

Аналитический расчёт изменения температуры ограждающих конструкций при начальном разогреве или охлаждении помещения

Рецензия эксперта на статью получена
15.10.2025 [The expert review of the article
was received on October 15, 2025]

Задача о скорости начального прогрева или охлаждения плоской стенки имеет фундаментальное значение для анализа и прогнозирования нестационарного теплового режима вентилируемых помещений, поскольку тепловой поток через поверхность ограждающих конструкций является одним из существенных элементов общего уравнения теплового баланса объекта. При этом, если рассматривается автоматическое регулирование обслуживающих здание систем обеспечения микроклимата, данную задачу необходимо исследовать для начальных моментов времени, поскольку процессы регулирования по определению должны быть достаточно краткосрочными. То же самое в значительной степени относится и к расчёту аварийных режимов, возникающих при прекращении внешнего теплоснабжения. При этом необходимо учитывать, что в условиях помещения при наличии переменных (в первую очередь скачкообразных) теплоступлений или теплотерь разогрев или охлаждение стенки будут происходить практически при постоянном тепловом потоке на её поверхности.

Однако следует отметить, что, применительно именно к оценке теплового режима зданий, до настоящего времени основное внимание уделялось так называемому «регулярному режиму», когда тепловым возмущением охвачена вся толщина материала конструкции, особенно при перерывах в теплоподаче [1], либо периодическим колебаниям [2] (теория теплоустойчивости). Однако при автоматизации климатических систем основное значение имеет именно скорость распространения температурных волн в массиве ограждений, и здесь требуется несколько иной математический аппарат. В этой области также

существует ряд работ, например [3, 4], где задача рассматривается, тем не менее, с такими же упрощающими допущениями, как для регулярного режима. В последние годы возникают также некоторые публикации, в которых особое внимание обращается на более тщательный учёт граничных условий при численном моделировании исследуемых процессов [5, 6], либо содержащие результаты экспериментальных исследований переходных явлений в ограждающих конструкциях [7], а также посвящённые использованию экономических методов для комплексного изучения условий функционирования оболочки здания [8]. Однако достигаемые при этом результаты сложно назвать доступными для практики проектирования. Рассмотрим, как данный метод реализуется для интересующей нас задачи о начальном разогреве или охлаждении ограждений помещения при скачкообразном изменении теплотерь или теплоступлений. В этом случае дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности Фурье для одномерного варианта будет выглядеть так [2, 9]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (1)$$

здесь x — текущая пространственная координата, соответствующая расстоянию от наружной поверхности стенки до исследуемого сечения, м; t — температура материала стенки в этом сечении в момент времени τ [с] с начала разогрева или охлаждения, К; $a = \lambda / (c\rho)$ — коэффициент температуропроводности материала стенки, м²/с; λ — его теплопроводность, Вт/(м·К); c и ρ — удельная массовая теплоёмкость [Дж/(кг·К)] и плотность [кг/м³], соответственно.

УДК 697.1:699.86. Научная специальность: 2.1.3.

Аналитический расчёт изменения температуры ограждающих конструкций при начальном разогреве или охлаждении помещения

Олег Дмитриевич Самарин, к.т.н., доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)

Рассмотрена задача об определении скорости прогрева или охлаждения плоской стенки при скачкообразном изменении плотности теплового потока через её поверхность. Представлены различные варианты аналитических решений, в том числе вариационным методом Рунца и на основе интегрального теплового баланса прогретой (охлаждённой) зоны, а также численных с помощью конечно-разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения Фурье по явной и неявной схемам. Показано, что все методы дают одинаковую по форме зависимость поверхностной температуры от времени, но с различными числовыми коэффициентами, в некоторых случаях существенно отличающимися от значения, представленного в классических работах Егара, Карслоу и других авторов. Отмечено, что величина коэффициента, соответствующего результатам вычислений по явной конечно-разностной схеме, в наибольшей степени приближаются к экспериментальным данным, полученным при участии автора.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, начальный разогрев, метод Рунца, аппроксимация, конечно-разностная схема.

