1. Современные исследования чаще приводят к результатам, согласно которым коэффициент аккомодации близок к единице.

Удары молекул о поверхность тела приводят также к обмену количеством движения между молекулами и стенкой. Этот обмен характеризуют коэффициентом обмена количества движения f . Согласно определению

$$f = \frac{mc_{xп} - mc_{x0}}{mc_{xп}}; \quad (11-30)$$

здесь $c_{xп}$ — составляющая скорости падающей молекулы, направленная вдоль стенки; c_{x0} — та же составляющая, но после отражения молекулы (стенка считается неподвижной); m — масса молекулы. Практически f определяется только для большого числа молекул, рассматриваемых одновременно.

В случае зеркального отражения $c_{xп} = c_{x0}$ и $f = 0$. В случае диффузной реэмиссии в среднем для молекул $c_{x0} = 0$ и, следовательно, в среднем $f = 1$. При частично зеркальном и частично диффузном отражении коэффициент обмена количеством движения имеет значение между 0 и 1.

Коэффициент f , как и коэффициент аккомодации γ , зависит от большого количества факторов, отражающих конкретные условия взаимодействия молекул газа со стенкой. В частности, f зависит от природы газа и природы стенки, скорости газового потока как целого и других факторов.

Дискретное строение газа и связанный с этим характер взаимодействия молекул со стенкой приводит, как отмечалось ранее, к скачку температур и скачку скорости (скольжению) на поверхности тела.

Скольжение газа вдоль стенок объясняется большой длиной свободного пробега по сравнению с характерными размерами тела. В отличие от плотного газа молекулы разреженного могут не иметь соударений с другими молекулами или число соударений будет сводиться к минимуму. Вследствие этого молекулы газа, подлетающие из потока к стенке, имеют тангенциальные составляющие скорости, в среднем не равные нулю. Однако молекулы, исходящие от стенки, могут разлетаться в разные стороны беспорядочно; касательная составляющая их скорости в среднем будет равна нулю. Поэтому среднее значение касательной скорости всех молекул у стенки (и подлетающих, и улетающих) не равно нулю и наблюдается кажущееся скольжение газа вдоль

стенки. В газах, находящихся под обычным давлением, средняя длина свободного пробега молекул мала и скольжение практически не проявляется.

Аналогично может быть объяснен и скачок температур у поверхности тела, омываемого потоком разреженного газа. Молекулы сильно разреженного газа, подлетающие к стенке, из-за отсутствия выравнивающего действия соударений друг с другом в среднем могут иметь температуру, значительно отличающуюся от температуры поверхности тела. Адсорбированные молекулы, испускаемые стенкой, могут иметь в среднем температуру, близкую (или равную) температуре стенки. В результате в пристенном слое средняя температура газа не равна температуре поверхности стенки.

Для определения скачка скорости и скачка температур предложен ряд формул. Все они получены при определенных допущениях и в силу этого не могут считаться строгими. Эти формулы могут быть записаны в следующем виде:

$$w_{\text{ск}} = c_1 \bar{l} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (11-31)$$

и

$$\Delta T_{\text{ск}} = c_2 \bar{l} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (11-32)$$

здесь $w_{\text{ск}}$ и $\Delta T_{\text{ск}}$ — скачки скорости и температуры на стенке (рис. 11-10). Предполагается, что скорость и температура изменяются только в направлении оси Oy [Л. 200]. Коэффициенты c_1 и c_2 отражают конкретные условия взаимодействия газа со стенкой. Согласно некоторым элементарным выводам кинетической теории

$$c_1 = \frac{2-f}{f},$$

где f — коэффициент обмена количеством движения.

Произведение $c_1 \bar{l}$ называется коэффициентом скольжения; его единицей измерения, как следует из уравнения (11-31), является единица длины.

Для c_2 предложен ряд выражений, в частности

$$c_2 = \frac{2-\gamma}{\gamma} \frac{2k}{k+1} \frac{1}{\text{Pr}},$$

где γ — коэффициент аккомодации; $k = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Поскольку коэффициенты c_1 и c_2 зависят от f и γ , а последние в свою очередь зависят от большого количества факторов, очень трудно теоретически определить точные значения c_1 и c_2 . Поэтому коэффициенты c_1 и c_2 определяются и экспериментально.

При $\bar{l} \rightarrow 0$ из уравнений (11-31) и (11-32) следует, что

$$w_{\text{ск}} \rightarrow 0 \text{ и } \Delta T_{\text{ск}} \rightarrow 0.$$

Поскольку у плотных газов $\bar{l}$ может быть очень малой, но все же отличной от нуля, граничные условия $w_{\text{ск}} = 0$ и $\Delta T_{\text{ск}} = 0$, принятые ранее

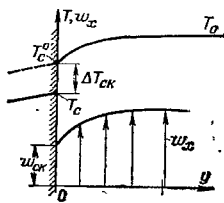


Рис. 11-10. Скачки скорости и температуры у поверхности тела.

для континуума, выполняются, очевидно, только приближенно, хотя и с приемлемой для практики точностью.

Аэродинамическая степень разрежения газа как степень его отклонения от состояния континуума определяется, как отмечалось ранее, числом Кнудсена $K_n \equiv \bar{l}/l_0$, где $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега молекул; l_0 — характерный размер

Если $K_n < 0,001$, то газ можно рассматривать как сплошную среду (континуум) и применять для расчета ранее полученные уравнения

Если $K_n > 10$, то газ рассматривают как свободный молекулярный поток. В этом случае для расчета течения и теплообмена используют уравнения кинетической теории газов

При $K_n < 0,001$ межмолекулярные столкновения преобладают над столкновениями со стенками. При свободном молекулярном течении, напротив, столкновения со стенками преобладают над столкновениями между молекулами.

При значениях параметра Кнудсена, заключенных между 10^{-3} и 10, разреженный газ не может рассматриваться ни как совершенно сплошная среда, ни как свободный молекулярный поток. В этой области различают два режима: течение со скольжением ($10^{-3} < K_n < 1$) и переходный режим ($1 < K_n < 10$).

Переход от течения сплошной среды к свободному молекулярному течению происходит постепенно. Поэтому указанные граничные значения числа K_n в значительной степени являются условными. Например, считают, что для выпуклого тела свободный молекулярный режим должен наступать при значениях числа K_n , более низких, чем для аналогичного тела, но вогнутого.

Свободный молекулярный поток. Теплоотдача в свободном молекулярном потоке может быть рассчитана на основе кинетической теории газов

Приведенные в этом параграфе результаты получены в предположении, что молекулы газа, падающие на поверхность тела, не имеют соударений с отлетающими молекулами. Поэтому считают, что в газе имеет место максвелловское распределение скоростей теплового движения молекул газа, на которое накладывается макроскопическая скорость газового потока. Энергия падающих на стенку молекул определяется при этом с учетом как макроскопической скорости, так и скорости теплового движения молекул. Количество переданной стенке энергии определяется через коэффициент аккомодации [см² (11-28)]

Влияние скоростей учитывается через параметр $s = w/\bar{c}$, где w — скорость газового потока; $\bar{c}$ — наиболее вероятная скорость молекул. Значение $\bar{c}$ может быть определено следующим образом:

$$\bar{c} = \sqrt{2RT}.$$

Тогда, учитывая, что скорость звука $a = \sqrt{kRT}$, можно записать:

$$s = \frac{w}{\bar{c}} = \frac{w}{\sqrt{2RT}} = \frac{w}{a} \sqrt{\frac{k}{2}} = M \sqrt{\frac{k}{2}},$$

где $k = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме; M — число Маха.

На основе кинетической теории газов получено, что

$$St \equiv \frac{Nu}{Re Pr} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} = \frac{k+1}{k} \gamma F_1(s).$$

На рис. 11-11 представлен график функции

$$F_1(s) = \text{St} \frac{\gamma^{-1}k}{k+1}.$$

На графике приведены результаты теоретического расчета для случая омывания передней части различных тел (пластины, цилиндра, сферы) и продольного омывания пластины.

Плотность теплового потока при течении разреженного газа вычисляется по обобщенной формуле Ньютона — Рихмана (11-24)

$$q = \alpha(T_{a,c} - T_c).$$

При малых скоростях эта формула переходит в обычную формулу Ньютона — Рихмана.

Согласно кинетической теории газов коэффициент восстановления r может быть вычислен по уравнению

$$r = \frac{k}{k+1} F_2(s).$$

На графике рис. 11-12 приведены значения функции

$$F_2(s) = \frac{k+1}{k} r.$$

Из рисунка следует, что функция $F_2(s)$ практически становится постоянной и равной 2, как только s достигает значения, равного 5. При более низких относительных скоростях значение r существенно зависит от формы омываемого тела.

Течение со скольжением. Дифференциальные уравнения, описывающие процесс неизотермического течения газа со скольжением и скачком температур, отличаются от ранее выведенных дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Однако в настоящее время задачи скользящего течения зачастую решают, основываясь на системе дифференциальных уравнений, полученных в гл. 4. При этом принимают во внимание скачки температуры и скорости.

Такой подход к решению задачи, вообще говоря, является не строгим, однако полученные на этой основе решения сравнительно неплохо согласуются с результатами экспериментов.

При течении со скольжением коэффициент теплоотдачи может быть в первом приближении получен путем введения поправки в коэффициент теплоотдачи для непрерывной среды при том же значении критерия Рейнольдса. Плотность теплового потока

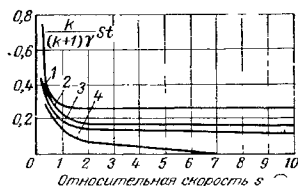


Рис. 11-11. Зависимость комплекса $\frac{k}{(k+1)\gamma} \text{St}$ от относительной скорости s .

1 — плоская пластина, нормальная к потоку; 2 — поперечно омываемый цилиндр (труба); 3 — сфера; 4 — плоская пластина, параллельная потоку.



Рис. 11-12. Зависимость комплекса $\frac{k+1}{k} r$ от s , обозначения те же, что и на рис. 11-11.

на стенке при неразрезанном газе по абсолютной величине равна:

$$q_c = \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha^0 (t_0 - t_c^0); \quad (11-33)$$

здесь верхний индекс обозначает состояние непрерывности (рис. 11-10).

Для разреженного газа

$$q_c = \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha (t_0 - t_c); \quad (11-34)$$

здесь $(\partial t / \partial y)_{y=0}$ — температурный градиент в слое газа, непосредственно прилегающем к поверхности твердого тела.

Как следует из сравнения уравнений (11-33) и (11-34), при одинаковых плотностях тепловых потоков градиенты температуры в разреженном газе у стенок будут равны ($\lambda = \text{idem}$). Будем полагать в дальнейшем, что q_c одинаковы в обоих случаях.

Из уравнений (11-33) и (11-34) следует, что

$$\alpha^0 (t_0 - t_c^0) = \alpha (t_0 - t_c)$$

и, так как $\Delta T_{\text{ск}} = t_c^0 - t_c$, то

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = \frac{t_0 - t_c}{t_0 - t_c^0} = \frac{(t_0 - t_c^0) + \Delta T_{\text{ск}}}{t_0 - t_c^0} = 1 + \frac{\Delta T_{\text{ск}}}{t_0 - t_c^0}.$$

Так как $\Delta T_{\text{ск}} / (t_0 - t_c^0) > 0$, то $\alpha^0 > \alpha$.

Подставив в последнее уравнение значение $\Delta T_{\text{ск}}$ согласно формуле (11-32) и учитывая, что

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha^0}{\lambda} (t_0 - t_c^0),$$

получаем:

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = 1 + \frac{c_2 \bar{l}}{\delta} \alpha^0.$$

Отсюда можно после несложных преобразований получить:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^0} + \frac{\delta_{\text{ск}}}{\lambda}} = \frac{1}{R^0 + R_{\text{ск}}}, \quad (11-35)$$

где $\delta_{\text{ск}} = c_2 \bar{l}$, м; $R^0 = 1/\alpha^0$ и $R_{\text{ск}} = \delta_{\text{ск}}/\lambda$.

Таким образом, коэффициент теплоотдачи разреженного газа можно представить как величину, зависящую от двух термических сопротивлений: термического сопротивления теплоотдачи плотного газа и условного термического сопротивления $R_{\text{ск}}$, обусловленного температурным скачком. При этом предполагается, что наличие условного термического сопротивления $R_{\text{ск}}$ не отражается на термическом сопротивлении теплоотдачи R^0 .

Уравнение (11-35) можно привести к безразмерному виду:

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = \frac{\alpha^0 l_0 / \lambda}{1 + \frac{\alpha^0 l_0}{\lambda} \frac{\delta_{\text{ск}}}{l_0}} \quad \text{или} \quad \text{Nu} = \frac{\text{Nu}^0}{1 + \text{Nu}^0 c_2 \text{Kn}}, \quad (11-36)$$

Последнее уравнение используется при обработке опытных данных по теплоотдаче разреженных газов. При этом значение c_2 уточняется по данным эксперимента.

К настоящему времени уже имеется много экспериментальных данных по теплоотдаче различных тел, омываемых потоком разреженного газа в режиме со скольжением. Однако подробное рассмотрение этого материала не входит в задачу нашего курса.

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Глава двенадцатая

ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ЧИСТОГО ПАРА

12-1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Конденсация представляет собой процесс перехода пара (газа) в жидкое или твердое состояние (фазовый переход первого рода).

Конденсация пара часто встречается на практике. В конденсаторах паровых турбин пар конденсируется на охлаждаемых трубах; конденсация пара осуществляется в опреснительных установках и многочисленных теплообменных аппаратах.

Выделение при фазовом превращении теплоты неразрывно связано с процессом конденсации пара с теплообменом.

Процесс конденсации возможен только при докритических состояниях газа (пара) и может быть осуществлен путем его охлаждения или в результате такого сжатия, чтобы при достигнутых значениях температуры и давления конденсированная фаза была термодинамически более устойчивой, чем газообразная. Если при этом температура и давление больше их значений, соответствующих тройной точке для данного вещества, то образуется жидкая конденсированная фаза, если меньше — пар переходит в твердое состояние.

Конденсация может происходить как в объеме пара, так и на охлаждаемой поверхности теплообмена. В первом случае образование конденсированной фазы может происходить самопроизвольно при значительном переохлаждении пара относительно температуры насыщения и на холодных жидких или твердых частицах, вводимых в пар.

В энергетике, во многих других областях техники и промышленности чаще приходится иметь дело с конденсацией пара в жидкое состояние на охлаждаемых поверхностях теплообмена. Эта задача прежде всего и будет рассмотрена в данной главе. При этом будем полагать, что конденсирующийся пар не содержит примесей других паров или газов, т. е. является чистым.

Конденсация насыщенного или перегретого пара на твердой поверхности теплообмена происходит, если температура поверхности меньше температуры насыщения при данном давлении. На поверхности может образоваться пленка конденсата с толщиной, намного превышающей расстояние эффективного действия межмолекулярных сил. В ряде случаев поверхность тела может быть покрыта отдельными каплями конденсата.

Первый вид конденсации, когда жидкая конденсированная фаза образуется на поверхности теплообмена в виде устойчивой пленки, называется пленочной конденсацией, а второй — когда происходит

образование капель — капельной. Пленочная конденсация имеет место, если конденсат смачивает данную поверхность теплообмена. Если же конденсат не смачивает поверхность, то происходит капельная конденсация.

Смачиваемость обычно характеризуют краевым углом θ , образованным поверхностью жидкости и поверхностью твердого тела, граничащих с некоторой третьей средой — в данном случае с паром (рис. 12-1).

В предположении, что актуальны только капиллярные силы, состояние равновесия капли определяется уравнением¹

$$\sigma_{с,г} = \sigma_{с,ж} + \sigma_{ж,г} \cos \theta. \quad (12-1)$$

Если $\sigma_{с,г} > \sigma_{с,ж}$, т. е. если поверхностное натяжение между газом и стенкой больше, чем между твердым телом и жидкостью, краевой угол $\theta < 90^\circ$; в этом случае говорят, что жидкость смачивает твердую поверхность. При $\sigma_{с,г} < \sigma_{с,ж}$ краевой угол $\theta > 90^\circ$, жидкость не смачивает стенку. Абсолютные смачиваемость и несмачиваемость характеризуются соответственно краевыми углами $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$.

Реально проявляются промежуточные случаи частичного смачивания ($\theta < 90^\circ$) или частичного несмачивания ($\theta > 90^\circ$).

При установившейся работе конденсационных устройств вода, как правило, смачивает поверхности

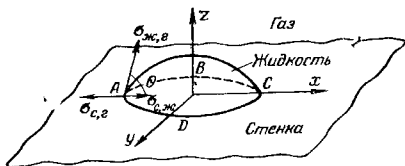


Рис 12-1 к определению краевого угла

теплообмена, и происходит пленочная конденсация. Капельная конденсация наблюдается при пуске теплообменного аппарата, когда на поверхностях стенок имеются различные, в том числе и масляные, загрязнения, при конденсации ртутного пара и в некоторых других случаях.

Капельная конденсация может быть вызвана с помощью специальных веществ, называемых лиофобизаторами (при конденсации водяного пара — гидрофобизаторами). Эти вещества наносятся на поверхность теплообмена или вводятся в пар.

При капельной конденсации водяного пара теплоотдача может быть во много раз больше, чем при пленочной. Это объясняется тем, что пленка конденсата является большим термическим сопротивлением передаче тепла фазового перехода от поверхности конденсации к стенке. При капельной конденсации в силу разрыва пленки это сопротивление гораздо меньше.

В общем случае помимо термического сопротивления конденсата можно выделить дополнительное сопротивление.

Будем полагать в дальнейших рассуждениях, что поверхность конденсации плоская (или достаточно близкая к плоской) и толщина слоя

¹ В общем случае краевой угол определяется не только капиллярными, но и другими силами, приложенными к капле. Например, силой тяжести, динамическим напором движущегося газа и т. п.

конденсата, находящегося на стенке, намного больше радиуса действия межмолекулярных сил (рис. 12-2).

Термическое сопротивление передаче теплоты от пара к стенке можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$R = \frac{t_n - t_c}{q} = \frac{1}{\alpha} = R_k + R_{\phi}, \quad (12-2)$$

где t_n и t_c — соответственно температуры пара и поверхности стенки; q — плотность теплового потока; α — коэффициент теплоотдачи от пара к стенке.

В уравнении (12-2) первое слагаемое R_k представляет собой термическое сопротивление пленки конденсата. Второе слагаемое R_{ϕ} , которое называем термическим сопротивлением на границе раздела фаз (межфазным термическим сопротивлением), не является термическим сопротивлением в его обычном понимании. Появление этого сопротивления обусловлено скачком температур на границе раздела паровой и жидкой фаз.

Рассмотрим физическую природу скачка температур. Видимая конденсация является результирующим эффектом процессов конденсации совокупности молекул, ударяющихся о поверхность жидкости и захватываемых ею (конденсирующихся) и испарения молекул, отрывающихся за то же время с той же поверхности. Превышение количества захватываемых молекул над количеством испускаемых и приводит к видимому процессу конденсации. Не все молекулы, достигая поверхности, могут быть захвачены ею. Часть молекул может отразиться от поверхности и возвратиться в пар. Энергия отраженных молекул в общем случае может быть меньше энергии падающих (см. § 11-5).

В результате в поверхностном слое пара толщиной порядка средней длины свободного пробега движутся два неравных потока молекул, имеющих различную температуру (энергию). Такой слой называется кнудсеновским. Температура пара в этом слое в среднем отличается от температуры поверхности жидкости. Перепад температур в столь тонком слое в теории сплошных сред воспринимается как скачок. За пределами кнудсеновского слоя из-за соударений молекул температура выравнивается.

Чем больше молекул, падающих на жидкость, отражается, не конденсируясь, тем больше скачок температуры. Это учитывается коэффициентом конденсации. Коэффициент конденсации представляет собой отношение числа захватываемых молекул к общему числу молекул пара, ударяющихся о поверхность конденсата. В общем случае коэффициент конденсации может изменяться от нуля до единицы.

Поток пара, проходящий через кнудсеновский слой к поверхности жидкости, будет равен $\rho_n \bar{c}_{yn}$, от жидкости в пар — $\rho_{\text{пов}} \bar{c}_{y\text{пов}}$; здесь $\bar{c}_y$ — нормальная к поверхности жидкости составляющая средней скорости молекул. Результирующий поток, отнесенный к единице поверхности, будет $j = (\rho_n \bar{c}_{yn} - \rho_{\text{пов}} \bar{c}_{y\text{пов}})$, кг/(м²·с).

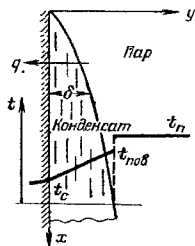


Рис. 12-2. Характер распределения температуры при пленочной конденсации чистого насыщенного пара.

Из кинетической теории газов следует, что $\bar{c}_y = \sqrt{R_n T / 2\pi}$. Умножая j на коэффициент конденсации k и подставляя значения $\rho_n \bar{c}_{yn}$ и $\rho_{пов} \bar{c}_{yпов}$, взятые по параметрам пара и поверхности жидкости, получим уравнение Герца — Кнудсена:

$$j = \frac{k}{\sqrt{2\pi R_n}} \left(\frac{p_n}{\sqrt{T_n}} - \frac{p_{пов}}{\sqrt{T_{пов}}} \right); \quad (12-3)$$

здесь T_n и $T_{пов}$ — соответственно температуры пара и поверхности конденсата; $p_n, p_{пов}$ — давление насыщенного пара соответственно при температурах T_n и $T_{пов}$; R_n — газовая постоянная пара; k — коэффициент конденсации; $\rho_n = p_n / R_n T_n$; $\rho_{пов} = p_{пов} / R_n T_{пов}$.

Формула (12-3) получена для сравнительно простой молекулярной модели. Дальнейшие уточнения показывают, что коэффициент конденсации в этой формуле должен быть заменен функцией $k/(1-0,4k)$ [Л. 130].

Межфазное термическое сопротивление определяют следующим образом:

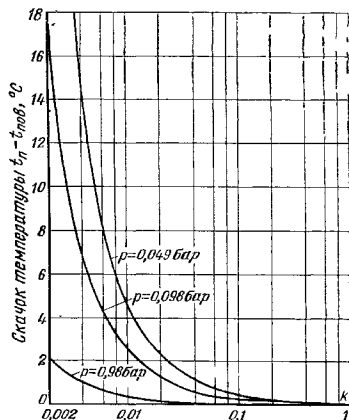
$$R_\Phi = \frac{T_n - T_{пов}}{jq}. \quad (12-4)$$

Полагая, что переносимая через фазовую границу теплота q есть только теплота фазового перехода, можно написать $q = rj$, где j определяется по уравнению (12-3), r — теплота фазового перехода.

На рис. 12-3 приведены значения скачка температуры $t_n - t_{пов}$ в зависимости от давления конденсирующегося водяного пара и значения коэффициента конденсации k при $q \approx 29000$ Вт/м² [Л. 6]. Как следует из графиков, при малом коэффициенте конденсации скачок может быть значительным, особенно при низких давлениях. В последнем случае сопротивление R_Φ может быть сопоставимым с термическим сопротивлением пленки конденсата R_K и даже значительно большим последнего. Скачок температуры увеличивается и с увеличением q .

Из ряда экспериментальных исследований вытекает, что при конденсации чистого водяного пара с давлением примерно $p > 10^4$ Па с достаточным прибли-

Рис. 12-3. Влияние величины коэффициента конденсации и давления пара на скачок температуры $t_n - t_{пов}$.



жением можно считать, что температурный скачок на границе раздела фаз отсутствует и, как следует из уравнения (12-2),

$$R = \frac{t_n - t_o}{q} = \frac{1}{\alpha} \approx R_n. \quad (12-5)$$

Ввиду недостаточности данных о коэффициенте конденсации последнее соотношение часто используют и при расчете конденсации паров других неметаллических жидкостей.

Термическое сопротивление пленки конденсата R_K зависит от режима течения. Поперек ламинарно текущей пленки теплота переносится теплопроводностью, через турбулентную — дополнительно и конвекцией. Переход от ламинарного течения пленки к турбулентному определяют по величине числа Рейнольдса пленки. Для пленки¹

$$Re = \frac{\bar{w}\delta}{\nu},$$

где $\bar{w}$ — средняя скорость течения пленки в рассматриваемом поперечном сечении; δ — толщина пленки конденсата в этом же сечении; ν — кинематический коэффициент вязкости конденсата.

Вычисленный таким образом критерий Рейнольдса является местной величиной.

Опытные данные различных авторов показывают, что критическое число Рейнольдса может изменяться в пределах примерно от 60 до 500. Наиболее вероятным значением $Re_{кр}$ для случая конденсации практически неподвижного пара на вертикальной поверхности полагают величину

$$Re_{кр} = 400.$$

Ламинарное течение жидкой пленки может сопровождаться волновым движением — рис. 12-4. Частицы жидкости, находящиеся на поверхности пленки, под действием случайных возмущений могут получить смещение, приводящее к деформации поверхности и отклонению ее от равновесного состояния. При этом возникают силы, стремящиеся вернуть жидкость к равновесию. При стекании пленок большее значение имеет сила, обусловленная поверхностным натяжением жидкости. Под действием восстанавливающих сил жидкие частицы стремятся вернуться к положению равновесия. Однако по инерции они будут проходить положение равновесия, вновь испытывать действие восстановительных сил и т. д. На это движение накладывается действие сил тяжести [Л. 133]. В результате на поверхности пленки, подвергшейся случайному возмущению, будут возникать волны. Волновые движения, возникающие одновременно в различных местах от случайных возмущений, налагаясь друг на друга, приводят к сложной трехмерной картине процесса. Ламинарно текущая пленка обладает неустойчивостью относительно возмущений с достаточной длиной волны ($\gg \delta$). При малых числах Рейнольдса возникающие в слое возмущения сносятся вниз по течению. Если же число Рейнольдса пленки больше некоторого предельного $Re_{волн}$, то образуется устойчивый волновой режим.

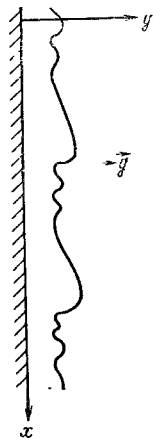


Рис. 12-4. Волновое течение пленки конденсата.

¹ Иногда в литературе применяется число Рейнольдса, в котором в качестве линейного размера принят эквивалентный диаметр, равный 4δ . Тогда число Рейнольдса пленки $Re = \bar{w}\delta/\nu$.

Согласно [Л. 115] при периодическом волновом движении пленки, стекающей по вертикальной поверхности под действием сил тяжести,

$$\text{Re}_{\text{волн}} = 0,56 \left(\frac{\sigma}{\rho_{\text{ж}} g^{1/3} \nu^{4/3}} \right)^{3/11}. \quad (12-6)$$

Отсюда следует, например, что для воды при $t=15^\circ\text{C}$ $\text{Re}_{\text{волн}} \approx 5$. Это значение $\text{Re}_{\text{волн}}$ хорошо соответствует результатам, полученным при экспериментальном исследовании [Л. 66, 158].

В процессе конденсации расход конденсата тесно связан с тепловым потоком. При конденсации сухого насыщенного пара последним отдается теплота фазового перехода r , Дж/кг. Кроме того, поскольку температура поверхности стенки меньше температуры поверхности конденсата, соприкасающегося с паром, стенке отдается и часть тепла конденсата. Происходит переохлаждение конденсата в среднем до температуры, значение которой лежит между значениями температур поверхностей пленки (со стороны пара) и стенки.

Во многих практически важных случаях теплота переохлаждения пренебрежимо мала по сравнению с теплом фазового перехода.

В этом случае тепловой поток (или его плотность) не изменяются по толщине пленки конденсата.

Пренебрегая теплотой переохлаждения конденсата, можно написать:

$$Q = rG, \quad (12-7)$$

где Q — тепловой поток, Вт; G — количество конденсата, образовавшегося в единицу времени, или массовый расход, кг/с.

Расход конденсата в каком-либо произвольно выбранном сечении движущейся пленки есть $G = \rho_{\text{ж}} \bar{w} l_z = \rho_{\text{ж}} \bar{w} \delta l_z$, где l_z — размер стенки в направлении, нормальном к плоскости чертежа (рис. 12-2). Следовательно, $\bar{w} \delta = G / \rho_{\text{ж}} l_z$. На участке от $x=0$ до x образовалось G кг/с конденсата и в единицу времени была передана теплота $Q = \bar{q} F = = \alpha \Delta t F \approx rG$. Отсюда

$$\bar{w} \delta = \frac{G}{\rho_{\text{ж}} l_z} = \frac{\bar{q} x}{r \rho_{\text{ж}}}$$

и

$$\text{Re} = \frac{\bar{w} \delta}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{G}{\rho_{\text{ж}} \nu_{\text{ж}} l_z} = \frac{\bar{q} x}{r \rho_{\text{ж}} \nu_{\text{ж}}} = \frac{\alpha \Delta t x}{r \rho_{\text{ж}}}. \quad (12-8)$$

Таким образом, при названных условиях число Рейнольдса помимо своей обычной роли гидродинамического критерия является еще и величиной, определяющей интенсивность теплообмена.

Так как $Q = \bar{q} F = \bar{q} x l_z = rG = r \rho_{\text{ж}} \bar{w} \delta l_z$, то, учитывая, что

$$\bar{q} = \frac{1}{x} \int_0^x q dx \quad \text{и} \quad \bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy,$$

можно написать:

$$\frac{Q}{l_z} = \int_0^x q dx \quad \text{и} \quad \frac{rG}{l_z} = r \rho_{\text{ж}} \int_0^{\delta} w_x dy$$

(при этом r и $\rho_{\text{ж}}$ считаем постоянными).

Приравняв правые части последних соотношений и продифференцировав левую и правую части полученного уравнения по x , окончательно получим следующее уравнение для местной плотности теплового потока:

$$q = r \rho_{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} w_x dy. \quad (12-7')$$

Уравнение (12-7) позволяет вычислить плотность теплового потока, если известно распределение скоростей в пленке.

Различают конденсацию движущегося и неподвижного пара. При продольном движении пара силы трения, возникающие на границе раздела фаз, могут как подтормаживать, так и ускорять пленку конденсата в зависимости от взаимного направления движения конденсата и пара.

Конденсирующийся пар не может быть абсолютно неподвижным, так как плотность жидкой фазы ρ_{π} отличается от плотности паровой $\rho_{\text{п}}$. При состоянии, далеком от критического, $\rho_{\pi} \gg \rho_{\text{п}}$. Пар, конденсирующийся у стенки, сейчас же восполняется новыми порциями, притекающими из основной массы последнего. Поэтому, строго говоря, пар всегда находится в движении.

При конденсации пара (или испарении жидкости) происходит как бы отсос (или вдув) пара через межфазную границу. При отсосе через единицу поверхности за единицу времени переносится количество движения

$$s_j = j_{y \text{ пов}} w_0 = (\rho_{\pi} w_y)_{\text{пов}} w_0 = 2c_j \frac{\rho_{\pi} w_0^2}{2},$$

где $j_{y \text{ пов}} = (\rho_{\pi} w_y)_{\text{пов}}$, кг/(м²·с) — плотность поперечного потока вещества на межфазной границе; w_0 — продольная вдоль границы скорость пара за пределами пограничного парового слоя, отсчитываемая от скорости поверхности раздела фаз; $c_j \equiv w_{y \text{ пов}}/w_0$ — коэффициент расхода. Гидродинамическое сопротивление, определяемое последней формулой, иногда называют сопротивлением стока.

Учитывая также трение, обусловленное молекулярной вязкостью, можно написать:

$$s_{\text{пов}} = s_f + s_j = c_f \frac{\rho_{\pi} w_0^2}{2} + 2c_j \frac{\rho_{\pi} w_0^2}{2} = c_{fj} \frac{\rho_{\pi} w_0^2}{2};$$

здесь $c_{fj} = c_f + 2c_j$ соответствует коэффициенту трения, учитывающему как молекулярный, так и конвективный перенос количества движения.

Для случая омывания неограниченным потоком плоской поверхности, через которую производится равномерное отсасывание, неравенство $s_j \gg s_f$ выполняется при условии [Л. 202]

$$c_j \sqrt{\frac{w_0 x}{\nu}} > 2 \text{ или } \text{Re}_x > \frac{4w_0^2}{w_{y \text{ пов}}^2}.$$

Если пар течет вдоль пленки с небольшой скоростью, то мала и величина $s_{\text{пов}}$, т. е. пар не оказывает заметного динамического воздействия на пленку конденсата и может считаться неподвижным. В этом смысле и будет в дальнейшем употребляться термин «неподвижный пар».

При рассмотрении конкретных задач теплообмена, за редким исключением, будем полагать, что конденсирующийся пар является сухим и насыщенным. Конденсация влажного и перегретого пара будет рассмотрена отдельно.

А. Вертикальная стенка

Ламинарное течение пленки. На вертикальной стенке, температура поверхности которой всюду равна t_c , конденсируется сухой насыщенный пар. Течение пленки имеет ламинарный характер. Будем рассматривать стационарную задачу и полагать, что размер стенки в направлении оси Oz бесконечно велик (рис. 12-2).

При рассмотрении этой задачи примем следующие допущения: силы инерции, возникающие в пленке конденсата, пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и силами тяжести;

конвективный перенос теплоты в пленке, а также теплопроводность вдоль нее не учитываются; учитывается только теплопроводность поперек пленки;

трение на границе раздела паровой и жидкой фаз отсутствует; температура внешней поверхности пленки конденсата постоянна и равна температуре насыщения t_n ;

физические параметры конденсата не зависят от температуры; силы поверхностного натяжения на свободной поверхности пленки не влияют на характер ее течения;

плотность пара мала по сравнению с плотностью конденсата.

Принятые допущения позволяют существенно упростить математическую формулировку задачи. Левая часть уравнения энергии (4-10) будет равна нулю, так как процесс стационарен и конвективный перенос теплоты не учитывается. Будут равны нулю и производные $\partial^2 t / \partial x^2$ и $\partial^2 t / \partial z^2$, так как перенос тепла теплопроводностью вдоль пленки пренебрежимо мал и стенка бесконечна в направлении оси Oz .

Уравнения движения (4-12) и (4-13) в проекциях на оси Oy и Oz не учитываем. Пленка движется в направлении оси Ox . Левая часть уравнения движения в проекциях на ось Ox (4-11) равна нулю, так как задача стационарна и инерционные силы считаются пренебрежимо малыми. Поскольку толщина пленки δ мала, $\partial^2 w_x / \partial y^2 \gg \partial^2 w_x / \partial x^2$ и производной $\partial^2 w_x / \partial x^2$ можно пренебречь (см. § 4-4). Кроме того, $\partial^2 w_x / \partial z^2 = 0$ ввиду того, что размер стенки в направлении оси Oz бесконечен. Производная $\partial p / \partial x = 0$ ввиду того, что изменение давления вдоль оси x определяется изменением гидростатического давления пара; так как плотность пара мала по сравнению с плотностью конденсата, а высота стенок невелика, градиентом давления можно пренебречь¹.

В результате получаем систему уравнений

$$\frac{d^2 t}{dy^2} = 0 \quad \text{и} \quad \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho_m g.$$

Граничные условия:

при $y=0$ $t=t_c$ и $w_x=0$; при $y=\delta$ $t=t_n$ и $\partial w_x / \partial y = 0$.

Равенство нулю производной $\partial w_x / \partial y$ следует из условия, что трением на границе раздела фаз пренебрегаем. Так как $s_{y=\delta} = 0$, а $\mu \neq 0$, то из уравнения $s = \mu(dw_x/dy)$ следует, что при $y=\delta$ $dw_x/dy = 0$.

¹ Если плотность пара велика, в уравнение движения вместо $\rho_m g$ следует подставить член $g(\rho_m - \rho_n)$, где индексы «ж» и «п» обозначают соответственно жидкость и пар. Расчеты показывают также, что, как правило, свободной конвекцией в пленке можно пренебречь.

Интегрирование уравнения энергии при записанных граничных условиях дает (см. § 2-1):

$$\frac{dt}{dy} = \frac{t_n - t_c}{\delta}.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q_c}{t_n - t_c} = \frac{\lambda_m \frac{dt}{dy}}{t_n - t_c} = \frac{\lambda_m}{\delta} \frac{t_n - t_c}{t_n - t_c} = \frac{\lambda_m}{\delta}.$$

Таким образом, если поперек пленки теплота переносится только теплопроводностью, то

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{\delta}, \quad (12-9)$$

т. е. коэффициент теплоотдачи в определенной точке поверхности теплообмена прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности и обратно пропорционален толщине пленки конденсата в этой точке.

Толщина пленки конденсата будет зависеть от количества образовавшегося конденсата, или расхода конденсата, в интересующем нас сечении. Количество конденсата, протекающего в единицу времени через поперечное сечение пленки при ширине последней, равной единице, определяется следующим выражением:

$$G = \rho_m \bar{w} \delta \cdot 1.$$

Через сечение, лежащее ниже на величину dx , жидкости протекает больше на

$$dG = d(\rho_m \bar{w} \delta). \quad (a)$$

Этот прирост расхода происходит за счет конденсации. Если полагать, что тепло, отданное стенке, есть теплота фазового перехода, будем иметь:

$$dG = \frac{q_c}{r} dx \cdot 1,$$

где q_c/r — количество конденсата, образующегося на единице поверхности теплообмена за единицу времени.

С другой стороны,

$$q_c = \lambda_m \frac{dt}{dy} = \frac{\lambda_m}{\delta} (t_n - t_c)$$

$$dG = \frac{\lambda_m}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx. \quad (б)$$

Приравняв правые части уравнений (а) и (б), получим:

$$d(\rho_m \bar{w} \delta) = \frac{\lambda_m}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx. \quad (в)$$

Для того чтобы проинтегрировать последнее уравнение, предварительно нужно определить среднюю скорость $\bar{w}$.

В уравнении движения $d^2 w_x / dy^2 = -\rho_m g / \mu_m$ комплекс $\rho_m g / \mu_m$ согласно условию является постоянной величиной.

В этом случае интегрирование дает:

$$\frac{dw_x}{dy} = -\frac{\rho_m g}{\mu_{жк}} y + c_1 \text{ и } w_x = -\frac{\rho_m g}{2\mu_{жк}} y^2 + c_1 y + c_2.$$

Используя граничные условия, получаем:

$$c_1 = \frac{\rho_m g}{\mu_{жк}} \delta \text{ и } c_2 = 0.$$

Распределение скоростей тогда будет:

$$w_x = \frac{\rho_m g}{\mu_{жк}} \delta y - \frac{\rho_m g}{2\mu_{жк}} y^2. \quad (12-10)$$

Средняя скорость течения $\bar{w}$ в сечении x равна:

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta w_x dy = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\rho_m g}{\mu_{жк}} \delta y dy - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\rho_m g}{2\mu_{жк}} y^2 dy = \frac{\rho_m g}{3\mu_{жк}} \delta^2.$$

Подстановка полученного значения $\bar{w}$ в уравнение (в) дает:

$$d \left(\frac{\rho_{жк}^2 \delta^3}{3\mu_{жк}} \right) = \frac{\lambda_{жк}}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx$$

или

$$\frac{r \rho_{жк}^2}{\lambda_{жк} \mu_{жк}} \delta^3 d\delta = (t_n - t_c) dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{r \rho_{жк}^2}{4 \lambda_{жк} \mu_{жк}} \delta^4 = (t_n - t_c) x + c.$$

Из условия, что при $x=0$ $\delta=0$, следует, что $c=0$. Решив последнее уравнение относительно δ и учитывая значение постоянной интегрирования, будем иметь, что

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4 \lambda_{жк} \mu_{жк} (t_n - t_c) x}{r \rho_{жк}^2}}. \quad (12-11)$$

Подставив значение δ в выражение $\alpha = \lambda_{жк} / \delta$, получим следующее уравнение для местного коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r \rho_{жк}^2 g \lambda_{жк}^3}{4 \mu_{жк} (t_n - t_c) x}}. \quad (12-12)$$

В рассматриваемой задаче температурный напор $\Delta t = t_n - t_c$ не изменяется по x . В этом случае методы осреднения коэффициента теплоотдачи (6-21) и (6-22) дают одинаковые результаты. Получаем, что $\bar{\alpha} = \frac{4}{3}$

$\alpha_{x=h}$ и, следовательно,

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{r \rho_{жк}^2 g \lambda_{жк}^3}{4 \mu_{жк} (t_n - t_c) h}} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r \rho_{жк}^2 g \lambda_{жк}^3}{\mu_{жк} \Delta t h}}. \quad (12-13)$$

Уравнение (12-13) впервые получено Нуссельтом (1916 г.) [Л. 215]. Переменность температуры поверхности вертикальной стенки не влияет на среднюю теплоотдачу, если коэффициент теплоотдачи вычисляется по уравнению $\bar{\alpha} = \bar{q} / \Delta t$ [Л. 100].

Из уравнений (12-11) — (12-13) следует, что $\delta = c' \sqrt[4]{x}$; $\alpha = c'' \sqrt[4]{1/x}$ и $\bar{\alpha} = c''' \sqrt[4]{1/h}$.

Характер зависимостей изображен на рис. 12-5. Коэффициенты теплоотдачи уменьшаются с увеличением x или h , а толщина пленки, наоборот, увеличивается. Увеличением толщины пленки объясняется уменьшение коэффициентов теплоотдачи, так как термическое сопротивление при этом увеличивается.

Как следует из уравнений (12-11) — (12-13), зависимость α , $\bar{\alpha}$ и δ от температурного напора Δt аналогична зависимости этих величин от x и h .

Однако уменьшение α при увеличении Δt не означает, что при этом уменьшается и q_c . Согласно закону Ньютона — Рихмана $q_c = \alpha \Delta t$ и в то же время $\alpha = c \Delta t^{-0.25}$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$q_c = c \Delta t^{3/4}.$$

Вследствие принятых допущений решение Нуссельта следует рассматривать как приближенное.

Решения задачи с учетом сил инерции и конвективного переноса тепла в пленке, выполненные Г. Н. Кружилиным и Д. А. Лабунцовым [Л. 84, 93], показывают, что при $K \equiv r/c_{рж} \Delta t > 5$ и $1 < Pr < 100$ имеется достаточно хорошее совпадение более точных решений с решением Нуссельта. Различие в коэффициентах теплоотдачи составляет всего лишь несколько процентов и может не учитываться при практических расчетах.

Только при больших температурных напорах или в околоскритической области, где $r/c_{рж}$ резко уменьшается, коэффициент теплоотдачи значительно увеличивается по сравнению с α , вычисляемым по уравнению Нуссельта.

Есть различия и для малых чисел Прандтля (жидкие металлы). В этом случае теплоотдача в широком интервале температурных напоров меньше, чем вычисленная по формулам Нуссельта (см. § 12-6).

Решение Нуссельта не учитывает переменности физических параметров конденсата. Согласно [Л. 94] для учета зависимости коэффициентов теплопроводности λ и вязкости μ от температуры правую часть формул (12-12) или (12-13) нужно умножить на величину $\epsilon_t = [(\lambda_c/\lambda_n)^3 (\mu_n/\mu_c)]^{1/8}$, где индексы «с» и «н» означают, что данный коэффициент нужно выбирать соответственно по температуре поверхности стенки или температуре насыщения. При этом параметры, входящие в формулы (12-12) и (12-13), следует брать по температуре насыщения.

Согласно опытным данным Н. В. Зозули [Л. 50 и др.] поправка ϵ_t достаточно хорошо учитывает влияние переменности физических свойств конденсата на теплоотдачу; по своим числовым значениям она близка к поправке $(Pr_n/Pr_c)^{0.25}$. При выводе уравнений (12-12) и (12-13) не учитывалось влияние волнового движения пленки. П. Л. Капица [Л. 65] полагал, что волновое движение пленки имеет установившийся периодический характер, описываемый для любого сечения x синусоидальным распределением толщины пленки во времени. Он получил, что при волновом режиме эффективная толщина слоя δ_{eff} , которая должна быть введена в уравнение (12-9), меньше, чем δ , вычисляемая по уравнению Нуссельта. Падение терми-

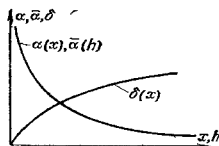


Рис. 12-5. Изменение коэффициента теплоотдачи и толщины ламинарно текущей пленки конденсата вдоль вертикальной стенки.

ческого сопротивления R_k при малой толщине пленки обгоняет рост R_k при большой ее толщине. При этом средний коэффициент теплоотдачи возрастает на 21% по сравнению с α , вычисленным по формуле (12-13).

Пленка имеет сложный волновой характер движения, зависящий от числа Re и других факторов [Л. 133]. Согласно Д. А. Лабунцову [Л. 94] поправка на волновое течение с достаточной точностью есть функция только числа Рейнольдса:

$$\epsilon_v = Re^{0,04}.$$

При малых Re поправка ϵ_v близка к единице. По мере увеличения Re величина ϵ_v возрастает и при $Re=400$ $\epsilon_v=1,27$. Число Рейнольдса относится к нижнему по ходу движения конденсата сечению пленки.

Таким образом, для расчета средних коэффициентов теплоотдачи при конденсации практически неподвижного чистого пара на вертикальных поверхностях может быть использована формула

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_N \epsilon_i \epsilon_v. \quad (12-14)$$

В формуле (12-14) $\bar{\alpha}_N$ — коэффициент теплоотдачи, вычисляемый по формуле Нуссельта (12-13) при отнесении всех физических параметров конденсата к температуре насыщения.

Уравнение Нуссельта (12-13) и уравнение (12-14) могут быть приведены к безразмерному виду. Выбрав в качестве определяемой величины $Re = \alpha \Delta t h / r_{\mu ж}$, получим:

$$Re = 0,943 Z^{3/4},$$

где

$$Z = Ga^{1/3} \frac{\lambda_{ж} \Delta t}{r_{\mu ж}}, \quad Ga = \frac{g h^3}{\nu_{ж}^2},$$

индекс «ж» обозначает, что в безразмерные величины входят физические параметры конденсата.

При приведении формулы (12-14) к безразмерному виду, полагая, что $\epsilon_i^{1,04} \approx \epsilon_i$ и учитывая, что $\epsilon_v = Re^{0,04}$, получаем [Л. 94]:

$$Re_n = 0,95 Z_n^{0,78} \epsilon_i. \quad (12-15)$$

Индекс «н» показывает, что физические параметры конденсата, входящие в числа Re и Z , выбираются по температуре насыщения. Поправка ϵ_v входит в уравнение (12-15) в неявном виде. На рис. 12-6 формула (12-15) сопоставлена с опытными данными.

Если задана плотность теплового потока $\bar{q}_c$, то формулу (12-14) удобнее использовать в преобразованном виде. Из уравнений $\alpha = \lambda_{ж} / \delta$ и $\bar{w} = g \delta^3 / 3 \nu_{ж}$, приняв $\epsilon_v = 1,21$, можно получить:

$$\left[\frac{\alpha}{\lambda_{ж}} \left(\frac{\nu_{ж}^2}{g} \right)^{1/3} \right] = 0,85 Re_n^{-1/3} \epsilon_i, \quad (12-16)$$

где $Re_n = \bar{q}_c x / r_{\mu ж}$. Здесь средняя плотность теплового потока $\bar{q}_c$ зависит от x .

Турбулентное течение пленки. При $Re \geq 400$ течение в пленке становится турбулентным. В верхней же части пленки, где $Re < 400$, течение продолжает оставаться ламинарным. На стенке будет иметь место смешанное течение конденсата.

Без учета теплоты переохлаждения, диссипации механической энергии и при отсутствии в жидкости внутренних источников теплоты пере-

нос тепла через пленку конденсата происходит в условиях постоянной плотности теплового потока поперек пленки, т. е

$$q = q_c = \text{const} \neq f(y) \text{ или } \partial q / \partial y = 0; \quad (a)$$

здесь y — координата, нормальная к поверхности стенки (рис. 12-2). В этом отличие, например, от рассмотренного ранее теплообмена при течении однородной жидкости в трубах, где q изменяется от наибольшего значения на твердой стенке до нуля на оси трубы (при неизменных по периметру поперечного сечения граничных условиях).

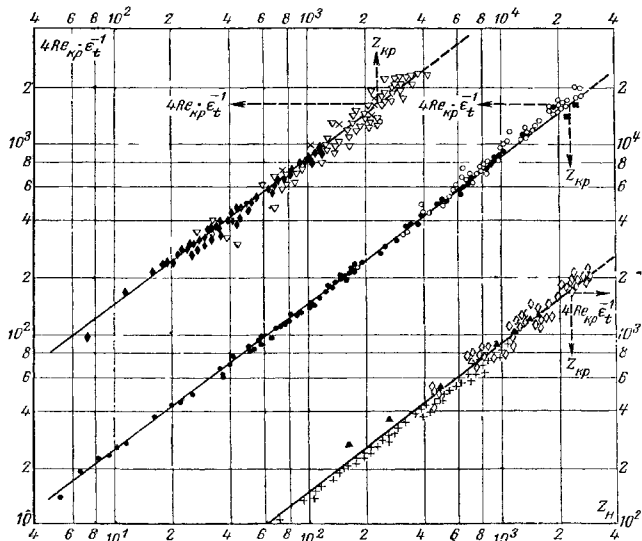


Рис 12-6 Теплоотдача при пленочной конденсации неподвижного пара на вертикальной поверхности при ламинарном течении пленки.

Локальный коэффициент теплоотдачи при пленочной конденсации может быть найден на основе уравнений (a) и

$$q = (\lambda_{\kappa} + \rho_{\kappa} c_{p\kappa} \epsilon_q) \frac{dt}{dy} = \lambda_{\kappa} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_\tau} \frac{\epsilon_s}{\nu_m} \right) \frac{dt}{dy};$$

$$\int_{t_c}^{t_{\kappa}} dt = t_{\kappa} - t_c = q \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda_{\kappa} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_\tau} \frac{\epsilon_s}{\nu_m} \right)};$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha = q_c / (t_{\kappa} - t_c)$, получаем:

$$\alpha = \frac{1}{\int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda_{\kappa} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_\tau} \frac{\epsilon_s}{\nu_m} \right)}}. \quad (12-17)$$

Таким образом, определение коэффициента теплоотдачи сводится к вычислению интеграла, стоящего в знаменателе уравнения (12-17). Эти вычисления были проделаны Д. А. Лабунцовым. При этом использовались уравнения для коэффициента турбулентного обмена ϵ_s , предложенные Линем и Шлингером. Было принято, что физические параметры конденсата постоянны и $\epsilon_0 = \epsilon_s$ (т. е. $Pr_T = 1$). Результаты интегрирования аппроксимированы в интервалах $1 \leq Pr_n \leq 25$ и $1,5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 6,9 \cdot 10^4$ уравнением

$$\frac{\alpha}{\lambda_m} \left(\frac{v_m^2}{g} \right)^{1/3} = 0,0325 Re^{0,25} Pr^{0,5}, \quad (12-18)$$

где

$$\frac{\alpha}{\lambda_m} \left(\frac{v_m^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{Nu}{Ga^{1/3}};$$

здесь α — местный коэффициент теплоотдачи.

При расчете средней теплоотдачи турбулентного течения нужно учесть, что в верхней части стенки на ламинарном участке уже образовался определенный слой конденсата.

В случае постоянных физических параметров теплоотдача ламинарного участка описывается уравнением (12-15), где $\epsilon_l = 1$:

$$Re = 0,95 Z^{0,78}.$$

При этом величине $Re_{кр} = 400$ соответствует

$$Z_{кр} = \left(Ga^{1/3} \frac{\lambda_m \Delta t}{r_{1m}} \right)_{кр} = 2300.$$

Формула (12-7') в безразмерном виде

$$\frac{\alpha}{\lambda_m} \left(\frac{v_m^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{dRe}{dZ}.$$

Учитывая уравнение (12-18), получаем:

$$\frac{dRe}{dZ} = 0,0325 Re^{0,25} Pr^{0,5}.$$

Разделив в последнем уравнении переменные Re и Z (полагаем, что $Pr = \text{const}$) и проинтегрировав в пределах от $Z_{кр}$ до Z и соответственно от $Re_{кр}$ до Re , получим:

$$\frac{4}{3} (Re^{3/4} - Re_{кр}^{3/4}) = 0,0325 Pr^{0,5} (Z - Z_{кр}).$$

Решив это уравнение относительно Re и полагая $Re_{кр} = 400$, $Z_{кр} = 2300$, получаем следующее уравнение:

$$Re = \{89 + 0,024 Pr^{0,5} (Z - Z_{кр})\}^{4/3}. \quad (12-19)$$

Уравнение (12-19) описывает среднюю теплоотдачу для вертикальной поверхности, на которой имеются ламинарный и турбулентный участки течения конденсата.

Для учета зависимости физических параметров от температуры коэффициент 0,0325 в формуле (12-18) или коэффициент 0,024 в формуле (12-19) должен быть умножен на поправку $(Pr_n/Pr_c)^{0,25}$, где индексы «н» и «с» означают, что число Прандтля конденсата выбирается соответственно по температурам насыщения и стенки. При этом все остальные физические параметры конденсата, входящие в уравнения (12-18) и (12-19), должны выбираться по температуре насыщения.

С учетом сделанных замечаний формула для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации чистого неподвижного пара на вертикальной поверхности и смешанном течении пленки конденсата принимает следующий вид [Л. 94]:

$$Re_n = [89 + 0,024 (Pr_n / Pr_c)^{0,25} Pr_n^{0,5} (Z - 2300)]^{4/3}. \quad (12-20)$$

Если задана плотность теплового потока $\bar{q}_c$, то, учитывая, что $Re = \bar{q}_c h / r_{\mu ж}$, формулу (12-20) удобнее применять в следующем преобразованном виде:

$$\left[\frac{\alpha}{\lambda_{ж}} \left(\frac{v_{ж}^2}{g} \right)^{1/3} \right]_n = \frac{Re_n}{2300 + 41 Pr_n^{0,5} (Re_n^{3/4} - 89) (Pr_n / Pr_c)^{0,25}}. \quad (12-21)$$

Определяющей температурой является температура насыщения t_n (исключая Pr_c), определяющим размером — высота стенки h . Все физические параметры берутся для конденсата.

Если давление пара велико и плотность пара соизмерима с плотностью конденсата, в уравнении движения член $\rho_{ж} g$ заменяют на $g (\rho_{ж} - \rho_n)$.

Эта замена приводит к тому, что в расчетных уравнениях как для турбулентного, так и для ламинарного течения пленки вместо числа Галилея $Ga = gh^3 / \nu_{ж}^2$ появляется число Архимеда

$$Ar = \frac{gh^3}{\nu_{ж}^2} \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_{ж}} \right).$$

В частности $(\alpha / \lambda_{ж}) (v_{ж}^2 / g)^{1/3}$ в этом случае следует записать так:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{ж}} \left[\frac{v_{ж}^2}{g \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_{ж}} \right)} \right]^{1/3},$$

и вместо $Z = Ga^{1/3} (\lambda_{ж} \Delta t / r_{\mu ж})$ будет:

$$Z = Ar^{1/3} \frac{\lambda_{ж} \Delta t}{r_{\mu ж}} = \left[\frac{gh^3}{\nu_{ж}^2} \left(1 - \frac{\rho_n}{\rho_{ж}} \right) \right]^{1/3} \frac{\lambda_{ж} \Delta t}{r_{\mu ж}}. \quad (12-22)$$

Индексы «ж» и «п» по-прежнему обозначают, что данная величина отнесена соответственно к жидкой и паровой фазе.

На графике рис. 12-7 формула (12-20) сопоставлена с опытными данными.

На основе уравнений (12-14) и (12-19) составлена номограмма (рис. 12-8) для определения среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации водяного пара на вертикальных поверхностях. Номограмма позволяет найти α , если известны высота h поверхности теплообмена, температурный напор $\Delta t = t_n - t_c$ и температура насыщения пара.

Б. Горизонтальная труба

Полученные ранее в этом параграфе формулы справедливы при конденсации пара на вертикальных плоских стенках. В случае наклонной стенки в исходное уравнение движения вместо g необходимо ввести проекцию вектора ускорения силы тяжести на ось Ox :

$$g_x = g \cos \varphi;$$

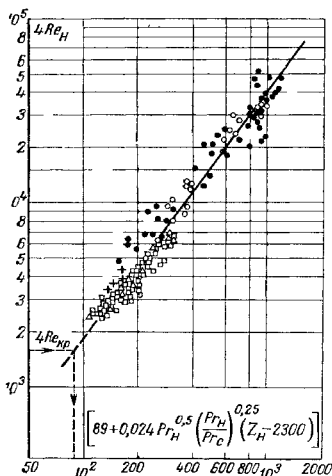


Рис 12-7 Теплоотдача при пленочной конденсации неподвижного пара на вертикальной поверхности при смешанном (ламинарном и турбулентном) течении пленки конденсата

+ — вода, $h=3,66$ м (Майсенбург); □ — вода, $h=6,1$ м (Стробе); ○ — вода, $h=2,9$ м (Саликов), △ — вода, $h=3,66$ м (Гейбхард); ● — диффузия (Баджер).

Уравнение (12-24) получено при тех же упрощающих задачу допущениях, что и формула (12-13).

Как было сказано ранее, при $K > 5$ и $Pr > 1$ можно не учитывать инерционные силы и конвективный перенос тепла. Переменность физических параметров конденсата может быть учтена ранее введенным мно-

здесь φ — угол, образованный направлением силы тяжести и осью координат Ox ; ось Ox ориентирована по ходу течения пленки.

В результате для наклонных стенок получается следующая формула:

$$\alpha_{\text{накл}} = \alpha_{\text{верт}} \sqrt{\cos \varphi}. \quad (12-23)$$

Для криволинейной поверхности, в частности для горизонтального цилиндра, угол φ будет переменной величиной. Учитывая это и принимая, что $\delta \ll d$, где d — диаметр круглого цилиндра, Нуссельт получил следующую формулу для расчета среднего по наружной окружности трубы коэффициента теплоотдачи при условии ламинарного течения пленки конденсата:

$$\bar{\alpha} = 0,728 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 g r}{\mu_{\text{ж}} (t_{\text{н}} - t_{\text{с}}) d}}. \quad (12-24)$$

Формула (12-24) отличается от формулы (12-13) для вертикальной стенки тем, что коэффициент пропорциональности вместо 0,943 равен 0,728 и в качестве характерного размера вместо h вводится d .

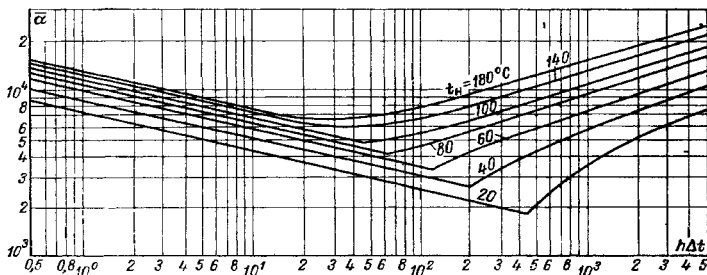


Рис. 12-8 График для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при пленочной конденсации неподвижного пара на вертикальной поверхности.

$\bar{\alpha}$ — ккал/(м² · ч · К), h — м; Δt — °С; 1 ккал/(м² · ч · К) = 4,16 Вт/(м² · К).

жителем ϵ_t ; при этом физические параметры конденсата, входящие в формулу (12-24), выбираются из справочных пособий по температуре насыщения.

Для развития волнового течения необходим определенный участок течения протяженностью в несколько длин волн. Поэтому на трубах небольших диаметров волновое течение не успевает развиваться. Поправку следует вводить только тогда, когда диаметр трубы удовлетворяет следующему соотношению:

$$d > 20(\delta/\rho_{\text{ж}}g)^{0.5}. \quad (12-25)$$

Формула (12-24) получена при условии $t_c = \text{const}$. При $q_c = \text{const}$ коэффициент пропорциональности, равный 0,728, должен быть заменен на 0,693 [Л. 100].

12-3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПАРА ВНУТРИ ТРУБ

При конденсации в трубах паровой объем ограничен стенками трубы. Трубы могут быть достаточно длинными и в них может конденсироваться большое количество пара. Возникает направленное движение пара, причем скорости последнего могут быть очень велики (до 100 м/с и более). При этом силы трения на границе между паром и конденсатом могут быть значительными.

Если направление движения пара совпадает с направлением течения конденсата под действием сил тяжести, то вследствие трения течение пленки убыстряется, толщина ее уменьшается и коэффициент теплоотдачи увеличивается. Если направление движения пара противоположно направлению течения конденсата, то пленка может замедляться; толщина ее при этом увеличивается, а теплоотдача уменьшается. Повышение скорости пара может привести к тому, что пленка будет увлечена паром и частично сорвана с поверхности стенки. Теплоотдача при этом увеличивается.

В зависимости от величин сил тяжести и сил трения можно различать три основных случая:

силы тяжести существенно преобладают над динамическим воздействием пара, и последний можно считать практически неподвижным; подобного рода задачи были рассмотрены в предыдущем параграфе;

силы тяжести и силы динамического воздействия пара на пленку соизмеримы;

динамическое воздействие пара на пленку конденсата преобладает над силами тяжести; при этом конденсат движется, увлекаемый паром, и теплоотдача практически не зависит от положения трубы в пространстве.

Конечно, между этими режимами нет резкой границы.

При конденсации в трубах скорость пара не остается постоянной, так как вдоль течения расход пара убывает (но возрастает расход конденсата). Наибольшую величину скорость пара имеет на входе в трубу. Ее среднее значение на входе может быть достаточно просто вычислено, если в трубу втекает сухой насыщенный пар, который полностью конденсируется в ней. Как следует из соотношения

$$Q = \bar{q}_c \pi d l = r G_{\text{н}} = r \rho_{\text{н}} \bar{w}_{\text{н}} \frac{\pi d^2}{4}, \quad (12-26)$$

в котором теплота переохлаждения конденсата не учитывается, средняя скорость пара на входе $\bar{w}_{п0}$ будет:

$$\bar{w}_{п0} = \frac{4G_{п}}{\rho_{п}\pi d^2} = \frac{4Q}{r\rho_{п}\pi d^2}; \quad (12-27)$$

здесь d и l — внутренний диаметр и длина трубы.

По мере конденсации пара часть поперечного сечения трубы заполняется конденсатом, причем средние скорости пара и жидкой фазы различны.

В расчетах удобно оперировать постоянными и заданными значениями скорости. Такой величиной может являться так называемая скорость циркуляции $w_{ц}$, определяемая следующим образом:

$$w_{ц} = \frac{G_{см}}{\rho_{жл}f} = \frac{4G_{см}}{\pi d^2}; \quad (12-28)$$

здесь $G_{см} = G_{п} + G_{ж}$ — суммарный массовый расход пара и конденсата.

Скорость $w_{ц}$ является условной величиной. Она равна действительной скорости потока только в том сечении, где конденсат полностью заполняет поперечное сечение трубы, т. е. где $G_{см} = G_{ж}$ и $G_{п} = 0$.

В зависимости от условий процесса пар может конденсироваться в трубе как полностью, так и частично. При полной конденсации скорость пара на выходе из трубы равна нулю и выпар отсутствует. Если труба достаточно длинная и процесс конденсации достаточно интенсивен, то в концевой части трубы все ее сечение может быть заполнено конденсатом.

Течение конденсата и пара может быть как ламинарным, так и турбулентным. На входе в трубу течение пара может быть турбулентным. По мере конденсации пара скорость его уменьшается и турбулентное течение может перейти в ламинарное. Если происходит полная

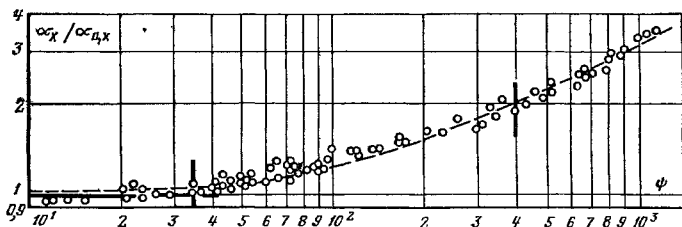


Рис. 12-9. Теплоотдача при конденсации водяного пара в вертикальной трубе; ламинарное течение пленки конденсата.

конденсация, в конце участка конденсации аксиальная скорость пара будет равна нулю. В то же время расход конденсата вдоль трубы непрерывно увеличивается и течение конденсата может перейти в турбулентное. При определенных условиях может иметь место и срыв капель с поверхности пленки.

Сочетание перечисленных условий делает задачу о теплообмене при конденсации пара в трубе очень сложной и затрудняет строгое и

полное решение. К настоящему времени в этой области имеется много невыясненных вопросов. В частности, не ясны границы различных режимов. Многие исходные положения, используемые в теоретических решениях, недостаточно проверены опытами и т. п. Ввиду этого конкретные сведения о рассматриваемом процессе и расчетные рекомендации, которые в дальнейшем приводятся в настоящем параграфе, довольно ограничены.

Ламинарное течение пленки конденсата. На рис. 12-9 представлены результаты проведенного на кафедре ТОТ МЭИ опытного исследования теплоотдачи при конденсации насыщенного водяного пара в вертикальной трубе [Л. 63]. Вход пара сверху. График рис. 12-9 показывает зависимость относительных коэффициентов теплоотдачи α/α_{0x} от

$$\psi = \frac{\alpha_n}{\rho_{жк}} \left(\frac{v_n}{v_{жк}} \right)^2 \frac{Re_{nd}^2}{Ga_{жд}^{2/3}} Re_{жк}^{-0,28} \varepsilon_L,$$

где $Re_{nd} = \bar{w}_n d / \nu_n$; $Ga_{жд} = g d^3 / \nu_{жк}^2$; $Re_{жк} = q_c x / r_{жк}$; $\bar{w}_n$ — средняя в сечении x скорость пара. Физические параметры пара и конденсата, что соответственно обозначено индексами «п» и «жк», выбирались по температуре насыщения.

Коэффициенты теплоотдачи α_x являются средними на сравнительно небольших участках трубы, что в первом приближении позволяет считать их местными. Значения $\alpha_{0,x}$ вычислялись по формуле для практически неподвижного пара, конденсирующегося на вертикальной стенке.

Относительный коэффициент теплоотдачи может быть вычислен по формуле

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{0x}} = \sqrt{0,005\psi + \sqrt{(0,005\psi)^2 + 1}}. \quad (12-29)$$

Вид уравнения (12-29) определялся теоретически при некоторых упрощающих предположениях, а постоянные уточнялись по данным опытов с водяным паром примерно атмосферного давления. Числа Re_{nd} изменялись в опытах от 1800 до $17 \cdot 10^3$, этому соответствовала скорость пара от 3,6 до 33,5 м/с. Температурный напор изменялся от 8 до 60 К.

При $\psi \leq 35$ расчет можно вести по формулам для неподвижного пара.

Турбулентное течение конденсата. Теплообмен при турбулентном течении пленки конденсата рассматривался в работах [Л. 10, 91, 121 и др.]. В теоретических и экспериментальных исследованиях [Л. 10] изучалась теплоотдача при преобладающем влиянии сил трения пара. В качестве основы теоретического исследования была использована аналогия между теплообменом и сопротивлением трения; в результате была получена полуэмпирическая формула, описывающая местные коэффициенты теплоотдачи:

$$Nu_{dn} = c Re_{дн}^{0,8} Pr_{жк}^{0,43} \sqrt{1 + x \left(\frac{\rho_{жк}}{\rho_n} - 1 \right)_n}, \quad (12-30)$$

где x — массовое расходное паросодержание в рассматриваемом сечении.

Среднее значение коэффициентов теплоотдачи для режима неполной конденсации пара из пароводяной смеси определяется формулой

$$\overline{Nu}_{дн} = c Re_{дн}^{0,8} Pr_{жн}^{0,43} \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + x_1 \left(\frac{Pr_{жн}}{Pr_{пн}} - 1 \right)_н} + \sqrt{1 + x_2 \left(\frac{Pr_{жн}}{Pr_{пн}} - 1 \right)_н} \right], \quad (12-31)$$

где x_1 и x_2 — массовые расходные паросодержания во входном и выходном сечении рассматриваемого участка трубы: $x_1 = (G_{пн}/G_{см})_{вх}$ и $x_2 = (G_{пн}/G_{см})_{вых}$. Для стальных труб $c=0,024$, для медных — $c=0,032$. В формулах (12-30) и (12-31)

$$\overline{Nu}_{дн} = \frac{\overline{\alpha} d}{\lambda_{жн}}; \quad Nu = \frac{\alpha d}{\lambda_{жн}};$$

$$Re_{дн} = \frac{w_{пн} d}{\nu_{жн}} = \frac{4 G_{см}}{\pi d \mu_{жн}}.$$

Все физические параметры выбираются по температуре насыщения. Индексы «ж» и «п» по-прежнему обозначают, что данная величина является физическим параметром соответственно жидкости и пара.

Уравнения (12-30) и (12-31) получены для общего случая, когда $1 \geq x_1 > 0$ и $1 > x_2 \geq 0$. В зависимости от значений x_1 и x_2 можно выделить частные режимы: а) $x_1=1$; $x_2=0$ — полная конденсация сухого пара в трубе; б) $x_1=1$; $1 > x_2 > 0$ — частичная конденсация пара; в) $1 > x_1 > 0$; $x_2=0$ — полная конденсация пара из пароводяной смеси, поступившей

в трубу. При $x_1=x_2=0$ формулы (12-30) и (12-31) принимают структуру уравнений, используемых при расчете теплообмена однородных жидкостей.

На рис. 12-10 формула (12-31) сопоставлена с опытными данными [Л. 10]. Опытные данные получены при $Re_{дн} > 5 \times 10^3$; $Pr_{жн,пн} \approx 1$; $1 > x_1 > 0$; $1 > x_2 > 0$; $p_{пн} = 1,22 \div 8,82$ МПа.

Если $Re_{дн} > 5 \cdot 10^3$, угол наклона трубы не оказывает влияния на интенсивность теплоотдачи. Это свидетельствует о преобладающем влиянии динамического воздействия пара по сравнению с силами тяжести.

Рис. 12-10. Теплоотдача при конденсации водяного пара в трубе в условиях турбулентного течения конденсата.

● — $d=16$ мм; ○ — $d=20$ мм.

Очень сложен процесс теплоотдачи при конденсации в горизонтальных трубах слабо движущегося пара, когда необходимо учитывать и силы тяжести, и силы трения. Эта задача приближенно решалась в [Л. 25] и других работах. Полученные формулы достаточно сложны, так как приходится учитывать то обстоятельство, что конденсат течет как вдоль трубы, так и по ее окружности. При этом режимы течения пара и конденсата на различных участках трубы могут быть неодина-

ковыми. В то же время отсутствуют данные для определения границ участков с различными режимами течения пленки. Все эти особенности процесса существенно затрудняют получение точных зависимостей.

12-4. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПАРА НА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ОДИНОЧНЫХ ТРУБАХ И ПУЧКАХ ТРУБ

В § 12-2 была рассмотрена теплоотдача при конденсации неподвижного пара на наружной поверхности одиночной горизонтальной трубы. Для промышленной практики важны данные о теплоотдаче при конденсации движущегося пара. Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, при движущемся паре теплоотдача горизонтальной трубы изменяется. В опытах [Л. 8] насыщенный пар протекал сверху вниз и поперечным потоком омывал горизонтальную трубу. Некоторые результаты опытов представлены на рис. 12-11 в виде зависимости $\alpha/\alpha_N = f(Re_n, \Delta t)$. Здесь α — опытный коэффициент теплоотдачи при конденсации движущегося пара; α_N — коэффициент теплоотдачи, вычисленный по формуле Нуссельта (12-24) для неподвижного пара; $Re_n = \bar{w}_n d / \nu_n$, где $\bar{w}_n$ — средняя скорость пара в суженном сечении канала; d — наружный диаметр трубы.

Как следует из рис. 12-11, теплоотдача увеличивается по мере увеличения числа Re_n .

Опыты [Л. 8] проводились при $p_n = (0,032 \div 0,98) 10^5$ Па; $\bar{w}_n = 0,26 \div 17,6$ м/с; $\Delta t \approx 0,6 \div 12$ К; $Re_n = 46 \div 864$ и среднем объемном содержании воздуха в паре от 0,008 до 0,017%.

В результате обобщения опытных данных [Л. 8] была получена формула для среднего коэффициента теплоотдачи:

$$\frac{\alpha}{\alpha_N} = B \left(\frac{\rho_n \bar{w}_n}{\rho_n d g} \right)^{0,08} \left(\frac{\rho_n g d^2 r}{\lambda_n \nu_n \Delta t} \right)^{-0,125}. \quad (12-32)$$

Физические параметры конденсата, входящие в эту формулу, выбираются по температуре насыщения.

Из последнего уравнения следует, что при движущемся паре коэффициент теплоотдачи слабее зависит от температурного напора, чем при неподвижном: при неподвижном паре $\alpha \sim \Delta t^{-0,25}$, при движущемся

$$\alpha \sim \Delta t^{-0,25}. \quad (12-33)$$

Конденсационные аппараты, как правило, имеют не одну трубку, а пучок труб. Трубы в пучке обычно размещаются в шахматной или коридорном порядке (см. рис. 9-8).

Процессы конденсации на наружной поверхности одиночной горизонтальной трубы и таких же труб, но собранных в пучок, различны. В случае чистого пара различие обусловлено двумя факторами: уменьшением скорости пара при его движении в пучке из-за частичной конденсации и увеличением толщины конденсатной пленки за счет последовательного стекания конденсата с трубки на трубку.

Уменьшение скорости пара по мере его продвижения через пучок приводит к последовательному уменьшению теплоотдачи при возрастании номера ряда. К такому же эффекту приводит и сток конденсата

с верхних труб на нижние. Однако сток конденсата в горизонтальном пучке имеет отличие от стока по непрерывной вертикальной стенке.

Конденсат стекает с трубки не в виде сплошной пленки, а отдельными каплями или струйками (рис. 12-12). Капли, попадая на нижележащую трубку, с одной стороны, временно утолщают пленку в месте

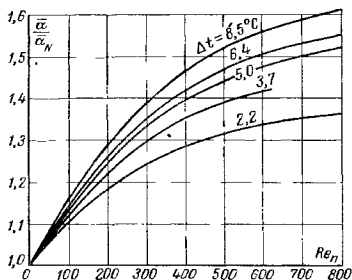


Рис. 12-11. Зависимость относительного коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}/\alpha_N$ одиночной горизонтальной трубы от числа Рейнольдса пара при $p=8,6 \cdot 10^3$ Па.

компенсируется возникающими при стоке возмущениями.

Влияние конденсата, натекающего сверху на данную трубку, может быть учтено параметром $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{G_i}{G_n}$, где $\sum_{i=1}^{n-1} G_i$ — суммарное количество конденсата, стекающего по трубе n -го ряда; G_n — количество конденсата, образующегося на рассматриваемой трубе ($i=n$) [Л. 87]. Здесь n — число рядов труб по высоте коридорного пучка или половина числа рядов труб по высоте шахматного пучка.

Опытным путем получено:

$$\frac{\bar{\alpha}_n}{\alpha_1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n G_i}{G_n} \right)^{-0,07}; \quad (12-34)$$

здесь $\bar{\alpha}_n$ — средний коэффициент теплоотдачи n -го ряда, приведенный к скорости пара и температурному напору в первом ряду труб; α_1 — средний коэффициент теплоотдачи первого ряда [Л. 191].

Если трубный пучок имеет одинаковое сечение по всей его высоте и пар в нем течет сверху вниз, то теплоотдачу можно рассчитать, используя формулы (12-32) и (12-34). Расчет усложняется тем, что коэффициент теплоотдачи для каждого горизонтального ряда труб зависит от местных значений температурного напора, давления

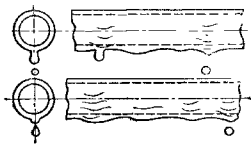


Рис. 12-12. Течение конденсата в пучке горизонтальных труб.

и скорости пара, законы изменения которых по рядам заранее неизвестны. Теплоотдачу при этом следует рассчитывать последовательно для каждого ряда труб в отдельности, начиная от первого со стороны входа пара.

Намеченный путь расчета теплоотдачи пучка очень трудоемок. Расчет можно существенно облегчить, если ввести некоторые упрощающие предположения, позволяющие получить приближенную формулу для среднего коэффициента теплоотдачи с паровой стороны.

Полагая, что температурный напор и давление пара не изменяются по высоте трубного пучка, в [Л. 7] получили следующую приближенную формулу для определения среднего для всего пучка коэффициента теплоотдачи α_n :

$$\frac{\bar{\alpha}_n}{\alpha_n} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_n} = \frac{0,84\epsilon}{[1 - (1 - \epsilon)^{0,84}] n^{0,67}} \quad (12-35)$$

В формуле (12-35) $\bar{\alpha}_1/\alpha_n$ — относительный коэффициент теплоотдачи первого ряда, вычисляемый по уравнению (12-32); n — число рядов труб по высоте коридорного пучка или половина числа рядов труб по высоте шахматного пучка; $\epsilon = (G_{вх} - G_{вых})/G_{вх}$ — степень конденсации пара; здесь $G_{вх}$ и $G_{вых}$ — массовые расходы пара на входе и на выходе из пучка.

12-5. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КАПЕЛЬНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

Капельная конденсация имеет место, если конденсат не смачивает поверхность теплообмена. В этом случае поверхность покрыта отдельными каплями.