UDC 697.1:699.86. Scientific specialty number: 2.1.3.

Analytical calculation of temperature changes of enclosing structures during the initial heating or cooling of the room

Oleg D. Samarin, PhD (Engineering), Associate Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU)

The problem of determining the rate of heating or cooling of a flat wall with an abrupt change in the density of the heat flow through its surface is considered. Various variants of analytical solutions are presented, including the Ritz variational method and based on the integral thermal balance of the warmed (cooled) zone, as well as numerical ones using finite-difference approximation of the initial differential Fourier equation using explicit and implicit schemes. It is shown that all methods give the same dependence of surface temperature on time, but with different numerical coefficients, in some cases significantly different from the value presented in the classical works of Jaeger, Carslaw and other authors. It is noted that the value of the coefficient corresponding to the results of calculations using an explicit finite difference scheme is closest to the experimental data obtained with the author's participation.

Key words: temperature, thermal conductivity, initial heating, Ritz method, approximation, the finite difference scheme.

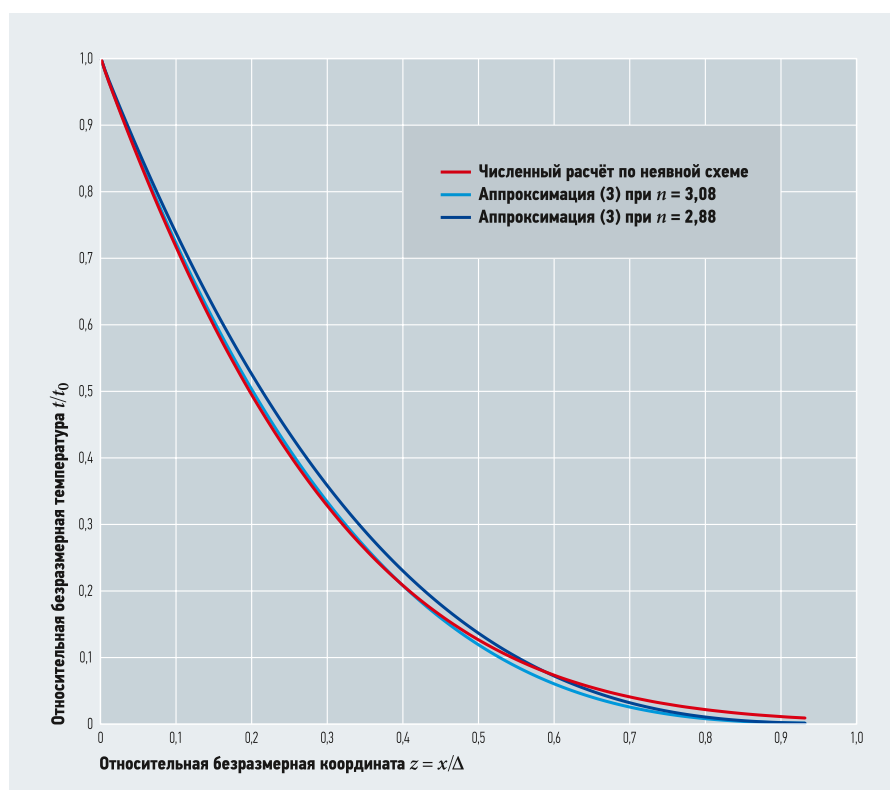


Рис. 1. Безразмерные профили температуры в пределах зоны распространения температурной волны (результаты численного расчёта и аппроксимаций)

Чтобы обозначить необходимое нам постоянно плотность теплового потока через поверхность q [Вт/м²] при $x = 0$, нужно записать граничное условие второго рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{q}{\lambda}. \quad (2)$$

Второе условие, очевидно, формулируется как $t = 0$ при $x \rightarrow \infty$, если для простоты рассматривать избыточную температуру по отношению к начальной.

Существующие решения рассматриваемой задачи, в частности [9], предусматривающие запись уравнения в форме (1) относительно величины q , что позволяет добиться автомодельности по отношению к безразмерному комплексу $x/(2\sqrt{a\tau})$, и последующее вторичное интегрирование после подстановки результата в (2), показывают, что интересующая нас в наибольшей степени температура t_0 на поверхности стенки (при $x = 0$) пропорциональна произведению $\sqrt{\tau}$ на комплекс $q/\sqrt{\lambda c \rho}$.

К данному выводу можно прийти и при использовании метода анализа размерностей, но аналитическое решение даёт и конкретную величину числового коэффициента, который в данном случае оказывается равным $2/\sqrt{\pi} \approx 1,13$.

Однако некоторые экспериментальные данные и результаты численных расчётов, полученные при участии автора [10, 11], свидетельствуют в пользу иного значения коэффициента, приближающегося к $\sqrt{\pi} \approx 1,77$.

Для разрешения данного противоречия можно воспользоваться оценочным подходом, основанным на получении приближённого решения методом Ритца [12]. Варьируем форму профиля температуры в зоне распространения температурной волны при точном выполнении граничных условий на поверхности стенки и на фронте теплового возмущения, считая коэффициент пропорциональности k для глубины его проникновения $\Delta = k\sqrt{a\tau}$ равным $2\sqrt{\pi} \approx 3,55$ в соответствии с фундаментальным решением дифференциального уравнения теплопроводности [9], а также с результатами численных расчётов [11]. В качестве изменяемого параметра будет выступать показатель степени n в полиномиальной аппроксимации температурного профиля. Тогда, если записать такое приближённое выражение для температуры в общем виде, получим:

$$t = t_0(1 - z)^n, \quad (3)$$

где $z = x/\Delta = x/(k\sqrt{a\tau})$ — относительная безразмерная координата.

Для разрешения противоречия относительно величины числового коэффициента можно воспользоваться оценочным подходом, основанным на получении приближённого решения прямым вариационным методом Ритца [12]

Подставляя данную зависимость в условие (2), находим соотношение для t_0 :

$$t_0 = \frac{qk\sqrt{\tau}}{n\sqrt{\lambda c \rho}}, \quad (4)$$

то есть поверхностная температура в любом случае будет пропорциональна $\sqrt{\tau}$, а искомый коэффициент пропорциональности для принятой формы записи решения оказывается равным k/n .

Если теперь учесть, что все остальные параметры, входящие в формулу для t_0 , постоянны и не связаны ни с x , ни с τ , выражение для невязки по методу Ритца можно получить в упрощённом виде, для условной относительной температуры

$$t^* = t \frac{n\sqrt{\lambda c \rho}}{qk} = \frac{t}{t_0} \sqrt{\tau};$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 t^*}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (1 - z)^{n-2} \left\{ \frac{1 - z}{2} \times \right. \quad (5)$$

$$\left. \times \left[1 + z \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right] - \frac{n(n-1)}{k^2} \right\} = \frac{\varphi(z, n)}{\sqrt{\tau}}.$$

Поскольку $\sqrt{\tau}$ не зависит от n , находим минимум интеграла от квадрата невязки $\varphi(z, n)$ в естественных пределах z от 0 до 1. Из-за сложности полученного выражения это проще всего сделать численными методами, и тогда оказывается, что оптимальное значение $n = 2,88$. В то же время общее количество теплоты [Дж/м²], поглощённое единицей площади стенки за время τ , очевидно, будет равно:

$$z = \Delta c \rho t_{cp} \approx \Delta c \rho \frac{t_0}{m}, \quad (6)$$

где m — коэффициент, показывающий, во сколько раз средняя величина температуры в зоне распространения температурной волны меньше, чем t_0 . Нетрудно получить, что при полиномиальной аппроксимации типа (3) $m = n + 1$. Теперь для произвольного k с учётом (4) и выражения для Δ находим:

$$Q = q\tau \frac{k^2}{n(n+1)}. \quad (7)$$

Однако по физическому смыслу данное произведение должно равняться просто $q\tau$. Следовательно, для наилучшего приближения имеем $k^2/[n(n+1)] = 1$, откуда при $k = 2\sqrt{\pi}$ вычисляем:

$$n = 0,5 \times [\sqrt{16\pi + 1} - 1] \approx 3,08,$$

что достаточно близко к данным предыдущего расчёта.