Скоростная киносъемка с увеличением через микроскоп показывает, что малые капли растут очень быстро, затем скорость роста становится незначительной. По мере роста капли непрерывно сливаются, освобождая какую-то часть поверхности стенки. За счет многократного слияния и непрерывно идущего процесса конденсации капли увеличиваются до отрывного размера, при котором они скатываются под действием силы тяжести (или срываются движущимся паром, если скорость последней велика).

Как следует из изложенного, капельная конденсация, строго говоря, является нестационарным процессом. Однако, если осредненные во времени характеристики процесса не изменяются, то такой процесс можно рассматривать как стационарный.

При первичном соприкосновении пара с оголенной поверхностью стенки образуется адсорбционный слой; быстро идущий процесс конденсации приводит к образованию полимолекулярной жидкой пленки.

Пока пленка очень тонка, она находится в силовом молекулярном поле смежных фаз (твердой стенки и пара), в результате чего приобретает особые свойства, отличные от свойств этой же жидкости в большом объеме (вдали от границы раздела фаз). Такую пленку будем называть тонкой. Ее толщина составляет доли микрона.

В общем случае толщина пленки неодинакова по поверхности и соизмерима или меньше высоты выступов естественной шероховатости твердого тела.

Тонкая пленка находится под избыточным давлением, которое называется расклинивающим [Л. 37]. Расклинивающее давление об-

ратно пропорционально примерно кубу толщины пленки:

$$\Pi \sim \delta^{-3}.$$

При несмачивании действие расклинивающего давления проявляется в том, что поверхности тонкой пленки притягиваются друг к другу, причем тем в большей степени, чем тоньше пленка. Такому расклинивающему давлению приписывают знак минус. Локальное утонение пленки (например, на выступе стенки, в результате местных дефектов структуры твердого тела, изменения лиофобности, меньшей местной скорости конденсации и т. п.) приводит к увеличению расклинивающего давления в этом месте по сравнению с соседними. В результате жидкость быстро вытесняется на смежные участки, где и образуются первичные капли, размеры которых больше эффективного радиуса действия межмолекулярных сил [Л. 161].

При положительном расклинивающем давлении («отталкивании поверхности» тонкой пленки) имеет место пленочная конденсация (образуется толстая пленка); говорят, что поверхность тела смачивается данной жидкостью.

Поскольку при интенсивной капельной конденсации акты образования первичных капель непрерывно происходят на оголившейся поверхности стенки, можно полагать, что в среднем на стенке существует тонкая и толстая (капли) пленка. Одновременное существование тонкой пленки и видимых капель следует представлять только в динамике.

Таким образом, роль эффектов капиллярности второго рода (тонких пленок) важна для процессов образования зародышевых (первичных) капель. В крупных каплях эффекты капиллярности второго рода могут проявляться только у корня капли (на тройной границе пар — жидкость — стенка).

Известно, что равновесное давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью раздела фаз больше, чем над плоской. Конденсация пара на сферической капле с радиусом R , взвешенной в паре, может происходить только при условии, что $R > R_k$, где R_k — критический (минимально возможный) радиус кривизны поверхности раздела фаз. В случае тонкой сферической пленки необходимо учитывать и влияние ее толщины.

Разность давлений в тонком сферическом слое конденсата и в паре при учете капиллярных эффектов первого и второго рода может быть описана уравнением

$$\Delta p = p_{ж} - p_n = \frac{2\sigma}{R} - \Pi; \quad (12-36)$$

здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость — пар; R — радиус слоя.

Соответственно критическое переохлаждение пара ΔT_k в случае сферических пленок описывается уравнением

$$\Delta T_k = \frac{2\sigma T_n}{r_{пк} R_k} - \frac{\Pi T_n}{r_{пк}}. \quad (12-37)$$

Первый член правой части уравнения учитывает капиллярные эффекты первого рода (поверхностное натяжение), второй — расклинивающее давление. Если существующее переохлаждение пара ΔT боль-

ше расчетного ΔT_k , конденсация термодинамически возможна (здесь $\Delta T = T_n - T_{\text{пов}}$, где T_n и $T_{\text{пов}}$ — соответственно абсолютные температуры насыщенного пара при заданном давлении и температура слоя жидкости). Если $\Delta T < \Delta T_k$, должно происходить испарение слоя, т. е. термодинамически возникновение такого слоя нереально. При $\Delta T = \Delta T_k$ имеет место равновесное состояние системы.

В случае $\Pi \rightarrow 0$ уравнения (12-36) и (12-37) переходят в известные уравнения Лапласа и Томсона:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}; \quad (12-38)$$

$$\Delta T_k = \frac{2\sigma T_n}{r_m R_k}. \quad (12-39)$$

Как следует из уравнения (12-37), требуемое переохлаждение насыщенного пара над тонкой несмачивающей пленкой ($\Pi < 0$) будет больше, чем переохлаждение над сферической поверхностью крупной капли. Из формулы (12-37) также следует, что при конденсации во впадинах стенки ($R < 0$) требуемое переохлаждение меньше, чем при конденсации на выступах ($R > 0$). В результате при прочих равных условиях наиболее вероятными местами образования конденсированной фазы являются микровпадины тела.

В реальных условиях поверхность твердого тела не является абсолютно однородной, в частности гладкой. Даже при обработке по 7—11-му классам чистоты среднеквадратичная величина микронеровностей составляет 0,05—1,5 мкм. При этом значения местных радиусов микронеровностей могут изменяться в широких пределах.

Чем больше температурный напор $t_n - t_c$, тем больше микронеровностей способны являться центрами зародышеобразования (центрами конденсации), количество первичных капель увеличивается.

Критическое переохлаждение ΔT_k зависит также от физических свойств сред, участвующих в теплообмене. В частности, эта зависимость проявляется и для расклинивающего давления.

При конденсации паров органических жидкостей требуемая величина переохлаждения ΔT_k обычно мала. Требуемое переохлаждение для ртутного пара очень велико. Промежуточное положение занимает конденсация водяного пара. В результате интенсивное образование конденсата паров органических жидкостей при больших температурных напорах может привести к существенному заполнению поверхности стенки жидкостью и увеличению термического сопротивления (эффект, близкий по своему результату к эффекту утолщения пленки при пленочной конденсации). При конденсации ртутного пара на стальных поверхностях образуется сравнительно мало капель, конденсация идет не интенсивно; коэффициент теплоотдачи при этом может быть меньше, чем при пленочной конденсации того же пара [Л. 53].

Из сказанного ранее следует, что при капельной конденсации жидкая фаза находится в своеобразном движении. Это движение является следствием перемены сил, приложенных к жидкости. При этом важное значение имеют капиллярные силы.

Теория теплообмена при капельной конденсации основывается на статистическом описании процесса.

В общем случае на поверхности стенки в каждый момент времени существует множество капель, радиус которых изменяется от критического R_k до отрывного R_0 . Спектр размеров капель может быть описан

дифференциальной функцией распределения капель по размерам $\varphi(R) \equiv dn/dR$, м^{-3} , где dn — число капель с радиусом от R до $R+dR$, приходящееся на единицу поверхности стенки.

Если процесс капельной конденсации является квазистационарным, то $\varphi(R) = \text{const}$. Непрерывное увеличение размеров капель за счет конденсации и слияний компенсируется возникновением новых (первичных) и исчезновением крупных (достигших открытого размера).

Приращение объема капли в единицу времени за счет конденсации определяется уравнением

$$\Delta V = F \frac{dR}{dt} = F\omega(R),$$

где F — поверхность капли, обращенная в пар; $\omega(R) \equiv dR/dt$, м/с — функция скорости роста капли.

При этом выделяется теплота фазового перехода.

Будем считать каплю полусферой. Для капель с радиусами от R до $R+dR$ выделенная теплота фазового перехода, отнесенная к единице поверхности стенки и к единице времени, определяется уравнением

$$dq_R = r_{\text{ж}} 2\pi R^2 \frac{dR}{dt} dn = r_{\text{ж}} 2\pi R^2 \omega(R) \varphi(R) dR.$$

Тогда средняя плотность теплового потока будет:

$$q_c = 2\pi \int_{R_n}^{R_0} r_{\text{ж}} R^2 \omega(R) \varphi(R) dR + q_{c0}; \quad (12-40)$$

здесь член q_{c0} учитывает теплоту, выделившуюся при образовании первичных капель. Обычно эта теплота пренебрежимо мала. Температурные напоры при капельной конденсации обычно также невелики, что позволяет не учитывать и теплоту переохлаждения капель относительно t_n .

Таким образом, для теоретического расчета q_c или $\alpha = q_c/\Delta t$ необходимо знать функции роста капель $\omega(R)$ и распределения по размерам $\varphi(R)$ [Л. 162]. Эти функции ищутся для различных условий как аналитически, так и экспериментально. Например, согласно опытным данным и расчетам скорость роста полусферической капли, когда основным термическим сопротивлением является термическое сопротивление теплопроводности капли, определяется уравнением

$$\frac{dR}{dt} \approx 2 \frac{\lambda_{\text{ж}}(t_n - t_c)}{r_{\text{ж}} R}.$$

Помимо описанного подхода для определения коэффициентов теплоотдачи используется непосредственный эксперимент.

Средний коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации неподвижного пара может быть описан следующими уравнениями [Л. 56]:

при $Re_* = 8 \cdot 10^{-4} \div 3,3 \cdot 10^{-3}$

$$\overline{Nu} = 3,2 \cdot 10^{-4} Re_*^{-0,84} \Pi_*^{1,16} Pr^{1/3}; \quad (12-41)$$

при $Re_* = 3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \div 3,5 \cdot 10^{-2}$

$$\overline{Nu} = 5 \cdot 10^{-6} Re_*^{-1,57} \Pi_*^{1,16} Pr^{1/3}; \quad (12-42)$$

Здесь

$$\overline{Nu} = \frac{\alpha R_K}{\lambda_{жк}} = \frac{\alpha \Delta T_{жк}}{\lambda_{жк} \rho_{жк} (t_{жк} - t_c)}; \quad Re_* = \frac{\omega_* R_K}{\nu_{жк}} = \frac{\lambda_{жк} (t_{жк} - t_c)}{r \rho_{жк}};$$

$$\Pi_K = \frac{\xi \sigma R_K (t_{жк} - t_c)}{\rho_{жк} \nu_{жк}^2} = \frac{2 \xi \sigma^2 T_{жк}}{r \rho_{жк}^2 \nu_{жк}^2}; \quad Pr = \frac{\nu_{жк}}{\alpha_{жк}}.$$

Физические параметры конденсата в формулах (12-41) и (12-42) выбираются по температуре насыщения $t_{жк}$.

Масштабами линейных размеров и скорости являются критический радиус R_K , определяемый формулой¹ (12-39), и условная скорость роста конденсированной фазы при отводе тепла фазового перехода теплопроводностью

$$\omega_* = \lambda_{жк} \Delta t / r \rho_{жк} R_K, \text{ м/с.}$$

Безразмерное число Π_K учитывает влияние капиллярных сил. Входящая в него величина $\xi(t_{жк} - t_c)$ отражает зависимость поверхностного натяжения от температуры. Здесь

$$\xi = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)$$

— температурный коэффициент поверхностного натяжения. В результате число Π_K можно трактовать как отношение термокапиллярных сил к силам вязкости. Его можно представить следующим образом:

$$\Pi_K = \xi (t_{жк} - t_c) \frac{\sigma R_K}{\rho_{жк} \nu_{жк}^2} = \xi (t_{жк} - t_c) Lp;$$

здесь $Lp = \sigma R_K / \rho_{жк} \nu_{жк}^2$ — число Лапласа.

На рис. 12-13 формулы (12-41) и (12-42) сопоставлены с опытными данными. Опытные данные получены при конденсации насыщенного водяного пара на вертикальных стенках высотой до 0,61 м вертикальных трубках и горизонтальном пучке труб. Значения критерия Π_K в использованных опытных данных изменялись от $0,98 \cdot 10^{-2}$ до $4,5 \cdot 10^{-2}$, число Прандтля изменялось от 1,75 до 3,65; давление пара $p_{жк} \approx (0,12 \div 1) \cdot 10^6$ Па.

Как следует из формул (12-41) и (12-42), для расчета коэффициента теплоотдачи достаточно знать температуру насыщения и температурный напор. На рис. 12-14 представлена номограмма, с помощью которой можно определить коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации неподвижного насыщенного водяного пара. Номограмма получена путем соответствующего пересчета и графического представления формул (12-41) и (12-42). Согласно формулам (12-41) и (12-42) при $Re_* < 3,3 \cdot 10^{-3}$ $\alpha \sim \Delta t^{0,16}$ и $q_c \sim \Delta t^{1,16}$; при $Re_* > 3,3 \cdot 10^{-3}$ $\alpha \sim \Delta t^{-0,57}$ и $q_c \sim \Delta t^{0,43}$.

Из последних соотношений и из рис. 12-14 следует, что при малых температурных напорах коэффициент теплоотдачи возрастает по мере увеличения Δt , а при больших Δt , наоборот, уменьшается. Переход от положительной зависимости $\alpha(\Delta t)$ к отрицательной происходит при Re_{**} равном примерно $3,3 \cdot 10^{-3}$.

Изменение характера зависимости $\alpha(\Delta t)$ можно объяснить следующим образом. При $Re_* < 3,3 \cdot 10^{-3}$ скорость конденсации лимитируется

¹ В начальный момент роста пленки или капли разность температур поверхности жидкости и поверхности стенки незначительна. Вследствие этого в уравнениях (12-41) и (12-42) $T_{нов}$ заменено на T_c .

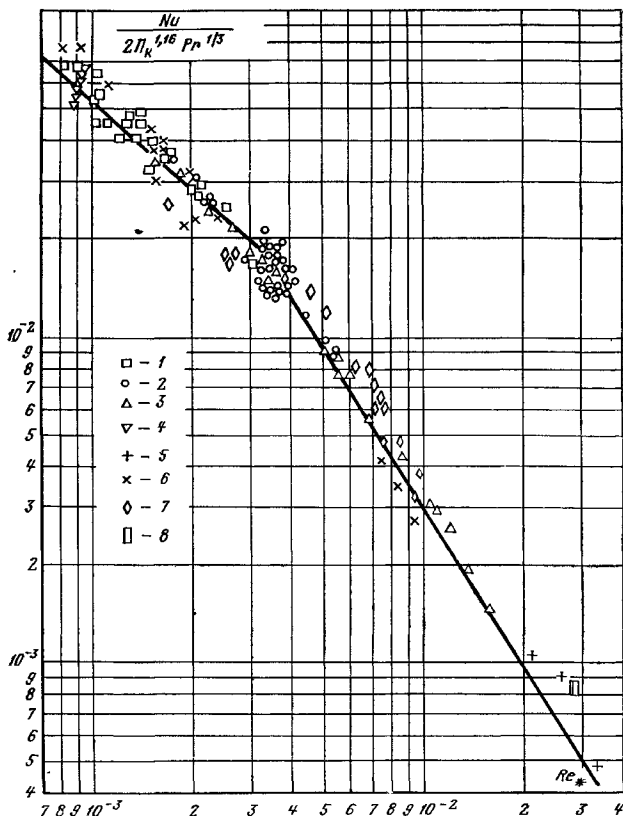


Рис 12-13 Теплоотдача при каплярной конденсации пара.

□ — Гнам, ○ — Нэгл и др. △ — Ши и Крейз, ▽ — Лапшин и Конфедератов; + — Шмидт и др.; × — Кутателадзе, ◇ — Исаченко и Солодов; □ — Мицушина и др.

прежде всего необходимостью пересыщения пара. Чем больше Δt , тем больше пересыщение пара и тем интенсивнее происходит конденсация. При этом термическое сопротивление конденсата сравнительно невелико.

Повышение скорости конденсации с ростом Δt и увеличение количества конденсированной фазы на поверхности теплообмена приводят к тому, что термическое сопротивление конденсата начинает оказывать большее влияние на процесс теплоотдачи.

При $Re_* > 3,3 \cdot 10^{-3}$ скорость конденсации прежде всего зависит от термического сопротивления образовавшегося конденсата. Происходит своеобразный кризис капельной конденсации.

Теплоотдача при капельной конденсации начинает зависеть от скорости пара при сравнительно небольшой ее величине.

В то же время интенсифицирующее влияние скорости пара, приводящее к появлению большого количества конденсата на поверхности стенки, может ускорить кризис капельной конденсации.

На рис. 12-15 показана зависимость средних коэффициентов теплоотдачи от скорости пара. Водяной пар атмосферного давления конденсировался на вертикальной пластине, протекая вдоль нее сверху вниз. На графике $\Pi_w = 2\rho_p \bar{w}^2 / \rho_{ж} (g v_{ж})^{2/3}$; $\bar{w}_п$ — средняя скорость пара на расчетном участке; α_0 — коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по формуле (12-41).

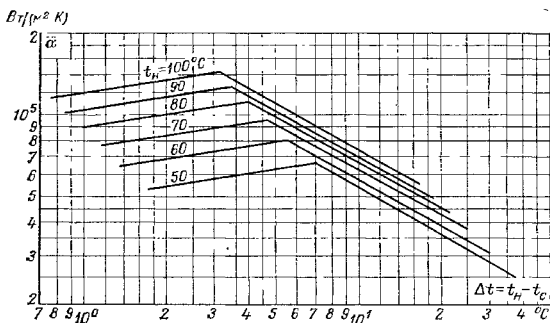


Рис. 12-14. Коэффициенты теплоотдачи при капельной конденсации водяного пара в зависимости от температуры насыщения и температурного напора. При положительной зависимости от Δt : $\alpha = 2,61 \cdot 10^4 t_n^{4/3} \Delta t^{0,16}$; при отрицательной — $\alpha = 2,79 \cdot 10^4 t_n^{0,5} \Delta t^{-0,57}$.

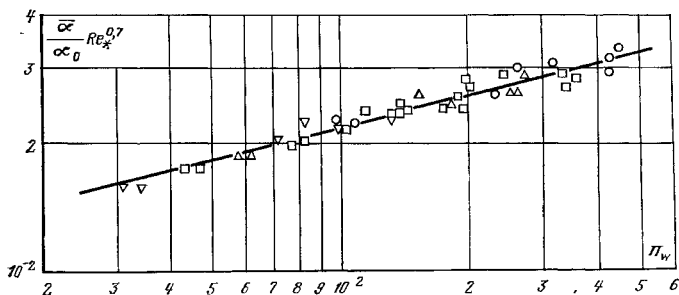


Рис. 12-15. Зависимость теплоотдачи при капельной конденсации от скорости пара. Обработка опытных данных Шк и Крейза при $Re_* = 8 \cdot 10^{-4} - 3,3 \cdot 10^{-2}$; O — длина пластины 117 мм; □ — 234 мм; △ — 351 мм; ▽ — 468 мм; ◇ — 585 мм.

Опытные данные, представленные на рис. 12-15, получены при $Re_* = 8 \cdot 10^{-4} \div 3,3 \cdot 10^{-3}$. Они могут быть описаны уравнением

$$\frac{\bar{a}}{a_0} = 6,9 \cdot 10^{-3} Re_*^{-0,7} \Pi_w^{0,25}; \quad (12-43)$$

здесь определяющей является температура насыщения.

Из формулы (12-43) следует, что $\bar{a} \sim \omega_n^{0,5}$ и $\bar{a} \sim \Delta t^{-0,44}$. Согласно опытам, данные которых представлены на рис. 12-15, $\bar{a}/a_0 > 1$. Максимальное увеличение теплоотдачи составляло $\bar{a}/a_0 = 3,5$ ($a = 425 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К)) и имело место при $\Delta t = 1$ К и $\bar{\omega}_n = 6,6$ м/с.

Интенсифицирующее воздействие скорости пара проявляется и при $Re_* > 3,3 \cdot 10^{-3}$. Однако при значительных температурных напорах средний коэффициент теплоотдачи при конденсации движущегося пара мало отличается от a_0 .

Опыты показывают, что при капельной конденсации стекание конденсата с верхней трубки на трубку, лежащую под ней, приводит к незначительному уменьшению коэффициента теплоотдачи. В интервале значений $\sum_n G_i / G_n$ от 2 до 12 теплоотдача понижается примерно на 10—15%.

Интенсивность теплоотдачи при капельной конденсации очень сильно зависит от примеси неконденсирующихся газов (см. % 14-6).

12-6. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

Конденсация перегретого пара будет иметь место, если температура поверхности стенки меньше температуры насыщения. Если же $t_c > t_n$, то конденсация отсутствует и происходит теплообмен однофазной жидкости (пара).

При конденсации перегретого пара температура его у стенки постепенно снижается и конденсируется по существу насыщенный пар. Теплота перегрева отдается при этом поверхности конденсата обычным конвективным путем. Таким образом, конденсируясь, перегретый пар передает конденсату теплоту фазового перехода и теплоту перегрева. Кроме того, пар, не сконденсировавшийся в теплообменнике, отдает часть своей теплоты перегрева путем обычного конвективного теплообмена; при этом температура пара снижается.

В случае полной конденсации перегретого пара каждый его килограмм отдает теплоту:

$$r_{\text{пер}} = r + c_{\text{пр}} \delta t_{\text{пер}},$$

где $\delta t_{\text{пер}} = t_{\text{пер}} - t_n$; $t_{\text{пер}}$ — температура перегретого пара.

Теплообмен при конденсации перегретого пара исследован еще не в полной мере. Однако некоторые опытные данные по пленочной и капельной конденсации неподвижного пара позволяют считать, что при полной конденсации с достаточной для практики точностью коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по формулам для сухого насыщенного пара. При этом вместо r в формулы подставляется $r_{\text{пер}}$.

Конденсация влажного пара. Если пар является влажным, то часть влаги будет выпадать вместе с конденсирующимся паром. Полагают, что наибольшее количество влаги, могущее выпасть на по-

верхности пленки конденсата, равно влагосодержанию сконденсировавшегося пара. Приближенные оценки показывают, что при влажности в пределах до 10—20% (по массе) ее влиянием на коэффициент теплоотдачи можно пренебречь. Вопрос о влиянии влажности исследован еще недостаточно.

Конденсация паров жидких металлов. При конденсации паров жидких металлов может иметь место как пленочная, так и капельная форма конденсации.

Термическое сопротивление жидкого металла очень мало, поэтому при конденсации паров металлов влияние на теплообмен могут оказать термическое сопротивление фазового перехода и контактное термическое сопротивление, обусловленное загрязнением стенки. При этом тип конденсации (пленочный или капельный) оказывает гораздо меньшее влияние на интенсивность теплоотдачи.

Капельная конденсация наблюдается при конденсации паров ртути. Пары щелочных металлов (натрий, калий), по-видимому, дают в основном пленочную конденсацию.

У жидких металлов $Pr \ll 1$, неучет инерционных сил и конвективного переноса теплоты может привести к значительным ошибкам. На рис. 12-16 представлены результаты теоретического расчета [Л. 93] пленочной конденсации при ламинарном течении пленки. Здесь $\psi = \alpha_v / \alpha_{N,v}$ и $\psi_r = \alpha_r / \alpha_{N,r}$; α_v и α_r — коэффициенты теплоотдачи при конденсации на вертикальной стенке и горизонтальной трубе с учетом инерционных сил и конвективного переноса теплоты; $\alpha_{N,v}$ и $\alpha_{N,r}$ — по формуле Нуссельта для вертикальной стенки и горизонтальной трубы. Согласно рис. 12-16 при $Pr \approx 0,01$ теплоотдача может понизиться примерно на 60% по сравнению с данными формулы Нуссельта.

По данным [Л. 170] коэффициент конденсации для ряда жидкотеплоносителей примерно равен единице.

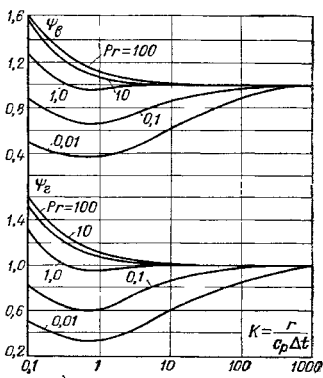


Рис. 12-16. Влияние инерционных сил и конвективного переноса тепла на теплоотдачу ламинарно текущей пленки конденсата.

Глава тринадцатая

ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

13-1. МЕХАНИЗМ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

А. Режимы кипения

Кипением называется процесс интенсивного парообразования, происходящего во всем объеме жидкости, находящейся при температуре насыщения или несколько перегретой относительно температуры насыщения, с образованием паровых пузырей. Процессы кипения имеют

большое практическое применение в теплоэнергетике, химической технологии, атомной энергетике и ряде других областей современной техники.

Кипение возможно во всем температурном интервале между тройной и критическими точками для данного вещества. В процессе фазового превращения поглощается теплота парообразования. Процесс кипения обычно связан с подводом теплоты к кипящей жидкости.

Различают кипение жидкости на твердой поверхности теплообмена, к которой извне подводится теплота, и кипение в объеме жидкости.

При кипении на твердой поверхности образование паровой фазы наблюдается в отдельных местах этой поверхности. При объемном кипении паровая фаза возникает самопроизвольно (спонтанно) непосредственно в объеме жидкости в виде отдельных пузырьков пара. Объемное кипение может происходить лишь при более значительном перегреве жидкой фазы относительно температуры насыщения при данном давлении, чем кипение на твердой поверхности. Значительный перегрев может быть получен, например, при быстром сбросе давления в системе. Объемное кипение может иметь место при наличии в жидкости внутренних источников тепла.

В современной энергетике и технике обычно встречаются процессы кипения на твердых поверхностях нагрева (поверхности труб, стенки каналов и т. п.). Этот вид кипения в основном и рассматривается далее.

Механизм теплообмена при пузырьковом кипении отличается от механизма теплоотдачи при конвекции однофазной жидкости наличием дополнительного переноса массы вещества и теплоты паровыми пузырями из пограничного слоя в объем кипящей жидкости.

Это приводит к высокой интенсивности теплоотдачи при кипении по сравнению с конвекцией однофазной жидкости.

Для возникновения процесса кипения необходимо выполнение двух условий: наличие перегрева жидкости относительно температуры насыщения и наличие центров парообразования.

Перегрев жидкости имеет максимальную величину непосредственно у обогреваемой поверхности теплообмена. На ней же находятся центры парообразования в виде отдельных неровностей стенки, пузырьков воздуха, пылинок и др. Поэтому образование пузырьков пара происходит непосредственно на поверхности теплообмена.

Различают два основных режима кипения: пузырьковый и пленочный. Кипение, при котором пар образуется в виде отдельных периодически зарождающихся, растущих и отрывающихся паровых пузырей, называется пузырьковым. С увеличением теплового потока до некоторой величины отдельные паровые пузырьки сливаются, образуя у поверхности теплообмена сплошной паровой слой, периодически прорывающийся в объем жидкости. Режим кипения, который характеризуется наличием на поверхности пленки пара, обволакивающей эту поверхность и отделяющей ее от жидкости, называется пленочным кипением [Л. 180].

Интенсивность теплоотдачи при пленочном кипении значительно меньше, чем при пузырьковом.

Ниже будут рассмотрены механизмы теплообмена при пузырьковом и пленочном режимах кипения.

Б. Минимальный радиус пузырька

Процесс парообразования можно разбить на отдельные стадии. К первоначальной стадии относится зарождение пузырьков в некоторых

центрах на поверхности нагрева. Затем происходит их рост и отрыв от этих центров. К завершающей стадии относится движение пузырьков в объеме перегретой жидкости. Достигнув поверхности жидкости, паровые пузырьки лопаются. После этого образуются новые пузырьки и процесс повторяется вновь. Минимальный размер парового пузырька в момент зарождения называется критическим радиусом (R_k). Он соответствует размеру неровностей на поверхности теплообмена (центров парообразования). При наличии центров паровые пузырьки возникают при незначительных перегревах жидкости относительно температуры насыщения. При наличии малого количества центров кипение жидкости имеет место при значительных ее перегревах. Критический радиус определяется из условий термодинамического равновесия фаз.

Для возникновения парового пузырька и существования его в дальнейшем необходимо, чтобы сила давления пара внутри него была не меньше суммы всех внешних сил, действующих на паровой пузырек. В момент образования пузырька на него действуют две основные силы: сила давления p окружающей его жидкости и сила поверхностного натяжения на поверхности пузырька. Условие равновесия сил для парового пузырька сферической формы определяется уравнением Лапласа:

$$\Delta p = p_1 - p = \frac{2\sigma}{R_k}. \quad (13-1)$$

При избыточном давлении $\Delta p \geq 2\sigma/R_k$ паровой пузырек может существовать и развиваться; при $\Delta p \leq 2\sigma/R_k$ он сконденсируется.

Образование пузырька с критическим радиусом R_k возможно лишь в том случае, если окружающая пузырек жидкость будет перегрета, т. е. если ее температура $T_{ж}$ будет превышать температуру насыщения T_n (при давлении в жидкости p) на некоторую величину $\Delta t = T_{ж} - T_n$. Температура пара $T_{п,к}$ в пузырьке с критическим радиусом должна равняться температуре окружающих слоев жидкости $T_{ж}$. Поэтому температура $T_{ж} = T_{п,к}$ может быть найдена приближенно (если не учитывать малой поправки, связанной с влиянием кривизны межфазной поверхности на давление насыщения) как температура насыщения, соответствующая давлению пара внутри пузырька $p_1 = p + \Delta p$. Отсюда следует, что связь между перепадом давления Δp и необходимым перегревом жидкости Δt определяется формулой

$$\Delta p = p_1 - p = p' \Delta t + \frac{1}{2!} p'' \Delta t^2 + \dots \approx p' \Delta t.$$

Если учесть зависимость давления от кривизны поверхности раздела фаз, то

$$\Delta p = p' \Delta t \frac{p_{ж} - p_n}{p_{ж}}.$$

Величина p' есть производная от давления по температуре на линии насыщения, определяемая согласно закону Клапейрона — Клаузиуса уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_n = \frac{r p_{ж} p_n}{T_n (p_{ж} - p_n)}.$$

Следовательно,

$$\Delta p = \frac{r p_n \Delta t}{T_n}. \quad (13-2)$$

Зависимости (13-1) и (13-2) позволяют выразить критический радиус пузыря:

$$R_k = \frac{2\sigma T_n}{r_{pn} (T_{nk} - T_n)}. \quad (13-3)$$

Эта зависимость аналогична зависимости (12-39), приведенной выше для критического радиуса капли.

Соотношение (13-3) определяет критический радиус сферического пузырька, находящегося внутри (в объеме) перегретой жидкости вдали от поверхности нагрева.

Слой жидкости, которые непосредственно соприкасаются с поверхностью нагрева, имеют температуру T_{jk} , равную температуре стенки T_c . Поэтому если в формуле (13-3) положить $T_{jk} = T_c$, то

$$R_k = \frac{2\sigma T_n}{r_{pn} (T_c - T_n)}. \quad (13-4)$$

В такой форме записи величина R_k характеризует радиус кривизны внешней поверхности пузырьков, зарождающихся на поверхности теплообмена. Одновременно величина R_k определяет порядок размеров тех элементов шероховатости, которые при данных условиях (давлении, перегреве и т. д.) могут служить центрами парообразования.

С увеличением перегрева жидкости при заданном давлении величина R_k уменьшается. Минимальный радиус R_k уменьшается и с увеличением давления при заданном перегреве, так как с увеличением давления растет производная p' , а поверхностное натяжение уменьшается.

Увеличение перегрева жидкости и давления приводит к уменьшению R_k , а следовательно, к увеличению общего числа действующих центров парообразования, интенсивному перемешиванию жидкости в пограничном слое и увеличению теплоотдачи.

В том случае, когда жидкость смачивает стенку, кипение жидкости происходит практически без перегрева относительно температуры насыщения. Таким образом, к факторам, влияющим на образование пузырька радиусом R_k , относятся: Δt , p и характер физико-химического взаимодействия пара и жидкости с твердой стенкой.

В. Минимальная работа образования пузырьков критического размера

Анализ работы, потребной на образование паровых пузырьков критического радиуса, позволяет установить, какие неровности поверхности теплообмена (бугорки или впадины) являются наиболее вероятными центрами парообразования.

Работа, затрачиваемая на образование парового пузырька радиусом R_k , зависит от того, образуется ли паровой пузырек в объеме жидкости вдали от поверхности теплообмена или непосредственно на этой поверхности. Кроме того, работа образования пузырька будет меняться в зависимости от формы центров парообразования. В качестве центров могут быть неровности в виде впадин шероховатой поверхности, а также различные трещины, канавки и др. К наиболее благоприятным условиям образования пузырька относятся условия, при которых затрачиваемая работа будет минимальной.

Работа, затрачиваемая на образование пузырька в объеме жидкости [Л. 104], выражается зависимостью

$$L = -\Delta p V + \sigma F,$$

где V и F — объем и поверхность пузырьков.

Величина σF есть работа образования межфазной поверхности F .

Чем меньше работа L , тем больше вероятность вскипания, так как вероятность пропорциональна $\exp(-L/kT_n)$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Объем и поверхность пузырька составляют $\frac{4}{3}\pi R^3$ и $4\pi R^2$. Поэтому выражение для L можно, учитывая формулы (13-1) — (13-3), записать так:

$$L = \frac{4}{3}\pi\sigma R^2 = \frac{16\pi\sigma^3}{3\Delta p^2} = \frac{16}{3} \frac{\pi\sigma^3}{(r_{pn})^2} \left(\frac{T_n}{\Delta t}\right)^2.$$

Отсюда видно, что чем больше перегрев жидкости $\Delta t = T_n - T_n$ (и больше Δp или меньше R_k), тем меньше величина работы L . Итак, вероятность начала вскипания перегретой жидкости в объеме увеличивается по мере увеличения перегрева.

Физические условия появления пузырьков на теплоотдающей поверхности во многом сходны с рассмотренной картиной объемного вскипания. Главное отличие состоит в том, что паровой пузырек кроме межфазной поверхности будет иметь поверхность раздела твердое тело — жидкость, на которой обычно молекулярное сцепление более или менее ослаблено. Поэтому величина слагаемого в выражении для L , указывающего работу образования новых поверхностей раздела фаз, оказывается количественно меньше. В итоге меньшей становится и величина минимальной работы, а соответствующая вероятность возникновения пузырька — большей.

Молекулярное сцепление на твердой поверхности тесно связано с рассмотренным в § 12-1 явлением смачивания. На рис. 13-1 схематически показан пузырек пара критического размера, возникающий на плоской поверхности нагрева при условии, что жидкость смачивает эту поверхность нагрева и краевой угол при кипении $\theta_{\text{кип}} < \pi/2$.

Рядом показана форма пузырька на несмачиваемой поверхности при $\theta_{\text{кип}} > \pi/2$. Рассмотрим случай $\theta_{\text{кип}} < \pi/2$. Полная поверхность F пузырька состоит из части $F_{\text{ж}}$, на которой пар соприкасается с жидкостью и основания пузырька F_c . Определим работу образования новых поверхностей раздела при появлении такого пузырька на поверхности теплообмена. До появления пузырька поверхности $F_{\text{ж}}$ не было, а участок F_c омывался жидкостью. Поверхностная энергия на этом участке была $F_{c\sigma_{\text{ж,л}}}$. После возникновения пузырька образовалась поверхность $F_{\text{ж}}$ и была затрачена работа $F_{\text{ж}}\sigma_{\text{ж}}$ на ее создание. Кроме того, на поверхности F_c произошло замещение жидкости паром, на что потребовалась энергия $(F_{c\sigma_{\text{п,с}}} - F_{c\sigma_{\text{ж,с}}})$. Работа отрыва жидкости от поверхности

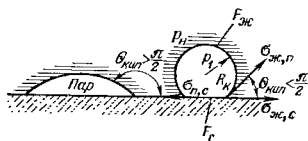


Рис 13-1. К определению минимального радиуса парового пузыря R_k и краевого угла $\theta_{\text{кип}}$.

p_n — давление насыщения; p_1 — давление внутри пузырька.

называется работой адгезии. В итоге образования новых поверхностей при появлении пузырька на плоском участке поверхности твердого тела эта работа равна:

$$F_{ж}\sigma_{ж,п} + F_c(\sigma_{п,с} - \sigma_{ж,с}).$$

Согласно рис. 13-1 $\sigma_{п,с} - \sigma_{ж,с} = \sigma_{ж,п} \cos \theta$ (индексы «ж», «п» и «кип» далее опускаем). Поэтому предыдущее выражение принимает вид:

$$F\sigma \left[1 - \frac{F_c}{F} (1 - \cos \theta) \right]$$

и

$$L = -\Delta pV + F\sigma \left[1 - \frac{F_c}{F} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (13-5)$$

В случае, рассмотренном на рис. 13-1, отношение поверхности основания F_c к полной поверхности F пузырька можно выразить через тригонометрические функции от величины θ . Однако приведенное выражение применимо также для более общего случая, когда пузырек образуется не на плоском участке (как на рис. 13-1), а в углублении или на выступе

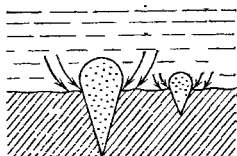


Рис. 13-2. К образованию паровых пузырьков на поверхности с углублениями.

элемента шероховатости произвольной формы [Л. 135, 136] (рис. 13-2). Тогда отношение F_c/F характеризует ту долю поверхности пузырька, на которой пар соприкасается с поверхностью нагрева. Отношение зависит от формы элемента шероховатости. При этом работа образования граничных поверхностей будет тем меньше, чем больше отношение F_c/F и чем больше величина краевого угла θ . Следовательно, наиболее вероятными местами возникновения пузырьков на теплоотдающей поверхности будут элементы шероховатости в виде углублений, впадин и именно те из них, в которых местные условия смачивания по каким-либо причинам ухудшены. Локальное ухудшение смачивания (увеличение θ) может вызываться неоднородностью материала поверхности, инородными включениями, различными загрязнениями и, в частности, трудноудаляемыми адсорбционными пленками масел и жиров, механическими напряжениями и т. п. Снижение давления при прочих равных условиях приводит к уменьшению абсолютной величины первой слагаемой правой части зависимости (13-5), т. е. к увеличению работы на образование парового пузырька. Вследствие этого при уменьшении давления начало процесса парообразования сдвигается в область более высоких перегревов жидкости.

Соотношения (13-1) и (13-5) позволяют найти связь между краевым углом и формой впадин.

Г. Скорость роста пузырьков

Одной из основных характеристик механизма теплообмена при кипении жидкости является скорость роста паровых пузырей на поверхности нагрева.

После зарождения пузырьков на центрах радиусов $R \geq R_k$ происходит рост паровых пузырьков за счет подвода к ним теплоты. Подвод

теплоты осуществляется путем теплопроводности из окружающего пузыря перегретого слоя жидкости через межфазную поверхность $F_{жк}$ и через поверхность под пузырьком F_c в основании. Теплота, подводимая к пузырьку, идет на испарение жидкости и работу расширения.

Скорость роста пузырьков зависит от интенсивности подвода теплоты обеими составляющими теплового потока. В качестве параметра, определяющего интенсивность теплообмена при кипении, может быть использовано число Якоба. Число Якоба получается при приведении системы дифференциальных уравнений и условий однозначности, описывающих теплообмен при кипении жидкости, к безразмерному виду. Для указанной системы получено уравнение подобия (13-8). Последний безразмерный комплекс, входящий в правую часть этого уравнения, является числом Якоба:

$$Ja = \frac{c_p \Delta t}{r} \frac{\rho_{жк}}{\rho_{п}}$$

Число Якоба характеризует соотношение между тепловым потоком, идущим на перегрев единицы объема жидкости, и объемной теплотой парообразования. Оно зависит от давления и перегрева жидкости. С повышением давления число Якоба уменьшается, так как существенно увеличивается плотность пара. Наоборот, с понижением давления это число увеличивается. С увеличением перегрева жидкости число Якоба растет. В зависимости от различных условий составляются соответствующие уравнения теплового баланса на границе парового пузыря, из которых находятся аналитические зависимости для определения радиуса пузыря в период его роста на центре парообразования. При давлениях выше атмосферного (число Якоба ≤ 20) рост парового пузырька происходит за счет теплоты, передаваемой от поверхности нагрева к его основанию через прилегающий слой жидкости. Изменение радиуса парового пузырька во времени определяется зависимостью [Л. 99, 126]

$$R = \sqrt{2\beta Ja} \sqrt{a\tau}, \quad (13-6')$$

где τ — время пребывания пузырьков на поверхности теплообмена; a — коэффициент температуропроводности жидкой фазы.

Второй предельный случай имеет место при низких давлениях (число Якоба $Ja \geq 20$). Теплота к паровому пузырьку передается от перегретого слоя жидкости на межфазной поверхности, и радиус парового пузырька тогда определяется соотношением

$$R = 2\gamma Ja \sqrt{a\tau}. \quad (13-6'')$$

В общем случае рост паровых пузырьков происходит как за счет теплоты, передаваемой от поверхности нагрева в основание пузырька, так и за счет теплоты перегретого слоя жидкости на межфазной поверхности. Тогда изменение радиуса парового пузырька во времени выражается уравнением [Л. 211]

$$R = (\gamma Ja + \sqrt{\gamma^2 Ja^2 + 2\beta Ja}) \sqrt{a\tau}. \quad (13-6)$$

Параметры γ и β зависят от геометрических факторов. Для краевых углов смачивания $\theta = 40^\circ \div 90^\circ$ величина $\gamma = 0,1 \div 0,49$. Экспериментально установлено значение $\beta = 6$.

Зависимость (13-6) получена для давления $(0,1 \div 100) 10^5$ Па (числа $Ja = 1000 \div 0,1$).

Из приведенных зависимостей следует, что паровые пузырьки увеличиваются с ростом числа Якоба. Однако при низких давлениях влияние числа Якоба существенно больше, чем при высоких. Это говорит о том, что скорость роста пузырей при низких давлениях выше, чем при высоких. С увеличением перегрева жидкости скорость роста пузырьков повышается в обоих случаях.

Д. Отрывной диаметр пузырька

Паровой пузырек, зародившись на стенке, растет до некоторого размера, характеризующегося диаметром d_0 , при котором он отрывается. Размер пузыря в завершающей стадии его роста на поверхности теплообмена называется отрывным диаметром. В период возникновения и роста на пузырек действуют главным образом силы, удерживающие его в центре парообразования. С возрастанием размера пузырька увеличивается подъемная сила, стремящаяся оторвать пузырек от центра. Из равновесия сил можно получить аналитические выражения для отрывного диаметра пузырька. В общем случае к силам, оказывающим влияние на паровой пузырек, относят подъемные силы, силы поверхностного натяжения, инерционные силы и силы лобового сопротивления. Последние две силы относят к гидродинамическим силам, так как они возникают при движении массы жидкости, обусловленном ростом пузырька [Л. 35, 73, 186].

В статических условиях отрывной диаметр парового пузыря определяется из условий механического равновесия между подъемной силой, стремящейся оторвать паровой пузырек от поверхности, и силой поверхностного натяжения, удерживающей его на твердой поверхности. На рис. 13-3 показана упрощенная схема роста. В действительности, если даже не учитывать динамического эффекта, следует иметь в виду, что по мере увеличения пузырька форма его будет все более отклоняться от первоначальной сферической. Это объясняется возрастающей ролью сил поля тяжести, стремящихся как бы вытянуть пузырек в направлении от поверхности.

В момент отрыва пузырек обычно существенно деформирован. Фритц [Л. 213а] теоретически рассчитал объемы пузырьков перед отрывом в статических условиях для разных значений краевых углов. Результаты вычислений могут быть интерполированы простой формулой. Если понимать под отрывным диаметром d_0 эквивалентный диаметр $\sqrt[3]{6V_0/\pi}$, где V_0 — объем деформированного пузырька перед отрывом, то формула имеет вид:

$$d_0 = 0,02086 \sqrt{\sigma/g(\rho_{ж} - \rho_n)} \quad (13-7)$$

(краевой угол θ измеряется в угловых градусах).

Как следует из (13-7), величина отрывного диаметра при кипении зависит от краевого угла смачивания θ . С увеличением краевого угла смачиваемость поверхности жидкости ухудшается, паровой пузырек при отрыве имеет большие размеры.

Когда краевой угол θ становится больше $\pi/2$ (жидкость не смачивает поверхность), резко увеличивается доля поверхности нагрева, экранированная основаниями растущих пузырьков. Жидкость как бы отесняется от поверхности, и интенсивность теплоотдачи уменьшается. К жидкостям несмачивающим относится ртуть, краевой угол смачивания для которой $\theta = 140^\circ$. Криогенные жидкости (водород, кислород,

азот) характеризуются очень малыми значениями θ . Следует отметить, что обычно применяемые в энергетике теплоносители смачивают металлические поверхности.

При вынужденном движении кипящей жидкости на условия отрыва паровых пузырьков дополнительное влияние оказывает динамический напор потока. Вследствие гидродинамического воздействия потока на пузырек отрывной диаметр становится меньше, чем d_0 по зависимости (13-7), и определяется толщиной пристенного слоя кипящей жидкости. Толщина слоя изменяется в зависимости от числа Re потока и интенсивности процесса парообразования. От этих факторов будет зависеть также и d_0 . С увеличением Re толщина пристенного слоя жидкости уменьшается, уменьшается также значение d_0 .

После отрыва паровой пузырек движется через слой жидкости. Теплоотдача между перегретой жидкостью и поверхностью пузырька отличается большой интенсивностью. Так, коэффициенты теплоотдачи от воды к пару достигают примерно $200\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. За счет этого пузырек при всплывании значительно увеличивается в размерах.

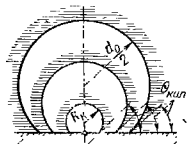


Рис. 13-3. Упрощенная схема роста парового пузырька.

d_0 — отрывной диаметр парового пузырька.

Е. Зависимость теплового потока от температурного напора (кривая кипения)

Выше были рассмотрены условия возникновения и развития паровой фазы у нагреваемой поверхности, которые одновременно определяют интенсивность теплообмена этой поверхности с кипящей жидкостью. При кипении происходит беспорядочная турбулизация парожидкостной смеси вблизи поверхности нагрева растущими и периодически отрывающимися пузырьками пара. Кроме того, интенсивность теплообмена связана с термическим сопротивлением весьма тонкой жидкостной прослойки (пленки), остающейся вследствие смачивания непосредственно на самой поверхности нагрева под областью паровых пузырей и через которую тепло передается путем теплопроводности.

С повышением турбулизации и утончением жидкостной прослойки интенсивность теплоотдачи увеличивается. Однако эффект турбулизации является существенным лишь при незначительных перегревах, а определяющим фактором является изменение толщины жидкостной прослойки под паровыми пузырями. С увеличением перегрева жидкости увеличиваются интенсивность парообразования в каждом центре и число этих центров, толщина жидкостной прослойки уменьшается, а интенсивность теплообмена увеличивается.

Рассмотрим характер изменения плотности теплового потока от перегрева жидкости (кривая кипения).

При увеличении температурного напора тепловой поток проходит через максимум (рис. 13-4). Максимуму теплообмена предшествует конвективная область 1, соответствующая малым перегревам жидкости, и область развитого кипения 3. Между ними находится область неустойчивого кипения 2. Она характеризуется малой плотностью центров парообразования.

Пройдя максимум, q постепенно снижается по мере вытеснения пузырькового кипения пленочным. После переходной области 4 насту-

пает режим устойчивого пленочного кипения. В этом режиме на участке 5 лучистый перенос тепла относительно невелик, а на участке 6 он приобретает существенное значение.

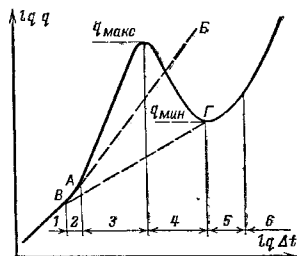


Рис 13-4 Зависимость q (а также α) от перегрева жидкости Δt .

ния AB). Верхняя граница этих перегревов определяется спонтанным образованием паровых зародышей в объеме жидкости.

При кипении несмачивающих жидкостей ($\theta > 90^\circ$) пленочный режим может начаться при малых перегревах (линия $B\Gamma$).

Ж. Влияние способа обогрева поверхности теплообмена

На рис. 13-4 и 13-5,а показаны кривые кипения с постепенным переходом пузырькового режима в пленочный. Постепенный переход пузырькового режима в пленочный наблюдается при обогреве конденсирующимися паром. Эти условия характеризуются тем, что устанавливается постоянная температура поверхности теплообмена ($T_c = \text{const}$). При паровом обогреве независимой от процесса теплообмена является температура поверхности T_c , а следовательно, и температурный напор $\Delta t = T_c - T_n$. Поэтому тепловой поток, отводимый от поверхности в переходной области, постепенно уменьшается по мере ухудшения интенсивности теплообмена за счет вытеснения пузырькового режима пленочным.

При независимой от процесса величине плотности теплового потока ($q_c = \text{const}$) имеет место скачкообразный переход пузырькового режима кипения в пленочный и обратно (рис. 13-5,б). Условие постоянства на поверхности q_c характерно для электрического обогрева. Если подводимую мощность не уменьшить, то система перейдет в состояние, для которого характерно значительное повышение температуры стенки. Экспериментально момент перехода определяется по резкому повышению

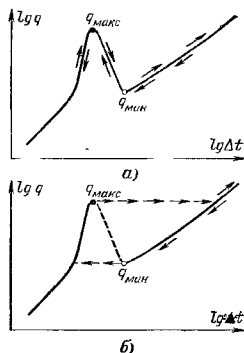


Рис 13-5 Зависимость q от Δt при кипении жидкости.

Переход к пленочному режиму при паровом (а) и электрическом (б) обогревах.

температуры или электрического сопротивления стенки. Момент перехода пузырькового кипения в пленочное может сопровождаться разрушением (расплавлением) поверхности теплообмена. Если после возникновения пленочного кипения снижать тепловую нагрузку q_c , то переход обратно к пузырьковому режиму произойдет лишь при $q_{\text{мин}}$. Таким образом, при электрическом обогреве теплоотдающей поверхности возникает своеобразный тепловой гистерезис.

3. Зависимость теплоотдачи от давления и теплофизических свойств

С увеличением давления уменьшаются размеры пузырька в момент возникновения и отрыва; увеличиваются число центров и частота отрыва пузырей от этих центров. Степень влияния на них давления зависит от удаленности рассматриваемого состояния от критического, так как она определяет степень метастабильности жидкости, вероятность гетерогенных флуктуаций плотности, а также количественные изменения физических свойств вещества. С приближением термодинамического состояния к критическому влияние этих факторов увеличивается и соответственно увеличивается влияние давления на теплоотдачу. Это отчетливо следует из рис. 13-6, построенного в безразмерных координатах для ряда жидкостей. В нем опытные данные по оси ординат отложены в виде отношений $\alpha/q^{0,7}$ при текущем значении давления p

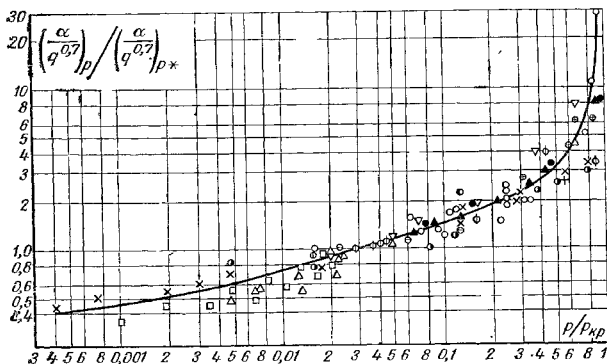


Рис 13-6. Зависимость α от p для различных жидкостей.

к этой же величине при условном давлении $p^* = 0,03p_{\text{кр}}$. Критическое давление для различных жидкостей различно; p^* — одинаковая часть от $p_{\text{кр}}$ характеризует одинаково выбранную для всех жидкостей удаленность от критического состояния по давлению. Величина 0,03 выбирается произвольно с учетом наличия наибольшего количества опытных данных. По оси абсцисс на рис. 13-6 отложены отношения текущего давления к критическому [Л. 12].

Теплофизические свойства жидкости также существенно изменяются с давлением (температурой).

С увеличением коэффициента теплопроводности интенсивность теплоотдачи увеличивается, так как уменьшается термическое сопротивление микрослоя жидкости под паровыми пузырьками и увеличивается скорость их роста.

С увеличением вязкости интенсивность теплоотдачи, наоборот, уменьшается, так как увеличивается толщина микрослоя жидкости и уменьшается перемешивание, обусловленное отрывом пузырьков от поверхности. Высота слоя жидкости над поверхностью теплообмена может оказывать влияние на теплоотдачу при небольших их уровнях (рис. 13-7), соизмеримых с размерами паровых пузырьков ($H \ll d_0$).

И. Влияние недогрева жидкости

Выше было рассмотрено влияние внешнего давления и перегрева жидкости на процессы парообразования и на теплоотдачу. Кроме них к режимным параметрам, влияющим на теплоотдачу, относятся недогрев жидкости и скорость циркуляции.

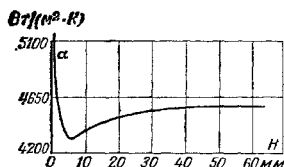


Рис. 13-7. Зависимость коэффициента теплоотдачи от уровня кипящей воды ($q = 40\,000$ Вт/м²; $p = 10^5$ Па).

В первом случае происходит кипение жидкости с недогревом.

Кипением с недогревом (поверхностным кипением) называют кипение у поверхности теплообмена, при котором вдали от нее жидкость недогрета до температуры насыщения (рис. 13-11). Паровые пузырьки, возникшие при кипении жидкости в пограничном слое, попадая в холодное ядро, конденсируются. Таким образом, кипение у стенки сочетается с конвекцией

однофазной жидкости вдали от стенки и с процессом конденсации пара на границе раздела кипящего пограничного слоя жидкости и холодного ядра. Интенсивность парообразования на стенке зависит от перегрева жидкости; процесс конденсации обуславливается перепадом $\Delta t_n = t_n - t_{ж}$, т. е. недогревом жидкости до температуры насыщения. Перегрев жидкости определяет интенсивность процесса парообразования; недогрев жидкости определяет размер области, на которую распространяется возмущающее действие процесса парообразования. Чем больше недогрев жидкости, тем уже область, охваченная кипением. При малом недогреве пузырьки пара отделяются от поверхности и конденсируются в потоке; при больших недогревах они конденсируются, не отделяясь от поверхности. Процессы теплообмена с поверхностным (местным) кипением имеют большое практическое значение, так как позволяют получить более высокие значения тепловых потоков по сравнению с конвекцией однофазной жидкости. Они применяются при охлаждении авиационных двигателей, ракет, в устройствах для непрерывной разливки стали и т. д. К недостаткам поверхностного кипения относится возможность возникновения высокочастотных пульсаций давления в рабочем канале.

К. Влияние скорости принудительной циркуляции жидкости

При наличии вынужденного движения двухфазного потока на возмущения пограничного слоя, обусловленные парообразованием, накладываются дополнительные возмущения за счет турбулентных пульсаций скорости. Принудительная циркуляция оказывает непосредственное

воздействие также на механизм процесса парообразования. Это воздействие выражается в искажении естественного угла смачивания θ и срыве паровых пузырьков со стенки раньше, чем они достигнут величины отрывного диаметра, характерного для кипения при свободном движении. При малых скоростях циркуляции гидродинамическое воздействие на процесс кипения невелико и теплоотдача внутри труб определяется интенсивностью процесса парообразования, т. е. значением q_c (рис. 13-8). При большой скорости циркуляции ее влияние значительно, а влияние q_c невелико. С повышением скорости влияние q_c непрерывно уменьшается и коэффициент теплоотдачи постепенно приближается к значениям, имеющим место при конвекции однофазной жидкости (т. е. без кипения, когда $\alpha \propto \omega^{0,8}$).

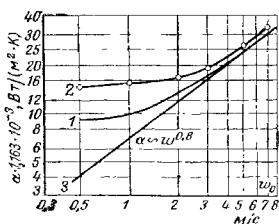


Рис. 13-8. Зависимость α от ω при кипении жидкости внутри труб.
1 — $q_c = 233\,000 \text{ Вт/м}^2$; 2 — $q_c = 465\,200 \text{ Вт/м}^2$; 3 — по уравнению $\alpha \propto \omega^{0,8}$.

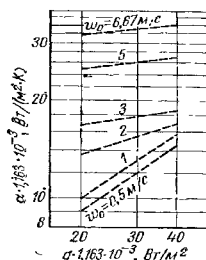


Рис. 13-9. Зависимость α от q_c при кипении жидкости внутри труб в условиях вынужденной циркуляции.

На рис. 13-9 дана зависимость α от q_c при разных скоростях циркуляции [Л. 168]. Из него видно, что с возрастанием ω влияние q_c на α уменьшается.

Зависимость теплоотдачи от теплового потока при различных скоростях циркуляции в условиях кипения в неограниченном объеме [Л. 165] аналогична приведенной зависимости при кипении в трубах.

Таким образом, влияние q_c и ω на α определяется их соотношением; в результате можно выделять три области: в двух предельных случаях $\alpha = \alpha(\omega)$ или $\alpha = \alpha(q_c)$; в общем случае $\alpha = \alpha(q_c, \omega)$ (см. рис. 13-17).

Л. Влияние шероховатости и теплофизических свойств стенки

При кипении обычных (высокотемпературных) жидкостей работоспособными центрами парообразования являются лишь те впадины и углубления на поверхности теплообмена, которые способны удерживать пар или газ. Крупные впадины легко заполняются жидкостью и выключаются из работы как активные центры парообразования. Поэтому существует граница шероховатости, за пределами которой дальнейшее загромождение поверхности не приводит к изменению интенсивности теплоотдачи. В [Л. 32] установлено, что это наблюдается при обработке поверхности теплообмена выше 6—7-го класса чистоты. Теплофизиче-

ские свойства стенки оказывают влияние на интенсивность теплообмена. Теплофизические свойства наиболее четко проявляются при кипении криогенных (низкотемпературных) жидкостей ввиду их смачиваемости ($\theta \rightarrow 0$) и возможности исключения влияния краевого угла смачивания, различного для различных жидкостей и различных материалов стенки. Влияние свойств материала проявляется через величину коэффициента аккумуляции теплоты стенки, равного $(\sqrt{ac_{pr}})_c$.

С увеличением коэффициента аккумуляции интенсивность теплообмена увеличивается. Однако количественный учет влияния поверхностных условий на интенсивность теплообмена остается пока нерешенной проблемой.

13-2. СТРУКТУРА ПОТОКА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Структура двухфазного потока зависит от геометрических свойств системы. Системы с неограниченным объемом представляют собой относительно большие емкости, заполненные жидкостью, в которые погружаются различные поверхности в виде одиночных труб, трубных пучков и др., обогреваемые изнутри. Пар, образующийся при кипении жидкости на их внешних поверхностях, беспрепятственно отводится из системы. Рассмотрим систему, состоящую из сосуда, заполненного жидкостью, горизонтальная поверхность (дно) которого обогревается. На рис. 13-10 дан график изменения температуры по высоте слоя жидко-

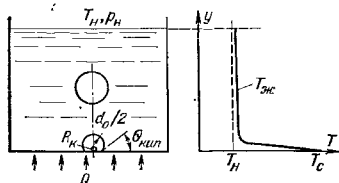


Рис. 13-10. Образование, рост и отрыв парового пузыря от одного центра.

T_n, P_n — температура и давление насыщения.
 T_c — температура стенки; Q — тепловой поток.

сти. Перегрев жидкости у стенки имеет значительную величину. Вдали от поверхности жидкость также несколько перегрета.

При развитом кипении на поверхности действует значительное число центров парообразования. Одновременный рост большого числа пузырьков и их периодический отрыв от поверхности приводят к интенсивному перемешиванию и утончению пристенного слоя жидкости. От поверхности отрываются пузырьки различных размеров. Скорость всплывания больших пузырьков больше, чем малых. Некоторые большие пузырьки при всплывании дробятся на ряд более мелких. Мелкие пузырьки могут объединяться и образовывать большие пузыри. Объединение мелких пузырьков может происходить на поверхности нагрева еще до отрыва. В итоге общая картина кипения приобретает сложный характер. Свободная поверхность жидкости испытывает интенсивные пульсации.

В каждый момент времени внутри кипящей жидкости находятся определенное количество пара в виде всплывающих пузырьков. Вследствие этого такая двухфазная смесь как бы набухает, что проявляется в виде поднятия среднего положения свободной поверхности (зеркала испарения). Если в каждый момент времени внутри жидкости в форме всплывающих пузырьков находится масса M_n пара и если масса осталь-

ной жидкости $M_{жк}$, то объем двухфазной смеси составляет $V_{см} = (M_{п}/\rho_{п}) + (M_{ж}/\rho_{ж})$. Отношение объема пара $M_{п}/\rho_{п}$ к объему смеси называется объемным паросодержанием:

$$\varphi = \frac{M_{п}/\rho_{п}}{V_{см}}$$

Величина объемного паросодержания при кипении зависит от формы и размеров теплоотдающей поверхности и сосуда, тепловой нагрузки, давления и рода кипящей жидкости. В ряде случаев значения φ при кипении могут достигать величины 30% и более. Примерно на столько же увеличивается и высота кипящего двухфазного слоя. В этом отношении процесс аналогичен процессу барботажа пара через слой жидкости.

В малоподвижной жидкости скорость всплывания больших пузырьков пара (или газа) практически не зависит от размеров пузырька, если его характерный размер больше капиллярной постоянной $\sqrt{\sigma/g(\rho_{ж}-\rho_{п})}$. Форма таких пузырьков близка к сплюсненным (в направлении всплывания) сфероидам. Скорость всплывания обычно составляет несколько десятков сантиметров в секунду и определяется формулой

$$w_{всп} = 1,18 \sqrt{\sigma g (\rho_{ж} - \rho_{п}) / \rho_{ж}^2}$$

т. е. зависит от подъемной силы, поверхностного натяжения и плотности жидкости.

Пузырьки малого диаметра d (по сравнению с капиллярной константой) при всплывании имеют сферическую форму, и скорость движения их определяется законом вязкого сопротивления

$$w_{всп} = c g (\rho_{ж} - \rho_{п}) d^2 / \mu_{ж},$$

где коэффициент c зависит от наличия в жидкости поверхностно-активных примесей и лежит в пределах от $2/9$ до $1/3$.

Для системы, изображенной на рис. 13-10, общий поток тепла, передаваемый от поверхности нагрева в кипящую жидкость, $Q = qF$, где F — площадь поверхности нагрева, равная в этом случае площади горизонтального сечения сосуда. Все подведенное тепло расходуется на парообразование. Поэтому скорость отвода пара от поверхности теплообмена можно определить из уравнения теплового баланса:

$$w_* = \frac{Q}{\rho_{п} F} = \frac{q}{\rho_{п}}.$$

Эта скорость называется приведенной скоростью парообразования (кипения). Внутри двухфазного слоя действительная скорость движения пара должна быть больше этой величины, так как в среднем в каждом горизонтальном сечении площадь, занимаемая паром, составляет лишь φF . Из уравнения неразрывности следует, что $w_{п} = w_*/\varphi$.

Это соотношение приближенное, так как при его выводе не учитывался рост пузырьков при всплывании. При высоких давлениях насыщения неточность, связанная с этим, по-видимому, невелика.

Действительная (или истинная) скорость $w_{п}$ пара в двухфазном слое обычно оказывается больше скорости всплывания отдельных пузырьков в малоподвижной жидкости. Это связано с тем, что при разрыве кипения жидкость над поверхностью нагрева довольно интенсив-

но движется вверх в виде отдельных струй или столбов, увлекаемая паровыми пузырьками. Нисходящее движение, компенсирующее это подъемное движение жидкости в центральной части сосуда, происходит около стенок, где количество пузырьков меньше и жидкость в среднем «тяжелее». Вследствие такой циркуляции основное количество пузырьков всплывает в восходящем потоке жидкости.

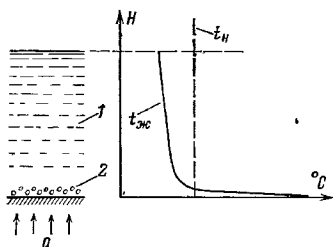


Рис 13-11. Распределение температуры в недогретой жидкости.

1 — однофазная жидкость; 2 — кипящий пограничный слой

Потому скорость их подъема относительно стенок сосуда оказывается большей, чем вычисленная по приведенным формулам для малоподвижной жидкости.

Иную структуру имеет поток при кипении жидкости, недогретой до температуры насыщения (рис. 13-11). В этом случае двухфазное состояние наблюдается лишь в пристенной области. Поверхностное кипение начинается при температурном напоре $\Delta t_{\text{нач}}$, при котором тепловой поток может быть найден из условий конвекции однофазной жидкости. С другой стороны, тепловой

поток $q_{\text{кп}}$ может быть определен из условий кипения жидкости (см. ниже). Уравнение теплового баланса позволяет выразить искомое значение температурного напора

$$\Delta t_{\text{нач}} = t_c - t_{\text{ж}} = \frac{q_{\text{кп}}}{\alpha},$$

определить температуру стенки t_c , а затем найти $q_{\text{кп}}$, при котором начинается поверхностное кипение. Тепловой поток, соответствующий началу кипения, увеличивается с повышением недогрева жидкости [Л. 136].

13-3. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

Процесс теплоотдачи при кипении жидкости отличается весьма большой сложностью. В зависимости от конкретных внешних условий наблюдается большое многообразие гидродинамических форм потока при кипении и чрезвычайная сложность отвечающих им количественных закономерностей для теплоотдачи. Поэтому строгой теории для процесса теплоотдачи при кипении жидкости пока не существует.

В приближенных теориях могут быть использованы различные подходы к процессу теплообмена. Одним из важных направлений в теории теплообмена при кипении жидкости является нахождение количественных связей между характеристиками микрокипения (размеры, характерные скорости движения пузырей; частота отрыва, число центров и др.) и интегральными характеристиками (q , α), необходимыми для технических расчетов.

Может быть использован подход, в котором коэффициент теплоотдачи выражается через величины, определяющие тепловую проводимость жидкой прослойки под паровыми пузырями [Л. 102, 126]. Чаще всего количественная связь между коэффициентом теплоотдачи и

факторами, от которых он зависит, устанавливается экспериментальным путем с использованием теории подобия.

Анализ условий подобия [Л. 85] основывается на следующих исходных положениях. Рассматривается однокомпонентная смачивающая жидкость ($\theta < \pi/2$) при постоянных физических параметрах в условиях свободного движения. Принимается, что тепловой поток от поверхности нагрева воспринимается жидкой фазой и режим кипения — пузырьковый. Кипение происходит на горизонтальной плоской стенке (рис. 13-10). Размеры поверхности нагрева велики по сравнению с размерами паровых пузырьков. Температурное поле в жидкой фазе определяется системой дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Она включает уравнение энергии

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \vec{w} \text{grad } t = a_{\text{ж}} \nabla^2 t,$$

уравнение движения

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + (\vec{w} \text{grad}) \vec{w} = -\frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \text{grad } p + \nu_{\text{ж}} \nabla^2 \vec{w},$$

уравнение сплошности

$$\text{div } \vec{w} = 0.$$

Эта система уравнений дополняется:

уравнением движения парового пузыря, характеризующим условие равновесия между подъемной силой и силой гидравлического сопротивления:

$$(\pi/6) d^3 q (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) = c (\pi/4) d^2 \rho_{\text{п}} u^2 / 2,$$

где d — текущее значение диаметра пузыря; $u = \omega_{\text{п}} - \omega_{\text{ж}}$ — относительная скорость подъема пузыря; c — коэффициент лобового сопротивления.

Уравнением теплообмена на поверхности парового пузыря, характеризующим тепловой поток, подводимый к поверхности пузыря за счет теплопроводности и затрачиваемый на испарение жидкости внутрь пузыря, что обуславливает рост его объема:

$$-\int \lambda_{\text{ж}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} dF = r \rho_{\text{п}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\pi d^3}{6} \right);$$

здесь n — нормаль к внешней поверхности парового пузыря; dF — элемент поверхности парового пузыря.

В реальных условиях на единице поверхности действуют z центров парообразования, причем

$$z = f(d_0, R_{\text{к}}).$$

В условиях однозначности принимается, что температура жидкости на свободной поверхности равна $t_{\text{н}}$; на поверхности нагрева задана постоянная температура $t_{\text{с}}$.

Анализ указанной системы дифференциальных уравнений и условий однозначности методами теории подобия позволяет получить уравнение подобия:

$$\frac{c d_0}{\lambda_{\text{ж}}} = f \left(\frac{\nu_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}}, \frac{R_{\text{к}}}{d_0}, \frac{c_p \Delta t}{d_0} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{п}}} \right). \quad (13-8)$$

Диаметр d_0 согласно (13-7) при $\theta = \text{const}$ пропорционален капиллярной постоянной $\delta = \sqrt{\sigma/g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{н}})}$, которая имеет размерность длины. Величина $R_{\text{к}}$, как это следует из уравнения (13-4), зависит от температурного напора $\Delta t = t_{\text{с}} - t_{\text{н}}$. Поэтому удобнее критерии в (13-8) несколько преобразовать, заменяя одновременно d_0 на δ .

Обозначим:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta}{\lambda_{\text{ж}}}; K_z = \frac{R_{\text{к}}}{2\delta} \frac{c_p \Delta t}{r} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{н}}}; K_q = \frac{q \delta}{\rho_{\text{н}} r a_{\text{ж}}} \frac{\delta}{l_*}; \text{Pr} = \frac{\nu_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}},$$

где

$$l_* = \frac{R_{\text{к}}}{2} \frac{c_p \Delta t}{r} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{н}}} = c_p c \rho_{\text{ж}} T_{\text{н}} / (r \rho_{\text{н}})^2 = \frac{1}{2} R_{\text{к}} \text{Ja}.$$

Величина l_* является характерным линейным размером. Она имеет размерность длины и пропорциональна критическому радиусу $R_{\text{к}}$, отношению энтальпии перегрева жидкости к теплоте парообразования и отношению плотностей паровой и жидкой фаз.

Тогда уравнение (13-8) может быть записано в виде

$$\text{Nu} = 0,082 K_z^{0,38} K_q^{0,7} \text{Pr}^{-0,45}. \quad (13-9)$$

Безразмерные комплексы K_z и K_q определяют соответственно число действующих центров парообразования и частоту отрыва паровых пузырей в этих центрах.

Теплоотдача на погруженных поверхностях при развитом кипении не зависит от формы и ориентации теплоотдающей поверхности (если реализованы условия беспрепятственного отвода пузырьков пара). Это означает, что ускорение поля тяжести не должно оказывать заметного влияния на теплоотдачу.

Если принять, что теплоотдача автомодельна относительно величины ускорения сил поля тяжести, то последнее уравнение приобретает вид [Л. 98]:

$$\text{Nu}_* = f_1(\text{Re}_*, \text{Pr}_{\text{ж}}). \quad (13-10)$$

В этом уравнении приняты следующие обозначения:

$$\text{Nu}_* = \frac{\alpha l_*}{\lambda_{\text{ж}}}; \text{Re}_* = \frac{w_* l_*}{\nu_{\text{ж}}}; \text{Pr}_{\text{ж}} = \frac{\nu_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}}.$$

Основным термическим сопротивлением является поверхностная пленка жидкости под паровыми пузырями. Толщина ее увеличивается с увеличением $\nu_{\text{ж}}$ и уменьшается с ростом интенсивности парообразования. Число Re_* является мерой влияния этих эффектов.

Коэффициент теплоотдачи при кипении насыщенной и недогретой жидкости выражается следующим образом:

$$\alpha = q / (t_{\text{с}} - t_{\text{н}}).$$

Уравнение подобия (13-10) было положено в основу обобщения большого числа опытных данных при кипении различных жидкостей (включая жидкие металлы). В результате обобщения получена формула [Л. 96]

$$\text{Nu}_* = c \text{Re}_*^n \text{Pr}^{1/3}. \quad (13-11)$$

Физические параметры, входящие в числа подобия, берутся при температуре насыщения.

Значения постоянных при кипении неметаллических жидкостей составляют:

при $Re_* \leq 0,01$ $c=0,0625$; $n=0,5$;

при $Re_* \geq 0,01$ $c=0,125$; $n=0,65$.

Зависимость справедлива в области значений величин

$$Re_* = 10^{-5} \div 10^4; Pr_{ж} = 0,86 \div 7,6; \omega \leq 7 \text{ м/с}$$

для широкого диапазона давлений насыщения (до околокритических давлений).

В случае кипения жидких металлов $Re_* \geq 0,01$; показатель степени при числе Прандтля равен 0,65.

В эти зависимости не вошло паросодержание, так как оно оказывает малое влияние на теплоотдачу в области развитого кипения.

Приближенная автомодельность теплоотдачи относительно величин g (или, что то же самое, отрывного диаметра d_0) для развитого пузырькового кипения подтверждается рядом экспериментов, проведенных как при перегрузках, так и при малых значениях ускорения поля тяжести, т. е. при условиях, приближающихся к условиям невесомости. Эти же соображения объясняют и то, что закономерности развитого кипения в условиях свободного и вынужденного движения кипящей жидкости являются практически одинаковыми. Ряд внешних факторов (вибрация поверхности, наложение электрических полей и др.) оказывают влияние на теплоотдачу лишь при малых плотностях теплового потока. Но с увеличением q_c их влияние постепенно вырождается [Л. 102].

Для определенного рода жидкости коэффициент теплоотдачи при развитом кипении зависит лишь от тепловой нагрузки и давления насыщения. Поэтому для практических расчетов удобно применять эмпирические размерные зависимости. Эти зависимости устанавливаются либо непосредственно из анализа опытных данных, либо на основе обобщенных критериальных формул. Для воды в диапазоне давлений примерно от 1 до 40 бар ($p/p_{кр} \leq 0,18$, рис. 13-6) получены зависимости [Л. 124, 157]

$$\alpha = 3,0 q^{0,7} p^{0,15}, \quad (13-12)$$

$$\alpha = 38,7 \Delta t^{2,33} p^{0,5}, \quad (13-13)$$

в которые q и p следует подставлять соответственно в ваттах на квадратный метр и в барах.

13-4. СТРУКТУРА ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА И ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ТРУБ

А. Вертикальная труба

Труба или канал представляет собой ограниченную систему, в которой при движении кипящей жидкости происходят непрерывное увеличение паровой и уменьшение жидкой фаз. Соответственно этому изменяется и гидродинамическая структура потока как по длине, так и по поперечному сечению трубы, а следовательно, изменяется и теплоотдача.

Наблюдаются три основные области с разной структурой потока жидкости по длине вертикальной трубы при движении потока снизу

вверх (рис. 13-12): *I* — область подогрева (экономайзерный участок, до сечения трубы, где $T_c = T_n$); *II* — область кипения (испарительный участок, от сечения, где $T_c = T_n$, $i_{ж} < i_n$, до сечения, где $T_c > T_n$, $i_{см} \rightarrow i_n$); *III* — область подсыхания влажного пара.

Испарительный участок включает в себя области с поверхностным кипением и объемным кипением насыщенной жидкости. Участок трубы с объемным кипением насыщенной жидкости включает в себя области эмульсионного 3, пробкового 4 и стержневого 5 режимов течения¹. В эмульсионном режиме двухфазный поток состоит из жидкости и равномерно распределенных в ней мелких пузырьков. С дальнейшим увеличением паросодержания некоторые из них сливаются, образуя крупные пузыри-пробки, соизмеримые с диаметром трубы. При пробковом режиме пар движется в виде отдельных крупных пузырей-пробок, разделенных прослойками жидкой эмульсии; с увеличением паросодержания происходит слияние уже крупных пузырей и образование так называемой стержневой структуры потока, при которой в ядре потока сплошной массой движется влажный пар, а у стенки трубы — тонкий кольцевой слой жидкости. Толщина этого слоя постепенно уменьшается по мере испарения; после полного испарения жидкости эта область переходит в область подсыхания б. Область подсыхания (дисперсный режим) наблюдается лишь в длинных трубах.

Увеличение скорости циркуляции (см. § 12-3) при заданных q_c , длине трубы и температуре на входе приводит к уменьшению участка с развитым кипением и увеличению длины экономайзерного участка; с увеличением q_c при заданной скорости, наоборот, длина участка с развитым кипением увеличивается, а длина экономайзерного участка уменьшается.

Б. Горизонтальные и наклонные трубы

При движении двухфазного потока внутри труб, расположенных горизонтально или с небольшим наклоном, кроме изменения структуры потока по длине, имеет место значительное изменение структуры по периметру трубы. Так, если скорость циркуляции и содержание пара в потоке невелики, наблюдается расслоение двухфазного потока на жидкую фазу, движущуюся в нижней части трубы, и паровую, движущуюся в верхней части ее (рис. 13-13,а). При дальнейшем увеличении паросодержания и скорости циркуляции поверхность раздела между паровой и жидкой фазами приобретает волновой характер и жидкость гребнями волн периодически смачивает верхнюю часть трубы. С дальнейшим увеличением содержания пара и скорости волновое движение на границе раздела фаз усиливается, что приводит к частичному выбрасыванию жидкости в паровую область. В результате двухфазный поток приобре-

¹ Последний называют еще кольцевым режимом в связи с образованием на стенке трубы слоя жидкости

тает характер течения, сначала близкий к пробковому, а потом — к кольцевому. При кольцевом режиме по всему периметру трубы устанавливается движение тонкого слоя жидкости, в ядре потока перемещается парожидкостная смесь (рис. 13-13, б). Однако и в этом случае полной осевой симметрии в структуре потока не наблюдается.