На рис. 1 приведён соответствующий график безразмерной относительной температуры t/t_0 : красной линией изображены результаты численного решения, а голубой линией — профиль температуры при $n = 3,08$. Синяя линия соответствует профилю температуры при $n = 2,88$.

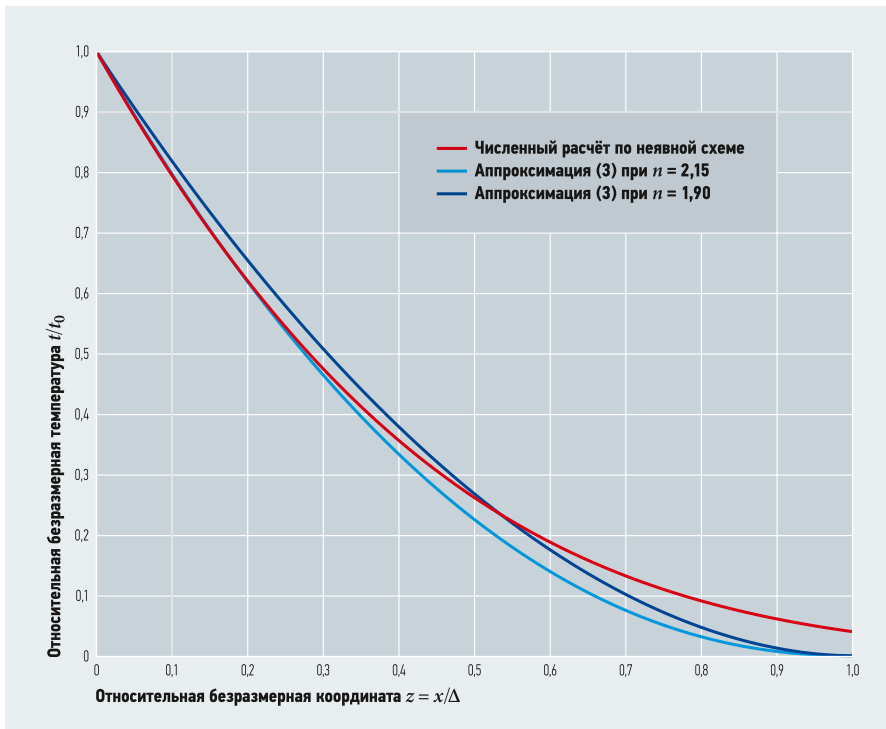


Рис. 2. Безразмерные профили температуры в пределах зоны распространения температурной волны (результаты численного расчёта и аппроксимаций)

Численное решение выполнено с использованием составленной автором программы для ЭВМ на языке Fortran, основанной на конечно-разностной аппроксимации уравнения (1) по чисто неявной схеме [12, 13], для нескольких вариантов теплотехнических свойств материала и толщины стенки, и все полученные графики в пределах толщины линии накладываются друг на друга, поэтому можно считать его достоверным. Отсюда же подтверждаем равенство $k = 2\sqrt{\pi}$, поскольку видно, что вблизи поверхности стенки при $n = 3,08$ совпадение с приближением (3) при использовании данного значения k очень хорошее, то есть граничное условие здесь действительно выполняется точно.

В то же время для $x = \Delta$ величина t , даваемая приближенным выражением, строго равняется нулю, то есть соблюдается и условие на фронте температурной волны, но это следует из самой формы записи (3). При этом числовой коэффициент k/n в формуле для t_0 оказывается равным $2\sqrt{\pi}/3,08 \approx 1,15$, что практически не отличается от величины $2/\sqrt{\pi}$ из решения [9]. В случае $n = 2,88$ мы имеем наименьшее отклонение в среднем по глубине проникновения температурной волны — как, собственно, и должно быть при минимизации невязки в целом по отрезку, а $k/n = 1,23$, однако вблизи $x = 0$ расхождение с численным решением несколько больше.

Тем не менее, при осуществлении аппроксимации (1) по явной схеме с максимально возможным из условия устойчи-

вости шагом по времени, равным $h^2/(2a)$, где h — шаг по пространственной координате [м], что позволяет предельно упростить и ускорить расчёт, результаты получаются несколько иными. В этом случае на каждом следующем, $(j + 1)$ -м временном шаге температура в i -м узле сетки рассчитывается как полусумма значений в обоих соседних узлах в предыдущий, j -й момент времени [12, 13]:

$$t_{i,j+1} = \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j}}{2}. \quad (8)$$

Тогда данные вычислений, выполненных опять-таки при различных сочетаниях характеристик материалов и размеров конструкции, свидетельствуют о том, что при измельчении шага значение k/n стремится к 1,592, что уже приближается к полученному в [10, 11]. На рис. 2 рассчитанный таким способом безразмерный профиль t/t_0 показан красной линией, голубым цветом отмечена его аппроксимация по типу (3) для $n = 2,15$, что отвечает максимальному приближению граничного условия на поверхности, а синяя линия изображает профиль (3) при $n = 1,9$, что означает аппроксимацию в среднем.

Для окончательного разрешения вопроса зависимости коэффициента пропорциональности от метода расчёта следует выполнить дополнительные исследования теоретического и экспериментального характера

Таким образом, вид распределения температуры в прогретой (охлаждённой) зоне и, соответственно, коэффициенты пропорциональности при t_0 оказываются существенно зависящими от применяемого метода расчёта, чего, вообще говоря, быть не должно. Поэтому для окончательного разрешения этого вопроса было бы целесообразно выполнить некоторые дополнительные исследования теоретического и экспериментального характера, в том числе численные и натурные. В этом случае дальнейшие результаты, описанные автором в работе [11], в которой рассматриваемый коэффициент пропорциональности для упрощения записи и введения некоторого запаса на несовпадение величины t_0 и температуры внутреннего воздуха в помещении t_b был принят равным 2,0, получают более полное подтверждение и возможность применения выявленных зависимостей в инженерной практике. •

1. Rafalskaya T. Safety of engineering systems of buildings with limited heat supply. Proc. of VII International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education" (IPICSE 2020). November 11–14, 2020; Tashkent, Uzbekistan. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030.
2. Богословский В.Н. Строительная теплофизика. — СПб.: АВОК Северо-Запад, 2006. 400 с.
3. Sha H., Xu P., Yang Z., Chen Y., Tang J. Overview of computational intelligence for building energy system design. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2019. Vol. 108. Pp. 76–90.
4. Bilous I.Yu., Deshko V.I., Sukhodub I.O. Building energy modeling using hourly infiltration rate. Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 96. Issue 4. Pp. 27–41.
5. Musorina T., Gamayunova O., Petrichenko M., Soloveva E. Boundary layer of the wall temperature field. Conf. paper of VIII International Scientific Siberian Transport Forum (TransSiberia 2019). Springer Nature Switzerland AG. Series: Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 1116. Pp. 429–437.
6. Gamayunova O., Petrichenko M., Mottaeva A. Thermotechnical calculation of enclosing structures of a standard type residential building. Proc. of International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies (December 10–13, 2019; Voronezh, Russia). Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1614.
7. Petrov P.V., Vedruchenko V.R., Rezanov E.V., Kadtin I.I., Kulagin V.A. Experimental study of the effective insulation of building envelopes. Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies. Series: Theoretical and Applied Heating Engineering. 2022. Vol. 15. Issue 3. Pp. 356–367.
8. Avsyukevich D.A., Shishkin E.V., Litvinova N.B., Mirogorodskiy A.N. Thermoeconomic model of a building's thermal protection envelope and heating system. Magazine of Civil Engineering. 2022. Vol. 113. Issue 5.
9. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford University Press. Oxford, UK. 1986. 520 p.
10. Самарин О.Д., Петренко А.Д., Коваленко С.В. Экспериментальная проверка теоретического моделирования начального разогрева помещения // Журнал СОК. 2024. №2. С. 52–54.
11. Самарин О.Д., Ключко А.К. Численные и приближенные методы в задачах строительной теплофизики и климатологии. — М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2021. 96 с.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры изд-ва «Наука», 1978. 512 с.
13. Мак-Кракен Д.Д., Дорн У.С. Численные методы и программирование на Фортране / Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. 583 с.