Рассмотрим характеристики двухфазного потока в трубах и каналах.

Общий массовый расход смеси жидкости и пара $G_{см}$, кг/с, равен:

$$G_{см} = G_{ж} + G_{п}$$

и является постоянной величиной, одинаковой в любом сечении канала.

Массовым расходным паросодержанием называют отношение расхода пара к расходу смеси:

$$x = \frac{G_{п}}{G_{см}} = \frac{G_{п}}{G_{ж} + G_{п}}. \quad (13-14)$$

При кипении жидкости, движущейся внутри трубы, величина x может изменяться в общем случае от нуля (движется только жидкость) до единицы (движется только пар). Итак, значения массовых расходных паросодержаний лежат в пределах $0 \leq x \leq 1$.

Массовым расходам $G_{ж}$ и $G_{п}$ соответствуют объемные расходы (m^3/c):

$$V_{ж} = G_{ж}/\rho_{ж}; \quad V_{п} = \frac{G_{п}}{\rho_{п}}.$$

Сумма их называется объемным расходом смеси:

$$V_{см} = V_{ж} + V_{п}.$$

В отличие от массового расхода объемный расход смеси в общем случае переменен по длине трубы и может изменяться от значения $V_{см} = G_{см}/\rho_{ж}$, если на входе движется только жидкость, до величины $V_{см} = G_{см}/\rho_{п}$, если на выходе течет один пар. При полном испарении жидкости объемный расход увеличивается в $\rho_{ж}/\rho_{п}$ раз. Скорости жидкости на входе ($x=0$) соответствует скорость циркуляции (12-28). При полном испарении жидкости скорость пара на выходе также в $\rho_{ж}/\rho_{п}$ раз выше скорости циркуляции. При низких давлениях, когда $\rho_{ж} \gg \rho_{п}$, увеличение скорости значительно. Поэтому при кипении жидкости внутри труб и каналов происходит, значительное ускорение потока по мере увеличения содержания пара.

Объемное расходное паросодержание равно отношению объемного расхода пара к объемному расходу смеси:

$$\beta = \frac{V_{п}}{V_{см}} = \frac{V_{п}}{V_{ж} + V_{п}}. \quad (13-15)$$

Величины x и β связаны соотношением

$$\frac{x}{1-x} = \rho_{п}/\rho_{ж} \frac{\beta}{1-\beta}.$$

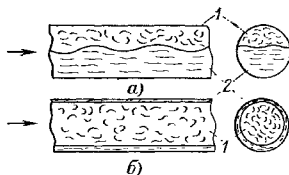


Рис. 13-13. Структура потока при кипении жидкости внутри горизонтальной трубы.

а — распыленный режим кипения; б — стержневой режим; 1 — пар; 2 — жидкость.

по которому можно пересчитать x на β и обратно. При $x=0$ значение $\beta=0$; при $x=1$ значение $\beta=1$. В остальной области всегда $x < \beta$, так как отношение $\rho_{\text{п}}/\rho_{\text{ж}} < 1$.

При движении двухфазного потока площадь поперечного сечения трубы f частично занята паром $f_{\text{п}}$ и частично жидкостью $f_{\text{ж}}$.

Истинное объемное паросодержание будет характеризовать величина

$$\varphi = \frac{f_{\text{п}}}{f} = \frac{f_{\text{п}}}{f_{\text{ж}} + f_{\text{п}}}. \quad (13-16)$$

Истинные паросодержания имеют большое значение для расчета кипящих ядерных реакторов.

Истинные скорости жидкости и пара в данном сечении связаны с величиной φ :

$$w_{\text{п}} = \frac{V_{\text{п}}}{f_{\text{п}}} = \frac{V_{\text{п}}}{f\varphi}; \quad w_{\text{ж}} = \frac{V_{\text{ж}}}{f_{\text{ж}}} = \frac{V_{\text{ж}}}{f(1-\varphi)}.$$

Приведенными скоростями пара и жидкости называются величины

$$w_{\text{пр.п}} = \frac{V_{\text{п}}}{f}; \quad w_{\text{пр.ж}} = \frac{V_{\text{ж}}}{f}.$$

Название «приведенные» взято потому, что здесь объемные расходы отнесены (приведены) к полному сечению канала. Приведенные скорости представляют собой условные величины. Сумма приведенных скоростей пара и жидкости характеризует истинную скорость смеси

$$w_{\text{см}} = w_{\text{пр.п}} + w_{\text{пр.ж}} = \frac{V_{\text{п}} + V_{\text{ж}}}{f}.$$

Разность истинных скоростей фаз называют скоростью скольжения:

$$u_{\text{ск}} = w_{\text{п}} - w_{\text{ж}}.$$

При положительной скорости скольжения пар движется быстрее жидкости. В вертикальных трубах при подъемном движении, а также в горизонтальных трубах скольжение положительно. Отрицательное скольжение имеет место в вертикальных трубах при опускном движении.

При эмульсионном и пробковом режимах течения паровая фаза еще достаточно диспергирована (раздроблена), так что скольжение невелико, если скорости циркуляции значительны. При стержневом режиме из-за расслоенного течения величины $u_{\text{ск}}$ могут быть значительны. Во всех случаях с увеличением скорости циркуляции относительное скольжение уменьшается. При $u_{\text{ск}}=0$ $w_{\text{ж}}=w_{\text{п}}$; $\varphi=\beta$.

Итак, истинное объемное паросодержание φ равно расходу объемному паросодержанию β тогда, когда истинные скорости движения пара и жидкости совпадают.

Найдем энтальпию смеси $i_{\text{см}}$. Пусть на входе в трубу жидкость имеет температуру насыщения $T_{\text{н}}$ и энтальпию насыщения $i_{\text{н}}$. Если известно, что на участке трубы длиной l подведено тепло в количестве Q , то из уравнения теплового баланса

$$Q = G_{\text{см}}(i_{\text{см}} - i_{\text{н}})$$

определяется энтальпия смеси $i_{\text{см}}$ в сечении трубы на расстоянии l от входа. Подведенный поток тепла целиком расходуется на парообразо-

вание. Поэтому массовый расход пара в этом сечении определяется уравнением

$$Q = rG_{\text{п.}}$$

Из сравнения последних двух выражений следует, что

$$\frac{G_{\text{п.}}}{G_{\text{см}}} = x = \frac{i_{\text{см}} - i_{\text{н.}}}{r}. \quad (13-17)$$

Эта зависимость показывает, что относительная энтальпия двухфазного потока $(i_{\text{см}} - i_{\text{н.}})$, измеренная в долях теплоты преобразования r , при кипении жидкости в трубах и каналах равна массовому расходу паросодержанию потока в данном сечении. Утверждение верно, если на входе имеется насыщенная жидкость или двухфазная смесь.

Если на входе в трубу жидкость недогрета, то на участках, где $i_{\text{ж}} = i_{\text{см}} < i_{\text{н.}}$ (экономайзерный участок), параметр $(i_{\text{см}} - i_{\text{н.}})/r$ имеет отрицательное значение. В этом случае он представляет собой относительную энтальпию недогрева потока в данном сечении. Следует указать, что в области поверхностного кипения, когда $i_{\text{см}} < i_{\text{н.}}$ несмотря на отрицательное значение этого параметра, в потоке в действительности имеется небольшой расход пара за счет движения кипящего граничного слоя (рис. 13-12).

При $i_{\text{см}} = i_{\text{н.}}$ параметр x формально равен нулю, однако в действительности в ядре потока жидкость еще недогрета, тогда как около поверхности при больших тепловых нагрузках имеется кипящий граничный слой. При входе в канал недогретой жидкости величина $x = (i_{\text{см}} - i_{\text{н.}})/r$ совпадает с расходным паросодержанием только для удаленных от входа сечений, где $x > 0$, т. е. в зоне, где вся жидкость достигла температуры насыщения.

В. Зависимость теплоотдачи от параметра x

Теплообмен при кипении в трубах определяется фазовой структурой парожидкостной смеси. С увеличением параметра x коэффициент теплоотдачи повышается, достигая максимальных значений при весовом

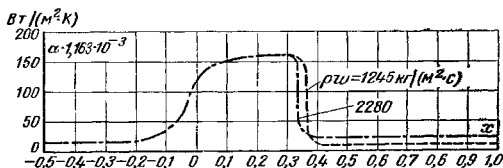


Рис. 13-14. Зависимость коэффициента теплоотдачи от параметра x
 $p = 1,75 \cdot 10^5$ Па; $q = 5 \cdot 10^5$ Вт/м².

паросодержании 0,3—0,40 ($\beta \approx 0,98\%$). Затем он резко снижается, приближаясь к значениям, соответствующим чистому пару (рис. 13-14), и наступает область подсыхания с минимальной интенсивностью теплоотдачи. Область подогрева жидкости соответствует значениям $x \approx -0,2$, после чего начинается поверхностное, а затем объемное кипение. Максимальные значения коэффициента теплоотдачи соответствуют стержнево-

му режиму объемного кипения, в котором толщина пленки жидкости (представляющей основное тепловое сопротивление, как и при конвекции однофазной жидкости) имеет малую толщину, а в ядре потока движется пар с большой скоростью. Внешняя поверхность пленки имеет волнистый характер. Вследствие этого капли жидкости срываются паром и уносятся в ядро потока. По мере увеличения x пленка утончается, волнообразование и, следовательно, срыв капель прекращаются.

При полном испарении пленки происходит резкое падение теплоотдачи (режим сухой стенки). Паросодержание, которому соответствуют максимальные значения теплоотдачи, зависит от скорости, давления, физических свойств жидкости и пара и прочих факторов. С повышением скорости паросодержание, при котором коэффициенты теплоотдачи являются наибольшими, уменьшается. Для определения величины этого паросодержания существуют специальные расчетные зависимости [Л. 78].

Г. Изменение температуры поверхности и жидкости по длине вертикальной трубы

Изменение температуры внутренней поверхности трубы по длине находится в полном соответствии с интенсивностью теплообмена (рис. 13-12 и 13-14). В области подогрева жидкости 1, когда внутри

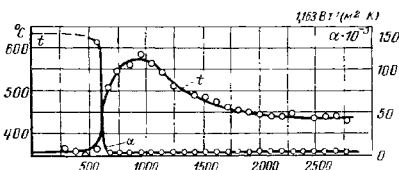


Рис. 13-15 Изменение α и t_c по длине вертикальной трубы в области ухудшения теплоотдачи.

$d=8$ мм; $\rho\omega=670$ кг/(м²·с); $p=1,96 \cdot 10^5$ Па.

трубы движется однофазный поток, температуры t_c и $t_{ж}$ одновременно растут по длине трубы. На участке поверхности кипения 2 температура стенки устанавливается практически постоянной, а температура жидкости повышается. Области 3, 4 и 5 соответствуют объемному кипению в трубе; температура t_c не изменяется; температура

жидкости, достигнув температуры насыщения, практически сохраняется постоянной; температурный напор между стенкой и двухфазным потоком вследствие возрастающих значений коэффициента теплоотдачи сокращается до нескольких градусов. При дальнейшем развитии процесса этот перепад продолжает несколько уменьшаться, а затем он возрастает за счет резкого уменьшения теплоотдачи. Последний случай, связанный с ухудшением теплоотдачи, отдельно приведен на рис. 13-15. Он показывает характер изменения коэффициента теплоотдачи и температуры поверхности в области ухудшения теплоотдачи [Л. 78].

Д. Изменение температуры по периметру горизонтальной трубы

Изменение температуры по периметру горизонтальной трубы в условиях кипения воды при давлениях, близких к критическому [Л. 167], показано на рис. 13-16. Наибольшая неравномерность распределения температуры, а следовательно, и теплоотдачи относится к расслоенной структуре потока (кривая 1), наименьшая — к стержневой (кривая 2). Стержневому режиму соответствует наибольшая теплоотдача. Условия

теплообмена при кипении в трубах в эмульсионно-пробковой области близки к условиям теплообмена в большом объеме. Значения коэффициента теплоотдачи при стержневой структуре потока в трубах могут быть несколько выше, чем при кипении в большом объеме.

13-5. РАСЧЕТ ТЕПЛОТДАЧИ ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ТРУБАХ

В этом случае интенсивность теплообмена определяется взаимодействием факторов, определяющих интенсивность теплообмена при кипении жидкости (α_q), и факторами гидродинамического воздействия на нее, обусловленными вынужденной конвекцией (α_w). Расчет теплоотдачи в условиях вынужденного движения двухфазного потока выражается функциональной зависимостью ($Re \geq Re_{кр}$):

$$Nu_* = f(Re_*, Re, Pr),$$

где число $Re = wd/\nu$ определяется по скорости циркуляции жидкости $w = G_{см}/\rho_{ж}$. На практике используется интерполяционная зависимость [Л. 96], которая для теплоотдачи перегретой жидкости имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_w} = \frac{4\alpha_q + \alpha_q}{5\alpha_w - \alpha_q} \quad (13-18)$$

для отношения α_q/α_w , меняющегося от 0,5 до 2 (рис. 13-17). При величине этого отношения менее 0,5 принимают $\alpha = \alpha_w$, а если $\alpha_q/\alpha_w > 2$, то $\alpha = \alpha_q$; здесь α_q — коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по формуле развитого кипения (когда скорость не влияет на теплообмен); α_w — коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по формулам конвективного теплообмена однофазной жидкости (когда кипение не влияет на теплообмен). Из графика следует, что протяженность области, в которой $\alpha = f(w, q)$, очень мала.

Зависимость (13-18) справедлива при средних объемных паросодержаниях, не превышающих 70%. При высоких паросодержаниях скорость циркуляции недостаточно полно учитывает конвективную составляющую теплоотдачи. Поэтому расчеты теплоотдачи проводятся с учетом интенсифицирующего воздействия истинной скорости движения потока в ядре [Л. 14, 169, 187].

13-6. МЕХАНИЗМ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПЛЕНОЧНОМ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

Пленочное кипение наблюдается при закалке металлов в жидкой среде, в ряде быстродействующих перегонных аппаратов, при кипении криогенных жидкостей, при охлаждении жидкостью ракетных двигателей на химическом топливе и атомных ракетных двигателей. При высоких давлениях абсолютная величина α при пленочном кипении становится значительной (рис. 13-18), поэтому пережога кипяточной трубы

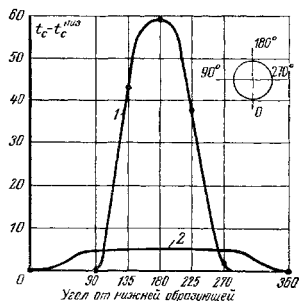


Рис. 13-16. Изменение избыточной температуры стенки по периметру при кипении жидкости внутри горизонтальной трубы. 1 — расслоенный режим течения, 2 — кольцевой режим; $t_{с, макс}$ — температура на нижней образующей.

не происходит, хотя температурный напор между стенкой и жидкостью заметно повышается. Это делает допустимым использование процессов теплообмена с пленочным кипением также в различных парогенерирующих устройствах [Л. 12].

В реакторах прямоточного типа охлаждающая вода поступает в недогретом состоянии, а выходит в виде перегретого пара. В таком реакторе по мере течения пароводяной смеси коэффициент теплоотдачи изменяется по закону конвекции однофазного потока на входном и вы-

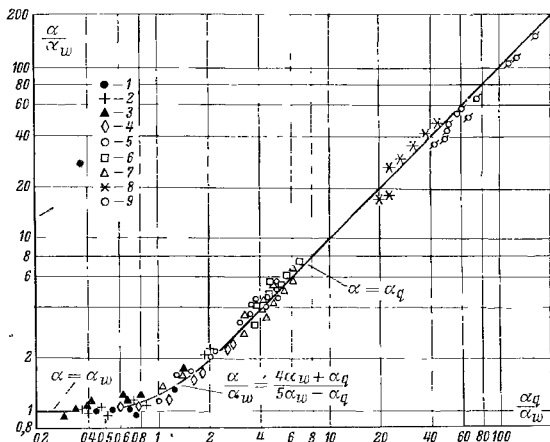


Рис 13-17 Отношение коэффициентов теплоотдачи кипящей и некипящей жидкости 1—7 — вода при $p=(0,5-86) \cdot 10^5$ Па, $w=0,5-6,67$ м/с, 8—9 — этиловый спирт при $p=(10-30) \cdot 10^5$ Па, $w=0,2-0,81$ м/с

ходном участках, а на промежуточном участке — по законам кипения в условиях пузырькового и пленочного режимов. При пленочном кипении теплоотдача значительно меньше, чем при пузырьковом. Однако благодаря большому расходу пара температура поверхности остается ниже температуры плавления материала и разрушения поверхности теплообмена не происходит. Поэтому пленочный режим кипения имеет большое практическое значение.

Как отмечалось выше, при пленочном кипении жидкость отделена от обогреваемой поверхности паровым слоем. Теплота к поверхности раздела фаз поступает через малотеплопроводный слой пара. В условиях свободного движения коэффициент теплоотдачи мало изменяется с изменением теплового потока (рис. 13-18). Влияние давления и физических свойств на теплоотдачу сохраняется существенным, как и при пузырьковом кипении.

Через паровую пленку кроме теплоты за счет конвекции и теплопроводности может проходить теплота и за счет лучистого теплообмена. Поэтому на коэффициент теплоотдачи влияют еще коэффициенты излучения поверхности теплообмена, поверхности жидкости, а также излучающие свойства самого пара. Доля лучистого переноса теплоты

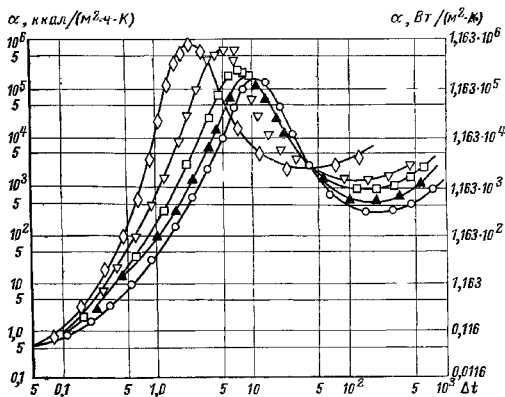


Рис. 13-18. Влияние p на α при кипении воды на горизонтальной проволоке из хромеля. $d=1$ мм.

○ — $p=1$; ▲ — 2,8; □ — 4,6; ▽ — 6,3; ◇ — $8,1 \cdot 10^5$ Па.

резко увеличивается по мере увеличения перегрева жидкости. Обе формы переноса теплоты — конвективным теплообменом и излучением — оказывают взаимное влияние друг на друга. Оно проявляется в том, что пар, образующийся благодаря излучению, приводит к утолщению паровой пленки и соответствующему уменьшению интенсивности переноса теплоты за счет конвекции и теплопроводности.

При пленочном кипении насыщенной жидкости тепловой поток, отводимый от поверхности нагрева, расходуется не только на испарение слоев жидкости, расположенных на границе паровой пленки. Часть отводимой теплоты идет также на перегрев пара в пленке, так как средняя температура паровой пленки выше температуры насыщения.

При пленочном кипении недогретой жидкости теплота, которая проходит через паровую пленку с поверхности кипения, частично передается в объем жидкости путем конвекции. Интенсивность конвективного переноса теплоты в объем жидкости зависит от недогрева и скорости циркуляции жидкости. Оба фактора влияют на теплоотдачу благоприятно.

13-7. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ПАРОВОЙ ПЛЕНКИ

Расчетные данные для теплоотдачи при пленочном кипении можно получить теоретическим путем. Для этого используется приближенная физическая модель, аналогичная принятой в теории пленочной конденсации пара (§ 12-2). Идентична и исходная система уравнений и условий однозначности.

Решение для среднего коэффициента теплоотдачи вертикальной стенки высотой h имеет вид:

$$\alpha = 0,943 \sqrt[4]{\frac{\lambda_p^3 \rho_p^2 (p_{\text{ж}} - p_{\text{п}})}{\mu_p \Delta t h}}. \quad (13-19)$$

Средний коэффициент теплоотдачи при кипении жидкости на нагреваемой поверхности горизонтального цилиндра диаметром d выражается зависимостью

$$\alpha = 0,728 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ж}}^3 \rho_{\text{ж}} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) g}{\mu_{\text{ж}} \Delta t d}} \quad (13-20)$$

Последние две зависимости формально совпадают с расчетными уравнениями для теплоотдачи при пленочной конденсации пара на холодной стенке. Зависимости для теплоотдачи учитывают перенос теплоты поперек паровой пленки только путем теплопроводности. Лучистая (радиационная) составляющая коэффициента теплоотдачи может быть найдена расчетным путем (гл. 18).

При учете действия сил инерции в паровой пленке и касательных напряжений на границе ее с жидкостью наряду со слоем пара (рис. 13-19) рассматривается пограничный слой жидкости. Поэтому исходная система дифференциальных уравнений энергии и движения для паровой пленки дополняется аналогичной системой уравнений для пограничного слоя жидкости. При этом граничное условие для поверхности раздела паровой и жидкой фаз принимает вид:

$$w_{\text{жп}} = w_{\text{жж}}; \quad t = t_{\text{п}}; \quad \mu_{\text{п}} \frac{\partial w_{\text{жп}}}{\partial y} = \mu_{\text{ж}} \frac{\partial w_{\text{жж}}}{\partial y} \quad (13-21)$$

Условие непрерывности процесса массообмена в поперечном направлении к поверхности раздела представляется зависимостью

$$\rho_{\text{п}} \left(\frac{d\delta_{\text{п}}}{dx} w_{\text{жп}} - w_{y\text{п}} \right) = \rho_{\text{ж}} \left(\frac{d\delta_{\text{ж}}}{dx} w_{\text{жж}} - w_{y\text{ж}} \right) \quad (13-22)$$

при $y \rightarrow \infty$; $w_{\text{жж}} = 0$; $t = t_{\text{н}}$; δ — толщина пленки.

При таком уточненном подходе следует учитывать также перегрев пара в пленке.

Результаты численных решений для распределения скорости и температуры [Л. 79] приведены на рис. 13-20 и 13-21 ($\text{Pr} = 1$). Из них следует, что характер распределения скорости и температуры в паровой пленке аналогичен соответствующим профилям в пограничном слое однофазной жидкости в условиях свободной конвекции. При малых температурных напорах распределение температуры имеет практически линейный характер.

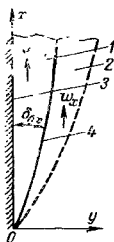


Рис 13-19. К теории пленочного кипения.

1 — паровая пленка,
2 — жидкость при $t_{\text{п}}$,
3 — обогреваемая стенка при $t_{\text{с}} = \text{const}$,
4 — граница раздела паровой и жидкой фаз

В отличие от пленочной конденсации пара в рассматриваемом случае на распределение скорости оказывает влияние параметр $\mu_{\text{прп}}/\mu_{\text{жрж}}$. Скорость на поверхности раздела фаз обращается в нуль только для жидкостей с очень малым значением параметра $\mu_{\text{прп}}/\mu_{\text{жрж}}$. Скорость движения самой паровой пленки увеличивается с увеличением указанного параметра, так как этому соответствует меньшая сила трения, приложенная к пару со стороны жидкости на границе раздела фаз. Поэтому коэффициент теплоотдачи увеличивается при увеличении $(\mu_{\text{прп}}/\mu_{\text{жрж}})^{0,5}$.

Теплоотдача при пленочном кипении зависит от недогрева жидкости относительно температуры насыщения. Влияние недогрева мало при малых значениях $c_{\text{рп}} \Delta t / r$ и, наоборот, велико при значительных

перегревах паровой пленки. Для поддержания пленочного кипения воды согласно расчетам минимальное значение параметра $c_{\text{пл}} \Delta t / r \geq 0,01$. Для предельного случая, когда имеет место сильное переохлаждение жидкости и потоки массы вещества через поверхность раздела фаз малы, расчетная зависимость для теплоотдачи при пленочном

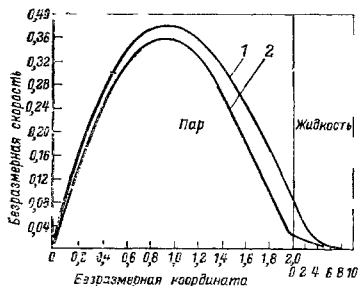


Рис. 13-20 Распределение скорости по толщине парового и пограничного слоев жидкости при пленочном кипении.

1 — при $(\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} / \mu_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}})^{0,5} = 0,1$; 2 — при $(\mu_{\text{п}} \rho_{\text{п}} / \mu_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}})^{0,5} = 0,01$; $\text{Pr}_{\text{п}} = 1$.

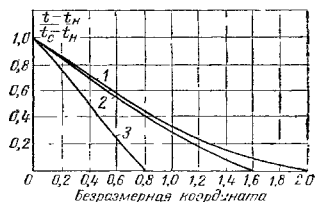


Рис. 13-21. Распределение температуры по толщине слоя паровой пленки при $\text{Pr}_{\text{п}} = 1$.

1 — $\frac{c_{\text{пл}} \Delta t}{r} = 10$; 2 — $\frac{c_{\text{пл}} \Delta t}{r} = 3$; 3 — $\frac{c_{\text{пл}} \Delta t}{r} = 0,18$ (масштаб по оси абсцисс для кривых разный; толщина пленки для кривой 1 — составляет 2 единицы, для кривой 2 — 1,6 единицы и для кривой 3 — 0,8 единицы).

кипении переходит в зависимость для теплоотдачи без кипения, т. е. для случая конвективного теплообмена однофазной жидкости. В случае пленочного кипения в условиях вынужденной конвекции учитывается влияние скорости [Л. 183].

13-8. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ ПАРОВОЙ ПЛЕНКИ

Для вертикальной стенки более вероятным является не ламинарный, а турбулентный характер движения пленки пара.

Выше указывалось (рис. 13-20, 13-21), что характер распределения скорости и температуры в пограничном слое при кипении является сходным с соответствующими профилями в пограничном слое при свободной конвекции однофазной жидкости. Поэтому теплоотдачу при пленочном кипении можно представить формой зависимости, которая применяется при конвекции однофазной жидкости. При турбулентном движении паровой пленки средняя теплоотдача описывается зависимостью [Л. 99]

$$\text{Nu}_r = 0,25 \text{ Ar}_r^{1/3}. \quad (13-23)$$

Применительно к пленочному кипению силой, определяющей движение пара в пленке, является сила, равная $g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})$. Поэтому число Архимеда будет выражаться соотношением

$$\text{Ar} = \text{Ga} \frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}}; \quad \text{Ga} = g l^3 / \nu_{\text{п}}^2.$$

Физические свойства относятся к средней температуре паровой пленки, на что указывает индекс «г».

Постоянная в зависимости (13-23) имеет значение 0,25 вследствие более интенсивного теплообмена при кипении по сравнению с конвекцией однофазной жидкости, когда постоянная равна 0,15.

Процесс теплообмена при турбулентном движении пленки является автомодельным по отношению к геометрической форме и размерам поверхности теплообмена. Поэтому он выпадает из зависимости (13-23).

13-9. КРИЗИСЫ КИПЕНИЯ

А. Первый кризис кипения

Кризисами теплоотдачи при кипении называются процессы, связанные с коренным изменением механизма теплоотдачи. Они наблюдаются в начале перехода пузырькового кипения в пленочное или в начале обратного перехода от пленочного кипения к пузырьковому.

Во многих теплообменных устройствах современной энергетики и ракетной техники поток теплоты, который должен отводиться от поверхности нагрева, является фиксированным и часто практически не зависит от температурного режима теплоотдающей поверхности. Так, теплоподвод к внешней поверхности экранных труб, расположенных в топке котельного агрегата, определяется в основном за счет излучения из топочного пространства. Падающий лучистый поток практически не зависит от температуры поверхности труб, пока она существенно ниже температуры раскаленных продуктов сгорания в топке. Аналогичное положение имеет место в каналах ракетных двигателей, внутри тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов) активной зоны атомного реактора, где происходит непрерывное выделение тепла вследствие ядерной реакции. Поэтому тепловой поток на поверхности ТВЭЛов также является заданным. Он является заданным и в случае выделения теплоты при протекании через тело электрического тока.

Переход от пузырькового к пленочному режиму кипения носит черты кризисного явления, так как в момент смены режимов кипения наблюдаются внезапное резкое снижение интенсивности теплоотдачи и соответствующее увеличение температуры теплоотдающей поверхности (рис. 13-4). Повышение температуры поверхности в ряде случаев так велико, что кризис кипения сопровождается разрушением (расплавлением или пережогом) поверхности теплообмена. После $q_{\max}$ даже при малом увеличении тепловой нагрузки слой паровых пузырей превращается в сплошную паровую пленку, которая оттесняет жидкость от поверхности теплообмена. В результате этого происходит коренное изменение механизма теплообмена, т. е. возникает кризис.

Обычно кризис кипения наступает раньше, чем температура поверхности приблизится к температуре предельного перегрева жидкости¹, при которой могут возникать зародыши паровой фазы спонтанного происхождения. Это объясняется тем, что при наличии готовых центров парообразования имеет место нарушение фазового массообмена и соответственно нарушение устойчивости режима пузырькового кипения. Однако с повышением давления фазовый массообмен у стенки улучшается, так как увеличивается плотность пара, уменьшается отрывной

¹ Температура перегрева жидкости определяется термодинамическим пределом метастабильного состояния, зависящего от давления.

диаметр и, следовательно, уменьшается объемная интенсивность парообразования. При нехватке готовых центров пузырьковое кипение сохраняется до тех пор, пока не появятся зародыши спонтанного происхождения. Поэтому с увеличением давления температура поверхности, при которой возникает кризис кипения, постепенно приближается к температуре предельного перегрева. На рис. 13-22 приведены линии предельного перегрева 1 и насыщения 2 при разных давлениях $p/p_{кр} = 0,5 \div 1$ при кипении двуокиси углерода [Л. 160]. Точками показаны опытные значения температуры поверхности, при которых возникает кризис кипения. Эти температуры практически совпадают с температурами предельного перегрева жидкости.

Максимальную тепловую нагрузку при пузырьковом кипении называют первой критической плотностью теплового потока и обозначают $q_{кр1}$.

Для условий кипения насыщенной жидкости в большом объеме при свободной конвекции значения критических нагрузок зависят от рода кипящей жидкости, давления, состояния поверхности, условий ее смачивания, наличия в жидкости примесей и поверхностно-активных добавок.

Если размеры поверхности нагрева больше размеров отдельных пузырьков пара, то форма и размер теплоотдающей поверхности оказывают малое влияние на значения критических тепловых нагрузок. Практически не оказывает также влияния величина ускорения поля массовых сил.

Температурный напор в момент достижения критической тепловой нагрузки (т. е. напор, соответствующий точке максимума на кривой кипения, показанной на рис. 13-4) называют критическим температурным напором $\Delta t_{кр}$. Коэффициент теплоотдачи в момент начала кризиса кипения равен:

$$\alpha_{кр1} = q_{кр1} / \Delta t_{кр1}.$$

В табл. 13-1 приведены характерные значения критических тепловых потоков и температурных напоров для воды и ряда криогенных жидкостей при атмосферном давлении.

Влияние давления на величины $q_{кр1}$, $\Delta t_{кр1}$ и $\alpha_{кр1}$ для воды, кипящей в большом объеме в условиях свободной конвекции [Л. 124], показано на рис. 13-23. Наибольшие значения критический тепловой поток имеет

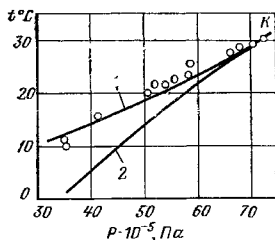


Рис. 13-22 Зависимость предельного перегрева жидкости от давления.

1 — линия предельного перегрева; 2 — линия насыщения; К — критическая точка, О — температура t_c в момент кризиса.

Таблица 13-1

Критические тепловые потоки и температурные напоры (первый кризис кипения)

Критический параметр	Жидкость			
	H ₂ O	O ₂	N ₂	H ₂
$q_{кр1} \cdot 10^{-3}, \text{ Вт/м}^2$	1200	150	100	30
$\Delta t_{кр1}, \text{ К}$	25—30	11	11	2

при давлениях примерно 60—80 бар. Это составляет около $(0,3 \div 0,4) \rho_{кр}$. Аналогичная картина наблюдается и для других жидкостей.

В основу определения первой критической плотности теплового потока кладется гидродинамическая теория кризисов, предложенная С. С. Кутателадзе [Л. 89]. В ней используется представление о кризисе

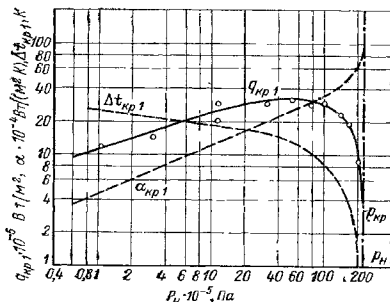


Рис 13-23. Зависимость $q_{кр}$, $\Delta t_{кр}$, $\alpha_{кр}$ от давления при кипении воды в большом объеме в условиях свободной конвекции.

при кипении как о процессе, характеризующемся чисто гидродинамической природой. Кризис вызывается потерей динамической устойчивости двухфазного потока вследствие того, что пар отбрасывает жидкость от поверхности теплообмена.

Условия устойчивости граничного двухфазного потока определяются взаимодействием кинетической энергии пара, гравитационных сил в двухфазном потоке и сил поверхностного натяжения. Порядок величин динамического напора пара определяется произведе-

нием $\omega_{кр}^2 \rho_{пр}$; порядок гравитационных сил — $g\delta(\rho_{ж} - \rho_{п})$, где δ — средняя толщина возникающего парового слоя, которая связана с поверхностным натяжением через капиллярную постоянную, так как принимается

$$\delta = \sqrt{\sigma / g(\rho_{ж} - \rho_{п})}.$$

Возникновение кризиса равновероятно в любом месте поверхности теплообмена и, следовательно,

$$\frac{\omega_{кр}^2 \rho_{пр}}{g\delta(\rho_{ж} - \rho_{п})} = \text{const}.$$

После введения капиллярной постоянной и извлечения квадратного корня последняя зависимость принимает вид:

$$\frac{\omega_{кр} \rho_{пр} \sqrt{\rho_{п}}}{\sqrt{g\sigma(\rho_{ж} - \rho_{п})}} = k.$$

Используя связь между приведенной скоростью парообразования и плотностью теплового потока $\omega_{кр} \rho_{пр} = q_{кр} / \rho_{п}$, получим следующее расчетное уравнение для первой критической плотности потока тепла:

$$q_{кр} = kr \sqrt{\rho_{п}} \sqrt{g\sigma(\rho_{ж} - \rho_{п})}; \quad (13-24)$$

здесь $q_{кр}$ измеряется в Вт/м².

Формула (13-24) описывает опытные данные по критическим тепловым потокам для неметаллических теплоносителей в условиях большого объема при свободной конвекции жидкости с малой вязкостью.

В областях глубокого вакуума и околочритического давления $\rho_{п}$, r , σ стремятся к нулю и $q_{кр} \rightarrow 0$ (рис. 13-23). Значения постоянной $k = 0,13 \div 0,16$. Величина k называется критерием устойчивости. Он характеризует меру отношения энергии динамического потока пара

к энергии, необходимой для ускорения частиц жидкости, отбрасываемых от стенки, до скорости основного потока. В условиях двухфазного потока при вынужденной конвекции его величина зависит от скорости [Л. 88].

Повышение величины $q_{кр1}$, Вт/м², вызванное недогревом жидкости, может быть найдено из экспериментальной зависимости [Л. 88]:

$$q_{кр1, н} = q_{кр1} \left[1 + 0,065 \left(\frac{\rho_{ж}}{\rho_{п}} \right)^{0,8} \frac{c_p \Delta t_{н}}{r} \right], \quad (13-25)$$

справедливой для $p = (1 \div 20) 10^5$ Па; $c_p \Delta t_{п}/r \leq 0,6$; $\rho_{ж}/\rho_{п} = 45 \div 1650$; $\Delta t_{н} = t_{н} - t_{ж}$ — недогрев жидкости до температуры насыщения.

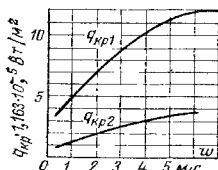


Рис. 13-24. Зависимость $q_{кр1}$ и $q_{кр2}$ от w при течении в трубе изопропилового спирта.

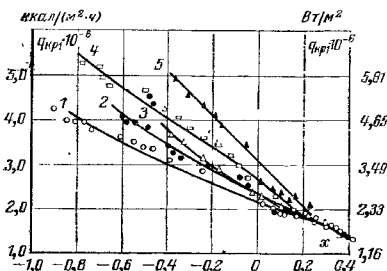


Рис. 13-25. Зависимость $q_{кр1}$ от параметра x при кипении воды в трубе ($p = 1,67 \cdot 10^5$ Па).

1 — $\rho w = 750$; 2 — $\rho w = 880$; 3 — $\rho w = 1100$; 4 — $\rho w = 1435$; 5 — $\rho w = 2190$ кг/(м² · с).

При кипении жидкости в условиях вынужденного движения внутри труб и каналов критический тепловой поток, кроме факторов, приведенных выше, зависит от скорости циркуляции и паросодержания. При увеличении скорости циркуляции жидкости критический поток увеличивается (рис. 13-24). На рис. 13-25 показано влияние параметра x на $q_{кр1}$ при различных скоростях жидкости на входе в трубу. Из графика следует, что критический тепловой поток уменьшается с ростом x при положительных значениях этого параметра. Уменьшение $q_{кр1}$ по мере роста параметра x в положительной области его значений указывает на влияние парообразования. Увеличение $q_{кр1}$ по мере роста абсолютных величин параметра x в отрицательной области его значений отражает влияние недогрева жидкости. Таким образом, переход пузырькового кипения в пленочное возможен как при

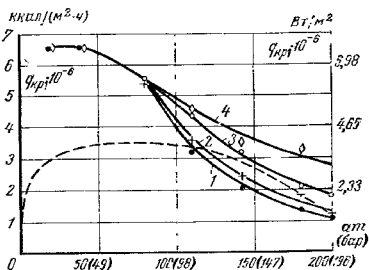


Рис. 13-26. Зависимость $q_{кр1}$ при кипении в большом объеме и внутри труб от давления (параметр $x=0$).

1, 2, 3, 4 соответствуют $w = 1, 2, 5, 8$ м/с.

отрицательных, так и положительных значениях параметра x . Одним из путей повышения $q_{кр1}$ является переход на большие величины ее недогрева. Существуют теоретические методы оценки максимально достижимых значений [Л. 103].

На рис. 13-26 приведено сопоставление критических нагрузок для условий кипения воды в большом объеме и при движении внутри трубы. Здесь для вынужденного движения представлены данные, для которых параметр $x=0$ в сечении кризиса. Из графика следует, что при кипении в трубах наибольшее значение $q_{кр1}$ отвечает более низким давлениям (около 40 бар), чем для условий большего объема. При давлениях, меньших 70 бар, скорость не оказывает влияния на критические тепловые нагрузки. В целом зависимость $q_{кр1}=f(p, \omega, x)$ является сложной.

При относительно высоких давлениях и малых скоростях циркуляции $q_{кр1}$ при кипении в трубах могут быть равны или даже меньше, чем при кипении в большом объеме в условиях свободного движения.

Критические тепловые потоки не зависят от относительной длины трубы [Л. 138], если она больше 8—10 диаметров. При меньших значениях $q_{кр1}$ уменьшается с увеличением относительной длины, что объясняется резким изменением интенсивности конвективного теплообмена в начальном участке трубы. Толщина и шероховатость стенки не оказывают влияния на $q_{кр1}$.

Кроме указанных факторов, на $q_{кр1}$ могут оказывать влияние пульсации двухфазного потока на предвключенном участке, неравномерность распределения теплового потока по длине и периметру трубы, способ обогрева поверхности теплообмена.

Из изложенного следует, что на $q_{кр1}$ влияет большое количество различных факторов. К основным из них относятся $p, \omega, \Delta t_n, x$, физические свойства кипящей жидкости и состояние поверхности.

Б. Второй кризис кипения

Когда тепловая нагрузка на поверхности нагрева задана и не зависит от условий теплообмена, обратный переход от пленочного режима кипения к пузырьковому происходит при тепловой нагрузке $q_{мин}$ (рис. 13-5). Этот переход также носит кризисный характер: паровая пленка внезапно разрушается и температура поверхности скачкообразно снижается. Минимальная тепловая нагрузка при пленочном режиме кипения называется второй критической плотностью теплового потока и обозначается $q_{кр2}$. Соответствующий температурный напор, отвечающий точке минимума на кривой кипения, есть $\Delta t_{кр2}$.

Значения $q_{кр2}$ при кипении насыщенной жидкости в большом объеме существенно меньше, чем $q_{кр1}$. Вторые критические нагрузки

Таблица 13-2
Критические тепловые потоки и температурные напоры (второй кризис кипения)

Критический параметр	Кипящая жидкость			
	Четыреххлористый углерод	Н-пектан	Изопропиловый спирт	Жидкий азот
$q_{кр2} \cdot 10^{-4}, \text{Вт/м}^2$	1,3	1,0	3,5	0,6
$\Delta t_{кр2}, \text{К}$	80	60	110	30

зависят от рода жидкости, размеров теплоотводящей поверхности [Л. 148], давления, ускорения поля сил тяготения, шероховатости поверхности и ряда иных факторов. Для воды при атмосферном давлении значения на поверхности горизонтальных труб и цилиндров составляют $(2 \div 5) 10^4$ Вт/м². В зависимости от диаметра d труб величина $q_{кр2}$ изменяется по закону $q_{кр2} \propto d^{1/4}$.

Для других жидкостей экспериментально измеренные значения $q_{кр2}$ и $\Delta t_{кр2}$ приведены в табл. 13-2.

Критическая приведенная скорость парообразования $\omega_{кр2} = q_{кр2}/\rho_{пр}$ пропорциональна скорости всплывания больших деформированных пузырей пара, откуда

$$q_{кр2}/\rho_{пр} = c \sqrt{g(\rho_{ж} - \rho_{п})/\rho_{ж}^2} \quad (13-26)$$

где постоянная $c = 0,11 \div 0,14$.

Б. Равновесная плотность теплового потока

При кипении насыщенной жидкости в большом объеме на поверхности горизонтальных труб в условиях электрообогрева существует средняя по поверхности нагрева тепловая нагрузка, при которой могут устойчиво сосуществовать пленочный режим кипения на одной части поверхности и пузырьковый на другой ее части. Эта тепловая нагрузка названа [Л. 148] равновесной ($q_{равн}$). Если после установления равновесной нагрузки несколько увеличить поток теплоты, то граница раздела режимов кипения начнет перемещаться в сторону области с пленочным кипением. Через некоторое время на всей поверхности устанавливается пленочный режим кипения. При некотором снижении потока теплоты по сравнению с его равновесным значением произойдет обратный процесс и на всей поверхности установится пузырьковый режим кипения.

Величины равновесной нагрузки составляют примерно $1/5$ первой критической, так что $q_{кр1} > q_{равн} > q_{кр2}$. Значение равновесных потоков теплоты представляет интерес для анализа устойчивости режимов кипения.

Г. Кризисы 1-го и 2-го рода

Кризисы кипения, связанные с резким изменением теплоотдачи при переходе пузырькового кипения в пленочное и наоборот — пленочного в пузырьковое (рис. 13-4), называются кризисами первого рода. В этом случае при смене режимов кипения имеет место коренное изменение механизма теплообмена и его интенсивности. Характерными для кризисов кипения первого рода являются критические плотности теплового потока.

Кризисы второго рода имеют другую природу. Они характеризуют ухудшение теплоотдачи, возникающее в момент высыхания кольцевой пленки жидкости на стенке канала в стержневом режиме (рис. 13-14). Характерной величиной для этих кризисов является граничное расходное паросодержание. Граничным паросодержанием называется расходное паросодержание, при котором возникает кризис теплообмена второго рода.

Кризис второго рода может возникнуть при любом значении q , как только расходное паросодержание достигнет некоторого граничного

значения, связанного с явлением высыхания жидкой пленки на стенке. При больших скоростях движения парожидкостного потока в ядре предкризисный период и наступление кризиса зависят от интенсивности массообмена за счет механического уноса капель жидкости из пленки в ядро потока [Л. 39, 72, 129].

Глава четырнадцатая

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

14-1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

В природе и технике многие процессы теплообмена сопровождаются переносом массы одного компонента относительно массы другого¹. Так, например, обстоит дело при конденсации пара из парогазовой смеси и испарении жидкости в парогазовый поток. Испарившаяся жидкость путем диффузии распространяется в парогазовом потоке; при этом меняется течение, изменяется интенсивность теплоотдачи, что в свою очередь сказывается на процессе диффузии.

Диффузией называют самопроизвольный процесс, стремящийся к установлению внутри фаз равновесного распределения концентраций. В однородной по температурам и давлениям смеси процесс диффузии направлен к выравниванию концентраций в системе; при этом происходит перенос вещества из области с большей в область с меньшей концентрацией.

В дальнейшем прежде всего будут рассматриваться процессы тепло- и массообмена в газообразных двухкомпонентных (бинарных) средах. Эти задачи имеют большой практический интерес. Индексы «1» и «2» будут соответствовать первому и второму компонентам.

Аналогично теплообмену диффузия (массообмен) может происходить как молекулярным (микроскопическим), так и молярным (макроскопическим) путем. В газах молекулярная диффузия осуществляется за счет теплового движения молекул.

Диффузия характеризуется потоком массы компонента, т. е. количеством вещества, проходящим в единицу времени через данную поверхность в направлении нормали к ней. Поток массы обозначим через J ; его единица измерения — килограмм в секунду.

Плотностью потока массы j называют поток массы, проходящей через единицу поверхности:

$$j = \frac{dJ}{dF}. \quad (14-1)$$

Отсюда

$$J = \int_F j dF$$

или при $j = \text{const}$

$$J = jF.$$

¹ Согласно У. Гиббсу компонентами называют вещества, наименьшее число которых достаточно для образования всех фаз, т. е. гомогенных частей данной системы. Например, в системе, состоящей из слоя воды и соприкасающейся с ним смеси водяного пара и азота, имеются два компонента: вода (водяной пар) и азот. Будем полагать, что компоненты не вступают друг с другом в химические реакции.

Плотность потока массы является вектором.

В однородной по температуре и давлению макроскопически неподвижной двухкомпонентной смеси плотность потока массы одного из компонентов за счет молекулярной диффузии определяется законом Фика:

$$j_{ки} = -D \frac{\partial \rho_i}{\partial n} \quad (14-2)$$

или

$$j_{ки} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial n}; \quad (14-3)$$

здесь ρ_i — местная концентрация данного вещества (компонента), равная отношению массы компонента к объему смеси, кг/м³; $m_i = \rho_i/\rho$ — относительная массовая концентрация i -го компонента; ρ — плотность смеси; D — коэффициент молекулярной диффузии одного компонента относительно другого, м²/с (обычно D кратко называют коэффициентом диффузии); n — направление нормали к поверхности одинаковой концентрации данного вещества; $\partial \rho_i/\partial n$, $\partial m_i/\partial n$ — градиенты концентрации (относительной концентрации); они всегда направлены в сторону возрастания концентрации.

Градиент концентрации является движущей силой, обуславливающей перенос вещества. При передаче тепла теплопроводностью такой движущей силой является градиент температур¹.

Знак минус в уравнении (14-3) указывает, что согласно закону Фика перемещение вещества происходит в сторону уменьшения градиента концентрации. Диффузию, описываемую законом Фика, называют концентрационной диффузией.

Как следует из кинетической теории газов, коэффициент диффузии возрастает с увеличением температуры и уменьшается с ростом давления. Коэффициент диффузии несколько зависит и от пропорций смеси; эта зависимость слаба, если концентрация рассматриваемого компонента мала; в технических расчетах этой зависимостью большей частью пренебрегают.

В случае определенной бинарной смеси коэффициент диффузии будет одинаковым как для первого, так и для второго взаимно диффундирующих компонентов.

Концентрация имеет размерность плотности. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, формулу (14-1) можно записать в следующем виде:

$$j_{ки} = -D_{pi} \frac{\partial p_i}{\partial n}, \quad (14-4)$$

где p_i — местное парциальное давление данного компонента, Па; n — направление нормали к поверхности одинаковых парциальных давлений данного компонента; $D_{pi} = D/RT$ — коэффициент молекулярной диффузии (единица измерения — с), отнесенный к градиенту парциального давления рассматриваемого компонента.

В отличие от D коэффициент D_p различен для компонентов данной бинарной смеси. Исходя из равенства

$$D = D_{p1}R_1T = D_{p2}R_2T,$$

¹ В общем случае закон Фика должен быть записан через градиент химического потенциала $\nabla \mu$ [Л. 28].

можно написать

$$\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{M_2},$$

где M — молекулярная масса.

Если температура смеси переменна, то возникает так называемая термическая диффузия (эффект Соре). Из кинетической теории газов [Л. 195] следует, что если массы молекул двух компонентов различны, то за счет термодиффузии более тяжелые молекулы большей частью стремятся перейти в холодные области; если же массы молекул одинаковы, то в холодные области стремятся перейти более крупные молекулы. При определенных условиях направление термодиффузии может изменяться. Например, в ионизированном газе более тяжелые молекулы (или ионы) будут стремиться перейти в более теплые области.

Термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации. Этому препятствует процесс концентрационной диффузии, стремящейся выровнять состав. В результате с течением времени может установиться стационарное состояние, при котором уравниваются противоположные влияния термодиффузии и концентрационной диффузии.

Следствием молекулярного диффузионного переноса тепла является так называемый диффузионный термоэффект (эффект Дюфо), представляющий собой возникновение разности температур в результате диффузионного перемещения двух газов, *первоначально имевших одинаковую температуру*. Диффузионный термоэффект — явление, обратное термодиффузии. При стационарном диффузионном смешении, например, водорода и азота возникает разность температур порядка нескольких градусов.

Возникающий при диффузионном термоэффекте градиент температуры имеет такое направление, что термодиффузия, которая является его результатом, противоположна диффузии, благодаря которой появился этот градиент.

Если в смеси имеет место градиент полного давления, то может возникнуть диффузия за счет неоднородности давления. Этот вид диффузии называют бародиффузией. При бародиффузии тяжелые молекулы стремятся перейти в область повышенного, а легкие — в область пониженного давления. Как и термодиффузия, бародиффузия сопровождается и обычным переносом массы, вызванным разностью концентрации. Диффузия от неоднородности давления происходит, например, в газе, вращающемся вокруг оси; в этом случае тяжелые молекулы стремятся перейти в области, наиболее удаленные от центра.

С учетом концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии плотность потока массы i -го компонента за счет молекулярного переноса описывается следующим уравнением:

$$\vec{j}_{m,i} = -\rho \left(D \nabla m_i + \frac{D_T}{T} \nabla T + \frac{D_p}{p} \nabla p \right); \quad (14-5)$$

здесь $D_T = k_T D$ — коэффициент термодиффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; $D_p = k_D D$ — коэффициент бародиффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; p — давление смеси.

Первый член суммы в уравнении (14-5) учитывает концентрационную диффузию, второй — термодиффузию и третий — бародиффузию.

Составляющие потока массы нормальны к соответствующим им изопотенциальным поверхностям, т. е. поверхностям равных концентра-

ций, изотермическим и изобарическим поверхностям. При $\text{grad } p = 0$ и $\text{grad } t = 0$ уравнение (14-5) переходит в закон Фика.

Коэффициент $k_T = D_T/D$ называется термодиффузионным отношением, он безразмерен; $k_0 = D_0/D$ — бародиффузионное отношение.

Значение k_T для смеси газов, как правило, меньше 0,1. Ввиду малости k_T заметный поток массы будет иметь место только при больших градиентах температуры; особенно невелика термодиффузия, если концентрация одного из компонентов мала.

Для бинарной смеси величина k_0 определяется следующим уравнением:

$$k_0 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} \frac{M_2 - M_1}{M}, \quad (14-6)$$

где M_1, M_2, M — молекулярные массы первого и второго компонентов и смеси.

Бародиффузия должна проявляться при значительных перепадах давления, что в процессах теплообмена встречается редко. При равенстве молекулярных масс M_1 и M_2 бародиффузия отсутствует. Как следует из термодинамики необратимых процессов, бародиффузии должен сопутствовать и соответствующий термоэффект, представляющий собой возникновение разности температур.

Таким образом, суммарный перенос массы какого-либо компонента путем молекулярной диффузии является следствием концентрационной диффузии, термической диффузии и бародиффузии¹. В дальнейшем мы прежде всего будем учитывать эффекты, связанные с концентрационной диффузией.

В движущейся среде вещество переносится не только молекулярной диффузией, но и конвекцией. При перемещении какого-либо объема смеси плотностью ρ со скоростью $\vec{w}$ происходит перенос массы смеси, удельная величина которого определяется уравнением

$$\vec{j}_k = \rho \vec{w} \quad (14-7)$$

или для определенного компонента смеси

$$\vec{j}_{ki} = \rho_i \vec{w}. \quad (14-8)$$

Суммарная плотность потока вещества за счет молекулярного и конвективного переноса будет определяться уравнением

$$\vec{j}_i = \vec{j}_{ид i} + \vec{j}_{ки}. \quad (14-9)$$

Вместе с массой вещества переносится энтальпия $j_i h_i$, где h_i — удельная энтальпия i -го компонента, Дж/кг. В общем случае через неподвижную контрольную поверхность, выделенную в смеси, переносится энтальпия $\sum j_i h_i$. Даже сквозь площадку, помещенную в смеси таким образом, что через нее нет результирующего потока массы, может иметь место результирующий поток энтальпии.

¹ В общем случае в суммарный поток массы входит составляющая, возникающая в случае, если на компоненты смеси действуют различные внешние силы. Примером является диффузия электрически заряженных частиц в частично ионизированном газе под действием электрического или магнитного поля. Может также иметь место разделение смеси, вызванное процессом внутреннего трения: молекулы с большей массой перемещаются в направлении меньшей скорости [Л. 110].

Таким образом, в смеси плотность теплового потока описывается уравнением

$$\vec{q} = -\gamma \nabla t + \sum \vec{j}_i i_i. \quad (14-10)$$

Уравнение (14-10) можно представить в следующем виде:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} i + \sum_{j \neq i} \vec{j}_{ji} i_j. \quad (14-10')$$

Первый член правой части уравнения (14-10) учитывает перенос теплоты теплопроводностью, второй — конвекцией и третий — молекулярной диффузией.

Согласно уравнению (4-2) в однокомпонентной движущейся жидкости

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} i.$$

Таким образом, в смеси дополнительно появляется диффузионная составляющая теплового потока.

14-2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

Для определения теплового потока необходимо знать поля температур, скоростей и потоков массы.

Уравнение энергии (4-10), полученное ранее для однокомпонентной жидкости, не учитывает диффузионный перенос теплоты. Выведем уравнение энергии для бинарной смеси диффундирующих друг в друга компонентов.

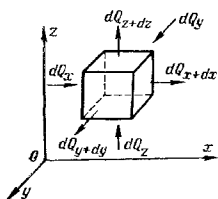


Рис. 14-1. К выводу дифференциального уравнения энергии для совместно идущих процессов тепло- и массообмена.

А. Уравнение энергии

При выводе будем полагать, что отсутствуют источники теплоты. Пренебрежем теплотой трения. Физические параметры будем считать неизменными.

Выделим в движущейся бинарной смеси неподвижный элементарный объем (рис. 14-1) с ребрами dx , dy и dz и напишем для него уравнение теплового баланса. Будем при этом полагать, что все подведенное тепло идет на изменение энтальпии рассматриваемого объема (работа расширения равна нулю).

При названных условиях можно воспользоваться уравнением баланса тепла (4-6), полученным ранее:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \equiv -\text{div } \vec{q}.$$

Согласно уравнению (14-10')

$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho w_x i + \sum j_{xi} i_i; & q_y &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho w_y i + \sum j_{yi} i_i; \\ q_z &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho w_z i + \sum j_{zi} i_i. \end{aligned}$$

Здесь индекс „мд“ опущен.

Из последних уравнений получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_x}{\partial x} &= -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + i \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma j_{xi} i_i \\ \frac{\partial q_y}{\partial y} &= -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \rho \left(w_y \frac{\partial i}{\partial y} + i \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \Sigma j_{yi} i_i \\ \frac{\partial q_z}{\partial z} &= -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \rho \left(w_z \frac{\partial i}{\partial z} + i \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma j_{zi} i_i\end{aligned}$$

Суммируя эти уравнения и учитывая, что для несжимаемой жидкости $\text{div } \vec{w} = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}-\text{div } \vec{q} &= \lambda \nabla^2 t - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x} \Sigma j_{xi} i_i + \frac{\partial}{\partial y} \Sigma j_{yi} i_i + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma j_{zi} i_i \right)\end{aligned}$$

Подставив значение $-\text{div } \vec{q}$ в уравнение (4-6), запишем дифференциальное уравнение энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 t - \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \text{div } \Sigma \vec{j}_i i_i. \quad (14-11)$$

Левая часть этого уравнения описывает локальное изменение удельной энтальпии, вызванное процессами теплопроводности, конвекции и молекулярной диффузии. Первый член правой части уравнения учитывает теплопроводность, второй — конвекцию и третий — молекулярную диффузию.

Уравнение (14-11) можно записать более кратко:

$$\rho \frac{di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div } \Sigma \vec{j}_i i_i. \quad (14-12)$$

В уравнение (14-12) нужно подставить значение $\vec{j}_i$. Учитывая, что интенсивность термо- и бародиффузии невелика, будем полагать, что молекулярный процесс вещества осуществляется только путем концентрационной диффузии. Тогда

$$\vec{j}_i = -\rho D \nabla m_i.$$

Для рассматриваемой двухкомпонентной смеси $m_1 + m_2 = 1$ и, следовательно, $\partial m_1 / \partial n = -\partial m_2 / \partial n$. Отсюда следует, что $\vec{j}_1 = -\vec{j}_2$ и

$$\Sigma \vec{j}_i i_i = \vec{j}_1 (i_1 - i_2) = -\rho D (i_1 - i_2) \nabla m_1.$$

Подставляя значение $\Sigma \vec{j}_i i_i$ в уравнение (14-12), получаем:

$$\rho \frac{di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div } [(i_1 - i_2) \rho D \nabla m_1]. \quad (14-13)$$

Используя выражение $di = c_p dT$, уравнение (14-13) или (14-12) можно записать только в температурах.

Как следует из уравнения (14-13), если $i_1 = i_2$, то результирующий диффузионный перенос теплоты отсутствует и уравнение энергии (14-13) с учетом $di = c_p dT$ переходит в ранее полученное уравнение (4-10).

Температурное поле в движущейся смеси зависит от составляющих скорости w_x , w_y и w_z и массосодержания m . Поле массосодержаний описывается дифференциальным уравнением массообмена (уравнением диффузии).

Б. Уравнение массообмена

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее распределение определенного компонента в движущейся смеси. При выводе будем предполагать, что жидкость несжимаема и внутри нее отсутствуют источники массы. Пренебрежем также термо- и бародиффузией.

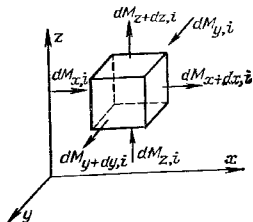


Рис 14-2. К выводу дифференциального уравнения массообмена.

Выделим в смеси неподвижный элементарный параллелепипед (рис. 14-2) с ребрами dx , dy и dz и, считая D и ρ постоянными, напомним для него уравнение баланса массы.

Вдоль оси x в элементарный параллелепипед за элементарный промежуток времени $d\tau$ вносится масса i -го компонента в количестве $dM_{x,i} = j_{x,i} dy dz d\tau$, кг, и вытекает $dM_{x+dx,i} = j_{x+dx,i} dy dz d\tau$.

Разность количеств массы i -го компонента, поступившей и вытекшей в направлении оси Ox , определится выражением

$$dM_{x,i} - dM_{x+dx,i} = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} dx dy dz d\tau = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} dv d\tau.$$

Аналогично для других осей

$$dM_{y,i} - dM_{y+dy,i} = -\frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} dv d\tau; \quad dM_{z,i} - dM_{z+dz,i} = -\frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} dv d\tau.$$

Просуммировав по трем осям, получим, что изменение массы i -го компонента равно:

$$dM_i = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z}\right) dv d\tau.$$

Так как

$$dM_i = -\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} dv d\tau = \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial \tau} dv d\tau = \rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} dv d\tau,$$

то

$$\rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z}\right) \equiv -\operatorname{div} \vec{j}_i. \quad (14-14)$$

Полагая, что масса i -го компонента переносится только путем концентрационной диффузии и конвекцией, получаем:

$$j_{x,i} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial x} + \rho m_i w_x; \\ j_{y,i} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial y} + \rho m_i w_y; \quad j_{z,i} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial z} + \rho m_i w_z$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} &= -\rho D \frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \rho \left(m_i \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} &= -\rho D \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \rho \left(m_i \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z} &= -\rho D \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} + \rho \left(m_i \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Просуммировав эти равенства и подставив их в уравнение (14-14), будем иметь следующее уравнение:

$$\rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} = \rho D \nabla^2 m_i - \rho \left(w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right) - \rho m_i \operatorname{div} \vec{w}.$$

При $\rho = \text{const}$ последний член правой части равен нулю. Тогда

$$\frac{\partial m_i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} = D \nabla^2 m_i \quad (14-15)$$

или, применив сокращенную форму записи, получим:

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D \nabla^2 m_i. \quad (14-15')$$

Последнее уравнение и является искомым дифференциальным уравнением массообмена, описывающим распределение массы i -го компонента в движущейся смеси. Уравнение массообмена (14-15) представляет собой уравнение сохранения массы i -го компонента.

Если $w_x = w_y = w_z = 0$, уравнение массообмена принимает вид:

$$\frac{\partial m_i}{\partial \tau} = D \nabla^2 m_i. \quad (14-16)$$

В последнем уравнении, называемом уравнением Фика, учтен перенос массы только концентрационной диффузией. Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности (1-29) при $g_v = 0$. Если для температуры и концентрации ввести одинаковые обозначения, то уравнения по внешнему виду не будут отличаться друг от друга.

В уравнениях энергии и диффузии входят составляющие скорости w_x , w_y и w_z . Поэтому к названным уравнениям необходимо добавить уравнение движения, записанное для всей смеси в целом. Кроме того, следует добавить уравнение сплошности, также записанное для смеси.

Чтобы сформулировать краевую задачу тепло- и массообмена, к системе дифференциальных уравнений энергии, массообмена, движения и сплошности необходимо присоединить условия однозначности. Они состоят из геометрических, физических, граничных и временных условий (см. § 4-3). Задание граничных условий в случае массообмена имеет ряд особенностей. Чтобы познакомиться с ними, рассмотрим процессы теплоотдачи и массоотдачи в двухкомпонентную среду или от нее.

14-3. ТЕПЛО- И МАССООТДАЧА

В движущейся одноконпонентной среде теплота переносится теплопроводностью и конвекцией. Этот процесс называется конвективным теплообменом. По аналогии перенос вещества в многокомпонентной среде совместно происходящими процессами молекулярной диффузии и конвекции называют конвективным массообменом.

Практический интерес представляют процессы теплообмена и массообмена при испарении, сублимации (возгонке), конденсации, сорбции, десорбции и др. В этом случае система является гетерогенной. Поверхность жидкой (или твердой) фазы играет роль, аналогичную роли твердой стенки в процессах теплоотдачи без сопутствующей диффузии.

Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между жидкой или твердой поверхностью и окружающей средой называют массоотдачей.

В рассматриваемых случаях тепло- и массоотдача идут одновременно. Для расчетов теплоотдачи используют закон Ньютона—Рихмана

$$q_c = \alpha(t_c - t_0);$$

здесь q_c измеряется в Дж/(м²·с).

Для расчетов массоотдачи используют уравнение

$$j_{ic} = \beta(\rho_{ic} - \rho_{i0}) \quad (14-17)$$

или

$$j_{ic} = \rho\beta(m_{ic} - m_{i0}), \quad (14-18)$$

где j_{ic} —плотность потока массы, кг/(м²·с); β —коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества, м/с; индексы «с» и «0» показывают, что концентрация диффузионного вещества берется соответственно на поверхности раздела фаз и вдали от нее.

Используя уравнение состояния идеальных газов, выражение (14-17) или (14-18) можно записать в следующем виде:

$$j_{ic} = \beta_p(p_{ic} - p_{i0}); \quad (14-19)$$

здесь β_p —коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений $\Delta p = p_{ic} - p_{i0}$.

Коэффициенты массоотдачи β и β_p связаны соотношением

$$\beta = \beta_p RT. \quad (14-20)$$

Рассмотрим испарение жидкости в парогазовую среду. Будем полагать, что полное давление по всему объему парогазовой смеси неизменно, а температурные разности пренебрежимо малы. В этом случае можно не учитывать термо- и бародиффузию. Отсутствуют возбудители движения, посторонние для рассматриваемого процесса испарения.

Концентрация пара изменяется от значения $m_{n,c}$ на поверхности испаряющейся жидкости до значения m_{n0} вдали от поверхности раздела (рис. 14-3). Так как $m_n + m_g = 1$, то

$$\frac{\partial m_n}{\partial y} = -\frac{\partial m_g}{\partial y}. \quad (a)$$

Рис. 14-3. Распределение концентраций пара и газа у поверхности испарения.

Следовательно, газ должен диффундировать в направлении, обратном направлению диффузии пара. Пар может свободно диффундировать в парогазовую среду. Для газа же поверхность жидкости является непроницаемой преградой. Вследствие этого количество газа у поверхности жидкости должно непрерывно увеличиваться. Но в случае стационарного режима распределение концентраций не изменяется

во времени. Поэтому перемещение газа к поверхности испарения должно компенсироваться конвективным потоком парогазовой смеси, направленным от жидкости. Этот поток называют **стефановым потоком**. Его скорость обозначим через $w_{c,n}$.

Суммарный поток пара будет равен сумме молекулярного и конвективного потоков:

$$j_{n,c} = -\rho D \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c + \rho m_{n,c} w_{c,n,c}. \quad (14-21)$$

Суммарный поток газа у поверхности жидкости равен нулю:

$$j_{r,c} = -\rho D \left(\frac{\partial m_r}{\partial y} \right)_c + \rho m_{r,c} w_{c,n,c} = 0.$$

Из последнего уравнения с учетом уравнения (а) получаем:

$$w_{c,n,c} = -\frac{D}{m_{r,c}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c. \quad (14-22)$$

Подставив полученное значение $w_{c,n,c}$ в уравнение (14-21), получим

$$j_{n,c} = -\rho D \left(\frac{m_n + m_r}{m_r} \right)_c \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c = -\rho D \frac{1}{m_{r,c}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c. \quad (14-23)$$

Уравнение (14-23) впервые было получено Стефаном. Это уравнение отличается от закона диффузии (14-4), относящегося к условиям беспрепятственного распространения обоих компонентов смеси, дополнительным множителем $1/m_{r,c}$. Этот множитель учитывает конвективный (стефанов) поток, вызванный непроницаемостью поверхности испарения для газа. Как следует из изложенного, стефанов конвективный поток появляется и при отсутствии вынужденной или свободной тепловой конвекции.

Поток массы на поверхности испарения определяется с помощью уравнения (14-17). Этот же поток может быть определен уравнением (14-23). Приравняв правые части уравнений (14-17) и (14-23), получим:

$$\beta (m_{n,c} - m_{n0}) = -D \frac{1}{m_{r,c}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c \quad (14-24)$$

или

$$\beta = -D \frac{1}{m_{r,c}} \frac{(\partial m_n / \partial y)_c}{m_{n,c} - m_{n0}}. \quad (14-25)$$

Рассмотренный процесс испарения жидкости в парогазовую смесь соответствует условиям полупроницаемой поверхности, т. е. поверхности, проницаемой для одного (активного) компонента смеси (пара) и непроницаемой для другого (инертного) компонента (газа). Полупроницаемая поверхность наблюдается и при конденсации пара из парогазовой смеси.

В случае полностью проницаемой поверхности через нее проходят оба компонента. Поверхность является полностью проницаемой, например, при конденсации обоих компонентов бинарной паровой смеси. Такой же эффект может иметь место и при испарении некоторых растворов.

Будем исходить из того, что и в случае тепло- и массообмена

$$\alpha = \frac{\lambda}{t_c - t_0} (\nabla t)_c. \quad (14-26)$$

Такое определение коэффициента теплоотдачи не отличается от ранее использованного.

Общее количество теплоты q_c , отдаваемой или воспринимаемой жидкостью и парогазовой смесью, равно сумме теплоты, переданной конвективным теплообменом, и теплоты, переданной диффундирующей массой в виде энтальпии.

При полупроницаемой поверхности в условиях стационарного процесса стефанов поток компенсирует встречный молекулярный поток газа и реально возникает лишь поперечный поток пара. В этом случае на границе раздела фаз

$$q_c = -\lambda (\nabla t)_c + j_{\pi, c} i_{\pi, c}. \quad (14-27)$$

14-4. ТРОЙНАЯ АНАЛОГИЯ

Сравним уравнения диффузии, энергии и движения, описывающие поля концентраций, температуры и скорости в раздельно идущих процессах переноса вещества, теплоты и количества движения. Выведенные ранее уравнения запишем при некоторых упрощающих предположениях.

Уравнение массообмена (без учета термо- и бародиффузии)

$$\frac{dm_i}{dt} = D \nabla^2 m_i. \quad (a)$$

Уравнение энергии (без учета диффузионной составляющей теплового потока)

$$\frac{dt}{dt} = a \nabla^2 t. \quad (б)$$

Уравнение движения (без учета массовых сил и для безнапорного движения)

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \nu \nabla^2 \vec{w}. \quad (в)$$

Уравнения (a)—(в) по записи аналогичны. Эти уравнения содержат три физических параметра: D , a и ν , каждый из которых характеризует соответственно перенос вещества, теплоты и импульса. Размерности D , a и ν одинаковы ($\text{м}^2/\text{с}$). При $D=a=\nu$ расчетные поля концентраций, температур и скорости будут подобны, если имеет место подобие условий однозначности. В частности, поля концентраций и температур будут подобны, если $D=a$ или $D/a=1$. Отношение D/a называют числом Льюиса — Семенова и обозначают через Le .

Для теплообмена, не осложненного массообменом («чистого» теплообмена), и без учета массовых сил получено ранее, что

$$\overline{Nu} = \varphi(Re, Pr). \quad (г)$$

Исходя из аналогии процессов теплообмена и массообмена, можно написать:

$$\overline{Nu}_d = \psi(Re, Pr)_d; \quad (д)$$

здесь $\overline{Nu}_d = \beta \bar{l}/D$ — диффузионное число Нуссельта; $Pr_d = \nu/D$ — диффузионное число Прандтля. Эти числа являются аналогами чисел Nu и Pr .

При аналогии процессов теплообмена и массообмена функции φ и ψ одинаковы. Если одноименные определяющие критерии подобия равны, будут численно одинаковы и числа Nu и Nu_d . Можно, например,

провести исследование теплообмена и полученные формулы использовать для расчета массообмена, заменив числа Nu и Pr соответственно на Nu_d и Pr_d . Так, если для расчета теплоотдачи получено уравнение

$$\overline{Nu} = a Re^n Pr^m,$$

то для расчета массоотдачи, происходящей в аналогичных условиях, используется уравнение

$$\overline{Nu}_d = a Re^n Pr_d^m,$$

где a , n , m — одни и те же величины.

Аналогия процессов теплообмена и массообмена часто используется в расчетной практике. Однако, строго говоря, указанная аналогия является приближенной. В общем случае уравнения массообмена (14-15), энергии (14-13) и движения (4-18) не аналогичны. Различны и уравнения теплоотдачи (4-22) и массоотдачи (14-25). По-разному могут изменяться физические параметры, существенные для процессов переноса массы и энергии. Различны и граничные условия. В результате аналогия нарушается.

Необходимо учитывать зависимость тепло- и массоотдачи от дополнительных безразмерных переменных, отражающих специфику совместного проходящих процессов переноса теплоты и массы. Для получения этих переменных краевую задачу тепло- и массообмена необходимо проанализировать методами, описанными в гл. 5.

Если массообмен не интенсивен, то в ряде случаев его влиянием на теплообмен можно пренебречь с достаточной для практики точностью.

14-5. ДИФFUЗИОННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Аналогично понятиям гидродинамического и теплового пограничных слоев можно ввести понятие диффузионного пограничного слоя. В его пределах концентрация активного компонента смеси изменяется от $m_{1,с}$ на поверхности раздела фаз до $m_{1,в}$ на внешней границе слоя (рис. 14-4). Внутри пограничного слоя справедливо условие $\partial m_1 / \partial y \neq 0$, вне диффузионного пограничного слоя и на его внешней границе выполняются условия

$$m_1 = m_{1,в}; \quad \partial m_1 / \partial y = 0.$$

Диффузионный пограничный слой может образовываться в процессах испарения, сублимации, вдува вещества через пористую стенку, при конденсации пара из парогазовой смеси и т. д.

Для диффузионного пограничного слоя дифференциальное уравнение массообмена может быть упрощено. В случае омывания плоской неограниченной пластины поле концентрации в диффузионном пограничном слое можно описать следующим уравнением:

$$p \left(w_x \frac{\partial m_1}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial y_{1,с}}{\partial y}. \quad (14-28)$$

Дифференциальное уравнение диффузионного пограничного слоя (14-28) аналогично уравнениям теплового и гидродинамического пограничного слоев (4-28), (4-30) и справедливо при идентичных условиях. Следовательно, при аналогичных условиях однозначности решения этих уравнений должны быть одинаковы.

В уравнении (14-28) $j_{y,i}$ — поперечная составляющая плотности потока массы i -го компонента смеси. Для турбулентного пограничного слоя

$$j_{y,i} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial y} - \rho \varepsilon_i \frac{\partial m_i}{\partial y} = -\rho (D + \varepsilon_i) \frac{\partial m_i}{\partial y}; \quad (14-29)$$

здесь ε_i — коэффициент турбулентного переноса (коэффициент турбулентной диффузии) вещества. Для турбулентного течения m_i , w_x , w_y , $j_{y,i}$ являются осредненными во времени величинами (см. § 4-5).

На поверхности непроницаемой стенки нормальная составляющая скорости обращается в нуль. При наличии массообмена непосредственно на границе раздела фаз поперечная составляющая скорости $w_y = j_{y,i}/\rho$ не равна нулю.

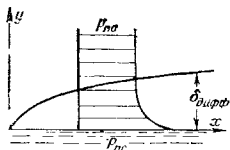


Рис 14-4. Диффузионный пограничный слой.

Поперечный относительно основного течения поток массы активного компонента приводит к тому, что распределение температуры и величина коэффициента теплоотдачи могут быть иными, чем при теплообмене, не сопровождающемся массообменом.

Из теории пограничного слоя следует, что при направлении поперечного потока вещества от поверхности раздела фаз (испарение, сублимация, десорбция, вдув газа через пористую пластину) толщина пограничного слоя увеличивается, а производные dw_x/dy и dt/dy уменьшаются. Вследствие этого уменьшается и коэффициент теплоотдачи.

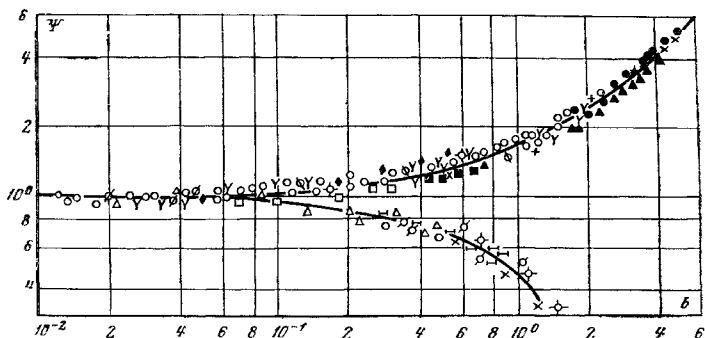


Рис 14-5 Влияние поперечного потока вещества на теплообмен.

При направлении поперечного потока вещества к поверхности раздела (конденсация, сорбция, отсос газа) толщина пограничного слоя уменьшается и растут значения производных dw_x/dy и dt/dy . В результате с ростом плотности поперечного потока массы коэффициент теплоотдачи увеличивается.

Коэффициент массоотдачи качественно зависит от направления и величины поперечного потока массы так же, как и коэффициент теплоотдачи.

Такое влияние поперечного потока вещества проявляется как при ламинарном, так и при турбулентном пограничном слое.

Влияние поперечного потока на теплоотдачу показано на рис. 14-5 [Л. 92, 106]. Здесь $\Psi = St/St_0$, где St_0 — число Стантона при отсутствии массообмена (см. гл. 7); $b = (j_c/\rho\omega_0)1/St_0$ — фактор проицаемости, пропорциональный плотности поперечного потока на поверхности стеники (раздела фаз) j_c ; ω_0 — скорость потока за пределами пограничного слоя.

На рис. 14-5 верхняя кривая соответствует процессам отсоса или конденсации, нижняя — вдуву или испарению.

При $b \ll 0,1$ теплоотдача практически не зависит от поперечного потока вещества.

В заключение отметим, что при очень интенсивном вдуве уравнения пограничного слоя могут не выполняться. Условием их выполнения может служить неравенство $b < 10$. При этом пограничный слой еще сравнительно тонок.

14-6. ТЕПЛО- И МАССООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА ИЗ ПАРОГАЗОВОЙ СМЕСИ

Наличие в паре пеконденсирующего газа затрудняет доступ пара к поверхности конденсации. В результате скорость конденсации уменьшается.

Будем полагать, что стенка непроницаема. Ее температура t_c ниже температуры основной массы парогазовой смеси $t_{п0}$. По стенке течет пленка образовавшегося конденсата (рис. 14-6).

Общее количество теплоты, передаваемой поверхности пленки, равно:

$$q_{пов} = \alpha(t_{п0} - t_{п,пов}) + j_{п,пов}i_{п,пов}; \quad (14-30)$$

здесь α — коэффициент теплоотдачи от парогазовой смеси к пленке конденсата.

Пар, достигший поверхности раздела фаз, конденсируется. При этом выделяется теплота фазового перехода $rj_{п,пов} = (i_{п,пов} - i_{к,пов})j_{п,пов}$. Теплота фазового перехода вместе с теплом, переданным конвективной теплоотдачей, переносится к твердой стенке, на которой находится конденсированная фаза. Перенос теплоты через движущуюся пленку конденсата определяется конвективным теплообменом, описанным ранее (см. гл. 12). Твердой стенке передается и некоторая теплота переохлаждения конденсата относительно $t_{пов}$, так как температура по толщине пленки изменяется от $t_{пов}$ до t_c (рис. 14-6). Большей частью теплота переохлаждения конденсата невелика и во многих расчетах ею можно пренебречь. Тогда при стационар-

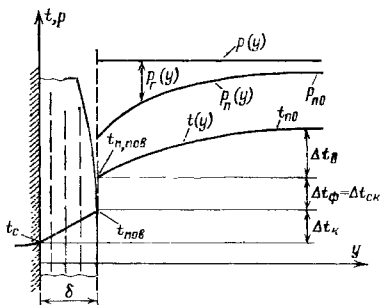


Рис. 14-6. Распределение концентраций и температуры при конденсации пара из парогазовой смеси

ном режиме плотность теплового потока можно считать неизменной по толщине слоя конденсированной фазы.

Пренебрегая переохлаждением конденсата, плотность теплового потока на стенке можно описать следующим уравнением:

$$q_c = \alpha(t_{п0} - t_{п, пов}) + r j_{п, пов}. \quad (14-31)$$

При расчете q_c часто используют уравнение

$$q_c = \alpha_{см}(t_{п0} - t_c); \quad (14-32)$$

здесь $\alpha_{см}$ — коэффициент теплоотдачи, отнесенный к разности температур стенки и пара (парогазовой смеси) вдали от поверхности конденсации. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_{см}$ является сложной величиной, учитывающей различные термические сопротивления.

Суммарное термическое сопротивление $\Sigma R = 1/\alpha_{см}$ можно рассчитать на термическое сопротивление конденсата R_k , термическое сопротивление фазового перехода R_{ϕ} и термическое сопротивление подвода теплоты (пара) к поверхности конденсации (диффузионное термическое сопротивление) R_d . Этим термическим сопротивлениям соответствуют температурные разности Δt_k , Δt_{ϕ} и Δt_d (рис. 14-6), причем

$$t_{п0} - t_c = \Delta t_k + \Delta t_{\phi} + \Delta t_d.$$

Уравнение (14-32) можно записать в следующем виде:

$$q_c = \frac{t_{п0} - t_c}{\Sigma R} = \frac{t_{п0} - t_c}{R_k + R_{\phi} + R_d}. \quad (14-33)$$

Здесь

$$\alpha_{см} = \frac{1}{\Sigma R} = \frac{1}{R_k + R_{\phi} + R_d}. \quad (14-34)$$

Во многих задачах $R_{\phi} \ll R_k$ и $R_{\phi} \ll R_d$, что позволяет пренебречь термическим сопротивлением фазового перехода (т. е. полагать $t_{п, пов} = t_{п0}$). Пренебрегая скачком температур Δt_{ϕ} , температуру поверхности конденсата $t_{пов}$ можно рассматривать как температуру насыщения пара при давлении насыщения $p_{п, пов}$. Тогда

$$R_k = \frac{1}{\alpha_k} = \frac{t_{пов} - t_c}{q_c} = \frac{t_{п}(p_{п, пов}) - t_c}{q_c}. \quad (14-35)$$

Величины R_k или α_k могут быть определены по формулам, приведенным в гл. 12.

Диффузионное термическое сопротивление

$$R_d = \frac{t_{п0} - t_{п, пов}}{q_c} = \frac{t_{п0} - t_{п, пов}}{\alpha(t_{п0} - t_{п, пов}) + r j_{п, пов}} = \frac{t_{п0} - t_{п, пов}}{\alpha(t_{п0} - t_{п, пов}) + r_p^2(p_{п0} - p_{п, пов})}. \quad (14-36)$$

Коэффициент теплоотдачи α должен быть определен с учетом сопутствующего процесса массообмена (см. § 14-5).

Из уравнения (14-34) следует, что коэффициент теплоотдачи $\alpha_{см}$ зависит от интенсивности взаимосвязанных процессов тепло- и массообмена в парогазовой смеси и в пленке.

Для расчета коэффициента $\alpha_{см}$ необходимо предварительно определить коэффициент массоотдачи β .

Средний коэффициент массоотдачи при пленочной и капельной конденсации пара на горизонтальной трубе из паровоздушной смеси, прак-

тически неподвижной на большом удалении от трубки, может быть определен по формуле [Л. 58]

$$\text{Nu}_d = \frac{f/m_{\tau, \text{пов}}}{1 - P - f} \psi, \quad (14-37)$$

где

$$f = \ln \frac{m_{\tau, \text{пов}}}{m_{\tau 0}} / \ln \frac{R_0}{R_{\tau}}; \quad P = \frac{R_0}{R_{\tau}}; \quad \text{Nu}_d = \frac{\beta R_{\tau}}{D};$$

R_{τ} — радиус трубки (поверхности конденсата); R_0 — радиус, при котором берется концентрация газа на удалении $m_{\tau 0}$. Индекс «пов» соответствует поверхности конденсата.

Формула (14-37) получена применительно к условиям, когда при фиксированном значении $R_0 \gg R_{\tau}$ параметры парогазовой смеси однородны. Формулой учитываются как стефанов поток, так и свободная конвекция. При $\text{Gr} = g\beta\Delta t_d (2R_{\tau})^3/\nu^2 \gg 8$ $\psi = 0,66 \text{ Gr}^{0,2}$; при $\text{Gr} \leq 8$ можно принять $\psi = 1$ (свободная конвекция не влияет). В формулу (14-37) подставляются физические параметры парогазовой смеси, взятые по температуре $t_{\text{по}}$.

Практически важной задачей является процесс тепло- и массообмена при пленочной конденсации пара из движущейся паровоздушной смеси на горизонтальных одиночных трубках и трубках, собранных в пучок. Тепло- и массоотдача при названных условиях исследовались в ряде работ.

В опытах [Л. 9] паровоздушная смесь поступала к одиночной горизонтальной трубке и пучку горизонтальных труб сверху. Давление паровоздушной смеси p изменялось от 0,0627 до 0,089 МПа, начальное содержание воздуха в водяном паре $\epsilon_0 = p_0/p = 0,01 \div 0,56$.

Получено, что средний коэффициент массоотдачи определенного ряда труб при $\text{Re} = 350 \div 4800$ может быть рассчитан по уравнению

$$\text{Nu}_d = c \text{Re}^{0,5} \epsilon_0^{-0,6} \pi_D^{-1/3}; \quad (14-38)$$

здесь для одиночной трубы $c = 0,47$, для первого ряда пучка $c = 0,53$, для третьего и последующих рядов $c = 0,82$.

На рис. 14-7 формула (14-38) для одиночной трубы сопоставлена с опытными данными. Массоотдача существенно снижается с увеличением содержания воздуха в паре.

При $\text{Re} = 40 \div 350$ для труб пятого ряда получена формула

$$\text{Nu}_d = 0,52 \text{Re}^{0,5} \epsilon_0^{-0,7} \pi_D^{-1/3}. \quad (14-39)$$

Здесь и в формуле (14-38) $\pi_D = (p_{\text{по}} - p_{\text{ч, пов}})/p$.

В формулах (14-38) и (14-39) число Рейнольдса подсчитывается по скорости парогазовой смеси перед трубкой или рядом труб, определяющим размером является внешний диаметр труб; физические пара-

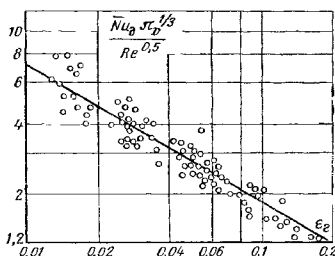


Рис 14.7 Массоотдача при конденсации пара из движущейся парогазовой смеси на одиночной трубке ($p \approx 0,09 \cdot 10^6$ и $0,8 \cdot 10^6$ Па)

метры смеси определяются по состоянию паровоздушной смеси перед трубой или рядом труб. Коэффициент вязкости смеси подсчитывается по уравнению

$$\mu_{см} = \frac{(1 - \epsilon_{г,о}) \mu_{п} + 1,6 \epsilon_{г,о} \mu_{г}}{1 + 0,6 \epsilon_{г,о}},$$

где $\mu_{п}$ и $\mu_{г}$ — соответственно коэффициенты динамической вязкости пара и воздуха.

Формулы (14-38) и (14-39) получены в опытах с шахматным пучком. Поперечный относительный шаг был равен 1,475, продольный 1,275. В расчетной практике эти формулы в первом приближении распространяются и на пучки с другими шагами.

При условиях опытов [Л. 9] количество теплоты, передававшейся от смеси к поверхности пленки конденсата путем конвективной теплоотдачи, а также теплота переохлаждения конденсата были весьма малы сравнительно с теплотой фазового перехода, и ими можно пренебречь.

Значение $t_{пов}$, по которому вводят в расчет $p_{п,пов}$, определяется путем последовательного приближения. При этом используется уравнение

$$r\beta p = (p_{п,о} - p_{п,пов}) = \alpha_{п}(t_{пов} - t_{с}).$$

14-7. ТЕПЛО- И МАССООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПАРОГАЗОВУЮ СРЕДУ

Испарение жидкости со свободной поверхности вызывается тепловым движением молекул жидкости. Молекулы, обладающие энергией, достаточной для преодоления сил сцепления, вырываются из поверхностного слоя жидкости в окружающую среду. Часть молекул в результате столкновения между собой и молекулами газа отражается к поверхности испарения, где вновь происходит отражение или поглощение. Другая часть испущенных молекул молекулярной диффузией и конвекцией распространяется в окружающей среде и окончательно теряется жидкостью.

Аналогично коэффициенту конденсации можно ввести понятие коэффициента испарения. Коэффициент испарения представляет собой отношение числа безвозвратно отлетающих молекул пара к числу испущенных жидкостью.

Обычно ставят знак равенства между коэффициентами конденсации и испарения и большей частью пренебрегают температурным скачком, исключая из рассмотрения термическое сопротивление фазового перехода. Давление пара в слое неразрезанной парогазовой смеси у поверхности жидкости считают давлением насыщения при температуре поверхности жидкости.

Если вдали от жидкости газ не насыщен паром, то возникает поток вещества, всегда направленный от поверхности испарения. Поток тепла при этом может быть направлен как от жидкости к газу, так и от газа к жидкости. Направление теплового потока будет зависеть от того, больше или меньше температура поверхности испарения $t_{пов}$ температуры парогазовой смеси $t_{пг}$.

На испарение жидкости затрачивается теплота в количестве $rj_{п,пов}$, Вт/м², где r — удельная теплота фазового перехода. Если к жидкости подводится меньше тепла, чем затрачивается на испарение, то происходит охлаждение жидкости, если больше — жидкость нагревается.

В случае стационарного процесса испарения с поверхности стекающей пленки, когда $t_c > t_{\text{пов}}$ (но кипение не происходит) и $t_{\text{пов}} > t_{\text{пт}}$, расчет можно производить по методике, изложенной в предыдущем параграфе. Конечно, при этом соответствующим образом необходимо учесть изменение направления теплового потока.

Предположим, что происходит испарение определенного объема жидкости из открытого сосуда. Стенки сосуда теплоизолированы. Слой жидкости тонок; в результате можно пренебречь изменением температуры по толщине слоя. Над жидкостью протекает поток парогазовой смеси, причем насыщение этого потока паром не происходит, так как расход парогазовой смеси велик. В жидкости нет внутренних источников теплоты, и можно пренебречь лучистым теплообменом.

Пусть в начальный момент времени температура жидкости $t_{\text{пов}}$ больше температуры парогазовой смеси вдали от жидкости $t_{\text{пт}}$. Вследствие теплоотдачи и испарения температура жидкости будет понижаться, будет происходить нестационарный процесс испарения. В какой-то момент времени температуры жидкости и парогазовой смеси станут равными. При этом согласно уравнению $q_{\text{пов}} = \alpha(t_{\text{пов}} - t_{\text{пт}})$ теплоотдача прекратится. Однако испарение будет продолжаться, что приведет к дальнейшему понижению температуры жидкости. Ее температура станет меньше температуры парогазовой смеси. Жидкость начнет получать теплоту от парогазовой смеси. По мере понижения температуры жидкости испарение ее будет замедляться, так как $\rho_{\text{п, пов}}(t_{\text{п, пов}})$ и $\Delta p = \rho_{\text{п, пов}} - \rho_{\text{п о}}$ будут уменьшаться. Теплоотдача же будет увеличиваться. Эти изменения будут происходить до тех пор, пока при некоторой температуре жидкости не установится динамическое равновесие между подводом теплоты конвективной теплоотдачей и отводом тепла путем испарения и последующей диффузии.

Дальнейшее испарение жидкости будет происходить при $t_{\text{пов}} = t_{\text{м}}$ за счет теплоты, получаемой теплоотдачей от парогазовой смеси. Температура $t_{\text{м}}$ является тем пределом, ниже которого нельзя охлаждать жидкость. При этом

$$\alpha(t_{\text{пт}} - t_{\text{м}}) = r\beta p(\rho_{\text{п, пов}} - \rho_{\text{п о}}). \quad (14-40)$$

Процесс испарения, при котором вся теплота, переданная от парогазовой смеси к жидкости, затрачивается на испарение последней и возвращается к смеси с паром, называют процессом адиабатического испарения. Температуру $t_{\text{м}}$ называют температурой жидкости при адиабатическом испарении или температурой мокрого термометра.

Из уравнения (14-40) следует, что при адиабатическом испарении

$$\alpha = \frac{q_c}{t_{\text{пт}} - t_{\text{м}}} = \frac{rj_{\text{п, пов}}}{t_{\text{пт}} - t_{\text{м}}} \quad (14-41)$$

и

$$t_{\text{м}} = t_{\text{пт}} - \frac{rj_{\text{п, пов}}}{\alpha}. \quad (14-42)$$

На практике часто встречаются неадиабатические процессы испарения.

Рассмотрим стационарный процесс неадиабатического испарения жидкости в движущийся над нею парогазовый поток. Течение происходит в канале, нижняя часть которого залита испаряющейся жидкостью.

Пусть температура потока на входе равна $t'_{\text{п}}$. В процессе течения содержание пара увеличивается за счет испарения жидкости. Изменяется и температура парогазового потока; обозначим температуру на выходе через $t''_{\text{п}}$. В общем случае температура $t''_{\text{п}}$ может быть как больше, так и меньше $t'_{\text{п}}$.

Испарившаяся жидкость может восполняться в том же количестве такой же жидкостью, но с другой температурой, которую обозначим через $t'_{\text{ж}}$.

Тепловая диаграмма рассматриваемого процесса представлена на рис. 14-8. При составлении диаграммы принято, что $t'_{\text{ж}} < t_{\text{пов}}$.

Теплоотдачей от парогазовой смеси к поверхности жидкости передается теплота $q_{\text{пов}}$, Дж/(м²·с) (на диаграмме этой величине соответствуют составляющие I, II, III). Теплота $q_{\text{пов}}$ расходуется в общем случае на испарение жидкости ($r_{\text{п,пов}}$; составляющая I) и частично может передаваться теплопроводностью и конвекцией в жидкую фазу (составляющие II и III; обозначим эту долю через $q_{\text{ж}}$). Тогда

$$q_{\text{пов}} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{\text{пов}} = \alpha \Delta t = r_{\text{п,пов}} + q_{\text{ж}} = r_{\text{п,пов}} - \lambda_{\text{ж}} \left(\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial y} \right)_{\text{пов}}; \quad (14-43)$$

здесь $\lambda_{\text{ж}}$ и $(\partial t_{\text{ж}}/\partial y)_{\text{пов}}$ — соответственно коэффициент теплопроводности жидкости и градиент температуры жидкости на границе раздела фаз.

Теплота $q_{\text{ж}} = -\lambda_{\text{ж}}(\partial t_{\text{ж}}/\partial y)_{\text{пов}}$ идет на подогрев поступающей на испарение жидкости от $t'_{\text{ж}}$ до $t''_{\text{ж}} = t_{\text{пов}}$ и частично может теряться в окружающую среду через внешние ограждения жидкости.

Тогда

$$-\lambda_{\text{ж}}(\partial t_{\text{ж}}/\partial y)_{\text{пов}} = j_{\text{п,пов}} c_{\text{рж}}(t''_{\text{ж}} - t'_{\text{ж}}) + q_{\text{т}}, \quad (14-44)$$

где $q_{\text{т}}$ — теплопотери в окружающую среду.

Если же $t'_{\text{ж}} > t_{\text{пов}}$, то знак $q_{\text{ж}}$ меняется, происходит подтечка тепла к поверхности испарения из жидкости. В этом случае испарение происходит не только за счет теплоты, переданной теплоотдачей от парогазовой смеси, но и за счет теплоты, вносимой жидкостью и поступающей извне через ограждения канала.

Учитывая сказанное, для расчета теплоотдачи можно использовать уравнение

$$q_{\text{пов}} = \alpha(t_{\text{п}} - t_{\text{пов}}) = r_{\text{п,пов}} \pm j_{\text{п,пов}} c_{\text{рж}}(t_{\text{пов}} - t'_{\text{ж}}) \pm q_{\text{т}}; \quad (14-45)$$

здесь знак плюс берется в случае $t'_{\text{ж}} < t_{\text{пов}}$, знак минус — при $t'_{\text{ж}} > t_{\text{пов}}$.

Испарение может происходить и из пористой пластины, разделяющей парогазовую и жидкую среды. Распределение температур по толщине такой пористой стенки было получено в § 2-12.

В случае испарения из пористой стенки

$$q_{\text{ж}} = -\lambda_3 \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{\text{пов}}$$

где λ_3 — эквивалентный коэффициент теплопроводности пористой стенки и заполняющей ее жидкости; t — температура пористой стенки.

Уравнение (14-45) может быть использовано и при испарении из пористой стенки.

Поперечный поток пара, направленный от поверхности, изменяет поля температур и скоростей, что приводит к изменению интенсивности теплоотдачи. Как было сказано ранее, теоретические работы показывают, что при испарении, сублимации, вдуве вещества через пористую стенку толщина теплового и гидродинамического пограничных слоев

увеличивается; при этом температурный градиент на поверхности испарения уменьшается, а следовательно, уменьшается и коэффициент теплоотдачи. Уменьшение теплоотдачи тем больше, чем больше плотность поперечного потока пара.

Коэффициенты тепло- и массоотдачи зависят от формы и размеров поверхности испарения, характера движения парогазовой смеси (свободное или вынужденное, ламинарное или турбулентное), физических свойств жидкости и газа, концентрации компонентов в парогазовой смеси и т. п.

Процесс осложняется и вследствие других причин. Для примера рассмотрим адиабатическое испарение из пористого тела (рис. 14-9). Тепло, идущее на испарение, в общем случае поступает к жидкости непосредственно ($Q_{ж}$) и через скелет пористого тела (Q_{τ}). Перенос теплоты Q_{τ} будет зависеть от теплопроводящих свойств скелета. Расчетная поверхность теплообмена $F_{расч}$ (пунктирная линия на рис. 14-9) не равна действительной поверхности теплообмена, соответствующей внешней границе твердого тела и жидкости (на рисунке выделена жирной линией). Это различие будет тем больше, чем ниже уровень жидкости.

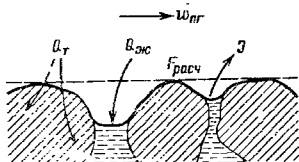


Рис. 14-9 К испарению из пористого тела

уровня жидкости перенос пара к расчетной поверхности во многом определяется сопротивлением капилляров. Если проходные сечения капилляров очень малы, то течение в капиллярах характеризуется законами течения разреженных сред.

При испарении со свободной поверхности большого объема жидкости также наблюдаются особенности. Обычно парогазовый поток возмущает поверхностный слой жидкости, в результате чего могут иметь место волнообразование и капельный унос жидкости в газовый поток.

Названные причины существенно затрудняют получение достаточно общих зависимостей и зачастую исключают возможность сравнения между собой опытных данных, полученных в различных условиях.

Тепло- и массоотдача при испарении воды из металлической пористой пластины в продольный паровоздушный поток исследовалась на кафедре теоретических основ теплотехники МЭИ [Л. 59, 60]. Опыты [Л. 59, 60] проведены при условиях, близких к адиабатическим. Соглас-

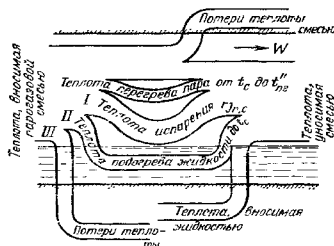


Рис. 14-8 Тепловая диаграмма процесса испарения жидкости в парогазовый поток

В процессе испарения жидкости из пористого тела действительные поверхности теплообмена и массообмена различны, так как жидкость испаряется со своей поверхности; это различие зависит от углубления жидкости. Как показано в [Л. 38], испарение частично идет и из очень тонких пленок жидкости, прилегающих к мениску вследствие капиллярных эффектов второго рода. При значительном углублении

по этому исследованию средний коэффициент теплоотдачи при турбулентном пограничном слое может быть определен по уравнению

$$\overline{Nu}_t = 4,55 \cdot 10^{-3} Re_t^{0,8} K^{0,4}, \quad (14-46)$$

где $K = r/c_p \Delta t$ — критерий фазового перехода; здесь $\Delta t = t_{\text{н}} - t_c$ — температурный напор.

В уравнении (14-46) в качестве линейного размера принята длина пластины вдоль потока, отсчитываемая от начала участка испарения. В качестве определяющей температуры выбрана температура смеси вдали от пластины; в критерии вводятся параметры смеси.

В опытах [Л. 59, 60] критерий Re_t изменялся от $1,3 \cdot 10^5$ до $1,65 \cdot 10^6$; этому соответствовали изменения скорости и температуры паровоздушного потока от 9 до 115 м/с и от 12 до 140 °С. Средний температурный напор изменялся в опытах от 6 до 80 К. Коэффициент теплоотдачи отнесен к поверхности пластины $F_{\text{расч}}$. Объем пор в пластине составлял 40%.

Согласно опытным данным [Л. 59, 60] и другим исследованиям коэффициенты тепло- и массоотдачи уменьшаются по мере увеличения содержания пара в смеси.

Для расчета массоотдачи в [Л. 60] получено уравнение

$$\overline{Nu}_{\text{д}} = 2 \cdot 10^{-4} Re_t^{0,8} \pi_D^{-0,5} \varepsilon_{\text{н0}}^{-0,5}, \quad (14-47)$$

где

$$\varepsilon_{\text{н0}} = 1 - \varepsilon_{\text{т0}} = \frac{p_{\text{н0}}}{p}; \quad \pi_D = \frac{p_{\text{н,с}} - p_{\text{н0}}}{p};$$

$p_{\text{н,с}}$ — парциальное давление водяных паров у поверхности испарения; $p_{\text{н0}}$ — парциальное давление водяных паров вдали от поверхности испарения; p — полное давление паровоздушной смеси. Остальные критерии подобия такие же, как и в предыдущих уравнениях. Значение $p_{\text{н,с}}$ берется из таблиц водяного пара как давление насыщения при $t_{\text{н}} = t_c$.

Величина $\varepsilon_{\text{н0}}$ изменялась в опытах от 0,00365 до 0,0168.

Как следует из рассматриваемой работы, отношение $\overline{Nu}/\overline{Nu}_{\text{д}}$ не равно постоянной величине и является функцией специфичных критериев, учитывающих особенности совместно идущих процессов тепло- и массообмена: $(\overline{Nu}_t/\overline{Nu}_{\text{д}}) = 0,7 \pi_D K$. Сопоставление уравнений (14-46) и (14-47) показывает, что α/β или $\alpha/j_{\text{п,с}}$ от скорости не зависит.

Температура пористой стенки зависит от большого количества различных факторов. Расчет ее следует производить по уравнению (2-130).

Расчет упрощается при адиабатическом режиме испарения. В этом случае температура поверхности испарения может быть подсчитана по уравнению (14-42):

$$t_c = t_{\text{м}} = t_{\text{нр}} - \frac{r i_{\text{п,с}}}{\alpha}.$$

Из ранее приведенных уравнений следует, что

$$\frac{r i_{\text{п,с}}}{\alpha} = \frac{r_{\text{п}}^2 \Delta p}{\alpha} = \frac{r D_{\text{п}} p}{230 \lambda} \left(\frac{\Delta p}{p_{\text{нов}}} \right)^{5/6},$$

где $\Delta p = p_{\text{п,с}} - p_{\text{н0}}$.

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН ПРИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

15-1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Процессы теплообмена, сопровождающиеся химическими реакциями, имеют место в камерах сгорания различных двигателей (реактивных, газовых турбин и др.), в химическом производстве, в МГД установках, при гиперзвуковых скоростях полета в плотной атмосфере и других случаях.

Химические реакции могут сопровождаться выделением или поглощением энергии в различных формах — в форме теплоты, электрической энергии или света, механической энергии и др. Нами будут рассмотрены только химические реакции, происходящие с поглощением теплоты (эндотермические реакции) или с его выделением (экзотермические реакции). При этом, как и в случае фазовых переходов первого рода, химические превращения неразрывно связаны с процессом теплообмена. Зачастую химические реакции сопровождаются фазовыми изменениями.

Химические реакции могут идти как на поверхности тела, так и в жидкой среде, омывающей это тело. В первом случае реакции называются гетерогенными, во втором — гомогенными.

Если реакции происходят вдали от тела (вне пределов пограничного слоя), то они могут не сказываться на теплоотдаче и теплообмен в пограничном слое можно рассчитывать обычными методами. В противном случае нужно учитывать выделение или поглощение теплоты в пограничном слое или непосредственно на стенке.

В дальнейшем прежде всего будут рассмотрены процессы, происходящие в газовых смесях и на омываемых ими стенках. Такой выбор объекта рассмотрения объясняется не только лучшей его изученностью, но и значительным практическим интересом к подобным задачам.

Современная техника характеризуется ростом тепловых нагрузок, скоростей теплоносителей и других параметров. При высоких температурах рабочие процессы могут неизбежно сопровождаться химическими превращениями. Так, например, как уже упоминалось в § 11-3, при гиперзвуковых скоростях полета вследствие аэродинамического нагрева воздух может иметь высокую температуру, при которой может происходить и существенная ионизация воздуха¹.

На рис. 15-1 показаны области основных химических реакций в высокотемпературном воздухе в зависимости от давления и температуры.

В ряде случаев упомянутые эффекты могут иметь место при сравнительно низких температурах. Известно, что эффективная теплопроводность двуокиси азота NO_2 в интервале температур от 0 до 120°C очень высока. Этот эффект является следствием обратимой реакции $2\text{NO}_2 \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4$. Равновесная смесь при температурах выше 120°C содержит преимущественно NO_2 , а при температурах меньше 0°C — преимущественно N_2O_4 . Необычно высокая кажущаяся теплопроводность двуокиси азота является следствием того, что молекулы диффундируют из высокотемпературных в низкотемпературные области, где они рекомбинируют, освобождая соответствующую теплоту реакции.

¹ Поскольку ионизированный газ является проводником электричества, возможно появление заметных электромагнитных полей и сил.

Рассмотрим некоторые положения термохимии, представляющие интерес для изучаемых нами процессов.

Как следует из первого закона термодинамики, если реакция идет при постоянных давлениях и температуре, теплота химической

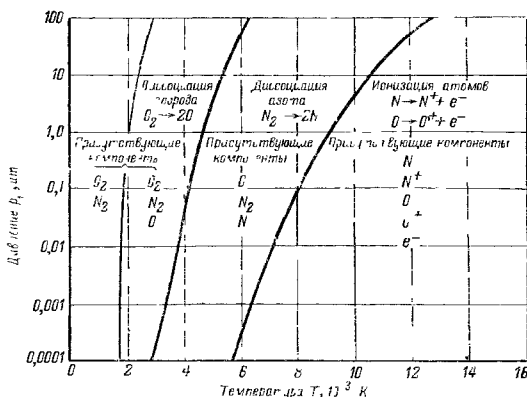


Рис 15-1 Области реакции диссоциации и ионизации воздуха в зависимости от давления и температуры

реакции ΔH будет равна разности энтальпий начального и конечного состояний (при этом предполагается, что совершается только работа расширения) и не зависит от пути процесса:

$$Q_{p=\text{const}} = H_2 - H_1 = \Delta H.$$

В дальнейшем будем полагать, что рассматриваемые реакции идут при постоянном давлении смеси (что обычно выполняется для процессов тепло- и массообмена) и при постоянной температуре (что выполняется для локальных значений при стационарном режиме). Тогда для любой химической реакции, описываемой стехиометрическим уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i A_i \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{i=n} b_i B_i,$$

теплота химической реакции, равная по абсолютной величине выделенному количеству теплоты ΔH , Дж/кмоль, взятому с обратным знаком, может быть выражена уравнением

$$-\Delta H = \sum_{i=1}^{i=m} a_i H_{A_i} - \sum_{i=1}^{i=n} b_i H_{B_i}; \quad (15-1)$$

здесь A_i , B_i — химические символы соответственно реагентов и продуктов реакции (например, C, O_2 , CO_2 и т. п.); a_i и b_i — стехиометрические коэффициенты, представляющие собой соответственно число молей реагентов и продуктов реакции; H_{A_i} и H_{B_i} — молярные энтальпии реагентов и продуктов реакции.

Если реакция является эндотермической, то теплота реакции считается положительной; при выделении теплоты — отрицательной. Такая система знаков теплот реакций называется термодинамической; иногда используется обратная система знаков (или записей реакций), называемая термохимической.

Теплота химической реакции зависит от температуры, при которой протекает процесс, однако для большей части химических реакций эта зависимость слаба. В тех случаях, когда в результате реакции число и тип молекул не меняются, изменение теплоты реакции особенно мало. Обычно в справочниках приводятся стандартные значения теплот реакций (при 0,09806 МПа и 298,15 К). Будем в дальнейшем полагать, что теплота химической реакции постоянна, т. е. не изменяется в конкретном процессе теплообмена для конкретных реакций.

В термохимических расчетах используется понятие теплоты образования. Теплота образования представляет собой теплоту химической реакции при образовании данного вещества (какого-то компонента смеси) из исходных простых веществ. Для значительного количества компонентов реакция образования из простых веществ на практике не может быть осуществлена и теплоту образования рассматривают в общем случае как вспомогательную величину, играющую важную роль при расчетах теплот химических реакций. Теплоты образования большого количества химических веществ приводятся в справочниках.

В задачах с химическими превращениями используется энтальпия, в которую включается теплота образования данного компонента из исходных веществ. Полная удельная энтальпия i -го компонента

$$h_i = \int c_p dT + h_i^0, \quad (15-2)$$

где h_i^0 — удельная теплота образования i -го компонента, Дж/кг i .

Величина h_i^0 , так же как и теплота химической реакции ΔH , может быть как положительной, так и отрицательной. Если при образовании i -го компонента тепловая энергия подводится, то $h_i^0 > 0$; если отводится, то $h_i^0 < 0$.

В тех случаях, когда наряду с химическими реакциями происходят и фазовые превращения, энтальпия должна учитывать и теплоту фазовых переходов.

Для смеси газов энтальпия h определяется по правилу аддитивности:

$$h = \sum_{i=1}^{i=n} m_i h_i, \quad (13-3)$$

где $m = \rho_i / \rho$ — относительная массовая концентрация i -го компонента смеси; ρ_i — массовая концентрация i -го компонента смеси, кг/м³; ρ — плотность смеси, кг/м³.

Отнесем теплоту химической реакции, определяемую уравнением (15-1), к единице массы реагентов или продуктов реакции. По определению

$$h_{A_i} = \frac{H_{A_i}}{M_{A_i}}$$

$$h_{B_i} = \frac{H_{B_i}}{M_{B_i}},$$

где M_{A_i} и M_{B_i} — молекулярные массы веществ A_i и B_i ; h_{A_i} измеряется в Дж/кг A_i , а h_{B_i} — в Дж/кг B_i .

Тогда из уравнения (15-1) следует, что величина удельного тепло-выделения определяется следующими уравнениями:

$$\Delta h_{A_i} = \frac{-\Delta H}{M_{A_i}} = a_i h_i + \frac{1}{M_{A_i}} \left(\sum_{i=2}^{i=m} M_{A_i} a_i h_{A_i} - \sum_{i=1}^{i=n} M_{B_i} b_i h_{B_i} \right); \quad (15-4)$$

$$\Delta h_{B_i} = \frac{-\Delta H}{M_{B_i}} = -b_i h_i + \frac{1}{M_{B_i}} \left(\sum_{i=1}^{i=m} M_{A_i} a_i h_{A_i} - \sum_{i=2}^{i=n} M_{B_i} b_i h_{B_i} \right). \quad (15-5)$$

Тепло- и массообмен зависят не только от теплоты химических превращений, но и от скорости прохождения последних. Скоростью химической реакции называется количество молекул данного сорта, реагирующих в единицу времени. Чтобы можно было сравнить скорости различных реакций, их обычно определяют как число молекул или молей данного вещества, реагирующих в единицу времени в единице объема фазы в случае гомогенной реакции или на единице поверхности раздела фаз в случае гетерогенной реакции.

Рассмотрим кратко некоторые положения химической кинетики. Под кинетикой реакции понимают зависимость скорости реакции от концентрации реагентов, температуры и некоторых других факторов.

Реакции могут быть как простыми, так и сложными. Сложные реакции осуществляются в результате одновременного протекания нескольких простых. Например, гомогенная газовая реакция $2\text{NO} + \text{O}_2 = \text{N}_2\text{O}_4$ складывается из следующих реакций (стадий): $2\text{NO} = (\text{NO})_2$, $(\text{NO})_2 + \text{O}_2 = \text{N}_2\text{O}_4$. Димер окиси азота $(\text{NO})_2$ является промежуточным веществом.

Продукты стадий (промежуточные вещества) быстро потребляются в других элементарных реакциях и присутствуют в реагирующей смеси в очень небольших количествах. Задача выяснения механизма реакции с точки зрения химической кинетики обычно сводится к установлению природы промежуточных продуктов и стадий реакции.

В случае простой обратимой реакции ее скорость

$$\omega = \overset{\rightarrow}{\omega} - \overset{\leftarrow}{\omega},$$

где $\overset{\rightarrow}{\omega}$ и $\overset{\leftarrow}{\omega}$ — скорости реакции в прямом и обратном направлениях.

Если $\omega \neq 0$, процесс является химически неравновесным, если $\omega = 0$ — химически равновесным. Под химическим равновесием понимают такое состояние реагирующей системы, при котором рассматриваемая химическая реакция происходит одновременно в двух противоположных направлениях с одинаковой по абсолютной величине скоростью ($\overset{\rightarrow}{\omega} = \overset{\leftarrow}{\omega}$), вследствие чего состав смеси остается постоянным. В сложных обратимых реакциях обратимы все стадии, и при равновесии для каждой химической стадии s выполняется равенство $\overset{\rightarrow}{\omega}_s = \overset{\leftarrow}{\omega}_s$.

Иногда для всех стадий, кроме одной, практически соблюдается равновесие. В таких случаях кинетика реакции по существу определяется неравновесной стадией, называемой лимитирующей.

В идеальных газовых смесях скорости одностадийных гомогенных реакций подчиняются закону действующих масс. Согласно этому закону скорость реакции $\sum a_i A_i \rightarrow \sum b_j B_j$ зависит от концентрации реагентов A_i и определяется выражением

$$\vec{\omega} = k \rho_{A_1}^{a_1} \rho_{A_2}^{a_2} \dots, \quad (15-6)$$

где ρ_{A_i} — концентрация вещества A_i , т. е. число молекул в единице объема или пропорциональная величина, измеряемая, например, кг/м³; k — константа скорости реакции или удельная скорость реакции.

Скорость обратной реакции

$$\overleftarrow{\omega} = \overleftarrow{k} \rho_{B_1}^{b_1} \rho_{B_2}^{b_2}. \quad (15-6')$$

Скорость прямой реакции уменьшается по мере ее протекания, если исходные концентрации фиксированы; скорость обратной реакции при этом увеличивается. Когда скорости обеих реакций станут одинаковыми, т. е. $\vec{\omega} = \overleftarrow{\omega}$, достигается состояние химического равновесия. При этом

$$\frac{\rho_{B_1}^{b_1} \rho_{B_2}^{b_2} \dots}{\rho_{A_1}^{a_1} \rho_{A_2}^{a_2} \dots} = \frac{\vec{k}}{\overleftarrow{k}} = K;$$

здесь K — константа равновесия, величина, постоянная для данной реакции и температуры.

Кинетика сложных реакций может быть описана путем применения закона действующих масс к каждой стадии.

Константа скорости, а следовательно, и скорость реакции увеличиваются с повышением температуры.

Как следует из изложенного, скорости химических реакций и, следовательно, скорости выделения (или поглощения) тепла зависят от концентраций реагентов и температуры. Поля же концентраций и температуры зависят не только от хода реакций, но и от процессов тепло- и массообмена, идущих одновременно с химическими превращениями. Таким образом, в общем случае химические превращения и тепло- и массообмен оказываются тесно связанными и взаимозависящими.

15-2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА ПРИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Определение энтальпии согласно уравнениям (15-2) и (15-3) позволяет использовать для расчета тепло- и массообмена при химических превращениях многие ранее полученные соотношения.

Плотность потока теплоты в диффундирующей смеси описывается уравнениями (14-10) и (14-10'):

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \vec{\rho} \vec{\omega} i + \sum_{j \neq 1} \vec{j}_{m,j} i_j.$$

В случае химических реакций уравнение (14-10') переходит в следующее:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \vec{\rho} \vec{\omega} h + \sum_{j \neq 1} \vec{j}_{m,j} h_j. \quad (15-7)$$

Здесь первый член правой части уравнения учитывает перенос теплоты теплопроводностью, второй — конвекцией и третий — молекулярной

диффузией. В этом уравнении не надо отдельно учитывать выделение или поглощение теплоты за счет химических реакций.

На основе соотношения (14-10) в гл. 14 было получено дифференциальное уравнение энергии

$$\rho \frac{di}{dt} = \lambda \nabla^2 t - \operatorname{div} [(i_1 - i_2) \vec{j}_1].$$

Последнее уравнение будет справедливо и в случае химических превращений, если вместо энтальпий i_1 и i в него ввести энтальпии h_1 и h , определяемые соответственно уравнениями (15-2) и (15-3). Тогда для случая химических реакций уравнение энергии можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \lambda \nabla^2 t - \operatorname{div} [(h_1 - h_2) \vec{j}_1]. \quad (15-8)$$

Аналогичность дифференциальных уравнений энергий (14-12) и (15-8) следует из аналогичности уравнений (14-10) и (15-7).

Согласно (15-8) локальное изменение энтальпии во времени вызвано теплопроводностью, конвекцией и молекулярной диффузией. Принимая, что последняя осуществляется только концентрационной диффузией, т. е.

$$\vec{j}_1 = -\rho D \nabla m_1,$$

уравнение (15-8) можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \lambda \nabla^2 t + \operatorname{div} [(h_1 - h_2) \rho D \nabla m_1]. \quad (15-8')$$

Конечно, при этом уравнение (15-8), как и уравнение (14-12), справедливо для бинарной смеси диффундирующих друг в друга компонентов. При выводе не учтены возможные внутренние источники тепла, не вызванные химическими реакциями, физические параметры считаются постоянными, не учтена теплота трения.

Преобразуем правую часть уравнения (15-8'). Предварительно выполним некоторые вспомогательные выкладки.

По определению энтальпии смеси $h = \sum m_i h_i$. Отсюда

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i dh_i,$$

где $dh_i = di_i$, поскольку $dh^0_i = 0$ (теплоту образования каждого компонента считаем фиксированной). Полагаем, что $di_i = c_{pi} dT$. Тогда

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i di_i$$

или

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i c_{pi} dT.$$

Обозначая $c_p = \sum m_i c_{pi}$, где c_p — средняя теплоемкость смеси, можно написать:

$$dh = c_p dT + \sum h_i dm_i.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$dT = \frac{dh}{c_p} - \frac{\sum h_i dm_i}{c_p}.$$

Отсюда для бинарной смеси производная, например, по y будет:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \sum h_i \frac{\partial m_i}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \left(h_1 \frac{\partial m_1}{\partial y} + h_2 \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \frac{\partial m_1}{\partial y} (h_1 - h_2).$$

Здесь использовано то, что $m_1 + m_2 = 1$ и $j_1 = -j_2$.

Полученное значение dt/dy используем для преобразования правой части уравнения (15-8'). Для краткости преобразуем только выражение

$$\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right].$$

Для осей Ox и Oz преобразования выполняются аналогично.

Подставляя в предыдущее выражение значение dt/dy , получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] &= \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \frac{\partial m_1}{\partial y} (h_1 - h_2) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] &= \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\rho c_p D} \right) (h_1 - h_2) \rho D \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + (1 - \text{Le}^{-1}) \frac{\partial}{\partial y} \left[(h_1 - h_2) \rho D \frac{\partial m_1}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

где $\text{Le} = \text{Pr}/\text{Pr}_d = \rho c_p D / \lambda = D/a$ — число Льюиса—Семенова.

С учетом сделанных преобразований дифференциальное уравнение энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{dh}{\partial \tau} = a \nabla^2 h + (1 - \text{Le}^{-1}) \text{div} [(h_1 - h_2) D \nabla m_1]. \quad (15-8'')$$

Если $\text{Le} = 1$, то последний член правой части уравнения (15-8'') равен нулю и, следовательно, отсутствует перенос теплоты путем молекулярной диффузии. При этом уравнение принимает вид, аналогичный уравнению энергии (4-10) для однородной жидкости без внутренних источников теплоты, только теперь роль температуры играет полная энтальпия смеси h .

Это означает, что при $\text{Pr} = \text{Pr}_d$ решения уравнения (4-10) справедливы и для процессов с химическими превращениями, если соответственно аналогичны условия однозначности.

При замене в уравнении (15-8'') h_i и h на i , я i вернемся к уравнению энергии для процессов тепло- и массообмена без химических реакций. Очевидно, и в этом случае при $\text{Pr} = \text{Pr}_d$ будут пригодны решения уравнения (4-10). Для газовых смесей число Льюиса—Семенова часто близко к единице.

Согласно уравнению энергии (15-8'') поле энтальпии h зависит от распределения скорости смеси и поля концентраций. Скорость смеси входит в полную производную $dh/d\tau$:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Влияние поля концентраций учитывается вторым членом правой части уравнения: напомним, что уравнение (15-8''), как и уравнение (15-8'), получено при учете только концентрационной диффузии.

Для учета влияния полей скорости и концентраций к уравнению энергии (15-8'') [или (15-8')] нужно добавить уравнения движения и массообмена. Уравнение движения содержит новую зависимость переменную — давление. Поэтому появляется необходимость добавить еще одно уравнение. Таким уравнением может быть уравнение сплошности (неразрывности).

Уравнения движения и сплошности для смеси по форме записи не отличаются от уравнений для однородной среды (§ 4-3). В уравнение же массообмена (14-15) необходимо ввести дополнительный член j_{vi} , кг/(м³·с), учитывающий источник массы i -го компонента за счет химических превращений. Величина j_{vi} представляет собой результирующую объемную скорость реакции. В общем случае она является функцией времени и координат.

С учетом сказанного уравнение массообмена может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dm_i}{dt} = D \nabla^2 m_i + \frac{j_{vi}}{\rho}. \quad (15-9)$$

Конечно, общая масса всех компонентов, участвующих в реакциях, не изменяется.

Для определения j_{vi} к дифференциальным уравнениям энергии, массообмена, движения и сплошности должны быть добавлены уравнения химической кинетики. Необходимость использования уравнений химической кинетики усложняет задачу. Трудности, о которых говорилось в предыдущих главах, усугубляются нелинейностью соотношений химической кинетики.

Имеется несколько частных случаев, когда задача упрощается, а именно:

гомогенные реакции очень медленны, а скорости массообмена очень велики;

гомогенные реакции очень быстры, а скорости массообмена очень малы;

число Льюиса—Семенова равно единице.

В первом случае реакции не успевают сколько-нибудь заметно изменить состав смеси и задача формально сводится к расчету тепло- и массообмена без химических превращений. Такой процесс называют замороженным.

Во втором случае, когда скорости реакций велики по сравнению со скоростями диффузии и конвекции, согласно уравнению (15-9) состав смеси прежде всего определяется членом, учитывающим источник массы определенного компонента. Можно полагать, что при этом устанавливается химическое равновесие и состав смеси является функцией только температуры (в общем случае и давления). Влияние химических реакций проявляется только через физические свойства смеси, представленные в уравнениях энергии, движения и сплошности. Эти уравнения аналогичны соответствующим уравнениям для однородной среды. При этом нет необходимости интегрировать уравнение массообмена. Такой процесс называют равновесным.

В третьем случае, когда $Le=1$, математически задача такая же, как и для теплообмена при отсутствии массообмена. Как следует из уравнения энергии (15-8''), поле энтальпий не зависит от молекулярной диффузии, если $Le=1$.

Таким образом, в первом случае могут быть использованы решения (в том числе и экспериментальные) задач тепло- и массообмена без

химических превращений, во втором и третьем — решения для однородной среды. Подобные задачи рассматривались в предыдущих главах. Конечно, во всех случаях в соответствующие уравнения вместо температур вводятся полные энтальпии.

Для простоты и наглядности физические свойства газовой смеси приняты постоянными. В действительности физические параметры, входящие в дифференциальные уравнения, могут зависеть от протекания химических реакций, так как в результате последних меняется состав смеси и, следовательно, ее свойства.

При химических реакциях теплоотдачу описывают преобразованным законом Ньютона—Рихмана:

$$q_c = \frac{\alpha}{c_p} (h_0 - h_c); \quad (15-10)$$

здесь h_0 и h_c — энтальпии газовой смеси соответственно на удалении от поверхности раздела фаз и на ней; энтальпии h_0 и h_c вычисляются по уравнениям (15-2) и (15-3), т. е. с учетом теплоты образования; c_p — удельная изобарная теплоемкость газовой смеси, определяемая согласно правилу аддитивности по соотношению $c_p = \sum m_i c_{pi}$. Выбор параметров, по которым подсчитывается c_p , уравнением (15-10) не предопределен. Часто c_p рассчитывают по параметрам смеси на удалении от стенки.

Замена в законе Ньютона—Рихмана температур энтальпиями позволяет учесть основное влияние химических реакций на процесс теплоотдачи. При использовании уравнения (15-10) значения коэффициентов теплоотдачи в первом приближении можно брать из формул для течений без химических реакций. Конечно, при наличии химических превращений могут измениться и значения коэффициентов теплоотдачи, так как соответственно изменяются поля температур, скорости и концентрации, однако влияние последних факторов не столь значительно, как влияние тепловых эффектов реакций. Уравнение (15-10), по-видимому, дает наилучшие результаты, когда выполняются какие-либо из трех ранее отмеченных частных случаев.

В настоящее время теплообмен при обтекании тела потоком с химическими реакциями находится в стадии изучения. Исследовались в основном равновесные течения диссоциирующего газа при химических не активной (не каталитической) поверхности стенки. Расчетно-теоретические исследования показывают, что коэффициенты теплоотдачи с учетом переменности физических свойств могут отличаться от α при постоянных свойствах в случае ламинарного пограничного слоя на пластине на величину до 30%, турбулентного — до 50%. В обоих случаях α вычисляется по уравнению (15-10). Отмечаемая разница тем значительнее, чем больше отличаются от единицы отношения энтальпий h_0/h_c или плотностей ρ_0/ρ_c .

В отличие от α , определяемого по уравнению (15-10), влияние диссоциации на плотность теплового потока может быть значительно.

Перенос теплоты, учитываемый уравнением (15-10), осуществляется теплопроводностью, конвекцией и молекулярной диффузией. В сложных случаях теплообмена уравнение (15-10), оставаясь пригодным, не определяет полностью тепловой поток, поступающий в стенку. Подробнее об этом сказано в § 15-3.

Если химические реакции происходят при течении газовой смеси с большой скоростью, то необходимо учесть перенос теплоты диссипа-

ции механической энергии. В этом случае закон Ньютона—Рихмана записывается в следующем виде:

$$q_c = \frac{\alpha}{c_p} (h_r - h_c), \quad (15-11)$$

где величину h_r можно назвать полной энтальпией восстановления. Значение h_r определяется по уравнению

$$h_r = h + r \frac{\omega_0^2}{2} \quad (15-12)$$

и подсчитывается по собственной температуре. Судя по ряду данных, коэффициенты восстановления сравнительно мало отличаются от таковых же для однородного газа (гл. 11).

Запись закона Ньютона—Рихмана в форме (15-11) является наиболее общей по сравнению с ранее использованными.

15-3. ТЕПЛОБМЕН МЕЖДУ ГАЗОВОЙ СМЕСЬЮ И ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ФАЗ

В зависимости от сочетания тех или иных условий протекания реакций методика расчета результирующего теплового потока между газовой смесью и поверхностью раздела фаз может несколько изменяться. Расчет теплообмена во многом зависит от места прохождения химических реакций.

Гомогенные реакции могут проходить в газовой смеси без наличия в ней компонентов стенки, материал стенки остается при этом химически нейтральным и является только проводником тепла. В других случаях в гомогенных реакциях может участвовать испарившийся материал стенки, причем испарение может идти как из твердой фазы (сублимация), так и из предварительно расплавленного твердого материала. В химических реакциях может участвовать теплоноситель, вдуваемый в газ через пористую стенку. Реакция между газовой смесью и твердой фазой может идти и на поверхности последней (гетерогенная реакция). Зачастую идут одновременно несколько перечисленных ранее процессов химического и фазового превращений.

Независимо от названных условий протекания реакций при расчете задач тепло- и массообмена сохраняются некоторые общие приемы, заключающиеся в учете определенных факторов, влияющих на результирующий тепловой поток к стенке. Приведенный ниже пример поможет выяснить эти факторы.

При рассмотрении задач теплообмена с химическими превращениями, как было показано, нужно в общем случае учитывать и процессы массообмена. Поэтому, в частности, нами будут использоваться многие положения гл. 14.

Рассмотрим теплообмен между реагирующим пограничным слоем и испаряющейся (сублимирующейся) поверхностью твердого тела. За пределами пограничного слоя параметры газа — плотность смеси ρ_0 , ее тангенциальная скорость $\omega_x = \omega_0$, концентрации компонентов смеси m_{i0} — постоянны. Будем полагать для простоты, что число Прандтля газового потока равно единице и соответственно равен единице коэффициент восстановления. Пренебрежем тепловым излучением. Примем, что молекулярный массообмен осуществляется только концентрационной диффузией. Рассматриваемый процесс стационарен.

Запишем уравнение теплового баланса для поверхности раздела газ — стенка (рис. 15-2):

$$q_{c(\tau)} + (\rho w_y) c h_{E(\tau)c} - (\rho w_y) h_c; \quad (15-13)$$

здесь $q_{c(\tau)}$ — плотность теплового потока на границе раздела газ — стенка в твердом теле; $q_{c(\tau)}$ — то же, но в газе; $(\rho w_y) c$ — плотность потока массы смеси на границе раздела фаз; h_c — энтальпия газовой смеси на границе раздела; $h_{E(\tau)c}$ — то же для материала поверхности, находящегося в твердой фазе.

Первый член правой части уравнения (15-13) представляет теплоотдачу за счет конвективного теплообмена (с учетом теплопроводности, конвекции и молекулярной диффузии) от реагирующего пограничного

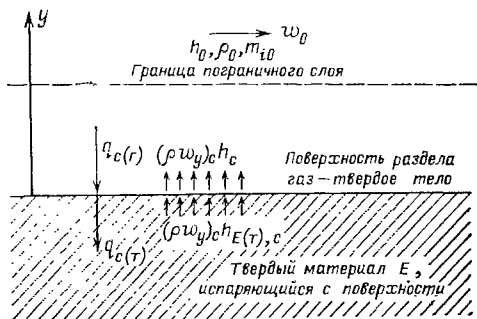


Рис. 15-2. Теплообмен между реагирующим газовым слоем и теплом с испарением на поверхности.

слоя к границе раздела. Второй член описывает обратный поток тепла, приходящий к границе раздела от твердой фазы и обусловленный плавлением, химическими реакциями или испарением. Третий член представляет энтальпию, переносимую от границы раздела внутрь пограничного слоя за счет потока массы от поверхности стенки. Если бы рассматривался перенос массы через твердый неплавящийся пористый материал, второй член представлял бы теплоту, переносимую к границе раздела жидкостью, просачивающейся через поры.

Согласно (15-10) член $q_{c(\tau)}$ может быть описан уравнением

$$q_{c(\tau)} = \frac{\alpha}{c_p} (h_0 - h_c).$$

С учетом испарения ($E_{(\tau)} \rightarrow E_{(r)}$)

$$h_{E(\tau)} + r_{\kappa} = h_{E(r)},$$

где r_{κ} — удельная теплота испарения материала поверхности с химическим символом E .

Учитывая последние соотношения, уравнение (15-13) можно записать в следующем виде:

$$q_{c(\tau)} = \frac{\alpha}{c_p} \left[(h_0 - h_c) - \frac{r_{\kappa} + h_c - h_{E(r)} c}{St} \right]; \quad (15-14)$$

здесь

$$St = \frac{\alpha}{(p w_b)_c c_p}.$$

Уравнение (15-14) может быть записано и в другом виде, если учесть, что $h = \sum m_i h_i$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} h_0 - h_c &= \sum m_{i0} h_{i0} - \sum m_{ic} h_{ic} = \sum (m_{i0} h_{i0} - m_{ic} h_{ic}) = \\ &= \sum (m_{i0} h_{i0} - h_{ic}) + \sum h_{ic} (m_{i0} - m_{ic}). \end{aligned} \quad (15-15)$$

Полагаем, что компонент E присутствует только в пограничном слое. Тогда подстановка (15-15) в (15-14) дает:

$$\begin{aligned} q_c(\tau) &= \frac{\alpha}{c_p} \left[\sum m_{i0} (h_{i0} - h_{ic}) - \frac{r_n}{St} + \sum_{i \neq E} h_{ic} \left(m_{i0} - m_{ic} - \frac{m_{i,c}}{St} \right) + \right. \\ &\quad \left. + h_{E(\tau)c} \left(\frac{1 - m_{E,c}}{St} - m_{Ec} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15-16)$$

Таким образом, расчет теплового потока, уходящего в стенку, сводится к вычислению параметров газовой смеси на границе раздела фаз и вдали от нее.

Для определения $q_{c(\tau)}$ иногда используется уравнение

$$q_c(\tau) = \frac{\alpha}{c_p} (h_{эф} - h_c). \quad (15-17)$$

Значение $h_{эф}$ должно подбираться так, чтобы, например, в рассматриваемом примере удовлетворять значениям $q_{c(\tau)}$, полученным из уравнения (15-16). Практически $h_{эф}$ определяется экспериментально. Величина эффективной полной энтальпии может существенно изменяться в зависимости от условий протекания процессов тепло- и массообмена.

Вычисление $q_{c(\tau)}$ только по уравнению (15-10) в общем случае привело бы к ошибкам: необходимо учитывать полноту переноса к стенке теплоты химической реакции или степень преобразования химической энергии в тепловую.

Нами не рассматриваются задачи определения коэффициентов теплоотдачи при наличии химических реакций. Как отмечалось в § 15-2, в первом приближении могут быть использованы коэффициенты теплоотдачи, полученные для случая отсутствия химических превращений. С приемами определения коэффициентов теплоотдачи при наличии химических реакций можно ознакомиться в специальной литературе [Л. 40, 181, 105].

Эффекты выделения теплоты при фазовых переходах рассматривались при изучении процессов конденсации и кипения чистых веществ. Процессы усложнялись при фазовых переходах в двухкомпонентных гетерогенных системах, однако то обстоятельство, что в последних случаях рассматривались фазовые превращения, идущие только на границах фаз, несколько упрощало задачу.

Тепло- и массообмен при химических и фазовых превращениях можно считать более общим случаем по сравнению с ранее рассмотренными, однако и эта задача, несмотря на свою сложность и общность, не исчерпывает многообразия процессов тепло- и массообмена. В частности, изучаемые процессы могут усложняться при наложении электромагнитных полей, что имеет место в практике современной техники. Процессы переноса теплоты теплопроводностью, конвекцией и молекулярной диффузией часто (особенно при высоких температурах) сопровождаются процессами теплового излучения.

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

16-1. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

Процессы лучистого теплообмена получили широкое распространение в теплотехнике, ядерной энергетике, ракетной технике, металлургии, сушильной технике, химической технологии, светотехнике, гелиотехнике и др.

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела путем электромагнитных волн. Электромагнитными волнами называют электромагнитные возмущения, исходящие из излучаемого тела и распространяющиеся в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. При поглощении электромагнитных волн какими-либо другими телами они вновь превращаются в энергию теплового движения молекул. Возбудителями электромагнитных волн являются заряженные материальные частицы, т. е. электроны и ионы, входящие в состав вещества. При этом колебания ионов соответствуют излучению низкой частоты; излучение, обусловленное движением электронов, может иметь высокую частоту, если они входят в состав атомов и молекул и удерживаются около своего равновесия значительными силами.

В металлах многие электроны являются свободными. Поэтому в этом случае нельзя говорить о колебаниях около центров равновесия. Электроны движутся и при этом испытывают нерегулярное торможение. Вследствие этого излучение металлов приобретает характер импульсов и имеет волны различной частоты, в том числе волны низкой частоты. Помимо волновых свойств излучение обладает также и корпускулярными свойствами. Корпускулярные свойства состоят в том, что лучистая энергия испускается и поглощается веществами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями — квантами света или фотонами. Испускаемый фотон — частица материи, обладающая энергией, количеством движения и электромагнитной массой. Поэтому тепловое излучение можно рассматривать как фотонный газ.

Прохождение фотонов через вещество есть процесс поглощения и последующего испускания энергии фотонами атомами и молекулами этого вещества. Таким образом, излучение имеет двойственный характер, так как обладает свойствами непрерывности поля электромагнитных волн и свойствами дискретности, типичными для фотонов. Синтезом обоих свойств является представление, согласно которому энергия и импульсы сосредоточиваются в фотонах, а вероятность нахождения их в том или ином месте пространства — в волнах. Соответственно этому излучение характеризуется длиной волны (λ) или частотой

Классификация электромагнитного излучения в зависимости от длины волны

Вид излучения	Длина волны, мм	Вид излучения	Длина волны, мм
Космическое γ-излучение Рентгеновское Ультрафиолетовое	$0,05 \cdot 10^{-9}$ $(0,5 \div 0,10) 10^{-8}$ $1 \cdot 10^{-6} \div 2 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{-6} \div 0,4 \cdot 10^{-3}$	Видимое Тепловое (инфракрасное) Радиоволны	$(0,4 \div 0,8) \cdot 10^{-3}$ $0,8 \cdot 10^{-3} \div 0,8$ $> 0,2$

колебаний ($v=c/\lambda$). Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу и различаются лишь длиной волны (табл. 16-1).

Количественное различие в длине электромагнитных волн приводит к тому, что общие стороны явлений для разных длин волн проявляются с различной отчетливостью. Так, квантовые (корпускулярные) свойства проявляются наиболее отчетливо в коротковолновом излучении. Наоборот, характерные волновые свойства наиболее отчетливо наблюдаются у радиоволн.

Большинство твердых и жидких тел имеет сплошной (непрерывный) спектр излучения, т. е. излучают энергию всех длин волн от 0 до ∞ . К твердым телам, имеющим непрерывный спектр излучения, относятся непроводники и полупроводники электричества, металлы с окисленной шероховатой поверхностью. Металлы с полированной поверхностью, газы и пары характеризуются селективным (прерывистым) спектром излучения. Интенсивность излучения зависит от природы тела, его температуры, длины волны, состояния поверхности, а для газов — еще от толщины слоя и давления. Твердые и жидкие тела имеют значительные поглощательную и излучательную способности. Вследствие этого в процессах лучистого теплообмена участвуют лишь тонкие поверхностные слои: для непроводников тепла они составляют около 1 мм; для проводников тепла — 1 мкм. Поэтому в этих случаях тепловое излучение приближенно можно рассматривать как поверхностное явление. Полупрозрачные тела (плавленый кварц, стекло, оптическая керамика и др., газы и пары) характеризуются объемным характером излучения, в котором участвуют все частицы объема вещества. Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры тела его энергия излучения увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. При этом изменяется не только абсолютная величина этой энергии, но и спектральный состав. При увеличении температуры повышается интенсивность коротковолнового излучения и уменьшается интенсивность длинноволнового излучения. В процессах излучения зависимость от температуры значительно большая, чем в процессах теплопроводности и конвекции. Вследствие этого при высоких температурах основным видом переноса может быть тепловое излучение.

16-2. ВИДЫ ЛУЧИСТЫХ ПОТОКОВ; ВЕКТОР ИЗЛУЧЕНИЯ

Поверхностное (полусферическое) излучение. Тело излучает энергию в виде непрерывного (сплошного) или прерывистого спектра по длинам волн.

Энергия излучения, испускаемая произвольной поверхностью в единицу времени по всевозможным направлениям полупространства

и соответствующая узкому интервалу длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, называется потоком монохроматического, спектрального или однородного излучения (Q_λ). Суммарное излучение с поверхности тела по всем длинам волн спектра называется интегральным или полным потоком излучения (Q).

Интегральный поток, испускаемый с единицы поверхности, носит название поверхностной плотности потока интегрального излучения:

$$E = \frac{dQ}{dF}, \quad (16-1)$$

где dQ — лучистый поток, испускаемый элементарной площадкой dF , Вт.

Лучистый поток со всей поверхности выразится интегралом

$$Q = \int_F E dF. \quad (16-2)$$

Если плотность потока интегрального излучения для всех элементов поверхности излучающего тела одинакова, то зависимость (16-2) переходит в соотношение

$$Q = EF. \quad (16-3)$$

Отношение плотности лучистого потока, испускаемого в бесконечном малом интервале длин волн, к величине этого интервала длин волн называется спектральной плотностью потока излучения:

$$E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}. \quad (16-4)$$

Зависимости (16-1) — (16-3) справедливы также и применительно к монохроматическому излучению.

Плотность потока излучения может изменяться по определенным направлениям излучения. Количество энергии, испускаемое в определенном направлении I , определяемым углом ψ с нормалью к поверхности n (рис. 16-1) единицей элементарной площадки в единицу времени в пределах элементарного телесного угла $d\omega$, называется угловой плотностью излучения. По определению угловые плотности спектрального и интегрального излучения выражаются соотношениями

$$I_{\psi\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dF d\omega} = \frac{dE_{\psi\lambda}}{d\omega}; \quad (16-5)$$

$$I_\psi = \frac{d^2 Q_\psi}{dF d\omega} = \frac{dE_\psi}{d\omega}. \quad (16-6)$$

Из этих соотношений следует, что

$$dE_{\psi\lambda} = I_{\psi\lambda} d\omega; \quad (16-7)$$

$$dE_\psi = I_\psi d\omega. \quad (16-8)$$

К очень важным понятиям теории излучения относится интенсивность (яркость) излучения.

Интенсивностью излучения называется количество лучистой энергии, испускаемое в направлении угла ψ в единицу времени элементарной площадкой в пределах единичного элементарного телесного угла,

отнесенное к проекции этой площадки на плоскость, ортогональную к направлению излучения (рис. 16-1):

$$I_{\lambda} = \frac{d^2 Q_{\phi\lambda}}{dF_n d\omega} = \frac{d^2 Q_{\phi\lambda}}{dF \cos \psi d\omega} = \frac{I_{\phi\lambda}}{\cos \psi}; \quad (16-9)$$

$$I = \frac{d^2 Q_{\phi}}{dF_n d\omega} = \frac{d^2 Q_{\phi}}{dF \cos \psi d\omega} = \frac{I_{\phi}}{\cos \psi}, \quad (16-10)$$

откуда

$$d^2 Q_{\phi\lambda} = I_{\lambda} d\omega \cos \psi dF; \quad (16-11)$$

$$d^2 Q_{\phi} = I d\omega \cos \psi dF; \quad (16-12)$$

здесь I_{λ} и I — интенсивности (яркости) спектрального и интегрального излучений; ψ — угол, составленный нормалью к площадке и направлением излучения.

В общем случае спектральная интенсивность излучения зависит от координат точки M , направления, длины волны и времени.

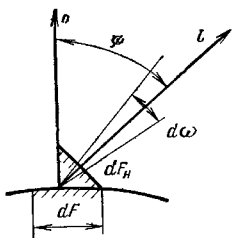


Рис. 16-1. К определению яркости излучения.

Интегральная величина интенсивности излучения характеризует распределение суммарной для всех длин волн энергии излучения по всевозможным направлениям в данной точке для выбранного момента времени.

Распределение интенсивности излучения по отдельным направлениям может быть самым различным. В частном случае оно может быть одинаковым по всем направлениям.

Излучение, характеризующееся интенсивностью, одинаковой по всем направлениям, называется изотропным. Если излучение исходит с поверхности твердого тела, оно называется идеально диффузным излучением [Л. 180]. Понятие интенсивности

(яркости) излучения может относиться к отдельным видам излучения, рассматриваемым ниже. Поэтому можно говорить об интенсивности собственного, падающего, эффективного и других излучений.

Потоки интегрального и монохроматического излучения связаны следующими зависимостями:

$$Q = \int_0^{\infty} Q_{\lambda} d\lambda; \quad E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda; \quad I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda. \quad (16-13)$$

Излучение, которое определяется природой данного тела и его температурой, называется собственным излучением (Q , E).

Обычно тело участвует в лучистом теплообмене с другими телами. Энергия излучения других тел, попадая на поверхность данного тела извне, частично поглощается, частично отражается, а часть ее проходит сквозь тело. Количество лучистой энергии, падающее на данное тело

в поле излучения, обозначается через $Q_{\text{пад}}$ или $E_{\text{пад}}$. Часть падающей энергии излучения, поглощенной данным телом, называется потоком поглощенного излучения ($Q_{\text{погл}}$, $E_{\text{погл}}$). При поглощении лучистая энергия вновь превращается во внутреннюю энергию.

Плотность потока поглощающей лучистой энергии $E_{\text{погл}}$, Вт/м²:

$$E_{\text{погл}} = A E_{\text{пад}}, \quad (16-14)$$

здесь A — интегральная поглощательная способность тела.

Тела, которые поглощают всю падающую на них энергию, называются абсолютно черными ($A=1$). Такое тело воспринимается зрением как черное тело; отсюда происходит название абсолютно черного тела. Если поверхность поглощает все лучи, кроме световых, она не кажется черной, хотя по лучистым свойствам она может быть близка к абсолютно черному телу, поскольку имеет высокую поглощательную способность (например, лед и снег $A=0,95 \div 0,98$). Соотношение (16-14) может относиться к монохроматическому излучению, как и последующие зависимости. Спектральная поглощательная способность A_λ в общем случае может изменяться с длиной волны различным образом. В частном случае она может не зависеть от длины волны.

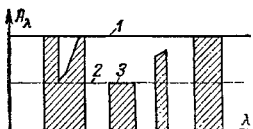


Рис 16-2. Зависимость поглощательной способности от длины волны.

1 — абсолютно черное тело; 2 — серое тело; 3 — тело с селективным поглощением

Тела, для которых спектральная поглощательная способность не зависит от длины волны, называются серыми телами (рис. 16-2). Для серых тел $A_\lambda = \text{const} \leq 1$, так как серые тела поглощают не всю

падающую на них лучистую энергию. Часть падающей энергии будет отражаться или пропускаться (проходить) через массу этих тел.

Часть падающей энергии, которую поверхность данного тела отражает обратно окружающим его телам, носит название потока отраженного излучения. Плотность потока отраженного излучения $E_{\text{отр}}$, Вт/м², равна:

$$E_{\text{отр}} = R E_{\text{пад}}, \quad (16-15)$$

где R — интегральная отражательная способность тела. Если процессы отражения от поверхности подчиняются законам геометрической оптики и $R=1$, то поверхность тела называют зеркальной (блестящей); при идеально диффузном отражении ее называют абсолютно белой. При идеально диффузном (изотропном) отражении энергия отражается телом равномерно по всем направлениям независимо от направления падающего на поверхность излучения.

Часть падающей энергии излучения, проходящая сквозь тело, называется плотностью потока пропускаемого излучения $E_{\text{проп}}$, Вт/м²:

$$E_{\text{проп}} = D E_{\text{пад}}, \quad (16-16)$$

где D — интегральная пропускательная способность тела. Тела, имеющие интегральную пропускательную способность, равную единице, называются прозрачными или диатермичными (тонкие слои сухого воздуха, слои одноатомных газов).

Тела, характеризующиеся величиной $0 \leq D \leq 1$, называют полупрозрачными (стекло, кварц, сапфир). Для многих твердых и жидких тел интегральная пропускательная способность принимается равной нулю, так как они практически являются непрозрачными.

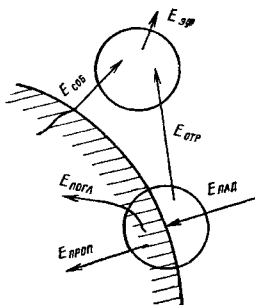


Рис 16-3. Классификация потоков излучения.

Совместные процессы взаимного излучения, поглощения, отражения и пропускания энергии излучения в системах различных тел называются лучистым теплообменом, причем тела, входящие в данную излучающую систему, могут иметь одинаковую температуру. Для тела, участвующего в лучистом теплообмене с другими телами, согласно закону сохранения энергии можно составить следующие уравнения теплового баланса (рис. 16-3):

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}} \quad (16-17)$$

или $A + R + D = 1$,

если зависимость (16-17) поделить на $E_{\text{пад}}$ и учесть предыдущие соотношения.

Суммарная величина плотностей потоков собственного и отраженного излучения, испускаемого поверхностью данного тела, называется плотностью эффективного излучения (рис. 16-3):

$$E_{\text{эф}} = E + E_{\text{отр}} = E + RE_{\text{пад}}. \quad (16-18)$$

Эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств и температуры окружающих его тел. Кроме того, оно зависит от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве. Вследствие этих факторов физические свойства эффективного и собственного излучения различны. Различными оказываются и спектры их излучения. Если поверхность тела имеет идеально диффузионное излучение и идеально диффузионное отражение, то его эффективное излучение будет также идеально диффузионным. Понятие эффективного излучения впервые было введено О. Е. Власовым (1929 г.).

Лучистый теплообмен между телами определяется потоком результирующего излучения.

Результирующее излучение представляет собой разность между лучистым потоком, получаемым данным телом, и лучистым потоком, который оно посылает в окружающее его пространство. Результирующий поток может быть найден различными способами в зависимости от расположения условной расчетной поверхности (рис. 16-4).

В первом способе (Нуссельта) поток результирующего излучения определяется из теплового баланса относительно поверхности $a-a$,

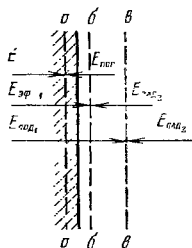


Рис. 16-4. К определению потока результирующего излучения.

расположенной внутри тела вблизи его поверхности с учетом, что $E_{\text{проп}} = 0$:

$$q_{\text{рез}} = E - E_{\text{погл}} = E - AE_{\text{пад}}. \quad (16-19)$$

Второй способ (О. Е. Власова) состоит в определении $q_{\text{рез}}$ из баланса относительно воображаемой поверхности $b-b$, находящейся вне тела, но вблизи его поверхности [Л. 23]:

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}. \quad (16-20)$$

В этом случае вследствие малого расстояния энергия излучения от тела полностью доходит до условной поверхности $b-b$.

В общем случае плотность потока результирующего излучения определяется разностью встречных потоков излучения, падающих на условную поверхность $v-v$ (Ю. А. Суринов [Л. 175]):

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{пад1}} - E_{\text{пад2}}. \quad (16-21)$$

Результирующий поток излучения может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю (при равновесном излучении).

Между плотностями потоков результирующего и эффективного излучений может быть установлена математическая зависимость, если из (16-20) выразить

$$E_{\text{эф}} = q_{\text{рез}} + E_{\text{пад}}, \quad (16-22)$$

а из (16-19)

$$E_{\text{пад}} = \frac{E - q_{\text{рез}}}{A}; \quad (16-23)$$

подставив (16-23) в (16-22), получим:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{эф}} &= q_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{E}{A} \\ \text{или} \quad E_{\text{эф}} &= \frac{E}{A} - \frac{R}{A} q_{\text{рез}} \end{aligned} \right\} \quad (16-24)$$

Для черного тела $A=1$ и $E_{\text{эф}}=E_0$, т. е. эффективное излучение вырождается в собственное.

Из изложенного следует, что поверхностные плотности всех видов полусферического излучения, кроме собственного излучения, являются линейными функциями падающего излучения. Собственное излучение объединяется и увязывается с другими видами излучения через эффективное излучение.

Объемное излучение. Для среды, которая заполняет некоторый объем системы и может быть излучающей, поглощающей и рассеивающей, характерными являются объемные плотности потоков излучения¹. Аналогично изложенному и в этом случае можно говорить об объемных плотностях собственного, поглощенного, рассеянного и других видах излучения.

Интегральной и монохроматической объемными плотностями потоков собственного излучения называются лучистые потоки, испускаемые

¹ Объемное излучение характеризуется также объемной плотностью энергии излучения u , Дж/м³.

единицей объема среды в единицу времени по всем различным направлениям в пределах пространственного угла $\omega = 4\pi$:

$$\eta = \frac{dQ}{dV}; \quad \eta_\lambda = \frac{dQ_\lambda}{dV}; \quad (16-25)$$

η и η_λ измеряются в Вт/м³.

Лучистые потоки, отнесенные ко всему объему, выражаются зависимостями

$$Q = \int_V \eta dV; \quad Q_\lambda = \int_V \eta_\lambda dV. \quad (16-26)$$

Потоки монохроматического и интегрального излучений связаны соотношением

$$Q = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \int_V \eta_\lambda d\lambda dV. \quad (16-27)$$

Плотность поглощенного объемного излучения

$$\eta_{\text{погл}} = \alpha \eta_{\text{пад}} \quad (16-28)$$

и плотность рассеянного объемного излучения

$$\eta_{\text{рас}} = \beta \eta_{\text{пад}} \quad (16-29)$$

представляют собой, как и в зависимостях (16-14) и (16-15), некоторые доли плотности падающего объемного излучения $\eta_{\text{пад}}$. Величины α и β называются соответственно коэффициентами поглощения и рассеяния. Сумма этих величин называется коэффициентом ослабления среды (k).

Аналогично зависимостям (16-18) плотностью эффективного объемного излучения называется суммарная величина плотностей потоков собственного и рассеянного излучений:

$$\eta_{\text{эф}} = \eta + \eta_{\text{рас}} = \eta + \beta \eta_{\text{пад}}. \quad (16-30)$$

Следовательно, в случае объемного излучения роль отраженного излучения играет рассеянное излучение, а роль поглощательной и отражательной способностей — коэффициенты поглощения и рассеяния.

По аналогии с (16-19) плотность потока результирующего объемного излучения выражается зависимостью

$$\eta_{\text{рез}} = \eta - \eta_{\text{погл}} = \eta - \alpha \eta_{\text{пад}}. \quad (16-31)$$

Последние две зависимости могут быть использованы для получения уравнений, связывающих плотности потоков результирующего и эффективного объемных излучений, аналогичных (16-24):

$$\eta_{\text{эф}} = \eta_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{\eta}{\alpha} \quad (16-32)$$

или

$$\eta_{\text{эф}} = \frac{\eta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \eta_{\text{рез}}. \quad (16-33)$$

Рассмотренные виды поверхностных и объемных плотностей потоков излучения являются основными характеристиками лучистого теплообмена на граничных поверхностях и в объеме среды, заполняющей излучающую систему.

Поля плотностей различных видов излучения зависят от геометрической конфигурации излучающей системы, от распределения темпе-

ратуры, а также от распределения оптических свойств как по объему среды, так и на границах системы.