References — see page 128.

Analytical calculation of temperature changes of enclosing structures during the initial heating or cooling of the room. Pp. 32–34.

Oleg D. Samarin, PhD (Engineering), Associate Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU)

1. T. Rafalskaya. Safety of engineering systems of buildings with limited heat supply. Proc. of VII International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education" (IPICSE 2020; November 11–14, 2020; Tashkent, Uzbekistan). IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. No. 012049.
2. V.N. Bogoslovsky. *Stroitel'naya teplofizika* [Construction thermophysics]. St. Petersburg. AVOK Severo-Zapad [Publishing House of the Russian Association of Engineers for Heating, Ventilation, Air-Conditioning, Heat Supply and Building Thermal Physics of the north-west part of Russia ("ABOK North-West")]. 2006. 400 p. [In Russian]
3. H. Sha, P. Xu, Z. Yang, Y. Chen, J. Tang. Overview of computational intelligence for building energy system design. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2019. Vol. 108. Pp. 76–90.
4. I.Yu. Bilous, V.I. Deshko, I.O. Sukhodub. Building energy modeling using hourly infiltration rate. Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 96. Issue 4. Pp. 27–41.
5. T. Musorina, O. Gamayunova, M. Petrichenko, E. Soloveva. Boundary layer of the wall temperature field. Conf. paper of VIII International Scientific Siberian Transport Forum (TransSiberia 2019). Series: Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 1116. Pp. 429–437.
6. O. Gamayunova, M. Petrichenko, A. Mottaeva. Thermotechnical calculation of enclosing structures of a standard type residential building. Proc. of International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies (December 10–13, 2019; Voronezh, Russia). Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1614. No. 012066.
7. P.V. Petrov, V.R. Vedruchenko, E.V. Rezanov, I.I. Kadtsin, V.A. Kulagin. Experimental study of the effective insulation of building envelopes. Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies. Series: Theoretical and Applied Heating Engineering. 2022. Vol. 15. Issue 3. Pp. 356–367.
8. D.A. Avsyukevich, E.V. Shishkin, N.B. Litvinova, A.N. Mirgorodskiy. Thermoeconomic model of a building's thermal protection envelope and heating system. Magazine of Civil Engineering. 2022. Vol. 113. Issue 5. No. 11302.
9. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. Conduction of heat in solids. Oxford University Press. Oxford, UK. 1986. 520 p.
10. O.D. Samarin, A.D. Petrenko, S.V. Kovalenko. *Jeksperimental'naja proverka teoreticheskogo modelirovaniya nachal'nogo razogreva pomeschenija* [Experimental verification of theoretical modeling of the initial heating of the room]. *Zhurnal Santechnika, Otoplenie, Konditsionirovanie (SOK)* [Journal of Plumbing, Heating, Ventilation]. 2024. No. 2. Pp. 52–54. [In Russian]
11. O.D. Samarin, A.K. Klochko. *Chislennye i priblizhennye metody v zadachakh stroitel'noj teplofiziki i klimatologii* [Numerical and approximate methods in problems of construction thermal physics and climatology]. Moscow. Izd-vo MISI-MGSU [Publishing House of the National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU)]. 2021. 96 p. [In Russian]
12. N.N. Kalitkin. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow. Glav. red. fiz.-mat. lit-ry izd-va "Nauka" [Main Editorial Office of the Physics and Mathematics Literature of the "The Science" Publishing House of the USSR]. 1978. 513 p. [In Russian]
13. D.D. McCracken, W.S. Dorn. *Chislennye metody i programmirovaniye na Fortrane* [Numerical methods and Fortran programming with application in engineering and science]. Moscow. Mir ["The World" Publishers]. 1977. 583 p. [In Russian]