Вектор излучения. Вектор излучения (радиации) определяет направление наиболее интенсивного переноса лучистой энергии в рассматриваемой точке поля излучения. Численно он равен потоку результирующего излучения, переносимого в единицу времени через единицу поверхности, ортогональной произвольному направлению переноса излучения, т. е. равен разности значений потоков излучения, падающих с двух сторон на указанную поверхность. Это видно из следующего. Элементарный поток, проходящий через площадку dF (рис. 16-5), выразится скалярным произведением вектора излучения $\vec{q}_p$ на $d\vec{F}$:

$$\left. \begin{aligned} dQ &= \vec{q}_p d\vec{F} = q_p dF \cos \psi \\ dQ &= q_n dF = q_p \cos \psi dF, \end{aligned} \right\} \quad (16-34)$$

или

где q_n — проекция вектора излучения на нормаль к поверхности.

Для потоков излучения, падающих на одну сторону площадки dF , угол $\psi_1 < \pi$ и $dQ_{\text{пад1}} = E_{\text{пад1}} dF$ имеет положительный знак; для другой стороны площадки $\psi_2 > \pi$ и $dQ_{\text{пад2}}$ имеет отрицательный знак. Следовательно, через площадку dF будет проходить поток, равный результатирующему (см. 16-21):

$$dQ = dQ_{\text{пад1}} - dQ_{\text{пад2}} = dQ_{\text{рез}}.$$

Отсюда получаем:

$$Q_{\text{рез}} = \int_F \vec{q}_p d\vec{F} = \int_F q_p \cos \psi dF = Q_{\text{пад1}} - Q_{\text{пад2}}. \quad (16-35)$$

Из (16-35) следует, что проекция вектора излучения на нормаль к поверхности выражает поток результирующего излучения [Л. 118].

Если поверхность облучается с одной стороны, то проекция вектора излучения определяет поток падающего излучения.

Найдем плотность потока результирующего излучения, используя зависимость (16-12) для падающего излучения путем интегрирования по двум полупространствам. Учитывая, что $\cos \psi_1 = -\cos \psi_2$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{рез}} &= E_{\text{пад1}} - E_{\text{пад2}} = \int_{2\pi} I_1 \cos \psi d\omega + \int_{2\pi} I_2 \cos \psi d\omega \\ \text{или} \quad \vec{q}_{\text{рез}} &= \int_{4\pi} I \cos \psi d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (16-36)$$

Составляющие плотности потока результирующего излучения в направлении осей координат Ox , Oy , Oz являются компонентами вектора излучения:

$$\vec{q}_p = i q_{\text{рез}x} + j q_{\text{рез}y} + k q_{\text{рез}z} = \int_{4\pi} I d\vec{\omega}. \quad (16-37)$$

Следовательно, вектор излучения определяется векторным интегралом от интенсивности излучения по сферическому телесному углу.

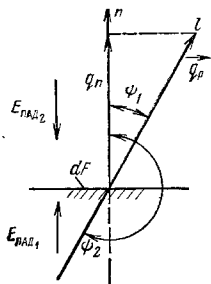


Рис 16-5. К определению вектора излучения.

Зависимость (16-37) представляет собой интегральную форму вектора излучения. Кроме интегральной, вектор излучения может иметь градиентную форму.

Градиентную форму вектор излучения принимает в том случае, когда лучистый перенос тепла рассматривается как процесс испускания дискретных частиц — фотонов. Если длина пробега фотонов относительно мала, то аналогично теплопроводности в газах процесс лучистого переноса осуществляется диффузией энергии излучения в фотонном газе. Тогда можно ввести условный коэффициент теплопроводности за счет излучения (радиации) $\lambda_{\text{рад}}$. В этом случае вектор излучения принимает градиентную форму, аналогичную закону Фурье для вектора теплового потока:

$$\vec{q}_r = -\lambda_{\text{рад}} \text{grad } T, \quad \lambda_r = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{\alpha} T^3, \quad [\text{Л. 205}]. \quad (16-38)$$

Диффузионное представление о перемещении носителей лучистой энергии справедливо для условий, близких к термодинамическому равновесию, для серой среды, имеющей большую оптическую толщину (§ 18-2), для излучающих систем простой геометрической формы и др.

Рассмотренная выше классификация видов излучения предложена Ю. А. Суриновым [Л. 175, 176].

16-3. ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Закон Планка

Законы теплового излучения получены применительно к идеальному абсолютно черному телу и термодинамическому равновесию.

Равновесное (черное) излучение то, при котором все тела, входящие в данную излучающую систему, принимают одинаковую температуру. Тепловое излучение имеет динамический характер: при одинаковых температурах каждое из тел как испускает, так и поглощает лучистую энергию, но в одинаковых количествах ($Q_{\text{рез}} = 0$).

Испускание энергии по длинам волн происходит неравномерно и зависит от температуры. Зависимость спектральной плотности потока излучения от длины волны и температуры устанавливается законом М. Планка (1900 г.)

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi c_1}{\lambda^5} \left(e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right), \quad (16-39)$$

где λ — длина волны, м; $c_1 = 5,944 \cdot 10^{-17}$ — первая константа излучения, Вт·м²; $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ — вторая константа излучения [Л. 17], м·К; e — основание натуральных логарифмов; T — температура тела, К; $E_{0\lambda}$ измеряется в Вт/м³ [см. формулы (16-13)].

Закон Планка получен теоретическим путем. Согласно этому закону каждой длине волны соответствует свое значение $E_{0\lambda}$ (рис. 16-6). Плотность потока излучения, характеризующаяся отдельными изотер-

мами, проходит через максимум. При $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ она стремится к нулю. Свойствами теплового излучения лучистая энергия обладает при $\lambda = 0,4 \div 800$ мкм (видимое и инфракрасное излучение). С повышением температуры энергии излучения существенно повышается.

Излучение, характеризующееся спектром, подобным спектру равновесного излучения (при $T = \text{const}$), называется серым излучением.

Поскольку закон Планка получен для абсолютно черного тела, то по отношению к нечерным телам он выражает максимально возможную плотность потока излучения. Для нечерных тел спектральный состав излучения, кроме длины волны, зависит от физических свойств и определяется экспериментально.

Б. Закон Релея — Джинса

Закон Планка имеет два предельных случая. К одному из них относится случай, когда произведение λT велико по сравнению с постоянной c_2 . При этом можно ограничиться двумя слагаемыми разложения экспоненциальной функции (16-39) в ряд по степеням $c_2/\lambda T$:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots$$

Тогда (16-39) переходит в соотношение, выражающее закон Релея — Джинса:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^5}. \quad (16-40)$$

В. Закон смещения Вина

Второй предельный случай соответствует малому значению произведения λT по сравнению с постоянной c_2 . Тогда в зависимости (16-39) можно пренебречь единицей и она переходит в зависимость, выражающую закон Вина (1893 г.):

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \quad (16-41)$$

Положения максимумов излучения (рис. 16-6) можно получить из экстремального значения функции (16-39). Для этого находится производная функции по длине волны. Приравняв производную нулю, получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$e^{-\frac{c_2}{\lambda_{\text{макс}} T}} + \frac{c_2}{5 \lambda_{\text{макс}} T} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения приводит к соотношению $c_2/\lambda_{\text{макс}} T = 4,965$,

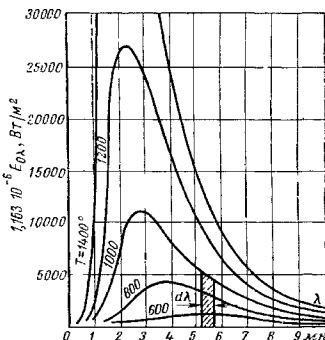


Рис. 16-6 Графическое представление закона Планка

откуда

$$\lambda_{\text{макс}} T = 2,8978 \cdot 10^{-3}; \quad (16-42)$$

здесь $\lambda_{\text{макс}}$ — длина волны, которой соответствует максимальная плотность излучения; единица измерения произведения $\lambda_{\text{макс}} T$ — м·К.

Зависимость (16-42) выражает закон смещения Вина. Согласно этому закону максимальная величина спектральной плотности потока излучения с повышением температуры сдвигается в сторону более коротких волн.

Величина максимальной плотности потока излучения черного тела может быть найдена из закона Планка (16-39), если положить $\lambda = \lambda_{\text{макс}}$ и использовать зависимость (16-42):

$$(E_{0\lambda})_{\text{макс}} = c_3 T^5, \quad (16-43)$$

где постоянная $c_3 = 1,307 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Из (16-43) следует, что величина максимальной плотности излучения пропорциональна абсолютной температуре тела в пятой степени.

Г. Закон Планка в безразмерной форме

Закон смещения Вина (16-43) позволяет привести закон Планка (16-39) к безразмерному виду:

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\text{макс}}} = \frac{c_1}{c_3 (\lambda T)^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1} = \varphi(\lambda T). \quad (16-44)$$

Если в эту зависимость вместо T ввести ее значение из (16-42), то получим:

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\text{макс}}} = f\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{макс}}}\right). \quad (16-45)$$

Тогда закон Планка графически выразится не рядом изотерм, как показано на рис. 16-6, а единой кривой, справедливой для любых длин волн и температур тела (рис. 16-7).

Максимум соответствует значениям $E_{0\lambda}/(E_{0\lambda})_{\text{макс}} = 1$ и $\lambda/\lambda_{\text{макс}} = 1$.

Д. Закон Стефана — Больцмана

Закон Стефана — Больцмана устанавливает зависимость плотности потока интегрального полусферического излучения от температуры. Эта зависимость задолго до появления квантовой теории Планка впервые экспериментально (путем измерений собственного излучения модели черного тела) была установлена Стефаном (1879 г.). Позднее (1884 г.) она теоретически (исходя из законов термодинамики) была получена Больцманом. Поэтому закон получил объединенное название закона Стефана — Больцмана. Закон Стефана — Больцмана может быть получен и при использовании закона Планка. Закон Стефана — Больцман для поверхностной плотности потока интегрального излучения E_0 , Вт/м², можно выразить следующим образом:

$$E_0 = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = c_0 T^4, \quad (16-46)$$

где c_0 — постоянная Стефана — Больцмана.

Для удобства практических расчетов последняя зависимость представляется в виде

$$E_0 = c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (16-47)$$

где $c_0 = 5,6687 = 5,67$ — коэффициент излучения абсолютно черного тела, Вт/(м²·К⁴).

Закон Стефана — Больцмана для объемной плотности энергии интегрального излучения u_0 , Дж/м³, в вакууме при температуре оболочки T имеет вид [Л. 1]:

$$u_0 = \frac{4\sigma_0}{c_\Phi} T^4, \quad (16-48)$$

где c_Φ — скорость фотонов, м/с.

Из (16-47) и (16-48) следует, что плотности интегрального излучения изменяются пропорционально четвертой степени абсолютной температуры. При $T=0$ поток интегрального излучения также равен нулю.

Закон Стефана — Больцмана может быть применен к серым телам. В этом случае используется положение о том, что у серых тел, так же как и у черных, собственное излучение пропорционально абсолютной температуре в четвертой степени, но энергия излучения меньше, чем энергия излучения черного тела при той же температуре (рис. 16-8). Тогда для серых тел этот закон принимает вид:

$$E = \epsilon E_0 = \epsilon c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = c \left(\frac{T}{100} \right)^4; \quad (16-49)$$

здесь $\epsilon = E/E_0 = c/c_0$ — интегральная степень черноты серого тела; c — его коэффициент излучения, Вт/(м²·К⁴).

Таким образом, интегральной степенью черноты называется отношение поверхностной плотности потока собственного интегрального излучения к его величине для абсолютно черного тела при той же температуре.

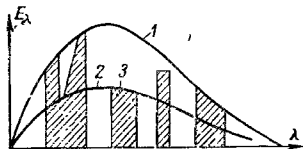


Рис 16-8 Плотность потока в зависимости от длины волны
1 — черное излучение; 2 — серое, 3 — селективное

Применение закона Стефана — Больцмана для серого тела является строгим в той мере, в какой строго постоянной, не зависящей от температуры, остается степень черноты. Однако в действительности степень черноты (относительный коэффициент излучения) серого тела зависит от природы тела, температуры, состояния поверхности и в большинстве случаев определяется экспериментальным путем. Коэффициент излучения в этом случае характеризует интенсивность собственного излучения тела. Коэффициент излучения равен потоку собственного излучения,

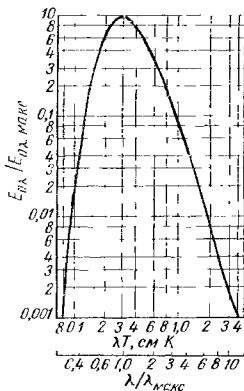


Рис 16-7 Графическое представление закона Планка в безразмерной форме

отнесенному к единице поверхности, к единице времени и к единице перепада температур в четвертых степенях между этим телом и окружающими телами, находящимися при температуре абсолютного нуля.

Е. Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа (1882 г.) устанавливает количественную связь между энергиями излучения и поглощения поверхностями серых и абсолютно черных тел. Этот закон можно получить из баланса лучистой энергии для излучающей системы, состоящей из относительно большого замкнутого объема с теплоизолированными стенками и помещенных в него тел. Для каждого из этих тел в условиях термодинамического равновесия энергия излучения равна поглощенной энергии:

$$E_1 = E_{\text{погл}1} = A_1 E_{\text{пад}1} = A_1 E_0; \quad E_2 = E_{\text{погл}2} = A_2 E_{\text{пад}2} = A_2 E_0 \dots;$$

отсюда получаем:

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \dots = E_0 = f(T). \quad (16-50)$$

Зависимость (16-50) выражает закон Кирхгофа. Согласно этому закону отношение энергии излучения к энергии поглощения не зависит от природы тел и равно энергии излучения абсолютно черного тела при той же температуре. Используя (16-49) и (16-50), получаем:

$$E = \epsilon E_0 = A E_0.$$

Следствием чего является численное равенство степени черноты и поглощательной способности тела

$$\epsilon = A. \quad (16-51)$$

Зависимости (16-50) и (16-51) справедливы и применительно к спектральным величинам. Тогда спектральная степень черноты выражается зависимостью

$$\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{0\lambda}} = f(\lambda T).$$

Степени черноты, отвечающие направленному излучению, т. е. связанные с определенным направлением излучения, представляются зависимостями

$$\epsilon_\phi = \frac{E_\phi}{E_{0\phi}} \quad \text{и} \quad \epsilon_{\phi\lambda} = \frac{E_{\phi\lambda}}{E_{0\phi\lambda}}. \quad (16-52)$$

Для несерых тел закон Кирхгофа выполняется лишь при сопоставлении спектральных величин.

В термодинамически равновесной системе с промежуточной поглощающей средой для каждого ее элементарного объема имеет место численное равенство объемных плотностей потоков собственного и поглощенного излучений [Л. 1]:

$$\eta = \eta_{\text{погл}} = a \eta_{\text{пад}} = a \int_{4\pi} I_0 d\omega = 4a E_0 = 4\pi a I_0. \quad (16-53)$$

Зависимость (16-53) выражает закон Кирхгофа для среды.

Ж. Закон косинусов Ламберта

Закон Стефана — Больцмана определяет суммарное излучение поверхности тела по всем направлениям полупространства.

Энергия излучения, которая испускается телом по отдельным направлениям, устанавливается законом Ламберта (1760 г.). Согласно закону Ламберта поток излучения абсолютно черного тела в данном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к поверхности и косинусу угла между ними.

Для угловой плотности потока излучения закон Ламберта представляется зависимостью

$$I_{\phi} = I_n \cos \psi, \quad (16-54)$$

где I_{ϕ} и I_n — угловые плотности потоков интегрального излучения соответственно в направлении, определяемом углом ψ (рис. 16-1) и в направлении нормали к поверхности.

Из закона Ламберта вытекает важное следствие для яркости излучения абсолютно черного тела, определяемой соотношением (16-10). Если в него подставить выражение (16-54), то получим:

$$I = \frac{I_{\phi}}{\cos \psi} = I_n = \text{idem}. \quad (16-55)$$

Следовательно, если излучение подчиняется закону Ламберта, то яркость не зависит от направления, т. е. является величиной постоянной. Тогда зависимость (16-54) принимает вид:

$$I_{\phi} = I \cos \psi. \quad (16-54')$$

Установим связь между яркостью и плотностью потока полусферического излучения. Элементарная плотность потока в данном направлении выражается зависимостью (16-12)

$$dE_{\phi} = I d\omega \cos \psi.$$

Телесный угол $d\omega$ представляет собой угол, под которым из какой-либо точки элементарной площадки одного тела видна элементарная площадка другого тела:

$$d\omega = dF/r^2, \quad (16-56)$$

где dF — элементарная площадка, вырезанная телесным углом на поверхности сферы радиуса r (рис. 16-9). Эта площадка может быть представлена произведением двух элементарных дуг: $rd\psi$ и $r \sin \psi d\theta$. Здесь ψ — угол, дополнительный к углу широты; θ — угол долготы, следовательно,

$$d\omega = d\psi \sin \psi d\theta. \quad (16-57)$$

Подставляя в (16-12) значение $d\omega$ из (16-57), учитывая (16-55) и интегрируя, получаем зависимость для плотности потока полусферического излучения:

$$E = I \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi d\psi = I\pi, \quad (16-58)$$

откуда

$$I = E/\pi, \quad (16-59)$$

где E — плотность интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела, определяемая по закону Стефана — Больцмана; I — яркость излучения.

Соотношение (16-59) показывает, что яркость в направлении нормали к поверхности излучения в π раз меньше плотности потока интегрального полусферического излучения.

Зависимость (16-59) справедлива и для спектрального излучения. Подставляя найденные значения яркости излучения в (16-12) и (16-11) получаем:

$$\left. \begin{aligned} dE_{\psi} &= \frac{E}{\pi} d\omega \cos \psi; \\ dE_{\psi\lambda} &= \frac{E_{\lambda}}{\pi} d\omega \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (16-60)$$

Эти зависимости выражают закон косинусов или закон направлений Ламберта.

Закон Ламберта справедлив для черных тел и тел с диффузным излучением. Многие тела не подчиняются этому закону. Так, полированные металлы имеют яркость излучения при $\psi = 60 \div 80$, превышающую яркость в направлении

Рис. 16-9. К определению пространственного телесного угла.

нормали к поверхности. С дальнейшим увеличением угла яркость падает до нуля (рис. 16-10). Для корунда, окисленной меди яркость в направлении нормали больше, чем в других направлениях.

Если для данного тела известна зависимость яркости интегрального или спектрального излучения от направления, то в общем случае поверхностная плотность собственного излучения какого-либо тела определится из соотношений

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\psi) \sin \psi \cos \psi d\psi; \quad (16-61)$$

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\pi/2} I_{\lambda}(\psi) \sin \psi \cos \psi d\psi. \quad (16-62)$$

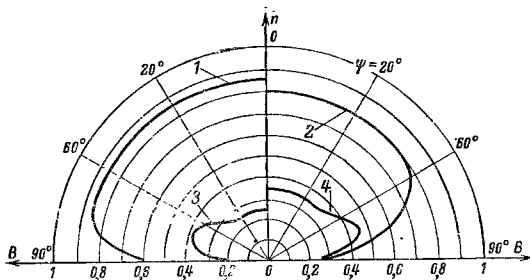


Рис. 16-10. Зависимость относительной яркости от направления излучения.

1 — корунд; 2 — медь окисленная; 3 — полированная алюминиевая бронза; 4 — полированный висмут.

3. Черные температуры

В качестве характеристики излучения нечерного тела наряду со степенью черноты используется так называемая черная температура.

Под черной температурой понимается такая условная температура, которую может иметь данное тело, если бы испускаемое им излучение было черным. Каждое тело может характеризоваться целым рядом черных температур в зависимости от вида испускаемого им излучения.

При сопоставлении плотностей потоков интегрального излучения тела с температурой T и абсолютно черного тела черная температура называется радиационной (T_p). По определению она находится из соотношения

$$E(T) = E_0(T_p).$$

Используя закон Стефана — Больцмана, можно установить связь между действительной и радиационной температурами:

$$T = T_p \sqrt[4]{1/\epsilon}.$$

Если черная температура определяется из сравнения спектральных потоков излучения, то она называется цветовой температурой (T_c). При этом обычно рассматривается излучение лишь для каких-либо двух длин волн (двух цветов):

$$\frac{E_{\lambda 1}(T)}{E_{\lambda 2}(T)} = \frac{E_{0\lambda 1}(T_c)}{E_{0\lambda 2}(T_c)}.$$

Используя (16-41); (16-52) и (16-59), получаем связь между T и T_c :

$$\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T} = \frac{\ln \epsilon_{\lambda 1} / \epsilon_{\lambda 2}}{c_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}.$$

При сопоставлении яркостей черная температура носит название яркостной температуры T_{λ} :

$$I_{\lambda}(T) = I_{0\lambda}(T_{\lambda}).$$

Представляя $I_{\lambda}(T) = \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T)$ и используя (16-59), получаем зависимость, связывающую действительную и яркостную температуры:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\lambda}} = \frac{\lambda}{c_2} \ln \epsilon_{\lambda}.$$

Приведенные соотношения, связывающие T с $T_{\text{рад}}$, T_c и T_{λ} , лежат в основе оптических методов измерения высоких температур [Л. 11, 74].

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДОЙ

17-1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

К задачам лучистого теплообмена может относиться: определение потоков различных видов излучения по заданным температурам, оптическим свойствам поверхностей тел, их геометрической форме и размерам (прямая задача); определение температур поверхностей тел по заданным потокам излучения, оптическим и геометрическим свойствам тел (обратная задача); решение смешанных задач, когда для одних тел излучающей системы заданы потоки излучения, а для других — температуры и необходимо найти для некоторых тел температуры, а для других — лучистые потоки. Здесь будут рассматриваться лишь прямые задачи. В этих задачах наиболее важное практическое значение имеет определение потоков результирующего излучения.

Для исследования лучистого теплообмена в различных излучающих системах используются: метод многократных отражений, метод эффективных потоков, метод сальдо; алгебраический, интегральный и дифференциальный методы.

В методе многократных отражений следят за изменением величины лучистой энергии по отдельным стадиям затухания поглощений и отражений в процессе теплообмена данного тела с окружающими его телами. Этот метод является очень наглядным; он вскрывает механизм протекания лучистого теплообмена в конкретных излучающих системах. Однако будучи весьма детальным, метод многократных отражений связан с громоздкими вычислениями. Поэтому для сложных геометрических систем использование его затруднительно.

Метод эффективных потоков излучения и метод сальдо основываются на исследовании лучистого теплообмена с помощью величин, характеризующих конечные эффекты теплообмена между телами данной излучающей системы, поэтому оба метода относятся к методам полных потоков.

Методы полных потоков не могут наглядно вскрывать всю физическую картину протекания лучистого переноса тепла, но зато позволяют получить расчетные данные без громоздких вычислений.

Интегральный метод является методом, синтезирующим представления методов многократных отражений и полных потоков излучения. В основу его кладутся интегральные уравнения, которые составляются применительно к отдельным видам излучения. Интегральные уравнения описывают процессы переноса излучением с произвольным распределением оптических свойств излучающей системы тел и промежуточной среды, непрерывно зависящих от координат точки. Они имеют общий и строгий характер, дают возможность составить полное представление о сущности явлений лучистого переноса и проводить их исследование в сложных геометрических системах. Однако решения интегральных уравнений связаны со значительными трудностями.

Интегральные уравнения могут быть упрощены путем аппроксимации их алгебраическими, и тогда интегральный метод переходит в алгебраический.

Алгебраический метод позволяет находить как средние по поверхностям отдельных тел (отдельным участкам — зонам), так и местные потоки излучения в некоторых узловых точках излучающей системы.

К аналитическим методам исследования лучистого переноса относится еще резольвентный метод (§ 17-11). В этом методе решения интегральных уравнений представляются через так называемую резольвенту излучения, откуда исходит и его название. Тогда вместо решения интегральных уравнений для различных потоков излучения требуется найти лишь решение уравнения для резольвенты, что существенно облегчает задачу.

В резольвентном методе может быть использована алгебраическая аппроксимация интегрального уравнения для резольвенты. В этом случае метод называют резольвентно-зональным (§ 17-12).

Дальнейшим развитием этого подхода к исследованию процессов переноса излучением является итерационно-зональный метод [Л. 179].

Дифференциальный метод основывается на решениях дифференциальных уравнений переноса лучистой энергии в ослабляющей и излучающей среде (гл. 18).

Наряду с аналитическими методами исследования лучистого теплообмена применяются и экспериментальные методы. К ним относятся методы светового, электрического моделирования и др. [Л. 1].

Таким образом, сложность процессов переноса лучистой энергии привела к необходимости применения большого количества различных методов аналитического и экспериментального их исследования. Ниже в зависимости от рода задачи будет использован тот или иной метод ее решения.

17-2. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В СИСТЕМЕ ТЕЛ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

А. Излучающая система без экранов

Метод многократных отражений. Рассмотрим систему тел 1 и 2 (рис. 17-1), имеющих большие размеры по сравнению с расстоянием между ними. Поглощательные способности A_1 и A_2 и степени черноты ϵ_1 и ϵ_2 не зависят от температуры и координат точки на поверхностях. Температуры T_1 и T_2 и плотности потоков собственного излучения вдоль поверхностей этих тел не изменяются. Процессы переноса тепла путем теплопроводности и конвекции отсутствуют; процессы лучистого теплообмена не зависят от времени (стационарны). Требуется найти поток результирующего излучения. Для этого проследим движение лучистой энергии, испускаемой первым телом:

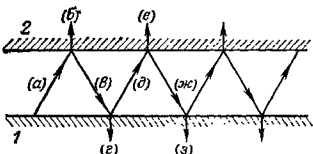


Рис. 17-1. Система плоскопараллельных тел.

тело 1 излучает E_1 ;	(а)
тело 2 поглощает $E_1 A_2$;	(б)
тело 2 отражает обратно $E_1(1-A_2)$;	(в)
тело 1 поглощает из отраженного телом 2 $E_1(1-A_2)A_1$;	(г)
тело 1 отражает из отраженного телом 2 $E_1(1-A_2)(1-A_1)$;	(д)

тело 2 поглощает из отраженного телом 1 $E_1(1-A_2)(1-A_1)A_2$; (е)
 тело 2 отражает из отраженного телом 1 $E_1(1-A_2)(1-A_1)(1-A_2)$; (ж)
 тело 1 снова поглощает из отраженного телом 2 $E_1(1-A_2)(1-A_1) \times$
 $\times (1-A_2)A_1$ (з)

Для второго тела имеют место соотношения, аналогичные соотношениям (а)—(ж), в которых только меняются местами индексы «1» и «2».

Плотность потока результирующего излучения может быть найдена по зависимости (16-19).

Плотность потока поглощенного излучения складывается из поглощенного от собственного излучения и поглощенного от излучения тела 2. Количество энергии, поглощенное телом 1 из собственного переизлучения, определяется суммой энергии (г) и (з):

$$E_1(1+k+k^2+\dots)(1-A_2)A_1 = E_1\left(\frac{1}{1-k}\right)(1-A_2)A_1, \quad (17-1)$$

где $k=(1-A_1)(1-A_2)$. В соответствии с (а) и (б) тело 1 поглощает из излучения тела 2 энергию

$$E_2(1+k+k^2+\dots)A_1 = E_2\left(\frac{A_1}{1-k}\right). \quad (17-2)$$

Тогда

$$q_{\text{рез}} = E_1 - E_2\left(\frac{1}{1-k}\right)(1-A_2)A_1 - E_2\left(\frac{A_1}{1-k}\right).$$

Отсюда получаем окончательное выражение для плотности потока результирующего излучения $q_{\text{рез}}$, Вт/м², получаемого телом 1:

$$q_{\text{рез}} = q_{1,2} = \frac{E_1A_2 - E_2A_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2} = \frac{\frac{E_1}{A_1} - \frac{E_2}{A_2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (17-3)$$

Метод эффективных потоков излучения [Л. 23]. В этом случае плотность потока результирующего излучения определяется по соотношению (16-20):

$$q_{1,2} = E_{\text{эф1}} - E_{\text{эф2}}. \quad (17-4)$$

Представим плотности потоков эффективного излучения по зависимости (16-18) с учетом, что $R=1-A$ (так как принимается $D=0$):

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{эф1}} &= E_1 + (1-A_1)E_{\text{эф2}}, \\ E_{\text{эф2}} &= E_2 + (1-A_2)E_{\text{эф1}}. \end{aligned} \right\} \quad (17-5)$$

Система уравнений (17-5) позволяет получить

$$E_{\text{эф1}} = \frac{E_1 + E_2 - A_1E_2}{A_1 + A_2 - A_1A_2}, \quad E_{\text{эф2}} = \frac{E_1 + E_2 - A_2E_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2}.$$

Подставляя эти значения в (17-4), получаем снова для $q_{1,2}$ соотношения (17-3).

Метод сальдо [Л. 152]. В этом случае для определения $q_{1,2}$ эффективное излучение каждого из рассматриваемых тел в соответ-

вии с (16-24) представляется соотношениями

$$\begin{aligned} E_{\text{эф}1} &= q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + E_1/A_1; \\ E_{\text{эф}2} &= q_{2,1} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + E_2/A_2. \end{aligned} \quad (17-6)$$

При стационарном тепловом режиме $q_{1,2} = -q_{2,1}$. Подставляя (17-6) в (17-4), получаем зависимость, тождественную (17-3), но более коротким путем, чем по методу многократных отражений. Теперь найдем окончательное расчетное выражение для $q_{1,2}$. Для этого в (17-3) подставим вместо плотностей потоков собственного излучения их выражения по закону Стефана — Больцмана через заданные температуры:

$$E_1 = c_0 \varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4; \quad E_2 = c_0 \varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \quad (17-7)$$

Тогда получим:

$$q_{1,2} = \frac{c_0 \frac{\varepsilon_1}{A_1} \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - c_0 \frac{\varepsilon_2}{A_2} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (17-8)$$

Если положить в соответствии с (16-51) $\varepsilon = A$, то формула (17-8) упрощается:

$$q_{1,2} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = c_0 A_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]; \quad (17-9)$$

здесь $A_{1,2}$ представляет собой приведенную поглощательную способность. Для рассматриваемой геометрической системы тел она выражается зависимостью

$$A_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}. \quad (17-10)$$

Величина

$$c_{1,2} = \frac{c_0}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}} \quad (17-11)$$

носит название приведенного коэффициента излучения и измеряется в Вт/(м²·К⁴). Приведенный коэффициент излучения характеризует интенсивность результирующего излучения для рассматриваемой системы двух или произвольного числа тел. Количественно он равен потоку результирующего излучения, отнесенному к единице поверхности рассматриваемого тела, к единице времени и к единице перепада температур в четвертых степенях между этим телом и окружающими его телами. Величина полученного коэффициента излучения зависит от оптико-геометрических свойств данной излучающей системы тел. При $c_2 = c_0$ $c_{1,2} = c_1$; при $c_1 = c_2 = c_0$ $c_{1,2} = c_0$. Полный результирующий поток выразится зависимостью

$$Q_{1,2} = q_{1,2} F = c_{1,2} F \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (17-12)$$

Зависимости (17-9) и (17-12) показывают, что результирующий поток прямо пропорционален приведенному коэффициенту излучения, поверхности тела и разности температур в четвертых степенях. В процессах же теплопроводности и конвекции тепловой поток пропорционален разности температур в первых степенях. Этим обстоятельством объясняется более значительное влияние лучистого теплообмена по сравнению с указанными процессами при высоких температурах.

Найдя $q_{1,2}$, определяют $E_{\text{эф}}$ из (17-6), а затем другие потоки излучения по формулам § 16-2.

Б. Теплообмен излучением при наличии экранов

Один экран. Рассмотрим плоскопараллельную систему тел 1 и 2 с установленным между ними экраном (рис. 17-2). Экраны устанавливаются ортогонально к направлению потока излучения и выполняются из материалов с большой отражательной способностью и теплопроводностью (полированные тонкие

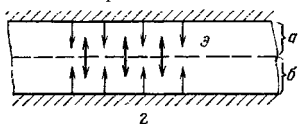


Рис 17-2 Система плоскопараллельных тел с одним экраном

листы алюминия, меди и др.). В результате переизлучения экранами в направлении, обратном направлению излучения, величина результирующего потока уменьшается в соответствии с количеством установленных экранов и их оптическими свойствами. Предположим, что поглощательная способность тел 1, 2 и экрана одинакова: термическое сопротивление теплопроводности экрана $(\delta/\lambda)_\alpha$ пренебрежимо мало. Требуется найти результирующий поток излучения и температуру экрана T_α .

Рассматриваемая излучающая система состоит из совокупности систем а и б, тождественных системе на рис. 17-1, для которых может быть использована ранее полученная зависимость (17-9), выражающая результирующее излучение:

$$\left. \begin{aligned} q_{1,\alpha} &= A_{1,\alpha} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_\alpha}{100} \right)^4 \right]; \\ q_{\alpha,2} &= A_{\alpha,2} c_0 \left[\left(\frac{T_\alpha}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (17-13)$$

здесь по условию задачи $A_{1,\alpha} = A_{\alpha,2} = A_{1,2}$. Кроме того, для стационарного режима $q_{1,\alpha} = q_{\alpha,2} = q_{(1,2)\alpha}$. Тогда из (17-3) найдем T_α :

$$\left(\frac{T_\alpha}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Подставляя это значение в (17-13), получаем плотность потока результирующего излучения $q_{(1,2)\alpha}$, Вт/м², равную:

$$q_{(1,2)\alpha} = \frac{1}{2} A_{1,2} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (17-14)$$

где приведенная поглощательная способность $A_{1,2}$ системы тел 1 и 2 определяется согласно зависимости (17-10).

Сравнение (17-14) с зависимостью (17-9) для системы тел без экрана показывает, что при наличии одного экрана лучистый поток уменьшается в два раза.

Произвольное число экранов. Рассмотрим более общий случай, когда последовательно устанавливается произвольное количе-

ство экранов n ; поглощательные способности их различны и не равны поглощательным способностям тел 1 и 2, т. е.

$$A_{\alpha 1} \neq A_{\alpha 2} \neq \dots \neq A_{\alpha n} \neq A_1 \neq A_2. \quad (17-15)$$

Найдем плотность потока результирующего излучения и температуры экранов, полагая, как и в предыдущем случае, что их тепловое сопротивление теплопроводности пренебрежимо мало.

Снова используем зависимость (17-9) для полученной совокупности $n+1$ плоскопараллельных систем $a, б, в \dots$ (рис. 17-3):

$$\left. \begin{aligned} q_{1, \alpha 1} &= A_{1, \alpha 1} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\alpha 1}}{100} \right)^4 \right]; \\ q_{\alpha 1, \alpha 2} &= A_{\alpha 1, \alpha 2} c_0 \left[\left(\frac{T_{\alpha 1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\alpha 2}}{100} \right)^4 \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ q_{\alpha n, 2} &= A_{\alpha n, 2} c_0 \left[\left(\frac{T_{\alpha n}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17-16)$$

В этой системе $(n+1)$ уравнений содержатся в качестве неизвестных величин температуры экранов и результирующий поток излучения.

Найдем плотность результирующего потока. Для этого из (17-16) выразим температурные перепады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{1, \alpha 1}}{c_0} \frac{1}{A_{1, \alpha 1}} &= \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\alpha 1}}{100} \right)^4; \\ \frac{q_{\alpha 1, \alpha 2}}{c_0} \frac{1}{A_{\alpha 1, \alpha 2}} &= \left(\frac{T_{\alpha 1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\alpha 2}}{100} \right)^4; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{q_{\alpha n, 2}}{c_0} \frac{1}{A_{\alpha n, 2}} &= \left(\frac{T_{\alpha n}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \end{aligned} \right\} \quad (17-17)$$

При стационарном тепловом режиме имеет место равенство $q_{1, \alpha 1} = q_{\alpha 1, \alpha 2} = \dots = q_{\alpha n, 2} = q_{(1, 2)}$.

Тогда суммирование уравнений (17-17) приводит к соотношению

$$\frac{q_{(1, 2)}}{c_0} \left(\frac{1}{A_{1, \alpha 1}} + \frac{1}{A_{\alpha 1, \alpha 2}} + \dots + \frac{1}{A_{\alpha n, 2}} \right) = \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4.$$

Отсюда плотность потока результирующего излучения

$$q_{(1, 2)} = c_0 A_{(1, 2)} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (17-18)$$

где приведенная поглощательная способность для рассматриваемой системы тел с экранами выражается зависимостью

$$A_{(1, 2)} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1, \alpha 1}} + \frac{1}{A_{\alpha 1, \alpha 2}} + \dots + \frac{1}{A_{\alpha n, 2}}}.$$

Преобразуем эту зависимость, используя соотношение (17-10) применительно к каждой из систем $a, б, в \dots$. Тогда

$$\frac{1}{A_{(1, 2)}} = \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_{\alpha 1}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{A_{\alpha 1}} + \frac{1}{A_{\alpha 2}} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{A_{\alpha n}} + \frac{1}{A_2} - 1 \right)$$

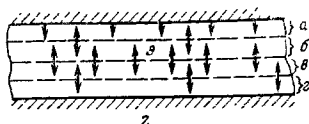


Рис 17-3 Система плоскопараллельных тел с произвольным числом экранов.

или

$$\frac{1}{A_{(1,2)}} = \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 \right) + \left(\frac{2}{A_{21}} - 1 \right) + \left(\frac{2}{A_{22}} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{2}{A_{2n}} - 1 \right).$$

Последняя зависимость может быть записана в окончательном виде:

$$A_{(1,2)} = \left[\frac{1}{A_{1,2}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{A_{2i}} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad (17-19)$$

где $A_{1,2}$ — поглощательная способность системы тел 1 и 2 при отсутствии экранов. Под знак суммы вошла величина, характеризующая тепловое сопротивление, обусловленное наличием экранов. С увеличением числа экранов это сопротивление возрастает. В частном случае, когда имеет место равенство

$$A_{1,21} = A_{21,22} = \dots = A_{2n,2},$$

система уравнений (17-17) приводится к зависимости

$$q_{(1,2)} = \frac{1}{n+1} A_{1,2} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \frac{1}{n+1} q_{1,2}. \quad (17-20)$$

Из нее следует, что плотность потока результирующего излучения при использовании n экранов, устанавливаемых на пути движения лучистой энергии, уменьшается в $(n+1)$ раз. Этот же результат можно получить непосредственно из (17-18).

Вместо приведенной поглощательной способности в зависимости (17-18) может быть введен приведенный коэффициент излучения:

$$c_{(1,2)} = A_{(1,2)} c_0 = \left[\frac{1}{c_{1,2}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{c_{2i}} - \frac{1}{c_0} \right) \right]^{-1}. \quad (17-21)$$

Полный поток результирующего излучения получается путем умножения плотности этого потока на поверхность тела.

Из полученных расчетных зависимостей следует, что расстояние экранов от нагретой поверхности тела 1 на величину результирующего потока излучения влияния не оказывает.

Искомые температуры экранов находятся из уравнений (17-17), в которых $q_{(1,2)}$ является уже найденной величиной:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{21}}{100} \right)^4 &= \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{q_{(1,2)}}{c_0} \frac{1}{A_{1,21}}; \\ \left(\frac{T_{22}}{100} \right)^4 &= \left(\frac{T_{21}}{100} \right)^4 - \frac{q_{(1,2)}}{c_0} \frac{1}{A_{21,22}} = \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{q_{(1,2)}}{c_0} \left(\frac{1}{A_{1,21}} + \frac{1}{A_{21,22}} \right); \\ &\dots \\ \left(\frac{T_{2n}}{100} \right)^4 &= \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{q_{(1,2)}}{c_0} \left(\frac{1}{A_{1,21}} + \frac{1}{A_{21,22}} + \dots + \frac{1}{A_{2(n-1),2n}} \right). \end{aligned}$$

Для расчета полного результирующего потока необходимо еще учесть перенос тепла путем теплопроводности и конвекции через среду, заполняющую пространство между экранами.

С уменьшением расстояния между телами и экранами и уменьшением давления среды этот перенос тепла уменьшается. Если газовая среда находится под низким давлением, то такая многоэкранная система может быть использована в качестве надежной тепловой защиты (экранная изоляция).

17-3. КОЭФФИЦИЕНТ ИЗЛУЧЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И МЕТОДЫ ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для определения результирующих потоков излучения необходимо располагать данными по коэффициентам излучения. Коэффициент излучения является сложной функцией, зависящей от природы излучающего тела, его температуры, состояния поверхности, а для металлов — от степени окисления этой поверхности. Для чистых металлов с полированными поверхностями коэффициент излучения имеет низкие значения. Так, при температуре 100 °С коэффициент излучения по отношению к его величине для абсолютно черного тела не превышает 0,1. Металлы характеризуются высокой отражательной способностью, так как из-за большой электропроводности луч проникает лишь на небольшую глубину. Для чистых металлов коэффициент излучения может быть найден теоретическим путем. Относительный коэффициент (степень черноты) полного нормального излучения для них связан с удельным электрическим сопротивлением ρ_a зависимостью

$$\epsilon_n = 3,49 \sqrt{\rho_a} \left(\frac{T}{100} \right),$$

где ρ_a — удельное сопротивление при 0 °С, Ом·мм²/м.

Существуют данные для ϵ_n металлов, полученные опытным путем [Л. 44, 21].

С появлением оксидных пленок на поверхности металлов степень черноты резко увеличивается и может принимать значения 0,5 и выше [Л. 134, 139]. Сплавы металлов имеют более высокую степень черноты. Степень черноты полупроводниковых материалов при 100 °С более 0,8. Тугоплавкие соединения (карбиды, бориды, силициды) имеют степень черноты порядка 0,5 и выше. Коэффициенты излучения диэлектриков выше, чем чистых металлов, и обычно уменьшаются с увеличением температуры.

Поглощательная способность зависит от тех же факторов, от которых зависит степень черноты. Кроме того, она зависит от природы падающего излучения. Поэтому непосредственно измеренная величина степени черноты может отличаться от непосредственно измеренной величины поглощательной способности для того же тела при одинаковых условиях. В большинстве практических случаев это различие незначительно и возможно определять значения поглощательной способности A по данным о степенях черноты.

Обычно в опытах измеряется относительный коэффициент излучения, так как непосредственное измерение поглощательной способности связано со значительными трудностями.

Опытное исследование интегральных коэффициентов излучения твердых тел может быть проведено следующими методами: радиационным, калориметрическим, методом регулярного режима и методом непрерывного нагревания с постоянной скоростью. Во всех методах перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции должен быть пренебрежимо мал по сравнению с излучением.

А. Радиационный метод

Радиационный метод является относительным методом. Он основан на сравнении излучения исследуемого тела с излучением абсолютно черного тела или другого тела с известным коэффициентом излучения (эталоны). Для восприятия лучистой энергии служит приемное устройство, внутри которого помещается дифференциальная термопара. Один из спаев термопары воспринимает излучение, падающее с исследуемого тела; другой — с поверхности эталонного тела. Результирующий поток излучения определяется по термо-э. д. с. дифференциальной термопары, измеряемой гальванометром.

Коэффициент излучения исследуемого тела, имеющего вид плоской поверхности, вычисляется по соотношению (17-9), которое можно записать так:

$$q_{1,2} = c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = k\varphi.$$

Отсюда

$$c = \frac{k\varphi}{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}, \quad (17-22)$$

где c — коэффициент излучения, Вт/(м²·К⁴).

Постоянная прибора k определяется из предварительных тарировочных опытов, в которых вместо исследуемого тела используется эталон:

$$k = \frac{c_0}{\varphi_0} \left[\left(\frac{T_0}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right];$$

здесь φ , φ_0 — отклонения гальванометра в опытах соответственно с исследуемым телом и эталоном; T_1 , T_0 — их абсолютные температуры; T_2 — абсолютная температура приемника излучения, К [Л. 44, 139, 143].

Б. Калориметрический метод

Калориметрический метод основан на непосредственном измерении потока результирующего излучения, поэтому он относится к абсолютным методам. Коэффициент излучения определяется также из зависимости (17-9):

$$c = \frac{q_{1,2}}{\left(T_1/100 \right)^4 - \left(T_2/100 \right)^4}. \quad (17-23)$$

Форма исследуемого образца может быть различной. Необходимо при этом, чтобы поверхность системы, в которую помещается образец, была значительно больше поверхности образца или имела коэффициент излучения, близкий к коэффициенту излучения абсолютно черного тела [Л. 139, 210].

В. Метод регулярного теплового режима

В основу определения коэффициента излучения кладется зависимость (3-93) для $Bi \ll 0,1$ и $Fo \geq 0,3 \div 0,5$

$$\alpha = \frac{mC}{F}, \quad (17-24)$$

где C — полная теплоемкость исследуемого образца; F — его поверхность.

Если образец участвует лишь в лучистом (радиационном) теплообмене, то коэффициент теплоотдачи будет равен радиационному коэффициенту теплоотдачи, определяемому из соотношения

$$\alpha = \alpha_p = \frac{q_{1,2}}{T_1 - T_2} = cf. \quad (17-25)$$

Тогда, подставляя значение α_p в зависимость (17-24), получаем следующее расчетное уравнение для определения коэффициента излучения:

$$c = m \frac{C}{Ff}, \quad (17-26)$$

где температурный фактор f , K^3 , равен:

$$f = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{T_1 - T_2} \quad (17-27)$$

с учетом того, что $q_{1,2}$ выражается по зависимости (17-23).

Уравнение (17-26) показывает, что опыты сводятся к определению темпа охлаждения образца в порядке, обычном для регулярного теплового режима (§ 3-10).

Г. Метод нагревания с постоянной скоростью

Этот метод также относится к регулярному режиму. В отличие от предыдущего метода, в котором охлаждение образца проводится при постоянной температуре окружающей среды, в рассматриваемом методе она меняется во времени с постоянной скоростью. Опыты проводятся при $Fo \geq 0,3 \div 0,5$.

Опытный образец простой геометрической формы (например, в виде пустотелого цилиндра) помещается в толстостенный кожух, внутренние размеры которого мало отличаются от внешних размеров образца. В небольшом зазоре между ними создается низкое давление среды, в которой перенос теплоты за счет теплопроводности и конвекции отсутствует. Система образца с блоком нагревается с постоянной скоростью ($dt/d\tau = \text{const}$).

Коэффициент излучения определяется из зависимости (17-12)

$$Q_{1,2} = c_{1,2} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \quad (17-28)$$

где T_1 и T_2 — температуры образца и блока.

Поток результирующего излучения определяется по массе G , удельной теплоемкости c_p и скорости нагревания $dt/d\tau$ образца:

$$Q_{1,2} = G c_p \frac{dt}{d\tau} \quad (17-29)$$

Тогда приведенный коэффициент излучения для системы «образец — кожух» можно найти в зависимости

$$c_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 F_1} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}}, \quad (17-30)$$

а затем — искомое значение коэффициента излучения образца c_1 при заданном коэффициенте излучения блока c_2 .

А. Излучающая система без экранов

Рассмотрим два тела, из которых одно находится в полости другого (рис. 17-4). Тело 1 — выпуклое, а тело 2 — вогнутое. Они имеют заданные размеры F_1 и F_2 , поглощательные способности A_1 и A_2 , степени черноты ϵ_1 и ϵ_2 , а также температуры T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$.

Для определения искомой величины результирующего потока излучения используем зависимость (16-21). При наличии диатермичной промежуточной среды можно записать:

$$Q_{1,2} = Q_{\text{эф}1} - \bar{\varphi}_{2,1} Q_{\text{эф}2}, \quad (17-31)$$

где $\bar{\varphi}_{2,1}$ — средний угловой коэффициент излучения. Он характеризует часть потока эффективного излучения, которая попадает со второго тела на первое по отношению к полному потоку эффективного излучения второго тела. Угловой коэффициент $\bar{\varphi}_{1,2} = 1$, так как энергия, излучаемая первым телом, целиком попадает на второе тело.

Угловой коэффициент $\bar{\varphi}_{1,1} = 0$ в соответствии с принятым допущением, что тело 1 — выпуклое. Величина $\bar{\varphi}_{2,2} \neq 0 = 1 - \bar{\varphi}_{2,1}$ характеризует долю энергии излучения тела 2 само на себя.

Для определения потока результирующего излучения используем метод сальдо [Л. 152]. Тогда в соответствии с зависимостью (16-24) получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{эф}1} &= Q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{Q_1}{A_1}; \\ Q_{\text{эф}2} &= Q_{2,1} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{Q_2}{A_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17-32)$$

Рис. 17-4. Система выпуклого тела с оболочкой.

Подставим в зависимость (17-31) соотношения (17-32); учитывая, что при стационарном режиме результирующие потоки излучения равны, получаем:

$$Q_{1,2} = \frac{\frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_2}{A_2} - \bar{\varphi}_{2,1}}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) - \bar{\varphi}_{2,1}}. \quad (17-33)$$

Потоки собственного излучения могут быть выражены по закону Стефана — Больцмана через заданные температуры

$$Q_1 = F_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 c_0 \epsilon_1; \quad Q_2 = F_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 c_0 \epsilon_2. \quad (17-34)$$

Подставляя формулы (17-34) в (17-33), получаем:

$$Q_{1,2} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \frac{\epsilon_1}{A_1} F_1 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \frac{\epsilon_2}{A_2} F_2 \bar{\varphi}_{2,1} \right]}{\frac{1}{A_1} + \bar{\varphi}_{2,1} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (17-35)$$

Для определения неизвестной величины $\bar{\varphi}_{2,1}$ положим временно, что температуры тел 1 и 2 одинаковы ($T_1 = T_2$). В этом случае $Q_{1,2} = 0$.

Тогда из (17-35) следует, что

$$\frac{\epsilon_1}{A_1} F_1 - \frac{\epsilon_2}{A_2} F_2 \bar{\varphi}_{2,1} = 0,$$

откуда

$$\bar{\varphi}_{2,1} = \frac{\epsilon_1}{A_1} \frac{A_2}{\epsilon_2} \frac{F_1}{F_2}. \quad (17-36)$$

Таким образом, в общем случае угловой коэффициент излучения зависит от геометрических свойств излучающей системы и от ее оптических свойств. Следовательно, используя (17-36), поток результирующего излучения можно выразить окончательно, если числитель и знаменатель поделить на ϵ_1/A_1 :

$$Q_{1,2} = \frac{c_0 F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_2}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) F_1/F_2}. \quad (17-37)$$

Обычно полагают $\epsilon=A$. Тогда (17-36) переходит в соотношение

$$\bar{\varphi}_{2,1} = \frac{F_1}{F_2} \quad (17-38)$$

и средний угловой коэффициент излучения превращается в чисто геометрическую характеристику.

Выражение для результирующего потока излучения в этом случае принимает вид:

$$Q_{1,2} = \frac{\left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] c_0 F_1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2}}, \quad (17-39)$$

или в более короткой записи

$$Q_{1,2} = \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] c_0 F_1 A_{1,2}, \quad (17-40)$$

где приведенная поглощательная способность системы тел

$$A_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_1} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2}}. \quad (17-41)$$

Если $A_1=1$ или $F_1/F_2 \rightarrow 0$, то $A_{1,2}=1$.

Введем понятие приведенного коэффициента излучения системы $c_{1,2}$, Вт/(м²·К)⁴,

$$c_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right) F_1/F_2}; \quad (17-42)$$

тогда вместо (17-40) получим:

$$Q_{1,2} = \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 c_{1,2}, \quad (17-43)$$

где $Q_{1,2}$ измеряется в ваттах.

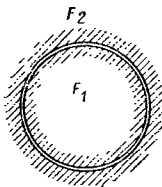


Рис. 17-5. Система тела с оболочкой при $F_1 \approx F_2$.

F_1 и F_2 — поверхности тела и оболочки.

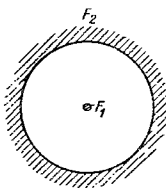


Рис. 17-6. Система тела с оболочкой при $F_1 \ll F_2$.

В частном случае, когда поверхности $F_1 \approx F_2$ (рис. 17-5), угловой коэффициент излучения $\varphi_{2,1} = 1$. Это означает, что вся энергия с тела 1 попадает на тело 2, и мы приходим к решению, полученному выше для плоскопараллельной системы тел.

Если одно тело мало по сравнению с другим $F_1 \ll F_2$ (рис. 17-6), то $\varphi_{2,1} \rightarrow 0$, а $c_{1,2} \rightarrow c_1$. Этот же результат следует при $c_2 = c_0$ из формулы (17-42).

Приведенные зависимости для $Q_{1,2}$ справедливы для концентрического и неконцентрического расположения сферических поверхностей, а также произвольных невогнутых тел с оболочкой.

В. Теплообмен при наличии экранов

Один экран. Снижение теплообмена при наличии экранов между телом и оболочкой в отличие от случая плоской системы зависит от расположения их относительно излучающего тела, так как в зависимости от этого изменяются угловые коэффициенты излучения. Экранирование оказывается наиболее эффективным, если цилиндрический или сферический экраны помещаются вблизи тела, имеющего более высокую температуру.

Применительно к системам «тело 1 — экран» и «экран — тело 2» (рис. 17-7) можно записать для потоков результирующего излучения следующие уравнения, если положить, что в общем случае $A_1 \neq A_3 \neq A_2$:

$$\begin{cases} Q_{1,3} = A_{1,3} c_0 F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right]; \\ Q_{3,2} = A_{3,2} c_0 F_3 \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \end{cases} \quad (17-44)$$

где с учетом (17-4) приведенные поглощательные способности выражаются зависимостями

$$A_{1,3} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_1}{F_3} \left(\frac{1}{A_3} - 1 \right)}; \quad A_{3,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_3} + \frac{F_3}{F_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (17-45)$$

При стационарном тепловом режиме $Q_{1,3} = Q_{3,2} = Q_{(1,2)}$ и

$$A_{1,3} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right] = A_{3,2} F_3 \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

что позволяет найти неизвестную температуру экрана:

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{A_{1,3} F_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + A_{3,2} F_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{A_{1,3} F_1 + A_{3,2} F_3}, \quad (17-46)$$

Искомую величину результирующего потока излучения можно найти из (17-44) после деления числителя и знаменателя на величину

$A_{1,2}A_{2,2}F_2$ с учетом зависимости (17-46) для температуры экрана:

$$\left. \begin{aligned} Q_{(1,2)2} &= A_{(1,2)2} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 \\ Q_{(1,2)2} &= c_{(1,2)2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1, \end{aligned} \right\} \quad (17-47)$$

где приведенная поглощательная способность и коэффициент излучения системы соответственно выражаются уравнениями

$$A_{(1,2)2} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,2}} + \frac{F_1}{F_2} \frac{1}{A_{2,2}}}; \quad c_{(1,2)2} = \frac{1}{\frac{1}{c_{1,2}} + \frac{F_1}{F_2} \frac{1}{c_{2,2}}},$$

которые с учетом зависимостей (17-41) и (17-42), принимают окончательный вид:

$$A_{(1,2)2} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,2}} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{2}{A_0} - 1 \right)}; \quad c_{(1,2)2} = \frac{1}{\frac{1}{c_{1,2}} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{2}{c_0} - \frac{1}{c_0} \right)}, \quad (17-48)$$

здесь $A_{1,2}$ и $c_{1,2}$ относятся к рассматриваемой излучающей системе при отсутствии экрана и определяются из зависимостей (17-41) и (17-42).

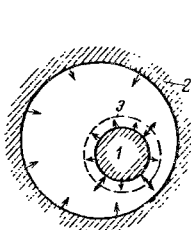


Рис 17-7 Система цилиндрических тел с экраном.

1 — тело 1; 2 — тело 2; 3 — экран

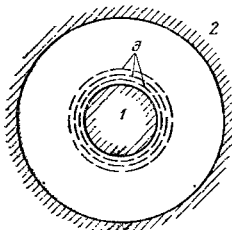


Рис 17-8 Система цилиндрических тел с произвольным числом экранов.

Величина $A_{(1,2)2}$ будет меньше, когда $F_2 \rightarrow F_1$ и когда величина A_0 будет мала.

Второе слагаемое в знаменателе $\frac{F_1}{F_2} \left(\frac{2}{A_0} - 1 \right)$ характеризует тепловое сопротивление лучистому теплообмену, обусловленное наличием экрана.

Произвольное число экранов, последовательно установленных между телами 1 и 2, позволяет рассматривать полученную систему как совокупность систем «тело 1 — экран 1», «экран 1 — экран 2» и т. д. (рис. 17-8) и применить к ним зависимости, полученные для тела с оболочкой.

Если снова положить $A_1 \neq A_{\text{в1}} \neq \dots \neq A_{\text{вn}} \neq A_2$ и $c_1 \neq c_{\text{в1}} \neq \dots \neq c_{\text{вn}} \neq c_2$, можно записать следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,\text{в1}} &= c_0 A_{1,\text{в1}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{в1}}}{100} \right)^4 \right] F_1; \\ Q_{\text{в1},\text{в2}} &= c_0 A_{\text{в1},\text{в2}} \left[\left(\frac{T_{\text{в1}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{в2}}}{100} \right)^4 \right] F_{\text{в1}}; \\ &\dots \dots \dots \\ Q_{\text{вn},2} &= c_0 A_{\text{вn},2} \left[\left(\frac{T_{\text{вn}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_{\text{вn}}. \end{aligned} \right\} \quad (17-49)$$

Исключив из (17-49) неизвестные температуры экранов и учитывая, что при стационарном режиме $Q_{1,\text{в1}} = Q_{\text{в1},\text{в2}} = \dots = Q_{(\text{1,2})}$, можно найти выражение для потока результирующего излучения:

$$\begin{aligned} Q_{(\text{1,2})} &= \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_{1,\text{в1}} F_1} + \frac{1}{A_{\text{в1},\text{в2}} F_{\text{в1}}} + \dots + \frac{1}{A_{\text{вn},2} F_{\text{вn}}}} = \\ &= \frac{F_1 c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_{1,\text{в1}}} + \frac{1}{A_{\text{в1},\text{в2}}} \frac{F_1}{F_{\text{в1}}} + \dots + \frac{1}{A_{\text{вn},2}} \frac{F_1}{F_{\text{вn}}}}. \end{aligned} \quad (17-50)$$

Используя ранее полученную зависимость (17-45) для приведенной поглощательной способности запишем:

$$A_{1,\text{в1}} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_1}{F_{\text{в1}}} \left(\frac{1}{A_{\text{в1}}} - 1 \right)}; \quad A_{\text{в1},\text{в2}} = \frac{1}{\frac{1}{A_{\text{в1}}} + \frac{F_{\text{в1}}}{F_{\text{в2}}} \left(\frac{1}{A_{\text{в2}}} - 1 \right)}. \quad (17-51)$$

После подстановки зависимостей (17-51) в выражение (17-50) и некоторых преобразований получим окончательное выражение для потока результирующего излучения $Q_{(\text{1,2})}$, Вт:

$$Q_{(\text{1,2})} = c_0 A_{(\text{1,2})} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (17-52)$$

где приведенная поглощательная способность рассматриваемой излучающей системы представится соотношением

$$A_{(\text{1,2})} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,2}} + \sum_{i=1}^n \frac{F_1}{F_{\text{вi}}} \left(\frac{2}{A_{\text{вi}}} - 1 \right)}. \quad (17-53)$$

Полученные зависимости (17-52) и (17-53) являются обобщением зависимостей (17-47) и (17-48) на произвольное число экранов.

Их сравнение показывает, что тепловое сопротивление теплообмену излучением возрастает пропорционально числу установленных экранов.

При $F_1 = F_{\text{в1}} = \dots = F_2$ зависимости (17-50) и (17-51) переходят в зависимости (17-19) и (17-21), ранее полученные для плоскопараллельных систем.

17-5. ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ДВУМЯ ТЕЛАМИ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим два черных тела, которые имеют изотермические поверхности с температурами T_1 и T_2 . Самооблучение их отсутствует ($\varphi_{1,1} = \varphi_{2,2} = 0$). Теплообмен этих тел с другими телами также отсутствует. Тела являются однородными, изотропными; яркость излучения не зависит от направления. Требуется найти поток результирующего излучения. Для этого на каждом из рассматриваемых тел выделяются элементарные площадки dF_1 и dF_2 (рис. 17-9), бесконечно малые по сравнению с расстоянием r между их центрами в точках M и N .

Найдем элементарный поток излучения, падающий на площадку dF_1 с площадки dF_2 , используя (16-12):

$$d^2Q_{\text{пад}1} = I_{\varphi_2} d\omega_2 dF_2 = I_2 \cos \varphi_2 d\omega_2 dF_2. \quad (17-54)$$

Элементарный лучистый поток, падающий с dF_2 на dF_1 ,

$$d^2Q_{\text{пад}2} = I_{\varphi_1} d\omega_1 dF_1 = I_1 \cos \varphi_1 d\omega_1 dF_1. \quad (17-55)$$

Элементарные телесные углы можно представить соотношениями

$$d\omega_1 = \frac{dF_2 \cos \varphi_2}{r^2}; \quad d\omega_2 = \frac{dF_1 \cos \varphi_1}{r^2}.$$

Яркость излучения каждой из площадок выражается через плотность полусферического излучения по (16-59). Тогда зависимости (17-54) и (17-55) принимают вид:

$$d^2Q_{\text{пад}1} = E_2 \cos \varphi_2 \frac{dF_1 \cos \varphi_1}{\pi r^2} dF_2; \quad (17-56)$$

$$d^2Q_{\text{пад}2} = E_1 \cos \varphi_1 \frac{dF_2 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1. \quad (17-57)$$

Введем обозначения

$$d\varphi_{1,2} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2; \quad d\varphi_{2,1} = \frac{\cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\pi r^2} dF_1. \quad (17-58)$$

Величины $d\varphi_{1,2}$ и $d\varphi_{2,1}$ называются элементарными угловыми коэффициентами излучения. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} d^2Q_{\text{пад}1} &= E_2 d\varphi_{2,1} dF_2 = dQ_2 d\varphi_{2,1}; \\ d^2Q_{\text{пад}2} &= E_1 d\varphi_{1,2} dF_1 = dQ_1 d\varphi_{1,2}; \end{aligned} \right\} \quad (17-59)$$

здесь dQ_1 и dQ_2 — полные элементарные потоки собственного излучения, испускаемые площадками dF_1 и dF_2 во всех направлениях пространства.

Из последних зависимостей следует, что

$$d\varphi_{1,2} = \frac{d^2Q_{\text{пад}2}}{dQ_1}; \quad d\varphi_{2,1} = \frac{d^2Q_{\text{пад}1}}{dQ_2}. \quad (17-60)$$

Таким образом, элементарный угловой коэффициент излучения характеризует долю энергии излучения, которая попадает с элементарной площадки одного тела на элементарную площадку другого тела по отношению к полному потоку, испускаемому элементарной площадкой первого тела.

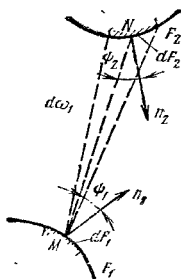


Рис. 17-9. Система двух тел, произвольно расположенных в пространстве.

n_1, n_2 — нормали к площадкам; ϕ — угол между нормалью и направлением излучения.

Произведение элементарного углового коэффициента излучения на величину соответствующей элементарной площадки носит название элементарной взаимной поверхности излучения и обозначается

$$d^2H_{1,2} = d\varphi_{1,2} dF_1; \quad d^2H_{2,1} = d\varphi_{2,1} dF_2. \quad (17-61)$$

В соответствии с этим зависимостями (17-59) можно представить в виде

$$d^2Q_{\text{пол}1} = E_2 d^2H_{2,1}; \quad d^2Q_{\text{пол}2} = E_1 d^2H_{1,2}. \quad (17-62)$$

Найдем местные значения потоков излучения элементарных площадок dF_1 и dF_2 на конечные поверхности соответственно F_2 и F_1 . Для этого необходимо произвести интегрирование зависимостей (17-59) по F_2 и F_1 с учетом того, что плотности потоков собственного излучения черных тел при $T = \text{const}$ являются постоянными величинами вдоль поверхности каждого из тел.

Интегралы от элементарных угловых коэффициентов излучения обозначим с учетом (17-58):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \int_{F_2} d\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dF_2; \\ \varphi_{2,1} &= \int_{F_1} d\varphi_{2,1} = \int_{F_1} \frac{\cos \phi_2 \cos \phi_1}{r^2} dF_1. \end{aligned} \right\} \quad (17-63)$$

Местные значения тепловых потоков падающего излучения выражаются зависимостями

$$\left. \begin{aligned} dQ_{\text{пад}1} &= E_2 \varphi_{2,1} dF_1; \\ dQ_{\text{пад}2} &= E_1 \varphi_{1,2} dF_2. \end{aligned} \right\} \quad (17-64)$$

Из этих зависимостей следует:

$$\varphi_{1,2} = \frac{dQ_{\text{пол}2}}{dQ_1}; \quad \varphi_{2,1} = \frac{dQ_{\text{пол}1}}{dQ_2}; \quad (17-65)$$

$\varphi_{1,2}$ и $\varphi_{2,1}$ носят название местных угловых коэффициентов излучения. Согласно (17-65) местный угловой коэффициент излучения характеризует долю энергии, испускаемой элементарной площадкой $dF_1(dF_2)$ одного тела на конечную поверхность $F_2(F_1)$ другого тела по отношению к полной энергии собственного полусферического излучения $dQ_1(dQ_2)$, испускаемой площадкой $dF_1(dF_2)$ первого тела.

Найдем результирующий поток излучения. Для этого из первой зависимости (17-64) вычтем вторую:

$$dQ_{1,2} = dQ_{\text{пол}2} - dQ_{\text{пад}1} = E_2 \varphi_{1,2} dF_1 - E_1 \varphi_{2,1} dF_2. \quad (17-66)$$

Для получения $Q_{1,2}$ Вт, необходимо уравнение (17-66) проинтегрировать.

Предварительно введем понятие средних угловых коэффициентов излучения:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \varphi_{1,2} dF_1; \quad \bar{\varphi}_{2,1} = \frac{1}{F_2} \int_{F_2} \varphi_{2,1} dF_2. \quad (17-67)$$

Средние угловые коэффициенты излучения позволяют найти:

$$Q_{\text{пад1}} = E_2 \bar{\varphi}_{2,1} F_2 \text{ и } Q_{\text{пад2}} = E_1 \bar{\varphi}_{1,2} F_1. \quad (17-68)$$

Результирующий поток излучения определяется разностью

$$Q_{1,2} = E_1 \bar{\varphi}_{1,2} F_1 - E_2 \bar{\varphi}_{2,1} F_2. \quad (17-69)$$

Соотношения (17-68) позволяют выразить средние угловые коэффициенты излучения через соответствующие лучистые потоки

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{Q_{\text{пад2}}}{Q_1}; \quad \bar{\varphi}_{2,1} = \frac{Q_{\text{пад1}}}{Q_2}. \quad (17-70)$$

Следовательно, средний угловой коэффициент излучения характеризует долю энергии, которая попадает с тела, имеющего конечную поверхность F_1 , на другое тело с конечной поверхностью F_2 по отношению к полному потоку собственного излучения первого тела.

Средние взаимные поверхности излучения представляются зависимостями

$$\bar{H}_{1,2} = F_1 \bar{\varphi}_{1,2}; \quad \bar{H}_{2,1} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1}. \quad (17-71)$$

Средняя взаимная поверхность излучения первого тела относительно второго тела представляет собой долю поверхности первого тела, полное излучение которой эквивалентно потоку излучения, испускаемого первым телом на второе.

Используя (17-71) и закон Стефана — Больцмана, вместо (17-69) получим:

$$Q_{1,2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \bar{\varphi}_{1,2} F_1 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \bar{\varphi}_{2,1} F_2 \right], \quad (17-72)$$

где $Q_{1,2}$ измеряется в ваттах.

Учитывая, что в соответствии с зависимостями (17-63) и (17-67) средние взаимные поверхности $\bar{H}_{1,2} = \bar{H}_{2,1}$, можно придать зависимости (17-72) вид:

$$Q_{1,2} = c_0 \bar{H}_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (17-73)$$

При определении потока результирующего излучения величины $\bar{\varphi}_{1,2}$, $\bar{\varphi}_{2,1}$, $\bar{H}_{1,2}$, $\bar{H}_{2,1}$ рассматриваются как заданные.

Из изложенного следует, что угловые коэффициенты $d\varphi$, φ и $\bar{\varphi}$ являются чисто геометрическими характеристиками излучающей системы, так как определяются геометрической формой тел и расположением их в пространстве. В общем случае они зависят еще от оптических свойств системы [см. соотношение (17-36)].

Результирующий поток излучения для системы, состоящей из двух серых тел, может быть найден из зависимости (17-69), если в нее вместо потоков собственного ввести потоки эффективного излучения:

$$Q_{1,2} = E_{\text{эф1}} F_1 \bar{\varphi}_{1,2} - E_{\text{эф2}} F_2 \bar{\varphi}_{2,1}. \quad (17-74)$$

17-6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛУЧИСТЫХ ПОТОКОВ

Из (17-69), (17-73) и (17-74) следует, что для вычисления результирующих потоков излучения необходимо располагать данными о величине взаимных поверхностей или угловых коэффициентов излучения.

Угловые коэффициенты и взаимные поверхности характеризуют определенные геометрические свойства излучающих систем с промежуточной прозрачной средой.

К ним относятся следующие свойства: взаимности (взаимной симметрии), замыкаемости, совмещаемости, затеняемости и невогнутости.

Свойство взаимности состоит в том, что взаимные поверхности излучения двух тел, участвующих в лучистом теплообмене, равны друг другу независимо от того, какая из поверхностей этих тел является излучающей. Так, в соответствии с зависимостями (17-58) и (17-61) получаем, что элементарные взаимные поверхности излучения равны

$$\left. \begin{aligned} d^2H_{1,2} &= d^2H_{2,1} \\ dF_1 d\varphi_{1,2} &= dF_2 d\varphi_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad (17-75)$$

или

Средние значения взаимных поверхностей излучения также численно одинаковы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{1,2} &= \bar{H}_{2,1} \\ F_1 \bar{\varphi}_{1,2} &= F_2 \bar{\varphi}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad (17-76)$$

или

Это равенство следует также из зависимости (17-71), если в него подставить последовательно соотношения (17-67) и (17-63). Кроме того, его можно получить из условий термодинамического равновесия, используя (17-72), когда $T_1 = T_2$, а $Q_{1,2} = 0$. Если один из угловых коэффициентов излучения известен, то другой определяется из зависимости

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \bar{\varphi}_{2,1} \frac{F_2}{F_1}.$$

В общем случае рассматриваемое тело может участвовать в лучистом теплообмене со всеми окружающими его телами. Это условие позволяет получить зависимости, выражающие свойство замыкаемости.

Согласно закону сохранения энергии потоки излучения, падающие с тела I на тела i , составят поток его собственного излучения

$$\sum_{i=1}^n Q_{\text{пад},i} = Q_1 \quad (17-77)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_{1,i} Q_1 = Q_1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_{1,i} = 1. \quad (17-78)$$

Таким образом, сумма угловых коэффициентов излучения данного тела с остальными единицами, а сумма взаимных поверхностей равна поверхности этого тела, так как в соответствии с (17-71) и (17-78)

$$\sum_{i=1}^n \bar{H}_{1,i} = F_1 \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_{1,i} = F_1. \quad (17-79)$$

Угловой коэффициент излучения $\bar{\varphi}_{1,2}$ поверхности F_2 на поверхность F_1 не зависит от конфигурации поверхности F_2 , если $F_2(F'_2, F''_2, F'''_2)$ вписывается в систему внешних (ab и cd) и внутренних (ac и bd) охватывающих прямых линий (рис. 17-10). Это свойство находится в полном соответствии со свойствами взаимности и замыкаемости и называется свойством совмещаемости лучистых потоков.

Свойство затеняемости состоит в том, что результирующий поток излучения от одного тела к другому равен нулю, если на пути лучей находится непрозрачное тело

$$Q_{1,2} = 0; \bar{\varphi}_{1,2} = 0; \bar{\varphi}_{2,1} = 0.$$

Для плоского и выпуклого тела самооблучение отсутствует:

$$\bar{\varphi}_{1,1} = \bar{\varphi}_{2,2} = 0. \quad (17-80)$$

Для вогнутых тел оно отлично от нуля:

$$\bar{\varphi}_{1,1} \geq 0; \bar{\varphi}_{2,2} \geq 0. \quad (17-81)$$

Зависимость (17-80) выражает свойство невогнутости, а (17-81) — вогнутости.

Рассмотренные зависимости для геометрических свойств лучистых потоков широко используются в расчетах по определению угловых коэффициентов и взаимных поверхностей излучения.

17-7. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОБМЕНА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ ТЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Черные тела. Рассмотрим замкнутую систему (рис. 17-11) заданной геометрии и размеров, состоящую из конечного числа n изотермических тел с поверхностями $F_1, F_2, \dots, F_n$ и температурами соответственно $T_1, T_2, \dots, T_n$ [Л. 163, 175].

Незамкнутая система приводится к замкнутой с помощью условных поверхностей, обладающих свойствами черного тела ($R=0$) при $T=0$ ($E_0=0$).

Для сформулированной постановки задачи требуется найти результирующее излучение для каждой из поверхностей тел системы.

Плотность потока результирующего излучения для i -го тела определяется из зависимости (16-19):

$$q_{\text{рез}i} = E_i - E_{\text{пад}i}; \quad i=1, \dots, n; \quad (17-82)$$

$E_{\text{пад}i}$ поступает на тело i с каждой из поверхностей $k=1, \dots, n$ системы. С одной k -й поверхности он сос-

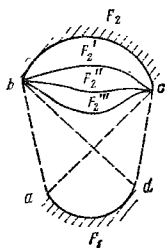


Рис. 17-10. К определению свойства совмещаемости.

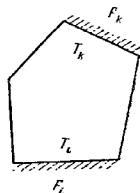


Рис. 17-11. Замкнутая система изотермических тел.

твляает величину

$$E'_{\text{пад}i} = \frac{E_k \bar{\varphi}_{k,i} F_k}{F_i}. \quad (17-83)$$

Используем свойство взаимности лучистых потоков (17-76). Тогда

$$E'_{\text{пад}i} = E_k \bar{\varphi}_{k,i}. \quad (17-84)$$

Излучение, падающее на тело i со всех тел системы, выразится алгебраической суммой

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n E_k \bar{\varphi}_{k,i}. \quad (17-85)$$

С другой стороны, плотность потока собственного излучения тела на все тела системы согласно закону сохранения энергии будет равна:

$$E_i = \sum_{k=1}^n E_i \bar{\varphi}_{k,i}. \quad (17-86)$$

Подставляя полученные зависимости (17-85) и (17-86) в исходное уравнение (17-82), получаем:

$$q_{\text{рез}i} = \sum_{k=1}^n (E_i - E_k) \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (17-87)$$

где $\bar{\varphi}_{k,i}$ — средний угловой коэффициент излучения поверхности i на поверхности $k=1, \dots, n$; $q_{\text{рез}i}$ измеряется в Вт/м².

Выражая собственное излучение через заданные температуры по закону Стефана — Больцмана, имеем:

$$q_{\text{рез}i} = \sum_{k=1}^n c_0 \bar{\varphi}_{k,i} \left[\left(\frac{T_i}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_k}{100} \right)^4 \right]. \quad (17-88)$$

Суммирование включает значение $k=i$, если тело i является вогнутым ($\bar{\varphi}_{i,i} \neq 0$).

Зависимости (17-87) и (17-88) последовательно применяются к каждой поверхности $i=1, \dots, n$. При этом средние угловые коэффициенты излучения рассматриваются как заданные величины.

Серые тела. В этом случае в исходных условиях дополнительно должны быть заданы для всех тел системы их оптические свойства (A_i, R_i), которые принимаются постоянными для каждого тела. Для определения плотности потока результирующего излучения используется зависимость (16-20):

$$q_{\text{рез}i} = E_{\text{эф}i} - E_{\text{пад}i}.$$

Соотношения (17-85) и (17-86) переходят в зависимости

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \bar{\varphi}_{k,i}; \quad (17-89)$$

$$E_{\text{эф}i} = \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \bar{\varphi}_{k,i}. \quad (17-90)$$

Подставляя эти зависимости в (16-20), получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения плотности потока результирующего излучения:

$$q_{\text{рез}i} = \sum_{k=1}^n (E_{\text{эф}i} - E_{\text{эф}k}) \bar{\varphi}_{k,i}. \quad (17-91)$$

Из (17-91) следует, что для определения $q_{\text{рез}i}$ необходимо предварительно найти плотности потоков эффективного излучения. Для их определения используется зависимость (16-18):

$$E_{\text{эф}i} = E_i + R_i E_{\text{пад}i}. \quad (17-92)$$

Подставляя в нее значение падающего излучения из (17-89), имеем:

$$E_{\text{эф}i} = E_i + R_i \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \bar{\varphi}_{k,i} \quad (17-93)$$

или

$$E_{\text{эф}i} - R_i \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \bar{\varphi}_{k,i} = E_i; \quad i=1, \dots, n. \quad (17-94)$$

Полный поток эффективного излучения определяется путем умножения обеих частей уравнения (17-94) на поверхность тела F_i . Тогда, используя свойство взаимности (17-76), систему уравнений (17-94) можно привести к виду

$$Q_{\text{эф}i} - R_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф}k} \bar{\varphi}_{i,k} = Q_i. \quad (17-95)$$

Таким образом, получена система n алгебраических уравнений для определения $E_{\text{эф}1}, \dots, E_{\text{эф}n}$ неизвестных величин. По их значениям находятся $q_{\text{рез}i}$ из системы уравнений (17-91) с учетом величины F_i .

Плотности потоков других видов излучения определяются из соотношений (16-14) и (16-18) классификации излучения (§ 16-2) через найденное эффективное излучение:

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{погл}i} &= A_i E_{\text{пад}i} = \frac{A_i}{R_i} (E_{\text{эф}i} - A_i E_{\text{от}i}); \\ E_{\text{от}i} &= E_{\text{эф}i} - E_i; \quad E_{\text{пад}i} = \frac{E_{\text{эф}i} - A_i E_{\text{от}i}}{R_i}. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Аналогично изложенному методу расчета можно исходить из систем алгебраических уравнений, составленных для других видов излучения.

Составим систему алгебраических уравнений для падающего излучения. Для этого используем зависимость (17-89) и подставим туда значение $E_{\text{эф}k}$ из (16-18):

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n (E_k + R_k E_{\text{пад}k}) \bar{\varphi}_{k,i},$$

или

$$E_{\text{пад}i} - \sum_{k=1}^n R_k E_{\text{пад}k} \bar{\varphi}_{k,i} = \sum_{k=1}^n E_k \bar{\varphi}_{k,i}; \quad i=1, \dots, n. \quad (17-96)$$

Для полных потоков зависимость (17-96) умножается на F_i . Тогда получим:

$$Q_{\text{пад}i} - \sum_{k=1}^n R_k Q_{\text{пад}k} \bar{\varphi}_{k,i} = \sum_{k=1}^n Q_k \bar{\varphi}_{i,k}; \quad (17-97)$$

здесь $Q_{\text{пад}}$ измеряется в ваттах.

Определение плотностей потоков, а затем полных потоков других видов излучения производится по $E_{\text{пад}i}$ из зависимостей классификации излучения (§ 16-2):

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{эф}i} &= E_i + R_i E_{\text{пад}i}; & q_{\text{рез}i} &= E_{\text{эф}i} - E_{\text{пад}i}; \\ E_{\text{погл}i} &= A_i E_{\text{пад}i}; & E_{\text{отр}i} &= R_i E_{\text{пад}i}. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Составим систему алгебраических уравнений для результирующего излучения. Для этого в зависимость (17-89) подставим значения $E_{\text{пад}i}$ и $E_{\text{эф}k}$ в соответствии с соотношениями (16-23) и (16-24) через результирующее излучение. Тогда эта система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{q_{\text{рез}i}}{A_i} - \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{A_k} q_{\text{рез}k} \bar{\varphi}_{k,i} = \sum_{k=1}^n (E_{\text{от}i} - E_{\text{от}k}) \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (17-98)$$

так как для $E_{\text{от}i}$ справедливо соотношение (17-86). Здесь $E_{\text{от}i}$ и $E_{\text{от}k}$ — плотности потоков излучения абсолютно черного тела при температурах тел T_i и T_k .

Полный поток результирующего излучения представляется системой следующих алгебраических уравнений:

$$\frac{Q_{\text{рез}i}}{A_i} - \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{A_k} Q_{\text{рез}k} \bar{\varphi}_{ik} = \sum_{k=1}^n (E_{\text{от}i} - E_{\text{от}k}) \bar{H}_{k,i}. \quad (17-99)$$

Найдем плотности потоков других видов излучения через результирующее излучение, используя зависимости (16-23), (16-24); (16-15) и (16-19):

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{пад}i} &= E_{\text{от}i} - \frac{q_{\text{рез}i}}{A_i}; & E_{\text{эф}i} &= E_{\text{от}i} - \frac{R_i}{A_i} q_{\text{рез}i}; \\ E_{\text{отр}i} &= R_i \left(E_{\text{от}i} - \frac{q_{\text{рез}i}}{A_i} \right); & E_{\text{погл}i} &= q_{\text{рез}i} - E_i. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Составим системы алгебраических уравнений для отраженного и поглощенного излучений.

Применяя зависимости (16-15), (17-89), (16-18), находим искомую систему алгебраических уравнений для поверхностной плотности и потока полного отраженного излучения:

$$E_{\text{отр}i} - R_i \sum_{k=1}^n E_{\text{отр}k} \bar{\varphi}_{k,i} = R_i \sum_{k=1}^n E_k \bar{\varphi}_{k,i}; \quad (17-100)$$

$$Q_{\text{отр}i} - R_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{отр}k} \bar{\varphi}_{i,k} = R_i \sum_{k=1}^n Q_k \bar{\varphi}_{i,k}. \quad (17-101)$$

Зависимости (16-14), (16-15), (16-24) и (16-18) позволяют получить следующую систему соотношений для определения плотности дру-

гих видов потоков излучения через найденное по (17-100) отраженное излучение:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{пад}i} &= \frac{E_{\text{отр}i}}{R_i}; \quad E_{\text{погл}i} = \frac{A_i}{R_i} E_{\text{отр}i}; \\ q_{\text{рез}i} &= A_i \left(E_{0i} - \frac{E_{\text{отр}i}}{R_i} \right); \quad E_{\text{эф}i} = A_i E_{0i} + E_{\text{отр}i}. \end{aligned} \right\} \quad (Г)$$

Аналогично изложенному может быть найдена система алгебраических уравнений для потоков поглощенного излучения:

$$E_{\text{погл}i} - A_i \sum_{k=1}^n E_{\text{погл}k} \bar{\varphi}_{k,i} = A_i \sum_{k=1}^n E_k \bar{\varphi}_{k,i} \quad (17-102)$$

$$Q_{\text{погл}i} - A_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{погл}k} \bar{\varphi}_{k,i} = A_i \sum_{k=1}^n Q_k \bar{\varphi}_{k,i} \quad (17-103)$$

и система элементарных уравнений для других видов излучения:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{пад}i} &= \frac{E_{\text{погл}i}}{A_i}; \quad E_{\text{отр}i} = R_i \frac{E_{\text{погл}i}}{A_i}; \\ E_{\text{эф}i} &= A_i E_{0i} - \frac{E_{\text{погл}i} R_i}{A_i}; \quad q_{\text{рез}i} = E_i - E_{\text{погл}i}. \end{aligned} \right\} \quad (Д)$$

Найденные системы алгебраических уравнений и соответствующие им элементарные зависимости для различных видов излучения показывают, что все потоки излучения зависят от температур, геометрических и оптических свойств тел, входящих в излучающую систему.

В частном случае, когда i -е тело участвует в лучистом теплообмене только с одним телом и $k=1$, каждая из систем алгебраических уравнений вырождается в одно уравнение. Так, например, зависимость (17-98) переходит в уравнение

$$\frac{q_{\text{рез}i}}{A_i} - \frac{R_i}{A_i} q_{\text{рез}1} \bar{\varphi}_{1i} = (E_{0i} - E_{01}) \bar{\varphi}_{1i}. \quad (17-104)$$

В условиях стационарного режима $q_{\text{рез}1} = -q_{\text{рез}i}$. При $\bar{\varphi}_{1,i} = 1$ и $R_1 = 1 - A_1$ находим искомое значение:

$$q_{\text{рез}} = \frac{E_{0i} - E_{0,1}}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{A_1} - 1},$$

что совпадает с формулой (17-3), ранее полученной другими методами.

17-8. ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

В § 17-7 была рассмотрена излучающая система изотермических тел. Если какое-либо тело не имеет изотермическую поверхность, то его делят на более мелкие конечные участки (зоны), каждый из которых может рассматриваться как изотермический.

Тогда расчетные зависимости, выражающие средние плотности лучистых потоков, будут справедливы лишь применительно к этим участкам (зонам).

При значительных изменениях температуры отдельных тел излучающей системы их поверхности делятся на элементарные площадки (элементарные зоны) и вместо средних определяются местные значения плотностей потоков излучения в отдельных точках.

Рассмотрим замкнутую систему неизотермических серых тел известной геометрии и размеров (рис. 17-12) с заданными распределением температуры и оптических свойств. Требуется найти потоки различных видов излучения.

Каждая из поверхностей тел i и k разбивается на элементарные зоны dF_i и dF_k , в пределах которых можно принять температуру и оптические свойства постоянными [Л. 163, 178]. Пусть фиксированная площадка dF_i имеет точку M , а текущая элементарная площадка dF_k — точку N .

Элементарная площадка dF_k посылает на площадку dF_i поток эффективного излучения полностью $E_{\text{эф} N_k} d\varphi_{M_i, N_k}$, а со всей поверхности F_k посылается поток

$$E_{\text{пад} M_i} = \int_{F_k} E_{\text{эф} N_k} d\varphi_{M_i, N_k}.$$

Плотность потока излучения, падающего в точку M_i площадки dF_i тела i со всех поверхностей $k=1, \dots, n$ системы, представится суммой интегралов:

$$E_{\text{пад} M_i} = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\text{эф} N_k} d\varphi_{M_i, N_k}; \quad (17-89')$$

здесь $d\varphi_{M_i, N_k}$ — элементарный угловой коэффициент излучения площадки dF_k с точкой N на площадку dF_i с точкой M .

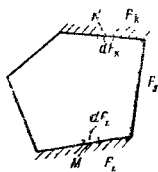


Рис. 17-12. Замкнутая система неизотермических тел.

Таким образом, вместо конечной системы алгебраических уравнений (17-89) получена конечная система интегральных уравнений, число которых соответствует числу выделенных элементарных зон на каждой поверхности системы, что позволяет найти распределение местных потоков падающего излучения.

Зависимость (17-89'), как и (17-89), является одной из важнейших в теории лучистого теплообмена.

Методика получения систем интегральных уравнений для потоков других видов излучения аналогична выводам систем алгебраических уравнений (§ 17-7). Так, система интегральных уравнений для местного значения плотности потока эффективного излучения получается из (16-18) путем подстановки вместо $E_{\text{пад}}$ его значения из (17-89'):

$$E_{\text{эф} M_i} - R_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\text{эф} N_k} d\varphi_{M_i, N_k} = E_{M_i}. \quad (17-94')$$

Для местных значений плотностей потоков падающего и результирующего излучений имеют место следующие системы интегральных уравнений:

$$E_{\text{пад} M_i} - \sum_{k=1}^n \int_{F_k} R_{N_k} E_{\text{пад} N_k} d\varphi_{M_i, N_k} = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\bullet, N_k} A_{N_k} d\varphi_{M_i, N_k}; \quad (17-96')$$

$$\frac{E_{\text{рез } M_i}}{A_{M_i}} - \sum_{k=1}^n \int_{F_k} \frac{R_{N_k}}{A_{N_k}} E_{\text{рез } N_k} d\varphi_{M_i, N_k} = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} (E_{0, M_i} - E_{0, N_k}) d\varphi_{M_i, N_k}; \quad (17-98')$$

здесь E_{0, M_i} и E_{0, N_k} — плотности потоков излучения абсолютно черного тела соответственно при температурах в точках M_i и N_k .

Полученным системам интегральных уравнений (17-94'), (17-96') и (17-98') соответствуют системы элементарных уравнений (А) (Б) и (В) для определения потоков других видов излучения. В них только положение точек M и N должно относиться к элементарным зонам dF_i и dF_k .

Рассмотренный метод исследования лучистого теплообмена называется **зональным**.

17-9. УСЛОВИЯ ВЗАИМНОГО ПЕРЕХОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

Интегральные уравнения при определенных условиях могут вырождаться в алгебраические, т. е. они будут приводить к одному и тому же результату. Найдем условия, при которых интегральные и алгебраические уравнения будут находиться в точном соответствии друг с другом. Полное соответствие означает, что должно иметь место равенство местных и средних значений плотностей соответствующих лучистых потоков. Например, для падающего излучения это выражается соотношением

$$E_{\text{пад } i} = E_{\text{пад } M_i}. \quad (17-105)$$

Согласно (17-89) средняя плотность потока падающего излучения

$$E_{\text{пад } i} = \sum_{k=1}^n E_{\text{эф } k} \bar{\varphi}_{k, i}.$$

С другой стороны, среднее значение $E_{\text{пад } i}$ может быть найдено, как средняя интегральная величина с помощью (17-89') из § 17-8:

$$E_{\text{пад } i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад } M_i} dF_i = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\text{эф } N_k} d\varphi_{i, N_k}; \quad (17-106)$$

здесь φ_{i, N_k} — средний элементарный угловой коэффициент излучения, определяемый зависимостью

$$d\varphi_{i, N_k} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \varphi_{M_i, N_k} dF_i.$$

Из сравнения выражений (17-89') и (17-106) следует, что равенство (17-105) имеет место, когда выполняется условие

$$d\varphi_{M_i, N_k} = d\varphi_{i, N_k} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad (17-107)$$

т. е. когда элементарный угловой коэффициент излучения равен его среднему значению.

Системы интегральных уравнений вырождаются в соответствующие системы алгебраических уравнений применительно и к другим видам излучения. Если условие (17-107) строго не выполняется, то системы алгебраических уравнений будут описывать процессы теплообмена излучением лишь с соответствующим приближением.

Рассмотрим условия обратного перехода, т. е. перехода алгебраических уравнений в интегральные. Применительно к падающему излучению средняя плотность потока определяется конечной системой алгебраических уравнений (17-89) § 17-7:

$$E_{\text{пад } i} = \sum_{k=1}^n E_{\text{эф } k} \bar{\varphi}_{k,i}, \quad k=1, \dots, n;$$

здесь k обозначает отдельные тела или зоны поверхности излучающей системы с постоянными температурами и оптическими свойствами. В предельном случае полагается, что число зон $n \rightarrow \infty$, а поверхности отдельных зон стягиваются в точки и $F_k \rightarrow 0$.

Тогда средние плотности потоков излучения переходят в действительные значения в отдельных точках; средние угловые коэффициенты излучения с зоны на зону — в элементарные угловые коэффициенты; суммирование по отдельным зонам заменяется интегрированием по всей поверхности F излучающей системы. Конечная система алгебраических уравнений (17-89') переходит в интегральное уравнение, описывающее непрерывное изменение плотности потока падающего излучения в зависимости от положения точки M на поверхности:

$$E_{\text{пад } M} = \int_F E_{\text{эф } N} d\varphi_{M,N} \quad (17-89'')$$

Системы алгебраических уравнений (17-94), (17-98) и др. для различных видов излучения в предельном случае также переходят в соответствующие интегральные уравнения, которые являются строгими и точными.

17-10. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Интегральный метод применяется для исследования сложных задач лучистого теплообмена, когда исходная система характеризуется сложной геометрической формой и имеет произвольное распределение температуры и оптических параметров вдоль поверхности системы.

Точное решение задач применительно к указанным условиям основывается на интегральных уравнениях излучения, откуда следует и название метода. Интегральные уравнения в § 17-9 получались путем предельных переходов из алгебраических.

Интегральные уравнения могут быть получены и независимым путем. Для их вывода используется фундаментальное соотношение (16-12) теории лучистого теплообмена. Применительно к потоку падающего излучения, выражаемого через яркость, оно имеет вид:

$$d^2 Q_{\text{пад } N} = I_N d\omega_N dF_N \cos \psi_N.$$

Используя закон Ламберта, а также зависимости (16-56) и (16-58), получаем:

$$d^2 Q_{\text{пад } M} = E_N dF_N d\varphi_{N,M};$$

здесь, как и ранее, M и N соответственно фиксированная и текущая точки на поверхности F системы (рис. 17-12).

Плотность потока падающего излучения с площадки dF_N на площадку dF_M будет равна:

$$dE_{\text{пад } M} = \frac{d^2 Q_{\text{пад } M}}{dF_M} = E_N d\varphi_{M, N} \frac{dF_N}{dF_M}.$$

Используем свойство взаимности (17-75). Тогда после интегрирования получим:

$$E_{\text{пад } M} = \int_F E_N d\varphi_{M, N}. \quad (17-108)$$

Для серого тела вместо собственного войдет эффективное излучение и зависимость (17-108) переходит в уравнение (17-89'') из § 17-9, ранее полученное путем предельных переходов (см. стр. 404).

Зависимость (17-89'') позволяет найти интегральные уравнения для других видов потоков излучения.

Метод получения интегральных уравнений аналогичен методу получения алгебраических уравнений (§ 17-7). Так, например, для получения интегрального уравнения, выражающего плотность потока эффективного излучения, вновь используется соотношение (16-18), но вместо (17-89) для падающего излучения берется зависимость (17-89''). Интегральное уравнение для определения распределения $E_{\text{эф}}$ по поверхности

излучающей системы $F = \sum_{i=1}^n F_i$ имеет вид:

$$E_{\text{эф } M} - R_M \int_F E_{\text{эф } N} d\varphi_{M, N} = E_M. \quad (17-94'')$$

Интегральное уравнение для плотности потока падающего излучения получаем после подстановки в (17-89'') найденного значения $E_{\text{эф } M}$:

$$E_{\text{пад } M} - \int_F R_N E_{\text{пад } N} d\varphi_{M, N} = \int_F A_N E_{0N} d\varphi_{M, N}; \quad (17-96'')$$

здесь E_{0N} — плотность излучения абсолютно черного тела при температуре в текущей точке N на поверхности.

Таким образом, вместо конечных систем алгебраических уравнений получены единые интегральные уравнения, описывающие непрерывное распределение по поверхности лучистых потоков различных видов.

Вывод интегральных уравнений для результирующего, отраженного и поглощенного излучений аналогичен выводу систем уравнений (17-98), (17-100), (17-102). Поэтому они будут приведены без промежуточных выкладок в окончательном виде:

$$\frac{q_{\text{рез } M}}{A_M} - \int_F \frac{R_N}{A_N} q_{\text{рез } N} d\varphi_{M, N} = \int_F (E_{0M} - E_{0N}) d\varphi_{M, N}; \quad (17-98'')$$

$$E_{\text{отр } M} - R_M \int_F E_{\text{отр } N} d\varphi_{M, N} = R_M \int_F E_N d\varphi_{M, N}; \quad (17-100'')$$

$$E_{\text{полг } M} - A_M \int_F E_{\text{полг } N} d\varphi_{M, N} = A_M \int_F E_N d\varphi_{M, N}. \quad (17-102'')$$

Таким образом, получены интегральные уравнения излучения. Соответствующие им элементарные уравнения (А), (Б), (В), (Г), (Д) (§ 17-7) в рассматриваемом случае используются применительно к отдельным расчетным точкам М.

Каждая из систем, состоящая из какого-либо одного интегрального уравнения (17-94''), (17-98''), (17-100'') или (17-102'') и соответствующей совокупности элементарных уравнений (А)—(Д), для других видов излучения равноценна остальным и характеризуется своим методом расчета.

17-11. РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Точные аналитические решения интегральных уравнений (§ 17-10) получены лишь применительно к (отдельным) частным задачам [Л. 163]. В общем случае прибегают к различным приближенным методам решения [Л. 1, 163, 178]. К одному из них относится метод последовательных приближений (итераций). Рассмотрим этот метод для произвольной геометрической замкнутой системы серых тел с заданным полем распределения температуры и оптических свойств на ее граничной поверхности. Требуется найти потоки различных видов излучения.

Плотность потока эффективного излучения для этих условий выразим зависимость

$$E_{эф М} = E_M + R_M \int_F E_{эф N} d\varphi_{M, N} \quad (17-94'')$$

Рис 17-13 К методу итераций.

В методе итераций результат каждого последовательного приближения используется как исходное значение для последующего приближения. Число последовательных приближений произвольно и в пределе приводит к решению с заданной точностью. Примем для точки М (рис. 17-13) в качестве нулевого приближения $E_{эф}^{(0)} = 0$.

Аналогично для текущих точек N будем иметь $E_{эф N}^{(0)} = 0$. Тогда для получения решения интегрального уравнения (17-94'') необходимо вместо $E_{эф N}$ подставить его значение, равное нулю. В результате получим:

$$E_{эф М}^{(1)} = E_M \quad (17-109)$$

Такие же соотношения имеют место для всех текущих точек N.

Таким образом, в первом приближении учитывается лишь собственное излучение. Промежуточные многократные отражения не учитываются. Следовательно, это грубое приближение. Подставим в интегральное уравнение результат первого приближения и тогда будем иметь:

$$E_{эф М}^{(2)} = E_M + R_M \int_F E_N d\varphi_{M, N} = E_M + E_{отр М}^{(1)} \quad (17-110)$$

здесь, кроме собственного, учитывается еще однократное отражение.

Подставляя решение (17-110), полученное во втором приближении, в интегральное уравнение (17-94''), находим решение в третьем, а затем в четвертом и так далее приближениях. Решение в $(n+1)$ приближении с учетом n промежуточных отражений представляется рядом:

$$E_{\Phi M}^{(n+1)} = E_M + R_M \int_F E_N d\Phi_{M, N} + R_M \int_F \int_F R_{M1} E_{M1} d\Phi_{M, M1} d\Phi_{M1, N} + \dots \\ \dots + R_M \underbrace{\int_F \dots \int_F}_{n} R_{M1} R_{M2} \dots R_{M(n-1)} d\Phi_{M, M1} d\Phi_{M1, M2} \dots d\Phi_{M(n-1), N}. \quad (17-111)$$

В зависимости (17-111) первое слагаемое выражает собственное излучение, остальные — отраженное излучение с единицы поверхности в точке M . Следовательно, в краткой записи эту зависимость можно представить в виде

$$E_{\Phi M} = E_M + \sum_{i=1}^n E_{\text{отр } M}^{(i)}. \quad (17-112)$$

В общем случае число промежуточных отражений может быть бесконечно большим ($i \rightarrow \infty$).

Решению (17-111) придают вид:

$$E_{\Phi M} = E_M + R_M \int_F E_N d\Phi_{M, N}; \quad (17-113)$$

здесь $d\Phi_{M, N}$ носит название разрешающего углового коэффициента излучения, который выражается бесконечным рядом

$$d\Phi_{M, N} = d\varphi_{M, N} + \sum_{i=1}^n d\varphi_{(M, N) i}. \quad (17-114)$$

Величины $d\varphi_{(M, N) i}$ характеризуют элементарные угловые коэффициенты с учетом одного, двух, ..., n промежуточных отражений. Используя соотношение (17-111), можно выразить элементарные угловые коэффициенты с учетом одного, двух, ..., n промежуточных отражений зависимостями

$$d\varphi_{(M, N) 1} = \int_F R_{M1} d\varphi_{M, M1} d\varphi_{M1, N}; \\ d\varphi_{(M, N) 2} = \int_F \int_F R_{M1} R_{M2} d\varphi_{M, M1} d\varphi_{M1, M2} d\varphi_{M2, N}; \\ \dots \\ d\varphi_{(M, N) n} = \underbrace{\int_F \dots \int_F}_{n} R_{M1} R_{M2} \dots R_{M(n-1)} d\varphi_{M, M1} d\varphi_{M1, M2} \dots d\varphi_{M(n-1), N};$$

здесь $R_{M1}, \dots, R_{M(n-1)}$ — отражательные способности в точках $M_1, \dots, M_{(n-1)}$.

Таким образом, разрешающий угловой коэффициент излучения $d\Phi_{M, N}$ в отличие от $d\varphi_{M, N}$ учитывает многократные отражения и является оптико-геометрической характеристикой, так как кроме геометрических свойств системы учитывает ее отражательные свойства.

Разрешающий угловой коэффициент излучения может быть выражен через резольвенту излучения:

$$d\Phi_{M,N} = \Gamma_{M,N} dF_N, \quad (17-116)$$

а угловой коэффициент излучения через ядро:

$$d\varphi_{M,N} = K_{M,N} dF_N, \quad (17-117)$$

где $\Gamma_{M,N}$ и $K_{M,N}$ — резольвента и ядро интегрального уравнения.

Резольвента излучения и ядро имеют определенный физический смысл. Резольвента $\Gamma_{M,N}$ представляет собой отношение элементарного лучистого потока с площадки dF_N на единичную поверхность в точке M с учетом многократных отражений от границы системы к элементарному полусферическому лучистому потоку собственного излучения с площадки dF_N . Иначе говоря, резольвента $\Gamma_{M,N}$ есть отношение элементарного разрешающего углового коэффициента с площадки dF_N на площадку dF_M к величине площадки dF_N [см. (17-116)]. Аналогично этому и в соответствии с (17-117) ядро уравнения $K_{M,N}$ есть отношение элементарного углового коэффициента с dF_N на dF_M к величине площадки dF_N .

Теперь решение (17-113) представим в резольвентной форме:

$$E_{\text{эф } M} = E_M + R_M \int_F E_N \Gamma_{M,N} dF_N. \quad (17-118)$$

Сравнение исходного интегрального уравнения для эффективного излучения (17-94") с его решениями в формах (17-113) и (17-118) показывает, что в последнее под знак интеграла вошла функция E_N , характеризующая собственное излучение, вместо неизвестной функции $E_{\text{эф } N}$, выражающей эффективное излучение. Учет многократных отражений с этой функции переносится на разрешающий угловой коэффициент и резольвенту излучения. Следовательно, вся сложность задачи и ее решения сосредоточивается на определении резольвенты излучения.

Решения интегральных уравнений через резольвенты излучения могут быть получены и применительно к другим видам излучения. Так, решение уравнения (17-89") для плотности потока падающего излучения имеет вид:

$$E_{\text{пад } M} = \int_F E_N \Gamma_{M,N} dF_N. \quad (17-119)$$

Затем с помощью (17-119) и (16-19) получают решение для результирующего излучения:

$$E_{\text{рез } M} = A_M \int_F E_N \Gamma_{M,N} dF_N - E_M. \quad (17-120)$$

Резольвенту излучения можно представить в виде следующего функционального ряда, используя для этого зависимость (17-114):

$$\Gamma_{M,N} = K_{M,N} + \sum_{i=1}^n K_{(M,N) i}. \quad (17-121)$$

Зависимость (17-121) в свою очередь может быть приведена к интегральным уравнениям для резольвенты излучения [Л. 178]:

$$\Gamma_{M, N} = K_{M, N} + \int_F R_F \Gamma_{F, N} K_{M, F} dF_F; \quad (17-122)$$

$$\Gamma_{M, N} = K_{M, N} + \int_F R_F K_{F, N} \Gamma_{M, F} dF_F, \quad (17-123)$$

которые имеют равноценное применение.

Следовательно, решение интегральных уравнений (17-94"), (17-89"), (17-96") и др. для различных видов излучения сводится к решению одного из интегральных уравнений (17-122) или (17-123) для резольвенты излучения, что существенно упрощает задачу.

Рассмотренный метод был разработан Ю. А. Суриновым [Л. 178] и получил название резольвентного метода.

17-12. РЕЗОЛВЕНТНО-ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД

Этот метод является разновидностью зонального метода, приведенного выше (§ 17-8). Рассмотрим сущность метода для той же постановки задачи [Л. 1, 178]. Для местных значений плотности потока эффективного излучения имела место следующая система интегральных уравнений:

$$E_{эф M_i} = E_{M_i} + R_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{эф N_k} d\Phi_{M_i, N_k}. \quad (17-124)$$

Решение этой системы уравнений представляется через собственное излучение и резольвенту или разрешающий угловой коэффициент излучения в виде

$$E_{эф M_i} = E_{M_i} + R_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{N_k} d\Phi_{M_i, N_k}. \quad (17-125)$$

Местное значение разрешающего углового коэффициента излучения точки M_i от зоны F_k ($k=1, \dots, n$) выражается интегралом:

$$\Phi_{M_i, F_k} = \int_{F_k} d\Phi_{M_i, N_k} = \int_{F_k} \Gamma_{M_i, N_k} dF_{N_k}. \quad (17-126)$$

Тогда система интегральных уравнений (17-125) переходит в конечную систему алгебраических уравнений:

$$E_{эф M_i} = E_{M_i} + R_i \sum_{k=1}^n E_k \Phi_{M_i, F_k}; \quad (17-127)$$

здесь $E_k = E_{N_k}$. Найдем среднее значение плотности эффективного излучения по зонам. Для этого проинтегрируем (17-127) по поверхности зон

F_i , а затем результат разделим на величину этой поверхности:

$$E_{эф i} = E_i + R_i \sum_{k=1}^n E_k \Phi_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (17-128)$$

$$E_{эф i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{эф M_i} dF_{M_i}; \quad \Phi_{i,k} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \Phi_{M_i, F_k} dF_{M_i}. \quad (17-129)$$

Таким образом, для вычисления $E_{эф i}$ необходимо предварительно вычислить все средние разрешающие угловые коэффициенты излучения $\Phi_{i,k}$.

Найдем систему алгебраических уравнений для их определения. Для этого используем интегральное уравнение (17-123) для резольвенты излучения. Применительно к точкам M , N и P на зонах соответственно i , k и j (рис. 17-12) оно переходит в конечную систему уравнений для резольвенты:

$$\Gamma_{M_i, N_k} = K_{M_i, N_k} + \sum_{j=1}^n R_j \int_{F_j} \Gamma_{M_i, P_j} K_{P_j, N_k} dF_{P_j}. \quad (17-130)$$

Проинтегрируем (17-130) по величине поверхности F_k зоны k . Тогда с учетом соотношения (17-126) получим:

$$\Phi_{M_i, F_k} = \varphi_{M_i, F_k} + \sum_{j=1}^n R_j \int_{F_j} \Gamma_{M_i, P_j} \varphi_{P_j, F_k} dF_{P_j}; \quad (17-131)$$

здесь местный разрешающий угловой коэффициент излучения

$$\Phi_{M_i, F_k} = \int_{F_k} \Gamma_{M_i, N_k} dF_{N_k}, \quad (17-132)$$

местные угловые коэффициенты излучения точек M и P от поверхности зоны k соответственно равны:

$$\varphi_{M_i, F_k} = \int_{F_k} K_{M_i, N_k} dF_{N_k}; \quad \varphi_{P_j, F_k} = \int_{F_k} K_{P_j, N_k} dF_{N_k}. \quad (17-133)$$

Далее положим, что местные и средние угловые коэффициенты равны (условие вырождения интегральных уравнений в алгебраические, § 17-9):

$$\varphi_{P_j, F_k} = \varphi_{j,k} = \frac{1}{F_j} \int_{F_j} \varphi_{P_j, F_k} dF_{P_j}. \quad (17-134)$$

Тогда зависимость (17-131) с учетом (17-134) принимает вид:

$$\Phi_{M_i, F_k} = \varphi_{M_i, F_k} + \sum_{j=1}^n R_j \Phi_{M_i, F_j} \varphi_{j,k}, \quad (17-135)$$

так как

$$\int_{F_j} \Gamma_{M_i, P_j} dF_{P_j} = \Phi_{M_i, F_j}. \quad (17-136)$$

Найдем средние интегральные значения разрешающих угловых коэффициентов:

$$\Phi_{i,k} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \Phi_{M_i, F_k} dF_{M_i} = \varphi_{i,k} + \sum_{j=1}^n R_j \varphi_{j,k} \Phi_{i,j}. \quad (17-137)$$

Если исходить не из (17-123), а из зависимости (17-122) для резольвенты излучения, то вместо (17-137) получим:

$$\Phi_{i,k} = \varphi_{i,k} + \sum_{j=1}^n R_j \Phi_{j,k} \varphi_{i,j}. \quad (17-138)$$

Таким образом, получены системы алгебраических уравнений (17-137) и (17-138), которые позволяют вычислить средние разрешающие угловые коэффициенты излучения, если известны отражательные способности зон и если предварительно найдены средние геометрические коэффициенты излучения. Как и последние, разрешающие угловые коэффициенты излучения удовлетворяют соотношениям замыкаемости, взаимности и др. (§ 17-6).

Найдя $\Phi_{i,k}$, определяют затем плотность потока $E_{\Phi i}$ из (17-128) применительно к каждой зоне $i = 1, \dots, n$. При необходимости вычисления местных значений плотностей потоков применяются системы уравнений (17-127) и (17-131) для каких-либо расчетных точек на поверхности зон. Остальные виды потоков излучения определяются по зависимости (A) § 17-7, вытекающим из классификации излучения.

Аналогичный метод расчета имеет место, если исходить из какого-либо другого вида излучения, например падающего.

Система интегральных уравнений для плотности потока падающего излучения выражается зависимостью

$$E_{\text{пад } M_i} = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\Phi N_k} d\varphi_{M_i, N_k}.$$

Решения этой системы описываются алгебраическими уравнениями:

$$E_{\text{пад } M_i} = \sum_{k=1}^n E_k \Phi_{M_i, F_k}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (17-139)$$

$$E_{\text{пад } i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад } M_i} dF_{M_i} = \sum_{k=1}^n E_k \Phi_{i,k}. \quad (17-140)$$

Остальные виды лучистых потоков находятся из системы (B) (§ 17-7).

Рассмотрим систему алгебраических уравнений для плотности потока результирующего излучения:

$$E_{\text{рез } i} = A_i \sum_{k=1}^n A_k \Phi_{i,k} (E_{0k} - E_{oi}); \quad (17-141)$$

здесь, как и ранее, E_{0k} и E_{oi} — излучение абсолютно черного тела при температурах зон k и i . Зная поверхность зон, определяют полные лучистые потоки.

Рассмотрим для примера плоскопараллельную систему серых тел (рис. 17-1). Для определения разрешающих угловых коэффициентов используем систему (17-138). Из нее получим:

$$\Phi_{1k} = \varphi_{1k} + R_2 \Phi_{2k} \varphi_{1,2}; \quad \Phi_{2k} = \varphi_{2k} + R_1 \Phi_{1k} \varphi_{2,1}.$$

Совместное решение этих уравнений позволяет найти местные раз-
решающие угловые коэффициенты:

$$\Phi_{1k} = \frac{\varphi_{1k} + R_2 \varphi_{2,1} \varphi_{2k}}{1 - R_1 R_2 \varphi_{1,1} \varphi_{2,1}}; \quad \Phi_{2k} = \frac{\varphi_{2k} + R_1 \varphi_{2,1} \varphi_{1k}}{1 - R_1 R_2 \varphi_{1,1} \varphi_{2,1}}. \quad (17-142)$$

Для рассматриваемого случая $\varphi_{1,1} = \varphi_{2,2} = 0$; $\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$.
Следовательно,

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = \frac{1}{1 - R_1 R_2}; \quad R = 1 - A.$$

Плотность потока результирующего излучения согласно (17-141)
составит:

$$q_{рез,1} = A_1 A_2 (E_{0,1} - E_{0,2}) \Phi_{1,2} = \frac{A_1 A_2}{1 - R_1 R_2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] c_0.$$

Этот результат совпадает с зависимостью (17-9).

17-13. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В рассмотренных выше задачах лучистого теплообмена исходили
из идеально диффузного отражения, при котором яркость по всем на-
правлениям была одинаковой независимо от направления падающего
излучения. Кроме идеально диффузного отражения различают диффуз-
ное без явно выраженной направленности и направленное (зеркальное) отражение.

При зеркальном отражении энергия от-
ражения от поверхности тела по всем направ-
лениям равна нулю, кроме одного, соответ-
ствующего зеркальному углу, равному углу па-
дения (рис. 17-14).

Яркость отраженного элементарного лу-
ча зависит от яркости падающего элементар-
ного луча и отражательных свойств поверхно-
сти. Поверхность тела может быть ближе
к диффузной или зеркальной в зависимости
от ее шероховатости.

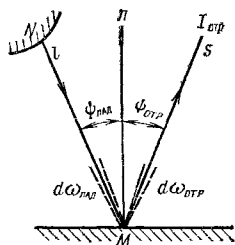


Рис. 17-14. Отражение зер-
кальной поверхности.

$\psi_{пад}$ и $\psi_{отр}$ — углы падения и
отражения

Шероховатость проявляется различно
в зависимости от длины волны. Для некото-
рых длин волн поверхность является шерохо-
ватой, а для других гладкой. С возрастанием
длины волны поверхность все больше теряет свою шероховатость. По-
верхность теряет свою шероховатость и с увеличением угла падающих
лучей. Поэтому в качестве характеристики состояния поверхности при-
меняется оптическая шероховатость, определяемая величиной

$$\delta_{опт} = f(\delta_{ш}, \lambda, \cos \psi_{пад}).$$

При высоте неровностей $\delta_{ш}$, соответствующих условно

$$\delta_{ш} \cos \psi_{пад} \ll \lambda,$$

поверхность является оптически гладкой и имеет зеркальный характер
отражения. В противном случае поверхность является оптически шеро-
ховатой и имеет диффузное отражение. Частным случаем диффузного
отражения является идеально диффузное (изотропное) излучение, ха-
рактеризующееся одинаковой яркостью по всем направлениям.

Пространственное распределение яркости отраженного излучения определяется безразмерными величинами, к которым относятся индикатриса отражения (рассеяния) и коэффициент яркости.

Индикатрисой отражения называется отношение яркости исследуемой поверхности в определенном направлении к яркости поверхности с идеально диффузным отражением (средней яркости по всем направлениям):

$$B_M(s, l) = \frac{dI_{\text{отр}}}{\frac{1}{\pi} dE_{\text{отр}}}; \quad E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} R_M(s, l). \quad (17-143)$$

Коэффициентом яркости называется отношение яркости исследуемой поверхности в определенном направлении к яркости поверхности с идеально диффузным отражением, имеющей отражательную способность, равную единице:

$$r_M(s, l) = \frac{dI_{\text{отр}}}{\frac{1}{\pi} dE_{\text{пад}}}; \quad E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} R_M(s, l) = E_{\text{пад}}. \quad (17-144)$$

Эти определения относятся к отдельным точкам на поверхности и к отдельным направлениям падения (l) и отражения (s) лучистой энергии. Они не учитывают эффект рассеяния по длинам волн, так как он мал по сравнению с эффектами рассеяния по направлениям. Здесь $R_M(s, l)$ — направленная отражательная способность.

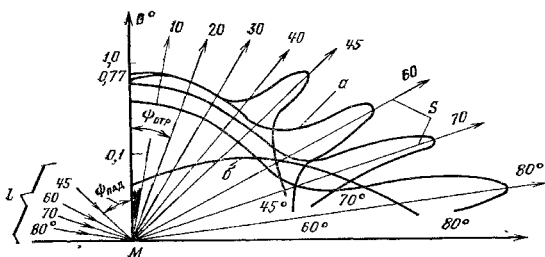


Рис. 17-15. Зависимость коэффициента яркости лакокрасочных покрытий от углов падения и отражения излучения.

Кривая a — белая блестящая поверхность; кривая $б$ — черная матовая поверхность.

Коэффициент яркости (индикатриса отражения) дает наглядное представление о характере отражения. На рис. 17-15 приведены коэффициенты яркости для лакокрасочных покрытий [Л. 43]. Из него следует, что блестящие поверхности характеризуются узким и вытянутым пиком максимальной зеркальной составляющей (кривые a); у матовых поверхностей пик отсутствует (кривая $б$).

Точное решение задач лучистого теплообмена с произвольным законом отражения основывается на интегральных уравнениях излучения. Однако интегральные уравнения излучения в § 17-10 для этого случая несправедливы, так как в них принималось, что отражательная способность не зависит от направления.

Применительно к поверхностной плотности потока эффективного излучения в точке M имеет место следующее интегральное уравнение при произвольных характеристиках отражения поверхности (рис. 17-14) [Л. 153]:

$$E_{\text{эф } M} = E_M + \int_{2\pi} R_M(l) I_{\text{эф } N}(l) \cos \psi_{\text{пад}} d\omega_{\text{пад}}; \quad (17-145)$$

здесь отражательная способность в точке M поверхности тела при фиксированном направлении l падающего излучения

$$R_M(l) = \frac{E_{\text{отр } M}(s)}{E_{\text{пад } M}(l)} = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} r_M(l, s) \cos \psi_{\text{отр}} d\omega_{\text{отр}}.$$

Для идеально диффузного отражения интегральное уравнение (17-145) переходит в (17-94) § 17-8 с учетом соотношений (16-56) и (17-58).

Обобщенный вид принимают интегральные уравнения и для других видов излучения.

17-14. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Аналитический метод

Угловой коэффициент излучения является основной расчетной величиной. Он может быть найден аналитическим, графоаналитическим методами и методом поточной алгебры. К экспериментальным методам относятся методы светового моделирования и методы аналогий [Л. 74, 134, 163, 177, 205].

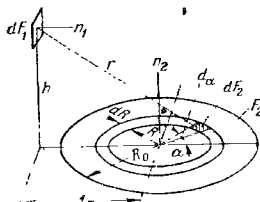


Рис. 17-16. Система, состоящая из плоскости (индекс 1) и круга (индекс 2).

Аналитический метод основан на непосредственном интегрировании математического выражения для элементарного углового коэффициента излучения (17-58). Рассмотрим в качестве примера излучающую систему, приведенную на рис. 17-16, если тела имеют диффузное отражение. Поскольку угловой коэффициент излучения определяется величиной углов с нормальными, можно изменить масштаб конфигурации системы таким образом, чтобы одно из соответствующих расстояний имело величину, равную единице. Найдем значения величин, входящих в зависимость (17-58):

$$d\varphi_{2,1} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

Величины, входящие в это выражение, равны:

$$r^2 = h^2 + 1 + R^2 + 2R \cos \alpha; \quad \cos \psi_1 = \frac{1 + R \cos \alpha}{r};$$

$$\cos \psi_2 = \frac{h}{r}; \quad dF_2 = R dR d\alpha.$$

Тогда

$$d\varphi_{2,1} = \frac{h}{\pi} \frac{1 + R \cos \alpha}{(h^2 + 1 + R^2 + 2R \cos \alpha)^{3/2}} R dR d\alpha. \quad (17-146)$$

Местный угловой коэффициент излучения элементарной площадки dF_1 на поверхность круга F_2 находится интегрированием зависимости (17-146):

$$\varphi_{2,1} = \frac{h}{\pi} \int_0^{R_0} R dR \int_0^\pi \frac{1 + R \cos \alpha}{(h^2 + 1 + R^2 + 2R \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} d\alpha.$$

После интегрирования получим:

$$\varphi_{2,1} = \frac{h}{2} \left[\frac{h^2 + R_0^2 + 1}{V(h^2 + R_0^2 + 1)^2 - 4R_0^2} - 1 \right].$$

Согласно этой зависимости местный угловой коэффициент излучения можно найти, если известны радиус круга R_0 и расстояние h до элементарной площадки dF_1 .

Таким образом, аналитический метод связан с операциями по непосредственному интегрированию зависимости (17-58), которая является математическим описанием углового коэффициента излучения.

Б. Графоаналитический метод, или метод проекций

В графоаналитическом методе определения углового коэффициента операции интегрирования заменяются графическим проектированием. Рассмотрим сущность метода. Для этого выделим элементарную площадку dF_1 на поверхности излучающего тела I (рис. 17-17). Из центра

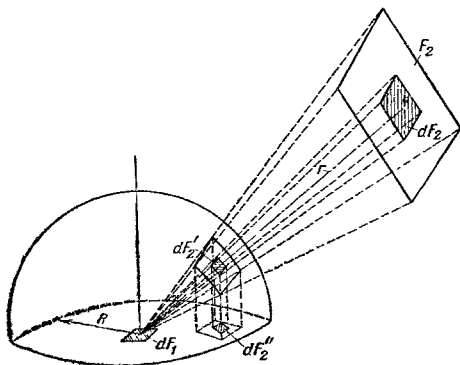


Рис. 17-17 К графоаналитическому методу определения угловых коэффициентов.

этой площадки проведем ограничивающий контур для лучей, падающих с тела I на тело 2 . Затем опишем из центра площадки dF_1 полусферу радиусом R . Эта полусфера оставит в плоскости площадки dF_1 след в виде окружности того же радиуса. Кроме того, на полусфере контур лучей, падающих с площадки dF_1 на поверхность второго тела, вырежет соответствующую площадку dF'_2 , проекция которой выразится площадкой dF''_2 . Тогда местный угловой коэффициент излучения $\varphi_{2,1}$ площадки dF_1

на F_2 будет равен частному от деления площадки dF''_2 на площадь круга радиусом R . Для доказательства этого положения представим элементарный угловой коэффициент излучения вместо (17-58) зависимость через телесный угол

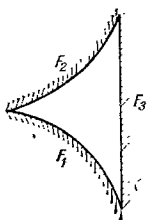
$$d\varphi_{2,1} = \frac{d\omega_1}{\pi} \cos \psi_1. \quad (17-147)$$

Величина произведения $d\omega_1 \cos \psi_1$ является проекцией элементарного угла $d\omega_1$ на плоскость, в которой находится площадка dF_1 . Местный угловой коэффициент излучения будет равен интегралу от (17-147), который представляет собой сумму проекций всех элементарных телесных углов, соответствующих всей поверхности F_2 на плоскость, в которой находится излучающая площадка dF_1 , что и требовалось доказать.

На основе графоаналитического метода разработан ряд механических и оптических интеграторов [Л. 205].

В. Метод поточной алгебры

Рис. 17-18. Схема замкнутой системы из трех выпуклых (плоских) тел с поверхностями F_1 , F_2 и F_3 .



В методе поточной алгебры интегрирование заменяется простыми алгебраическими операциями. В основе метода лежат геометрические свойства лучистых потоков (§ 17-6).

Рассмотрим замкнутую излучающую систему тел, образующих сечение, представленное контурами (рис. 17-18). Принимается, что продольные размеры тел велики по сравнению с поперечными. Размеры всех тел заданы. Самооблучение отсутствует ($\bar{\varphi}_{1,1} = \bar{\varphi}_{2,2} = \bar{\varphi}_{3,3} = 0$). Требуется найти средние значения взаимных поверхностей и коэффициентов излучения.

Используем свойство замыкаемости лучистых потоков (17-79). Тогда для тел с поверхностями F_1 , F_2 и F_3 имеют место зависимости

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} &= F_1; \\ \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{2,3} &= F_2; \\ \bar{H}_{3,1} + \bar{H}_{3,2} &= F_3. \end{aligned} \right\} \quad (17-148)$$

Свойство взаимности (17-76) позволяет уменьшить число неизвестных в последних соотношениях с шести до трех, так как

$$\bar{H}_{1,2} = \bar{H}_{2,1}; \quad \bar{H}_{2,3} = \bar{H}_{3,2}; \quad \bar{H}_{3,1} = \bar{H}_{1,3}. \quad (17-149)$$

Тогда после сложения правых и левых частей уравнений (17-148) получим:

$$\bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} + \bar{H}_{2,3} = \frac{1}{2} (F_1 + F_2 + F_3). \quad (17-150)$$

Искомые величины взаимных поверхностей излучения можно определить, если из последней зависимости вычесть поочередно соотношения (17-148):

$$\bar{H}_{2,3} = \frac{F_2 + F_3 - F_1}{2}; \quad \bar{H}_{1,3} = \frac{F_1 + F_3 - F_2}{2}; \quad \bar{H}_{1,2} = \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2}. \quad (17-151)$$

Используя зависимости (17-71) и (17-149), получаем выражения для соответствующих угловых коэффициентов излучения:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{2,3} &= \frac{F_2 + F_3 - F_1}{2F_2}; & \bar{\varphi}_{1,3} &= \frac{F_1 + F_3 - F_2}{2F_1}; & \bar{\varphi}_{1,2} &= \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2F_1}; \\ \bar{\varphi}_{3,2} &= \frac{F_3 + F_2 - F_1}{2F_3}; & \bar{\varphi}_{3,1} &= \frac{F_3 + F_1 - F_2}{2F_3}; & \bar{\varphi}_{2,1} &= \frac{F_2 + F_1 - F_3}{2F_2}.\end{aligned}\quad (17-152)$$

Применительно к сложным геометрическим системам различные криволинейные контуры поперечных сечений заменяются более простыми контурами минимальной длины [Л. 113, 178] (натянутыми линиями), показанными штриховыми линиями на рис. 17-19. Это находится в полном соответствии со свойствами совмещаемости лучистых потоков (§ 17-16).

Найдем средние значения взаимных поверхностей и угловых коэффициентов излучения для тел с поверхностями F_1 и F_2 . Тело BB' «видит» тело $BCDS$, тело SS' и тело $NMLB'$. В теплообмене с телом $S'PN$

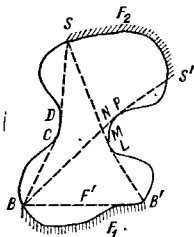


Рис. 17-19. Применение метода поточной алгебры к замкнутой системе сложных тел.

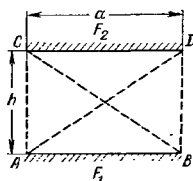


Рис. 17-20. Система из двух плоскопараллельных полос.

оно не участвует. Тогда согласно свойству замыкаемости (17-79) можно записать:

$$\bar{H}_{1, BCDS} + \bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1, B'LMN} = F'_1,$$

откуда получим искомое значение взаимной поверхности:

$$\bar{H}_{1,2} = F'_1 - \bar{H}_{1, BCDS} - \bar{H}_{1, B'LMN}, \quad (17-153)$$

где F'_1 — поверхность излучающего тела 1, определяемая по контуру минимальной длины излучающей системы.

Взаимная поверхность излучения $\bar{H}_{1, BCDS}$ находится из замкнутой системы, состоящей из контуров BB' , $BCDS$ и $SMLB'$:

$$\bar{H}_{1, BCDS} = \frac{F'_1 + BCDS - B'LMN}{2}.$$

Замкнутая система, состоящая из BB' , BN и $B'LMN$, позволяет найти

$$\bar{H}_{1, B'LMN} = \frac{F'_1 + B'LMN - BN}{2}.$$

Подставив два последних выражения в (17-153), получим:

$$\bar{H}_{1,2} = F'_1 - \frac{F'_1 + BCDS - B'LMS}{2} - \frac{F'_1 - B'LMN + BN}{2}$$

или

$$\bar{H}_{1,2} = \frac{B'LMS + BNPS'}{2} - \frac{BCDS + B'LMNPS'}{2}, \quad (17-154)$$

где в обе полусуммы введен контур PS' .

Согласно (17-154) средняя взаимная поверхность излучения $\bar{H}_{1,2}$ равна полусумме внутренних пересекающихся нитей, натянутых между концами контуров, представляющих две расчетные поверхности, за вычетом полусуммы внешних, не пересекающихся нитей, таким же образом натянутых между этими поверхностями.

Средний угловой коэффициент излучения находится путем деления зависимости (17-154) на величину поверхности F'_1 .

Используем изложенный метод определения углового коэффициента применительно к системе плоскопараллельных пластин одинаковой ширины с относительно большими продольными размерами. Заданы (рис. 17-20) ширина a и расстояние между пластинами h . Требуется определить $H_{1,2}$ и $\bar{\varphi}_{1,2}$. Введем условные поверхности с контурами AC и BD . Тогда получим замкнутую систему, состоящую из четырех тел. Свойство замкнутости выразится зависимостью

$$\bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1AC} + \bar{\varphi}_{1BD} = 1; \quad \bar{\varphi}_{1,1} = 0,$$

откуда искомое значение

$$\bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \bar{\varphi}_{1AC} - \bar{\varphi}_{1BD}. \quad (17-155)$$

Согласно зависимости (17-152)

$$\bar{\varphi}_{1AC} = \frac{F_1 + AC - BC}{2F_1}; \quad \bar{\varphi}_{1BD} = \frac{F_1 + BD - AD}{2F_1};$$

в этих соотношениях $AB = a$; $AC = BD = h$; $AD = BC = \sqrt{a^2 + h^2}$.

После подстановки этих величин в (17-155) найдем искомые значения среднего углового коэффициента и взаимной поверхности излучения:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{2\sqrt{a^2 + h^2}}{2a} - \frac{2h}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a}; \quad \bar{H}_{1,2} = \sqrt{a^2 + h^2} - h. \quad (17-156)$$

Используя принцип уравнивания (17-154), можно получить сразу (17-156) для величины взаимной поверхности:

$$\bar{H}_{1,2} = \frac{AD + BC}{2} - \frac{AC + BD}{2} = \sqrt{a^2 + h^2} - h.$$

Рассмотрим излучающую систему, состоящую из плоскости AB и однородного трубного пучка неограниченной протяженности. Это условие позволяет перенести излучающую поверхность F_1 на плоскость, касательную к поверхности трубного пучка (рис. 17-21). В рассматриваемой системе имеются два замкнутых контура $AC'CBB'A$ и $ABB'DC'A$. Тогда в соответствии с зависимостями (17-152) средний угловой коэффициент излучения плоскости F_1 с поверхностью труб F_2 можно представить следующим образом:

$$\bar{\varphi}_{2,1} = 2\bar{\varphi}_{AB, BB'C} = \frac{AB + BB'C - ACC'}{AB}; \quad AB = S; \quad BB'C = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2};$$

из прямоугольного треугольника O_1MC'

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}; \quad AC'C = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} + \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

После использования этих величин получим окончательно:

$$\bar{\varphi}_{2,1} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s}\right)^2} + \frac{d}{s} \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}. \quad (17-157)$$

Угловой коэффициент уменьшается с увеличением шага между трубами. Аналогично можно определить угловой коэффициент для 2-го ряда трубного пучка, принимая приближенно, что лучистый поток, пройдя через трубы первого ряда, имеет равномерное распределение на плоскости, касательной к трубам второго ряда, и составит долю $(1 - \bar{\varphi}_{2,1})$ от потока, падающего на трубы первого ряда. Тогда общий коэффициент излучения плоскости с двумя рядами труб пучка составит величину:

$$\bar{\varphi}_{(2,1)} \text{ общ} = \bar{\varphi}_{2,1} + (1 - \bar{\varphi}_{2,1}) \bar{\varphi}_{2,1} = \bar{\varphi}_{2,1} (2 - \bar{\varphi}_{2,1}),$$

если отношение s/d в обоих рядах труб одинаково. В [Л. 112] разработаны специальные номограммы для определения угловых коэффициентов между трубами в пучках.

Г. Метод светового моделирования

В опытном исследовании углового коэффициента излучения лучистые потоки заменяются световыми, так как оба случая относятся к электромагнитному излучению. Однако световое моделирование обладает рядом преимуществ. В нем устраняются трудности, связанные с измерением лучистых потоков, особенно в условиях высоких температур; устраняются побочные явления, к которым относятся перенос тепла конвекцией и теплопроводностью; опыты могут проводиться при комнатных температурах.

При построении световой модели необходимо соблюдать общие правила моделирования. К ним относятся геометрическое подобие модели и образца и тождественность оптических свойств тел, входящих в исходную излучающую систему. Последние характеризуются определенной величиной поглощательной и отражательной способностями поверхностей, а также степенями их черноты.

Для определения угловых коэффициентов используются расчетные зависимости (17-60); (17-65); (17-70), в которых вместо лучистых потоков рассматриваются соответствующие измеряемые световые потоки [Л. 139].

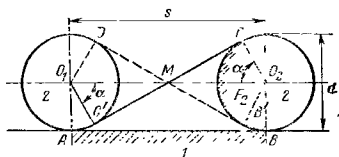


Рис. 17-21. Система излучающей плоскости 1 и трубного пучка 2.

Д. Метод электрического моделирования

Метод электрического моделирования был использован выше применительно к процессам теплопроводности (§ 3-12). Существует также аналогия между переносом энергии излучением и переносом заряда в электрической цепи. Сходство математических описаний для указанных процессов позволяет получить практическое осуществление аналогии для различных задач лучистого теплообмена.

Результирующий лучистый поток представляется зависимостью

$$dQ_{1,2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] d\bar{H}_{1,2} = \frac{\Delta T}{R_r}, \quad (17-158)$$

на основании которой тепловое сопротивление можно определить так:

$$R_r = \frac{\Delta T}{\Delta \bar{H}_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] c_0}; \quad \Delta T = T_1 - T_2.$$

С другой стороны,

$$I = \frac{\Delta u}{R_9}. \quad (17-159)$$

Формальное сходство уравнений (17-158) и (17-159) позволяет измерить потоки излучения и провести опытное исследование угловых коэффициентов излучения. Принцип построения электрических моделей такой же, как и для процессов теплопроводности [Л. 1, 64, 163].

Глава восемнадцатая

ТЕПЛООБМЕН В ПОГЛОЩАЮЩИХ И ИЗЛУЧАЮЩИХ СРЕДАХ

18-1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

А. Уравнения переноса энергии в поглощающей среде

Ранее рассматривались вещества, которые характеризовались отсутствием пропускания лучистой энергии ($D=0$). Они только поглощали и отражали энергию падающего от внешнего источника излучения и являлись, следовательно, непрозрачными средами.

Наряду с такими веществами существуют полупрозрачные среды, обладающие конечным пропусканием лучистой энергии (полупроводники, керамика, стекло, газы, пары и др.). При прохождении лучистой энергии через такую среду энергия в общем случае поглощается и рассеивается. Кроме того, среда может иметь собственное излучение. Вследствие этого интенсивность излучения вдоль какого-либо направления (I) будет изменяться. Уравнение, определяющее изменение интенсивности луча за счет поглощения, излучения и рассеивания среды, называется уравнением переноса лучистой энергии.

Рассмотрим первоначально случай, когда среда является только поглощающей и в ней происходит одномерный перенос энергии излучения внешнего источника; собственное излучение пренебрежимо мало по сравнению с излучением этого источника. Интенсивность излучения внешнего источника по мере прохождения через среду от границы до данной точки будет постепенно уменьшаться за счет поглощения.

На граничной поверхности интенсивность излучения внешнего источника ($I_{\lambda, l=0}$) сплошного спектра задана. Требуется определить закон изменения интенсивности излучения по толщине слоя поглощающей среды. Принимается, что интенсивность излучения по отдельным длинам волн при прохождении в направлении l через слой поглощающей среды толщиной dl уменьшается пропорционально этой интенсивности и бесконечно малому пути луча dl :

$$dI_{\lambda, l} = -\alpha_{\lambda} I_{\lambda, l} dl; \quad (18-1)$$

здесь α_{λ} — спектральный коэффициент поглощения среды. Согласно (18-1) он характеризует относительное изменение интенсивности излучения на единицу длины луча.

Выражение (18-1) является основным законом переноса энергии в поглощающей среде. Его можно представить в виде

$$\frac{dI_{\lambda, l}}{I_{\lambda, l}} = -\alpha_{\lambda} dl. \quad (18-2)$$

Полагая, что при $l=0$ $I_{\lambda, l} = I_{\lambda, l=0}$ (заданная величина), после интегрирования последнего уравнения получаем:

$$I_{\lambda, l} = I_{\lambda, l=0} e^{-\int_0^l \alpha_{\lambda} dl} \quad (18-3)$$

Зависимость (18-3) позволяет найти спектральную яркость излучения в каждой точке направления l для отдельных длин волн.

Интегральная яркость излучения для отдельных полос излучения среды или для всего спектра определяется интегрированием в пределах соответствующих длин волн.

Уравнение переноса лучистой энергии в поглощающей среде позволяет найти ее оптические свойства. Поглощательная способность среды для данной длины волны определяется по отношению лучистой энергии, поглощенной в слое толщиной l , к энергии, падающей на границу этого слоя:

$$A_{\lambda} = \frac{I_{\lambda, l=0} - I_{\lambda, l}}{I_{\lambda, l=0}} = 1 - e^{-\int_0^l \alpha_{\lambda} dl}. \quad (18-4)$$

Введем оптическую толщину среды

$$L_{\lambda} = \int_0^l \alpha_{\lambda} dl.$$

Если спектральный коэффициент поглощения является постоянной величиной по длине луча, то оптическая толщина среды будет равна:

$$L_{\lambda} = \alpha_{\lambda} l; \quad (18-5)$$

здесь l — полная толщина слоя среды.

Тогда зависимость (18-3), выражающая ослабление интенсивности излучения в поглощающей среде, принимает вид:

$$I_{\lambda, l} = I_{\lambda, l=0} e^{-L_{\lambda}}. \quad (18-6)$$

Уравнение (18-6) носит название закона Бугера.

Поглощательная способность среды в этом случае представится вместо (18-4) соотношением

$$A_{\lambda} = 1 - e^{-L_{\lambda}}. \quad (18-7)$$

В условиях термодинамического равновесия на основании закона Кирхгофа спектральная поглощательная способность вещества равна спектральной степени черноты и, следовательно:

$$\epsilon_{\lambda} = A_{\lambda} = 1 - e^{-L_{\lambda}}. \quad (18-8)$$

Таким образом, для определения поглощательной способности и степени черноты среды необходимо располагать данными по спектрам поглощения и излучения, а также по коэффициентам поглощения для отдельных длин волн. Коэффициент поглощения среды в общем случае зависит от физической природы среды, длины волны, температуры и давления (для газов). Вследствие этого коэффициенты поглощения оказываются различными не только для отдельных полос спектра, но и существенно изменяются в пределах одной и той же полосы. В. А. Фабрикант применил закон Бутера к средам, усиливающим излучение. Эти среды применяются в лазерах.

Б. Уравнение переноса энергии в поглощающей и излучающей среде

При прохождении тепловых лучей в поглощающей среде поглощенная энергия переходит в теплоту и снова излучается средой. Выше принималось, что среда, поглощая лучистую энергию, заметно ее не переизлучает. В более общем случае интенсивность среды вдоль луча будет уменьшаться вследствие поглощения, но и увеличиваться за счет собственного излучения. Тогда вместо зависимости (18-1) уравнение переноса принимает вид [Л. 206]:

$$dI_{\lambda} = (I_0 - I_{\lambda}) \alpha_{\lambda} dl. \quad (18-9)$$

Эту зависимость можно получить из теплового баланса. Лучистая энергия, поглощенная средой в слое толщиной dl , как и ранее, определяется величиной $I_{\lambda} \alpha_{\lambda} dl$.

Интенсивность собственного излучения можно выразить через интенсивность абсолютно черного тела и коэффициент поглощения α_{λ} величиной $I_0 \alpha_{\lambda} dl$. Тогда изменение интенсивности излучения за счет поглощения и излучения среды выразится разностью между поглощенной энергией и энергией излучения в слое толщиной dl (для равновесной системы), что приводит к дифференциальному уравнению (18-9). В нем, как и ранее, I_{λ} — спектральная интенсивность излучения в направлении l ; I_0 — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре среды. Индекс « λ » здесь опущен ради упрощения записи. Зависимости (18-9) можно придать другой вид, учитывая, что согласно закону Кирхгофа (16-53) для поглощающей среды $I_0 = \eta/4\pi \alpha_{\lambda}$:

$$dI_{\lambda}/dl = -\alpha_{\lambda} I_{\lambda} + \eta/4\pi. \quad (18-10)$$

Интегрирование уравнения (18-9) приводит к зависимости

$$I_{\lambda} = I_{\lambda=0} \exp \left(- \int_0^l \alpha_{\lambda} dl \right) + \int_0^l \alpha_{\lambda} I_0 \exp \left(- \int_{l'}^l \alpha_{\lambda} dl'' \right) dl'. \quad (18-11)$$

Первое слагаемое определяет долю интенсивности падающего излучения $I_{l=0}$, проходящего путь от 0 до l ; второй член — интенсивность собственного излучения, возникающего на всем протяжении элементов среды длиной dl' и переданного от l' до l , где $0 \leq l' \leq l$, а dl' лежит на отрезке $l-l'$.

В целом зависимость (18-11) выражает интенсивность излучения как функцию координат точки, направления l и длины волны в поглощающей и излучающей среде.

В частном случае постоянных величин температуры, оптических свойств среды и давления (для газов) уравнение (18-11) принимает вид:

$$I_l = I_{l=0} e^{-L} + I_0 (1 - e^{-L}). \quad (18-12)$$

Учитывая (18-7), получаем:

$$I_l = I_{l=0} (1 - A_\lambda) + I_0 A_\lambda. \quad (18-13)$$

Интенсивность излучения, поступающего в среду на границе $l=0$, определяется свойствами поверхности (стенки), ограничивающей поглощающую среду. Для диффузной стенки (при $D=0$)

$$I_{l=0} = \epsilon_{\lambda c} \frac{E_{oc}}{\pi} + R_{\lambda c} \frac{E_{пад}}{\pi}; \quad (18-14)$$

здесь $\epsilon_{\lambda c}$ и $R_{\lambda c}$ — спектральные степень черноты и отражательная способность стенки; $I_{oc} = E_{oc}/\pi$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре стенки; $I_{пад} = E_{пад}/\pi$ — то же для потока излучения, падающего на стенку.

Для серой стенки $\epsilon_{\lambda c}$ и $R_{\lambda c}$ не зависят от длины волны.

Подставляя (18-14) в зависимость (18-13) и проведя интегрирование по спектру, получаем:

$$I_l = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [(\epsilon_{\lambda c} E_{oc} + R_{\lambda c} E_{пад}) (1 - A_\lambda) + A_\lambda E_0 A_\lambda] d\lambda \quad (18-15)$$

или

$$I_l = \frac{1}{\pi} \left[\epsilon_c \left(\sigma T_c^4 - \int_0^\infty E_{oc} a_\lambda d\lambda \right) + R_c \left(E_{пад} - \int_0^\infty E_{пад} a_\lambda d\lambda \right) + \int_0^\infty E_{0\lambda} a_\lambda d\lambda \right], \quad (18-16)$$

где $E_{0\lambda}$, E_0 — плотности потоков спектрального и интегрального излучения абсолютно черного тела при температуре среды T .

Последнее уравнение позволяет найти средние интегральные значения для поглощательной способности и степени черноты среды:

$$A = \frac{1}{\sigma T_c^4} \int_0^\infty E_{oc} a_\lambda d\lambda; \quad \epsilon = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty E_{0\lambda} a_\lambda d\lambda. \quad (18-17)$$

В интеграле $\int_0^\infty E_{пад} a_\lambda d\lambda$ величина $E_{пад}$ состоит из энергии, излученной средой или другими стенками и прошедшей через среду.

Знание интегральных свойств среды достаточно для теоретического решения задачи теплообмена в объеме среды, находящейся в серой оболочке.

Приведенные зависимости можно распространить на случай изотермической среды с несерой оболочкой при условии, что ее оптические свойства мало изменяются в зависимости от длины волны. Если среда характеризуется еще и рассеянием лучистой энергии (ослабляющая среда), то в исходные зависимости (18-9) и (18-10) вместо α_λ вводится k_λ и вместо $\eta - \eta_{\text{эф}}$; коэффициент k_λ носит название коэффициента ослабления среды [Л. 180].

Аналитические решения, базирующиеся на приведенных уравнениях переноса лучистой энергии, получены применительно к простым геометрическим системам и некоторые из них будут рассмотрены ниже (§ 18-4).

18-2. ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА СРЕДЫ И РЕЖИМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Одним из важнейших безразмерных параметров излучения является оптическая толщина среды. В соответствии с соотношением (18-5) ее можно представить в виде

$$L_\lambda = \frac{l}{1/\alpha_\lambda}.$$

Величина $1/\alpha_\lambda$ интерпретируется как глубина проникновения или как средняя длина свободного пробега фотонов. Действительно, если коэффициент поглощения мал, то луч будет проходить большее расстояние через среду без значительного ослабления, т. е. глубина проникновения будет большой. Если коэффициент α_λ велик — глубина проникновения мала.

Из сказанного следует, что оптическая толщина есть отношение характерного линейного размера к длине проникновения излучения и что $1/\alpha_\lambda$ играет роль, аналогичную средней длине свободного пробега молекул, а величину L_λ^{-1} можно рассматривать как фотонное число Кнудсена.

При $L_\lambda \ll 1$ среда имеет оптически малую толщину и является оптически тонкой; при $L_\lambda \gg 1$ среда имеет большую толщину и является оптически толстой. Как и в случае молекулярного переноса тепла, можно в зависимости от величины L_λ классифицировать различные режимы переноса лучистой энергии. Условие $L_\lambda \gg 1$ означает, что средняя длина пробега фотона значительно меньше характерного размера системы.

Среду можно рассматривать как некоторый континуум фотонов. Как и в случае молекулярной проводимости, перенос энергии излучения в среде можно уподобить диффузионному переносу. Здесь межфотонные столкновения играют преобладающую роль. При $L_\lambda \gg 1$ решение уравнения переноса совпадает с зависимостью (16-38) [Л. 16, 163, 176, 205].

В случае $L_\lambda \ll 1$ длина свободного пробега фотонов значительно больше характерного линейного размера системы. Фотоны, испускаемые средой, попадают непосредственно на граничную поверхность без промежуточных соударений, без лучистого взаимодействия. Такой режим

переноса энергии излучения называется режимом пренебрежимо малого самопоглощения.

В пределе, когда $L_\lambda \rightarrow 0$, среда не участвует в теплообмене излучением, и фотоны перемещаются от поверхности к поверхности без промежуточного поглощения и испускания. Значения оптической толщины $0 < L_\lambda < 1$ соответствуют переходному режиму излучения.

18-3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМАХ ТЕЛ С ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СРЕДОЙ

Точные решения, как и в случае диатермичной промежуточной среды (§ 17-10), основываются на интегральных уравнениях излучения. Для этого используется зависимость (18-10), выражающая изменение яркости излучения вдоль луча [Л. 176].

Применительно к произвольной фиксированной точке M в поле излучения зависимость для яркости представляется в виде

$$I_M = I_N e^{-L_\lambda} + \frac{1}{4\pi} \int_0^l \eta_p e^{-\Delta L_\lambda} dl', \quad (18-18)$$

где оптические расстояния равны:

$$L_\lambda = \int_0^l \alpha_{\lambda,p} dt; \quad \Delta L_\lambda = \int_{l'}^l \alpha_{\lambda,p} dl''; \quad (18-19)$$

здесь P — текущая точка вдоль луча l ; N — точка, соответствующая $l=0$.

Найдем поверхностную плотность падающего излучения из (16-11) через яркость:

$$E_{\text{пад}M} = \int_{2\pi} I_n \cos \psi d\omega.$$

Подставим значение яркости по (18-18) с учетом того, что для серой граничной поверхности $I_N = E_{\text{эф}N}/\pi$, а эффективное излучение определяется соотношением (16-18).

Тогда получим интегральное уравнение для искомого значения поверхностной плотности потока падающего излучения в произвольной точке M :

$$E_{\text{пад}M} = \int_{2\pi} R_N E_{\text{пад}N} d\varphi_{(M,N)\pi} - \frac{1}{4} \int_{2\pi} \int_0^l \eta_p dl' d\varphi_{(M,P)\pi} = \int_{2\pi} E_v d\varphi_{(M,v)\pi}. \quad (18-20)$$

В интегральном уравнении величины

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_{(M,v)\pi} &= e^{-L_\lambda} \frac{\cos \psi d\omega}{\pi} = e^{-L_\lambda} d\varphi_{M,N}; \\ d\varphi_{(M,P)\pi} &= e^{-L_\lambda} \frac{\cos \psi d\omega}{\pi} = e^{-L_\lambda} d\varphi_{M,P}. \end{aligned} \right\} \quad (18-21)$$

выражают элементарные угловые коэффициенты с учетом ослабления излучения

в промежуточной поглощающей (индекс «п») среде и называются обобщенными элементарными угловыми коэффициентами излучения. Расчетная точка M может находиться как на граничной поверхности, так и внутри объема, заполненного средой. Применительно к диатермичной среде угловые коэффициенты $d\varphi_{(M,N)п}$ и $d\varphi_{(M,P)п}$ вырождаются в $d\varphi_{M,N}$ и $d\varphi_{M,P}$, а интегральное уравнение (18-20) переходит в интегральное уравнение (17-96) — § 17-10. Аналогичным путем находится интегральное уравнение для объемной плотности падающего излучения:

$$\eta_{\text{пад } M} = \int_{4\pi} I_M d\omega.$$

Подставим в эту зависимость выражение яркости по (18-18):

$$\eta_{\text{пад } M} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} E_{\text{эф } N} e^{-L_\lambda} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^l \eta_P e^{-\Delta L_\lambda} dl' d\omega.$$

Элементарный телесный угол можно представить следующим образом:

$$d\omega(M, l) = \frac{dF_M \cos(n, l)}{r_{M,N}^2} = \frac{dF_P}{r_{M,P}^2} = \frac{dV_P}{r_{M,P}^2 dl}.$$

Тогда интегральное уравнение для объемной плотности потока падающего излучения принимает вид:

$$\eta_{\text{пад } M} = \frac{1}{\pi} \int_F E_{\text{эф } N} e^{-L_\lambda} \frac{\cos \phi_M}{r_{M,N}^2} dF_N = \frac{1}{4} \int_V \eta_P \frac{e^{-\Delta L_\lambda}}{r_{M,N}^2} dV_P. \quad (18-22)$$

Для диатермичной среды $\alpha_\lambda = 0$ и $e^{-L_\lambda} = e^{-\Delta L_\lambda} = 1$.

Интегральные уравнения (18-20) и (18-21) позволяют найти $E_{\text{пад } M}$ и $\eta_{\text{пад } M}$ для определенной длины волны.

Полные плотности лучистых потоков определяют интегрированием по спектру.

Метод получения интегральных уравнений для потоков других видов излучения аналогичен изложенному выше (§ 17-10) для диатермичной среды. Использование элементарных зависимостей (А)—(Г) позволяет найти потоки излучения по потокам, определяемым с помощью интегральных уравнений.

К интегральным уравнениям излучения с поглощающей промежуточной средой могут быть применены алгебраические, зональные и резольвентные приближения, как и для случая диатермичной среды.

18-4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим поглощающую неизотермическую среду, ограниченную плоскопараллельными стенками с конечным расстоянием между ними.

Допустим, что серые непрозрачные стенки отражают и излучают лучистую энергию изотропно; имеют постоянные, но различные температуры ($T_1 > T_2$) и поглощательные способности A_1 и A_2 (рис. 18-1). Примем, что основным способом переноса тепла является перенос излучением и что процесс стационарен во времени. Требуется найти распределения плотности потока результирующего излучения и температуры по толщине слоя среды (задача одномерная).

В основу решения поставленной задачи может быть положено уравнение переноса лучистой энергии (дифференциальный метод) или интегральное уравнение излучения (интегральный метод).

Рассмотрим дифференциальный метод применительно к большой оптической толщине слоя (оптически плотная среда) ($L \gg 1$) [Л. 1, 15, 163, 176, 205]. В этом случае вектор излучения выражается формулой (16-38), полученной из диффузионного представления о переносе излучения [Л. 205]:

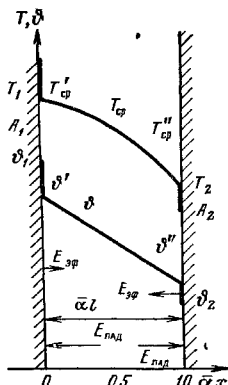


Рис. 18-1. Распределение температуры и плотности потока результирующего излучения

$$q_p = -\frac{4}{3} \frac{\sigma}{\alpha} \frac{d}{dx} (T^4) = -\frac{4}{3\alpha} \frac{d\vartheta}{dx}, \quad \vartheta = \sigma T^4, \quad (18-23)$$

где α — осредненный по спектру коэффициент поглощения среды.

Для рассматриваемых условий изменение лучистого потока

$$\frac{dq_p}{dx} = 0. \quad (18-24)$$

Тогда получаем дифференциальное уравнение распространения лучистой энергии

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0. \quad (18-25)$$

Интегрирование (18-25) приводит к зависимостям

$$d\vartheta/dx = c_1 \text{ и } \vartheta = c_2 + c_1 x.$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий: при $x=0$ $\vartheta = \vartheta'$ и, следовательно, $c_2 = \vartheta'$.

Постоянную c_1 находим из зависимости (18-23)

$$q_p = -\frac{3}{4\alpha} \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{3c_1}{4\alpha}.$$

Тогда решение уравнения (18-25) будет иметь вид:

$$\vartheta = \vartheta' - \frac{3\alpha}{4} q_p x. \quad (18-26)$$

В этой зависимости кроме ϑ неизвестной величиной является q_p .

Для определения q_p используем систему уравнений, характеризующих теплообмен излучением на границе среды со стенками. Согласно (16-20) и (16-24) имеем:

$$q_p = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}; \quad (18-27)$$

$$E_{\text{эф}} = \frac{E_0}{A} - \left(\frac{1}{A} - 1 \right) q_p. \quad (18-28)$$

Кроме того, к граничным условиям относится объемная плотность потока излучения в среде на границе со стенкой.

Для условий термодинамического равновесия объемную плотность энергии излучения можно выразить по закону Стефана—Больцмана (16-48):

$$u_0 c_\phi = 4\sigma T_{\text{ж}},$$

где $T_{\text{ж}}$ — абсолютная температура среды; c_ϕ — скорость фотонов.

Найдем выражение плотности объемного излучения в среде на ее границе через $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{эф}}$. Для этого введем средние яркости излучения:

$$\bar{I}_{\text{эф}} = \frac{E_{\text{эф}}}{\pi}; \quad \bar{I}_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{пад}}}{\pi}.$$

Тогда

$$u_0 c_\phi = \int_{2\pi} \bar{I}_{\text{эф}} d\omega + \int_{2\pi} \bar{I}_{\text{пад}} d\omega = 2E_{\text{эф}} + 2E_{\text{пад}}. \quad (18-29)$$

Совместное решение уравнений (18-27)—(18-29) позволяет найти

$$q_p = \frac{\sigma(T_{\text{с}}^4 - T_{\text{ж}}^4)}{\frac{1}{A} - \frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_{\text{с}} - \vartheta_{\text{ж}}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{2}}. \quad (18-30)$$

Зависимость (18-30) выражает плотность потока результирующего излучения по толщине плоского слоя среды.

Применительно к двум граничным поверхностям из (18-30) получим уравнения (при $x=0$ и $x=l$):

$$q_p = \frac{\vartheta_1 - \vartheta'}{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2}}; \quad q_p = \frac{\vartheta'' - \vartheta_2}{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}}; \quad (18-31)$$

здесь ϑ_1 , ϑ_2 соответствуют температурам поверхностей.

Выразим перепады температур из соотношений (18-31):

$$\vartheta_1 - \vartheta' = q_p \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2} \right); \quad \vartheta'' - \vartheta_2 = q_p \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right). \quad (18-32)$$

Кроме того, из зависимости (18-26) можно выразить перепад температур в слое среды:

$$\vartheta' - \vartheta'' = q_p \frac{3\alpha x}{4}. \quad (18-33)$$

Складывая левые и правые части последних зависимостей, находим уравнение для плотности потока результирующего излучения q_p , Вт/м², в плоскопараллельной системе при наличии промежуточной

поглощающей среды

$$q_p = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 + \frac{3\bar{\alpha}l}{4}} = \frac{\sigma(T^*_{a1} - T^*_{a2})}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 + \frac{3\bar{\alpha}l}{4}}. \quad (18-34)$$

Из уравнений (18-26) и (18-34) определяется распределение температуры по толщине слоя поглощающей среды:

$$T^* = T'^* - q_p \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}}{\sigma} x. \quad (18-35)$$

Затем из (18-32) можно определить температурные перепады:

$$T^*_{a1} - T^*_{ж} = \frac{q_p}{\sigma} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2} \right); \quad T^*_{ж} - T^*_{a2} = \frac{q_p}{\sigma} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2} \right) \quad (18-36)$$

и перепад температур в самой среде из (18-33):

$$T'^* - T''^* = \frac{q_p}{\sigma} \frac{3}{4} \bar{\alpha} l. \quad (18-37)$$

На рис. 18-1 показано распределение плотности потока результирующего излучения в среде по (18-26) и температуры по (18-35).

Плотность потока изменяется линейно с изменением оптической толщины $\bar{\alpha}l$, причем это изменение существенно. Если среда является диатермичной или ее оптическая толщина $L = \bar{\alpha}l \rightarrow 0$, то зависимость (18-34) переходит в уравнение (17-9).

На границах среды со стенками имеют место скачки температуры (18-36), которые пропорциональны термическому сопротивлению $\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2} \right)$

лучистого теплообмена. Следовательно, если среда является оптически плотной, то существует тонкий лучистый слой у каждой поверхности стенок, аналогичный слою Кнудсена в кинетической теории, который обуславливает наличие скачков температуры и скорости в разреженном газе. Указанный режим называют режимом скольжения излучения.

Рассмотренный дифференциальный метод для плоского слоя достаточно удовлетворительно согласуется с результатами интегрального метода [Л. 89].

Точные дифференциальные методы, основанные на непосредственном решении уравнений переноса, приводятся в [Л. 1, 89, 163].

18-5. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ГАЗОВ И ПАРОВ

Различают несветящиеся и светящиеся газовые среды. Свечение газовой среды обуславливается наличием в ней раскаленных частиц сажи, угля, золы. Такое светящееся пламя называют факелом.

Излучение факела определяется главным образом излучением содержащихся в нем твердых частиц. Присутствие в газовой среде значительного количества мелких взвешенных твердых частиц делает эту среду мутной.

К мутным средам кроме сажистого светящегося пламени можно отнести и другие запыленные потоки, например пылевые облака, туманы. Мутные среды характеризуются существенным рассеиванием лучистой энергии.

Ниже рассматриваются особенности излучения несветящейся газовой среды, к которой относятся чистые газы и пары.

Одно-, двухатомные газы (гелий, водород, кислород, азот и др.) практически являются прозрачными (диатермичными) для излучения. Трехатомные газы обладают большей излучательной и поглощательной способностью. К таким газам относятся CO_2 и H_2O , имеющие большое практическое применение в теплотехнике; в топочных газах, как правило, они присутствуют одновременно.

В отличие от твердых и жидких тел излучение газов носит объемный характер, так как в нем участвуют все микрочастицы газа. Поэтому его поглощательная способность зависит от плотности и толщины газового слоя.

С увеличением плотности и толщины слоя газа его поглощательная способность увеличивается.

Излучение газов носит избирательный (селективный) характер. Они поглощают и излучают только в определенных интервалах длин волн. В остальной части спектра они являются прозрачными. Так, для CO_2 и H_2O можно выделить по три основные по-

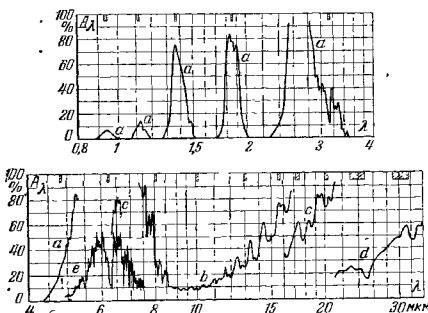


Рис. 18-2. Полосы поглощения H_2O .

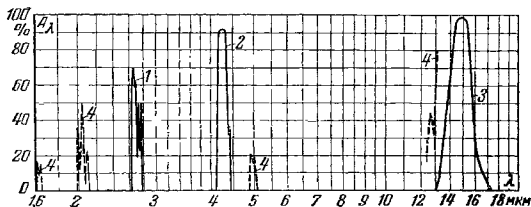


Рис. 18-3. Полосы поглощения CO_2 .

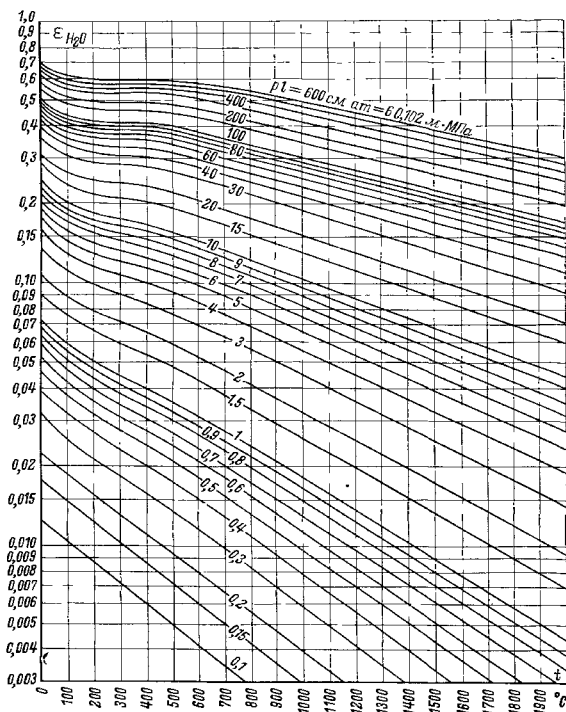
лосы поглощения (рис. 18-2, 18-3 и табл. 18-1; буквы и цифры на рисунках соответствуют разным толщинам слоя газа). Из таблицы следует, что полосы поглощения CO_2 частично совпадают с полосами поглощения H_2O . Двуокись углерода обладает относительно узкими полосами поглощения. Спектральные полосы поглощения водяного пара характеризуются большей шириной. Вследствие этого поглощательная способность и степень черноты водяного пара существенно больше, чем двуокиси углерода.

Ширина отдельных полос излучения изменяется с температурой газа. С увеличением температуры ширина полос увеличивается, а по-

Интервал селективного поглощения для CO_2 и H_2O

№ интер- вала	CO_2			H_2O		
	λ_1 , МКМ	λ_2 , МКМ	$\Delta\lambda$, МКМ	λ_1 , МКМ	λ_2 , МКМ	$\Delta\lambda$, МКМ
1	2,4	3,0	0,6	1,7	2,0	0,3
2	4,0	4,8	0,8	2,2	3,0	0,8
3	12,5	16,5	4,0	4,8	8,5	3,7
4	—	—	—	12	30	18

глощательная способность уменьшается, так как уменьшается плотность газа. Влияние расширения полос преобладает над влиянием уменьшения поглощательной способности так, что в результате имеет место повышение энергии излучения с увеличением температуры газа.

Рис. 18-4. Степень черноты в зависимости от температуры для H_2O .

Плотность собственного интегрального излучения по опытным данным выражается соотношениями

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5 (pl)^{0,33} \left(\frac{T}{100} \right)^{3,5}; \quad E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 (pl)^{0,81} \left(\frac{T}{100} \right)^3. \quad (18-38)$$

Согласно (18-38) излучение CO_2 растет пропорционально $T^{3,5}$ и $(pl)^{0,33}$. Следовательно, CO_2 может иметь заметное собственное излу-

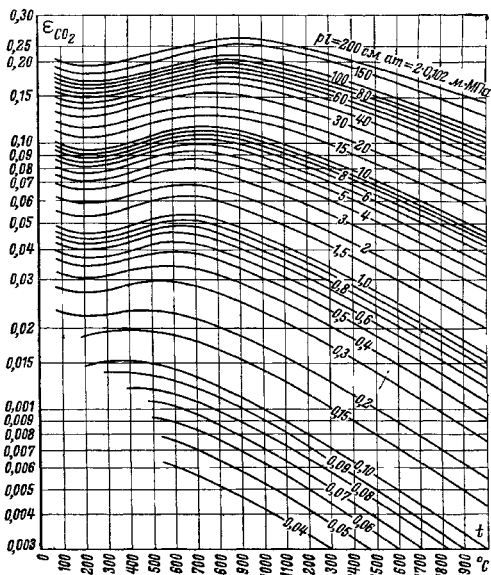


Рис 18-5 Степень черноты в зависимости от температуры для CO_2

чение при относительно малой толщине слоя. Излучение медленно увеличивается с ростом толщины слоя и быстрее с температурой.

Парциальное давление (p) и толщина слоя (l) оказывают большее влияние на излучение H_2O , чем на излучение CO_2 . Поэтому при малых толщинах слоя преобладает влияние излучения CO_2 , а при больших — излучение H_2O .

Зависимости (18-38) показывают, что излучение газов существенно отклоняется от закона четвертых степеней температуры Стефана—Больцмана. На рис. 18-4 и 18-5 приведены графики экспериментальных данных для степени черноты CO_2 и H_2O в зависимости от температуры и параметра (pl). На рис. 18-6 представлены данные по предельному значению степени черноты этих газов при $pl \rightarrow \infty$. График показывает, что даже в предельном случае степень черноты существенно меньше

единицы; предельная степень черноты водяного пара в несколько раз больше, чем для двуокиси углерода.

Для газовых смесей вследствие частичного совпадения спектров степень черноты оказывается несколько меньше, чем сумма степеней черноты отдельных компонентов (рис. 18-7).

В камерах сгорания ракет и других системах продукты сгорания могут находиться при высоких температурах и давлениях; степень чер-

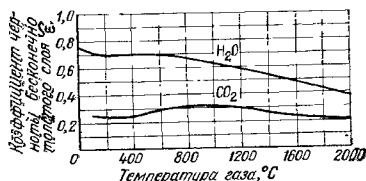


Рис. 18-6. Предельная степень черноты CO_2 и H_2O в зависимости от температуры.

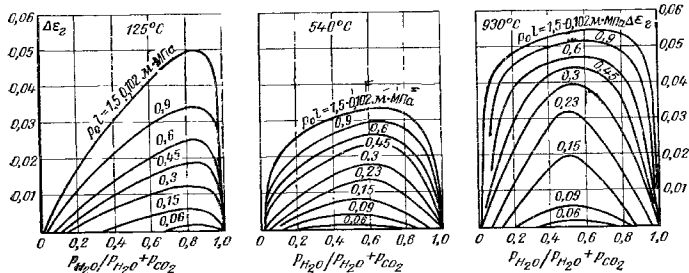


Рис. 18-7. Поправка $\Delta \epsilon_r$ на взаимное поглощение.
 p_0 — общее давление газа.

ноты для этих условий по экспериментальным данным приводится в [Л. 4, 64].

Кроме того, степень черноты газов может быть найдена теоретическим путем. К теоретическим методам относятся методы статистической физики, квантовой механики, молекулярной спектроскопии и др. [Л. 154, 206].

18-6. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ И ОБОЛОЧКОЙ

Предположим, что газ имеет постоянную температуру T_g , а стенка T_c . Примем, что газ и стенка являются серыми телами. Излучение стенки (оболочки) характеризуется сплошным спектром. Газовая среда имеет селективно-серое излучение в виде отдельных полос ϵ_{1g} ; ϵ_{2g} (рис. 18-8). В общем случае число таких полос для различных газов может быть различным.

Газовая среда обменивается лучистыми потоками со стенкой только в пределах этих полос. Вне спектральных полос отдельные элементы стенки обмениваются лучистыми потоками только между собой.

Для изотермической стенки результирующий поток для этого теплообмена будет равен нулю. Тогда лучистый поток от газа к стенке

можно выразить зависимостью

$$Q_{г,с} = (E_{эф,г} - E_{эф,с}) F_c, \quad (18-39)$$

где F_c — поверхность стенки (оболочки).

Плотности потоков эффективного излучения газовой среды и стенки найдем по методу сальдо. По аналогии с ранее приведенными зависимостями для серых тел (17-6) они могут быть представлены зависимостями применительно к отдельным полосам излучения [Л. 74]:

$$E_{эф,г} = (E_{ог})_{\Delta\lambda} + q_{г,с} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{г\Delta\lambda}}\right);$$

$$E_{эф,с} = (E_{о,с})_{\Delta\lambda} + q_{с,г} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{с\Delta\lambda}}\right).$$

Черное излучение газа и стенки, соответствующее предельным значениям их степеней черноты, можно выразить соотношениями

$$(E_{ог})_{\Delta\lambda} = c_0 \left(\frac{T_g}{100}\right)^4 \epsilon_g^\infty; \quad (E_{о,с})_{\Delta\lambda} = c_0 \left(\frac{T_c}{100}\right)^4 \epsilon_c^\infty,$$

где ϵ_g^∞ и ϵ_c^∞ — предельные степени черноты газа (рис. 18-6) при температурах газа и стенки. Степень черноты газа $\epsilon_{г, \Delta\lambda}$ определяется зависимостью

$$\epsilon_{г\Delta\lambda} = \frac{k_1 l_1 e_1 g_1 + k_2 l_2 e_2 g_2}{a_1 b_1 e_1 g_1 + a_2 b_2 e_2 g_2} = \frac{E_{г\Delta\lambda}}{(E_{ог})_{\Delta\lambda}} = \frac{\epsilon_g E_{ог}}{\epsilon_c E_{ог}} = \frac{\epsilon_g}{\epsilon_c}.$$

Степень черноты стенки в пределах отдельных полос $\Delta\lambda$ можно принять равной интегральной степени черноты ($\epsilon_{с\Delta\lambda} = \epsilon_c$). Для стационарно-го теплового режима $q_{г,с} = -q_{с,г}$.

Тогда с учетом приведенных выше зависимостей получим следующее расчетное уравнение для лучистого потока $Q_{г,с}$, Вт, передаваемого от газовой среды к стенке:

$$Q_{г,с} = \frac{c_0 F_c \left[\epsilon_g \left(\frac{T_g}{100}\right)^4 - \epsilon_{г,с} \left(\frac{T_c}{100}\right)^4 \right]}{\frac{1}{\epsilon_g / \epsilon_c} + \frac{1}{\epsilon_c} - 1}. \quad (18-40)$$

Интегральные значения степени черноты (коэффициента поглощения) для смеси газов, как указывалось выше, в общем случае не равны сумме значений их для отдельных компонентов смеси. Так, для смеси H_2O и CO_2 степень черноты и коэффициент поглощения меньше суммы их значений для H_2O и CO_2 , что объясняется частичным совпадением их спектров излучения:

$$\epsilon_g = \epsilon_{CO_2} + \epsilon_{H_2O} - \Delta\epsilon_g. \quad (18-41)$$

Степени черноты пара и двуокиси углерода берутся из графиков (18-4), (18-5) по температуре газа при соответствующих произведениях парциального давления на длину пути луча (p_l). Приблизительно средняя длина пути луча определяется из соотношения

$$l = m \frac{4V}{F_g}, \quad (18-42)$$

где V — объем газового тела; $m=0,9$ — поправочный коэффициент.

Данные по средней длине пути луча для газовых тел различной геометрической формы приводятся в литературе [Л. 88]. Поправка на отклонение от закона аддитивности для газовых смесей за счет взаимного поглощения излучения компонентами берется из графиков на рис. 18-7.

Предельные степени черноты газа при T_r и T_c берутся из графика рис. 18-6.

Если газ является селективно-черной средой, а стенка черной поверхностью, то расчетное уравнение упрощается:

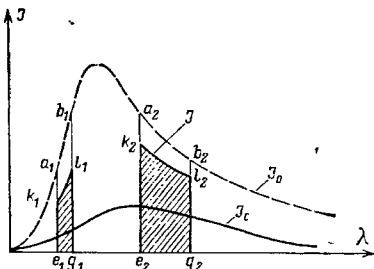


Рис 18-8. К лучистому теплообмену между селективно-серым газом и серой стенкой.

$$Q_{r,c} = c_0 F_c \left[\epsilon_r \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \epsilon_{r,c} \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right]. \quad (18-43)$$

Рассмотренный метод расчета теплообмена излучением относится к газовым средам, не содержащим взвешенных твердых частиц несгоревших продуктов сгорания. В камерах сгорания топок и печей газовые потоки содержат указанные твердые частицы. Для расчета лучистого теплообмена в толках и печах существуют различные методики, приведенные в специальной литературе [Л. 119, 134, 140, 189].

18-7. СЛОЖНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Лучистый перенос может сопровождаться одновременным переносом тепла путем теплопроводности и конвекции. Совместный (комбинированный) процесс лучистого теплообмена и процесса теплопроводности или конвекции, а также всех трех видов переноса называют сложным теплообменом.

Среди процессов сложного теплообмена различают радиационно-конвективный и радиационно-кондуктивный теплообмен.

Радиационно-конвективный перенос теплоты является наиболее общим случаем сложного теплообмена; при этом теплота переносится не только радиацией, но и теплопроводностью, и конвекцией.

В радиационно-кондуктивном теплообмене имеет место перенос теплоты в неподвижной ослабляющей и теплопроводной среде путем излучения и теплопроводности.

Сложный теплообмен описывается системой уравнений, состоящей из уравнений энергии, движения и сплошности, к которым добавляются условия однозначности. Для модели сплошной среды уравнения сохранения массы и количества движения (см. гл. 4) остаются неизменными. Уравнение энергии применительно к радиационно-конвективному стационарному теплообмену в однокомпонентной несжимаемой жидкости, поглощающей, испускающей и рассеивающей энергию излучения, будет иметь вид:

$$\text{div } \vec{q}_r + \text{div } \vec{q}_k + \text{div } \vec{q}_p = 0; \quad (18-44)$$

здесь q_t , q_k и q_p — соответственно векторы плотности теплового потока за счет теплопроводности, конвекции и излучения (радиации).

В общем случае эти величины изменяются в рассматриваемом пространстве. В уравнении (18-44) не учитываются возможные внутренние источники теплоты и диссипация механической энергии.

Граничные условия задаются различно в зависимости от постановки задачи. Различным образом могут быть заданы физические и оптические параметры среды и граничной поверхности [Л. 1, 163].

Задачи о совместном переносе энергии путем теплопроводности и излучения в общем случае являются весьма сложными, поэтому они решаются численными или приближенными методами. Однако применительно к оптически тонким и оптически толстым слоям (§ 18-2) эти задачи имеют простые решения.

При отсутствии конвекции зависимость (18-44) с учетом того, что согласно закону Фурье $q_t = -\lambda \text{grad } t$, принимает вид:

$$\text{div}(\lambda \text{grad } t) = \text{div } q_p.$$

Для одномерной и плоской задачи это соотношение переходит в зависимость

$$\lambda \frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{dq_p}{dx},$$

что эквивалентно равенству

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} + q_p = \text{const.} \quad (18-45)$$

Для случая оптически тонкого слоя радиационный перенос тепла согласно (18-34) определяется зависимостью

$$q_p = \frac{\frac{1}{A_1} (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1},$$

откуда следует, что q_p не зависит от положения точки.

Интегрируя зависимость (18-45), получаем:

$$q = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{l} + q_p \quad (18-46)$$

Полный поток q также не зависит от положения точки и определяется суммой потоков, переносимых теплопроводностью и излучением.

Для оптически толстого слоя среды согласно (18-23)

$$q_p = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha} \frac{dT}{dx}.$$

Подставляя эту величину в (18-45), имеем:

$$q = -\left(\lambda + \frac{16\sigma T^3}{3\alpha}\right) \frac{dT}{dx}.$$

После интегрирования получим:

$$q = -\frac{\lambda}{l} (T_1 - T_2) + \frac{4\sigma}{3\alpha l} (T_1^4 - T_2^4). \quad (18-47)$$

Уравнение (18-47) показывает, что и в случае оптически толстого слоя среды потоки q_t и q_p не зависят друг от друга, общий поток опре-

деляется их суммой. Радиационно-кондуктивный теплообмен в плоском слое для других исходных условий рассмотрен в [Л. 5, 117, 163]; для цилиндрического слоя — в [Л. 116].

Задачи радиационно-конвективного теплообмена даже для простых случаев обычно более трудны, чем задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Ниже приведено приближенное решение [Л. 205] одной распространенной задачи радиационно-конвективного теплообмена. Существенные упрощения позволяют довести решение до конца.

Рассмотрим радиационно-конвективный перенос теплоты при турбулентном движении излучающей среды внутри цилиндрического канала. Канал имеет диаметр $d=2r_0$, длина его равна l , температура поверхности неизменна и равна T_c . Среда имеет заданную температуру на входе T_i , физические свойства, не зависящие от температуры, и равномерное распределение осредненной скорости w_x по сечению канала. Процесс теплообмена является установившимся во времени. Требуется определить распределение температуры в излучающей среде и тепловой поток [Л. 205].

Используем уравнение (18-44)

$$\operatorname{div} \vec{q}_{\tau, \tau} + \operatorname{div} \vec{q}_k + \operatorname{div} \vec{q}_p = 0,$$

но с учетом турбулентного переноса теплоты.

В рассматриваемом случае вектор $\vec{q}_{\tau, \tau}$ должен учитывать перенос теплоты как молекулярной, так и турбулентной теплопроводностью. Перенос теплоты за счет молекулярной теплопроводности, описываемый законом Фурье $q_{\tau} = -\lambda \nabla T$, заметную роль играет лишь у стенки в области вязкого подслоя (здесь T — осредненное во времени локальное значение температуры в турбулентном потоке — см. § 4-5).

Турбулентный перенос теплоты можно описать уравнением (для изотропной турбулентности)

$$q_{\tau} = -\lambda_{\tau} \nabla T, \quad (18-48)$$

где λ_{τ} — коэффициент турбулентного переноса теплоты.

Конвективный перенос энthalпии равен:

$$q_k = \rho c_p w_x T. \quad (18-49)$$

Радиационный перенос теплоты приближенно определяется зависимостью

$$q_p = -\lambda_{\text{рад}} \nabla T, \quad (18-50)$$

в которой в соответствии с (16-38) радиационный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{\text{рад}} = \frac{16\sigma T^3}{3\alpha}.$$

Зависимости (18-48) и (18-50) с учетом молекулярной теплопроводности можно представить в виде уравнения

$$q_{*} = -\lambda_{*} \nabla T; \quad (18-51)$$

здесь $\lambda_{*} = \lambda + \lambda_{\tau} + \lambda_{\text{рад}}$ — обобщенный коэффициент переноса, учитывающий в общем случае кондуктивный, турбулентный и радиационный перенос теплоты.

Применительно к осесимметричному потоку температурное поле в излучающей среде можно описать следующим дифференциальным уравнением, записанным здесь в цилиндрических координатах:

$$w_* \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = a_* \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right); \quad (18-52)$$

здесь $a_* = \lambda_*/\rho c_p$; $\vartheta = T - T_c$ — избыточная температура среды; r, x — соответственно текущее значение радиуса и расстояние от входа в канал.

Для определения температурного поля используется тот же подход, который ранее применялся при решении задачи об охлаждении бесконечно длинного цилиндра.

Найдем решение дифференциального уравнения (18-52) методом разделения переменных:

$$\vartheta(x, r) = \vartheta(x) \vartheta(r). \quad (18-53)$$

Подставляя зависимость (18-53) в (18-52), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\vartheta''(r) + \frac{1}{r} \vartheta'(r) + \delta^2 \vartheta(r) = 0; \quad (18-54)$$

$$\vartheta''(x) + \frac{w_*}{a_*} \vartheta'(x) + \delta^2 \vartheta(x) = 0. \quad (18-55)$$

Частные решения этих уравнений с учетом, что $w_x = \text{const}$, имеют вид:

$$\vartheta(r) = A J_0(\delta r); \quad (18-56)$$

$$\vartheta(x) = c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x}, \quad (18-57)$$

где δ — произвольная величина, м^{-1} ; $J_0(\delta r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{w_*}{a_*} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w_*}{a_*} \right)^2 + \delta^2}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{w_*}{a_*} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{w_*}{a_*} \right)^2 + \delta^2}. \quad (18-58)$$

Следовательно, решение (18-53) можно представить функцией

$$\vartheta(x, r) = A J_0(\delta r) (c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x}). \quad (18-59)$$

Рассмотрим граничное условие, выражающее теплообмен излучающей среды со стенкой:

$$-\lambda_{\text{раж}} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \alpha_p (\vartheta)_{r=r_0}. \quad (18-60)$$

В этой зависимости полагается, что перенос теплоты молекулярной теплопроводностью пренебрежимо мал по сравнению с радиационным переносом. Используя (18-60) и (18-60), получаем:

$$\mu \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = \frac{\alpha_p r_0}{\lambda_{\text{раж}}} = \text{Nu}_p; \quad (18-61)$$

здесь Nu_p — радиационное число Нуссельта; $\mu = \delta r_0$, $J_1(\mu)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Радиационный коэффициент теплоотдачи равен по определению

$$\alpha_p = \frac{q_p}{T - T_c}.$$

Радиационный тепловой поток выражается зависимостью (18-30)

$$q_p = \frac{\sigma (T^4 - T_c^4)}{\frac{1}{A_c} - \frac{1}{2}}.$$

Подставляя значения α_p , $\lambda_{\text{рад}}$ и q_p в (18-61), получаем следующее трансцендентное уравнение, имеющее бесконечное множество корней:

$$\mu \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = \frac{\bar{\alpha}_{T_0}}{A_c - \frac{1}{2}} \left[1 + \frac{T_c}{T} + \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 + \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 \right]. \quad (18-62)$$

Из (18-62) следует, что радиационное число Нуссельта зависит от оптической толщины среды ($\bar{\alpha}_{T_0}$), поглощательной способности стенки (A_c) и мало изменяется с температурой ($T_c/T < 1$). Граничное условие на входе в канал ($x=0$):

$$\vartheta(r)_{x=0} = \vartheta_1 = T_1 - T_c. \quad (18-63)$$

Тогда уравнение (18-56) принимает вид:

$$\vartheta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right), \quad (18-64)$$

где

$$A_n = \vartheta_1 \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} = \vartheta_1 D_n. \quad (18-65)$$

Для входного сечения канала при $x=0$ зависимость (18-57) принимает вид:

$$\vartheta_1 = c_1 + c_2. \quad (18-66)$$

Для выходного сечения канала ($x=l$) имеет место следующее условие:

$$-\lambda_{\text{рад}} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=l} = \alpha_p \vartheta(x)_{x=l}. \quad (18-67)$$

Подставляя в это уравнение ϑ из (18-57), получаем:

$$c_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 l} + c_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 l} = -m (c_1 e^{\gamma_1 l} + c_2 e^{\gamma_2 l}), \quad (18-68)$$

где

$$m = \frac{\alpha_p}{\lambda_{\text{рад}}} = \frac{\bar{\alpha}}{A_c - \frac{1}{2}} \left[1 + \frac{T_c}{T_2} + \left(\frac{T_c}{T_2} \right)^2 + \left(\frac{T_c}{T_2} \right)^3 \right]; \quad (18-69)$$

T_2 — температура среды на выходе из канала.

Из последних двух уравнений определяются постоянные c_1 и c_2 . Подставляя значения c_1 , c_2 и A_n в зависимость (18-59), после некоторых преобразований получаем уравнение, выражающее распределение температуры в потоке излучающей среды:

$$\frac{\vartheta(x, r)}{\vartheta_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) e^{\gamma_n p x}; \quad (18-70)$$

здесь

$$p = \frac{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(l-x)} \beta_2 / \beta_1}{1 - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)l} \beta_2 / \beta_1}; \quad \beta_1 = m + \gamma_1; \quad \beta_2 = m + \gamma_2.$$

Средняя температура излучающей среды в выходном сечении канала определяется путем интегрирования зависимости (18-70):

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n} e^{\gamma_{2n} x}. \quad (18-71)$$

Эту зависимость можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = f\left(\frac{l}{d}, \frac{T_c}{T_1}, \frac{w_\infty d}{a_*}, \overline{ad}, A_c\right); \quad (18-72)$$

здесь $Pe_p = w_\infty d / a_*$ — число Пекле для радиационно-конвективного теплообмена; d — диаметр канала.

Тепловой поток, передаваемый средой стенкам канала, определяется по массовому расходу, удельной теплоемкости среды и перепаду температур $(\theta_1 - \theta_2)$; коэффициент теплоотдачи — по величине Q , F и $(T_1 - T_c)$.

Следовательно, теплоотдача будет определяться также системой безразмерных величин, входящих в зависимость (18-72). Некоторые критерии комбинированного и радиационного теплообмена дополнительно рассматриваются ниже.

18-8. КРИТЕРИИ РАДИАЦИОННОГО ПОДОБИЯ

Критерии радиационного подобия получают путем приведения уравнений лучистого и сложного теплообмена, а также условий однозначности к безразмерному виду.

Для сложных процессов теплообмена используется уравнение энергии (18-44) и его частные случаи.

Получают безразмерные комплексы, характеризующие вклад различных видов процесса. К таким комплексам относятся числа Больцмана (Bo) и Кирпичева (Ki), выражаемые соотношениями

$$Bo = \frac{\rho c_p w}{\sigma_0 T^3}; \quad Ki = \frac{\sigma_0 T^3}{\lambda k}.$$

Число Bo характеризует радиационно-конвективный теплообмен; чем меньше его величина, тем большую роль играет лучистый перенос в среде по сравнению с конвективным.

Число Ki характеризует радиационно-кондуктивный перенос; λ и k — коэффициенты теплопроводности и ослабления среды.

Тепловой баланс на границе среды с поверхностью твердого тела позволяет получить число Старка $St = \sigma_0 T^3 l / \lambda_c$, где T , l — характерные температура и линейный размер; λ_c — коэффициент теплопроводности тела.

Число Старка является аналогом числа Био и характеризует связь между температурным полем в твердом теле и условиями радиационного теплообмена на поверхности тела.

Уравнение переноса лучистой энергии позволяет получить число Бугера

$$Bu = \bar{k} l_0,$$

которое характеризует оптическую плотность среды и, следовательно, прохождение через нее лучистой энергии; l_0 — характерный размер ослабляющей среды; $\bar{k}$ — среднее значение коэффициента ослабления.

Существует еще ряд чисел подобия, которые применяются в процессах радиационного нагрева материалов в печах, в расчетах топочных устройств и в других специальных случаях [Л. 18, 180].

ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

19-1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Теплообменники — это устройства, в которых теплота переходит от одной среды к другой.

Теплообмен между теплоносителями является одним из наиболее важных и часто используемых в технике процессов. Например, получение пара заданных параметров в современном парогенераторе основано на процессе передачи теплоты от одного теплоносителя к другому. В конденсаторах и градирнях тепловых электростанций, воздухоподогревателях доменных печей и многочисленных теплообменных устройствах химической промышленности основным рабочим процессом является процесс теплообмена между теплоносителями. По принципу действия теплообменные аппараты могут быть разделены на рекуперативные, регенеративные и смешительные. Выделяются еще теплообменные устройства, в которых нагрев или охлаждение теплоносителя осуществляется за счет внутренних источников тепла.

Рекуперативные теплообменные аппараты представляют собой устройства, в которых две жидкости с различными температурами текут в пространстве, разделенном твердой стенкой. Теплообмен происходит за счет конвекции и теплопроводности стенки, а если хоть одна из жидкостей является излучающим газом, то и за счет теплового излучения. Примером таких аппаратов являются парогенераторы, подогреватели, конденсаторы, выпарные аппараты и др.

Регенераторы — такие теплообменные аппараты, в которых одна и та же поверхность нагрева через определенные промежутки времени омывается то горячей, то холодной жидкостью. Сначала поверхность регенератора отбирает теплоту от горячей жидкости и нагревается, затем поверхность регенератора отдает энергию холодной жидкости. Таким образом, в регенераторах теплообмен всегда происходит в нестационарных условиях, тогда как рекуперативные теплообменные аппараты большей частью работают в стационарном режиме. Типичным примером регенеративных аппаратов являются воздухоподогреватели мартеновских и доменных печей.

Так как в регенеративных и рекуперативных аппаратах процесс передачи теплоты неизбежно связан с поверхностью твердого тела, то их еще называют поверхностными.

В смешительных аппаратах теплопередача осуществляется при непосредственном контакте и смешении горячей и холодной жидкостей. Типичным примером таких теплообменников являются градирни тепловых электрических станций. В градирнях вода охлаждается атмосферным воздухом. Воздух непосредственно соприкасается с водой и пере-

мешивается с паром, возникающим из-за частичного испарения воды. В этом процессе объединяются тепло- и массообмен.

В теплообменниках с внутренними источниками энергии применяются не два, как обычно, а один теплоноситель, который отводит теплоту, выделенную в самом аппарате. Примером таких аппаратов могут служить ядерные реакторы, электронагреватели и другие устройства. Независимо от принципа действия теплообменные аппараты, применяющиеся в различных областях техники, как правило, имеют свои специальные названия. Эти названия определяются технологическим назначением и конструктивными особенностями теплообменных устройств. Однако с теплотехнической точки зрения все аппараты имеют одно назначение — передачу теплоты от одного теплоносителя к другому или поверхности твердого тела к движущимся теплоносителям. Последнее и определяет те общие положения, которые лежат в основе теплового расчета любого теплообменного аппарата.

19-2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО РАСЧЕТА

Тепловые расчеты теплообменных аппаратов могут быть проектными и поверочными.

Проектные (конструктивные) тепловые расчеты выполняются при проектировании новых аппаратов, целью расчета является определение поверхности теплообмена.

Поверочные тепловые расчеты выполняются в случае, если известна поверхность нагрева теплообменного аппарата и требуется определить количество переданного тепла и конечные температуры рабочих жидкостей. Тепловой расчет теплообменных аппаратов сводится к совместному решению уравнений теплового баланса и теплопередачи. Эти два уравнения лежат в основе любого теплового расчета.

Уравнения теплового баланса и теплопередачи, будучи едиными по существу, различны в деталях в зависимости от типа рассматриваемого теплообменника (рекуперативный, регенеративный или смешительный). Ниже названные уравнения приводятся для рекуперативных теплообменников.

Будем рассматривать стационарный режим работы теплообменника.

Уравнение теплового баланса. Изменение энтальпии теплоносителя вследствие теплообмена определяется соотношением

$$dQ = G di, \quad (19-1)$$

где G — расход массы, кг/с; i — удельная энтальпия, Дж/кг; dQ измеряется в Дж/с или Вт.

Для конечных изменений энтальпии, полагая, что расход массы неизменен,

$$Q = G \int_{i'}^{i''} di = G (i'' - i'); \quad (19-2)$$

здесь i' и i'' — начальная и конечная энтальпии теплоносителя.

Если теплота первичного (горячего) теплоносителя воспринимается вторичным (холодным), то уравнение теплового баланса без учета

потерь теплоты запишется как

$$dQ = -G_1 di_1 = G_2 di_2 \quad (19-3)$$

или для конечного изменения энтальпии

$$Q = G_1(i'_1 - i''_1) = G_2(i''_2 - i'_2); \quad (19-4)$$

здесь и в дальнейшем индекс «1» означает, что данная величина относится к горячей жидкости, а индекс «2» — к холодной. Обозначение (') соответствует данной величине на входе в теплообменник, (") — на выходе.

Полагая, что $c_p = \text{const}$ и $di = c_p dt$, предыдущие уравнения можно записать так:

$$dQ = G c_p dt; \quad (19-1')$$

$$Q = G c_p (t'' - t'); \quad (19-2')$$

$$Q = G_1 c_{p1} (t'_1 - t''_1) = G_2 c_{p2} (t''_2 - t'_2). \quad (19-4')$$

Удельная теплоемкость c_p зависит от температуры. Поэтому в практических расчетах в уравнение (19-4) подставляется среднее значение изобарной теплоемкости в интервале температур от t' до t'' .

В тепловых расчетах часто пользуются понятием полной теплоемкости массового расхода теплоносителя в единицу времени, определяемой выражением

$$C = G c_p \quad (19-5)$$

и измеряющейся в Вт/К.

В литературе величину C называют также водяным эквивалентом. Из уравнения (19-4) следует, что

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t''_1} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1}. \quad (19-6)$$

Последнее уравнение указывает на то, что отношение изменений температур однофазных теплоносителей обратно пропорционально отношению их расходных теплоемкостей (или водяных эквивалентов). Нетрудно видеть, что при изменении агрегатного состояния теплоносителя температура его сохраняется постоянной и δt будет равно нулю. Следовательно, для такого теплоносителя теплоемкость массового расхода $C = \infty$.

Соотношение (19-6) справедливо как для конечной поверхности теплообмена F , так и для любого элементарного участка dF , т. е.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{dt_2}{dt_1}. \quad (19-6')$$

Уравнение теплопередачи служит чаще всего для определения поверхности теплообмена и записывается как

$$Q = k(t_1 - t_2)F, \quad (19-7)$$

где k — коэффициент теплопередачи; t_1 и t_2 — соответственно температуры первичного и вторичного теплоносителей; F — величина поверхности теплопередачи; Q измеряется в ваттах.

Уравнение (19-7) справедливо в предположении, что t_1 и t_2 остаются постоянными по всей поверхности теплообмена, однако эти условия выполняются только в частных случаях. В общем случае t_1 и t_2 изме-

няются по поверхности и, следовательно, изменяется и температурный напор $\Delta t = t_1 - t_2$. Изменяется и коэффициент теплоотдачи по поверхности теплообмена. Величины Δt и k можно принять постоянными только в пределах элементарной площадки поверхности теплообмена dF . Следовательно, уравнение теплопередачи справедливо лишь в дифференциальной форме для элемента поверхности теплообмена:

$$dQ = k \Delta t dF. \quad (19-8)$$

Общий тепловой поток через поверхность теплообмена определится интегралом

$$Q = \int_0^F k \Delta t dF. \quad (19-9)$$

Для решения последнего уравнения необходимо знать закон изменения Δt и k по поверхности. Коэффициент теплопередачи k , Вт/(м²·К), в большинстве случаев изменяется незначительно и его можно принять постоянным. Для случаев, когда коэффициент теплопередачи существенно изменяется на отдельных участках поверхности теплообмена, его усредняют:

$$\bar{k} = \frac{F_1 k_1 + F_2 k_2 + \dots + F_n k_n}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (19-10)$$

Приняв таким образом постоянное значение коэффициента теплопередачи по всей поверхности, уравнение (19-9) можно записать в виде

$$Q = \bar{k} \int_0^F \Delta t dF. \quad (19-11)$$

Если последнее уравнение умножить и разделить на F , то получим:

$$Q = \bar{k} \left(\frac{1}{F} \int_0^F \Delta t dF \right) F = \bar{k} \bar{\Delta t} F; \quad (19-12)$$

здесь Q измеряется в ваттах.

Выражение (19-12) является вторым основным уравнением при тепловом расчете теплообменных аппаратов и называется уравнением теплопередачи.

При конструктивном расчете теплообменных устройств тепловая производительность Q , Вт, задается; требуется определить величину поверхности теплообмена F . Последняя найдется из уравнения (19-12)

$$F = \frac{Q}{\bar{k} \bar{\Delta t}}.$$

Из этого уравнения следует, что при нахождении поверхности теплообмена задача сводится к вычислению коэффициента теплопередачи $\bar{k}$ и усредненного по всей поверхности температурного напора $\bar{\Delta t}$.

Для плоской стенки, например, коэффициент теплопередачи, измеряемый в Вт/(м²·К), находится из уравнения

$$\bar{k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 могут учитывать не только конвективную теплопередачу, но и теплопередачу излучением. В этом случае, например, $\alpha_1 = \alpha_{к1} + \alpha_{р1}$.

Член в знаменателе $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ представляет собой полное термическое

сопротивление теплопроводности твердой стенки, разделяющей теплоносители. Разделяющая стенка может быть как многослойной, так и однородной.

При рассмотрении характера изменения температур теплоносителей вдоль поверхности теплообмена могут быть случаи, когда изменяются монотонно температуры обоих теплоносителей (в частности, температура одного теплоносителя может оставаться постоянной). Могут встречаться случаи, когда температура одного теплоносителя изменяется монотонно, а другого — ступенчато, что бывает, например, в кипящих экономайзерах парогенераторов. Температура горячих газов изменяется непрерывно, а температура подогреваемой воды в зоне подогрева монотонно повышается, а в зоне кипения практически остается постоянной.

При рассмотрении теплообменных аппаратов с непрерывно изменяющейся температурой теплоносителей следует различать аппараты:

1) прямого тока; 2) противоточные; 3) перекрестного тока; 4) со сложным направлением движения теплоносителей (смешанного тока).

Если в теплообменном аппарате первичный (горячий) и вторичный (холодный) теплоносители протекают параллельно в одном направлении, то такая схема движения называется прямотоком (рис. 19-1,а). Если теплоносители протекают параллельно, но в противоположных направлениях, то такая схема движения называется противотоком (рис. 19-1,б). Если жидкости протекают во взаимно перпендикулярных направлениях, то схема движения называется поперечным током (рис. 19,в). Помимо таких простых схем движения, на практике осуществляются и более сложные: одновременно прямоток и противоток (рис. 19-1,г), многократно перекрестный ток (рис. 19-1,д) и др.

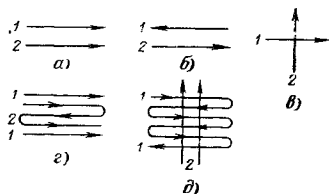


Рис. 19-1. Схемы движения теплоносителей в теплообменниках.
а — прямоток; б — противоток; в — перекрестный ток; г — смешанный ток; д — многократный перекрестный ток.

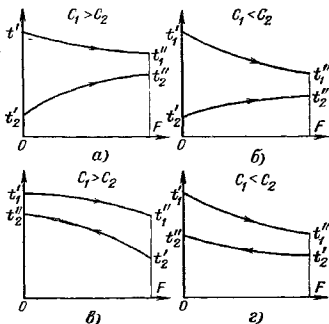


Рис. 19-2. Характер изменения температур теплоносителей при прямотоке и противотоке в зависимости от соотношения C_1 и C_2 .

Характер изменения температур теплоносителей вдоль поверхности будет определяться схемой движения и соотношением теплоемкостей массовых расходов теплоносителей C_1 и C_2 (водяных эквивалентов).

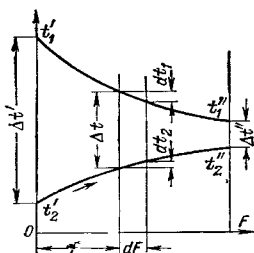


Рис 19-3. Изменение разности температур теплоносителей вдоль поверхности теплообмена.

работающий по схеме прямотока (рис. 19-3). Для элемента поверхности теплообмена dF уравнение теплопередачи запишется как

$$dQ = k(t_1 - t_2) dF = k \Delta t dF. \quad (a)$$

При этом температура первичного теплоносителя понизится на dt_1 , а вторичного повысится на dt_2 . Следовательно,

$$dQ = -C_1 dt_1 = C_2 dt_2, \quad (б)$$

откуда

$$dt_1 = -\frac{dQ}{C_1} \text{ и } dt_2 = \frac{dQ}{C_2}. \quad (в)$$

Изменение температурного напора при этом

$$d(t_1 - t_2) = dt_1 - dt_2 = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) dQ = -m dQ, \quad (г)$$

где

$$m = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Подставив в уравнение (г) значение dQ из уравнения теплопередачи (а), найдем:

$$d(t_1 - t_2) = -mk(t_1 - t_2) dF.$$

Обозначив $(t_1 - t_2) = \Delta t$, последнее уравнение запишем как

$$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk dF. \quad (д)$$

Принимая m и k постоянными, проинтегрируем последнее уравнение от 0 до F и от $\Delta t'$ до Δt :

$$\int_{\Delta t'}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk \int_0^F dF.$$

Получим после интегрирования:

$$\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'} = -mkF \quad (19-13)$$

или

$$\Delta t = \Delta t' e^{-mkF}. \quad (19-14)$$

Из уравнения (19-14) следует, что вдоль поверхности теплообмена температурный напор изменяется по экспоненциальному закону. Следовательно, в аппаратах прямого тока перепад температур между теплоносителями вдоль поверхности теплообмена непрерывно убывает. При противотоке температуры обоих теплоносителей вдоль поверхности теплообмена убывают (рис. 19-2, в и г) и уравнение теплового баланса принимает вид:

$$dQ = -C_1 dt_1 = -C_2 dt_2. \quad (е)$$

Изменение температурного напора

$$d(t_1 - t_2) = -mdQ$$

и

$$m = \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right).$$

Поэтому в аппаратах с противоточной схемой движения Δt по ходу первичной среды уменьшается лишь для случая $C_1 < C_2$ ($m > 0$), но при $C_1 > C_2$ ($m < 0$), Δt увеличивается.

Для определения средней разности температур теплоносителей на участке поверхности F воспользуемся соотношением

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta t dF, \quad (ж)$$

где Δt — местное значение температурного напора ($t_1 - t_2$), относящееся к элементу поверхности теплообмена и выражаемое уравнением (19-14).

Подставив в уравнение (ж) значение Δt из формулы (19-14), получим:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t'}{F} \int_0^F e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{-mkF} (e^{-mkF} - 1). \quad (19-15)$$

Подставив в уравнение (19-15) значения mkF и e^{-mkF} из выражений (19-13) и (19-14), получим:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} - 1 \right) = \frac{\Delta t - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}}. \quad (19-16)$$

Если усреднение температурного напора проводится по всей поверхности теплообмена, то $\Delta t = \Delta t''$ и формула (19-16) принимает вид:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}. \quad (19-17)$$

Формулу (19-17) часто записывают в следующем виде:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_6}{\Delta t_m}} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_m}{2,3 \lg \frac{\Delta t_6}{\Delta t_m}} \quad (19-18)$$

где Δt_6 — большая разность температур; Δt_m — меньшая разность температур.

Формула (19-18) может быть использована как при прямотоке, так и при противотоке.

Полученная средняя разность температур (19-18) называется среднелогарифмическим температурным напором. Формула (19-18) спра-

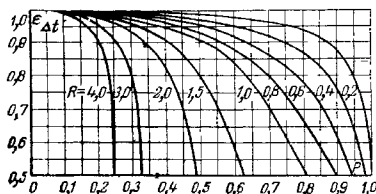


Рис. 19-4. К нахождению поправки $\epsilon_{\Delta t} = f(R, P)$.

ведлива для простейших схем аппаратов при условии постоянства массового расхода теплоносителей и коэффициента теплоотдачи вдоль всей поверхности теплообмена.

При равенстве теплоемкостей массовых расходов теплоносителей в случае противотока ($m=0$) из формулы (19-14) следует, что температурный напор вдоль поверхности теплообмена сохраняет постоянное значение, т. е. $\Delta t = \text{const}$.

В тех случаях, когда температура теплоносителей вдоль поверхности теплообмена изменяется незначительно, среднюю разность температур можно вычислять как среднюю арифметическую из крайних напоров:

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{2} (\Delta t_6 + \Delta t_m) = \frac{\Delta t_6}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_m}{\Delta t_6} \right) \quad (19-19)$$

Так как значения среднеарифметического температурного напора всегда больше среднелогарифмического напора, то температурную разность можно вычислять с достаточной точностью по формуле (19-19) при $\Delta t_6/\Delta t_m < 2$.

При расчете средней температурной разности для сложных схем движения теплоносителей поступают следующим образом:

1. Определяют температурный напор по формуле (19-18):

$$\bar{\Delta t}_{\text{прот}} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_m}{2,3 \lg \frac{\Delta t_6}{\Delta t_m}}.$$

2. Вычисляют вспомогательные величины P и R по формулам

$$P = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{\delta t_2}{\Delta t_{\text{макс}}}; \quad (19-20)$$

$$R = \frac{t'_1 - t''_1}{t''_2 - t'_2} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2}. \quad (19-21)$$

Из формул (19-20) и (19-21) следует, что всегда $P < 1$. Величина R может быть и больше, и меньше единицы в зависимости от соотноше-

ния теплоемкостей массовых расходов теплоносителей C_1 и C_2 . По значениям P и R из вспомогательного графика берется поправка $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$. Например, для теплообменника с перекрестным током и противоточной схемой включения вид графика изображен на рис. 19-4 [Л. 210]. Температурный напор найдется как

$$\bar{\Delta t} = \bar{\Delta t}_{\text{прот}} \varepsilon_{\Delta t}. \quad (19-22)$$

19-4. РАСЧЕТ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР РАБОЧИХ ЖИДКОСТЕЙ

Во многих случаях по заданным температурам теплоносителей на входе в теплообменный аппарат t'_1 и t'_2 и известным поверхности теплообмена F и коэффициенту теплопередачи k приходится определять конечные температуры теплоносителей и тепловую производительность Q . Такую задачу приходится решать при поверочном расчете, когда теплообменник уже имеется или, по крайней мере, спроектирован. В основе расчетов лежат те же уравнения теплового баланса и теплопередачи, т. е.

$$Q = C_1 \delta t_1 = C_2 \delta t_2$$

и

$$Q = k \bar{\Delta t} F.$$

При этом известными являются следующие величины: поверхность теплообмена F , коэффициент теплопередачи k , теплоемкости массовых расходов теплоносителей C_1 и C_2 и начальные температуры t'_1 и t'_2 . Искомыми величинами являются конечные температуры t''_1 и t''_2 и количество переданного тепла Q .

Рассмотрим случай, когда температура вдоль поверхности теплообмена изменяется незначительно ($\Delta t_6 / \Delta t_m < 2$) и распределение температуры по длине поверхности можно принять линейным. Для этого случая средний температурный напор между теплоносителями можно рассчитать по формуле (19-19), т. е.

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t_6 + \Delta t_m}{2} = \left(\frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t''_2 + t'_2}{2} \right). \quad (a)$$

Из уравнения теплового баланса определяем t''_1 и t''_2 :

$$\left. \begin{aligned} t''_1 &= t'_1 - \frac{Q}{C_1} \\ t''_2 &= t'_2 + \frac{Q}{C_2} \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Подставив полученные значения t''_1 и t''_2 в уравнение (а), получим:

$$\bar{\Delta t} = (t'_1 - t'_2) - \left(\frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2} \right) Q. \quad (в)$$

Подставив выражение (в) в уравнение теплопередачи и решив последнее относительно Q , Вт, получим:

$$Q = \frac{t'_1 - t'_2}{\frac{1}{kF} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2}}. \quad (19-23)$$

Вычислив по формуле (19-23) значение Q и подставив его в уравнение (б), найдем искомые температуры теплоносителей на выходе из аппарата.

Приведенная методика расчета является приближенной и пригодна только для ориентировочных расчетов. В общем случае характер изменения температур теплоносителей не является линейным, а зависит от теплоемкостей массовых расходов C_1 и C_2 , величины поверхности теплообмена и схемы движения теплоносителей. Поэтому для прямого и противотока расчетные формулы будут разными.

А. Прямоточная схема движения теплоносителей

Для вывода формул используем экспоненциальный закон изменения температурного напора вдоль поверхности теплообмена [уравнение (19-14)]:

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-mkF}.$$

Если это уравнение записать в виде

$$\frac{t''_1 - t''_2}{t'_1 - t'_2} - 1 = e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)} - 1,$$

то после несложных преобразований получим:

$$(t'_1 - t''_1) + (t''_2 - t'_2) = (t'_1 - t'_2) \left[1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}\right]$$

или

$$\delta t_1 + \delta t_2 = \Delta t' \left[1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}\right]. \quad (г)$$

Неизвестные величины δt_1 и δt_2 определим из теплового баланса:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1},$$

откуда

$$\delta t_2 = \delta t_1 \frac{C_1}{C_2}. \quad (д)$$

Подставив выражение для δt_2 в уравнение (г), получим:

$$\delta t_1 + \delta t_1 \frac{C_1}{C_2} = \Delta t' \left[1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}\right]$$

или

$$\delta t_1 = \Delta t' \frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 + \frac{C_1}{C_2}}. \quad (19-24)$$

Из уравнения (19-24) следует, что изменение температуры первичного теплоносителя δt_1 равно некоторой доле первоначального температурного перепада между теплоносителями $(t'_1 - t'_2)$.

Выражение

$$\frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 + \frac{C_1}{C_2}}$$

является функцией только kF/C_1 , C_1/C_2 и может быть заранее рассчитано и табулировано.

Аналогично для прямотока можно получить формулу для нахождения изменения температуры вторичного теплоносителя:

$$\delta t_2 = \Delta t' \frac{C_1}{C_2} \frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 + \frac{C_1}{C_2}}. \quad (19-25)$$

Окончательно формулы (19-24) и (19-25) можно записать так:

$$\delta t_1 = (t'_1 - t'_2) f_{\Pi} \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right); \quad (19-24')$$

$$\delta t_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{C_1}{C_2} f_{\Pi} \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right). \quad (19-25')$$

Б. Противоточная схема движения теплоносителей

В качестве исходного уравнения для получения формулы для изменения температуры теплоносителей по длине поверхности берется уравнение (19-14) применительно к противоточной схеме движения:

$$\frac{t''_1 - t'_2}{t'_1 - t''_2} = e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}.$$

Дальнейшие выкладки такие же, как и для прямотока. Окончательные результаты имеют вид:

$$\delta t_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 - \frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}} \quad (19-26)$$

$$\delta t_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{C_1}{C_2} \frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 - \frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}}. \quad (19-27)$$

Если обозначить

$$\frac{1 - e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}}{1 - \frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}} = f_z \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right),$$

то формулы (19-26) и (19-27) запишутся так:

$$\delta t_1 = (t'_1 - t'_2) f_z \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (19-26')$$

и

$$\delta t_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{C_1}{C_2} f_z \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right). \quad (19-27')$$

Количество переданной теплоты определяется для противотока как

$$Q = C_1 \delta t_1 = C_1 (t'_1 - t'_2) f_z \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (19-28)$$

и для прямого тока как

$$Q = C_1 \delta t_1 = C_1 (t'_1 - t'_2) \dot{f}_n \left(\frac{kF}{C_1}; \frac{C_1}{C_2} \right). \quad (19-29)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай, когда $C_1 = C_2 = C$, т. е. теплоемкости массовых расходов теплоносителей численно одинаковы. Для этого случая уравнения (19-24) и (19-25) упрощаются и принимают вид:

$$\delta t_1 = \delta t_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-\frac{2kF}{C}}}{2}. \quad (19-30)$$

Для случая противотока при $C_1 = C_2 = C$ из формулы (19-14) следует, что $\Delta t' = \Delta t'' = \text{const}$.

Из уравнения теплового баланса следует, что

$$t'_1 - t''_1 = t''_2 - t'_2,$$

откуда находим:

$$t''_2 = t'_1 - t''_1 + t'_2. \quad (e)$$

Из уравнения теплопередачи и теплового баланса получаем:

$$t''_2 = t'_1 - \frac{C}{kF} (t'_1 - t''_1). \quad (ж)$$

Приравняв выражения (e) и (ж) и решив относительно δt_1 , найдем:

$$\delta t_1 = \frac{t'_1 - t'_2}{1 + \frac{C}{kF}} = \Delta t_{\text{макс}} \frac{kF}{kF + C}; \quad (19-31)$$

$$Q = (t'_1 - t''_1) C = (t'_1 - t'_2) C \frac{kF}{kF + C}. \quad (19-32)$$

В практике часто встречаются случаи, когда теплоемкость массового расхода первичного или вторичного теплоносителя C_1 или C_2 — бесконечно большая величина (процесс передачи теплоты в парогенераторах, испарителях, конденсаторах различных типов и пр.). В этих условиях температура одного из теплоносителей остается постоянной по всей поверхности, а противоточная и прямоточная схемы движения становятся равноценными.

Если теплоемкость массового расхода первичного теплоносителя $C_1 = \infty$, а вторичного C_2 , то из (19-14) получаем формулу для расчета изменения температуры вторичного теплоносителя вдоль поверхности:

$$t''_2 = t_1 - (t_1 - t'_2) e^{-\frac{kF}{C_2}}. \quad (19-33)$$

Соответственно если $C_2 = \infty$, а C_1 — конечная величина, то при $C_2 = \infty$, $t'_2 = t''_2 = t_2 = \text{const}$ (случай кипения жидкости) и из уравнения (19-14) для расчета изменения температуры первичного теплоносителя вдоль поверхности получим следующую формулу:

$$t''_1 = t_2 + (t'_1 - t_2) e^{-\frac{kF}{C_1}}. \quad (19-34)$$

Для расчета количества теплоты, передаваемой через поверхность теплообмена, получим формулы

$$C_1 = \infty; t'_1 = t''_1 = t_1; \\ Q = C_2 (t_1 - t'_2) (1 - e^{-\frac{kF}{C_2}}); \quad (19-35)$$

$$C_2 = \infty; \quad t'_2 = t''_2 = t_2;$$

$$Q = C_1 (t'_1 - t_2) \left(1 - e^{-\frac{kF}{C_1}} \right). \quad (19-36)$$

Изменения температуры теплоносителей t_1 и t_2 для промежуточных сечений поверхности теплообмена для прямого тока без труда определяются из уравнений (19-24) и (19-25), если в этих уравнениях значение полной поверхности F заменить на F_x , считая ее от входа в теплообменник.

Для определения промежуточных температур в противоточных теплообменниках замена в формулах (19-26) и (19-27) F на F_x неприменима, так как при противотоке в теплообмене всегда принимает участие вся поверхность. Поэтому при расчете температуры первичного теплоносителя в формуле (19-26) полная поверхность F заменяется F_x только в числителе, т. е.

$$\delta t_{1x} = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-\frac{kF_x}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right)}}{1 - \frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right)}}. \quad (19-37)$$

Изменение температуры вторичного теплоносителя при противотоке

$$\delta t_{2x} = (t'_1 - t'_2) \frac{C_1}{C_2} \frac{1 - e^{-\frac{kF_x}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right)}}{1 - \frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{kF}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right)}}. \quad (19-38)$$

В. Сравнение прямого тока с противотоком

Чтобы выяснить преимущество одной схемы перед другой, достаточно сравнить количества передаваемой теплоты при прямотоке и противотоке при равенстве прочих условий. На рис. 19-5 [Л. 124] нанесена зависимость отношения количества теплоты, передаваемой при прямотоке Q_n , к количеству теплоты, передаваемой при тех же условиях при противотоке Q_z , как функция от C_1/C_2 и kF/C_1 , т. е.

$$\frac{Q_n}{Q_z} = \varphi \left(\frac{C_1}{C_2}; \frac{kF}{C_1} \right).$$

Из графика (рис. 19-5) следует, что прямоточная и противоточная схемы могут быть равноценны только при очень больших и очень малых значениях C_1/C_2 или очень малых значениях параметра kF/C_1 .

Первое условие соответствует случаю, когда изменение температуры одного из теплоносителей мало.

Второй случай равноценен, когда температурный напор велик по сравнению с изменением температуры рабочей жидкости. Это вытекает

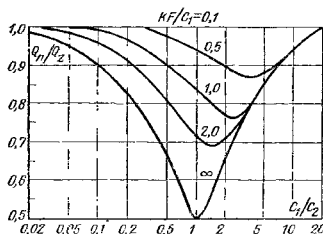


Рис. 19-5. $\frac{Q_n}{Q_z} = f \left(\frac{C_1}{C_2}, \frac{kF}{C_1} \right)$ — сравнение прямого тока и противотока.

из соотношения

$$\frac{kF}{C_1} = \frac{\delta t_1}{\Delta t}$$

или

$$\frac{kF}{C_2} = \frac{\delta t_2}{\Delta t}.$$

Во всех остальных случаях при прочих равных условиях при прямотоке теплоты передается меньше, чем при противотоке (рис. 19-5). Поэтому, с теплотехнической точки зрения, всегда следует отдавать предпочтение протнвотоку над прямотоком.

Однако следует иметь в виду, что если один из теплоносителей имеет высокую температуру, то при противотоке поверхность теплообмена будет находиться в более тяжелых температурных условиях, чем при прямотоке.

19-5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР ПОВЕРХНОСТИ ТЕПЛООБМЕНА

Для тех случаев, когда известно распределение теплового потока по поверхности теплообмена, расчет температуры поверхности можно вести по формулам (2-29), (2-33), (2-47), (2-57). Однако в большинстве практических случаев удобнее представить расчетные формулы в другом виде.

Для плоской стенки из уравнений

$$q = \alpha_1 (t_1 - t_{c1}); \quad (a)$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}); \quad (б)$$

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_2) \quad (в)$$

можно получить

$$\frac{t_1 - t_{c1}}{t_{c2} - t_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad (г)$$

из совместного решения (a) и (б) выразить

$$t_{c2} - t_{c1} = \frac{\alpha_1 \delta}{\lambda} (t_1 - t_{c1}). \quad (д)$$

Решив совместно уравнения (г) и (д) относительно неизвестной температуры t_{c1} или t_{c2} , получим:

$$t_{c1} = \frac{t_1 \left(\frac{\alpha_1 \delta}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) + t_2}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1 \delta}{\lambda}}; \quad (19-39)$$

$$t_{c2} = \frac{t_2 \left(\frac{\alpha_2 \delta}{\lambda} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + t_1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 \delta}{\lambda}}. \quad (19-40)$$

Полученные формулы справедливы для расчета температур и на многослойной поверхности теплообмена. В этом случае для плоских стенок в формулы (19-39) и (19-40) подставляются δ — полная тол-

щина многослойной стенки и λ — эквивалентный коэффициент теплопроводности многослойной стенки. Если тепловым сопротивлением стенки δ/λ можно пренебречь ($\delta \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$), то формулы (19-39) и (19-40) принимают вид:

$$t_{c1} = t_{c2} = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (19-41)$$

Для стенок с любым термическим сопротивлением расчет по формуле (19-40) даст среднюю температуру стенки.

Для тонких цилиндрических стенок ($d_2/d_1 < 2$) справедливы соотношения

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_1 - t_{c1}); \quad Q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F_{cp}; \quad Q = \alpha_2 (t_{c2} - t_2) F_2,$$

где F_1 — поверхность со стороны первичного теплоносителя; F_{cp} — средняя поверхность стенки, равная $(F_1 + F_2)/2$; F_2 — поверхность со стороны вторичного теплоносителя.

Аналогично, как и для плоской стенки, найдем:

$$t_{c1} = \frac{\left(\frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1 \delta}{\lambda F_{cp}} \right) t_1 + t_2}{1 + \frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1 \delta}{\lambda F_{cp}}}; \quad (19-42)$$

$$t_{c2} = \frac{\left(\frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2 \delta}{\lambda F_{cp}} \right) t_2 + t_1}{1 + \frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2 \delta}{\lambda F_{cp}}}. \quad (19-43)$$

Если стенка многослойная, то в формулах (19-42) и (19-43) подставляет δ — полную толщину стенки и λ — эквивалентный коэффициент теплопроводности.

В общем случае расчет температуры на поверхности цилиндрической стенки ведут по следующим формулам:

$$t_{c1} = \frac{\left(\frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right) t_1 + t_2}{1 + \frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (19-44)$$

$$t_{c2} = \frac{\left(\frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right) t_2 + t_1}{1 + \frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (19-45)$$

Если стенка трубы многослойная, то вместо λ нужно подставлять в формулы (19-44) и (19-45) эквивалентный коэффициент теплопроводности; F_1 , F_2 — соответственно поверхности, непосредственно соприкасающиеся с теплоносителями.

19-6. ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Поверхность регенеративных теплообменников попеременно омывается то первичным («горячим»), то вторичным («холодным») теплоносителем. Следовательно, поверхность теплообмена таких теплообменников попеременно является тепловоспринимающей и теплоотдающей. Время, за которое происходит нагревание насадки и охлаждение пер-

вичного теплоносителя τ_1 , называется периодом нагрева, а время, за которое происходит охлаждение насадки и нагревание вторичного теплоносителя τ_2 , называется периодом охлаждения. Время, за которое происходят нагрев и охлаждение насадки, называют полным циклом или периодом.

Обозначим время полного цикла через $\tau_{\text{пер}}$:

$$\tau_{\text{пер}} = \tau_1 + \tau_2.$$

В общем случае период нагревания и охлаждения может быть различной продолжительности. В отличие от рекуператоров регенераторы работают в условиях нестационарного теплового процесса, т. е. происходит изменение во времени как температуры стенки в период нагревания и охлаждения, так и температуры теплоносителей. В этом одна из трудностей создания теории тепловых расчетов регенераторов. В настоящее время для практических расчетов используют различные приближенные методы.

Особенности расчета заключаются в том, что все расчеты приходится вести по средним характеристикам за период (цикл). Тепловой поток относится не к единице времени, а берется за период. Следовательно, Q — количество тепла, переданное в период первичного или вторичного теплоносителя на единицу поверхности за период, $\text{Дж}/(\text{м}^2 \times \times \text{период})$.

В основу теплового расчета положены те же уравнения, что и при расчете рекуператоров. Уравнение теплового баланса практически не отличается от уравнения для рекуператоров, а уравнение теплопередачи имеет вид:

$$Q = k_{\text{п}}(\bar{t}_1 - \bar{t}_2), \quad (19-46)$$

где $k_{\text{п}}$ — коэффициент теплопередачи за период нагревания и охлаждения, $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{период})$; $\bar{t}_1$ — средняя температура первичного теплоносителя за период нагревания; $\bar{t}_2$ — средняя температура вторичного теплоносителя за период охлаждения; Q измеряется в $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{период})$.

Из уравнения (19-46) следует, что при прохождении поверхности теплообмена все трудности расчета концентрируются на вычислении коэффициента теплопередачи.

Расчет коэффициента теплопередачи. При расчете коэффициента теплопередачи будем следовать методике, изложенной в работе [Л. 198]. Количество тепла, которое будет передаваться к единице поверхности в период нагревания насадки, $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{период})$,

$$Q_1 = \alpha_1 \tau_1 (\bar{t}_1 - \bar{t}_{c1}), \quad (19-47)$$

где α_1 — суммарный коэффициент теплоотдачи за период нагревания; τ_1 — продолжительность периода нагревания; $\bar{t}_1$ — средняя температура первичного теплоносителя в данном сечении за период нагревания; $\bar{t}_{c1}$ — средняя температура поверхности в данном сечении за период нагревания.

Количество теплоты, которая будет передаваться к «холостому» (вторичному) теплоносителю за период охлаждения,

$$Q_2 = \alpha_2 \tau_2 (\bar{t}_{c2} - \bar{t}_2), \quad (19-48)$$

где α_2 — суммарный коэффициент теплоотдачи за период охлаждения; $\bar{t}_{c2}$ — средняя температура поверхности в данном сечении за период

охлаждения; $\bar{t}_2$ — средняя температура вторичного теплоносителя за период охлаждения; τ_2 — продолжительность периода охлаждения.

При установившемся состоянии (цикличности) в отсутствие внешних потерь количества теплоты, передаваемой в период нагревания и отдаваемой вторичному теплоносителю в период охлаждения, должны быть одинаковыми. На этом основании можно написать:

$$\alpha_1 \tau_1 (\bar{t}_1 - \bar{t}_{c1}) = \alpha_2 \tau_2 (\bar{t}_{c2} - \bar{t}_1). \quad (19-49)$$

Разность средних температур поверхности за период нагрева и охлаждения $\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2}$ обозначим через $\Delta \bar{t}_c$. Можно написать:

$$\bar{t}_{c2} = \bar{t}_{c1} - \Delta \bar{t}_c. \quad (19-50)$$

Подставив последнее выражение в уравнение (19-49) и разрешив его относительно $\bar{t}_{c1}$, получим:

$$\bar{t}_{c1} = \frac{\alpha_1 \tau_1 \bar{t}_1 + \alpha_2 \tau_2 \bar{t}_2 + \alpha_2 \tau_2 \Delta \bar{t}_c}{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2}. \quad (19-51)$$

Приравняв выражения (19-46) и (19-47) и подставив в полученное равенство $\bar{t}_{c1}$ из (19-51), получим:

$$k_n = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}} \left[1 - \frac{\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2}}{\bar{t}_1 - \bar{t}_2} \right]; \quad (19-52)$$

здесь k_n измеряется в Дж/(м²·К·период).

Если принять, что продолжительность периодов нагрева и охлаждения равна единице и предположить, что разность температур поверхностей $\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2} = \Delta \bar{t}_c = 0$, то из уравнения (19-52) получим:

$$k_n = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (19-53)$$

Полученное выражение аналогично уравнению коэффициента теплопередачи для рекуператора. Поэтому в рассмотренном случае формулы для расчета средних за период температур и теплопередачи в рекуператорах справедливы и для регенеративных теплообменников.

Если в уравнении (19-52) принять $\Delta \bar{t}_c = 0$, а продолжительности периодов τ_1 и τ_2 произвольными, то получим выражение для коэффициента теплопередачи в так называемых «идеальных регенераторах»:

$$k_{ид} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}}. \quad (19-54)$$

Идеальным называется такой регенератор, в котором средняя температура поверхности насадки в период нагрева и период охлаждения остается одинаковой.

Из уравнения (19-52) следует, что если известны коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 (они могут быть вычислены по ранее приведенным формулам), то расчет регенератора сводится к вычислению средних температур поверхности насадки в период нагревания $\bar{t}_{c1}$ и в период охлаждения $\bar{t}_{c2}$.

Таким образом, в основу расчета коэффициента теплопередачи в любом регенераторе можно положить выражение (19-54) и о совершенстве регенератора судить по отличию коэффициента теплопередачи от идеального.

Для практических расчетов можно рекомендовать следующую формулу:

$$k = k_{ид} \frac{k}{v}; \quad (19-55)$$

здесь

$$u = \frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho}}\right) + 9,82 \frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{\bar{t}_1 - \bar{t}_2} \left\{ 1,05 \left[1 - \frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho}}\right)\right] - \frac{1,05 - \frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho}}\right)}{1 + 0,1 \frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1}} \right\}; \quad (19-56)$$

$$v = 1 - \frac{\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho} \left[\frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho}}\right) - \frac{c\delta\rho}{2\alpha_1\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha_1\tau_1}{c\delta\rho}}\right) \right] \times \\ \times \frac{1-\eta}{\eta} \left(1 + \frac{2}{\frac{4c\delta\rho}{\alpha_1\tau_1} - 1}\right) + \frac{1-\eta}{4\eta} \left(1 + \frac{1}{\frac{4c\delta\rho}{\alpha_1\tau_1} - 1}\right); \quad (19-57)$$

k измеряется в Дж/(м²·К·период).

Фактор u/v в уравнении (19-55) указывает на ухудшение, которое претерпевает идеальный коэффициент теплопередачи вследствие недостаточных теплопроводности и аккумулирующей способности насадки регенератора. Этим отношением будет характеризоваться коэффициент полезного действия поверхности нагрева. Следовательно,

$$\eta_{пов} = \frac{k}{k_{ид}} \quad (19-58)$$

или

$$\eta_{пов} = \frac{u}{v}. \quad (19-59)$$

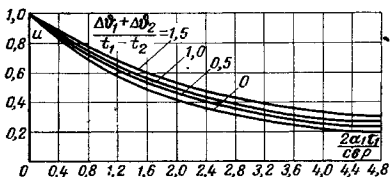


Рис. 19-6. К вычислению функции u .

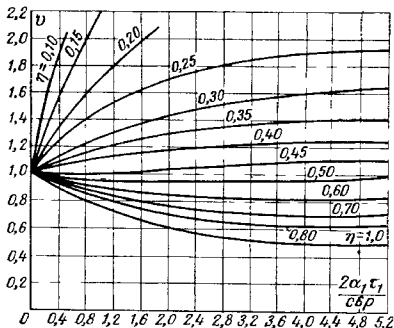


Рис. 19-7. К вычислению функции v .

Величина u является только функцией комплексов $2\alpha_1\tau_1/c\delta\rho$ и $(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)/(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)$, а величина v — только функцией параметров $2\alpha_1\tau_1/c\delta\rho$ и η .

В указанных безразмерных параметрах:

α_1 — коэффициент теплоотдачи в период нагревания; τ_1 — продолжительность периода нагревания; c — удельная теплоемкость; δ — толщина насадки; ρ — плотность насадки; $\Delta\theta_2 = t'_2 - t_{20}$ — изменение тем-

пературы вторичного теплоносителя на входе; η — коэффициент использования насадки; $\Delta t_1 = t'_1 - t'_{10}$ — изменение температуры первичного теплоносителя на входе.

Таким образом, можно записать:

$$u = f_1 \left(\frac{2\alpha_1 \tau_1}{c \delta \rho}; \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{t_1 - t_2} \right) \quad (19-60)$$

и

$$v = f_2 \left(\frac{2\alpha_1 \tau_1}{c \delta \rho}; \eta \right). \quad (19-61)$$

Зависимости (19-60) и (19-61) представлены на рис. 19-6 и 19-7 в виде семейства кривых.

Таким образом, на основании изложенной методики по уравнениям (19-55), (19-56) и (19-57) можно вычислить коэффициент теплопередачи для любого регенератора.

Дальнейший расчет регенераторов производится по формулам, введенным ранее для рекуперативных теплообменных аппаратов.

Глава двадцатая

ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

20-1. ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Между теплопередачей и потерей давления существует тесная физическая и экономическая связь. Чем больше скорости теплоносителей, тем выше коэффициент теплопередачи и тем компактнее для заданной тепловой производительности теплообменник, а следовательно, меньше капитальные затраты. Но при этом растет сопротивление потоку и возрастают эксплуатационные затраты. При проектировании теплообменных аппаратов необходимо решать совместно задачу теплообмена и гидравлического сопротивления и найти наиболее выгодные характеристики.

Основной задачей гидромеханического расчета теплообменных аппаратов является определение величины потери давления теплоносителя при прохождении его через аппарат. Так как теплообмен и гидравлическое сопротивление неизбежно связаны со скоростью движения теплоносителей, то последняя должна выбираться в некоторых оптимальных пределах, определяемых, с одной стороны, стоимостью поверхности теплообмена аппарата данной конструкции, а с другой — стоимостью затрачиваемой энергии при эксплуатации аппарата.

Гидравлическое сопротивление в теплообменных аппаратах определяется условиями движения теплоносителей и особенностями конструкции аппарата.

Гидравлическое сопротивление в теплообменных аппаратах определяется условиями движения теплоносителей и особенностями конструкции аппарата.

Из сказанного следует, что данные гидромеханического расчета являются важным фактором в оценке рациональности конструкции теплообменных аппаратов.

20-2. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА

Опыты указывают на то, что даже в самых простых теплообменных аппаратах структура потока теплоносителя очень сложна. В силу этого в подавляющем большинстве случаев гидравлическое сопротивление в теплообменных аппаратах можно рассчитать только приближенно.

В зависимости от природы возникновения движения гидравлические сопротивления движению теплоносителей различают как сопротивление трения, которые обусловлены вязкостью жидкостей и проявляются лишь в местах безотрывного течения, и местные сопротивления. Последние обуславливаются различными местными препятствиями движению потока (сужение и расширение канала, обтекание препятствия, повороты и др.). Сказанное справедливо для изотермического потока, однако если движение теплоносителя происходит в условиях теплообмена и аппарат сообщается с окружающей средой, то будут возникать дополнительные сопротивления, связанные с ускорением потока вследствие неізотермичности, и сопротивление самотяги. Сопротивление самотяги возникает вследствие того, что вынужденному движению нагретой жидкости на нисходящих участках канала противодействует подъемная сила, направленная вверх.

Таким образом, полный напор, необходимый при движении жидкости или газа через теплообменник, определится формулой

$$\Delta p = \Sigma \Delta p_{\text{п.т}} + \Sigma \Delta p_{\text{м.с}} + \Sigma \Delta p_{\text{у}} + \Sigma \Delta p_{\text{с}}, \quad (20-1)$$

где $\Sigma \Delta p_{\text{п.т}}$ — сумма сопротивления трения на всех участках поверхности теплообмена (каналов, пучков труб, стенок и др.); $\Sigma \Delta p_{\text{м.с}}$ — сумма потерь напора в местных сопротивлениях; $\Sigma \Delta p_{\text{у}}$ — сумма потерь напора, обусловленных ускорением потока; $\Sigma \Delta p_{\text{с}}$ — суммарная затрата напора на преодоление самотяги; Δp измеряется в паскалях.

Так как природа возникновения составляющих сопротивлений в формуле (20-1) различна, то и расчет их ведется раздельно. Потери давления на преодоление сил трения при течении несжимаемой жидкости в каналах на участке безотрывного движения в общем случае рассчитываются по формуле

$$\Delta p_{\text{п.т}} = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}, \quad (20-2)$$

где l — полная длина канала; d — гидравлический диаметр, который в общем случае найдется как $d = 4f/u$ (f — поперечное сечение канала; u — периметр поперечного сечения); ρ и w — средняя плотность жидкости или газа в канале, кг/м³, и средняя скорость, м/с; ξ — коэффициент сопротивления трения; он является безразмерной величиной, характеризующей соотношение сил трения и инерционных сил потока. Коэффициент сопротивления остается постоянным для каналов с $l > 30d$, в случае $l < 30d$ необходимо учитывать изменения его на входном участке канала; $\Delta p_{\text{п.т}}$ измеряется в паскалях.

Коэффициент сопротивления трения зависит от режима движения потока и поэтому при ламинарном и турбулентном течении определяется по-разному. Закономерности движения потока рассматриваются в различных курсах гидравлики и гидроаэродинамики, например в работах [1. 184, 202]. В настоящей главе мы ограничимся краткими данными, необходимыми для расчета сопротивления трения.

$Pe_1 \frac{d}{l}$	n при μ_c/μ_1 равно					$Pe_1 \frac{d}{l}$	n при μ_c/μ_1 равно				
	0,1	1	10	100	1000		0,1	1	10	100	1000
60	0,776	0,673	0,583	0,505	0,440	1000	0,334	0,290	0,251	0,218	0,189
100	0,667	0,578	0,502	0,435	0,377	1500	0,297	0,258	0,224	0,194	0,168
150	0,590	0,512	0,446	0,385	0,334	2500	0,283	0,245	0,212	0,184	0,160
200	0,541	0,470	0,406	0,352	0,306	5000	0,264	0,228	0,198	0,172	0,149
400	0,440	0,382	0,330	0,286	0,248	10 000	0,246	0,213	0,185	0,160	0,139
600	0,390	0,338	0,292	0,254	0,220	30 000	0,220	0,191	0,165	0,144	0,125

При вязкостном неизотермическом течении в трубах и каналах можно рекомендовать формулу, предложенную Б. С. Петуховым [Л. 182]:

$$\xi = \frac{64\varphi}{Re_1} \left(\frac{\mu_c}{\mu_1} \right)^n = \xi_{из} \left(\frac{\mu_c}{\mu_1} \right)^n, \quad (20-3)$$

где φ — коэффициент, учитывающий геометрическую форму канала, выбирается по данным для изотермического потока. Для круглой трубы $\varphi=1,0$; для плоского канала $\varphi=1,5$, для каналов другой формы значения φ можно найти в работе [Л. 124].

Значение показателя степени n в уравнении (20-3) берется из таблицы или вычисляется по формуле

$$n = c \left(Pe_1 \frac{d}{l} \right)^{-m} \left(\frac{\mu_c}{\mu_1} \right)^{-0,062}, \quad (20-4)$$

где $c=2,3$ и $m=0,3$ при $60 < Pe_1 \frac{d}{l} < 1500$;

$c=0,535$ и $m=0,1$ при $1500 < Pe_1 \frac{d}{l} < 3 \cdot 10^4$.

Значения чисел Re_1 и Pe_1 вычисляются по эквивалентному диаметру, и физические параметры относятся к температуре на входе в канал. Коэффициенты вязкости μ_c и μ_1 относятся соответственно к температуре стенки и температуре потока на входе.

Формула (20-3) справедлива для капельных жидкостей при значениях $0,08 < \mu_c/\mu_1 < 1200$ и $60 < Pe_1 d/l < 3 \cdot 10^4$. Так как показатель степени n всегда положителен, то из уравнения (20-3) следует, что при прочих равных условиях значения коэффициента трения ξ будут разными при нагревании и охлаждении и отличными от значений для изотермического потока. Коэффициент сопротивления трения при охлаждении будет больше, чем при нагревании потока.

При турбулентном неизотермическом течении в трубах и каналах падение давления при движении несжимаемой жидкости определяется также по уравнению (20-2).

Как и при ламинарном движении, в основу формул для вычисления коэффициента сопротивления трения положены формулы для изотермического движения. Влияние неизотермичности на сопротивление трения можно учитывать при помощи поправки, предложенной М. А. Михеевым $(Pr_c/Pr_{ж})^{1/3}$ [Л. 124]. Тогда формула для расчета коэффициента трения при неизотермическом движении запишется так:

$$\xi = \xi_{из} (Pr_c/Pr_{ж})^{1/3}. \quad (20-5)$$

В уравнении (20-5) коэффициент сопротивления трения при изотермическом течении ξ может быть вычислен по известной формуле:

$$\xi_{из} = \frac{1}{(1,82 \lg Re_{ж} - 1,64)^2}. \quad (20-6)$$

С учетом последнего уравнения формула (20-5) запишется так:

$$\xi = \frac{1}{(1,82 \lg Re_{ж} - 1,64)^2} \left(\frac{Pr_0}{Pr_{ж}} \right)^{1/3}. \quad (20-5')$$

В формуле (20-5') все физические параметры отнесены к средней температуре жидкости, кроме Pr_0 , который относится к температуре стенки. В качестве линейного определяющего размера берется $d_{жж}$ канала.

Многие экспериментальные данные по исследованию сопротивления трения при движении газа в трубах и каналах указывают на то, что если физические параметры относить к средней температуре газа по длине канала, то сопротивления неизотермического течения можно рассчитывать по тем же формулам, что и для изотермического:

для ламинарного движения — по закону Паузеяля

$$\xi = \frac{64\varphi}{Re_{ж}}; \quad (20-7)$$

для турбулентного течения в трубах и каналах — по формуле (20-6).

Как было сказано, местные сопротивления обусловлены наличием в теплообменных аппаратах устройств, изменяющих направление движения среды или форму потока (повороты, сужения, расширения и пр.).

Местные сопротивления определяются по формуле

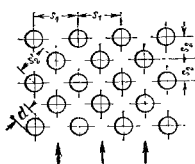
$$\Delta p_{м.с} = \zeta \frac{\rho w^2}{2}, \quad (20-8)$$

где ζ — коэффициент местного сопротивления; $\Delta p_{м.с}$ измеряется в Па.

Коэффициент местного сопротивления зависит от характера препятствия, которым вызываются указанные сопротивления. Формулы и числовые данные для коэффициентов местных сопротивлений в различных напорных системах можно найти в [Л. 124, гл. 5].

Гидравлическое сопротивление пучков труб при поперечном обтекании следует рассматривать как сумму сопротивлений трения и местных сопротивлений. Так как в этом случае сопротивление трения составляет ничтожную долю местных сопротивлений, то полное сопротивление пучков труб определяют по формулам ВТИ [Л. 86].

Рис. 20-1. К расчету сопротивления шахматных пучков труб.



Для шахматных пучков:

при

$$\frac{1 - d/s'_2}{s_1/d - 1} \leq 0,53$$

$$Eu = 1,4(z + 1) Re^{-0,25}; \quad (20-9)$$

при

$$\frac{1 - d \cdot s'_2}{s_1 \cdot d - 1} > 0,53$$

$$Eu = 1,93(z + 1) \sqrt{\frac{1 - d \cdot s'_2}{s_1 \cdot d - 1}} Re^{-0,25}. \quad (20-10)$$

В формулах (20-9) и (20-10) s_1 — поперечный шаг и s'_2 — диагональный шаг шахматного пучка (рис. 20-1).

Для коридорных пучков:

$$\text{при } \frac{s_2/d - 0,8}{s_1/d - 1} \leq 1$$

$$Eu = 0,265 \left(\frac{s_2/d - 0,8}{s_1/d - 1} \right)^{2,5} z Re^m; \quad (20-11)$$

$$\text{при } \frac{s_2/d - 0,8}{s_1/d - 1} > 1$$

$$Eu = 0,265 \left(\frac{s_2/d - 0,8}{s_1/d - 1} \right)^2 z Re^m. \quad (20-12)$$

Показатель степени m в формулах (20-11) и (20-12) может быть вычислен следующим образом:

при $s_2/d \geq 1,24$

$$m = 0,88 \left(\frac{s_1/d - 1}{s_2/d - 1} - 0,1 \right)^{0,138} - 1;$$

при $s_2/d < 1,24$

$$m = 0,88 \left(\frac{s_2/d}{1,24} \right)^{0,7} \left(\frac{s_1/d - 1}{s_2/d - 1} - 0,1 \right)^{0,138} - 1.$$

В этих уравнениях s_1 и s_2 — поперечный и продольный шаги в коридорных пучках (рис. 20-2).

В формулах (20-9) — (20-12) число Эйлера

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2},$$

где Δp — гидравлическое сопротивление пучка, Па; ρ — плотность газа при средней температуре газа в пучке, кг/м³; ω — средняя скорость потока в узком сечении пучка, м/с.

Указанные формулы справедливы при $6 \cdot 10^3 < Re < 6 \cdot 10^4$; для шахматных пучков — величина геометрического параметра пучка должна лежать в пределах:

$$\frac{1 - d/s'_2}{s_1/d - 1} = 0,25 \div 2,5;$$

для коридорных пучков —

$$\frac{s_2/d - 0,8}{s_1/d - 1} = 0,2 \div 6,5.$$

Потеря напора, обусловленная ускорением потока вследствие изменения объема теплоносителя при постоянном сечении канала,

$$\Delta p_y = \rho_2 \omega_2^2 - \rho_1 \omega_1^2, \quad (20-13)$$

где ω_1 , ρ_1 и ω_2 , ρ_2 — скорость, м/с, и плотность газа, кг/м³, соответственно во входном и выходном сечениях потока.

Для капельных жидкостей Δp_y , Па, мало по сравнению с общим сопротивлением потока, и это сопротивление можно не принимать во внимание.

Если аппарат сообщается с окружающей средой, необходимо учитывать сопротивление самотяги. Это сопротивление можно вычислить по формуле

$$\Delta p_c = \pm g (\rho_0 - \rho) h, \quad (20-14)$$

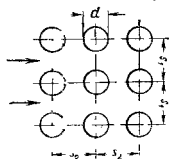


Рис 20-2 К расчету сопротивления коридорных пучков труб

где h — расстояние по вертикали между входом и выходом теплоносителя, м; ρ и ρ_0 — средние плотности теплоносителя и окружающего воздуха, кг/м³; Δp_c измеряется в паскалях.

Знак плюс берется при движении теплоносителя сверху вниз, знак минус — при движении снизу вверх. Это значит, что в первом случае общее сопротивление движению теплоносителя увеличивается на величину Δp_c , во втором случае — уменьшается на Δp_c . Если теплообменник не сообщается с окружающим воздухом (включен в замкнутую систему), то $\Delta p_c = 0$.

Для получения полного сопротивления теплообменного устройства выбранной конструкции и с конкретными теплоносителями полученные составляющие $\Sigma \Delta p_{пт}$, $\Sigma \Delta p_{мс}$, $\Sigma \Delta p_y$ и $\Sigma \Delta p_c$ подставляют в уравнение (20-1)

20-3. РАСЧЕТ МОЩНОСТИ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Гидравлическое сопротивление Δp , подсчитанное по формуле (20-1), предопределяет величину мощности, необходимой для перемещения теплоносителя через теплообменный аппарат.

Мощность N , Вт, на валу насоса или вентилятора определяется по формуле

$$N = \frac{V \Delta p}{\eta} = \frac{G \Delta p}{\rho \eta}, \quad (20-15)$$

где V — объемный расход жидкости, м³/с, G — массовый расход жидкости, кг/с; Δp — полное сопротивление, Па; ρ — плотность жидкости или газа, кг/м³; η — к. п. д. насоса или вентилятора.

При выборе оптимальных форм и размеров поверхности нагрева теплообменника принимают наивыгоднейшее соотношение между поверхностью теплообмена и расходом энергии на движение теплоносителей. Добиваются, чтобы указанное соотношение было оптимальным, т. е. экономически наиболее выгодным. Это соотношение устанавливается на основе технико-экономических расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Международная система единиц (СИ)

Величина	Единица измерения	Сокращенное обозначение единицы

Основные единицы

Длина	Метр	м
Масса	Килограмм	кг
Время	Секунда	с
Сила электрического тока	Ампер	А
Термодинамическая температура	Кельвин	К
Сила света	Свеча	св

Некоторые производные единицы

Площадь	Квадратный метр	м ²
Объем	Кубический метр	м ³
Скорость	Метр в секунду	м/с
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	м/с ²
Плотность	Килограмм на кубический метр	кг/м ³
Сила	Ньютон	Н(кг·м/с ²)
Давление	Ньютон на квадратный метр	Н/м ²
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на квадратный метр	Н·с/м ²
Кинематическая вязкость	Квадратный метр на секунду	м ² /с
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль	Дж(Н·м)
Мощность, тепловой поток	Ватт	Вт(Дж/с)
Удельная теплоемкость	Джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)
Теплота фазового превращения, энтальпия	Джоуль на килограмм	Дж/кг
Плотность теплового потока	Ватт на квадратный метр	Вт/м ²
Коэффициент теплопроводности	Ватт на метр-Кельвин	Вт/(м·К)
Коэффициент теплоотдачи (теплопередачи)	Ватт на квадратный метр-кельвин	Вт/(м ² ·К)
Коэффициент излучения	Ватт на квадратный метр-кельвин в четвертой степени	Вт/(м ² ·К ⁴)

Таблица 2

Перевод величин из единиц измерения системы МКГСС в международную систему единиц (СИ)

Энергия	1 ккал=4,187 кДж
Сила	1 кгс=9,81 Н
Удельный вес	1 кгс/м ³ =9,81 Н/м ³
Плотность	1 кгс·с ² /м ⁴ =9,81 кг/м ³
Давление	1 кгс/см ² =9,81 Н/см ²
Коэффициент динамической вязкости	1 кгс·с/м ² =9,81 (Н·с)/м ²
Теплоемкость	1 ккал/кг·град=4,187 кДж/(кг·К)
Энтальпия, теплота фазового превращения	1 ккал/кг=4,187 кДж/кг
Тепловой поток	1 ккал/ч=1,163 Вт
Плотность теплового потока	1 ккал/(м ² ·ч)=1,163 Вт/м ²
Объемная плотность теплового потока	1 ккал/(м ³ ·ч)=1,163 Вт/м ³
Коэффициент теплопроводности	1 ккал/(м·ч·град)=1,163 Вт/м·К
Коэффициент теплоотдачи	1 ккал/(м ² ·ч·град)=1,163 Вт/(м ² ·К)
Коэффициент излучения	1 ккал/(м ² ·ч·К)=1,163 Вт/(м ² ·К ⁴)

Таблица 3

Плотность ρ , коэффициент теплопроводности λ и удельная теплоемкость c строительных теплоизоляционных и других материалов

Материал	ρ , кг/м ³	t° , °C	λ , Вт/(м·K)	c , кДж/(кг·K)
Альфонс при толщине воздушных слоев 10 мм	—	—	$0,0302 + 0,85 \cdot 10^{-4}$	—
Асбест распушенный:				
3-й сорт	340	—	$0,087 + 0,24 \cdot 10^{-3}$	0,816
6-й сорт	650	—	$0,11 + 0,19 \cdot 10^{-3}$	0,816
Асбестовый картон	900	—	$0,16 - 0,17 \cdot 10^{-3}$	0,816
Асбестовый шнур	800	—	$0,13 - 0,15 \cdot 10^{-3}$	0,816
Асбошифер:				
с высоким содержанием асбеста	1800	20	$0,17 - 0,35$	—
с 10—50% асбеста (сухой)	1800	20	$0,64 - 0,52$	—
Асфальт	2120	0—30	$0,60 - 0,74$	1,67
Бетон с каменным щебнем	2000	0	1,28	0,84
То же сухой	1600	0	0,84	—
Железобетон набивной	2200	0	1,55	0,84
Шлакобетон	1500	0	0,70	0,80
Бумага обыкновенная	—	20	0,14	1,51
Вата хлопчатобумажная	80	30	0,042	—
Гипс (формованный сухой)	1250	20	0,43	0,8—0,92
Глина	2000—1600	20	$0,9 - 0,7$	0,84
Глина огнеупорная	1845	450	1,04	1,09
Гравий	1840	20	0,36	—
Дельта-древесина	—	35—70	0,21	—
Дерево:				
дуб поперек волокон	825	0—15	$0,20 - 0,21$	2,39
дуб вдоль волокон	819	12—50	$0,35 - 0,43$	2,39
сосна поперек волокон	546	0—50	$0,14 - 0,16$	2,72
сосна вдоль волокон	—	20—25	$0,35 - 0,72$	2,72
Каменный уголь:				
газовый	1420	20—100	$3,6 - 4,0$	—
обыкновенный твердый	1200—1350	20	$0,24 - 0,27$	—
аменугольная пыль	730	30—150	$0,12 - 0,13$	—
Картон	—	20	$0,14 - 0,35$	1,51
Кембрик (лакированный)	—	38	0,157	—
Кирпич:				
красный машинной формовки	1800	0	0,77	0,88
красный ручной формовки	1700	0	0,70	0,88
силикатный	1900	0	0,81	0,84
Кладка из красного кирпича:				
на холодном растворе	1700	0	0,81	0,88
на теплом растворе	1600	0	0,67	0,84
Кладка из силикатного кирпича:				
на холодном растворе	1900	0	0,87	0,84
на теплом растворе	1700	0	0,76	0,80
Кладка бутовая из камней средней плотности	2000	0	1,28	0,88
Карболит черный	1150	50	0,231	—
Кожа	—	20	$0,14 - 0,16$	—
Кокс порошкообразный	449	100	0,191	1,21
Котельная накиль:				
богатая гипсом	2000—2700	100	$0,7 - 2,3$	—
богатая известью	1000—2500	100	$0,15 - 2,3$	—
богатая силикатом	300—1200	100	$0,08 - 0,23$	—
Кварц кристаллический:				
поперек оси	—	0	0,72	—
вдоль оси	—	0	1,94	—
Ламповая сажа	165	40	$0,07 - 0,12$	—

Материал	ρ , кг/м³	t^* , °C	λ , Вт/(м·К)	c , кДж/(кг·К)
Лед	917	0	2,2	2,26
Лед	928	—100	3,5	1,17
Льняная ткань	—	—	0,088	—
Магnezия в форме сегментов для изоляции труб	266	50—200	0,073—0,084	—
Мел	2000	50	0,9	0,88
Миканит	—	20	0,21—0,41	—
Мрамор	2800	0	3,5	0,92
Парафин	920	20	0,27	—
Песок речной мелкий (сухой)	1520	0—160	0,30—0,38	0,80
Песок речной мелкий (влажный)	1650	20	1,13	2,09
Прессшпан	—	20—50	0,26—0,22	—
Плексиглас	—	20	0,184	—
Пробковые плиты сухие	148—198	80	0,042—0,053	1,76
Пробковая мелочь, величина куса 4—5 мм	85	0,60	0,044—0,058	1,76
Резина:				
твердая обыкновенная	1200	0—100	0,157—0,160	1,38
мягкая	—	20	0,13—0,16	1,38
Сахарный песок	1600	0	0,58	1,26
Сера ромбическая	—	21	0,28	0,762
Сланец	—	94	1,49	—
Слюда (поперек слоев)	2600—3200	20	0,46—0,58	—
Снег:				
свежевыпавший	200	—	0,10	2,09
уплотненный	400	—	0,46	2,09
Стекло:				
зеркальное	2550	0—100	0,78—0,88	0,779
обыкновенное	2500	20	0,74	0,67
термометрическое	2590	20	0,96	—
пирекс	—	0	1,04	—
то же	—	400	1,55	—
кварцевое	—	400	1,76	—
то же	—	800	2,40	—
то же	—	1200	3,05	—
Стеклянная вата	154—206	88	0,051—0,059	—
Текстолит	1300—1400	20	0,23—0,34	1,46—1,51
Фарфор	2400	95	1,04	1,09
То же	2400	1055	1,96	1,09
Фибра красная	1290	20—100	0,46—0,50	—
Фибролит	360—440	80	0,073—0,128	—
Целлюлоид	1400	30	0,21	—
Шелк	100	0—93	0,043—0,06	—
Эбонит	1200	20	0,157—0,17	—
Шлак:				
котельный	1000	0	0,29	0,75
доменный гранулированный	500	0	0,15	0,75
Штукатурка:				
известковая	1600	0	0,70	0,84
цементно-песчаная	1800	0	1,2	0,84
Фанера клееная	600	0	0,15	2,51
Древесный уголь кусковой	190	80	0,074	—

* Температура, для которой даны свойства.

Таблица 4

Физические свойства сухого воздуха при $p_R = 760$ мм рт. ст.

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p, \text{кДж/(кг}\cdot\text{K)}$	$\lambda \cdot 10^3, \text{Вт/(м}\cdot\text{K)}$	$\alpha \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\mu \cdot 10^6, \text{Н}\cdot\text{с/м}^2$	$\nu \cdot 10^4, \text{м}^2/\text{с}$	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,23	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,04	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	14,9	15,7	10,80	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,8	22,8	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,3	23,7	27,80	0,684
160	0,815	1,017	3,64	43,9	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,5	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,0	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,9	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,2	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,1	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	163,4	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	188,8	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	216,2	46,7	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	276,2	51,2	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	316,5	53,5	233,7	0,724

Таблица 5

Физические свойства воды на линии насыщения

$t, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-3}, \text{Па}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$i, \text{кДж/кг}$	$c_p, \text{кДж/(кг}\cdot\text{K)}$	$\lambda \cdot 10^3, \text{Вт/(м}\cdot\text{K)}$	$\alpha \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\mu \cdot 10^6, \text{Н}\cdot\text{с/м}^2$	$\nu \cdot 10^4, \text{м}^2/\text{с}$	$\beta \cdot 10^4, 1/\text{K}$	$\sigma \cdot 10^4, \text{Н/м}$	Pr
0	1,013	999,9	0	4,212	55,1	13,1	1788	1,789	-0,63	756,4	13,67
10	1,013	999,7	42,04	4,191	57,4	13,7	1306	1,306	+0,70	741,6	9,52
20	1,013	998,2	83,91	4,183	59,9	14,3	1004	1,006	1,82	726,9	7,02
30	1,013	995,7	125,7	4,174	61,8	14,9	801,5	0,805	3,21	712,2	5,42
40	1,013	992,2	167,5	4,174	63,5	15,3	653,3	0,659	3,87	696,5	4,31
50	1,013	988,1	209,3	4,174	64,8	15,7	549,4	0,556	4,49	676,9	3,54
60	1,013	983,1	251,1	4,179	65,9	16,0	469,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	1,013	977,8	293,0	4,187	66,8	16,3	406,1	0,415	5,70	643,5	2,55
80	1,013	971,8	335,0	4,195	67,4	16,6	355,1	0,365	6,32	625,9	2,21
90	1,013	965,3	377,0	4,208	68,0	16,8	314,9	0,326	6,95	607,2	1,95
100	1,013	958,4	419,1	4,220	68,3	16,9	282,5	0,295	7,52	588,6	1,75

$t, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-3}, \text{Па}$	$P, \text{кг/м}^2$	$i, \text{кДж/кг}$	$C_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$\lambda \cdot 10^3, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$\alpha \cdot 10^8, \text{м}^2/\text{с}$	$\mu \cdot 10^6, \text{Н} \cdot \text{с/дн}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\beta \cdot 10^4, 1/\text{K}$	$\sigma \cdot 10^4, \text{Н/м}$	Pr
110	1,43	951,0	461,4	4,233	68,5	17,0	259,0	0,272	8,08	569,0	1,60
120	1,98	943,1	503,7	4,250	68,6	17,1	237,4	0,252	8,64	548,4	1,47
130	2,70	934,8	546,4	4,266	68,6	17,2	217,8	0,233	9,19	528,8	1,36
140	3,61	926,1	589,1	4,287	68,5	17,2	201,1	0,217	9,72	507,2	1,26
150	4,76	917,0	632,2	4,313	68,4	17,3	186,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	6,18	907,0	675,4	4,346	68,3	17,3	173,6	0,191	10,7	466,0	1,10
170	7,92	897,3	719,3	4,380	67,9	17,3	162,8	0,181	11,3	443,4	1,05
180	10,03	886,9	763,3	4,417	67,4	17,2	153,0	0,173	11,9	422,8	1,00
190	12,55	876,0	807,8	4,459	67,0	17,1	144,2	0,165	12,6	400,2	0,96
200	15,55	863,0	852,5	4,505	66,3	17,0	136,4	0,158	13,3	376,7	0,93
210	19,08	852,8	897,7	4,555	65,5	16,9	130,5	0,153	14,1	354,1	0,91
220	23,20	840,3	943,7	4,614	64,5	16,6	124,6	0,148	14,8	331,6	0,89
230	27,98	827,3	990,2	4,681	63,7	16,4	119,7	0,145	15,9	310,0	0,88
240	33,48	813,6	1037,5	4,756	62,8	16,2	114,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	39,78	799,0	1085,7	4,844	61,8	15,9	109,9	0,137	18,1	261,9	0,86
260	46,94	784,0	1135,7	4,949	60,5	15,6	105,9	0,135	19,7	237,4	0,87
270	55,05	767,9	1185,7	5,070	59,0	15,1	102,0	0,133	21,6	214,8	0,88
280	64,19	750,7	1236,8	5,230	57,4	14,6	98,1	0,131	23,7	191,3	0,90
290	74,45	732,3	1290,0	5,485	55,8	13,9	94,2	0,129	26,2	168,7	0,93
300	85,92	712,5	1344,9	5,736	54,0	13,2	91,2	0,128	29,2	144,2	0,97
310	98,70	691,1	1402,2	6,071	52,3	12,5	88,3	0,128	32,9	120,7	1,03
320	112,90	667,1	1462,1	6,574	50,6	11,5	85,3	0,128	38,2	98,10	1,11
330	128,65	640,2	1526,2	7,244	48,4	10,4	81,4	0,127	43,3	76,71	1,22
340	146,08	610,1	1594,8	8,165	45,7	9,17	77,5	0,127	53,4	56,70	1,39
350	165,37	574,4	1671,4	9,504	43,0	7,88	72,6	0,126	66,8	38,16	1,60
360	186,74	528,0	1761,5	13,984	39,5	5,36	66,7	0,126	109	20,21	2,35
370	210,53	450,5	1892,5	40,321	33,7	1,86	56,9	0,126	164	4,709	6,79

Таблица 6

Физические свойства дымовых газов

(B = 760 мм рт. ст. $\approx 1,01 \cdot 10^5$ Па; $\bar{P}_{\text{CO}_2} = 0,13$; $\bar{P}_{\text{H}_2\text{O}} = 0,11$; $\bar{P}_{\text{N}_2} = 0,76$)

[Л. 13]

$t, ^\circ\text{C}$	$P, \text{кг/м}^2$	$C_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{C)}$	$\lambda \cdot 10^3, \text{Вт/(м} \cdot \text{C)}$	$\alpha \cdot 10^8, \text{м}^2/\text{с}$	$\mu \cdot 10^6, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	Pr
0	1,295	1,042	2,28	16,9	15,8	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	30,8	20,4	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	48,9	24,5	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	69,9	28,2	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	94,3	31,7	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	121,1	34,8	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	150,9	37,9	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	183,8	40,7	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	219,7	43,4	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,0	258,0	45,9	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	303,4	48,4	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	345,5	50,7	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,62	392,4	53,0	221,0	0,56

Таблица 7

Физические свойства трансформаторного масла в зависимости от температуры [Л. 27]

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$C_p, \text{кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$	$\lambda, \text{Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$	$\mu\cdot 10^4, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\nu\cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\alpha\cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\beta\cdot 10^4, \text{К}^{-1}$	Pr
0,0	892,5	1,549	0,1123	629,8	70,5	8,14	6,80	866
10	886,4	1,620	0,1115	335,5	37,9	7,83	6,85	484
20	880,3	1,666	0,1106	198,2	22,5	7,56	6,90	298
30	874,2	1,729	0,1098	128,5	14,7	7,28	6,95	202
40	868,2	1,788	0,1090	89,4	10,3	7,03	7,00	145
50	862,1	1,846	0,1082	65,3	7,58	6,80	7,05	111
60	856,0	1,905	0,1072	49,5	5,78	6,58	7,10	87,8
70	850,0	1,964	0,1064	38,6	4,54	6,36	7,15	71,3
80	843,9	2,026	0,1056	30,8	3,66	6,17	7,20	59,3
90	837,8	2,085	0,1047	25,4	3,03	6,00	7,25	50,5
100	831,8	2,144	0,1038	21,3	2,56	5,83	7,30	43,9
110	825,7	2,202	0,1030	18,1	2,20	5,67	7,35	38,8
120	819,6	2,261	0,1022	15,7	1,92	5,50	7,40	34,9

Таблица 8

Физические свойства ртути и некоторых расплавленных металлов [Л. 9]

Наименование металлов	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\lambda, \text{Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$	$C_p, \text{кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$	$\alpha\cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\nu\cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\text{Pr}\cdot 10^4$
Ртуть Hg $t_{\text{пл}}=38,9^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=357^\circ\text{C};$ $\rho_{\text{пл}}=11,72 \text{ кДж/кг};$ $\rho_{\text{ис}}=291,8 \text{ кДж/кг}$	20	13 550	7,90	0,1390	4,36	11,4	2,72
	100	13 350	8,95	0,1373	4,89	9,4	1,92
	150	13 230	9,65	0,1373	5,30	8,6	1,62
	200	13 120	10,3	0,1373	5,72	8,0	1,40
	300	12 880	11,7	0,1373	6,64	7,1	1,07
Олово Sn $t_{\text{пл}}=231,9^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=2270^\circ\text{C}$ $\rho_{\text{пл}}=58,2 \text{ кДж/кг};$ $\rho_{\text{ис}}=3015 \text{ кДж/кг}$	250	6980	34,1	0,255	19,2	27,0	1,41
	300	6940	33,7	0,255	19,0	24,0	1,26
	400	6865	33,1	0,255	18,9	20,0	1,06
	500	6790	32,6	0,255	18,8	17,3	0,92
Висмут В $t_{\text{пл}}=271^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=1477^\circ\text{C};$ $\rho_{\text{пл}}=50,2 \text{ кДж/кг};$ $\rho_{\text{ис}}=855,4 \text{ кДж/кг}$	300	10 030	13,0	0,151	8,61	17,1	1,98
	400	9910	14,4	0,151	9,72	14,2	1,46
	500	9785	15,8	0,151	10,8	12,2	1,13
	600	9660	17,2	0,151	11,9	10,8	0,91
Литий Li $t_{\text{пл}}=179^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=1317^\circ\text{C};$ $\rho_{\text{пл}}=661,5 \text{ кДж/кг};$ $\rho_{\text{ис}}=19 595 \text{ кДж/кг}$	200	515	37,2	4,187	17,2	111,0	6,43
	300	505	39,0	4,187	18,3	92,7	5,03
	400	495	41,9	4,187	20,3	81,7	4,04
	500	484	45,3	4,187	22,3	73,4	3,28
Сплав 56,5% Bi + 43,5% Pb $t_{\text{пл}}=123,5^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=1670^\circ\text{C}$	150	10 550	9,8	0,146	6,39	28,9	4,50
	200	10 490	10,3	0,146	6,67	24,3	3,64
	300	10 360	11,4	0,146	7,50	18,7	2,50
	400	10 240	12,6	0,146	8,33	15,7	1,87
	500	10 120	14,0	0,146	9,44	13,6	1,44
Сплав 25% Na + 75% K $t_{\text{пл}}=-11^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=784^\circ\text{C}$	100	852	23,2	1,143	23,9	60,7	2,51
	200	828	24,5	1,072	27,6	45,2	1,64
	300	808	25,8	1,038	31,0	36,6	1,18
	400	778	27,1	1,005	34,7	30,8	0,89
	500	753	28,4	0,967	39,0	26,7	0,69
	600	729	29,6	0,934	43,6	23,7	0,54
	700	704	30,9	0,900	48,8	21,7	0,44
Натрий Na $t_{\text{пл}}=97,8^\circ\text{C}; t_{\text{кип}}=883^\circ\text{C};$ $\rho_{\text{пл}}=113,26 \text{ кДж/кг};$ $\rho_{\text{ис}}=4208 \text{ кДж/кг}$	150	916	84,9	1,356	68,3	59,4	0,87
	200	903	81,4	1,327	67,8	50,6	0,75
	300	878	70,9	1,281	63,0	39,4	0,63
	400	854	63,9	1,273	58,9	33,0	0,56
	500	829	57,0	1,273	54,2	28,9	0,53

Таблица 9

Степень черноты полного излучения различных материалов [Л. 24]

Материал и характер поверхности	$t, ^\circ\text{C}$	ϵ
Металлы		
Алюминий:		
полированный	225—575	0,039—0,057
шероховатый	26	0,055
окисленный при 600°C	200—600	0,11—0,19
Вольфрам	230—2230	0,053—0,31
Вольфрамовая нить	3300	0,39
Железо:		
электролитное, тщательно полированное	175—225	0,052—0,064
сварочное, тщательно полированное	40—250	0,28
полированное	425—1020	0,14—0,377
свежеобработанное наждаком	20	0,242
литое необработанное	925—1115	0,87—0,95
Стальное литье полированное	770—1040	0,52—0,56
Сталь:		
листовая шлифованная	940—1100	0,52—0,61
окисленная при 600°C	200—600	0,79
окисленная, шероховатая	40—370	0,94—0,97
Чугун:		
полированный	200	0,21
обточенный	830—990	0,60—0,70
окисленный при 600°C	200—600	0,64—0,78
шероховатый, сильно окисленный	40—250	0,96
Золото тщательно полированное	225—625	0,018—0,035
Латунь:		
тщательно полированная, состав (по массе) 73,2% Cu, 26,7% Zn	245—355	0,028—0,031
прокатанная с естественной поверхностью	22	0,06
тусклая	50—350	0,22
окисленная при нагреве до 600°C	200—600	0,61—0,59
Медь:		
тщательно полированная электролитная	80	0,018
полированная	115	0,023
продолжительно нагревшаяся, покрытая тол- стым слоем окиси	25	0,78
окисленная при нагреве до 600°C	200—600	0,57—0,55
Платина чистая полированная	225—625	0,054—0,105
Платиновые:		
лента	925—1115	0,12—0,17
нить	25—1230	0,036—0,192
проволока	225—1375	0,073—0,182
Хром	38—538	0,08—0,26
Огнеупорные, строительные, термоизоляционные и другие материалы		
Асбестовый картон	24	0,96
Огнеупорные материалы:		
слабо излучающие	500—1000	0,65—0,75
сильно излучающие	500—1000	0,80—0,90
Длинноватый кирпич шероховатый:		
неглазурованный	1000	0,8
глазурованный	1100	0,85
Шамотный кирпич глазурованный	1100	0,75
Красный кирпич шероховатый	20	0,93
Фарфор глазурованный	22	0,92
Штукатурка шероховатая известковая	10—90	0,91
Ламповая сажа, слой 0,075 мм и толще	40—370	0,95

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адрианов В. Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. М., «Энергия», 1972, 463 с.
2. Аладьев И. Т.—«Теплоэнергетика», 1963, № 4, с. 57—61.
3. Амбразевич А. В., Жукаускас А. А., Вазаткявичус П. Ю.—В кн.: Тепло- и массоперенос. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Т. 1, Ч. I, Минск, 1972, с. 121—127.
4. Ахунов Н. Х., Панфилов К. Б., Усманов А. Т.—«Теплофизика высоких температур», 1970, т. 9, № 4, с. 703—707.
5. Белов Г. Я.—«Теплофизика высоких температур», 1973, т. 11, № 4, с. 810—817.
6. Берман Л. Д.—«Труды НИИХиммаш», 1961, вып. 36, с. 66—89.
7. Берман Л. Д.—«Теплоэнергетика», 1964, № 3, с. 74—78.
8. Берман Л. Д., Туманов Ю. А.—«Теплоэнергетика», 1962, № 10, с. 77—83.
9. Берман Л. Д., Фукс С. Н.—«Теплоэнергетика», 1958, № 8, с. 66—74, 1959, № 7, с. 74—83.
10. Бойко Л. Д., Кружилин Г. Н.—«Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1966, № 2.
11. Блох А. Г. Основы теплообмена излучением. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, 331 с.
12. Боришанский В. М.—В кн.: Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, с. 18—36.
13. Боришанский В. М., Андриевский А. А., Жинкина В. Б., Шнейдерман Л. Л.—В кн.: Жидкие металлы. М., Госатомиздат, 1963, с. 183—205.
14. Боришанский В. М., Андриевский А. А., Фромзель В. Н., Фокин Б. С., Чистяков В. А., Данилова Г. П., Быков Г. С.—«Теплоэнергетика», 1971, № 11, с. 68—70.
15. Бриджмен П. В. Анализ размерностей. М.—Л., ОНТИ, 1934, 119 с.
16. Босворт Р. Ч. Л. Процессы теплового переноса. М., Гостехиздат, 1957, 275 с.
17. Бурдун Г. Д., Калашников Н. В., Стоцкий Л. Р. Международная система единиц. М., «Высшая школа», 1964, 274 с.
18. Бутузов А. И., Минаковский В. М. Обобщенные переменные теории переноса. Киев, «Вища школа», 1970, 100 с.
19. Ваничев А. П.—«Известия АН СССР. ОТН», 1946, № 5.
20. Варгафтик Н. Б. Теплофизические свойства веществ (справочник). М.—Л., Госэнергоиздат, 1956, 368 с.
21. Варгафтик Н. Б., Вошина А. А.—ИФЖ, 1973, т. 24, № 2, с. 290—293.
22. Вейник А. И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. М.—Л., Госэнергоиздат, 1959, 164 с.
23. Власов О. Е.—«Известия ВТИ», 1929, № 1(44), с. 5—25.
24. Володин Ю. Г., Дульнев Г. Н.—ИФЖ, 1965, т. 9, № 5, с. 603—608.
25. Волков Д. И. Кандидатская диссертация. Ленинградский кораблестроительный институт, 1962.
26. Вукалович М. П., Новиков И. И. Техническая термодинамика. М., «Энергия», 1968, 496 с.
27. Газодинамика разреженных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1963, 656 с.
28. Гиббс Д. В. Термодинамические работы. М., Гостехиздат, 1950, 492 с.
29. Голубев И. Ф. Вязкость газов и газовых смесей. М., Физматгиз, 1959, 375 с.
30. Гомелаури В. И.—«Труды Института физики АН Грузинской ССР», 1963, т. 9, с. 3—30.
31. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М., Изд-во иностр. лит., 1958, 568 с.
32. Григорьев В. А.—«Теплоэнергетика», 1973, № 9, с. 57—63.
33. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. М., «Высшая школа», 1973, 254 с.

34. Гухмаи А. А. Физические основы теплопередачи. Л.—М., Энергоиздат, 1984.
- 314 с.
35. Данилова Г. Н. Докторская диссертация. ЛТИХП, 1968.
36. Девнен М. Течения и теплообмен разреженных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 187 с.
37. Дервгин Б. В.—В кн.: Краткая химическая энциклопедия. «Советская энциклопедия», 1965, т. 4, с. 500—501.
38. Дерягин Б. В., Нерпин С. В., Чураев Н. В.—Коллоидный журнал, 1964, т. 26, № 3, с. 301—307.
39. Дорошук В. Е., Левитан Л. Л., Ландман Ф. П.—«Теплофизика высоких температур», 1973, т. 11, № 4, с. 788—793.
40. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., «Мир», 1966. 439 с.
41. Дульнев Г. Н., Семьяшкин Э. М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. Л., «Энергия», 1968. 359 с.
42. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я., Козлова Л. Г.—В кн.: Тепло- массоперенос. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Т. 1, ч. III. Минск, 1972, с. 222—226.
43. Егоров Г. Н., Григорьев Ю. М.—«Светотехника», 1969, № 8, с. 14—16.
44. Жоров Г. А.—«Теплофизика высоких температур», 1972, т. 10, № 6, с. 1332—1334.
45. Жукаускас А. А.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 201—212.
46. Жукаускас А. А., Жюгжда И. И. Теплоотдача в ламинарном потоке жидкост. Вильнюс, «Минтис», 1969. 261 с.
47. Жукаускас А. А., Шланчяускас А. А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости. Вильнюс, «Минтис», 1973. 327 с.
48. Жукаускас А. А., Шланчяускас А. А.—«Теплоэнергетика», 1961, № 2, с. 72—75.
49. Загоров Ю. А., Лялюков А. С.—ИФЖ, 1966, т. 10, № 5, с. 577—583.
50. Зозуля Н. В.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 278—297. с. 450—461.
51. Зыкина-Моложен Л. М.—ЖТФ, 1959, т. XXIX, вып. 4. с. 450—461.
52. Зыкина-Моложен Л. М., Кузнецова В. М.—«Теплоэнергетика», 1969, № 7, с. 16—20.
53. Ивановский М. Н., Субботин В. И., Милованов Ю. В.—«Теплоэнергетика», 1967, № 6, с. 81—86.
54. Исаченко В. П.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 213—225.
55. Исаченко В. П.—«Теплоэнергетика», 1960, № 5, с. 9—14.
56. Исаченко В. П.—«Теплоэнергетика», 1962, № 9, с. 81—85, № 12, с. 54—56.
57. Исаченко В. П., Агабабов С. Г., Галин Н. М.—В кн.: Теплообмен и гидравлическое сопротивление. Труды МЭИ, 1965, вып. 63, с. 27—37.
58. Исаченко В. П., Богородский А. С.—«Теплоэнергетика», 1969, № 2, с. 79—82.
59. Исаченко В. П., Взоров В. В.—«Теплоэнергетика», 1961, № 3, с. 57—62.
60. Исаченко В. П., Взоров В. В., Вертоградский В. А.—«Теплоэнергетика», 1961, № 1, с. 65—72.
61. Исаченко В. П., Галин Н. М.—«Изв. вузов. Энергетика», 1965, № 6, с. 5—16.
62. Исаченко В. П., Саломзода Ф.—«Теплоэнергетика», 1969, № 5, с. 84—87.
63. Исаченко В. П., Саломзода Ф., Шалахов А. А.—«Теплоэнергетика», 1974, № 9, с. 15—18.
64. Каменщиков. Радиационные свойства газов при высоких температурах. М., Машиз, 1971.
65. Капица П. Л.—ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1, с. 3—28.
66. Капица П. Л., Капица С. П.—ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2, с. 105—120.
67. Карслоу Г., Егер Л. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 487 с.
68. Катинас В. И., Жюгжда И. И., Жукаускас А. А.—«Труды АН Литовской ССР», Серия Б, 1970, т. 4(63), с. 209—233.
69. Кирпичев М. В., Конаков П. К. Математические основы теории подобия. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949, 98 с.
70. Кирпичев М. В., Михеев М. А. Моделирование тепловых устройств. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936, 320 с.
71. Кирпичев М. В., Михеев М. А., Эйгенсон Л. С. Теплопередача. М.—Л., Госэнергоиздат, 1940, 292 с.
72. Кириллов П. Л., Смогалева И. П.—«Теплофизика высоких температур», 1973, т. 11, № 4, с. 794—804.
73. Кирпиченко Ю. А.—ИФЖ, 1972, т. 22, № 1, с. 5—12.

74. Ключников А. Д., Иванцов Г. П. Теплопередача излучением в огнетехнических установках. М., «Энергия», 1970, 400 с.
75. Конаков Ю. П.—ИФЖ, 1973, т. 24, № 5, с. 813—819.
76. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. ГИТТЛ, Гостехиздат. 1954, 408 с.
77. Кондратьев Г. М.—«Научные труды ЛИТМО», 1959, вып. 37, с. 5—16.
78. Коньков А. С., Модникова В. В.—«Теплоэнергетика», 1962, № 8, с. 77—81.
79. Кох.—«Теплопередача» (русс. перевод Trans. ASME, Ser. C), 1962, т. 84, № 1, с. 70—72.
80. Краснощеков Е. А., Протопопов В. С.—«Теплоэнергетика», 1960, № 10, с. 94—95.
81. Краснощеков Е. А., Протопопов В. С.—«Теплофизика высоких температур», 1966, т. 4, № 3, с. 389—398.
82. Краснощеков Е. А., Сукомел А. С. Задачник по теплопередаче. М., «Энергия», 1969, 264 с.
83. Кружилин Г. Н.—ЖТФ, 1936, т. VI, вып. 5, с. 858—865.
84. Кружилин Г. Н.—ЖТФ, 1937, т. VII, вып. 20/21, с. 2011—2017.
85. Кружилин Г. Н.—«Изв. АН СССР. ОН», 1948, № 7, с. 967—986.
86. Кузнецов Н. В., Щербakov А. З., Титова Е. Я.—«Теплоэнергетика», 1954, № 9, с. 27—32.
87. Кутателадзе С. С. Теплопередача при конденсации и кипении. М.—Л., Машгиз, 1952, 232 с.
88. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.—Л., Машгиз, 1962, 456 с.
89. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука» (СО), 1970, 660 с.
90. Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука» (СО), 1973, 227 с.
91. Кутателадзе С. С., Консетов В. В. «Известия вузов. Энергетика», 1961, № 11, с. 63—69.
92. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972, 341 с.
93. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1956, № 12, с. 47—50.
94. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1957, № 7, с. 72—80. ИФЖ, 1960, т. 3, № 8, с. 3—12; «Теплоэнергетика», 1957, № 2.
95. Лабунов Д. А.—«Доклады АН СССР», 1958, № 6.
96. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1960, № 5, с. 79—81, № 7, с. 76—80.
97. Лабунов Д. А.—ИФЖ, 1962, № 10.
98. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1959, № 12, с. 19—26. «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1963, № 1, с. 58—71.
99. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1963, № 5, с. 60—61.
100. Лабунов Д. А.—В кн.: Теплообмен и гидравлическое сопротивление. Труды МЭИ, 1965, вып. 63, с. 79—84.
101. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1972, № 3, с. 69—72.
102. Лабунов Д. А.—«Теплоэнергетика», 1972, № 9, с. 14—19.
103. Лабунов Д. А.—«Теплофизика высоких температур», 1972, т. 10, № 6, с. 1337—1338.
104. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964, 567 с.
105. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970, 343 с.
106. Леонтьев А. И.—«Теплоэнергетика», 1972, № 9, с. 19—24.
107. Леонтьев А. И., Кирдяшкин А. Г.—ИФЖ, 1965, № 1, с. 9—14.
108. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, 479 с.
109. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973, 904 с.
110. Лыков А. В. Тепломассообмен. Справочник. М., «Энергия», 1972, 560 с.
111. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, 600 с.
112. Ляликов А. С.—В кн.: Вопросы теплообмена и определения теплофизических свойств. Томск, 1971.
113. Мак-Адамс В. Х. Теплопередача. М., Металлургиздат, 1961, 686 с.
114. Ма Тун-цзе.—В кн.: Теплопередача. М., Изд-во АН СССР, 1952, с. 27—42.
115. Маурин Л. Н., Сорокин В. С.—Журнал прикладной механики и технической физики, 1962, № 4, с. 60—67.
116. Мень А. А.—«Труды Метрологич. институтов СССР», вып. 129 (189).
117. Мень А. А., Сергеев О. А.—«Труды Метрологич. институтов СССР», вып. 111 (171), 1971; «Теплофизика высоких температур», 1971, т. 9, № 2, с. 353—359.

118. Мешков В. В. Основы светотехники. Ч. 1. М.—Л., Госэнергоиздат, 1957.
119. Микк И. Р.—«Труды Таллинского политехн. института», 1963, № 206, с. 3—23, с. 25—44; ИФЖ, 1967, т. 13, № 2, с. 199—202.
120. Микк И. В., Эпик И. П.—ИФЖ, 1961, т. 4, № 6.
121. Миропольский З. Л.—«Теплоэнергетика», 1962, № 3, с. 79—83.
122. Мисиар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. М., «Мир», 1968, 460 с.
123. Михайлов А. И., Калинин Э. К., Ярхо С. А.—ИФЖ, 1966, т. 10, № 2, с. 158—163.
124. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М., Госэнергоиздат, 1956, 392 с.
125. Михеев М. А.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 122—137.
126. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М., «Энергия», 1973, 320 с.
127. Михеев М. А., Федынский О. С., Дерюгин В. М., Петров В. И.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 69—86.
128. Михеева И. М.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 226—238.
129. Муранов Ю. В., Ключкова Л. Ф.—«Теплофизика высоких температур», 1973, т. 11, № 2, с. 357—362.
130. Муратова Т. М., Лабуцов Д. А.—«Теплофизика высоких температур», 1969, т. 7, № 5, с. 959—967.
131. Мухин В. А., Сукомел А. С., Величко В. И.—ИФЖ, 1962, т. 5, № 11, с. 3—7.
132. Мучник Г. Ф., Рубашов И. Б. Методы теории теплообмена. Ч. 1, М., «Высшая школа», 1970, 288 с.
133. Накоряков В. Е. и др. Исследование турбулентных течений двухфазных сред. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, 1973.
134. Невский А. С. Лучистый теплообмен в печах и топках. М., «Металлургия», 1971, 440 с.
135. Несис Е. И.—ИФЖ, 1972, т. 23, № 1, с. 51—58.
136. Новиков И. И., Воскресенский К. Д. Прикладная термодинамика и теплопередача. М., Госатомиздат, 1961, 548 с.
137. Новиков В. С., Констанчук Д. М.—ИФЖ, 1972, т. 10, № 5, 1065—1072.
138. Орнатский А. П., Глушенко Л. Ф., Маевский Е. М.—«Теплоэнергетика», 1971, № 8, с. 74—76.
139. Осипова В. А. Экспериментальное исследование процессов теплообмена. М., «Энергия», 1969, 392 с.
140. Отс А. А.—«Труды Таллинского политехнического института». 1963, № 206, с. 57—66.
141. Отс А. А., Рандмай Р. Э.—В кн.: «Тепло- и массообмен. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло и массопереносу. Т. 2. Ч. II, Минск, 1972, с. 415—424.
142. Платунов Е. С. Теплофизические измерения в монотонном режиме. Л., «Энергия», 1973, 144 с.
143. Петухов Б. С. Опытное изучение процессов теплопередачи. М., Госэнергоиздат, 1952, 344 с.
144. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкостей в трубах. М., «Энергия», 1967, 412 с.
145. Петухов Б. С.—«Теплоэнергетика», 1972, № 9, с. 2—6.
146. Петухов Б. С., Григорьев В. С., Поляков А. Ф.—«Теплоэнергетика», 1973, № 3, с. 71—74.
147. Петухов Б. С., Кириллов В. В.—«Теплоэнергетика», 1958, № 4.
148. Петухов Б. С., Ковалев С. А.—«Теплоэнергетика», 1962, № 5, с. 65—70.
149. Петухов Б. С., Краснощеков Е. А., Нольде Л. Д.—«Теплоэнергетика», 1956, № 12, с. 41—47.
150. Петухов Б. С., Нольде Л. Д.—«Теплоэнергетика», 1959, № 1, с. 72—80.
151. Петухов Б. С., Поляков А. Ф.—«Теплофизика высоких температур», 1967, т. 5, № 1, с. 87—95.
152. Поляк Г. Л.—ЖТФ, 1935, т. V, вып. 3, с. 436—466.
153. Поляк Г. Л.—В кн.: Конвективный и лучистый теплообмен. М., Изд-во АН СССР, 1960, с. 118—132.
154. Попов Ю. А., Шварцблат Р. Л.—«Теплофизика высоких температур», 1973, т. 11, № 4, с. 741—749.
155. Предводителев А. С.—ЖФХ, 1948, т. XXII, вып. 3, с. 339—348.
156. Пчелкин И. М.—В кн.: Конвективный и лучистый теплообмен. М., Изд-во АН СССР, 1960, с. 56—64.

157. Рассохин Н. Г., Швецов Р. С.—«Энергомашиностроение», 1971, № 9, с. 44—45; «Теплоэнергетика», 1969, № 7, с. 91—92.
158. Рутяни Г. В., Шекриладзе И. Г.—«Теплоэнергетика», 1964, № 3, с. 78—80.
159. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
- 428 с.
160. Скрипов В. П., Дубровина Э. М.—ИФЖ, 1971, т. 20, № 4, с. 725—729.
161. Солодов А. П., Исаченко В. П.—В кн.: Теплообмен и гидравлическое сопротивление. Труды МЭИ, 1965, вып. 63, с. 121—139.
162. Солодов А. П., Исаченко В. П.—«Теплофизика высоких температур», 1967, т. 5, № 6, с. 1032—1039.
163. Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л., «Энергия», 1971.
- 294 с.
164. Справочник машиностроителя. т. 11, 2-е изд., М., Машгиз, 1956. 560 с.
165. Стерман Л. С., Стоиши Н. Г.—В кн.: Теплоотдача и гидродинамика. М., Машгиз, 1951, с. 51—82.
166. Стермаи Л. С., Чечет Г. Г.—В кн.: Тепло- и массоперенос. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Т. 2, Ч. 1, Минск, 1972, с. 315—321.
167. Стирикович М. А., Миропольский З. Л.—В кн.: Теплообмен при высоких давлениях. М., Госэнергоиздат, 1964.
168. Стоиши Н. Г.—В кн.: Вопросы теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. М., Госэнергоиздат, 1953, с. 173—182; ЖТФ, 1953, т. XXII, вып. 11, с. 1920—1930.
169. Стоиши Н. Г.—В кн.: Тепло- и массоперенос. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Т. 2, Ч. I, Минск, 1972, с. 164—168.
170. Субботин В. И., Ивановский М. И., Сорокин В. П., Чулков Б. А.—«Теплофизика высоких температур», 1964, т. 2, № 4, с. 616—622.
- 170а. Субботин В. И., Сорокин Д. Н., Кудрявцев А. П.—«Теплофизика высоких температур», 1968, № 6.
171. Субботин В. И., Минашин В. Е., Денискин Е. И.—«Теплофизика высоких температур», 1963, т. 1, № 2, с. 238—245.
172. Субботин В. И., Ушаков П. А., Габриэлович Б. Н., Таранов В. Д., Свириденко И. П.—ИФЖ, 1963, № 4, с. 16—21.
173. Сукомел А. С. Теплопроводность, М., Изд. МЭИ, 1962, 120 с.
174. Сукомел А. С., Величко В. И., Абросимов Ю. Г.—«Теплоэнергетика», 1973, № 9, с. 64—66.
175. Суринов Ю. А.—«Известия АН СССР. ОТН», 1948, № 7, с. 981—1002.
176. Суринов Ю. А.—«Известия АН СССР. ОТН», 1952, № 9, с. 1331—1352, № 10, с. 1455—1471.
177. Суринов Ю. А.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. Изд-во АН СССР, 1959, с. 319—349.
178. Суринов Ю. А.—В кн.: «Проблемы энергетики», М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 423—469.
179. Суринов Ю. А.—«Теплофизика высоких температур», 1972, т. 10, № 4, с. 844—852.
180. Теория теплообмена. Сборник рекомендуемых терминов. М., «Наука», 1971, вып. 83, 80 с.
181. Теплообмен в высокотемпературном потоке газа. (Сборник статей под ред. А. А. Журавлевского.) Вильнюс, «Минтис», 1972, 231 с.
182. Теплофизический справочник, т. I. М., Госэнергоиздат, 1957, 728 с.
183. Успехи теплопередачи. (Сборник статей.) М., «Мир», 1971, 576 с.
184. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М., «Наука», 1964, 814 с.
185. Фастовский В. Г., Ровинский А. Е.—«Теплоэнергетика», 1957, № 1, с. 39—42.
186. Федоткин И. М., Константинов С. М., Терещенко А. А.—ИФЖ, 1973, т. 24, № 5, с. 831—835.
187. Федоткин И. М., Ткаченко С. И., Степчук И. Д., Ботин А. Н., Глоба В. З.—«Теплоэнергетика», 1972, № 11, с. 49—51.
188. Федынский О. С.—В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 107—121.
189. Филимонов С. С.—В кн.: Двухфазные потоки и вопросы теплообмена. М., «Наука», 1970.
190. Филиппов Л. П. Исследование теплопроводности жидкостей, М., Изд-во МГУ, 1970, 240 с.
191. Фукс С. Н.—«Теплоэнергетика», 1957, № 1, с. 35—39.
192. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963. 680 с.

193. Цедерберг Н. В. Теплопроводность газов и жидкостей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963. 408 с.
194. Цедерберг Н. В., Попов В. Н., Морозова Н. А. Теплофизические свойства гелия. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961. 120 с.
195. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
196. Чиркин В. С. Теплофизические свойства веществ. М., Физматгиз, 1959. 356 с.
197. Чудиновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. М., Физматгиз, 1962. 456 с.
198. Шак А. Промышленная теплопередача. М., Metallurgizdat, 1961. 528 с.
199. Шевелков В. Л. Теплофизические характеристики изоляционных материалов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958. 96 с.
200. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965. 218 с.
201. Шланцяускас А. А., Пядишос А. А., Жукаускас А. А. «Труды АН Лит. ССР», Серия Б, 1971, т. 2(65), с. 131—142.
202. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969. 744 с.
203. Шлыков Ю. П., Кобляков А. Н.—В кн.: Тепло- и массоперенос. Труды IV Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу. Т. 2. Ч. I. Минск, 1972, с. 3—15.
204. Шейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 480 с.
205. Шорин С. Н. Теплопередача. М., «Высшая школа», 1964. 490 с.
206. Эдвардс Д. К.—«Теплопередача», пер. с англ., № 2, 1962.
207. Эйгенсон Л. С. Моделирование. М., «Советская наука», 1952. 372 с.
208. Эйгенсон Л. С. Лекции по курсу «Основы теплотехники». Ч. 2, вып. 1, М., Изд. ВЗЭИ, 1957. 218 с.
209. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М., Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
210. Якоб М. Вопросы теплопередачи. М., Изд-во иностранной литературы, 1960. 520 с.
211. Ягов В. В. Кандидатская диссертация. МЭИ, 1971.
212. Edwards D. K., Balakrishnan A.—«Int. J. Heat Mass Transfer», 1973, vol. 16, p. 25—40.
213. Fourier J. B. J. Theorie analytique de la chaleur, Paris, 1882.
- 213a. Fritz W.—«Phys. Z.», 36, 379 (1935).
214. Lyon R. N.—«Chem. Eng. Progress», 1951, vol. 47, № 2.
215. Nusselt W.—«Ztschr. der VDI», 1916, Bd 60, S. 541—569.
216. Seban R. A., Shimazaki T. T.—«Trans. ASME», 1951, vol. 73, № 6.
217. Zukauskas A.—In: Advances in heat transfer, vol. 8. New York—London, Academic Press, 1972.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абляция 250
Абсолютно черное тело 365
Автомодельность 168
Адгезия 298
Адиабатная температура 252
Аналогия гидротепловая 122
— Рейнольдса 197
— тройная 338
— электротепловая 117
Архимеда число 154

Б

Бародиффузия 330
Безразмерные переменные 152
Белая поверхность 365
Био число 53, 153
Бугера закон 421

В

Вектор излучения 369
Взаимная поверхность излучения 394, 395
Вина закон 371
Внутренние источники теплоты 19, 65
Водяной эквивалент 443
Волновое движение пленки конденсата 273
Вынужденное движение 126
Вязкий подслон 193

Г

Галилея число 274
Геометрические свойства лучистых потоков 396
Гидравлический диаметр 217
Гидравлическое сопротивление при течении в трубах 214, 461
— — пучков труб 462
— — теплообменников 460
Гидрофобизаторы 264
Градиент концентрации 329

Градиент температуры 9
Граничные условия 22, 137
Грасгофа число 153

Д

Дарси закон 214
Двухфазный поток внутри труб при кипении 312
— — — — — конденсации 279
Диатермические тела 365
Диссипация механической энергии 128
Дифференциальное уравнение движения 132, 152
— — массоотдачи 336
— — сплошности 136, 152
— — теплопроводности 17
— — энергии 130, 151
Дифференциальные уравнения тепло- и массообмена 332
— — — — — при химических превращениях 353
Диффузионный перенос тепла 332
Диффузия 328
Длина пути смешения 146

Ж

Жидкие металлы, теплоотдача при вынужденном течении 242
— — — — — конденсации 293

З

Закон Бугера 421
— Вина 371
— Дарси 214
— действующих масс 353
— Кирхгофа 374
— Ламберта 375
— Ньютона — Рихмана 126, 254, 357
— Планка 370
— Пуазейля 462

Закон Релея — Джинса 371
— Стефана — Больцмана 372
— Фика 329
— Фурье 10
Зеркальная поверхность 365

И

Излучение 5, 361
— равновесное 370
— результирующее 366
— селективное 362, 430
— собственное 364
— эффективное 366
Изотермические поверхности 9
Изотермическое течение в трубах 200
Интенсивность (яркость) излучения спектральная 363
Интенсификация теплопередач 46
Испарение жидкостей в парогазовую среду 344
— из пористой пластины 347

К

Кипение 293
— внутри труб 311
— пленочное 317
— поверхностное 304
— пузырьковое 306, 308
Кирхгофа закон 374
Конвекция 5, 125
— вынужденная 126
— естественная 126
Конденсация 263
— влажного пара 292
— внутри труб 279
— капельная 264, 285
— на пучках труб 283
— пара из парогазовой смеси 341
— паров жидких металлов 293
— перегретого пара 292
— пленочная 270, 279
Константа скорости реакции 353
— химического равновесия 353
Константы подобия 161
Коэффициент accommodation 257
— восстановления 252
— вязкости динамический 127
— — кинематический 127
— диффузии 329
— излучения абсолютно черного тела 373
— конденсации 265
— массоотдачи 336
— местного сопротивления 462

Коэффициент неравномерности распределения температур 103
— объемного расширения 129
— отражения 365
— permeability 191
— поглощения 365
— — газов и паров 430
— скольжения 259
— сопротивления трения 214, 461
— твердых тел 385
— температуропроводности 21
— теплоотдачи 20, 125
— — осредненный 175
— теплопередачи 30
— — линейный 37
— — через ребристую стенку 54
— — шаровой стенки 44
— теплопроводности 12
— — газов 13
— — жидкостей 14
— — твердых тел 15
— — эквивалентный 28, 241
— термодиффузии 330
— трения 197

Коэффициенты турбулентного переноса 146

Краевой угол 264, 297
Краевые условия 22, 136
Кризисы кипения 322
Критерии подобия 157
— — конвективного теплообмена 152
— — тепло- и массообмена 338
Критический диаметр 40
— радиус капли 287
— — пузырька 296

Л

Лайона уравнение 210
Ламберта закон 375
Ламинарный подслой 193
— режим течения 182, 210
Лапласа уравнение 287, 295
Линейная плотность теплового потока 36
Логарифмический закон распределения скорости 193
— — — температуры 196
Локальное моделирование 168
Льюиса — Семенова число 338, 355

М

Массоотдача 336
Масштаб турбулентности 148
Маха число 249
Моделирование локальное 168

Моделирование процессов излучения 419
— — конвективного теплообмена 149, 165
— — теплопроводности 117
Мощность внутренних источников теплоты 19

Н

Навье — Стокса уравнения 134
Направляющая точка 82
Неизотермическое течение 203, 461
Нуссельта число 153
— уравнение пленочной конденсации 272, 278
Ньютона — Рихмана закон 125, 254, 357

О

Объемное излучение 367
Определяемые числа подобия 157
Определяющая температура 179
Определяющие числа подобия 157
Определяющий размер 178

П

Паросодержание 313
Пекле число 139
Планка закон 370
Плотность интегрального излучения 363
— — — абсолютно черного тела 372
— — — газов и паров 432
— — — серых тел 373
Поверхностное натяжение 264
Пограничный слой гидродинамический 139
— — диффузионный 339
— — ламинарный 182
— — отрыв 222
— — тепловой 142
— — турбулентный 192
Подобие 149
Пористое охлаждение 62
Прандтля число 155
— — диффузионное 338
Противоток 445, 453
Прямоток 445, 453
Пуазейля закон 462
Пучки труб, гидравлическое сопротивление 462
— — теплоотдача 226

Р

Размерностей анализ 162
Разреженные газы 255
Расклинивающее давление 285
Регулярный режим 101
Режимы течения 143

Режимы течения в пучках труб 222
— — в трубах 210, 213
Рейнольдса число 141
Рекуперативные теплообменники 441

С

Сальдо, метод расчета теплообмена излучением 380
Серое тело 373
Сжимаемость 128, 250
Скорость химической реакции 352
Смачивание 264, 297
Собственная температура 252
Среднелогарифмический температурный напор 176, 447
Стабилизация гидродинамическая 200
— тепловая 203
Стантона число 197
Степень турбулентности 190
— черноты 373
— — эффективная 434
Стефана — Больцмана закон 372
Стефанов поток 337
Стехиометрические коэффициенты 350
Сублимация 249

Т

Темп охлаждения 102
Температура адиабатная (собственная) 252
— торможения 248
— черная 377
— яркостная 377
Температурное поле 8
Температурный фактор 186, 216, 254
Теорема о перемножении решений 98
Тепловой подслон 195
— поток 10
— — диффузионная составляющая 332
Теплоизоляционные материалы 17
Теплоотдача 5, 125
Теплопередача 6
— интенсификация 46
Теплопроводность 5, 10, 12
Теплота образования компонента смеси 351
— — — удельная 351
— химической реакции 350
Термическое сопротивление контактное 243
— — линейное 38
— — межфазное 266
— — плоской стенки 26, 28
— — теплопередачи 30

Термическое сопротивление шаровой
стенки 44

Термодиффузия 330

Термокапиллярное движение 289

Термохимия 350

Томсона уравнение 287

Турбулентного переноса коэффициенты
182

Турбулентное касательное напряжение
145

Турбулентный режим течения 143

У

Угловой коэффициент 393

Уравнение Лайона 210

— Лапласа 287, 295

— Навье — Стокса 134

— Нуссельта пленочной конденсации 272,
278

— переноса лучистой энергии 420

— теплового баланса 169 442

— — потока для пограничного слоя 180

— теплопередачи 443

— Томсона 287

— Фика 335

Уравнения подобия 154

— — эмпирические 177

Условия однозначности 21, 136

Ф

Фика закон 329

— уравнение 335

Фурье закон 10

— число 81

— уравнение теплопроводности 17

Х

Химическая кинетика 352

Химические реакции гетерогенные 349

— — — гомогенные 349

— — — константа равновесия 353

— — — скорости 353

— — — скорость 352

— — — теплота 350

— — — — удельная 351

Ц

Центры парообразования 298

Ч

Числа подобия 152

Численный метод решения задач тепло-
проводности 107

Число Архимеда 154

— Био 53 153

— Галлеля 274

— Грасгофа 153

— Кнудсена 138, 260

— Лапласа 289

— Льюиса — Семенова 338, 355

— Маха 249

— Нуссельта 153

— Пекле 153

— Прандтля 155

— Рейнольдса 141 153

— — критические значения 190, 200, 223,
227, 267

— — пленки конденсата 267

— Стантона 197

— фазового перехода 273, 348

— Фурье 81

— Эйлера 155

— Якоба 299

Ш

Шероховатость, влияние на теплоотдачу
220

Э

Эйлера число 155

Эквивалентный диаметр 217

— коэффициент теплопроводности жид-
костной прослойки 241

— — — многослойной стенки 28

Эффект адiabатического торможения
248

— компонента реагирующей смеси 351

— полная восстановления 358

Я

Яркостная температура 377

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5

Часть первая

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Глава первая. Основные положения учения о теплопроводности	7

1-1. Методы изучения физических явлений	7
1-2. Температурное поле	8
1-3. Температурный градиент	9
1-4. Тепловой поток. Закон Фурье	10
1-5. Коэффициент теплопроводности	12
1-6. Дифференциальное уравнение теплопроводности	17
1-7. Условия однозначности для процессов теплопроводности	21

Глава вторая. Теплопроводность при стационарном режиме	24

2-1. Передача теплоты через плоскую стенку ($q_n=0$)	24
2-2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку ($q_n=0$)	33
2-3. Критический диаметр цилиндрической стенки	40
2-4. Передача теплоты через шаровую стенку	42
2-5. Обобщенный метод решения задач теплопроводности в плоской, цилиндрической и шаровой стенках	44
2-6. Пути интенсификации теплопередачи	46
2-7. Теплопроводность в стержне (ребре) постоянного поперечного сечения	48
2-8. Теплопередача через ребристую плоскую стенку	53
2-9. Теплопроводность круглого ребра постоянной толщины	55
2-10. Теплопроводность прямого ребра переменного сечения	57
2-11. Теплопроводность плоской полуграниченной однородной пластины	60
2-12. Пористое охлаждение пластины	62
2-13. Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты	65

Глава третья. Нестационарные процессы теплопроводности	74

3-1. Общие положения	74
3-2. Аналитическое описание процесса	75
3-3. Охлаждение (нагревание) неограниченной пластины	76
3-4. Определение количества теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения	86
3-5. Охлаждение (нагревание) бесконечно длинного цилиндра	88
3-6. Определение количества теплоты, отданного цилиндром в процессе охлаждения	92

3-7. Охлаждение шара	94
3-8. Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров	97
3-9. Зависимость процесса охлаждения (нагревания) от формы и размеров тела	100
3-10. Регулярный режим охлаждения (нагревания) тел	101
3-11. Приближенные методы решения задач теплопроводности	107
3-12. Исследование процессов теплопроводности методом аналогий	117

Часть вторая

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Глава четвертая. Основные положения учения о конвективном теплообмене 125

4-1. Основные понятия и определения	125
4-2. Физические свойства жидкости	127
4-3. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (постановка краевых задач конвективного теплообмена)	130
4-4. Гидродинамический и тепловой пограничные слои	138
4-5. Турбулентный перенос теплоты и количества движения	143

Глава пятая. Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена

5-1. Общие положения	149
5-2. Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных	150
5-3. Безразмерные переменные (числа подобия) и уравнения подобия	152
5-4. Условия подобия физических процессов	157
5-5. Следствия из условий подобия	160
5-6. Метод размерностей	162
5-7. Моделирование процессов конвективного теплообмена	165

Глава шестая. Общие вопросы обработки результатов измерения и расчета конвективной теплоотдачи 168

6-1. Местный коэффициент теплоотдачи	168
6-2. Средняя по сечению потока температура жидкости	169
6-3. Определение теплового потока по балансу энергии жидкости	170
6-4. Измерение плотности теплового потока, температур жидкости и стенки по длине трубы	172
6-5. Осреднение коэффициентов теплоотдачи и температурного напора	175
6-6. Получение эмпирических формул	177

Глава седьмая. Теплоотдача при вынужденном продольном омывании плоской поверхности 179

7-1. Интегральные уравнения пограничного слоя	179
7-2. Теплоотдача при ламинарном пограничном слое	182
7-3. Переход ламинарного течения в турбулентное	190
7-4. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое	192

Глава восьмая. Теплоотдача при вынужденном течении жидкостей в трубах	200
8-1. Особенности движения и теплообмена в трубах	200
8-2. Интегральное уравнение теплоотдачи для стабилизированного теплообмена	207
8-3. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах круглого поперечного сечения	210
8-4. Теплоотдача при течении жидкости в трубах некруглого поперечного сечения, в изогнутых и шероховатых трубах	217
Глава девятая. Теплоотдача при вынужденном поперечном омывании труб и пучков труб	222
9-1. Теплоотдача при поперечном омывании одиночной круглой трубы	222
9-2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб	226
Глава десятая. Теплоотдача при свободном движении жидкости	231
10-1. Основные положения	231
10-2. Теплоотдача при свободном движении жидкости в большом объеме	232
10-3. Теплообмен при свободном движении жидкости в ограниченном пространстве	239
Глава одиннадцатая. Отдельные задачи конвективного теплообмена в однородной среде	242
11-1. Теплоотдача жидких металлов	242
11-2. Теплоотдача при сверхкритическом состоянии вещества	247
11-3. Теплоотдача при течении газа с большой скоростью	248
11-4. Теплоотдача разреженных газов	255

Часть третья

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Глава двенадцатая. Теплообмен при конденсации чистого пара	263
12-1. Основные положения	263
12-2. Теплообмен при пленочной конденсации неподвижного пара	270
12-3. Теплообмен при пленочной конденсации движущегося пара внутри труб	279
12-4. Теплообмен при пленочной конденсации движущегося пара на горизонтальных одиночных трубах и пучках труб	283
12-5. Теплообмен при капельной конденсации пара	285
12-6. Отдельные задачи теплообмена при конденсации пара	292
Глава тринадцатая. Теплообмен при кипении однокомпонентных жидкостей	293
13-1. Механизм процесса теплообмена при пузырьковом кипении жидкости	293
13-2. Структура потока при пузырьковом кипении жидкости в неограниченном объеме	306
13-3. Теплоотдача при пузырьковом кипении жидкости в условиях свободного движения	308
13-4. Структура двухфазного потока и теплообмен при кипении жидкости внутри труб	311
13-5. Расчет теплоотдачи при пузырьковом кипении в условиях вынужденной конвекции в трубах	317
13-6. Механизм теплообмена при пленочном кипении жидкости	317
13-7. Теплоотдача при ламинарном движении паровой пленки	319

13-8. Теплоотдача при турбулентном движении паровой пленки	321
13-9. Кризисы кипения	322

Глава четырнадцатая. Тепло- и массообмен в двухкомпонентных средах 328

14-1. Основные понятия и законы	328
14-2. Дифференциальные уравнения тепло- и массообмена	332
14-3. Тепло- и массоотдача	335
14-4. Тройная аналогия	338
14-5. Диффузионный пограничный слой	339
14-6. Тепло- и массообмен при конденсации пара из парогазовой смеси	341
14-7. Тепло- и массообмен при испарении жидкости в парогазовую среду	344

Глава пятнадцатая. Тепло- и массообмен при химических превращениях 349

15-1. Основные сведения о химических превращениях	349
15-2. Основные уравнения тепло- и массообмена при химических превращениях	353
15-3. Теплообмен между газовой смесью и поверхностью раздела фаз	358

Часть четвертая

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Глава шестнадцатая. Основные законы теплового излучения 361

16-1. Описание процесса	361
16-2. Виды лучистых потоков; вектор излучения	362
16-3. Законы теплового излучения	370

Глава семнадцатая. Теплообмен излучением между твердыми телами, разделенными прозрачной средой 378

17-1. Методы исследования лучистого теплообмена	378
17-2. Теплообмен излучением в системе тел с плоскопараллельными поверхностями	379
17-3. Коэффициент излучения твердых тел и методы его определения	385
17-4. Теплообмен излучением между телом и его оболочкой	388
17-5. Теплообмен излучением между двумя телами, произвольно расположенными в пространстве. Угловые коэффициенты излучения	393
17-6. Геометрические свойства лучистых потоков	396
17-7. Исследование лучистого теплообмена в произвольной замкнутой системе тел алгебраическим методом	397
17-8. Зональный метод исследования лучистого теплообмена	401
17-9. Условия взаимного перехода интегральных и алгебраических уравнений излучения	403
17-10. Интегральный метод исследования лучистого теплообмена	404
17-11. Резольвентный метод исследования лучистого теплообмена	406
17-12. Резольвентно-зональный метод	409
17-13. Теплообмен излучением при наличии отражающих поверхностей	412
17-14. Методы определения угловых коэффициентов излучения	414

Глава восемнадцатая. Теплообмен в поглощающих и излучающих средах	420
18-1. Уравнение переноса лучистой энергии	420
18-2. Оптическая толщина среды и режимы излучения	424
18-3. Интегральные уравнения лучистого теплообмена в системах тел с поглощающей промежуточной средой	425
18-4. Исследование теплообмена излучением в плоскопараллельном слое поглощающей среды дифференциальным методом	426
18-5. Особенности излучения газов и паров	429
18-6. Лучистый теплообмен между газовой средой и оболочкой	433
18-7. Сложный теплообмен	435
18-8. Критерии радиационного подобия	440
 Часть пятая	
ТЕПЛОБМЕННЫЕ АППАРАТЫ	
Глава девятнадцатая. Тепловой расчет теплообменных аппаратов	441
19-1. Классификация теплообменных аппаратов	441
19-2. Основные положения и уравнения теплового расчета	442
19-3. Средняя разность температур и методы ее вычисления	446
19-4. Расчет конечных температур рабочих жидкостей	449
19-5. Методы определения температур поверхности теплообмена	454
19-6. Тепловой расчет регенеративных теплообменных аппаратов	455
Глава двадцатая. Гидродинамический расчет теплообменных аппаратов	459
20-1. Задачи гидромеханического расчета теплообменных аппаратов	459
20-2. Гидравлическое сопротивление элементов теплообменного аппарата	460
20-3. Расчет мощности, необходимой для перемещения жидкости	464
<i>Приложение</i>	<i>465</i>
<i>Список литературы</i>	<i>472</i>
<i>Алфавитный указатель</i>	<i>478</i>

*Виктор Павлович Исаченко
Варвара Александровна Осипова
Александр Семенович Сукомел*

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Редактор *В. И. Кушнырев*
Редактор издательства *Л. Н. Синельникова*
Переплет художника *Е. В. Никитина*
Технический редактор *Л. А. Молодцова*
Корректоры: *И. А. Володяева, М. Г. Гулина*

Сдано в набор 3/III 1975 г.	Подписано к печати 27/VI 1975 г.	Т-09251
Формат 70х100 ^{1/16}		Бумага типографская № 3
Усл. печ. л. 39,65		Уч.-изд. л. 38,38
Тираж 30 000 экз.	Зак. 87	Цена 1 р. 58 к.

Издательство «Энергия», Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.